

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Luiz Augusto Vendramini

**Modelagem e Controle de um Quadricóptero  
em Ambiente de Simulação**

**Uberlândia, Brasil**

**2024**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Luiz Augusto Vendramini

**Modelagem e Controle de um Quadricóptero em  
Ambiente de Simulação**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, como requisito exigido parcial à obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Aeronáutica.

Orientador: Pedro Augusto Queiroz de Assis

Universidade Federal de Uberlândia – UFU

Faculdade de Engenharia Mecânica

Bacharelado em Engenharia Aeronáutica

Uberlândia, Brasil

2024



## UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica  
Rodovia BR 050, KM 78, Bloco 1D, 2º andar - Bairro Glória, Uberlândia-MG, CEP 38400-902

Telefone: (34) 2512-6768 - www.mecanica.ufu.br - coceaero@mecanica.ufu.br



### ATA DE DEFESA - GRADUAÇÃO

Curso de Graduação em:	ENGENHARIA AERONÁUTICA				
Defesa de:	PROJETO DE CONCLUSÃO DE CURSO - FEMEC43100				
Data:	27/09/2024	Hora de início:	09:35	Hora de encerramento:	11:20
Matrícula do Discente:	11911EAR028				
Nome do Discente:	LUIZ AUGUSTO VENDRAMINI				
Título do Trabalho:	Modelagem e controle de um quadricóptero em ambiente de simulação				
A carga horária curricular foi cumprida integralmente?				( X ) Sim ( ) Não	

Reuniu-se via plataforma online Microsoft Teams, a Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica, assim composta: Prof. Higor Luis Silva (FEMEC/UFU), Prof. Tobias Souza Morais (FEMEC/UFU) e Prof. Pedro Augusto Queiroz de Assis (FEMEC/UFU), orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Prof. Pedro Augusto Queiroz de Assis, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao discente a palavra, para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação da discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do curso.

A seguir o(a) senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado, Nota: 90/100.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Pedro Augusto Queiroz de Assis, Professor(a) do Magistério Superior**, em 27/09/2024, às 11:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Higor Luis Silva, Professor(a) do Magistério Superior**, em 27/09/2024, às 11:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Tobias Souza Moraes, Professor(a) do Magistério Superior**, em 27/09/2024, às 11:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **5740400** e o código CRC **8B78CB6A**.

---

**Referência:** Processo nº 23117.078629/2023-58

SEI nº 5740400

*Dedico este trabalho à minha família, os pilares da minha vida.*

# Agradecimentos

Gostaria de expressar meu profundo reconhecimento à minha mãe, uma mulher de imensa força, que nunca permitiu que eu desistisse. Ela me mostrou que não existem obstáculos insuperáveis. Sou também muito grato ao meu pai, que transmitiu sua rica experiência de vida ao caminhar sobre muitos pedregulhos no passado, o que me ajuda hoje a superar as dificuldades do meu próprio caminho.

Agradeço à minha irmã por sempre me incentivar e apoiar em todos os momentos, ensinando-me que os problemas são passageiros e essenciais para o crescimento. Cada passo que ela dá representa um aprendizado valioso.

Desejo expressar meu apreço à minha amiga Isabela Ferreira Teixeira, que esteve ao meu lado nos estudos e nas dificuldades pessoais. Isabela me mostrou que podemos alcançar o extraordinário na simplicidade da vida e nas pequenas ações.

Além disso, gostaria de expressar minha gratidão ao Eduardo Scheffer Saraiva pelo suporte técnico e, muitas vezes, pelo apoio moral, mesmo que de maneira descontraída. Eduardo é, sem dúvida, um excelente profissional, com um notável espírito de colaboração.

Por fim, dedico os meus agradecimentos ao orientador deste trabalho, Pedro Augusto Queiroz de Assis. Além de guiar-me ao objetivo proposto com aconselhamentos, decisões e correções, apresentou-me o método científico e de pesquisa, os quais com certeza me acompanharão ao longo da minha vida. Agradeço também aos membros da banca, Higor Luis Silva e Tobias Souza Morais, por suas valiosas contribuições.

