



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

Matheus Lopes Silva

**Modelagem numérica de um cabo adaptada à simulação de um
par de aviões conectados**

Uberlândia

2024

Matheus Lopes Silva

**Modelagem numérica de um cabo adaptada à simulação de um par de aviões
conectados**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Aero-náutica.

Orientador Prof. Dr. Tobias Souza Morais

Uberlândia

2024

Matheus Lopes Silva

Modelagem numérica de um cabo adaptada à simulação de um par de aviões conectados

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de “Bacharel em Engenharia Aeronáutica” e aprovado em sua forma final pelo Curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica.

Uberlândia, Abril 24, 2024.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Tobias Souza Morais
Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. Giuliano Gardolinski Venson
Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. Higor Luis Silva
Universidade Federal de Uberlândia

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Universidade Federal de Uberlândia por me conceder a oportunidade de realizar meus estudos com elevado nível técnico na área que tanto sonhei. Ainda, agradeço pela oportunidade que foi me dada de participar do programa de duplo diploma junto à ISAE-SUPAERO, o que me permitiu inimaginável crescimento pessoal e profissional.

Em seguida, agradeço aos orientadores que possibilitaram o desenvolvimento deste trabalho. Primeiramente, ao professor Tobias Souza Morais que me propôs o desafio de completar e melhorar o trabalho desenvolvido previamente durante meu estágio na ISAE-SUPAERO. O complemento deste trabalho foi extremamente enriquecedor, com grandes desafios técnicos que foram gratificantes de serem solucionados. Ademais, também gostaria de agradecer aos meus supervisores da ISAE-SUPAERO, Eric Poquillon e Joel Bordeneuve-Guibe, que me orientaram durante meu estágio de pesquisa e me guiaram durante a primeira parte deste trabalho.

Além disso, gostaria de agradecer minha família, em especial meus pais, Alcebiades e Diana, por todo suporte financeiro e emocional durante minha vida, principalmente durante estes anos de graduação. Eles foram essenciais para que eu pudesse sempre sonhar alto e alçar voos cada vez mais distantes.

Finalmente, quero agradecer à todos amigos que fiz durante minha jornada na UFU e na ISAE-SUPAERO. Todos os momentos juntos de descontração, desabafos e estudos foram extremamente importantes para tornar essa experiência mais leve e divertida. Em especial, gostaria de agradecer à Ana Teresa, que nos últimos anos tornou meus dias mais alegres e me deu suporte nos momentos mais difíceis.

“Once you have tasted flight, you will forever walk the earth with your eyes turned skyward, for there you have been, and there you will always long to return.”

John Hermes Secondari

RESUMO

A modelagem dinâmica de um par de aviões conectados permite o estudo do comportamento dos aviões em diferentes contextos de voo e possibilitando, assim, a avaliação de condições seguras de operação para casos como reabastecimento aéreo ou rebocamento para planadores. Ainda, o modelo pode igualmente ser utilizado para o projeto de leis de controle para ambos aviões que aumentam a segurança da operação. Considerando isto, este trabalho propõe o estudo e desenvolvimento de um modelo dinâmico numérico envolvendo os aviões conectados por cabo. Então, iniciou-se pela realização de uma revisão bibliográfica sobre os diferentes tipos instabilidades que podem ocorrer no cabo, afim de tentá-las identificar em simulação e evitar envelopes perigosos de voo. Em seguida, foi realizada a pesquisa, implementação e adaptação de modelos dinâmico-estruturais numéricos que podem ser utilizados para modelar o cabo em um contexto de aviões conectados. Três modelos foram estudados e implementados. O primeiro é baseado no *Lumped Parameter Method*, o segundo baseado em Método dos Elementos Finitos utilizando elementos de barra e, por fim, o último sendo Método dos Elementos Finitos com a utilização de um elemento de viga não linear. As simulações mostraram que o primeiro método não era adaptável ao problema, enquanto os dois últimos foram facilmente implementados e testados. Uma comparação entre os dois modelos foi realizada, a fim de determinar qual era mais apropriado em diferentes contextos. Os resultados demonstraram que o MEF com elementos de barra apresentou comportamento estático idêntico ao elemento de viga, mas, dinamicamente, foram encontradas diferenças consideráveis entre os dois tipos de elemento, no qual o elemento de viga foi considerado fisicamente mais representativo. Por fim, utilizando-se ambos tipos de elemento propostos, buscou-se verificar o critério de estabilidade encontrado, em que uma perturbação seria amplificada caso se propagasse pelo cabo no sentido da direção do vento. Concluiu-se que, para os dois casos, o critério de estabilidade foi verificado, mas com comportamentos distintos entre os tipos de elemento.

Palavras chave: Par de aviões conectados; Simulação; Método dos Elementos Finitos.

ABSTRACT

The dynamic modeling of a pair of aircraft connected by a cable allows the aircraft's behavior to be studied in different flight conditions, enabling the assessment of safe operating conditions for cases such as aerial refueling or glider towing. In addition, this model could also be used to design flight control laws for both aircraft involved, in order to enhance the operation's safety. In light of that, this work proposes the study and development of a dynamic numerical model involving the two aircraft connected by cable. Hence, we started from a literature review on a series of instabilities that could occur in the cable, so as to attempt to verify them in the simulation and avoid dangerous flight envelopes. Then, the research, implementation, and adaptation of structural-dynamics numerical models, which could be used for modeling a pair of tethered airplanes, were performed. Three of them have been studied and implemented. The first is based on the Lumped Parameter Method, the second is based on the Finite Element Method using a member element and the last is a Finite Element Method using a non-linear beam element. The simulations have shown that the first method was not suitable for the proposed problem, whereas the latter two were easily implemented and tested. In addition, a comparison was made between the last two to determine which one was the most suitable for different contexts. The results have shown that the behavior of the Finite Element Method using bar elements was statically identical to that using beam elements. However, dynamically, the methods have presented considerable differences, in which the beam element has been deemed to be more physically consistent. Finally, using both types of element, we sought to verify the stability criterion found, according to which a disturbance would be amplified if it traveled downwind. It was concluded that, for both cases, the stability criterion was verified, but with different behaviors between the element types.

Keywords: Pair of tethered aircraft; Simulation; Finite Element Method

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Missão de reabastecimento aéreo FAB.	16
Figura 2 – Missão de reabastecimento aéreo RAF.	16
Figura 3 – Planador sendo rebocado.	16
Figura 4 – Perfil aerodinâmico alterado pela formação de gelo.	19
Figura 5 – Sistema de coordenadas adotado para o LPM.	23
Figura 6 – Sistema de referências adotado para MEF utilizando elemento de barra.	26
Figura 7 – Representação referencial móvel.	30
Figura 8 – Sistemas de coordenadas local para corpo flexível.	32
Figura 9 – Referencial adotado para inclusão do segundo avião.	42
Figura 10 – Decomposição das velocidades no cabo.	48
Figura 11 – Coeficiente de fricção em função do número de Reynolds.	50
Figura 12 – Coeficiente de arrasto normal em função do número de Reynolds.	51
Figura 13 – Comparação entre os métodos de Runge-Kutta.	53
Figura 14 – Comparação dos métodos de Runge-Kutta face a uma perturbação - Parte 1.	54
Figura 15 – Comparação dos métodos de Runge-Kutta face a uma perturbação - Parte 2.	55
Figura 16 – Fluxograma do método de solução numérica <i>Modified Newmark</i>	57
Figura 17 – Verificação estática do modelo de viga não linear.	58
Figura 18 – Resultado de referência para verificação estática da viga não linear.	58
Figura 19 – Verificação dinâmica do modelo de viga não linear.	59
Figura 20 – Resultado de referência para verificação dinâmica da viga não linear.	59
Figura 21 – Verificação dos parâmetros relacionados a <i>dutch-roll</i> na segunda aeronave.	60
Figura 22 – Verificação dos parâmetros relacionados a <i>short period</i> na segunda ae- ronave.	61
Figura 23 – Verificação dos parâmetros relacionados a rolagem e espiral na segunda aeronave.	61
Figura 24 – Simulação condição estável do cabo - Parte 1.	63
Figura 25 – Simulação condição estável do cabo - Parte 2.	63
Figura 26 – Simulação condição estável do cabo - Parte 3.	64
Figura 27 – Simulação condição instável do cabo - Parte 1.	65
Figura 28 – Simulação condição instável do cabo - Parte 2.	65
Figura 29 – Simulação condição instável do cabo - Parte 3.	66
Figura 30 – Posição inicial dos aviões para estudo de caso utilizando elemento de barra.	68
Figura 31 – Evolução dos estados dos aviões utilizando elemento de barra.	69

Figura 32 – Posição inicial dos aviões para estudo de caso utilizando elemento de viga.	71
Figura 33 – Resultados dos aviões conectados utilizando elemento de viga - Caso 1.	72
Figura 34 – Movimento dos aviões - Caso 2, Parte 1.	72
Figura 35 – Movimento dos aviões - Caso 2, Parte 2.	73
Figura 36 – Evolução dos estados dos aviões utilizando elemento de viga - Caso 2. .	73
Figura 37 – Movimento dos aviões - Caso 3, Parte 1.	74
Figura 38 – Movimento dos aviões - Caso 3, Parte 2.	74
Figura 39 – Posição relativa dos aviões para os casos 2 e 3.	75
Figura 40 – Evolução dos estados dos aviões utilizando elemento de viga - Caso 3. .	75

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Análise comparativa entre os diferentes modelos matemáticos para modelagem do cabo.	20
Tabela 2 – Dados viga de verificação.	57
Tabela 3 – Propriedades físicas do cabo.	62
Tabela 4 – Parâmetros de solução.	62
Tabela 5 – Características da aeronaves.	67
Tabela 6 – Propriedades do cabo, do ar e parâmetros de simulação - Elemento de barra.	68
Tabela 7 – Propriedades do cabo, do ar e parâmetros de simulação - Elemento de viga.	70

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CG	Centro de Gravidade
EdM	Equações do Movimento
LPM	Lumped parameter method
MEF	Método dos Elementos Finitos
RK4	Runge-Kutta de 4 ^a ordem
RKGL	Runge-Kutta Gauss-Legendre de 4 ^a ordem

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área transversal do cabo
\mathbf{a}_k	Vetor aceleração do ponto K
\mathbf{B}_0	Matriz de deformação no sistema de coordenadas local
\mathbf{C}^{Bc}	Matriz de rotação do referencial c para o referencial B
\mathbf{C}^{Bw}	Matriz de rotação do referencial w para o referencial B
\mathbf{C}^{cw}	Matriz de rotação do referencial w para o referencial c
C_{CR}	Matriz de amortecimento de corpo rígido
C_D	Coefficiente de arrasto
C_d	Coefficiente de arrasto de normal do cabo
C_f	Coefficiente de arrasto de fricção do cabo
\mathbf{C}^{GB}	Matriz de transformação do referencial B para G
C_L	Coefficiente de sustentação
C_l	Coefficiente de momento de rolagem
C_m	Coefficiente de momento de arfagem
C_n	Coefficiente de momento de guinada
\mathbf{c}_x	Vetor de base x definindo o referencial c
\mathbf{c}_y	Vetor de base y definindo o referencial c
\mathbf{c}_z	Vetor de base z definindo o referencial c
D	Diâmetro do cabo
\mathbf{D}^{cw}	Vetor de transformação de h para h_c
E	Módulo de Elasticidade
E_{cin}	Energia Cinemática
F_{prop}	Força propulsiva do avião
f	Frequência
\mathbf{f}_d	Vetor de força de arrasto no cabo
\mathbf{f}_{extB}	Força externa aplicada ao referencial B
\mathbf{f}_k	Vetor de força nodal generalizada
\mathbf{f}_p	Vetor de força dos aviões atuando nas pontas do cabo
\mathbf{f}_W	Vetor de força peso do cabo
g	Constante gravitacional
\mathbf{H}_B	Quantidade de movimento angular do referencial B - primeiro avião
\mathbf{h}	Vetor posição nodal
\mathbf{h}_c	Vetor posição do referencial c
\mathbf{I}_B	Tensor de inercia associado ao referencial B - primeiro avião)
\mathbf{J}_{hb}	Jacobiano de transformação do movimento do referencial B para posições e rotações nodais.

$\mathbf{J}_{h\varepsilon}$	Jacobiano de transformação das deformações do elemento para posições e rotações nodais.
$\mathbf{J}_{\theta b}$	Jacobiano relacionando o movimento do referencial B à rotação nodal
$\mathbf{J}_{\theta\varepsilon}$	Jacobiano relacionando as deformações do elemento à rotação nodal
L_e	Comprimento deformado do elemento
L_{e0}	Comprimento deformado do elemento
l	Comprimento de referência
l_k	Tamanho (comprimento) do elemento K
\mathbf{M}	Matriz de massa
M_{CR}	Matriz de massa de corpo rígido
\mathbf{M}_{p1}	Matriz de massa adicional no cabo correspondendo ao primeiro avião
\mathbf{M}_{p2}	Matriz de massa adicional no cabo correspondendo ao segundo avião
m_B	Massa total associada ao referencial B - primeiro avião)
\mathbf{m}_{extB}	Momento externo aplicado ao referencial B
m_K	Massa no ponto K
m_{p1}	Massa do primeiro avião
m_{p2}	Massa do segundo avião
\mathbf{N}	Matriz de forma
\mathbf{n}_K	Vetor unitário apontando do ponto K para $K - 1$
p	Velocidade de rolagem
\mathbf{p}_B	Vetor posição do referencial B
\mathbf{p}_K	Vetor de posição relativa do ponto K em relação a $K - 1$
$\mathbf{p}_{K,\theta_{K_i}}$	Derivada de \vec{p}_K em relação a θ_{K_i}
\mathbf{Q}	Matriz de transformação
\mathbf{Q}_B	Quantidade de movimento linear do referencial B - primeiro avião
q	Velocidade de arfagem
\mathbf{q}_K	Força resultante externa atuando no ponto K
r	Velocidade de guinada
\mathbf{r}_B	Esforços externos resultantes atuando sobre o corpo rígido
\mathbf{r}_F	Esforços externos resultantes atuando sobre o corpo flexível
\mathbf{r}_K	Vetor de posição do ponto K
S	Área de referência
T	Força axial atuante no cabo
\mathbf{t}_K	Tensão no elemento K
V_{red}	Velocidade relativa reduzida
V_{wave}	Velocidade de propagação da onda no cabo
V_{wind}	Velocidade relativa do vento
\mathbf{v}_B	Vetor velocidade do referencial B
\mathbf{v}_k	Vetor velocidade do ponto K

\mathbf{w}_1	Vetor unitário do eixo X_w
\mathbf{w}_2	Vetor unitário do eixo Y_w
\mathbf{w}_3	Vetor unitário do eixo Z_w
\mathbf{w}_x	Vetor x compoendo a base do referencial local para corpos elásticos
\mathbf{w}_y	Vetor y compoendo a base do referencial local para corpos elásticos
\mathbf{w}_z	Vetor z compoendo a base do referencial local para corpos elásticos
\mathbf{x}	Vetor posição global
\mathbf{x}_e	Vetor posição elementar
α	Ângulo de ataque
$\boldsymbol{\alpha}_W$	Vetor aceleração angular do referencial W
δl	Deflexão de aileron
δm	Deflexão de profundor
δn	Deflexão de leme
ε	Deformação
ε_x	Deformação axial
$\boldsymbol{\theta}_B$	Vetor rotação do referencial B
θ_{K1}	Ângulo relativo ao plano $O_w X_w Y_w$
θ_{K2}	Ângulo relativo ao plano $O_w X_w Z_w$
κ_x	Torção da linha de referência da viga
κ_y	Flexão em relação ao eixo w_y
κ_z	Flexão em relação ao eixo w_z
λ	Amortecimento estrutural
μ	Densidade linear do cabo
ν	Viscosidade cinemática do ar
ρ	Densidade volumétrica do cabo
ρ_{air}	Densidade volumétrica do ar
$\boldsymbol{\omega}_B$	Velocidade angular associada ao referencial B
$\boldsymbol{\omega}_W$	Vetor velocidade angular do referencial W
$(\dot{\quad})$	Derivada em relação ao tempo
$(\ddot{\quad})$	Derivada segunda em relação ao tempo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	18
2.1	ESTABILIDADE DO CABO	18
2.2	MODELOS MATEMÁTICOS	20
2.2.1	MEF utilizando um elemento de viga não-linear	20
2.2.2	MEF com elemento de barra tri-dimensional	21
2.2.3	LPM (Lumped parameter method)	22
3	MODELAGEM MATEMÁTICA	23
3.1	LPM (Lumped parameter method)	23
3.2	MEF COM ELEMENTO DE BARRA	26
3.3	MEF COM ELEMENTO DE VIGA NÃO-LINEAR	30
3.3.1	Trabalho virtual corpo rígido	30
3.3.2	Trabalho virtual corpo flexível	32
3.3.3	Relação cinemática	36
3.3.4	Matrizes de massa, rigidez e amortecimento elementares	38
3.3.5	Inclusão de esforços externos	38
3.3.5.1	<i>Força peso</i>	39
3.3.5.2	<i>Força pontual</i>	40
3.3.5.3	<i>Momento pontual</i>	40
3.3.6	Equações Globais do Movimento	41
3.3.7	Inclusão do segundo avião	41
3.3.7.1	<i>Adição dos efeitos inerciais</i>	42
3.3.7.2	<i>Adição dos esforços da aeronave</i>	44
3.3.7.3	<i>Reconstrução velocidades lineares e angulares</i>	45
3.3.7.4	<i>Recuperação dos ângulos de Euler da segunda aeronave</i>	46
3.3.8	Propagação do movimento do referencial B	47
3.4	MODELO AERODINÂMICO DO CABO	48
4	RESOLUÇÃO NUMÉRICA E VERIFICAÇÃO	52
4.1	RESOLUÇÃO MEF COM ELEMENTO DE BARRA	52
4.2	RESOLUÇÃO MEF COM ELEMENTO DE VIGA NÃO-LINEAR	55
4.2.1	Implementação	55
4.2.2	Verificação	57
5	RESULTADOS	62
5.1	VERIFICAÇÃO DO CRITÉRIO DE PHILIPS E COMPARAÇÃO DOS MODELOS	62
5.2	MODELO INTEGRADO CABO E AVIÕES	67
5.2.1	Elemento de barra	67

5.2.2	Elemento de viga	70
6	CONCLUSÕES	77
	REFERÊNCIAS	78

1 INTRODUÇÃO

O estudo, modelagem e simulação de um par de aviões conectados tem crescido interesse por seus importantes campos de aplicação. Na indústria militar, por exemplo, pares de aviões conectados são extensivamente vistos em reabastecimento aéreo, como ilustrado nas Figuras 1 e 2, buscando aumentar a autonomia de suas aeronaves sem a necessidade de pouso. Além disso, na aviação civil, planadores não motorizados são comumente rebocados por outros aviões, a fim de decolar e ganhar altitude, como mostrado na Figura 3, para prosseguir voo. Portanto, prevenir falhas críticas no sistema de rebocamento ou reabastecimento possui um grande papel para garantir a segurança em todas as condições de voo. Para isso, modelar o comportamento do cabo conectando as duas aeronaves, junto aos aviões propriamente ditos, e tentar prever suas instabilidades e seu comportamento é extremamente útil para o projeto leis de controle modernas de modo a evitar perigos envelopes de voo.

Figura 1 – Missão de reabastecimento aéreo FAB. Figura 2 – Missão de reabastecimento aéreo RAF.



Fonte: Força Aérea Brasileira (2023).



Fonte: Royal Air Force (2023).

Figura 3 – Planador sendo rebocado.



Fonte: Science Learning Hub (2011).

Estabelecer, resolver e simular equações do movimento para todo o sistema, incluindo o cabo e as aeronaves, são tarefas com certo grau de complexidade, dado que isto envolve a resolução de equações parciais ordinárias acopladas Cochran *et al.* (1992). Trabalhos precedentes focaram na resolução numérica deste problema e utilizaram majoritariamente o critério proposto por Phillips (1949) para prever instabilidades espaciais no cabo, ou seja, aquelas que amplificarão as perturbações inseridas. No entanto, um estudo mais geral e detalhado sobre instabilidades, como as instabilidades auto-excitantes, é de grande utilidade para estabelecer um envelope de voo seguro.

Desta maneira, o presente trabalho propõe o desenvolvimento de um modelo dinâmico para estudo do comportamento de um par de aviões conectados. Para isso, iniciou-se pelo estudo de diferentes tipos de instabilidades, objetivando identificar aquelas auto-excitantes, através da revisão bibliográfica de trabalhos em diferentes campos do conhecimento, tal como engenharia civil, para definir se elas podem ocorrer em um par de aviões conectados. Em seguida, o trabalho foca na pesquisa, implementação, simulação e comparação de diversos modelos de cabo que são adaptados à simulação de um par de aviões conectados.

Diante do exposto, o trabalho é apresentado da seguinte maneira:

- Capítulo 2: Neste é realizada uma revisão bibliográfica sobre os diferentes tipos de instabilidade encontrados em cabos em diversos campos do conhecimento. Em seguida, é apresentado e discutido quatro modelos diferentes que podem ser usados na modelagem numérica dos cabos.
- Capítulo 3: São matematicamente apresentados os três diferentes modelos de cabos que foram implementados no decorrer do trabalho. Ainda, suas vantagens e limitações são discutidas. Além disso, ainda são apresentadas as equações do movimento relacionadas ao avião e mostrado como elas são integradas ao modelo matemático do cabo.
- Capítulo 4: Focado na apresentação da resolução numérica dos modelos matemáticos previamente apresentados. Comparações entre diferentes soluções são apresentadas e discutidas. Além disso, algumas validações do modelo implementado são mostradas.
- Capítulo 5: Apresentação dos resultados obtidos e comparação entre os dois principais modelos matemáticos selecionados no trabalho.
- Capítulo 6: Conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 ESTABILIDADE DO CABO

A primeira parte deste estudo consistiu na identificação de diferentes tipos de instabilidade que podem ocorrer em um cabo, por meio de uma pesquisa bibliográfica. Neste contexto, o primeiro critério que será discutido, e o mais comumente usado para veículos conectados, foi proposto por Phillips (1949), o qual concluiu que se a velocidade do escoamento for maior que a velocidade de propagação da onda, as perturbações que se deslocam no sentido do vento relativo serão amplificadas. Caso contrário, estas serão amortecidas caso a velocidade de propagação da onda for maior ou a perturbação se desloque no sentido contra o vento Phillips (1949). Para isso, a velocidade de propagação de uma onda pode ser calculada por meio da Equação (1).

$$V_{wave} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad (1)$$

em que V_{wave} é a velocidade de propagação da onda em m/s, T é a força axial atuante no cabo, expressa em Newtons, e μ é a densidade linear do cabo, dada em kg/m. Este critério é uma ferramenta poderosa que pode, por meio de uma simples relação matemática, prever se uma perturbação será ou não amplificada, além de ser facilmente verificado em simulações. Entretanto, esse critério não consegue prever instabilidades auto-excitantes, que podem ser críticas.

Além disso, Z.H. Zhu e S.A. Meguid (2007a) realizaram uma análise espectral modal usando MEF (Método dos Elementos Finitos) para estudar a dinâmica do cabo em profundidade e, conseqüentemente, suas instabilidades. No entanto, os autores concluíram que esta análise não era apropriada, dado que o principal mecanismo de instabilidade associado às perturbações foi aquele descrito por Phillips (1949) e não a ressonância do cabo. Logo, como nenhuma instabilidade auto-excitante foi identificada nesta área, isso motivou a pesquisa de outros mecanismos que poderiam levar à instabilidade em outros campos da engenharia.

Desta maneira, o primeiro fenômeno encontrado é chamado de *galloping*, uma instabilidade aerodinamicamente induzida em baixa frequência e grande amplitude, causada principalmente por um forte gradiente de sustentação negativo por ângulo de ataque. Conseqüentemente, a energia vinda do escoamento amplifica o movimento do cabo, levando à instabilidade Fujino, Kimura e Tanaka (2012). Este fenômeno pode ser previsto pelo critério de Den Hartog Hartog (1956), no qual

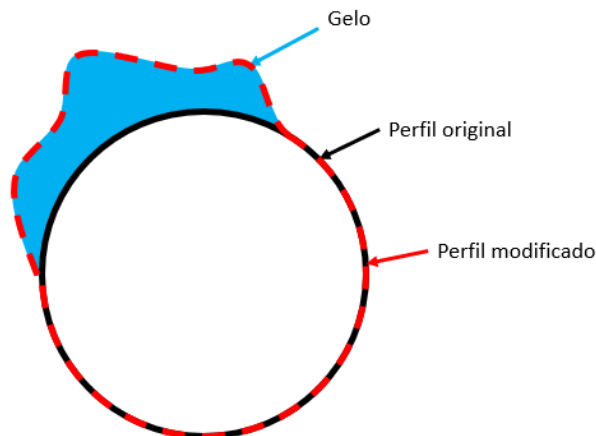
$$\frac{dC_L}{d\alpha} + C_D < 0, \quad (2)$$

em que C_L é o coeficiente de sustentação da seção transversal do cabo, α o ângulo de ataque e C_D o coeficiente de arrasto. Portanto, a partir deste equação, é possível concluir

que para perfis simétricos, ou seja, $dC_L/d\alpha = 0$, não há chance de ocorrência de *galloping*.

Segundo Jeff Wang (2008) e Chabart e Lilien (1998), formação de gelo é uma das principais razões para aparição de *galloping* em linhas de energia, dado que isto muda o perfil aerodinâmico para um assimétrico, Figura 4 e, portanto, estas podem se tornar propensas ao *galloping* caso o perfil possua um gradiente $dC_L/d\alpha$ negativo.

Figura 4 – Perfil aerodinâmico alterado pela formação de gelo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

No entanto, Cheng *et al.* (2008) também reportaram a aparição de *galloping* em cabos secos (sem formação de gelo) e seção circular em testes em túnel de vento. O artigo apresenta uma extensa série de ensaios estáticos e dinâmicos em diferentes configurações de cabo, onde a instabilidade tipo *galloping* foi encontrada. Todavia, esse fenômeno apenas foi observado em um ambiente controlado de laboratório e era extremamente sensível às condições ambientais, em que uma pequena mudança como dia de ensaio ensolarado ou chuvoso poderia alterar sua ocorrência. Ainda, usando os dados de pressão obtidos a partir dos testes estáticos, o artigo pôde estimar os coeficientes de arrasto e de sustentação para cada configuração testada. Esses coeficientes foram utilizados pelo artigo complementar Cheng, Irwin e Tanaka (2008), o qual foca na explicação dos mecanismos físicos de ocorrência da instabilidade. Com isso, um gradiente de sustentação negativo por ângulo de guinada foi encontrado e, utilizando um critério de Den Hartog modificado proposto pelo autor, a aparência *galloping* pôde ser explicada para este caso.