*"E o Deus de toda a graça, que em Cristo Jesus vos chamou à sua eterna glória, depois de haverdes padecido por um pouco, ele mesmo vos aperfeiçoará, confirmará, fortificará e fortalecerá."(1 Pedro 5:10)*

# Resumo

No presente trabalho, desenvolve-se um sistema de controle para atitude e posição de um quadricóptero. Com esse propósito, primeiramente elabora-se um modelo dinâmico para o veículo seguindo o formalismo de Newton-Euler. Em seguida, buscando aumentar a representatividade da simulação, incluem-se modelos para os sensores tipicamente instalados no veículo: acelerômetro, giroscópio, magnetômetro e GPS. As estimativas dos estados de atitude são obtidas pela fusão dos dados desses sensores, exceto o GPS, que é especificamente utilizado para estimar os estados de posição, após a aplicação de uma filtragem. O sistema de controle é projetado considerando o modelo de atitude linearizado e o de posição simplificado. Ambos os modelos resultantes são discretizados e empregados no projeto. Especificamente, os controladores são baseados na realimentação de estados, com as matrizes de ganhos ajustadas utilizando o Regulador Linear Quadrático.

Os resultados de simulação mostram que o sistema de controle proposto é capaz de levar o veículo às posições desejadas e seguir trajetórias variadas. Entretanto, os resultados revelam um certo atraso em seguir as referências, especialmente na estabilização do estado de arfagem  $\psi$ . Acredita-se que esse problema pode ser resolvido modificando as matrizes de peso adotadas.

**Palavras-chave:** Realimentação de estados, Quadricóptero, Estimativas de Estado, Filtragem de Dados, Simulações.

# Abstract

In this work, a control system for attitude and position of a quadcopter is developed. To achieve this, a dynamic model for the vehicle is first elaborated following the Newton-Euler formalism. Next, to increase the simulation's representativeness, models for the sensors typically installed on the vehicle, such as accelerometer, gyroscope, magnetometer, and GPS, are included. Attitude state estimates are obtained by fusing data from these sensors, except for the GPS, which is specifically used to estimate position states after filtering. The control system is designed considering the linearized attitude model and the simplified position model. Both resulting models are discretized and employed in the design. Specifically, the controllers are based on state feedback, with gain matrices adjusted using the Linear Quadratic Regulator (LQR).

Simulation results show that the proposed control system can drive the vehicle to desired positions and follow varied trajectories. However, the results reveal a certain delay in following references, especially in stabilizing the yaw state  $\psi$ . It is believed that this issue can be resolved by adjusting the weighting matrices.

**Keywords:** State feedback, Quadcopter, State Estimation, Data Filtering, Simulations.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação do referencial NED. Fonte: (CENTER, 2023) e modificado pelo autor. . . . .	21
Figura 2 – Sistemas de referência do corpo e do referencial inercial. Fonte: (WU; SARDAHI, 2023). . . . .	21
Figura 3 – Sentido de rotação dos motores de um quadricóptero. Fonte: Autor. . .	24
Figura 4 – Diagrama representando todos os elementos do simulador. Fonte: Autor.	33
Figura 5 – Detalhamento dos blocos “Dinâmica de sensores”, “Estimativa de estados” e “Fusão sensorial”. Fonte: Autor. . . . .	34
Figura 6 – Estimativa de posição e velocidade linear a partir do GPS. Fonte: Autor.	34
Figura 7 – Estimativa de $\phi$ e $\theta$ a partir do Acelerômetro. Fonte: Autor. . . . .	35
Figura 8 – Estimativa do ângulo de rolagem pela decomposição vetorial da aceleração gravitacional. Fonte: Autor. . . . .	36
Figura 9 – Estimativa do ângulo de arfagem pela decomposição vetorial da aceleração gravitacional. Fonte: Autor. . . . .	36
Figura 10 – Estimativa de $\psi$ a partir do Magnetômetro. Fonte: Autor. . . . .	37
Figura 11 – Estimativa do ângulo de guinada pela decomposição vetorial do campo magnético. Fonte: Autor. . . . .	37
Figura 12 – Estimativa de atitude a partir do Giroscópio. Fonte: Autor. . . . .	38
Figura 13 – Sistema de controle. Fonte: Autor. . . . .	39
Figura 14 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para estado inicial nulo. Fonte: Autor. . . . .	45
Figura 15 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para estado inicial nulo e referências constantes por partes. Evolução da posição do veículo em relação ao referencial $G$ . Fonte: Autor. . . . .	49
Figura 16 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para estado inicial nulo e referências constantes por partes. Evolução da atitude do veículo. Fonte: Autor. . . . .	49
Figura 17 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para estado inicial nulo e referências constantes por partes. Evolução dos sinais de controle do CP. Fonte: Autor. . . . .	50
Figura 18 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para estado inicial nulo e referências constantes por partes. Evolução dos sinais de controle do CA. Fonte: Autor. . . . .	51

Figura 19 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para estado inicial nulo e referências constantes por partes sem influência de filtragem dos sinais. Evolução da posição do veículo em relação ao referencial $G$ . Fonte: Autor. . . . .	51
Figura 20 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para estado inicial nulo e referências constantes por partes sem influência de filtragem dos sinais. Evolução da atitude do veículo. Fonte: Autor. . . . .	52
Figura 21 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para uma condição inicial não nula e referências nulas. Evolução da posição do veículo em relação ao referencial $G$ . Fonte: Autor. . . . .	52
Figura 22 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para uma condição inicial não nula e referências nulas. Evolução da atitude do veículo. Fonte: Autor. . . . .	53
Figura 23 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para uma condição inicial não nula e referências nulas. Evolução dos sinais de controle do CP. Fonte: Autor. . . . .	53
Figura 24 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para uma condição inicial não nula e referências nulas. Evolução dos sinais de controle do CA. Fonte: Autor. . . . .	54
Figura 25 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para uma condição inicial nula e referências a partir de uma trajetória helicoidal. Evolução da posição do veículo em relação ao referencial $G$ . Fonte: Autor. . . . .	55
Figura 26 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para uma condição inicial nula e referências a partir de uma trajetória helicoidal. Evolução da atitude do veículo. Fonte: Autor. . . . .	55
Figura 27 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para uma condição inicial nula e referências a partir de uma trajetória helicoidal. Evolução dos sinais de controle do CP. Fonte: Autor. . . . .	56
Figura 28 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para uma condição inicial nula e referências a partir de uma trajetória helicoidal. Evolução dos sinais de controle do CA. Fonte: Autor. . . . .	56

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Influência da velocidade de rotação dos motores no sentido positivo dos graus de liberdade $z^b$ , $\phi$ , $\theta$ e $\psi$ . . . . .	24
Tabela 2 – Parâmetros do quadricóptero. . . . .	45
Tabela 3 – Parâmetros de simulação. . . . .	46

# Lista de abreviaturas e siglas

CA	Controlador de Atitude
CCW	<i>Counter Clockwise</i>
CP	Controlador de Posição
CW	<i>Clockwise</i>
DA	Dinâmica de Atitude
DP	Dinâmica de Posição
FS	Fusão sensorial
GPS	<i>Global Positioning System</i>
IMU	<i>Inertial Measurement Unit</i>
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
MIMO	<i>Multiple Input and Multiple Output</i>
NED	<i>North, East and Down</i>
PID	Proporcional Integral Derivativo
PD	Proporcional Derivativo
PT	Pós tratamento
ref	Estado de referência
SMC	<i>Sliding Mode Controller</i>
WMM	<i>World Magnetic Model</i>
ZOH	<i>Zero-Order Hold</i>