Além disso, Matsumoto *et al.* (2001) estudaram e detalharam um diferente tipo de instabilidade, que também é auto-excitante, mas que não leva a um movimento divergente como *galloping*. Este fenômeno foi observado devido à interação de vórtices em um cabo inclinado exposto ao escoamento em alta velocidade. Assim, essa instabilidade foi reportada para velocidades reduzidas do vento, Equação (3), de 20, 40, 60 e 80 e é causado pela interação de vórtices de Karman e vórtices axiais, no qual o segundo amplifica o primeiro.

$$V_{red} = \frac{V_{wind}}{fD}, \quad (3)$$

onde V_{red} é a velocidade reduzida do vento expressa adimensionalmente, V_{wind} a velocidade relativa do vento, em m/s, f a frequência, em Hz, e D o diâmetro do cabo, em m.

No entanto, Matsumoto *et al.* (2001) concluíram que mais estudos são necessários para tornar claro estes mecanismos, dado que eles são muito sensíveis às condições experimentais. Ademais, a vibração limitada em amplitude apresentada nos resultados obtidos por Cheng, Irwin e Tanaka (2008), os quais poderiam ser explicados por esse fenômeno, mostraram máxima amplitude de apenas $1D$.

Considerando todos os fenômenos apresentados, considerou-se que nenhum desses apresenta impacto significativo ao estudo de aviões conectados por um cabo. Portanto, apenas a instabilidade proposta por Phillips (1949) será relevante e levada a diante neste trabalho.

2.2 MODELOS MATEMÁTICOS

Após o estudo bibliográfico sobre as instabilidades no cabo, decidiu-se focar no estudo da modelagem numérica deste, a fim de simular e verificar o critério de estabilidade proposto por Phillips (1949), mas também implementar um modelo numérico que é adaptado a um par de aviões conectados e que podem ser usados futuramente na identificação dinâmica do cabo para diferentes condições de voo. Essa seção tem a intenção de realizar uma breve revisão bibliográfica sobre esses diferentes modelos que foram encontrados, além de elencar seus prós e contras. Ainda, a Tabela 1 apresenta uma síntese comparativa entre os modelos que são discutidos.

Tabela 1 – Análise comparativa entre os diferentes modelos matemáticos para modelagem do cabo.

Parâmetro de comparação	Elemento de viga	Elemento de barra	Lumped Parameter Method
Desenvolvimento matemático	+++	++	+
Custo computacional	+++	++	+
Acuracidade	+++	++	+
Extensibilidade	Sim	Sim	Não
Continuidade de curvatura e inclinação	Sim	Não	Não
Esforços de flexão	Sim	Não	Não
Verificação do critério de Phillips	Sim	Sim	Sim

Fonte: Elaborado pelo autor.

2.2.1 MEF utilizando um elemento de viga não-linear

Duas formulações diferentes foram encontradas e estudadas usando os princípios de uma viga tri-dimensional não-linear com três nós. A primeira foi proposta por Z.H. Zhu e S.A. Meguid (2007a), utilizada em sua análise modal espectral, e melhor detalhada em Z.H. Zhu e S.A. Meguid (2006), Z. H. Zhu e S. A. Meguid (2006) e Z.H. Zhu e S.A.

Meguid (2007b). Essa modelagem consiste numa formulação de MEF não linear e que foi utilizada pelos próprios autores aplicado ao caso de reabastecimento aéreo. No entanto, encontrou-se certa dificuldade em prosseguir com a implementação numérica do modelo com base no desenvolvimento apresentado nos artigos.

Desta maneira, uma segunda formulação de viga não linear foi encontrada, apresentada desta vez por Shearer (2006) e Su (2008) e utilizada no contexto de análise de aeronaves altamente flexíveis. A teoria é novamente uma modelagem não linear utilizando MEF, na qual um elemento de viga com três nós é desenvolvido, resolvido a partir do campo das deformações e, com isso, seus respectivos deslocamentos podem ser calculados.

A utilização deste tipo de elemento apresenta grandes vantagens, como permitir grandes deformações e garantir a continuidade de inclinação e curvatura do cabo. Desta maneira, esse modelo apresenta a melhor acuracidade entre todos estudados. No entanto, possui uma inerente complexidade em sua formulação matemática e um enorme custo computacional associado. Desta forma, a formulação proposta por Shearer (2006) e Su (2008) será implementada e seus resultados comparados com o modelo MEF utilizando elementos de barra que será apresentado posteriormente.

2.2.2 MEF com elemento de barra tri-dimensional

Li e Z. H. Zhu (2015) utilizaram essa modelagem em um par de espaçonaves conectadas, no qual o MEF foi empregado usando um elemento de barra, ou seja, que considera apenas a deformação axial. Conseqüentemente, o presente modelo possui uma acuracidade menor do que o apresentado previamente, considerando o fato que este não respeita a continuidade de inclinação e nem curvatura, além de não incluir esforços de flexão.

Entretanto, este modelo possui um desenvolvimento matemático consideravelmente mais simples e pode ser implementado com o uso de um método de integração temporal explícito, como o *Runge-Kutta* de 4^a ordem para casos levemente instáveis. Isso leva a um modelo computacional consideravelmente mais barato e que torna viável a simulação para geração de uma grande quantidade de resultados. Além disso, um método implícito, tal como o método *Runge-Kutta Gauss-Legendre* de 4^a ordem sugerido pelos autores, pode ser usado para casos que requerem maior acuracidade, como casos instáveis. A seleção do algoritmo de solução temporal será discutido de maneira detalhada em capítulos posteriores. Apesar de uma acuracidade menor em relação ao modelo anterior, este possui maior acurácia que o modelo que será apresentado em seguida, dado que o primeiro considera a extensibilidade do cabo.

Desta maneira, assim como já citado anteriormente, esse modelo será implementado computacionalmente e comparado ao anterior, elencando suas diferenças e possíveis pontos fortes.

2.2.3 LPM (Lumped parameter method)

O *lumped parameter method* foi introduzido para reabastecimento aéreo por Ro, Ahmad e James Kamman (2009) e Haitao Wang *et al.* (2014), no qual consiste na discretização do cabo em elementos com massa pontual interligados e, considerado pelo primeiro autor, como inextensíveis. Deste modo, o desenvolvimento matemático desse modelo é considerável mais simples quando comparado aos anteriores, mas também possui menor acuracidade.

Entretanto, Ro e James W. Kamman (2010) reporta boa correlação dos resultados entre simulação e ensaios de voo estáticos (velocidade constante). Além disso, estudos de convergência desenvolvidos pelo mesmo autor com o modelo proposto mostraram que, com a utilização de 20 elementos e um passo de tempo de 0,01 segundos, foram obtidos resultados próximos a modelos de maior fidelidade com 60 elementos e 0,0001 segundos, o que pode ser considerado benéfico de um ponto de vista computacional. Por esta razão, este foi o primeiro modelo implementado e testado neste trabalho, apesar do fato que a modelagem matemática ter revelado uma grande restrição durante as simulações, o que será discutido no próximo capítulo, junto a diferentes soluções que foram testadas para tentar contornar o problema.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA

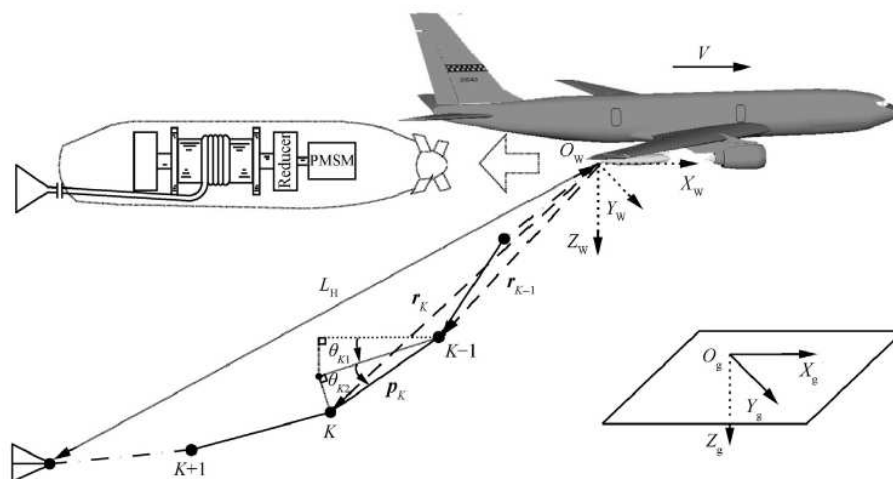
Após a pesquisa bibliográfica, os dois últimos modelos junto ao modelo utilizando elemento de viga não-linear apresentado por Su (2008) e Shearer (2006) foram implementados. Essa seção tem a intenção de realizar uma breve descrição matemática e as possíveis limitações de cada um.

3.1 LPM (Lumped parameter method)

A descrição matemática a seguir é baseada em Ro, Ahmad e James Kamman (2009), que aprofunda melhor seus procedimentos. No entanto, será útil sintetizá-la aqui para a discussão que será realizada no final desta seção sobre o indeterminismo matemático do método.

Primeiramente, é importante definir os sistemas de coordenadas que será usado. Considere os dois sistemas apresentados na Figura 5, em que $O_g X_g Y_g Z_g$ corresponde ao sistema inercial de coordenadas e $O_w X_w Y_w Z_w$ ao sistema no qual os eixos são paralelos ao sistema do avião, mas centrados no ponto de conexão do cabo ao avião Haitao Wang *et al.* (2014). No presente trabalho, será assumida a hipótese de que o cabo está conectado ao CG (Centro de Gravidade) do avião, logo o sistema de coordenadas do avião coincide com $O_w X_w Y_w Z_w$.

Figura 5 – Sistema de coordenadas adotado para o LPM.



Fonte: Haitao Wang *et al.* (2014).

Toda a descrição matemática é baseada no referencial $O_w X_w Y_w Z_w$, utilizando o tamanho do elemento do cabo e os ângulos θ_{K1} e θ_{K2} relativos, respectivamente, aos planos $O_w X_w Y_w$ e $O_w X_w Z_w$, para definição do vetor de posição relativa Haitao Wang *et al.* (2014).

Desta forma, considere a Equação (4), que descreve o vetor posição de uma massa pontual K .

$$\mathbf{r}_K = \mathbf{r}_{K-1} + \mathbf{p}_K, \quad (4)$$

em que \mathbf{r}_K é o vetor posição do ponto K , \mathbf{r}_{K-1} o vetor posição do ponto $K - 1$ e \mathbf{p}_K o vetor de posição de K relativo a $K - 1$. O vetor \mathbf{p}_K pode ser reescrito em termos de θ_{K1} e θ_{K2} como

$$\mathbf{p}_K = -l_K[\cos(\theta_{K1})\cos(\theta_{K2})\mathbf{w}_1 + \sin(\theta_{K2})\mathbf{w}_2 - \sin(\theta_{K1})\cos(\theta_{K2})\mathbf{w}_3], \quad (5)$$

no qual l_k é o tamanho (comprimento do elemento) e \mathbf{w}_1 , \mathbf{w}_2 e \mathbf{w}_3 são os vetores unitários do sistema de referência $O_wX_wY_wZ_w$.

Desta maneira, os vetores velocidade e aceleração de cada pontos são dados por

$$\begin{cases} \mathbf{v}_K = \mathbf{v}_{K-1} + \dot{\mathbf{p}}_K, \\ \mathbf{a}_K = \mathbf{a}_{K-1} + \ddot{\mathbf{p}}_K, \end{cases} \quad (6)$$

onde as derivadas de \mathbf{p}_K são

$$\dot{\mathbf{p}}_K = \sum_{i=1}^2 (\mathbf{p}_{K,\theta_{Ki}} \dot{\theta}_{Ki}) + (\boldsymbol{\omega}_W \times \mathbf{p}_K), \quad (7)$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_K = \sum_{i=1}^2 (\mathbf{p}_{K,\theta_{Ki}} \ddot{\theta}_{Ki}) + \sum_{i=1}^2 (\dot{\mathbf{p}}_{K,\theta_{Ki}} \dot{\theta}_{Ki}) + (\boldsymbol{\alpha}_W \times \mathbf{p}_K) + (\boldsymbol{\omega}_W \times \dot{\mathbf{p}}_K), \quad (8)$$

em que $\mathbf{p}_{K,\theta_{Ki}} = \partial \mathbf{p}_K / \partial \theta_{Ki}$, $\boldsymbol{\omega}_W$ e $\boldsymbol{\alpha}_W$ são, respectivamente, a velocidade e a aceleração angular do sistema de coordenadas $O_WX_WY_WZ_W$. Realizando o produto escalar da Equação (8) com $\mathbf{p}_{K,\theta_{Ki}}$ e considerando que $\mathbf{p}_{K,\theta_{K1}} \cdot \mathbf{p}_{K,\theta_{K2}} = 0$, as acelerações angulares $\ddot{\theta}_{Ki}$ são dadas por

$$\ddot{\theta}_{Ki} = \mathbf{p}_{K,\theta_{Ki}} \cdot [\mathbf{a}_K - \mathbf{a}_{K-1} - \sum_{i=1}^2 (\dot{\mathbf{p}}_{K,\theta_{Ki}} \dot{\theta}_{Ki}) - (\boldsymbol{\alpha}_W \times \mathbf{p}_K) - (\boldsymbol{\omega}_W \times \dot{\mathbf{p}}_K)] / (\mathbf{p}_{K,\theta_{Ki}} \cdot \mathbf{p}_{K,\theta_{Ki}}). \quad (9)$$

É importante destacar que o produto no denominador da Equação (9) pode ser simplificado como $\mathbf{p}_{K,\theta_{Ki}} \cdot \mathbf{p}_{K,\theta_{Ki}} = l_K^2 \cdot \cos(\theta_{K2})^2$ Haitao Wang *et al.* (2014), o que torna claro o indeterminismo matemático quando $\theta_{K2} = \pm\pi/2$ que será discutido após o término da descrição do método.

Após a modelagem cinemática apresentada previamente, o método deve ser completado com a parte dinâmica (inclusão de forças). A partir da Segunda Lei de movimento de Newton, a aceleração do ponto K pode ser escrita como:

$$\mathbf{a}_K = (\mathbf{q}_K + \mathbf{t}_K - \mathbf{t}_{K-1})/m_K, \quad (10)$$

onde \mathbf{q}_K é a força externa resultante atuando no ponto K , \mathbf{t}_K e \mathbf{t}_{K+1} são as tensões de conexão dos elementos e m_K a massa no ponto K . Finalmente, considerando a hipóteses de conexões inextensíveis, a aceleração relativa entre dois pontos é a própria aceleração centrípeta:

$$(\mathbf{a}_K - \mathbf{a}_{K-1})\mathbf{n}_K = l_K \dot{\mathbf{n}}_K^2, \quad (11)$$

em que \mathbf{n}_K é um vetor unitário que aponta do ponto K para $K - 1$. Substituindo a Equação (10) em (11), obtém-se a expressão utilizada para calcular as tensões dos elementos, apresentada pela Equação (12).

$$\begin{aligned} -(\mathbf{n}_{K-1} \cdot \mathbf{n}_K)\mathbf{t}_{K-1}/m_{K-1} + (1/m_{K-1} + 1/m_K)\mathbf{t}_K - (\mathbf{n}_{K+1} \cdot \mathbf{n}_K)\mathbf{t}_{K+1} \\ = l_K \dot{\mathbf{n}}_K^2 + (\mathbf{q}_{K-1}/m_{K-1} - \mathbf{q}_K/m_K) \cdot \mathbf{n}_K. \end{aligned} \quad (12)$$

Assim, o modelo numérico foi implementado utilizando o método *Runge-Kutta* de 4ª ordem, como sugerido por Ro, Ahmad e James Kamman (2009). Entretanto, ao retornar ao indeterminismo matemático apresentado na Equação (9), apesar de Haitao Wang *et al.* (2014) argumentarem que em uma situação normal de reabastecimento aéreo a condição de $\theta_{K2} = \pm\pi/2$ não é comumente verificada, isso foi frequentemente observado em simulações durante todo esse estudo. Considerando isso, algumas soluções foram testadas para lidar com esse problema, que serão discutidas em seguida, junto as suas limitações.

Na primeira tentativa, após o cálculo das tensões nos elementos por meio da Equação (12), as acelerações de cada ponto foram calculadas por meio da Equação (10) e integradas diretamente a fim de obter a velocidade e posição do ponto no próximo passo de tempo. Contudo, dado que a integração não foi realizada por meio da relação cinemática fornecida pelas Equações (7), (8) e (9), foi pensado que, numericamente, essa abordagem não garante a inextensibilidade do cabo e, portanto, desrespeita uma das hipóteses do modelo proposto. De fato, esse problema foi largamente verificado em simulações e não pôde ser solucionado.

A segunda tentativa envolveu mesclar o método descrito com a primeira solução proposta, ou seja, quando a simulação está distante do ponto $\theta_{K2} = \pm\pi/2$, o método original é utilizado, mas quando o ângulo se aproximava do indeterminismo matemático, o modelo era integrado pela correção e, posteriormente, os ângulos eram calculados por relações geométricas. Essa proposta funcionou relativamente bem nas primeiras validações em reabastecimento aéreo e foi extensivamente utilizada para verificar, por exemplo, a condição de instabilidade proposta por Phillips (1949). Todavia, durante o progresso do estudo, quando o foco retornou novamente a um par de aviões conectados, ficou evidente que essa correção sugerida levava igualmente a pequenos erros nos vetores posição, que

eram propagados no espaço (ao longo do cabo) e no tempo, o que é um grande problema, especialmente para simular casos como duas aeronaves estáticas uma em relação à outra.

Na última tentativa, tentou-se integrar diretamente a velocidade angular do vetor unitário \mathbf{n}_K e, multiplicando por l_k , obteria-se \mathbf{p}_K . Contudo, assim como as duas últimas tentativas, isso também gera pequenos erros no vetor posição que são propagados ao longo do cabo e levam ao mesmo problema explicado anteriormente.

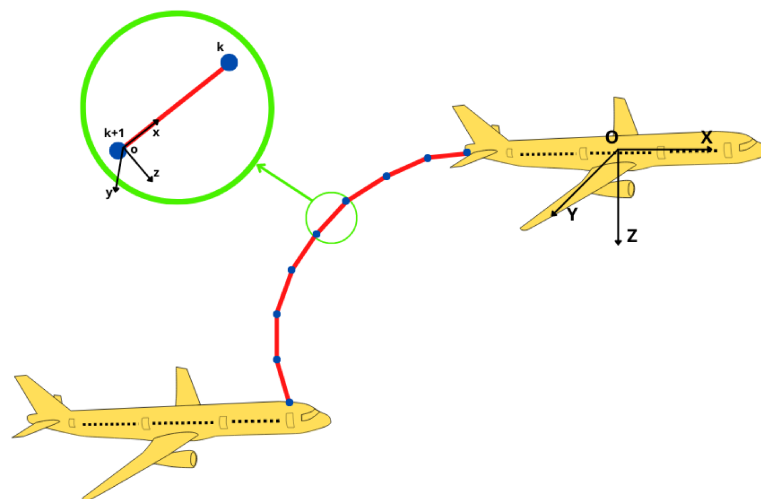
Desta maneira, após todos esses testes, o LPM não funcionou como esperado, mesmo com as tentativas de melhorá-lo para evitar a indeterminação matemática. Então, essa modelagem foi descartada, por claramente não ser adaptável ao objetivo proposto no presente trabalho, mesmo que este modelo seja extremamente barato do ponto de vista computacional e tenha apresentado boa concordância com resultados estáticos em reabastecimento aéreo Ro, Ahmad e James Kamman (2009).

3.2 MEF COM ELEMENTO DE BARRA

A descrição matemática desse modelo foi desenvolvida por Li e Z. H. Zhu (2015) em sua aplicação para espaçonaves conectadas. Desta forma, no presente trabalho, essa formulação será utilizada com uma abordagem diferente para aplicação das forças externas e resolução numérica.

Para a formulação a seguir, considere o sistema de coordenadas global ($OXYZ$) mostrado na Figura 6, centrado no CG do avião em sua condição inicial, no qual Z aponta em direção ao centro da terra, paralelo ao vetor gravidade, X ao longo da fuselagem do avião e Y completa o sistema de coordenadas.

Figura 6 – Sistema de referências adotado para MEF utilizando elemento de barra.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Além disso, um sistema de coordenadas local ($oxyz$) será utilizado, sendo x orien-

tado na direção do elemento, z é perpendicular a x e ao vetor de velocidade média do elemento e y completa o sistema de coordenadas.

Inicialmente, o cabo de ligamento entre os aviões será discretizado em elementos de barras, com n elementos e k nós, onde $k = n + 1$. O vetor posição do elemento, descrito por suas posições nodais, pode ser escrito no sistema de coordenadas global segundo a Equação (13).

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}\mathbf{x}_e, \quad (13)$$

em que $\mathbf{x} = (X, Y, Z)^T$ é a posição de um ponto qualquer no elemento, \mathbf{N} é a matriz de forma e $\mathbf{x}_e = (X_k, Y_k, Z_k, X_{k+1}, Y_{k+1}, Z_{k+1})^T$ é o vetor de coordenadas nodais. A matriz de forma desse elemento de barra tridimensional pode ser escrita como:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad (14)$$

onde $\varepsilon = x/L$ e L é a norma euclidiana de \mathbf{x}_e . Além disso, a deformação de *Gauss-Lagrange* é definida como

$$\varepsilon_x = \frac{L_e - L_{e0}}{L_{e0}} = \mathbf{B}_0 \mathbf{Q} \mathbf{x}_e - 1, \quad (15)$$

no qual L_{e0} e L_e são, respectivamente, o comprimento original (não deformado) e deformado do elemento, \mathbf{B}_0 a matriz de deformação escrita no sistemas de coordenadas local e \mathbf{Q} a matriz de transformação, definidos por

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} -1/L_{e0} & 0 & 0 & 1/L_{e0} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \theta_X & \cos \theta_Y & \cos \theta_Z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_X & \cos \theta_Y & \cos \theta_Z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

e

$$\cos \theta_{[X,Y,Z]} = \frac{[X, Y, Z]_k - [X, Y, Z]_{k+1}}{L_e}. \quad (18)$$

A fim de obter a matriz de massa, \mathbf{M} , a energia cinemática, E_{cin} , pode ser descrita por

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} \rho A \dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}} ds = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_e^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}_e, \quad (19)$$

onde ρ é a densidade volumétrica do cabo e A a área de seção transversal do cabo. Desta maneira, a matriz de massa elementar é escrita como

$$\mathbf{M} = \frac{\rho AL_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Além disso, como consequência do par de aviões conectados, deve-se somar matrizes de massa complementares no primeiro e no último elemento do cabo, correspondentes às massas dessas aeronaves, como apresentado nas Equações (21) e (22), no qual \mathbf{M}_{p1} é a matriz de massa adicionada no primeiro elemento e \mathbf{M}_{p2} no último.

$$\mathbf{M}_{p1} = \begin{bmatrix} m_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{p1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\mathbf{M}_{p2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{p2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{p2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{p2} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

onde m_{p1} e m_{p2} são, respectivamente, as massas do primeiro e do segundo avião.

Ademais, a fim de obter a matriz de rigidez, a energia potencial de um elemento pode ser escrita da seguinte maneira:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} EA \varepsilon^2 ds = \frac{1}{2} \mathbf{x}_e^T \mathbf{K} \mathbf{x}_e - \frac{1}{2} \mathbf{x}_e^T \mathbf{f}_k + \frac{1}{2} EAL_e \varepsilon_0, \quad (23)$$

no qual \mathbf{f}_k é o vetor de força nodal generalizada, que surge devido à elasticidade do elemento no referencial global Li e Z. H. Zhu (2015). Desta maneira, a matriz de rigidez é definida como:

$$\mathbf{K} = EA \mathbf{Q}^T \mathbf{B}_0^T \mathbf{B}_0 \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{Q}, \quad (24)$$

em que

$$\mathbf{K}_0 = \frac{EA}{L_{e0}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material do cabo e o vetor de força nodal generalizada, \mathbf{f}_k :

$$\mathbf{f}_k = EAL_{e0}\mathbf{Q}^T\mathbf{B}_0^T. \quad (26)$$

Portanto, a equação do movimento dos elementos do cabo pode ser escrita conforme a Equação (27),

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_e + \mathbf{K}\mathbf{x}_e = \mathbf{f}_k + \mathbf{f}_W + \mathbf{f}_d + \mathbf{f}_p, \quad (27)$$

no qual \mathbf{f}_W é o vetor da força peso, \mathbf{f}_d o vetor da força de arrasto e \mathbf{f}_p são as forças dos aviões aplicadas na ponta dos cabos.

Assim, como é utilizado um sistema de coordenadas globais, o vetor de força peso atuando em cada elemento pode ser facilmente calculado por

$$\mathbf{f}_W = \frac{\rho AgL_{e0}}{2} [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1]^T, \quad (28)$$

onde g é a constante gravitacional.

Finalmente, os últimos elementos a serem computados são a própria força de arrasto do cabo e as forças devido às aeronaves. No entanto, ambas serão apresentadas posteriormente, durante e após a formulação do MEF utilizando elemento de viga não linear.

No que tange o movimento do avião, ao integrar as forças e as massas dos aviões nas pontas do cabo, considera-se que a velocidade na ponta do cabo é a própria velocidade dos aviões e, portanto, não é necessário calculá-las separadamente. Já para as rotações, tem-se uma situação particular. Considerando que o cabo não está engastado no avião, isto é, os movimentos de rotação do cabo são independentes da rotação do avião, deve-se calcular a rotação dos aviões de maneira independente. Isto será realizado por meio dos termos correspondentes ao movimento de rotação presentes na equação de movimento de corpo rígido, mostrada na Seção 3.3.1. Além disso, a Seção 3.3.7.2 apresenta o equacionamento das forças e momentos atuantes no avião.