# Lista de símbolos

$\mathbf{a}_c^b$	Aceleração centrípeta
$g$	Aceleração gravitacional
$U_1$	Ação de controle de empuxo total
$U_2$	Ação de controle de rolagem
$U_3$	Ação de controle de arfagem
$U_4$	Ação de controle de guinada
$U_x$	Ação de controle de aceleração no eixo $X^G$
$U_y$	Ação de controle de aceleração no eixo $Y^G$
$U_z$	Ação de controle de aceleração no eixo $Z^G$
$\mathbf{y}$	Aproximação numérica da integral de $\mathbf{y}'$
$a_n$	Condições de contorno
$K_D$	Coefficiente aerodinâmico de arrasto
$K_T$	Coefficiente aerodinâmico de empuxo
$R$	Conjunto dos números reais
$d$	Distância do centro de massa do quadricóptero até os rotores
$T^b$	Empuxo total localizado no centro de massa do veículo
$x^b$	Eixo X do sistema cartesiano no referencial do corpo
$X^G$	Eixo X do sistema cartesiano no referencial da terra
$y^b$	Eixo Y do sistema cartesiano no referencial do corpo
$Y^G$	Eixo Y do sistema cartesiano no referencial da terra
$z^b$	Eixo Z do sistema cartesiano no referencial do corpo
$Z^G$	Eixo Z do sistema cartesiano no referencial da terra
$F$	Força de empuxo produzida pela hélice

$F_x$	Força atuante no eixo $x^b$ : Formalismo de Newton-Euler
$F_y$	Força atuante no eixo $y^b$ : Formalismo de Newton-Euler
$F_z$	Força atuante no eixo $z^b$ : Formalismo de Newton-Euler
$C$	Função trigonométrica Cosseno
$SEC$	Função trigonométrica Secante
$S$	Função trigonométrica Seno
$T$	Função trigonométrica Tangente
$k$	Instante de tempo
$A$	Matriz dinâmica: representação no espaço de estados
$B$	Matriz de entrada: representação no espaço de estados
$C$	Matriz de saída: representação no espaço de estados
$D$	Matriz de transmissão direta: representação no espaço de estados
$J$	Momento de inércia do rotor
$I_M$	Momento de inércia do rotor: formalismo de Newton-Euler
$I_{xx}$	Momento de inércia em torno do eixo $x^b$
$I_{yy}$	Momento de inércia em torno do eixo $y^b$
$I_{zz}$	Momento de inércia em torno do eixo $z^b$
$I$	Matriz de inércia do veículo
$m$	Massa do quadricóptero
$S_b^G$	Matriz de rotação do referencial do corpo para o referencial da terra
$S_G^b$	Matriz de rotação do referencial da terra para o referencial do corpo
$S_{G_{mag}}^b$	Matriz de rotação do referencial da terra para o referencial do corpo desconsiderando o efeito da rotação $R_\psi$
$K$	Matriz de realimentação de estados
$Q$	Matriz de custo dos estados: projeto LQR
$R$	Matriz de custo de atuação: projeto LQR