3.3 MEF COM ELEMENTO DE VIGA NÃO-LINEAR

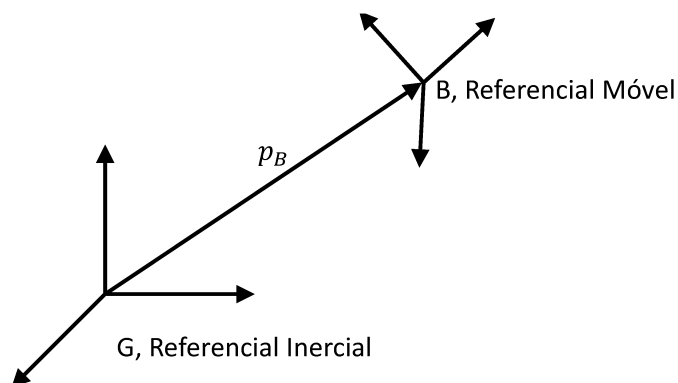
Nesta seção, será realizada a descrição do modelo de MEF utilizando elemento de viga não-linear baseado nas formulações apresentadas em Shearer (2006), Su (2008) e Brown (2003), os quais apresentam em detalhe cada passo da formulação. Neste trabalho, o modelo será apresentado de maneira simplificada com as adaptações relevantes ao presente estudo, as quais serão destacadas. Para isso, as explicações serão subdivididas em oito partes importantes para obtenção das equações globais do movimento:

- Trabalho virtual do corpo rígido;
- Trabalho virtual devido à estrutura flexível;
- Relação cinemática;
- Matrizes de massa;
- Rigidez e amortecimento elementares;
- Inclusão de esforços externos;
- Equações completas do movimento;
- Inclusão do segundo avião;
- Propagação do referencial móvel.

3.3.1 Trabalho virtual corpo rígido

Primeiramente, antes de iniciar o equacionamento para obtenção da contribuição ao trabalho virtual do corpo rígido, é necessário definir os referenciais que serão utilizados. Desta maneira, como apresentado na Figura 7, define-se G como um sistemas de coordenadas inercial, o qual é posicionado em uma terra plana. Em seguida, o referencial B é o sistema de coordenadas móvel que representa o primeiro avião. Este sistema é centrado no CG da aeronave, possui o eixo X apontado na direção do nariz do avião, eixo Y para a asa direita e o eixo Z completa o sistema de coordenadas. Além disso, define-se o vetor \mathbf{p}_B , o qual aponta da origem do referencial G para a origem de B . É importante ressaltar que o vetor \mathbf{p}_B é escrito no referencial B .

Figura 7 – Representação referencial móvel.



Fonte: Shearer (2006) (Adaptado).

Destaca-se aqui uma diferença em relação aos trabalhos de Brown (2003), Shearer (2006) e Su (2008), em que, nestes trabalhos, o referencial B não é posicionado no CG da aeronave, pois, devido à flexibilidade desta, a posição CG é variável em relação ao avião. Logo, neles o referencial B é fixado em alguma região arbitrária da aeronave (em um ponto específico da fuselagem, por exemplo) e um vetor auxiliar $p_{r_{cm}}$ é utilizado para definir a posição do CG em relação à origem de B .

Prosseguindo a descrição matemática, o trabalho virtual aplicado no referencial B pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \delta \mathbf{w}_B^F &= \delta \mathbf{p}_B \cdot \left[-\frac{d}{dt}(\mathbf{Q}_B) + \mathbf{f}_{extB} \right], \\ \delta \mathbf{w}_B^M &= \delta \boldsymbol{\theta}_B \cdot \left[-\frac{d}{dt}(\mathbf{H}_B) + \mathbf{m}_{extB} \right], \end{cases} \quad (29)$$

no qual $\boldsymbol{\theta}_B$ é o vetor rotação do referencial B em relação ao referencial inercial, \mathbf{f}_{extB} e \mathbf{m}_{extB} são, respectivamente, as forças e momentos externos aplicados ao referencial B e \mathbf{Q}_B e \mathbf{H}_B são, respectivamente, as quantidades de movimento linear e angular do referencial B , calculados por

$$\mathbf{Q}_B = m_B \cdot \mathbf{v}_B, \quad (30)$$

$$\mathbf{H}_B = \mathbf{I}_B \cdot \boldsymbol{\omega}_B, \quad (31)$$

onde m_B , \mathbf{v}_B , \mathbf{I}_B e $\boldsymbol{\omega}_B$ são, respectivamente, a massa, velocidade, tensor de inércia e velocidade angular associados ao referencial B . Finalmente, substituindo as Equações (30) e (31) em (29), obtém-se

$$\begin{cases} \delta \mathbf{w}_B^F &= \delta \mathbf{p}_B \cdot (-m_B \dot{\mathbf{v}}_B - \boldsymbol{\omega}_B \times (m_B \mathbf{v}_B) + \mathbf{f}_{extB}), \\ \delta \mathbf{w}_B^M &= \delta \boldsymbol{\theta}_B \cdot [-\mathbf{I}_B \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_B - \boldsymbol{\omega}_B \times (\mathbf{I}_B \cdot \boldsymbol{\omega}_B) + \mathbf{m}_{extB}], \end{cases} \quad (32)$$

escrito em sua forma matricial

$$\delta \mathbf{w}_B = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{p}_B \\ \delta \boldsymbol{\theta}_B \end{bmatrix}^T \left(-\mathbf{M}_{CR} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_B \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_B \end{bmatrix} - \mathbf{C}_{CR} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_B \\ \boldsymbol{\omega}_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{extB} \\ \mathbf{m}_{extB} \end{bmatrix} \right), \quad (33)$$

em que \mathbf{M}_{CR} e \mathbf{C}_{CR} são

$$\mathbf{M}_{CR} = \begin{bmatrix} m_B \mathbf{I}_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_B \end{bmatrix}, \quad (34)$$

$$\mathbf{C}_{CR} = \begin{bmatrix} m_B \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_B \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Ainda, a fim de definir o operador ($\tilde{\cdot}$), considere o vetor $a = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$, então \tilde{a} é dado por:

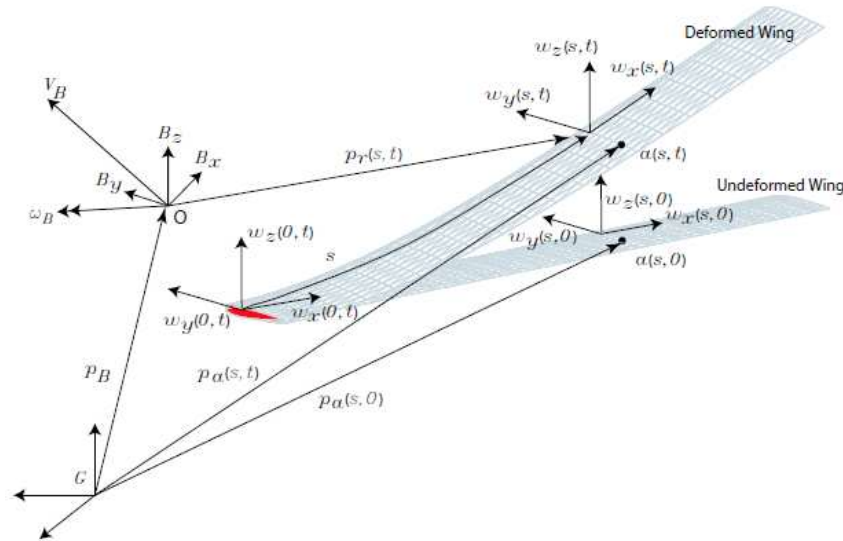
$$\tilde{a} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Ressalta-se que uma descrição matemática mais detalhada sobre a obtenção das EdM (Equações do Movimento) apresentadas anteriormente é realizada por Shearer (2006) em seu trabalho.

3.3.2 Trabalho virtual corpo flexível

Primeiramente, é necessário definir um novo sistema de coordenadas local, w , apresentado na Figura 8, que será utilizado para o cálculo do trabalho virtual devido aos elementos flexíveis.

Figura 8 – Sistemas de coordenadas local para corpo flexível.



Fonte: Shearer (2006).

Além disso, antes do equacionamento propriamente dito, é igualmente útil introduzir alguns conceitos que serão utilizados no decorrer deste. Desta forma, define-se o vetor posição $\mathbf{h}(s)$ como um vetor 12 elementos dado por

$$\mathbf{h}^T(s) = [\mathbf{p}^T(s) \ \mathbf{w}_x^T(s) \ \mathbf{w}_y^T(s) \ \mathbf{w}_z^T(s)], \quad (37)$$

onde \mathbf{w}_x , \mathbf{w}_y e \mathbf{w}_z são vetores compondo a base do referencial local w e $\mathbf{p}(s)$ é escrito como

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}_B + \mathbf{p}_r(s), \quad (38)$$

sendo $\mathbf{p}_r(s)$ o vetor posição da origem do referencial w em relação ao sistema de coordenadas B . Nota-se que as primeiras 3 componentes do vetor $\mathbf{h}(s)$ correspondem à posição

do referencial w em relação ao referencial inercial G enquanto os elementos restantes, ao corresponderem à orientação do referencial w , podem ser interpretados diretamente como as rotações daquele ponto. Além disso, dado que esse vetor posição possui 12 elementos, ele corresponde a uma representação não mínima da posição de um ponto. Portanto, ele será posteriormente escrito através de relações cinemáticas como uma função de novas variáveis independentes, $\boldsymbol{\varepsilon}$, apresentado na Equação (39) e representando as deformações do corpo, e \mathbf{b} , mostrado na Equação (40) e representando o movimento do referencial B .

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \ \kappa_x \ \kappa_y \ \kappa_z]^T, \quad (39)$$

$$\mathbf{b} = [\mathbf{p}_b^T \ \boldsymbol{\theta}_b^T]^T, \quad (40)$$

$$\boldsymbol{\beta} = \dot{\mathbf{b}} = [\mathbf{v}_b^T \ \boldsymbol{\omega}_b^T]^T, \quad (41)$$

em que ε_x representa a deformação axial do elemento de viga, κ_x a torção da linha de referência da viga, κ_y e κ_z as flexões da viga em torno dos vetores de base \mathbf{w}_y e \mathbf{w}_z , respectivamente. Com isso, pode-se escrever o deslocamento virtual, velocidade e acelerações do vetor $\mathbf{h}(s)$ como:

$$\delta \mathbf{h} = \mathbf{J}_{h\varepsilon} \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{J}_{hb} \delta \mathbf{b}, \quad (42)$$

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{J}_{h\varepsilon} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{J}_{hb} \boldsymbol{\beta}, \quad (43)$$

$$\ddot{\mathbf{h}} = \mathbf{J}_{h\varepsilon} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{\mathbf{J}}_{h\varepsilon} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{J}_{hb} \boldsymbol{\beta} + \dot{\mathbf{J}}_{hb} \boldsymbol{\beta}, \quad (44)$$

nos quais $\mathbf{J}_{h\varepsilon}$ e \mathbf{J}_{hb} são Jacobianos que representam a influência das deformações e do movimento do referencial B sobre o vetor posição $\mathbf{h}(s)$, ou simplesmente as derivadas de \mathbf{h} em relação à deformação e em relação a \mathbf{b} , respectivamente. Ambos podem ser obtidos através das relações cinemáticas que serão apresentadas a seguir Su (2008). No entanto, apenas \mathbf{J}_{hb} será explicitamente apresentado no presente trabalho. Já a obtenção de $\mathbf{J}_{h\varepsilon}$ possui maior complexidade associada e seu desenvolvimento explícito foi realizado por Shearer (2006). Ademais, a derivada temporal $\dot{\mathbf{J}}_{h\varepsilon}$ pode ser descrita como Shearer (2006):

$$\dot{\mathbf{J}}_{h\varepsilon} = \frac{\partial(\mathbf{J}_{h\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (45)$$

Com isso, vale destacar que a derivada $\partial(\mathbf{J}_{h\varepsilon})/\partial \boldsymbol{\varepsilon}$ não possui solução analítica desenvolvida por nenhum dos trabalhos de referência anteriormente citados e não foi possível ser desenvolvida no presente trabalho. Desta maneira, quando necessário, esta foi calculada numericamente, sendo posteriormente identificada como uma possível fonte de erros na solução numérica.

Introduzidos estes conceitos, pode-se continuar com o desenvolvimento do trabalho virtual do corpo flexível. Assim, começa-se pela definição do vetor posição de um ponto arbitrário a , apresentado na Figura 8, no corpo flexível:

$$\mathbf{p}_a = \mathbf{p} + x\mathbf{w}_x + y\mathbf{w}_y + z\mathbf{w}_z, \quad (46)$$

em que x, y, z são escalares definindo a posição do ponto a no referencial w . Desta maneira, a velocidade e a aceleração do ponto a podem ser derivadas Su (2008):

$$\mathbf{v}_a = \dot{\mathbf{p}} + x\dot{\mathbf{w}}_x + y\dot{\mathbf{w}}_y + z\dot{\mathbf{w}}_z + \boldsymbol{\omega}_B \times (\mathbf{p}_r + x\mathbf{w}_x + y\mathbf{w}_y + z\mathbf{w}_z), \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_a = & \ddot{\mathbf{p}} + x\ddot{\mathbf{w}}_x + y\ddot{\mathbf{w}}_y + z\ddot{\mathbf{w}}_z + \dot{\boldsymbol{\omega}}_B \times (\mathbf{p}_r + x\mathbf{w}_x + y\mathbf{w}_y + z\mathbf{w}_z) \\ & + \boldsymbol{\omega}_B \times [\dot{\mathbf{p}}_B + \boldsymbol{\omega}_B \times (\mathbf{p}_r + x\mathbf{w}_x + y\mathbf{w}_y + z\mathbf{w}_z)] \\ & + 2\boldsymbol{\omega}_B \times (\dot{\mathbf{p}}_r + x\dot{\mathbf{w}}_x + y\dot{\mathbf{w}}_y + z\dot{\mathbf{w}}_z). \end{aligned} \quad (48)$$

Então, o trabalho virtual devido aos elementos elásticos por unidade de volume é dado por:

$$\delta \mathbf{w}_a = \delta \mathbf{p}_a \cdot (-\mathbf{a}_a \rho dA ds), \quad (49)$$

no qual

$$\delta \mathbf{p}_a = \delta \mathbf{p} + x\delta \mathbf{w}_x + y\delta \mathbf{w}_y + z\delta \mathbf{w}_z. \quad (50)$$

Assim, ao substituir as Equações (48) e (50) em (49):

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{w}_a = & -(\delta \mathbf{p} + x\delta \mathbf{w}_x + y\delta \mathbf{w}_y + z\delta \mathbf{w}_z) \cdot \\ & \{ \ddot{\mathbf{p}} + x\ddot{\mathbf{w}}_x + y\ddot{\mathbf{w}}_y + z\ddot{\mathbf{w}}_z + \dot{\boldsymbol{\omega}}_B \times (\mathbf{p}_r + x\mathbf{w}_x + y\mathbf{w}_y + z\mathbf{w}_z) \\ & + \boldsymbol{\omega}_B \times [\dot{\mathbf{p}}_B + \boldsymbol{\omega}_B \times (\mathbf{p}_r + x\mathbf{w}_x + y\mathbf{w}_y + z\mathbf{w}_z)] \\ & + 2\boldsymbol{\omega}_B \times (\dot{\mathbf{p}}_r + x\dot{\mathbf{w}}_x + y\dot{\mathbf{w}}_y + z\dot{\mathbf{w}}_z) \} \rho dA ds. \end{aligned} \quad (51)$$

Finalmente, o trabalho virtual por comprimento devido aos elementos elásticos pode ser encontrado ao integrar a Equação (51) com respeito à seção transversal A Su (2008):

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{w}_E(s) = & -\delta \mathbf{h}^T(s) \left\{ \mathbf{M}_{cs}(s) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \tilde{\mathbf{p}}_r^T(s) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\mathbf{w}}_x^T(s) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\mathbf{w}}_y^T(s) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\mathbf{w}}_z^T(s) \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\beta}} + 2\mathbf{M}_{cs}(s) \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_r^T(s) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_x^T(s) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_y^T(s) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_z^T(s) \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \right. \\ & \left. + \mathbf{M}_{cs}(s) \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_r(s) \\ \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_x(s) \\ \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_y(s) \\ \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_z(s) \end{bmatrix} + \mathbf{M}_{cs}(s) \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \tilde{\mathbf{p}}_r^T(s) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\mathbf{w}}_x^T(s) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\mathbf{w}}_y^T(s) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\mathbf{w}}_z^T(s) \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \right\}, \end{aligned} \quad (52)$$

onde $\mathbf{M}_{Cs}(s)$ é a matriz de massa por unidade de comprimento do cabo, dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{Cs}(s) &= \int_A \rho \begin{bmatrix} 1 & x & y & z \\ x & x^2 & xy & xz \\ y & xy & y^2 & yz \\ z & xz & yz & z^2 \end{bmatrix} dA \\ &= \begin{bmatrix} \mu \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mu r_x \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mu r_y \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mu r_z \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mu r_x \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & \frac{1}{2}(I_{yy} + I_{zz} - I_{xx}) \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & I_{xy} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & I_{xz} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mu r_y \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & I_{yx} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{zz} - I_{yy}) \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & I_{yz} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mu r_z \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & I_{zx} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & I_{zy} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}) \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (53)$$

em que μ é a densidade linear do cabo, r_x , r_y e r_z as coordenadas do centro de massa da seção transversal e I , com seus respectivos índices, os momentos e produtos de inércia da seção transversal.

Além disso, a partir da Equação (52) pode ser definido o jacobiano \mathbf{J}_{hb} , a derivada temporal deste, $\dot{\mathbf{J}}_{hb}$, e a matriz de influência \mathbf{H}_{hb} :

$$\mathbf{J}_{hb} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \tilde{\mathbf{p}}_r^T(s) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\mathbf{w}}_x^T(s) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\mathbf{w}}_y^T(s) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\mathbf{w}}_z^T(s) \end{bmatrix}, \quad (54)$$

$$\dot{\mathbf{J}}_{hb} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_r^T(s) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_x^T(s) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_y^T(s) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_z^T(s) \end{bmatrix}, \quad (55)$$

$$\mathbf{H}_{hb} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \end{bmatrix} \mathbf{J}_{hb}. \quad (56)$$

Ademais, nota-se que o vetor aceleração $[\ddot{\mathbf{p}}_r^T \ \ddot{\mathbf{w}}_x^T \ \ddot{\mathbf{w}}_y^T \ \ddot{\mathbf{w}}_z^T]^T$ é justamente a aceleração do referencial w em relação ao referencial B , que pode ser escrito como:

$$[\ddot{\mathbf{p}}_r^T \ \ddot{\mathbf{w}}_x^T \ \ddot{\mathbf{w}}_y^T \ \ddot{\mathbf{w}}_z^T]^T = \mathbf{J}_{h\varepsilon} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{\mathbf{J}}_{h\varepsilon} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (57)$$

Finalmente, substituindo as definições apresentadas na Equações (42), (54), (55) e (56) e a Equação (57) na Equação (52), obtém-se o trabalho virtual escrito em função das variáveis independentes, como apresentado na Equação (58).

$$\delta \mathbf{w}_E(s) = - \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \delta \mathbf{b} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{h\varepsilon}^T \mathbf{M}_{cs}(s) \mathbf{J}_{h\varepsilon} & \mathbf{J}_{h\varepsilon}^T \mathbf{M}_{cs}(s) \mathbf{J}_{hb} \\ \mathbf{J}_{hb}^T \mathbf{M}_{cs}(s) \mathbf{J}_{h\varepsilon} & \mathbf{J}_{hb}^T \mathbf{M}_{cs}(s) \mathbf{J}_{hb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \dot{\boldsymbol{\beta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{h\varepsilon}^T \mathbf{M}_{cs}(s) \dot{\mathbf{J}}_{h\varepsilon} & \mathbf{J}_{h\varepsilon}^T \mathbf{M}_{cs}(s) \mathbf{H}_{hb} \\ \mathbf{J}_{hb}^T \mathbf{M}_{cs}(s) \dot{\mathbf{J}}_{h\varepsilon} & \mathbf{J}_{hb}^T \mathbf{M}_{cs}(s) \mathbf{H}_{hb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 2\mathbf{J}_{h\varepsilon}^T \mathbf{M}_{cs}(s) \dot{\mathbf{J}}_{hb} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{J}_{hb}^T \mathbf{M}_{cs}(s) \dot{\mathbf{J}}_{hb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} \right\}. \quad (58)$$

No entanto, ao observar a Equação (58) se nota que apenas os termos inerciais foram modelados e que ainda falta justamente a inclusão dos efeitos de rigidez e amortecimento estrutural do elemento. Desta maneira, conforme Su (2008), o trabalho virtual associado à rigidez do elemento é dado por

$$\delta \mathbf{w}_K(s) = -\delta \boldsymbol{\varepsilon}(s)^T \mathbf{K}(s)(\boldsymbol{\varepsilon}(s) - \boldsymbol{\varepsilon}_0), \quad (59)$$

entretanto, para o presente trabalho em específico será adotado $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = 0$, por considerar que não haverá deformações residuais no cabo caso não houver forças atuantes. Logo,

$$\delta \mathbf{w}_K(s) = -\delta \boldsymbol{\varepsilon}(s)^T \mathbf{K}(s)\boldsymbol{\varepsilon}(s). \quad (60)$$

Ainda, a matriz de amortecimento estrutural pode ser escrito como um elemento proporcional à rigidez:

$$\mathbf{C}(s) = \lambda \mathbf{K}(s), \quad (61)$$

sendo λ o amortecimento estrutural. Assim, o trabalho virtual por comprimento devido ao amortecimento é

$$\delta \mathbf{w}_C(s) = -\delta \boldsymbol{\varepsilon}(s)^T \mathbf{C}(s)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(s). \quad (62)$$

Portanto, a equação do trabalho virtual devido à flexibilidade do elemento é finalmente escrita como:

$$\delta \mathbf{w}_E(s) = - \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \delta \mathbf{b} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{h\varepsilon}^T \mathbf{M}_{cs}(s) \mathbf{J}_{h\varepsilon} & \mathbf{J}_{h\varepsilon}^T \mathbf{M}_{cs}(s) \mathbf{J}_{hb} \\ \mathbf{J}_{hb}^T \mathbf{M}_{cs}(s) \mathbf{J}_{h\varepsilon} & \mathbf{J}_{hb}^T \mathbf{M}_{cs}(s) \mathbf{J}_{hb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \dot{\boldsymbol{\beta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{h\varepsilon}^T \mathbf{M}_{cs}(s) \dot{\mathbf{J}}_{h\varepsilon} & \mathbf{J}_{h\varepsilon}^T \mathbf{M}_{cs}(s) \mathbf{H}_{hb} \\ \mathbf{J}_{hb}^T \mathbf{M}_{cs}(s) \dot{\mathbf{J}}_{h\varepsilon} & \mathbf{J}_{hb}^T \mathbf{M}_{cs}(s) \mathbf{H}_{hb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 2\mathbf{J}_{h\varepsilon}^T \mathbf{M}_{cs}(s) \dot{\mathbf{J}}_{hb} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{J}_{hb}^T \mathbf{M}_{cs}(s) \dot{\mathbf{J}}_{hb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \right\}. \quad (63)$$

3.3.3 Relação cinemática

Após a formulação do trabalho virtual no elemento flexível, é necessário desenvolver a relação cinemática entre o vetor posição $\mathbf{h}(s)$ e o vetor deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$. Desta maneira, baseando-se em Brown (2003), a solução de $\mathbf{h}(s)$ em função de $\boldsymbol{\varepsilon}$ pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathbf{h}(s) = \mathbf{A}(s) \mathbf{h}(s), \quad (64)$$

em que $\mathbf{A}(s)$ é dado por:

$$\mathbf{A}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \{1 + \varepsilon_x(s)\} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \kappa_z(s) \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\kappa_y(s) \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\kappa_z(s) \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \kappa_x(s) \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \kappa_y(s) \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\kappa_x(s) \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}. \quad (65)$$

Desta forma, ao assumir que as deformações são constantes ao longo de um elemento, a solução da Equação (64) é dada por:

$$\mathbf{h}(s) = e^{\mathbf{A}_e \Delta s} \mathbf{h}_0, \quad (66)$$

sendo Δs o comprimento do elemento e \mathbf{h}_0 o vetor posição para $s = 0$. Aqui deve-se notar que sendo a solução a exponencial de uma matriz, o cálculo desta função não é trivial e geralmente deve ser aproximada utilizando técnicas como séries de Taylor ou PADE. Entretanto, Shearer (2006) desenvolveu uma solução analítica para o caso específico discutido nesse trabalho e que foi extensivamente utilizado na implementação computacional do método. Esta solução não será desenvolvida no presente trabalho, mas pode ser encontrada de maneira detalhada no Apêndice C de Shearer (2006).

Retomando o desenvolvimento, ao assumir deformações constantes ao longo do elemento fica clara a necessidade de discretização em vários elementos para obtenção de uma solução representativa. Então, assim como em Brown (2003), Shearer (2006) e Su (2008), o elemento será discretizado em três pontos igualmente espaçados. Desta maneira, a solução em cada ponto do elemento é apresentada na Equação (67).

$$\begin{cases} \mathbf{h}_{e1} = \mathbf{h}(0) & = \mathbf{h}_0, \\ \mathbf{h}_{e2} = \mathbf{h}(0.5\Delta s) & = e^{0.5\mathbf{A}_e \Delta s} \mathbf{h}_0 & = e^{0.5\mathbf{A}_e \Delta s} \mathbf{h}_{e1}, \\ \mathbf{h}_{e3} = \mathbf{h}(\Delta s) & = e^{\mathbf{A}_e \Delta s} \mathbf{h}_0 & = e^{0.5\mathbf{A}_e \Delta s} \mathbf{h}_{e2}. \end{cases} \quad (67)$$

Assim, fica explícito que, com as informações de deformação é possível construir o vetor posição progressivamente a começar de \mathbf{h}_0 , que é uma condição de contorno definida. Portanto, assumindo a continuidade de inclinação e curvatura do elemento, hipótese esta que é inclusive citada na Seção 2.2.1 como a principal razão do porquê utilizar o elemento de viga ao invés do elemento de barra introduzido anteriormente, pode-se construir o vetor posição ao longo do cabo da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_{11} &= \mathbf{h}_0, \\
\mathbf{h}_{12} &= e^{0.5\mathbf{A}_1\Delta s}\mathbf{h}_0, \\
\mathbf{h}_{13} &= e^{\mathbf{A}_1\Delta s}\mathbf{h}_0, \\
\mathbf{h}_{21} &= \mathbf{h}_{13}, \\
\mathbf{h}_{22} &= e^{0.5\mathbf{A}_2\Delta s}\mathbf{h}_{13}, \\
\mathbf{h}_{23} &= e^{\mathbf{A}_2\Delta s}\mathbf{h}_{13}, \\
&\vdots \quad \quad \quad \vdots \\
\mathbf{h}_{n1} &= \mathbf{h}_{(n-1)3}, \\
\mathbf{h}_{n2} &= e^{0.5\mathbf{A}_n\Delta s}\mathbf{h}_{(n-1)3}, \\
\mathbf{h}_{n3} &= e^{\mathbf{A}_n\Delta s}\mathbf{h}_{(n-1)3}.
\end{aligned} \tag{68}$$

3.3.4 Matrizes de massa, rigidez e amortecimento elementares

Após a adoção de um elemento de viga de três nós, como apresentado na seção anterior, pode-se definir as matrizes de massa, rigidez e amortecimento elementares, a fim de obter não mais o trabalho virtual em função do comprimento, mas sim o total, para, enfim, definir as EdM. Desta maneira, assumindo uma variação linear da massa entre dois nós, a matriz de massa elementar é dada por:

$$\mathbf{M}_e = \frac{1}{2}\Delta s \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\mathbf{M}_1 + \frac{1}{12}\mathbf{M}_2 & \frac{1}{12}\mathbf{M}_1 + \frac{1}{12}\mathbf{M}_2 & \mathbf{0}_{12 \times 12} \\ \frac{1}{12}\mathbf{M}_1 + \frac{1}{12}\mathbf{M}_2 & \frac{1}{12}\mathbf{M}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{M}_2 + \frac{1}{12}\mathbf{M}_3 & \frac{1}{12}\mathbf{M}_2 + \frac{1}{12}\mathbf{M}_3 \\ \mathbf{0}_{12 \times 12} & \frac{1}{12}\mathbf{M}_2 + \frac{1}{12}\mathbf{M}_3 & \frac{1}{12}\mathbf{M}_2 + \frac{1}{4}\mathbf{M}_3 \end{bmatrix}. \tag{69}$$

Ademais, para as matrizes de rigidez e amortecimento, será considerado que estas propriedades são constantes ao longo do elemento. Portanto, as matrizes de rigidez e amortecimento elementares são simplesmente:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}\Delta s, \tag{70}$$

$$\mathbf{C}_e = \mathbf{C}\Delta s. \tag{71}$$

3.3.5 Inclusão de esforços externos

O último elemento necessário para a obtenção das EdM é o cálculo do trabalho virtual devido aos esforços externos aplicados no corpo flexível. Desta maneira, irá ser

descrito aqui os procedimentos para cálculo do trabalho virtual devido à força peso, forças pontuais e momentos pontuais, baseadas nas descrições realizadas por Su (2008) e Brown (2003).

3.3.5.1 Força peso

Analogamente ao que foi feito para o trabalho virtual devido aos elementos flexíveis, pode-se escrever o trabalho virtual devido à força peso por elemento de volume como:

$$\delta \mathbf{w}_{WV} = \delta \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{g} \rho dA ds. \quad (72)$$

Vale lembrar que $\delta \mathbf{p}_a$ pode ser escrito como apresentado pela Equação (50). Desta forma, tem-se que:

$$\delta \mathbf{p}_a = \delta \mathbf{h}(s)^T \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (73)$$

onde

$$\delta \mathbf{h} = [\delta \mathbf{p}^T \ \delta \mathbf{w}_x^T \ \delta \mathbf{w}_y^T \ \delta \mathbf{w}_z^T]^T. \quad (74)$$

Portanto, reescrevendo a Equação (72):

$$\delta W_{WV} = \delta \mathbf{h}^T \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rho \mathbf{g} dA ds, \quad (75)$$

e a integrando segundo a seção transversal, obtém-se:

$$\delta \mathbf{w}_{WS} = \delta \mathbf{h}^T \mathbf{N}(s) \mathbf{g} ds, \quad (76)$$

no qual

$$\mathbf{N}(s) = \int \rho \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mathbf{g} dA = \begin{bmatrix} \mu \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mu r_x \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mu r_y \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mu r_z \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}. \quad (77)$$

Finalmente, integrando a Equação (76) ao longo do comprimento do elemento e substituindo $\delta \mathbf{h}$ conforme a Equação (42), obtém-se:

$$\delta \mathbf{w}_W = \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \delta \mathbf{b} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{h\varepsilon}^T \\ \mathbf{J}_{hb}^T \end{bmatrix} \mathbf{N}_e \mathbf{g}, \quad (78)$$

em que

$$\mathbf{N}_e = \frac{1}{2} \Delta s \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \mathbf{N}_1 + \frac{1}{6} \mathbf{N}_2 \\ \frac{1}{6} \mathbf{N}_1 + \frac{2}{3} \mathbf{N}_2 + \frac{1}{6} \mathbf{N}_3 \\ \frac{1}{6} \mathbf{N}_2 + \frac{1}{3} \mathbf{N}_3 \end{bmatrix}. \quad (79)$$

No mais, destaca-se que o vetor de aceleração gravitacional \mathbf{g} , deve ser escrito com base no referencial B .

3.3.5.2 Força pontual

Assim como nos casos anteriores, o trabalho virtual de uma força é dado por:

$$\delta \mathbf{w}_{FP} = \sum_{i=1}^3 \delta \mathbf{p}_i^T \cdot \mathbf{f}_i^{pt} = \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \delta \mathbf{b} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{p\varepsilon}^T \\ \mathbf{J}_{pb}^T \end{bmatrix} \mathbf{f}^{pt}, \quad (80)$$

em que $\mathbf{J}_{p\varepsilon}$ e \mathbf{J}_{pb} são os jacobianos associados ao vetor posição onde a força é aplicada. Assim, para obtê-los, basta extrair as linhas de $\mathbf{J}_{h\varepsilon}$ e \mathbf{J}_{hb} associadas ao local de aplicação da força Shearer (2006). Ademais, nota-se que os esforços aerodinâmicos associados ao arrasto do cabo serão aplicados como forças pontuais em cada nó, estimada de maneira individual, como será posteriormente explicado neste trabalho na Seção 3.4. Além disso, também será utilizada a formulação de forças pontuais para incluir os esforços relacionados ao segundo avião na ponta do cabo.

3.3.5.3 Momento pontual

Analogamente às forças pontuais, o trabalho virtual devido ao momento pontual pode ser escrito em função do deslocamento virtual angular como:

$$\delta \mathbf{w}_{MP} = \sum_{i=1}^3 \delta \theta_i \cdot \mathbf{m}_i^{pt} = \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \delta \mathbf{b} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\theta\varepsilon}^T \\ \mathbf{J}_{\theta b}^T \end{bmatrix} \mathbf{m}^{pt}, \quad (81)$$

em que $\mathbf{J}_{\theta\varepsilon}$ é um jacobiano relacionando a deformação do elemento à rotação naquele nó e $\mathbf{J}_{\theta b}$ o jacobiano que relaciona o movimento do referencial B com a rotação do nó. Assim como para o jacobiano $\mathbf{J}_{h\varepsilon}$, a derivação desses jacobianos não será realizada neste trabalho, mas foram desenvolvidas por Shearer (2006). Assim como para as forças pontuais, os momentos pontuais serão igualmente importantes neste caso essencialmente para inclusão dos momentos do segundo avião no cabo.

3.3.6 Equações Globais do Movimento

Considerando todo o desenvolvimento realizado anteriormente, a fim de se encontrar as Equações Globais do Movimento, é feita a soma do trabalho virtual do corpo rígido, Equação (33), do trabalho virtual dos elementos elásticos, Equação (63), e dos esforços externos aplicados no cabo, Equações (78), (80) e (81), resultando em:

$$\delta \mathbf{w} = - \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \delta \mathbf{b} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{FF} & \mathbf{M}_{FB} \\ \mathbf{M}_{BF} & \mathbf{M}_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\beta}} \\ \dot{\boldsymbol{\beta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{FF} & \mathbf{C}_{FB} \\ \mathbf{C}_{BF} & \mathbf{C}_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{FF} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{r}_F \\ \mathbf{r}_B \end{bmatrix} \right\}, \quad (82)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{FF} &= \mathbf{J}_{h\varepsilon}^T \mathbf{M}_G \mathbf{J}_{h\varepsilon}, & \mathbf{M}_{FB} &= \mathbf{J}_{h\varepsilon}^T \mathbf{M}_G \mathbf{J}_{hb}, \\ \mathbf{M}_{BF} &= \mathbf{J}_{hb}^T \mathbf{M}_G \mathbf{J}_{h\varepsilon}, & \mathbf{M}_{BB} &= \mathbf{J}_{hb}^T \mathbf{M}_G \mathbf{J}_{hb} + \mathbf{M}_{CR}, \\ \mathbf{C}_{FF} &= \mathbf{J}_{h\varepsilon}^T \mathbf{M}_G \dot{\mathbf{J}}_{h\varepsilon} + \mathbf{C}_G, & \mathbf{C}_{FB} &= \mathbf{J}_{h\varepsilon}^T \mathbf{M}_G \mathbf{H}_{hb} + 2\mathbf{J}_{h\varepsilon}^T \mathbf{M}_G \dot{\mathbf{J}}_{hb}, \\ \mathbf{C}_{BF} &= \mathbf{J}_{hb}^T \mathbf{M}_G \dot{\mathbf{J}}_{h\varepsilon}, & \mathbf{C}_{BB} &= \mathbf{J}_{hb}^T \mathbf{M}_G \mathbf{H}_{hb} + 2\mathbf{J}_{hb}^T \mathbf{M}_G \dot{\mathbf{J}}_{hb} + \mathbf{C}_{CR}, \\ \mathbf{K}_{FF} &= \mathbf{K}_G, \end{aligned}$$

no qual \mathbf{M}_G , \mathbf{C}_G e \mathbf{K}_G são, respectivamente, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez globais do elemento. Estas podem ser construídas facilmente ao colocarem as respectivas matrizes elementares em diagonal na matriz global Shearer (2006). Além disso, tem-se que os esforços externos resultantes são:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_F \\ \mathbf{r}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_{extB} \\ \mathbf{m}_{extB} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{h\varepsilon}^T \\ \mathbf{J}_{hb}^T \end{bmatrix} \mathbf{N} \mathbf{g} + \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{p\varepsilon}^T \\ \mathbf{J}_{pb}^T \end{bmatrix} \mathbf{f}^{pt} + \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\theta\varepsilon}^T \\ \mathbf{J}_{\theta b}^T \end{bmatrix} \mathbf{m}^{pt}. \quad (83)$$

Por fim, as Equações Globais do Movimento (corpo rígido + elementos flexíveis) são escritas como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{FF} & \mathbf{M}_{FB} \\ \mathbf{M}_{BF} & \mathbf{M}_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\beta}} \\ \dot{\boldsymbol{\beta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{FF} & \mathbf{C}_{FB} \\ \mathbf{C}_{BF} & \mathbf{C}_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{FF} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_F \\ \mathbf{r}_B \end{bmatrix}. \quad (84)$$

3.3.7 Inclusão do segundo avião

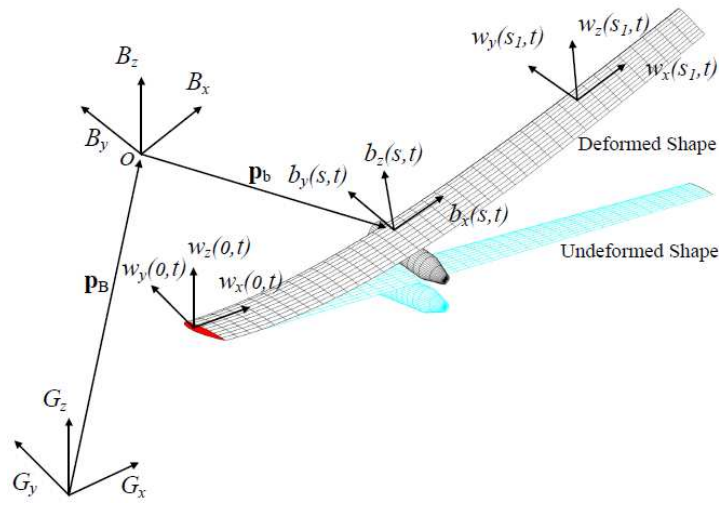
Após desenvolvidas as EdM, a inclusão do segundo avião é relativamente fácil e dividida em duas etapas: primeiramente, são adicionados os efeitos inerciais devido ao segundo avião e, em seguida, as forças e momentos referente a este. Ainda, as forças e momentos que serão aqui detalhados são utilizados igualmente no referencial móvel B

apresentado na Seção 3.3.1 e no MEF utilizando elementos de barra, apresentado na Seção 3.2.

3.3.7.1 Adição dos efeitos inerciais

Para adicionar os efeitos de massa e inércia do segundo avião na ponta do cabo, um novo referencial c é introduzido, o qual possui origem coincidente a um nó qualquer de um elemento flexível e orientação conforme o corpo rígido adicionado Su (2008), como apresentado na Figura 9, a qual utiliza a notação de b para o novo referencial.

Figura 9 – Referencial adotado para inclusão do segundo avião.



Fonte: Su (2008).

Assim, pode-se definir o vetor posição \mathbf{h}_c como:

$$\mathbf{h}_c = [\mathbf{p}^T \quad \mathbf{c}_x^T \quad \mathbf{c}_y^T \quad \mathbf{c}_z^T]^T, \quad (85)$$

em que este vetor pode ser obtido através de uma matriz de rotação \mathbf{D}^{cw} e do vetor posição \mathbf{h} do nó onde o corpo rígido se encontra da seguinte forma:

$$\mathbf{h}_c = \mathbf{D}^{cw} \mathbf{h}. \quad (86)$$

A fim de determinar os coeficientes da matriz de transformação \mathbf{D}^{cw} , constante ao longo do tempo, pode-se utilizar a metodologia proposta por Brown (2003). Para isso, considera-se as matrizes de rotação 3x3, \mathbf{C}^{Bc} e \mathbf{C}^{Bw} , sendo, respectivamente, correspondentes às rotações dos referenciais c e w para B , definidas por:

$$\mathbf{C}^{Bc} = [\mathbf{c}_x \quad \mathbf{c}_y \quad \mathbf{c}_z], \quad (87)$$

$$\mathbf{C}^{Bw} = [\mathbf{w}_x \quad \mathbf{w}_y \quad \mathbf{w}_z], \quad (88)$$

logo, a matriz de rotação \mathbf{C}^{cw} , que transforma os vetores do referencial w para c é dada por:

$$\mathbf{C}^{cw} = \mathbf{C}^{Bc^T} \mathbf{C}^{Bw}. \quad (89)$$

Com isso, a matriz de rotação \mathbf{D}^{cw} é escrita como:

$$\mathbf{D}^{cw} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{C}_{11}^{cw} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{C}_{12}^{cw} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{C}_{13}^{cw} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{C}_{21}^{cw} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{C}_{22}^{cw} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{C}_{23}^{cw} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{C}_{31}^{cw} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{C}_{32}^{cw} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{C}_{33}^{cw} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad (90)$$

em que os índices ij de \mathbf{C}_{ij}^{cw} correspondem, respectivamente, às linhas e às colunas de \mathbf{C}^{cw} . É importante enfatizar que esta matriz \mathbf{D}^{cw} é calculada no instante inicial, onde os vetores \mathbf{c}_x , \mathbf{c}_y e \mathbf{c}_z são conhecidos. Assim, conforme demonstrado matematicamente por Su (2008), a inclusão dos efeitos inerciais devido à adição um corpo rígido no sistema equivale a adicionar a matriz de massa deste corpo no nó onde o corpo é posicionado, sendo transformada por meio da matriz \mathbf{D}^{cw} . Para clarificar essa ideia, considera-se que a matriz de massa do segundo avião escrita de maneira análoga à matriz de massa nodal apresentada pela Equação (53) e também que o CG da aeronave esteja posicionado exatamente na origem de c :

$$\mathbf{M}_{sa} = \begin{bmatrix} m_{p2} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \frac{1}{2}(I_{yy}^{p2} + I_{zz}^{p2} - I_{xx}^{p2}) \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & I_{xy}^{p2} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & I_{xz}^{p2} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & I_{yx}^{p2} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & \frac{1}{2}(I_{xx}^{p2} + I_{zz}^{p2} - I_{yy}^{p2}) \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & I_{yz}^{p2} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & I_{zx}^{p2} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & I_{zy}^{p2} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & \frac{1}{2}(I_{xx}^{p2} + I_{yy}^{p2} - I_{zz}^{p2}) \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad (91)$$

onde m_{p2} representa a massa do segundo avião e I_{ij}^{p2} os componentes do tensor de inércia deste. Com isso, pode-se utilizar a matriz de transformação \mathbf{D}^{cw} a fim de obter a matriz de massa rotacionada para o referencial w :

$$\mathbf{M}_{sa}^w = \mathbf{D}^{cw^T} \mathbf{M}_{sa} \mathbf{D}^{cw}. \quad (92)$$

Desta forma, pode-se adicionar diretamente a matriz \mathbf{M}_{sa}^w ao último nó do cabo. Entretanto, aqui vale ressaltar que, como a massa do avião é adicionada de maneira pontual no nó, e não distribuída como a massa do cabo, não se deve calcular a matriz de massa nodal do cabo, incluir a matriz de massa da aeronave e, em seguida, calcular a matriz de massa elementar \mathbf{M}_e , apresentado na Equação (69). Ao invés disso, deve-se calcular primeiramente a matriz massa global do cabo, \mathbf{M}_G , e, após isso, adiciona-se \mathbf{M}_{sa} às 12 últimas linhas e às 12 últimas colunas de \mathbf{M}_G .

3.3.7.2 Adição dos esforços da aeronave

Baseado nas equações de forças apresentado por Boiffier (2001), pode-se adaptá-las diretamente ao referencial do avião da seguinte maneira:

$$\begin{cases} F_X = F_{Xa} \cdot \cos\alpha - F_{Za} \cdot \sin\alpha + F_{\text{prop}}, \\ F_Y = m_p \cdot g \cdot \sin\phi \cdot \cos\theta + \frac{1}{2}\rho_{\text{air}}V^2SC_y, \\ F_Z = F_{Xa} \cdot \sin\alpha + F_{Za} \cdot \cos\alpha, \end{cases} \quad (93)$$

onde α neste caso é o ângulo de ataque da aeronave, ϕ , θ são os ângulos de Euler referentes aos eixos X e Y do avião, ρ_{air} a densidade volumétrica do ar, F_{prop} a força propulsiva da aeronave, S a área de referência e F_{Xa} e F_{Za} às forças nos eixos X e Z do referencial aerodinâmico da aeronave. Antes de prosseguir ao detalhamento das forças no referencial aerodinâmico, vale destacar que os termos referentes as forças gravitacionais aqui apresentados foram implementados exatamente desta maneira no caso do modelo utilizando elementos de barra, mas, no último caso, para o elemento de viga não linear, foi retirado das equações de força do avião e adicionados em uma etapa posterior ao cabo. Apesar de seguir os mesmos princípios, este segundo modo permitiu uma implementação mais simplificada. Assim, as forças descritas no referencial aerodinâmico são:

$$\begin{cases} F_{Xa} = -\frac{1}{2}\rho_{\text{air}}V^2SC_D - m_p g \sin\gamma, \\ F_{Za} = -\frac{1}{2}\rho_{\text{air}}V^2SC_L + m_p g \cos\gamma, \end{cases} \quad (94)$$

em que C_L e C_D são, respectivamente, os coeficientes de sustentação e arrasto da aeronave e $\gamma = \theta - \alpha$. Além disso, os momentos são dados, no referencial do avião, por:

$$\begin{cases} M_X = \frac{1}{2}\rho_{\text{air}}V^2SlC_l, \\ M_Y = \frac{1}{2}\rho_{\text{air}}V^2SlC_m, \\ M_Z = \frac{1}{2}\rho_{\text{air}}V^2SlC_n, \end{cases} \quad (95)$$

onde l é o comprimento de referência do avião e C_l , C_m , C_n são, respectivamente, os coeficientes de rolagem, arfagem e guinada. Destaca-se que, para os momentos, não foram considerados efeitos da força propulsiva sobre o momento longitudinal, M_Y e, ainda, utilizando a hipótese simplificadora que o cabo está fixado no CG da aeronave, não se tem momento produzido devido às forças deste. Assim, os coeficientes C_L , C_D , C_l , C_m e C_n são dados por:

$$\begin{cases} C_L &= C_{L_\alpha}(\alpha - \alpha_0) + C_{L_q} \frac{ql}{V} + C_{L_{\delta m}} \delta m, \\ C_y &= C_{y_\beta} \beta + C_{y_p} \frac{pl}{V} + C_{y_r} \frac{rl}{V} + C_{y_{\delta n}} \delta n + C_{y_{\delta l}} \delta l, \\ C_D &= C_{D_0} + kC_L^2, \\ C_l &= C_{l_\beta} \beta + C_{l_p} \frac{pl}{V} + C_{l_r} \frac{rl}{V} + C_{l_{\delta n}} \delta n + C_{l_{\delta l}} \delta l, \\ C_m &= C_{m_0} + C_{m_\alpha}(\alpha - \alpha_0) + C_{m_q} \frac{ql}{V} + C_{m_{\delta m}} \delta m, \\ C_n &= C_{n_\beta} \beta + C_{n_p} \frac{pl}{V} + C_{n_r} \frac{rl}{V} + C_{n_{\delta n}} \delta n + C_{n_{\delta l}} \delta l, \end{cases} \quad (96)$$

no qual p , q e r correspondem, respectivamente, às velocidades de rolagem, arfagem e guinada, e δl , δm e δn às deflexões de, respectivamente, aileron, profundor e leme. Desta maneira, ao observar a Equação (96), é possível perceber a importância da obtenção das velocidades lineares e de rotação do avião no seu próprio referencial a fim de computar as forças e momentos atuantes.

Apesar disso parecer uma tarefa trivial na grande parte dos casos, para o cálculo do segundo avião, no fim do cabo, isto possui certa complexidade, dado que todas as velocidades e rotações são escritas justamente em função de deformações. Assim, é necessário certo trabalho para que haja cálculo correto das forças neste ponto, o que será descrito na seção a seguir.

Para os casos do primeiro avião (referencial) móvel, ou mesmo nos aviões implementados utilizando o MEF com elementos de barra, este ponto não foi um problema, dado que possuem referenciais do avião independentes do referencial do cabo. Além disso, como estas forças e momentos são obtidas no referencial do avião, no caso do segundo avião é necessário transformar estes esforços de c para B , dado que toda a formulação de viga é escrita baseada no referencial móvel B . Desta maneira:

$$\mathbf{f}^B = \mathbf{C}^{Bc} \mathbf{f}^c, \quad (97)$$

$$\mathbf{m}^B = \mathbf{C}^{Bc} \mathbf{m}^c. \quad (98)$$

3.3.7.3 Reconstrução velocidades lineares e angulares

Como indicado anteriormente, é necessário reconstruir as velocidades lineares e angulares do segundo avião, visto que estas são dadas, conforme a teoria, em função das deformações da viga e velocidades do referencial B . Inicialmente, para as velocidades lineares, \mathbf{v}_{p2} , isso é relativamente fácil utilizando as três primeiras linhas correspondentes ao último nó de $\dot{h}(s)$ calculadas por meio da Equação (43). No entanto, o resultado é obtido no referencial B , sendo necessária sua transformação:

$$\mathbf{v}_{p2}^c = \mathbf{C}^{cB} \mathbf{v}_{p2}^B, \quad (99)$$

onde, por propriedades de matriz de rotação

$$\mathbf{C}^{cB} = \mathbf{C}^{Bc^T}. \quad (100)$$

Já para o caso das velocidades angulares, é necessário derivar a expressão necessária para cálculo. Considera-se a rotação $\boldsymbol{\theta}$ de um nó expressa no referencial B . Assumindo $\boldsymbol{\theta}$ como uma função das variáveis independentes $\boldsymbol{\varepsilon}$ e \mathbf{b} , tem-se que a derivada de $\boldsymbol{\theta}$ em relação ao tempo é:

$$\boldsymbol{\omega}^B = \dot{\boldsymbol{\theta}}^B = \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \mathbf{b}} \dot{\mathbf{b}} = \mathbf{J}_{\theta\varepsilon} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{J}_{\theta b} \dot{\mathbf{b}}, \quad (101)$$

novamente, estes jacobianos não serão derivados no presente trabalho, mas podem ser encontrados diretamente em Shearer (2006). Com isso, basta novamente selecionar as três linhas correspondentes à rotação do último nó e realizar a transformação destas velocidades angulares para o referencial c :

$$\boldsymbol{\omega}_{P2}^c = \mathbf{C}^{cB} \boldsymbol{\omega}_{P2}^B. \quad (102)$$

3.3.7.4 Recuperação dos ângulos de Euler da segunda aeronave

Como última informação relevante à posição da segunda aeronave, pode-se obter os ângulos de Euler desta em relação ao referencial inercial. Para isso, deve-se obter a matriz de rotação do referencial c para G :

$$\mathbf{C}^{Gc} = \mathbf{C}^{GB} \cdot \mathbf{C}^{Bc}, \quad (103)$$

em que \mathbf{C}^{GB} é a matriz de rotação do referencial B para G , que será apresentada posteriormente na Seção 3.3.8, onde será tratada a propagação do referencial B .

Desta maneira, considera-se a matriz de rotação de um referencial avião genérico f para referencial inercial genérico g Boiffier (2001):

$$T^{gf} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \phi \cos \psi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \phi \sin \psi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \theta \sin \phi \sin \psi + \cos \psi \cos \phi & \sin \theta \cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (104)$$

Conforme Slabaugh (2020), os ângulos de Euler associados a esta matriz podem ser encontrados da seguinte maneira:

$$\theta = -\text{asin}(T_{3,1}^{gf}), \quad (105)$$

em que $T_{i,j}^{gf}$ é o elemento da linha i e coluna j da matriz T^{gf} . Como se pode perceber, a Equação (105) possui inerentemente duas soluções, sendo uma para $-\pi/2 < \theta \leq \pi/2$ e outra para $\pi/2 < \theta \leq 3\pi/2$. No entanto, assumindo que o avião não é acrobático, não

são atingidos ângulos de arfagem além de $\pm 90^\circ$, portanto o segundo intervalo de soluções será descartado. Além disso, o ângulo ϕ é encontrado por:

$$\frac{T_{3,2}^{gf}}{T_{3,3}^{gf}} = \frac{\cos \theta \sin \phi}{\cos \theta \cos \phi} = \tan \phi, \quad (106)$$

$$\phi = \text{atan} \left(\frac{T_{3,2}^{gf}}{T_{3,3}^{gf}} \right),$$

o qual possui novamente dois casos distintos a depender do quadrante de θ , mas que será simplificado como indicado anteriormente, considerando apenas o primeiro intervalo. Além disso, a fim de determinar o quadrante correto de ϕ , pode-se utilizar diretamente a função **atan2** implementada no software MATLAB The MathWorks Inc. (2022a). Analogamente, para o ângulo ψ :

$$\frac{T_{2,1}^{gf}}{T_{1,1}^{gf}} = \frac{\cos \theta \sin \psi}{\cos \theta \cos \psi} = \tan \psi, \quad (107)$$

$$\psi = \text{atan} \left(\frac{T_{2,1}^{gf}}{T_{1,1}^{gf}} \right).$$

3.3.8 Propagação do movimento do referencial B

Após a obtenção das EdM globais, apresentado na Equação (84), pode-se concluir que, ao resolvê-la, não será possível encontrar o vetor posição e vetor rotação do referencial B . Desta forma, deve-se introduzir uma relação suplementar de modo a obter estes parâmetros. Assim, como sugerido por Shearer (2006), a modelagem por quaternions será adotada para as rotações, apresentada na Equação (108).

$$\begin{bmatrix} \dot{\zeta}_0 \\ \dot{\zeta}_1 \\ \dot{\zeta}_2 \\ \dot{\zeta}_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_{B_x} & \omega_{B_y} & \omega_{B_z} \\ -\omega_{B_x} & 0 & -\omega_{B_z} & \omega_{B_y} \\ -\omega_{B_y} & \omega_{B_z} & 0 & -\omega_{B_x} \\ -\omega_{B_z} & -\omega_{B_y} & \omega_{B_x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix}. \quad (108)$$

Além disso, caso necessário, os ângulos de Euler correspondentes à primeira aeronave, referencial B , podem ser diretamente recuperados com o auxílio da função **quat2eul**, presente novamente no software MATLAB The MathWorks Inc. (2022b). Em seguida, segundo Shearer (2006), a equação diferencial para propagação do vetor posição p_B é dada por:

$$\dot{p}_B = C^{GB} v_B, \quad (109)$$

em que

$$\mathbf{C}^{GB} = \begin{bmatrix} \zeta_0^2 + \zeta_1^2 - \zeta_2^2 - \zeta_3^2 & 2(\zeta_1\zeta_2 - \zeta_0\zeta_3) & 2(\zeta_1\zeta_3 + \zeta_0\zeta_2) \\ 2(\zeta_1\zeta_2 + \zeta_0\zeta_3) & \zeta_0^2 - \zeta_1^2 + \zeta_2^2 - \zeta_3^2 & 2(\zeta_2\zeta_3 - \zeta_0\zeta_1) \\ 2(\zeta_1\zeta_3 - \zeta_0\zeta_2) & 2(\zeta_2\zeta_3 + \zeta_0\zeta_1) & \zeta_0^2 - \zeta_1^2 - \zeta_2^2 + \zeta_3^2 \end{bmatrix}. \quad (110)$$

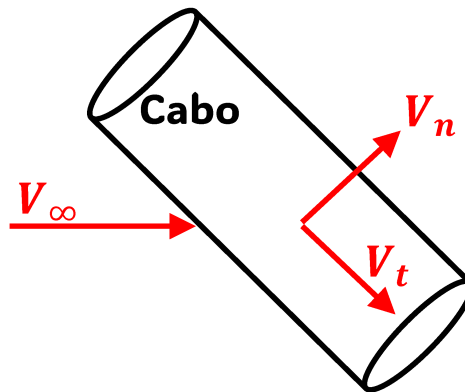
É importante ponderar que a evolução das rotações, descrita pelos quaternions, é essencial para a formulação, dado que, como todos os esforços são escritos justamente no referencial B , é necessário, por exemplo, rotacionar o vetor gravidade para este referencial para que se possa calcular o peso dos componentes, além de outras aplicações como a citada na Seção 3.3.7.4.

Por outro lado, a propagação do vetor posição \mathbf{p}_B não possui grande interesse, dado que, no presente trabalho, o interesse majoritário é da posição do cabo em relação aos aviões e da posição de um avião em relação ao outro, mas não em relação ao referencial inercial. Portanto, ao propagar o vetor posição \mathbf{p}_B apenas é introduzida uma equação diferencial sem grande utilidade para este problema. Assim, esta última relação será desconsiderada na maior parte das simulações, utilizada apenas em casos específicos onde se desejar saber a posição em relação ao referencial G .

3.4 MODELO AERODINÂMICO DO CABO

Enfim, a última etapa de modelagem é incluir os efeitos aerodinâmicos do cabo. Para isso, será adotado o método proposto por Haitao Wang *et al.* (2014), em que as forças serão decompostas em duas componentes diferentes: arrasto normal e arrasto tangencial, de fricção. A fim de exemplificar o procedimento, considere as velocidades decompostas nas direções normal (V_n) e tangencial (V_t), como representado na Figura 10.

Figura 10 – Decomposição das velocidades no cabo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Então, a partir disto, pode-se utilizar a Equação do arrasto (111) para o cálculo de cada componente da força.

$$D = \frac{1}{2}\rho_{\text{air}}V^2SC_D. \quad (111)$$

Ressalta-se que a Equação (111) resulta no módulo da força de arrasto, portanto deve-se aplicar a direção desta antes de somar ambas as componentes. Desta forma, a Equação (112) apresenta o cálculo do arrasto diretamente com a soma vetorial de ambas as componentes, de maneira generalizada e direta para implementação.

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_k = & - \left[\frac{1}{2}\rho_{\text{air}}\|\mathbf{v}_{\text{rel}} - (\mathbf{v}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{n}_k)\mathbf{n}_k\|d_k \frac{L_e}{2}C_d \right] \cdot [\mathbf{v}_{\text{rel}} - (\mathbf{v}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{n}_k)\mathbf{n}_k] \\ & - \left[\frac{1}{2}\rho_{\text{air}}(\mathbf{v}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{n}_k)^2\pi d_k \frac{L_e}{2}C_f \right] \mathbf{n}_k. \end{aligned} \quad (112)$$

onde d_k é o diâmetro do cabo, \mathbf{v}_{rel} o vetor velocidade do cabo em relação ao ar, C_d e C_f são, respectivamente, os coeficientes de arrasto normal e de arrasto de fricção do cabo, o qual serão detalhados na sequência. Mas antes, é importante destacar dois pontos. Primeiramente, o índice k representa a posição nodal no cabo, ou seja, os componentes de arrasto devem ser calculados nó a nó a cada passo de tempo. Além disso, para o MEF não linear utilizando elemento de vigas, o elemento de cabo entre dois nós foi considerado como reto (sem flexão) a fim de facilitar os cálculos aerodinâmicos. Este último ponto é um possível ponto de melhora do modelo em trabalhos futuros, mas pode ser contornado com a utilização de elementos menores, caso necessário, a uma compensação de aumento de custo computacional considerável.

Seguindo para os coeficientes de arrasto, o cálculo destes é realizado com base na metodologia proposta por Vassberg *et al.* (2003), no qual dados experimentais de arrasto de Hoerner (1965) são utilizados para construir uma regressão linear logarítmica por partes baseado nos gráficos apresentados. Desta maneira, o coeficiente de arrasto de fricção pode ser calculado como:

$$\begin{aligned} 10^{-2} < \text{Re} \leq 10^4 & \quad C_f = 4,4609 \cdot \text{Re}^{-0,6667}, \\ 10^4 < \text{Re} \leq 10^{10} & \quad C_f = 0,0464 \cdot \text{Re}^{-0,1667}, \\ 10^{10} < \text{Re} & \quad C_f = 0.001, \end{aligned} \quad (113)$$

e também ilustrado na Figura 11. Ademais, o número de Reynolds para este caso é dado por:

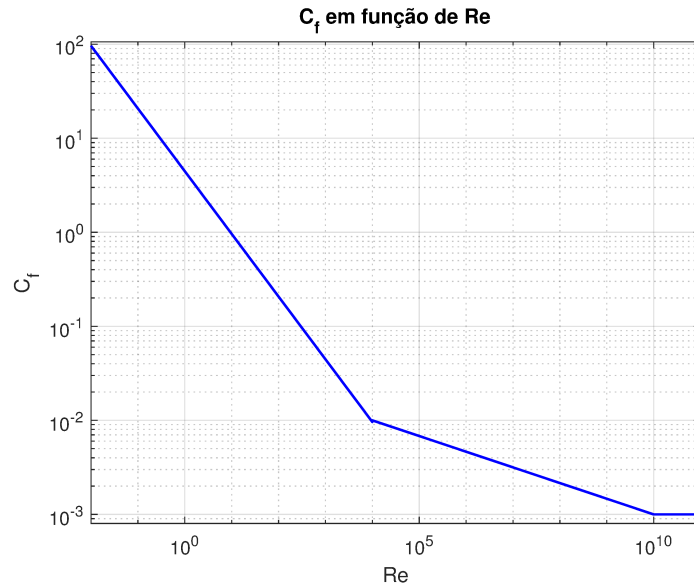
$$\text{Re} = \frac{V_{\text{rel}}L_{\text{ref}}}{\nu}, \quad (114)$$

sendo ν a viscosidade cinemática do ar e L_{ref} :

$$L = \frac{\pi d_k}{2 \sin \alpha_c}, \quad (115)$$

onde α_c é o ângulo entre o elemento de cabo e a direção da velocidade relativa.

Figura 11 – Coeficiente de fricção em função do número de Reynolds.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Além disso, o coeficiente de arrasto normal pode ser escrito como apresentado na Equação (116) e na Figura 12.

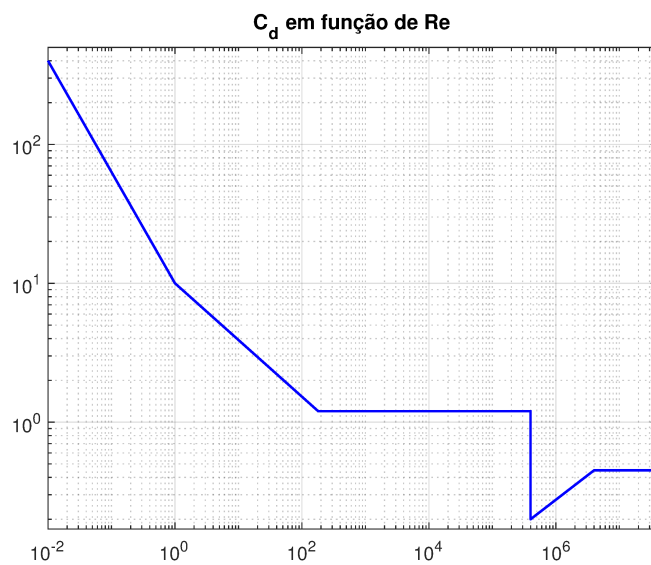
$$\begin{array}{ll}
 10^{-2} < Re_n \leq 1 & C_d = 10 \cdot Re_n^{-0,801}, \\
 1 < Re_n \leq 180 & C_d = 10 \cdot Re_n^{-0,4083}, \\
 180 < Re_n \leq 4 \cdot 10^5 & C_d = 1,2, \\
 4 \cdot 10^5 < Re_n \leq 4 \cdot 10^6 & C_d = 0,002128 \cdot Re_n^{0,3522}, \\
 4 \cdot 10^6 < Re_n & C_d = 0,45.
 \end{array} \quad (116)$$

onde Re_n :

$$Re_n = \frac{V_n d_k}{\nu}, \quad (117)$$

sendo V_n a componente de velocidade normal ao cabo. Ainda, a queda abrupta de coeficiente de arrasto apresentado em $Re_n = 4 \cdot 10^5$ pode ser explicado pela transição total ao escoamento turbulento, o que torna a camada limite mais aderida à superfície do cilindro (cabo) e, por consequência, retarda seu descolamento, reduzindo o arrasto de pressão.

Figura 12 – Coeficiente de arrasto normal em função do número de Reynolds.



Fonte: Elaborado pelo autor.

4 RESOLUÇÃO NUMÉRICA E VERIFICAÇÃO

Após a modelagem matemática do cabo por meio de diversos métodos, o trabalho agora focará na resolução numérica dos modelos MEF com elemento de barra e MEF com elemento de viga não linear. Os métodos numéricos utilizados não serão detalhados de maneira matemática, apenas citados e discutida sua utilização.

Ainda, para o caso do MEF com elemento de barra, uma comparação entre dois métodos de solução será realizada e a utilização de cada um discutida.

Além disso, no caso do MEF com elemento de viga, serão realizadas verificações básicas da implementação do modelo da viga com base nos resultados apresentados no trabalho de Su (2008). Ademais, será verificada a correta implementação do segundo avião, visto que esta segue uma abordagem não convencional, com os parâmetros de posição e velocidades definidos em função da deformação. Para isso, será realizada a comparação com um modelo de referência implementado pelo autor separadamente usando a abordagem clássica, utilizada no cálculo do referencial B .

4.1 RESOLUÇÃO MEF COM ELEMENTO DE BARRA

A fim de resolver este problema proposto numericamente, deve-se definir os estados de integração e o método apropriado. Assim, os estados de integração podem ser escritos como apresentado na Equação (118), assumindo $M\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y}$, como proposto por Li e Z. H. Zhu (2015).

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= M^{-1}\mathbf{y}, \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}_k + \mathbf{f}_w + \mathbf{f}_d + \mathbf{f}_p. \end{cases} \quad (118)$$

Então, para o método numérico, Li e Z. H. Zhu (2015) sugeriram a utilização do método RKGL (Runge-Kutta Gauss-Legendre de 4^a ordem), o qual se trata de um método implícito altamente convergente, mas também com um custo computacional consideravelmente maior que o tradicional RK4 (Runge-Kutta de 4^a ordem). Li e Z. H. Zhu (2015) argumentam que a possível utilização de passos de tempo maiores para o primeiro compensariam o custo computacional adicional. Desta maneira, neste trabalho, ambos os métodos foram implementados a fim de realizar uma comparação e selecionar o mais apropriado.

Adicionalmente, a seleção de um passo de tempo apropriado é importante para garantir a estabilidade e acuracidade da integração. Desta forma, a utilização de um passo de tempo pelo menos dez vezes menor que o menor período presente no sistema garante estas condições Bathe (1982) nos casos simulados. Assim, utilizando o método RKGL essa condição foi de fato verificada, dado que passos de tempo levemente maiores não convergiam. Entretanto, em certos casos, um passo de tempo ainda menor eram requeridos

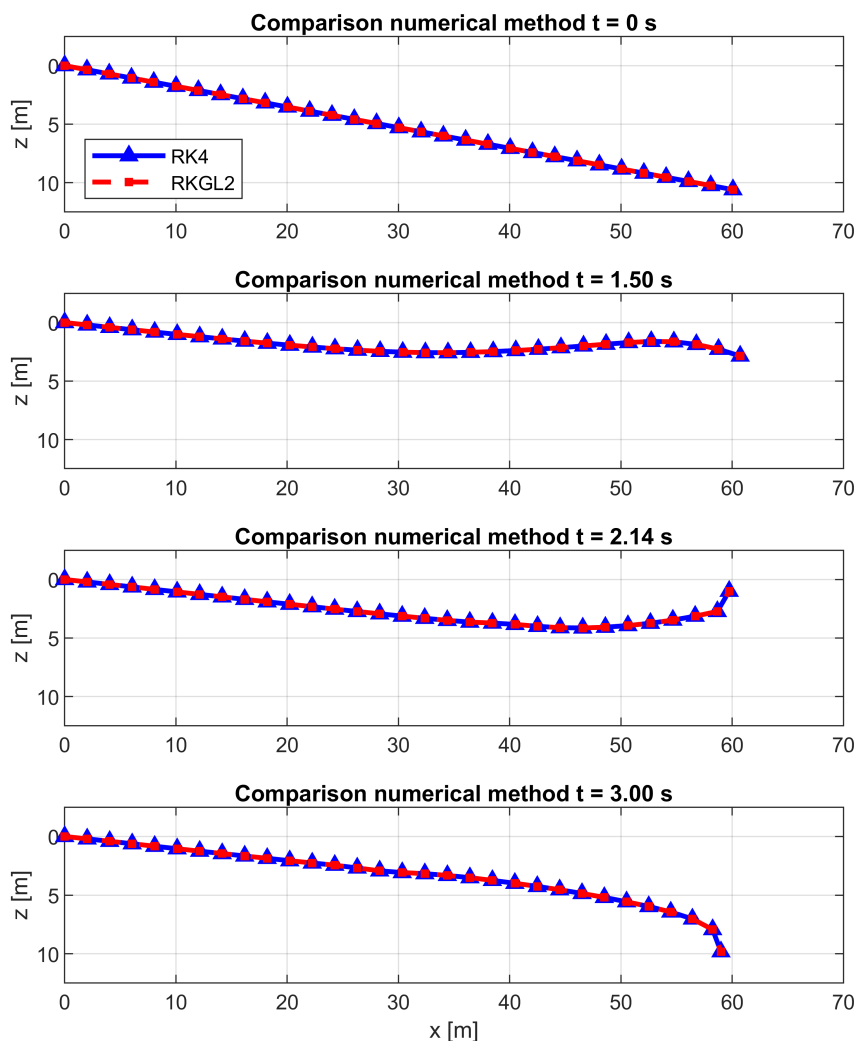
para uma convergência apropriada.

Desta maneira, a menor frequência do sistema para o presente caso é o inverso da frequência natural do elemento de barra, calculada da seguinte maneira:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi L_{e0} \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (119)$$

Após isso, uma simulação baseada no caso estático de reabastecimento aéreo realizada por Z.H. Zhu e S.A. Meguid (2007a), sem nenhuma dinâmica de aeronave, foi executada de forma a comparar ambos métodos numéricos propostos. Para isto, uma caso de 15 segundos, começando fora do ponto de equilíbrio, foi utilizada, com o mesmo passo de tempo definido pelo critério de estabilidade. Os resultados para este caso são apresentados na Figura 13.

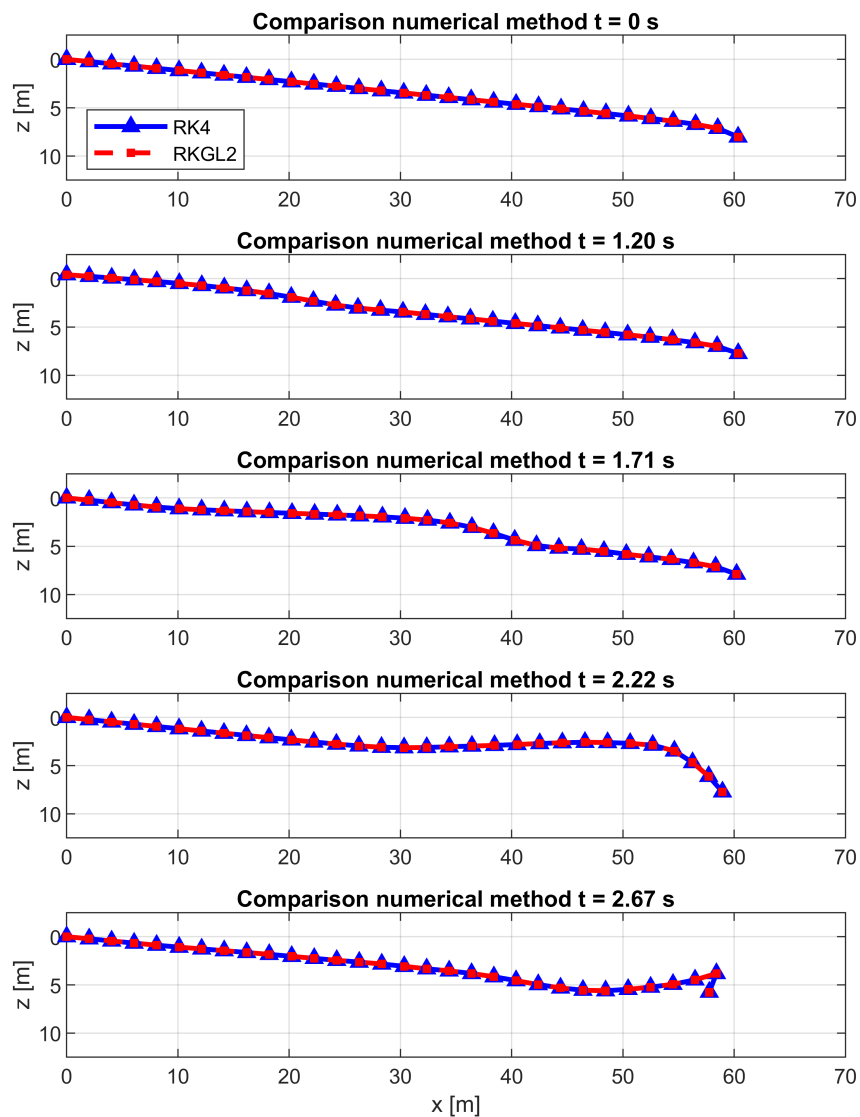
Figura 13 – Comparação entre os métodos de Runge-Kutta.



Fonte: Elaborado pelo autor.

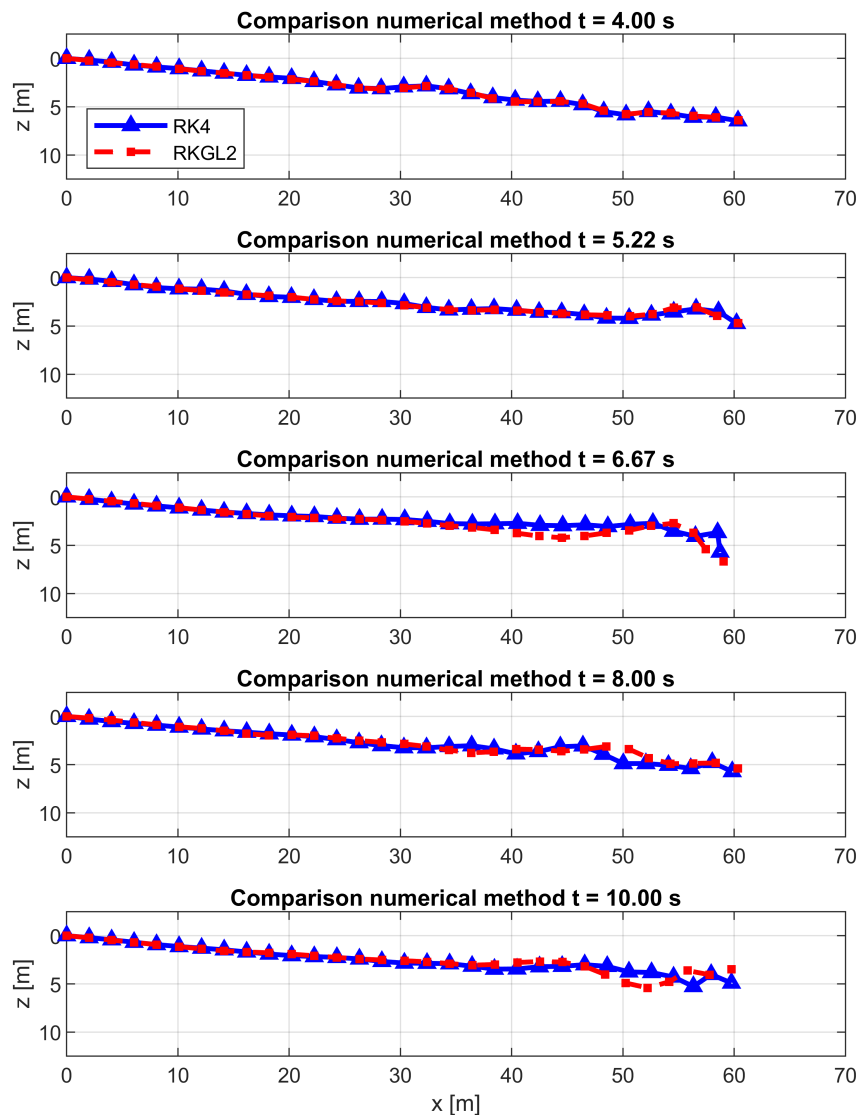
Com isso, verificou-se que a maior diferença encontrada entre as duas simulações em todo o tempo de simulação foi de $1,25 \times 10^{-6}$ m, mas com um custo computacional aproximadamente 5 vezes mais rápido quando utilizado o tradicional método RK4. No entanto, ao começar da posição de equilíbrio e inserir uma perturbação de 0,5 m no começo do cabo, a qual foi amplificada espacialmente devido ao critério de estabilidade proposto por Phillips (1949), o cabo começa a oscilar em um movimento fortemente acoplado, devido ao *bounce back* na massa no fim do cabo. Neste caso, a diferença entre os dois métodos numéricos é clara e apresentada nas Figuras 14 e 15.

Figura 14 – Comparação dos métodos de Runge-Kutta face a uma perturbação - Parte 1.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 15 – Comparação dos métodos de Runge-Kutta face a uma perturbação - Parte 2.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Desta forma, a utilização do método implícito nesse caso é mais adequada devido à inerente maior acuracidade. Além disso, fica claro que condições extremamente instáveis requerem o uso de discretizações espaciais e temporais mais refinadas.

4.2 RESOLUÇÃO MEF COM ELEMENTO DE VIGA NÃO-LINEAR

4.2.1 Implementação

A solução numérica adotada para este caso é o método *Modified Newmark* proposto por Shearer (2006) e que se trata de um método implícito. Como já citado anteriormente,

ele não será desenvolvido matematicamente, mas os princípios utilizados serão discutidos.

Este método consiste basicamente na adoção do método de Newmark, já conhecido para resolução de sistemas dinâmicos, juntamente com a utilização do método de Newton-Raphson para minimização dos resíduos das EdM. Como se pode imaginar, o método possui uma forte convergência, visto que os erros numéricos são minimizados através do controle dos resíduos para dentro de uma margem aceitável.

Além disso, para melhorar ainda mais a convergência Shearer (2006) propõe a utilização de um método de *line search* em iterações nas quais o método de Newton-Raphson não seja suficiente para reduzir o resíduo para dentro da tolerância requisitada. Junto a isso, o autor ainda utiliza um segundo artifício, a fim de “reinicializar” a busca com Newton-Raphson quando identificada a convergência em um mínimo local. No presente trabalho, estes dois últimos artifícios não foram implementados, utilizando-se apenas o método de Newton-Raphson para convergência, o que foi suficiente para obtenção de resultados pertinentes.

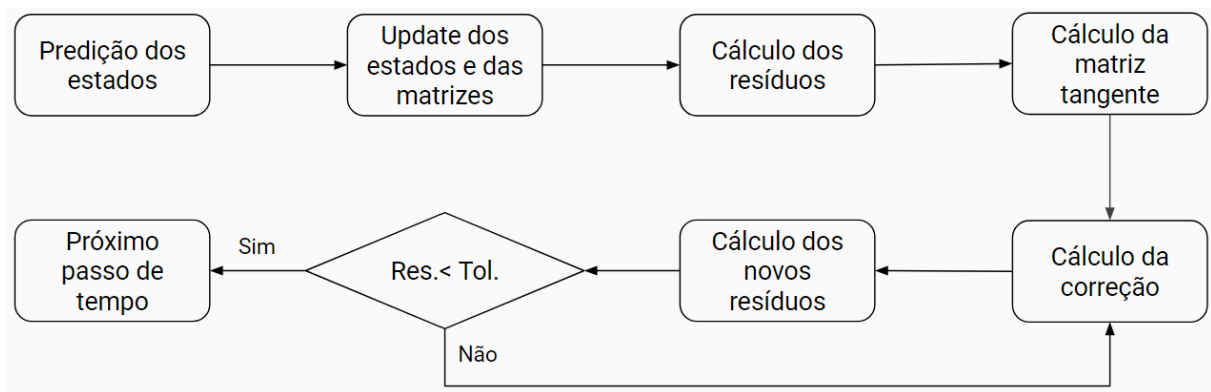
Assim, a evolução do passo de tempo com a utilização do algoritmo *Modified Newmark* acontece em 6 passos:

1. Predição: Neste passo, os estados de integração ε , β , ζ são previstos com base nos estados anteriores;
2. *Update*: Com base nos estados previstos, as matrizes de massa, rigidez, amortecimento e esforços atuantes no cabo são calculadas;
3. Cálculo dos resíduos: Utilizando a EdM global apresentada na Equação (84) e a Equação (108) para os quaternions, pode-se computar os resíduos por meio do valor absoluto da diferença entre os lados direito e esquerdo das equações;
4. Cálculo da matriz tangente: O método de Newton-Raphson envolve o cálculo de uma matriz tangente para convergência dos estados. O passo a passo da obtenção desta matriz é descrito em detalhe por Shearer (2006);
5. Calcular a correção: A correção é obtida através da solução do sistema linear entre os resíduos e a matriz tangente, e é utilizada na atualização dos estados previstos anteriormente no passo 1;
6. Calcular novos resíduos: Com base no mesmo procedimento apresentado no item 3, os resíduos são novamente calculados utilizando os estados corrigidos. Caso o erro seja menor que a tolerância definida pelo usuário, a evolução do passo de tempo é concluída. Caso contrário, volte à etapa 5.

O procedimento descrito também pode ser visualizado por meio do fluxograma apresentado na Figura 16. Com isso, pode-se ponderar pontos importantes com relação ao método. Primeiramente, destaca-se que após realizar a correção dos estados, as matrizes de massa, rigidez e amortecimento não são atualizadas, ou seja, estas serão consideradas constantes durante a fase iterativa do método Shearer (2006). Além disso, os esforços aero-

dinâmicos do cabo e as forças atuantes nos aviões também serão consideradas constantes durante o intervalo de tempo, devido à natureza altamente não-linear destes parâmetros em função dos estados. Com base nessa hipótese, a matriz tangente não é alterada entre dois passos de ciclo de convergência de Newton-Raphson e, portanto, não é necessária ser atualizada. Por estas razões que, ao calcular os novos resíduos, o método retorna à etapa 5 ao invés da etapa 2. O fato de manter estes parâmetros constantes pode ser explicado pela razão de que os ganhos de precisão em relação à atualização dos parâmetros não é compensado pelo aumento da dificuldade de convergência e aumento do custo computacional associado.

Figura 16 – Fluxograma do método de solução numérica *Modified Newmark*



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.2.2 Verificação

Desta maneira, à partir do modelo implementado, buscou-se primeiramente verificá-lo, para então, prosseguir com a obtenção dos resultados. Assim, utilizou-se o caso teste proposto por Su (2008) em seu trabalho, no qual uma viga com as propriedades apresentadas na Tabela 2 foi adotada para avaliações estáticas e dinâmicas.

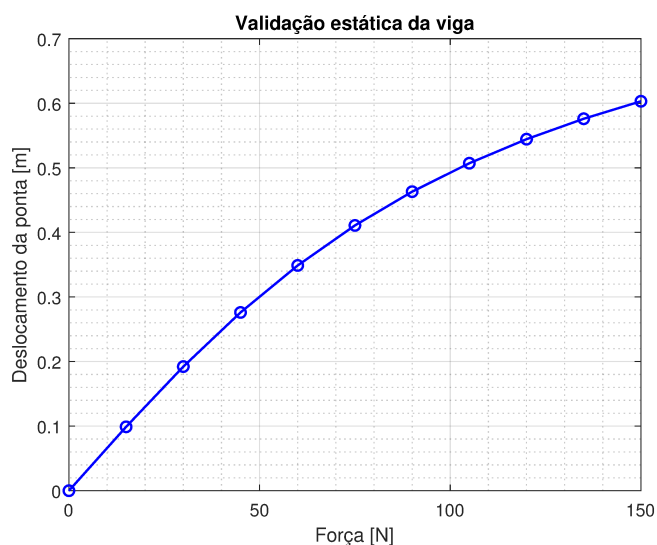
Tabela 2 – Dados viga de verificação.

Propriedade	Valor	Unidade
Comprimento	1	[m]
Rigidez à tração (K_{11})	1×10^6	[Pa·m ²]
Rigidez à torção (K_{22})	80	[N·m ²]
Rigidez à flexão no plano (K_{33})	50	[N·m ²]
Rigidez à flexão fora do plano (K_{44})	$1,25 \times 10^3$	[N·m ²]
Densidade linear	0,1	[kg/m]
Momento de Inércia de rotação (I_{xx})	$1,3 \times 10^{-4}$	[kg·m]
Momento de Inércia de flexão do plano (I_{yy})	5×10^{-6}	[kg·m]
Momento de Inércia de flexão fora do plano (I_{zz})	$1,25 \times 10^{-4}$	[kg·m]

Fonte: Su (2008).

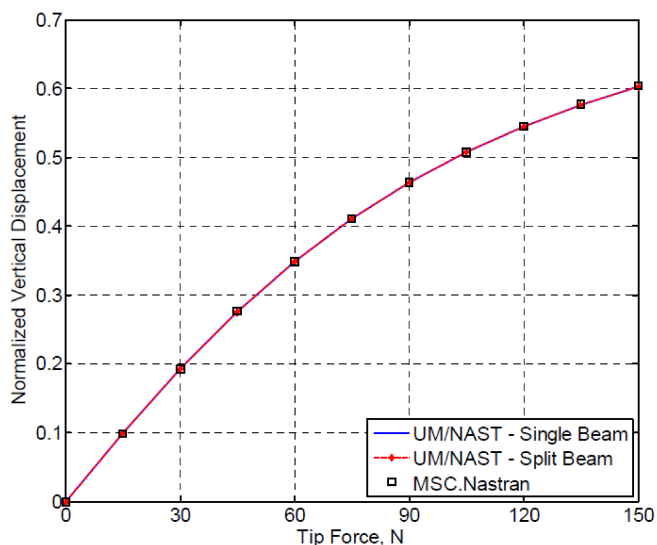
Desta forma, para o primeiro teste, uma série de forças pontuais, começando de 15 N até 150 N com intervalo de 15 N, foram aplicadas na ponta da viga a fim de avaliar o deslocamento desta no eixo Z , utilizando uma discretização espacial de 20 elementos. Assim, os resultados obtidos estão apresentados na Figura 17. Como é possível observar, os valores de deslocamento e comportamento da viga são próximos aos resultados obtidos por Su (2008), Figura 18, o que garante a validade do modelo no quesito estático.

Figura 17 – Verificação estática do modelo de viga não linear.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 18 – Resultado de referência para verificação estática da viga não linear.

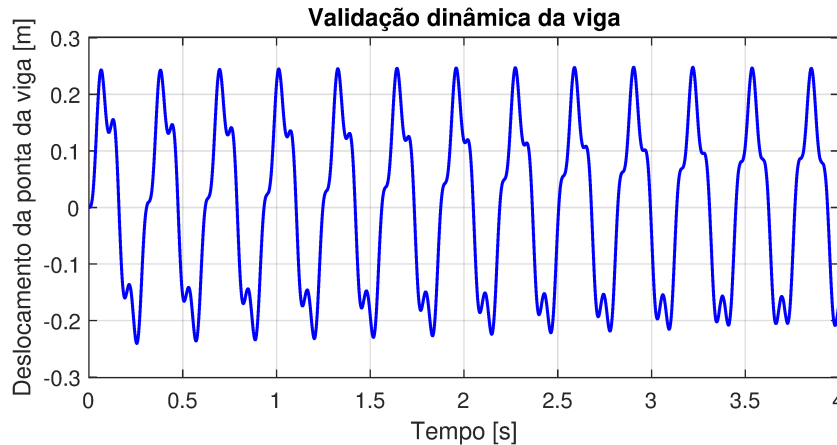


Fonte: Su (2008).

Além disso, principalmente para o presente trabalho, é de extrema importância verificar o comportamento dinâmico da viga. Com este fim, foi utilizado um caso novamente

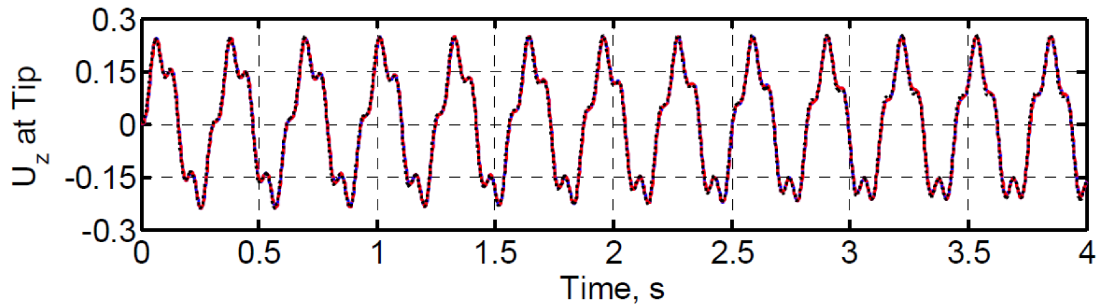
proposto por Su (2008) no qual uma força senoidal $F_t = 30 \cdot \sin(20t)$ foi aplicada na ponta da viga. Então, utilizando a discretização espacial da viga em 20 elementos e discretização temporal em 0,0025 segundos, os resultados obtidos são apresentados na Figura 19. Além disso, os resultados obtidos por Su (2008) é apresentado para fins de comparação na Figura 20.

Figura 19 – Verificação dinâmica do modelo de viga não linear.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 20 – Resultado de referência para verificação dinâmica da viga não linear.



Fonte: Su (2008).

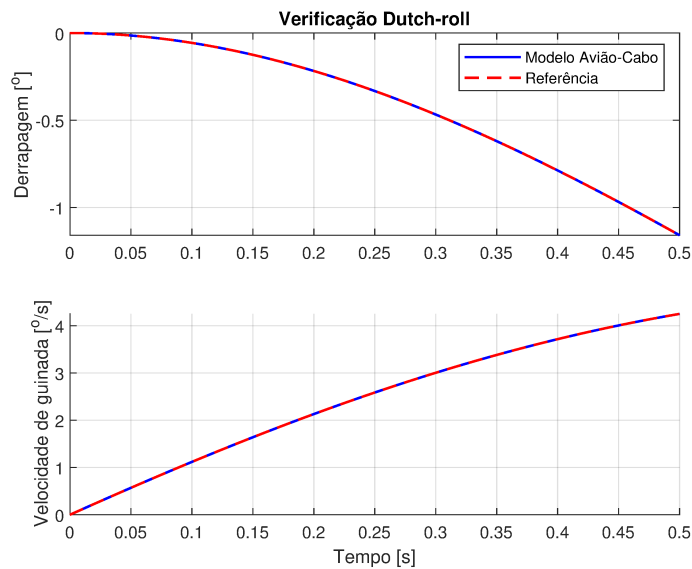
Desta forma, é possível concluir que o comportamento dinâmico da viga é semelhante àquele apresentado por Su (2008) em seu trabalho. Então, considera-se que o modelo dinâmico da viga está verificado, com eventuais pequenas decalagens encontradas podendo ser justificadas pelas diferenças entre os parâmetros de solução tais como o raio espectral utilizado no método *Modified Newmark* ou o passo de discretização espacial para calcular a derivada $\partial \mathbf{J}_{h\varepsilon} / \partial \varepsilon$.

Com o comportamento estático e dinâmico da viga verificados, resta a verificação principalmente do modelo desenvolvido neste para cálculo do segundo avião, na ponta do cabo, visto que, como discutido anteriormente, trata-se de um modelo não convencional. Para isso, a referência utilizada foi um algoritmo desenvolvido pelo autor, com base

nas EdM tradicionais de um avião, apresentadas nas Seções 3.3.1 e 3.3.7.2. Além disso, será realizada a comparação apenas entre os modos rápidos da aeronave, isto é, *short period*, *dutch roll*, rolagem e espiral, visto que serão realizadas simulações curtas de 0,5 segundos. As razões pelas quais foi utilizado um curto intervalo de tempo são simples: com uma pequena duração, consegue-se desconsiderar brevemente os efeitos do cabo atuantes no avião; erros numéricos que se propagam ao longo do tempo são minimizados; custo computacional elevado do modelo numérico para realizar longas simulações.

Desta forma, iniciando com o modo de *dutch-roll*, este foi excitado por meio de um comando de leme $\delta n = -5^\circ$ durante os 0,5 segundos de simulação. Com isso, os efeitos sobre o ângulo de derrapagem β e a velocidade de guinada r podem ser observados e comparados na Figura 21.

Figura 21 – Verificação dos parâmetros relacionados a *dutch-roll* na segunda aeronave.



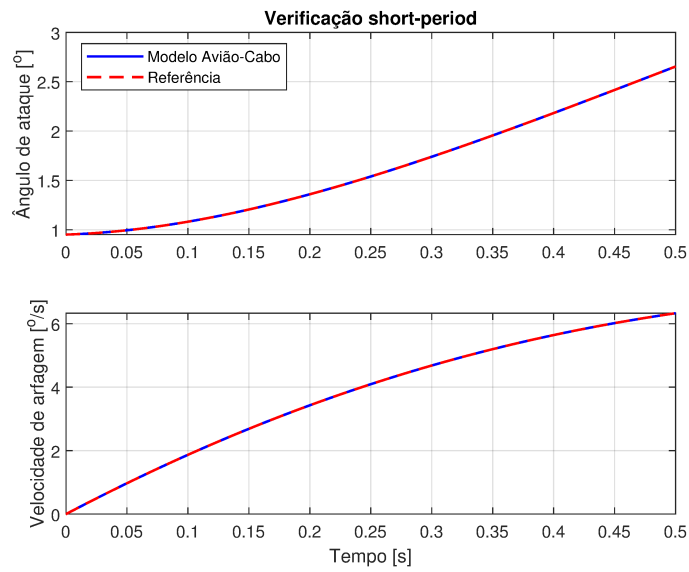
Fonte: Elaborado pelo autor.

Como pode-se observar, o modelo do avião com base no referencial do cabo possui resposta idêntica a do avião de referência. Então, segue-se para a verificação sobre os estados relacionados a *short-period*. Para isso, a aeronave será excitada por meio de um comando de profundor $\delta m = -4^\circ$ e os parâmetros ângulo de ataque, α , e velocidade de arfagem, q , serão avaliados. Desta forma, os resultados associado ao segundo teste estão apresentados na Figura 22.

Novamente, os resultados apresentados foram considerados satisfatórios em termos de verificação. Para o último teste, um comando de aileron $\delta l = -5^\circ$ foi aplicado e avaliados os parâmetros de ângulo de rolagem (*bank angle*) ϕ e velocidade de rolagem p . Desta maneira, os resultados obtidos são apresentados na Figura 23.

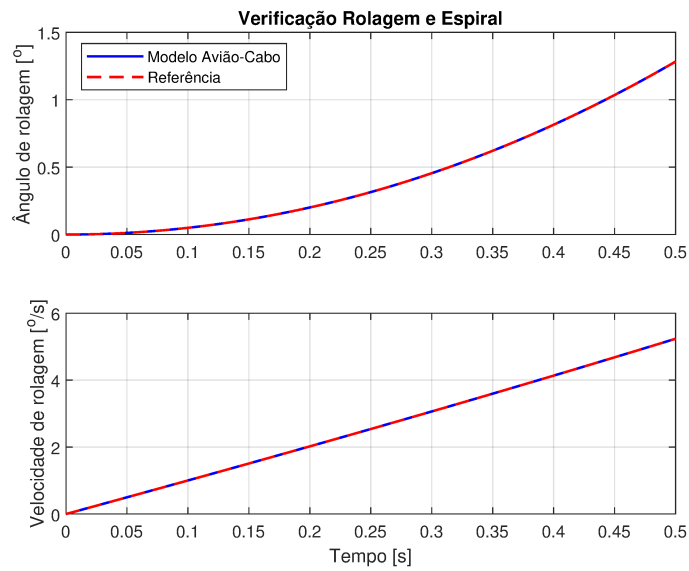
Portanto, os modos do segundo avião são considerados suficientemente representativos para prosseguir com a avaliação dos resultados.

Figura 22 – Verificação dos parâmetros relacionados a *short period* na segunda aeronave.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 23 – Verificação dos parâmetros relacionados a rolagem e espiral na segunda aeronave.



Fonte: Elaborado pelo autor.

5 RESULTADOS

Este capítulo será dedicado à apresentação dos resultados obtidos com base nos métodos anteriormente apresentados e verificados. Para isso, esta apresentação será dividida em duas partes: verificação do critério de estabilidade de Phillips (1949) e comparação dos modelos; apresentação dos modelos completos, incluindo os aviões.

5.1 VERIFICAÇÃO DO CRITÉRIO DE PHILIPS E COMPARAÇÃO DOS MODELOS

Esta seção é dedicada à verificação da condição de estabilidade proposta por Phillips (1949) e a comparação entre os modelos de MEF propostos. Para isso, considere as propriedades do cabo apresentados na Tabela 3 e parâmetros de simulação na Tabela 4.

Ainda, ressalta-se que foram adicionados uma massa e uma força de arrasto à ponta do cabo, de modo a restringir moderadamente o movimento desta e possibilitar o ajuste da tensão no cabo, alterando, assim, a velocidade de onda de propagação neste e permitindo a melhor visualização do amortecimento ou não das perturbações.

Tabela 3 – Propriedades físicas do cabo.

Propriedade	Estável	Instável
Velocidade do escoamento [m/s]	40	75
Densidade linear do cabo [kg/m]	0,1	0,9
Força de arrasto na ponta* [N]	0,35Q*	0,085Q*
Comprimento do cabo [m]	60	
Diâmetro do cabo [mm]	30	
Módulo de elasticidade [GPa]	35	
Densidade do ar [kg/m ³]	0,9779	
Viscosidade cinemática [m ² /s]	1,75 × 10 ⁻³	
Massa adicionada na ponta [kg]	20	
Amortecimento estrutural (elemento de viga) [%]	1	

$$*Q = \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} V^2 - \text{Pressão dinâmica}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

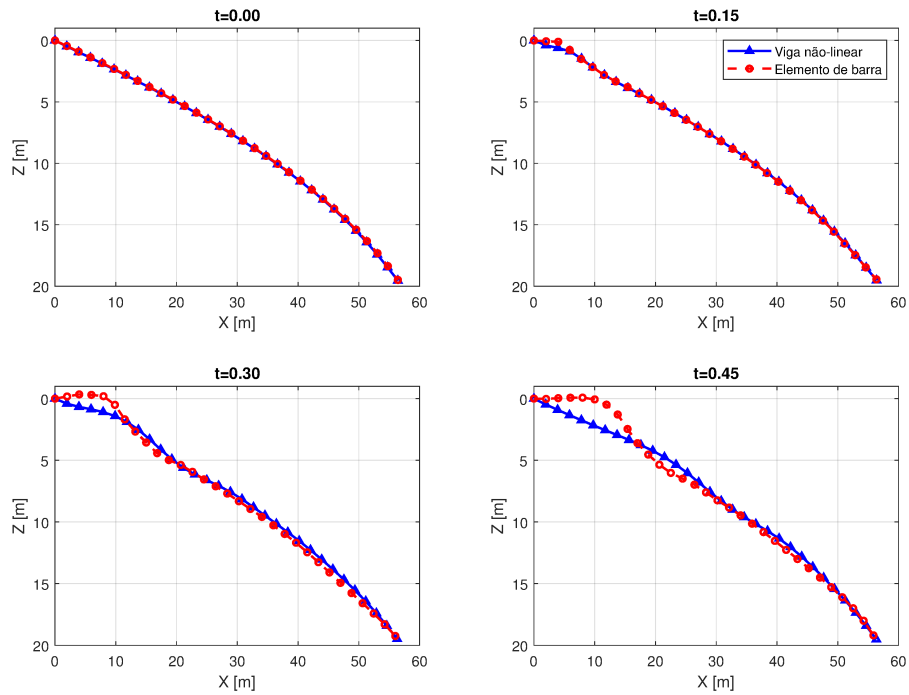
Tabela 4 – Parâmetros de solução.

Parâmetro	Elemento de barra	Elemento de barra	Elemento de viga
	Estável	Instável	Estável e Instável
Número de elementos	30	30	15
Passo de tempo	2,5 × 10 ⁻⁵	5 × 10 ⁻⁵	1 × 10 ⁻⁴
Método numérico	RK4	RKGL	Modified Newmark
Raio espectral (ρ_{∞})	-	-	0,99

Fonte: Elaborado pelo autor.

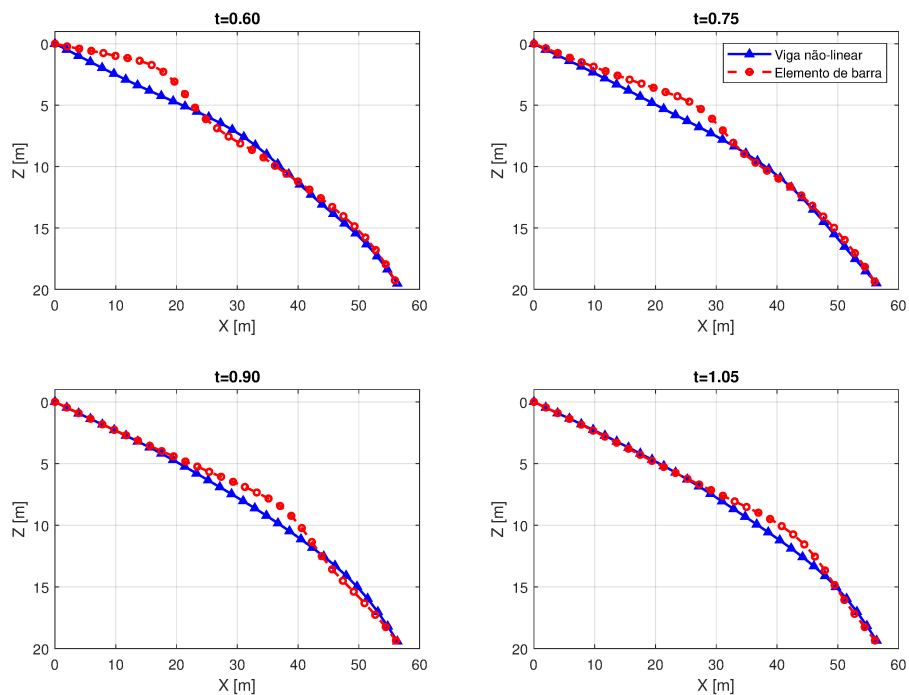
Assim, as Figuras 24, 25 e 26 apresentam a simulação do cabo para a condição estável, na qual uma perturbação (força) de 500 N e duração de 0,05 segundos foi aplicada a partir de 0,1 segundos no terceiro nó dos modelos, a contar da condição de contorno.

Figura 24 – Simulação condição estável do cabo - Parte 1.



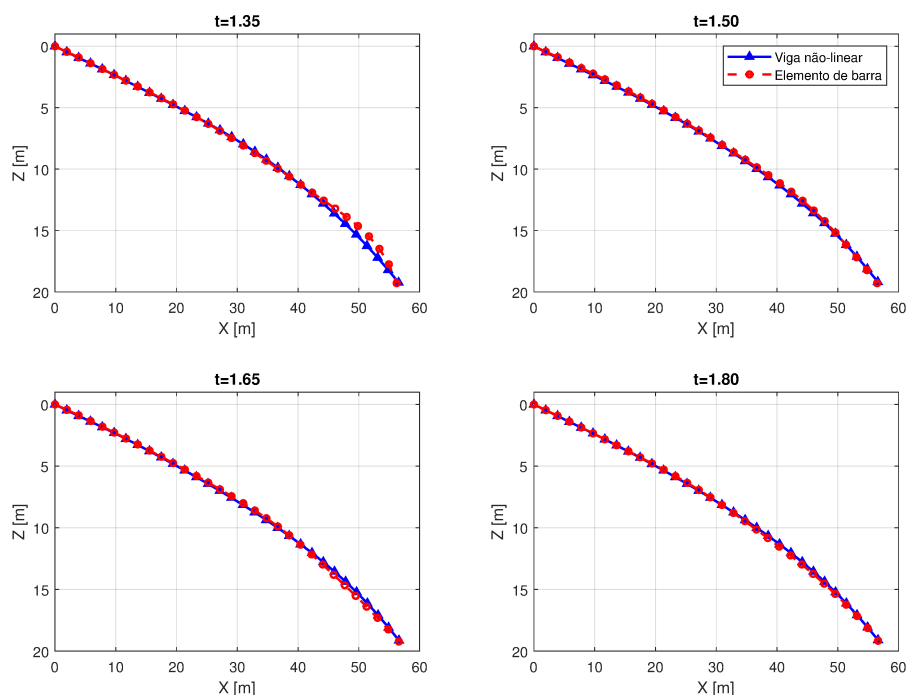
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 25 – Simulação condição estável do cabo - Parte 2.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 26 – Simulação condição estável do cabo - Parte 3.



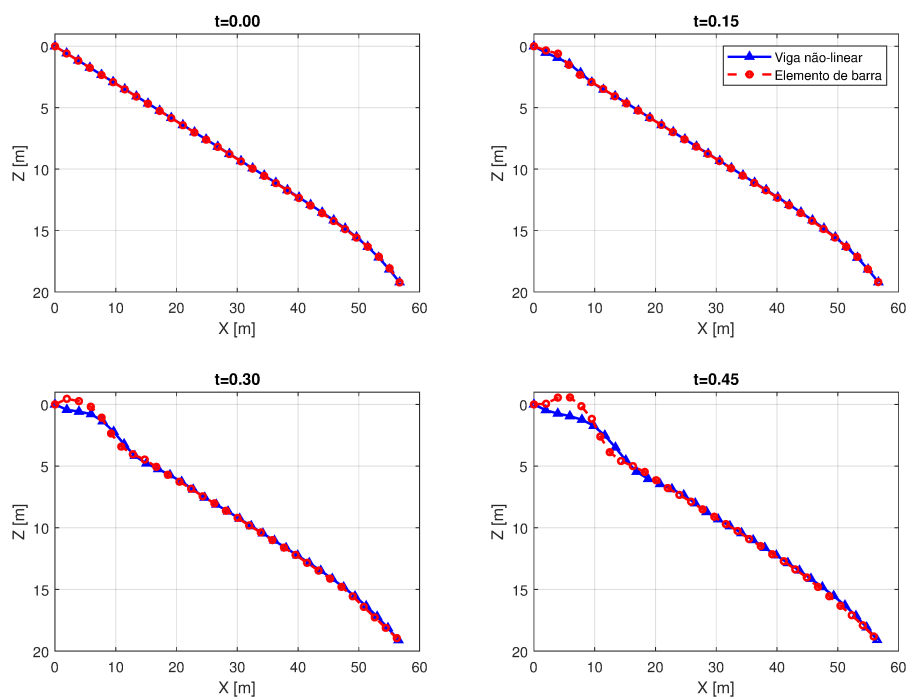
Fonte: Elaborado pelo autor.

Ademais, a velocidade de propagação mínima calculada para o MEF utilizando elemento de barra foi de 58,10 m/s, enquanto para o elemento de viga foi de 58,14 m/s. Ressalta-se que, nesta condição de inicialização, a tensão do cabo decresce ao longo deste e, portanto, as velocidade de propagação no final do cabo serão necessariamente menores. No entanto, pode-se perceber que, para ambos os tipos de elemento, o cabo encontra-se em uma condição estável e as perturbações são rapidamente amortecidas.

O primeiro ponto a ser observado é no instante inicial, onde pode-se notar que, estaticamente, os modelos possuem comportamentos próximos em um caso no qual a curvatura do cabo é relativamente suave. Além disso, ambos os modelos foram capazes de amortecer sem maiores dificuldades a perturbação inserida no começo do cabo. No entanto, percebe-se que a perturbação inserida possui efeito consideravelmente maior no modelo do elemento de barra, o que pode ser explicado por duas razões: inclusão dos esforços de flexão, que irá restringir o movimento do cabo devido à perturbação; condição de contorno diferentes, sendo engastada para o elemento de viga e livre para rotação no caso do elemento de cabo. Além disso, devido aos esforços de flexão e o amortecimento estrutural, o elemento de viga amortece as perturbações mais rapidamente.

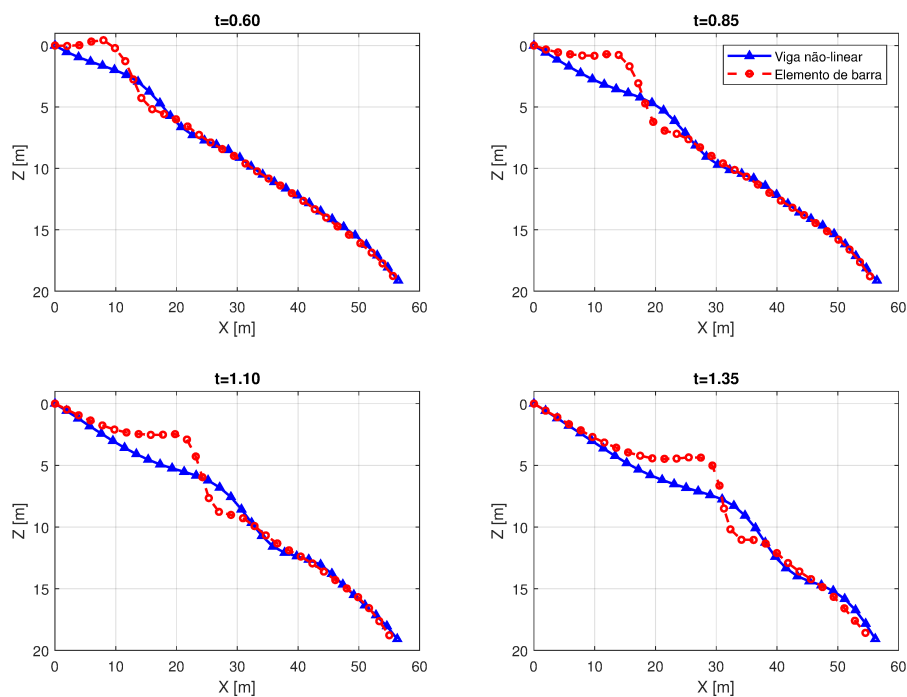
Em seguida, passa-se à condição instável, no qual uma força de 1500 N e duração idêntica à anterior foi aplicada igualmente no terceiro nó dos modelos e os resultados obtidos estão apresentados nas Figuras 27, 28 e 29.

Figura 27 – Simulação condição instável do cabo - Parte 1.



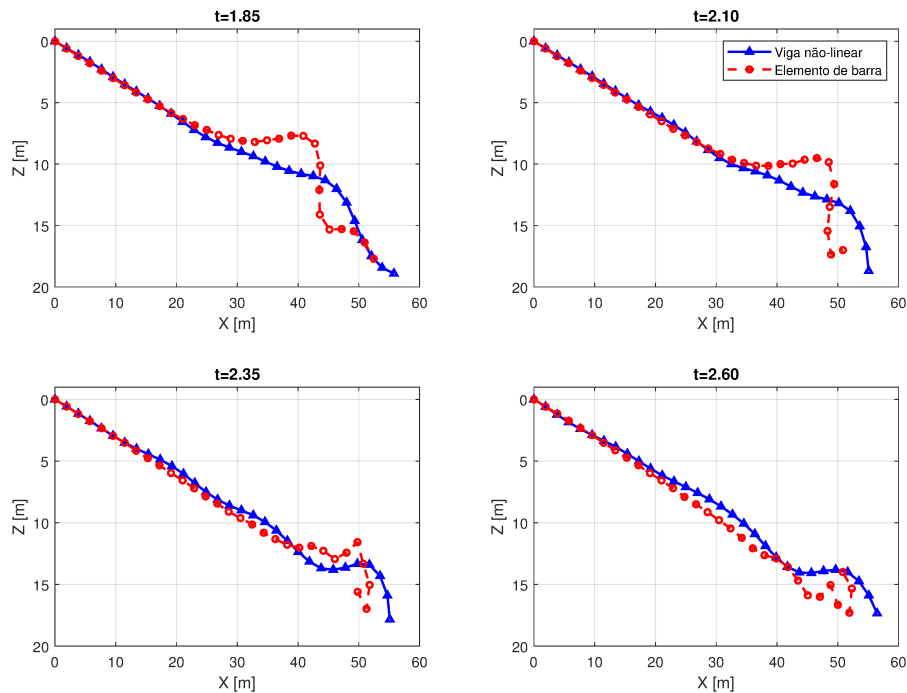
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 28 – Simulação condição instável do cabo - Parte 2.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 29 – Simulação condição instável do cabo - Parte 3.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para este caso, a força foi multiplicada em três vezes em magnitude em relação ao caso anterior, pois devido ao aumento da densidade linear do cabo a fim de ajustar a velocidade de propagação da onda, a força de 500 N não produziu uma perturbação relevante a ponto de ser visualizada e analisada. Este fato pode ser verificado no tempo $t=0,15$ na Figura 27, em que, no fim do tempo de aplicação da força, verifica-se um deslocamento menor no caso instável quando comparado ao estável.

Desta maneira, pode-se iniciar a análise pelas velocidades de propagação da onda calculada no instante inicial em ambos os casos. Para o elemento de barra, a velocidade máxima de propagação encontrada foi de 24,32 m/s, enquanto para o elemento de viga foi de 24,37 m/s. Portanto, para ambos os tipos de elemento, o cabo está em uma situação consideravelmente instável em relação ao critério de estabilidade.

Ainda, assim como no caso anterior, os resultados estáticos entre os dois modelos possuem ótima concordância entre si, com comportamento quase idêntico. Além disso, pelas mesmas razões discutidas anteriormente, a força inserida produz uma perturbação em termos de deslocamento no cabo muito maiores para o caso do elemento de barra quando comparados ao elemento de viga. Ademais, ambos os tipos de elementos amplificam a perturbação inserida, mas o elemento de viga aparenta uma menor amplificação. Adicionalmente, percebe-se no final da simulação que o cabo modelado por elemento de barras forma “quinas” próximo à massa quando a onda é ricocheteada. Desta maneira, ao considerar a modelagem de um cabo contínuo, a aparição de uma quina evidencia o não respeito à continuidade de inclinação e curvatura propiciados pela utilização do elemento

de viga, o que causará, inerentemente, diferenças consideráveis no comportamento de ambos os modelos.

5.2 MODELO INTEGRADO CABO E AVIÕES

Esta seção será dedicada à apresentação dos resultados de ambos modelos integrados aos aviões. A intenção aqui não será mais realizar uma comparação, mas apresentar separadamente os modelos e avaliar sua coerência física, com um enfoque maior ao modelo utilizando elemento de viga. Para isso, considere as propriedades dos aviões, que serão comuns aos dois casos, na Tabela 5. Dado que as propriedades do cabo e de solução diferem entre o teste realizado para elemento de barra e os testes de elemento de viga, estas serão apresentadas em suas respectivas seções.

Tabela 5 – Características da aeronaves.

Propriedades de massa e dimensão					
Massa [kg]	$1,1 \times 10^6$				
I_{xx} [$\text{kg}\cdot\text{m}^2$]	$5,55 \times 10^6$				
I_{yy} [$\text{kg}\cdot\text{m}^2$]	$9,72 \times 10^6$				
I_{zz} [$\text{kg}\cdot\text{m}^2$]	$14,51 \times 10^6$				
I_{xz} [$\text{kg}\cdot\text{m}^2$]	$-3,3 \times 10^4$				
Superfície de referência [m^2]	260				
Comprimento de referência [m]	6,6				
Coeficientes longitudinais					
	0	α	q	δ_m	
Sustentação (C_L)	-	5	-	0,44	
Momento de arfagem (C_m)	-0,1	-1	-12	-1,46	
α [$^\circ$]	-2	-	-	-	
Coeficientes de arrasto					
	$C_{D0}=0,0175$			$k_i=0,055$	
Coeficientes laterais					
	β	p	r	δ_l	δ_n
Força lateral (C_Y)	-1,5	-	-	-	-
Momento de rolagem (C_l)	-1,3	-	2,9	-0,33	0,25
Momento de guinada (C_n)	1,75	-	-7,5	-0,125	-1

Fonte: Elaborado pelo autor.

5.2.1 Elemento de barra

Dado o maior interesse no estudo utilizando elemento de viga por sua melhor representatividade física, apenas um caso teste foi desenvolvido para aviões conectados por um cabo com elementos de barra. Para isso, as propriedades do cabo, do ar e parâmetros de simulação adotados são apresentados na Tabela 6. Além disso, a Figura 30 apresenta a posição inicial adotada, em que a posição relativa do segundo em relação ao primeiro é

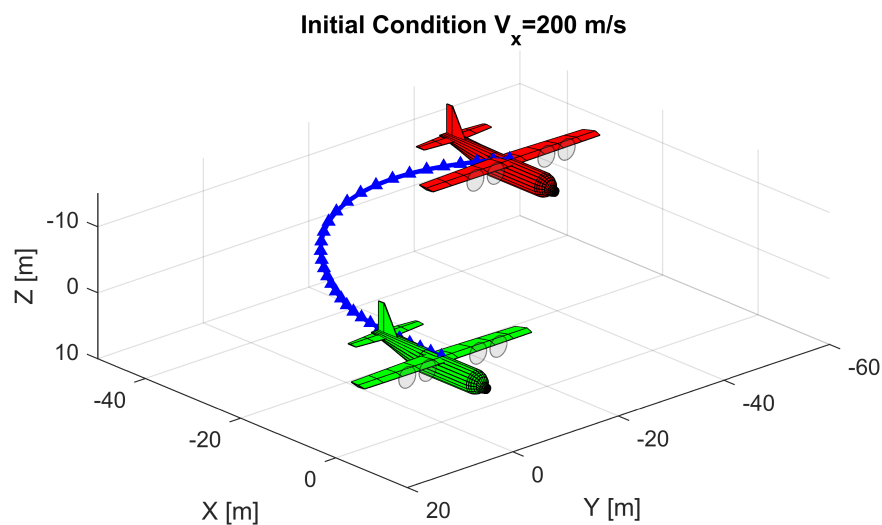
de -30 metros em X , $-40m$ em Y e $-10m$ em Z . Os aviões foram traçados graficamente com o auxílio da biblioteca Greene (2022) em MATLAB.

Tabela 6 – Propriedades do cabo, do ar e parâmetros de simulação - Elemento de barra.

Parâmetro	Valor
Comprimento do cabo [m]	80
Diâmetro do cabo [m]	76×10^{-3}
Módulo de elasticidade [GPa]	35
Número de elementos	32
Densidade do ar [kg/m^3]	1,22
Viscosidade cinemática [m^2/s]	$1,40 \times 10^{-5}$
Densidade linear do cabo [kg/m]	3,09
Passo de tempo [s]	1×10^{-4}
Método numérico	RK4

Fonte: Elaborado pelo autor.

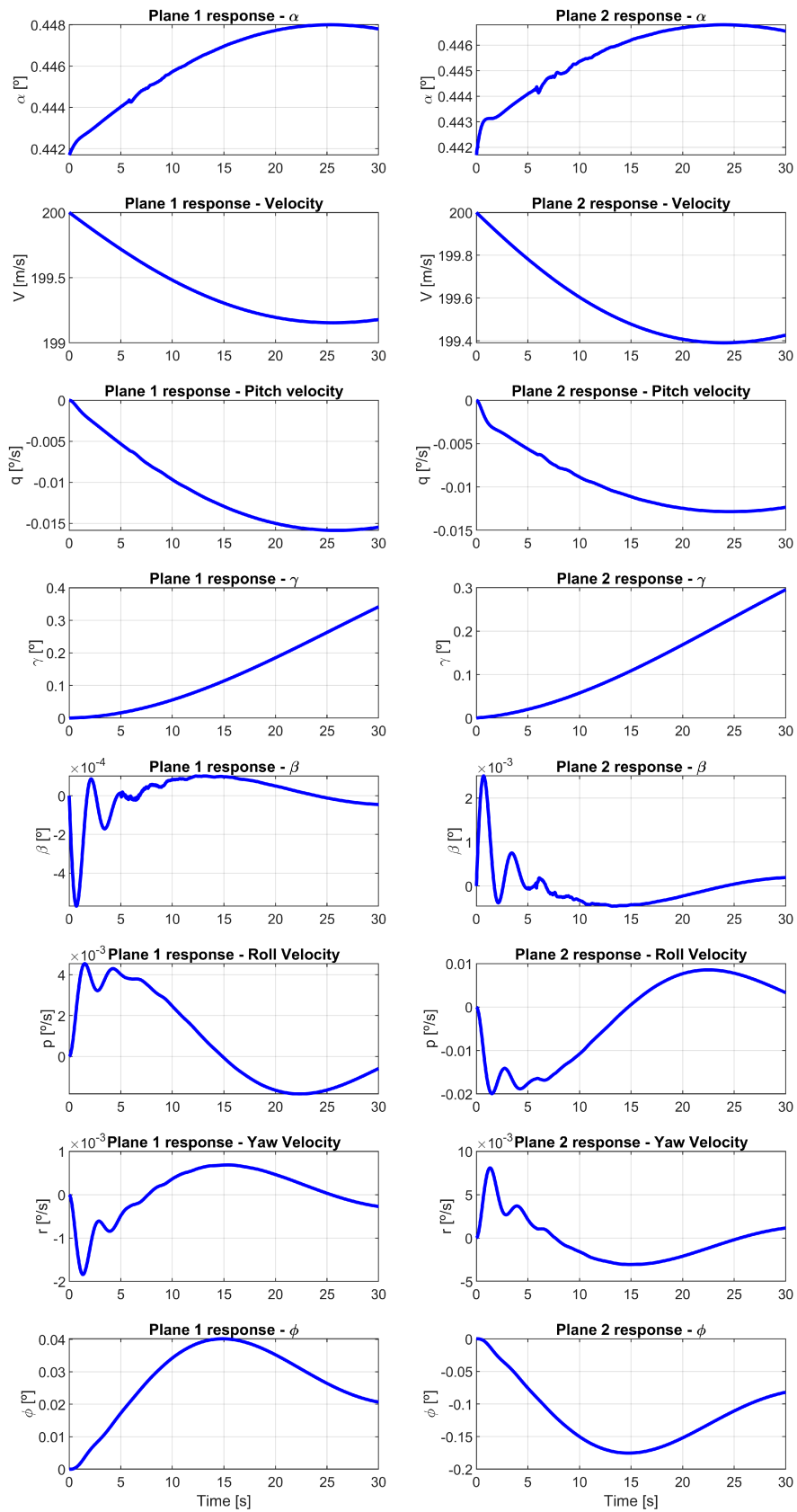
Figura 30 – Posição inicial dos aviões para estudo de caso utilizando elemento de barra.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Este caso teste consistiu em ambos aviões voando sem comandos aplicados, a fim de observar a resposta destes ao longo do tempo, e uma perturbação de 2000 N aplicada durante 0,1 segundos no meio do cabo em $t = 5$ segundos. Considerando que a perturbação irá ser propagada contra o escoamento devido ao posicionamento dos aviões e considerando a elevada massa e elevados momentos de inércia de ambos, espera-se apenas pequenas perturbações observadas nos estados das aeronaves, o que foi efetivamente verificado na Figura 31.

Figura 31 – Evolução dos estados dos aviões utilizando elemento de barra.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Percebe-se que a perturbação inserida produziu efeito mais significativo sobre as variáveis relativas à direção em relação ao vento (ângulo de ataque e derrapagem), enquanto produziu efeito quase nulo sobre os outros estados avaliados. Isto pode ser explicado pelo fato de que o cabo está acoplado no CG da aeronave e, portanto, a força não causa grandes efeitos em termos de momentos, mas possui influência na velocidade das aeronaves.

Além disso, pode-se avaliar a coerência física, em que as variáveis longitudinais de ambos aviões possuem tendências semelhantes, enquanto as laterais possuem tendências opostas. As diferenças em magnitude são facilmente explicadas pela assimetria de inicialização dos aviões em relação ao cabo.

Avaliando os resultados analisados, considerou-se que o acoplamento entre as aeronaves com o modelo de cabo utilizando elemento de viga produziu respostas fisicamente coerentes e pode ser utilizado para obtenção de resultados mais rápidos quando comparado ao modelo de viga. No entanto, o modelo de viga possui uma física inerentemente mais representativa devido à representação dos esforços de flexão e, por isso, um enfoque maior foi dado neste trabalho.

5.2.2 Elemento de viga

Para avaliar a coerência física do modelo implementado utilizando elemento de viga, três casos testes foram propostos, utilizando-se as propriedades do cabo, do ar e parâmetros de simulação apresentados na Tabela 7.

Tabela 7 – Propriedades do cabo, do ar e parâmetros de simulação - Elemento de viga.

Parâmetro	Valor
Comprimento do cabo [m]	80
Diâmetro do cabo [m]	76×10^{-3}
Módulo de elasticidade [GPa]	35
Número de elementos	15
Densidade do ar [kg/m^3]	0,9779
Viscosidade cinemática [m^2/s]	$1,75 \times 10^{-5}$
Densidade linear do cabo [kg/m]	3,09
Passo de tempo [s]	1×10^{-4}

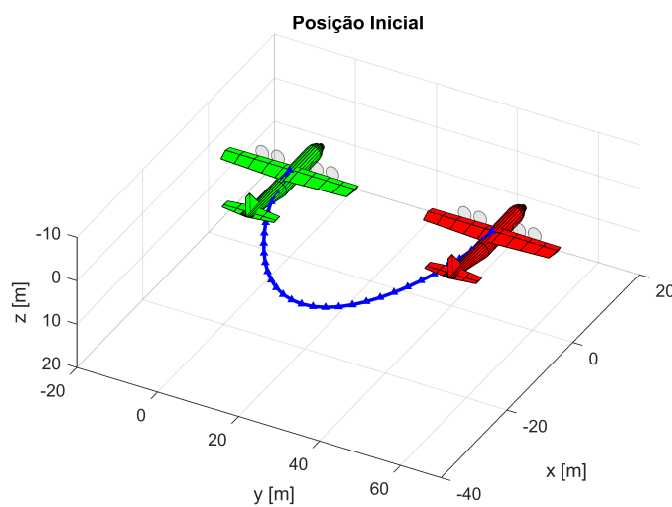
Fonte: Elaborado pelo autor.

Em todos os casos que serão discutidos, os aviões iniciam voando lado a lado, ou seja, posição vertical e longitudinal iguais, distanciados em 50 m lateralmente, como apresentado na Figura 32. Ainda, destaca-se que na Figura 32 o avião verde corresponde ao primeiro avião, referencial móvel, enquanto o vermelho corresponde ao avião adicionado no cabo.

Então, o primeiro teste consiste na simulação destes dois aviões durante o tempo sem nenhum comando de superfície de controle. Buscava-se com este caso validar que as grandezas laterais dos dois aviões (velocidade de rolagem, velocidade de guinada,

derrapagem, etc) possuiriam comportamentos opostos, enquanto as longitudinais (ângulo de ataque, velocidade de arfagem, etc) possuiriam comportamento semelhante entre si. Deve-se ponderar que, apesar das condições iniciais de ambos os aviões serem quase idênticas, estas não são perfeitamente iguais, visto que o modelo adotado não aceita em sua formulação padrão a imposição de duas condições de contorno, o que impede a inicialização do modelo em um caso perfeitamente simétrico. Portanto, devido a este fato, esperava-se encontrar diferenças nos resultados entre os dois aviões, como pode ser efetivamente observado nos resultados apresentados na Figura 33.

Figura 32 – Posição inicial dos aviões para estudo de caso utilizando elemento de viga.



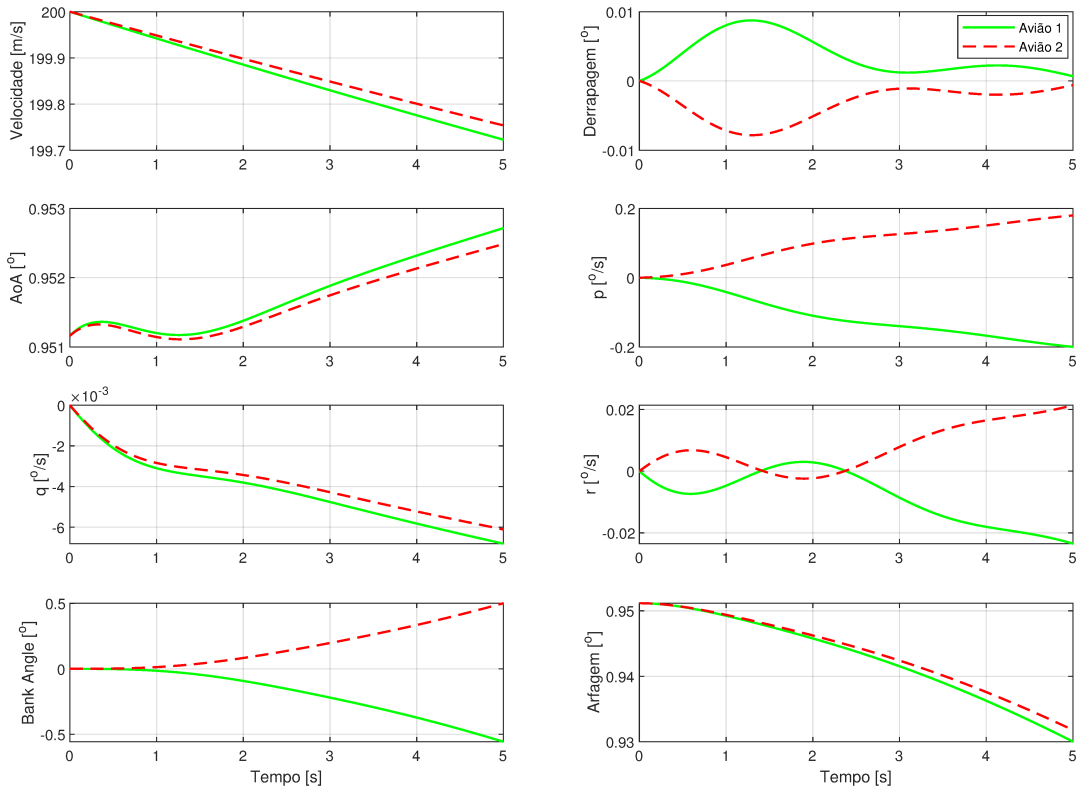
Fonte: Elaborado pelo autor.

Além disso, outras possíveis causas de diferenças são a propagação de erros numéricos no segundo avião e o refinamento da discretização espacial, limitado pelo aumento exponencial de custo computacional. Ainda sim, percebe-se que o comportamento dinâmico dos dois aviões é consideravelmente próximo e o que se esperava do comportamento das variáveis laterais e longitudinais foi verificado. Portanto, considera-se que o modelo está fisicamente coerente.

Em seguida, os dois próximos testes possuem a finalidade de verificar o comportamento do cabo frente ao movimento de ambos os aviões. Para isso, no segundo caso, uma deflexão de aileron de $\delta_l = -5^\circ$ foi imposta no primeiro avião durante os primeiros 1,5 segundos de simulação. Então, o movimento do cabo e dos dois aviões estão apresentados nas Figuras 34 e 35 e as velocidades, derrapagens, velocidade de rolagem e *bank angle* de ambos os aviões ao longo do tempo na Figura 36. Como é possível observar, o cabo apresenta um movimento coerente junto ao primeiro avião enquanto o segundo basicamente mantém a condição de voo inicial, com movimento imperceptível. Desta forma, estes resultados corroboram com a correta implementação e reconstrução das informações

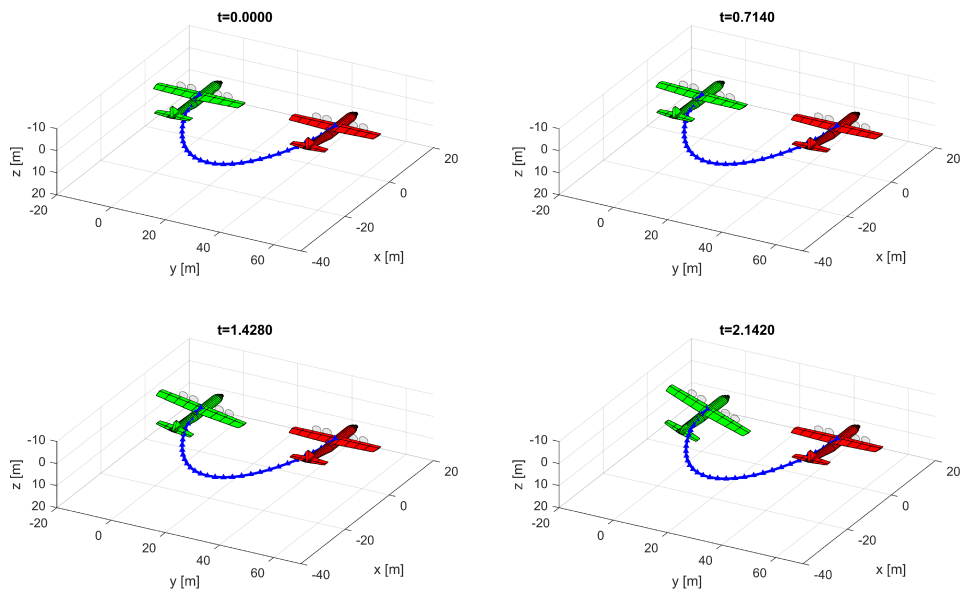
de velocidade e posição do segundo avião, visto que o movimento do primeiro (referencial móvel) não afeta diretamente o segundo.

Figura 33 – Resultados dos aviões conectados utilizando elemento de viga - Caso 1.



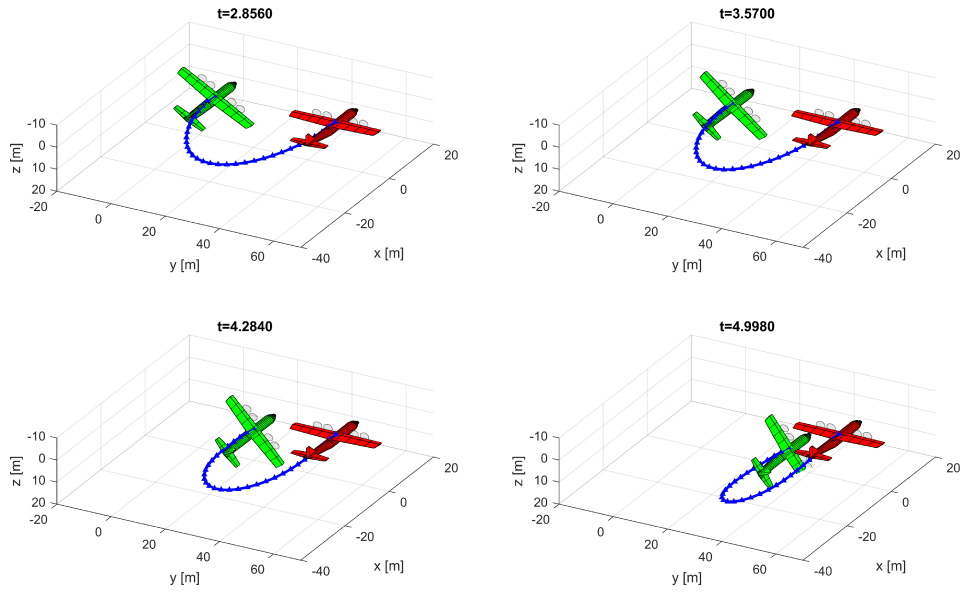
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 34 – Movimento dos aviões - Caso 2, Parte 1.



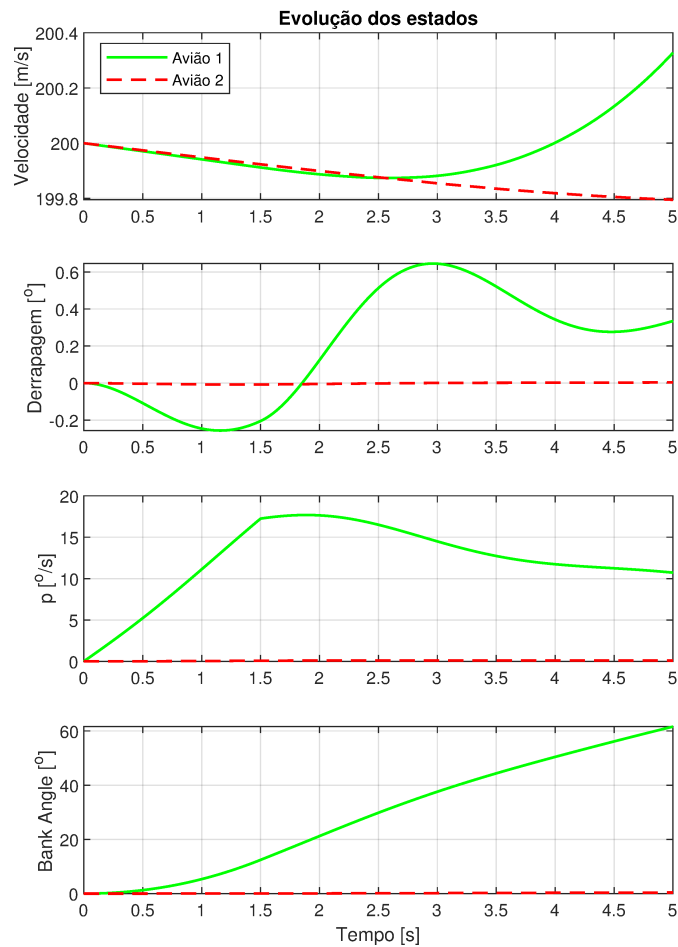
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 35 – Movimento dos aviões - Caso 2, Parte 2.



Fonte: Elaborado pelo autor.

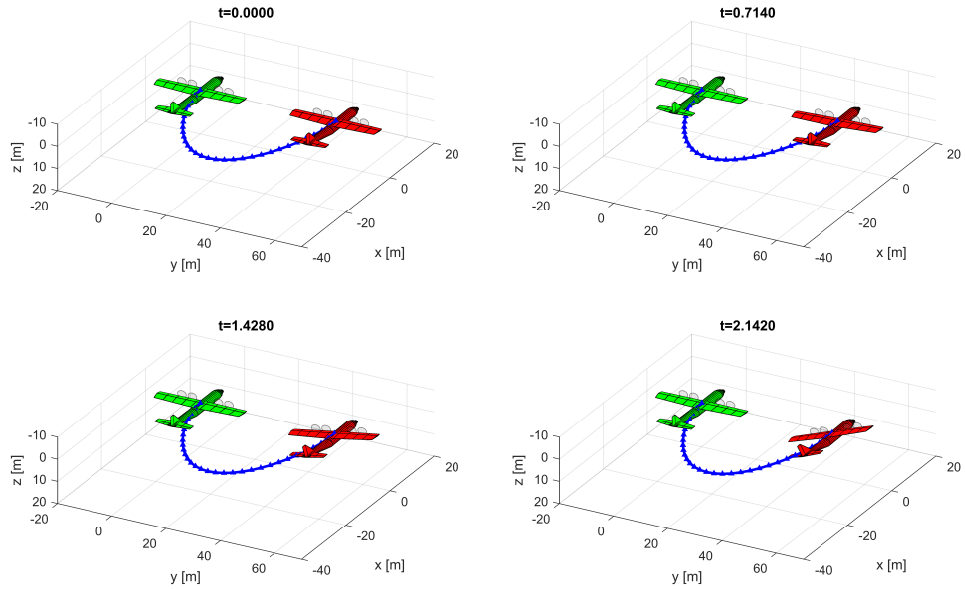
Figura 36 – Evolução dos estados dos aviões utilizando elemento de viga - Caso 2.



Fonte: Elaborado pelo autor.

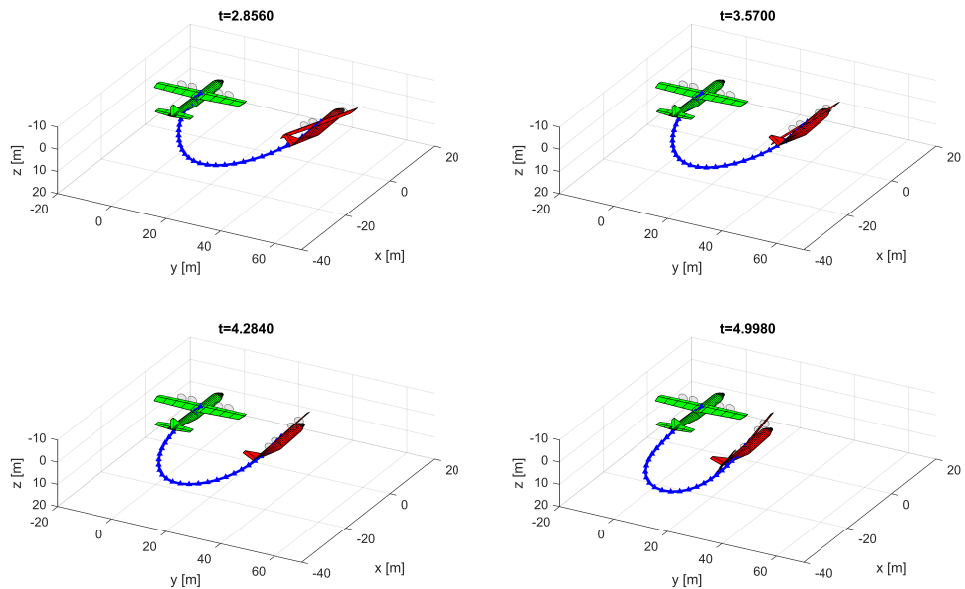
O terceiro e último caso consiste em um teste semelhante ao caso 2, mas com comando de aileron de $\delta_l = +5^\circ$ no segundo avião. Assim, os resultados de posição dos aviões ao longo do tempo estão apresentados nas Figuras 37 e 38.

Figura 37 – Movimento dos aviões - Caso 3, Parte 1.



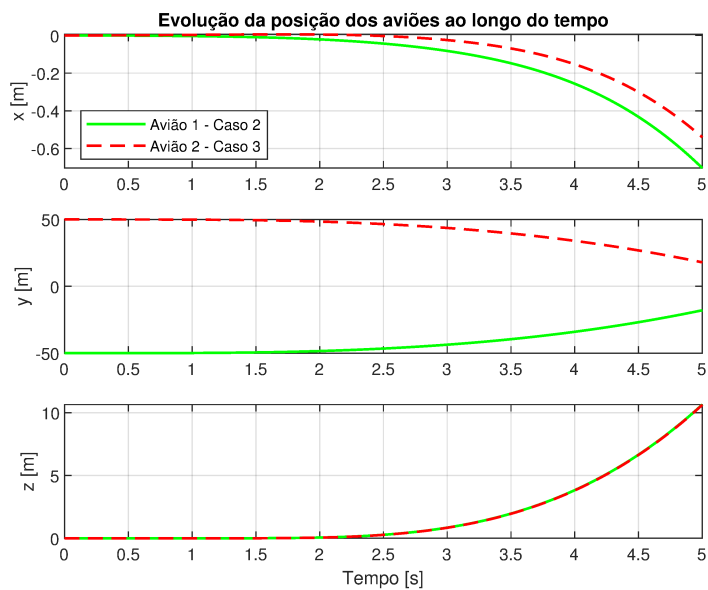
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 38 – Movimento dos aviões - Caso 3, Parte 2.



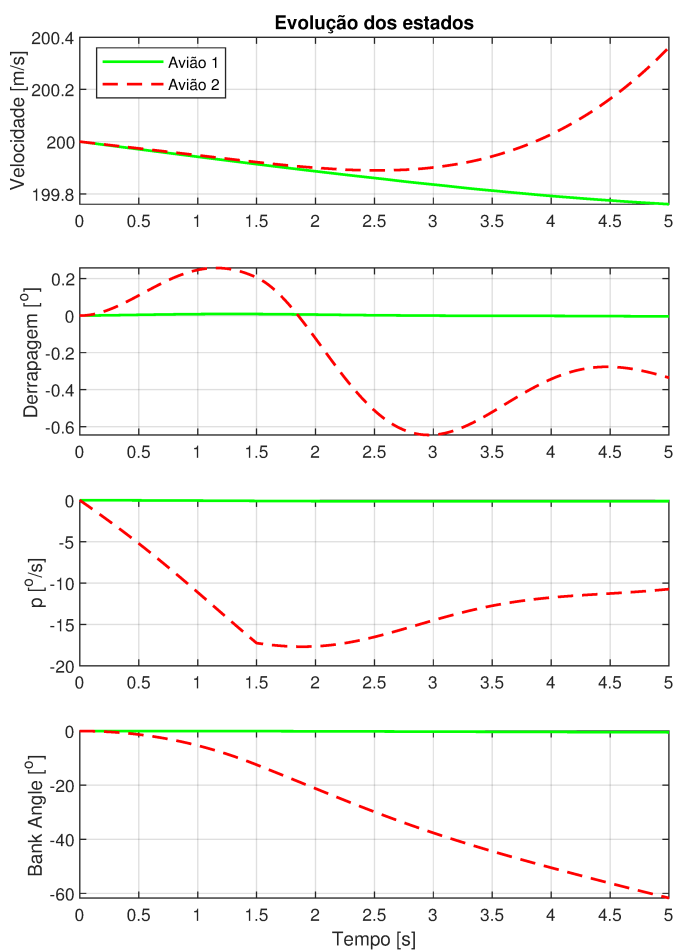
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 39 – Posição relativa dos aviões para os casos 2 e 3.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 40 – Evolução dos estados dos aviões utilizando elemento de viga - Caso 3.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dado que a perspectiva dificulta a comparação direta por meio de figuras entre o segundo e o terceiro caso, procurou-se analisar a posição de um avião em relação ao outro ao longo do tempo para ambos os casos. Desta maneira, a Figura 39 apresenta a posição do primeiro avião em relação ao segundo no caso 2 e do segundo em relação ao primeiro no caso 3. Percebe-se que há uma leve diferença na posição especialmente em x , mas considera-se aceitável, com as possíveis fontes de erros já discutidas no caso 1, tais como propagação de erros numéricos no avião 2 e refinamento de número de elementos. Ademais, a evolução dos estados do avião, apresentados na Figura 40, confirma novamente a semelhança do movimento em relação ao caso 2. Desta maneira, considera-se que as dinâmicas dos dois aviões foram implementadas e capturadas corretamente, garantindo a validade do simulador desenvolvido.

6 CONCLUSÕES

O presente trabalho propôs o desenvolvimento numérico de um modelo que fosse adaptado à simulação de um par de aviões conectados. Inicialmente, uma pesquisa bibliográfica sobre diferentes tipos de instabilidades foi realizada a fim de tentar verificá-las posteriormente em simulação. No entanto, apenas o critério de estabilidade proposto por Phillips (1949) foi considerado pertinente ao trabalho e, posteriormente, verificado em simulação.

Em seguida, três modelos foram selecionados para serem estudados matematicamente e potencialmente implementados computacionalmente. O primeiro, *Lumped Parameter Method* foi considerado não adequado devido a indeterminação matemática apresentada, que não foi possível ser contornada. Os dois outros modelos propostos foram baseado em MEF (Método dos Elementos Finitos) com elementos de barra e de viga não-linear, no qual foi possível verificar em ambos o critério de estabilidade encontrado. No entanto, dado que o último inclui os esforços de torção e flexão em sua formulação, considera-se que este possui maior representatividade física, mas possui maior custo computacional associado.

Além disso, foi possível analisar casos testes de ambos os modelos implementados a um caso de aviões conectados, no qual ambos apresentaram coerência com a dinâmica esperada. Portanto, considerou-se que o objetivo do trabalho de construir um algoritmo computacional para simulação numérica de um par de aviões conectados foi concluído.

Ainda sim, sugestões para trabalhos futuros são propostas:

- Uma verificação mais detalhada sobre os casos onde o elemento de barra poderia ser aplicado sem grande prejuízo a representatividade física do problema;
- Otimização dos algoritmos desenvolvidos para elemento de viga, em especial no cálculo da derivada $\partial J_{h\varepsilon}/\partial\varepsilon$, a fim de tentar reduzir o custo computacional e permitir o maior refinamento da discretização espacial utilizada, bem como maiores intervalos de simulação;
- Estudo detalhado sobre a influência da propagação dos erros numéricos sobre o segundo avião para o caso de MEF com elemento de viga não linear;
- Melhoramento da solução aerodinâmica utilizada no cabo, de maneira a levar em consideração a curvatura entre dois nós no caso do elemento de viga, ao invés de considerar uma barra reta entre dois pontos;
- Identificação dinâmica do cabo utilizando elemento de viga tendo como base os esforços do cabo medidos nas aeronaves (tração, torção e flexão), além de informações sobre o regime de voo, como velocidade e altitude, os quais afetam diretamente o comportamento dinâmico do cabo devido à aerodinâmica.

REFERÊNCIAS

BATHE, Klaus-Jurgen. **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1982.

BOIFFIER, Jean-Luc. **Dynamique du Vol de l'avion**. Toulouse, set. 2001.

BROWN, Eric L. **Integrated Strain Actuation In Aircraft With Highly Flexible Composite Wings**. 2003. Tese (Doutorado) – Massachusetts Institute of Technology.

CHABART, O; LILIEN, J.L. Galloping of electrical lines in wind tunnel facilities. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, v. 74-76, p. 967–976, 1998. ISSN 01676105.

CHENG, Shaohong; IRWIN, Peter A.; TANAKA, Hiroshi. Experimental study on the wind-induced vibration of a dry inclined cable—Part II: Proposed mechanisms. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, v. 96, n. 12, p. 2254–2272, 2008. ISSN 01676105.

CHENG, Shaohong; LAROSE, Guy L.; SAVAGE, Mike G.; TANAKA, Hiroshi; IRWIN, Peter A. Experimental study on the wind-induced vibration of a dry inclined cable—Part I: Phenomena. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, v. 96, n. 12, p. 2231–2253, 2008. ISSN 01676105.

COCHRAN, J. E.; INNOCENTI, M.; NO, T. S.; THUKRAL, A. Dynamics and control of maneuverable towed flight vehicles. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 15, n. 5, p. 1245–1252, 1992. ISSN 0731-5090, 1533-3884.

FORÇA AÉREA BRASILEIRA, FAB. **Esquadrão Zeus realiza primeira missão de reabastecimento em voo noturno do KC-390**. Acessado em 23/02/2024. Jun. 2023. Disponível em: <https://www.fab.mil.br/noticias/mostra/41048/TREINAMENTO%20-%20Esquadr%C3%A3o%20Zeus%20realiza%20primeira%20miss%C3%A3o%20de%20reabastecimento%20em%20voo%20noturno%20do%20KC-390#:~:text=Reabastecimento%20em%20voo,-O%20REVO%20%C3%A9%5C&text=O%20KC-390%20consegue%20transferir,aproximadamente%2C%20800%20litros%20por%20minuto.>

FUJINO, Yozo; KIMURA, Kichiro; TANAKA, Hiroshi. Cable Vibrations and Control Methods. *In*: FUJINO, Yozo; KIMURA, Kichiro; TANAKA, Hiroshi. **Wind Resistant**

Design of Bridges in Japan. Tokyo: Springer Japan, 2012. P. 197–229. ISBN 978-4-431-54045-8 978-4-431-54046-5.

GREENE, Chad. **Draw a 3D airplane.** [*S.l.: s.n.*], 2022. MATLAB Central File Exchange. Retrieved July 6, 2022. Disponível em:
<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/47967-draw-a-3d-airplane>.

HARTOG, J P Den. **Mechanical vibrations.** fourth. New York: McGraw-Hill, 1956.

HOERNER, S.F. **Fluid-dynamic Drag: Practical Information on Aerodynamic Drag and Hydrodynamic Resistance.** [*S.l.*]: Hoerner Fluid Dynamics, 1965.

LI, G. Q.; ZHU, Z. H. Long-term dynamic modeling of tethered spacecraft using nodal position finite element method and symplectic integration. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 123, n. 4, p. 363–386, 2015. ISSN 0923-2958, 1572-9478.

MATSUMOTO, Masaru; YAGI, Tomomi; SHIGEMURA, Yoshinori; TSUSHIMA, Daisuke. Vortex-induced cable vibration of cable-stayed bridges at high reduced wind velocity. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, v. 89, n. 7, p. 633–647, 2001. ISSN 01676105.

PHILLIPS, William H. **Theoretical analysis of oscillations of a towed cable.** [*S.l.*], 1949.

RO, Kapseong; AHMAD, Husain; KAMMAN, James. Dynamic Modeling and Simulation of Hose-Paradrogue Assembly for Mid-Air Operations. *In*: AIAA INFOTECH@AEROSPACE CONFERENCE. **AIAA Infotech@Aerospace Conference.** Seattle, Washington: American Institute of Aeronautics e Astronautics, 2009.

RO, Kapseong; KAMMAN, James W. Modeling and Simulation of Hose-Paradrogue Aerial Refueling Systems. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 33, n. 1, p. 53–63, 2010. ISSN 0731-5090, 1533-3884.

ROYAL AIR FORCE, RAF. **100 Years of Air-to-Air Refueling.** Acessado em 23/02/2024. Jul. 2023. Disponível em:
<https://www.raf.mod.uk/news/articles/100-years-of-air-to-air-refueling/>.

SCIENCE LEARNING HUB, SLH. **Gliders and kites**. Acessado em 23/02/2024. Set. 2011. Disponível em: <https://www.sciencelearn.org.nz/resources/306-gliders-and-kites>.

SHEARER, Christopher M. **Coupled Nonlinear Flight Dynamics, Aeroelasticity, and Control of Very Flexible Aircraft**. 2006. Tese (Doutorado) – The University of Michigan.

SLABAUGH, Gregory G. **Computing Euler angles from a rotation matrix**. Acessado em 27/03/2024. Dez. 2020. Disponível em: <https://eecs.qmul.ac.uk/~gslabaugh/publications/euler.pdf>.

SU, Weihua. **COUPLED NONLINEAR AEROELASTICITY AND FLIGHT DYNAMICS OF FULLY FLEXIBLE AIRCRAFT**. 2008. Tese (Doutorado) – The University of Michigan.

THE MATHWORKS INC. **atan2 Documentation (R2022b)**. Natick, Massachusetts, United States: The MathWorks Inc., 2022. Acessado em 27/03/2024. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/atan2.html>.

THE MATHWORKS INC. **quat2eul Documentation (R2022b)**. Natick, Massachusetts, United States: The MathWorks Inc., 2022. Acessado em 27/03/2024. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/robotics/ref/quat2eul.html>.

VASSBERG, John; YEH, David; BLAIR, Andrew; EVERT, Jacob. Numerical Simulations of KC-10 Wing-Mount Aerial Refueling Hose-Drogue Dynamics with a Reel Take-Up System. *In*: 21ST AIAA APPLIED AERODYNAMICS CONFERENCE. **21st AIAA Applied Aerodynamics Conference**. Orlando, Florida: American Institute of Aeronautics e Astronautics, 2003.

WANG, Haitao; DONG, Xinmin; XUE, Jianping; LIU, Jiaolong. Dynamic modeling of a hose-drogue aerial refueling system and integral sliding mode backstepping control for the hose whipping phenomenon. **Chinese Journal of Aeronautics**, v. 27, n. 4, p. 930–946, 2014. ISSN 10009361.

WANG, Jeff. Overhead Transmission Line Vibration and Galloping. *In*: 2008 INTERNATIONAL CONFERENCE ON HIGH VOLTAGE ENGINEERING AND APPLICATION (ICHVE). **2008 International Conference on High Voltage Engineering and Application**. Chongqing, China: IEEE, 2008. P. 120–123.

ZHU, Z. H.; MEGUID, S. A. Elastodynamic Analysis of Aerial Refueling Hose Using Curved Beam Element. **AIAA Journal**, v. 44, n. 6, p. 1317–1324, 2006. ISSN 0001-1452, 1533-385X.

ZHU, Z.H.; MEGUID, S.A. Elastodynamic analysis of low tension cables using a new curved beam element. **International Journal of Solids and Structures**, v. 43, n. 6, p. 1490–1504, 2006. ISSN 00207683.

ZHU, Z.H.; MEGUID, S.A. Modeling and simulation of aerial refueling by finite element method. **International Journal of Solids and Structures**, v. 44, n. 24, p. 8057–8073, 2007. ISSN 00207683.

ZHU, Z.H.; MEGUID, S.A. Nonlinear FE-based investigation of flexural damping of slacking wire cables. **International Journal of Solids and Structures**, v. 44, n. 16, p. 5122–5132, 2007. ISSN 00207683.