$\mathbf{I}$	Matriz identidade
$\mathbf{R}_\phi$	Matriz de rotação entre o eixo $x^b$ e $X^G$
$\mathbf{R}_\theta$	Matriz de rotação entre o eixo $y^b$ e $Y^G$
$\mathbf{R}_\psi$	Matriz de rotação entre o eixo $z^b$ e $Z^G$
$i$	Número de motores
$n$	Número de variáveis
$dt$	Período de amostragem
$t$	Tempo contínuo
$\mathbf{a}_{ac}^b$	Vetor de aceleração total medida nos eixos do corpo
$\mathbf{G}^G$	Vetor aceleração gravitacional
$\mathbf{N}_w$	Vetor com ruídos brancos nos eixos do sensores
$p$	Velocidade angular em torno do eixo $x^b$
$q$	Velocidade angular em torno do eixo $y^b$
$r$	Velocidade angular em torno do eixo $z^b$
$\mathbf{V}^b$	Vetor de velocidade linear no referencial do corpo
$\mathbf{F}^b$	Vetor de força no referencial do corpo: formalismo de Newton-Euler
$\widetilde{\mathbf{O}}_{xsens}$	Vetor posição com origem no centro de massa até a localização do sensor
$\mathbf{X}^G$	Vetor de posição no espaço tridimensional em relação ao referencial inercial
$\mathbf{X}_{GPS}^G$	Vetor de posição no espaço tridimensional em relação ao referencial inercial medido pelo GPS
$\mathbf{W}$	Vetor concatenando os estados de posição e atitude
$\mathbf{x}$	Vetor de estados: representação no espaço de estados
$x_n$	Variáveis da função a ser linearizada
$\mathbf{y}$	Vetor de saída: representação no espaço de estados
$\mathbf{u}$	Vetor de sinais de controle: representação no espaço de estados
$\phi$	Ângulo de Euler: movimento de rolagem

$\psi$	Ângulo de Euler: movimento de guinada
$\theta$	Ângulo de Euler: movimento de arfagem
$\Gamma^b$	Forças giroscópicas
$\alpha$	Parâmetro de ajuste do filtro complementar
$\in$	Pertence
$\tau_\theta^b$	Torque produzido em torno do eixo $y^b$
$\tau_\phi^b$	Torque produzido em torno do eixo $x^b$
$\tau_\psi^b$	Torque produzido em torno do eixo $z^b$
$\ddot{\xi}^G$	Vetor aceleração linear no referencial inercial
$\Phi^G$	Vetor de intensidade do campo magnético em cada eixo do referencial inercia
$\Phi_{mag}^b$	Vetor de intensidade do campo magnético medida nos eixos do corpo
$\tau^b$	Vetor de torque atuante no referencial do corpo: formalismo de Newton-Euler
$\tau_M$	Vetor de torque produzido pela hélice no referencial do corpo
$\Omega^b$	Vetor de velocidade angular no referencial do corpo
$\Omega_{gir}^b$	Vetor de velocidade angular total medida nos eixos do corpo
$\Omega_r^b$	Velocidade angular total residual das hélices
$\omega$	Velocidade angular do rotor
$\beta$	Variável da computação condicional para definir saúde da medida do acelerômetro

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>18</b>
<b>2</b>	<b>DESCRIÇÃO DO SISTEMA</b>	<b>20</b>
<b>2.1</b>	<b>Sistemas de referência</b>	<b>20</b>
2.1.1	Matrizes de transformação	22
<b>2.2</b>	<b>Modelagem</b>	<b>23</b>
<b>2.3</b>	<b>Linearização</b>	<b>29</b>
<b>2.4</b>	<b>Modelagem de sensores</b>	<b>30</b>
2.4.1	Unidade de Medida Inercial: Acelerômetro, Giroscópio e Magnetômetro	30
2.4.2	GPS ( <i>Global Position System</i> )	32
<b>3</b>	<b>PROJETO DE CONTROLE</b>	<b>33</b>
<b>3.1</b>	<b>Estimativa de estados e fusão sensorial</b>	<b>34</b>
3.1.1	Estimativa de posição e velocidade linear a partir do GPS	34
3.1.2	Estimativa de atitude a partir do Acelerômetro e do Magnetômetro	34
3.1.3	Estimativa de atitude a partir do Giroscópio	38
3.1.4	Fusão sensorial	38
<b>3.2</b>	<b>Sistema de Controle</b>	<b>39</b>
3.2.1	Representação do modelo do quadricóptero no espaço de estados	40
3.2.2	Conversão da dinâmica do quadricóptero para tempo discreto	41
3.2.3	Projeto do controlador utilizando <i>LQR</i>	42
3.2.4	Conversor	43
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>45</b>
<b>4.1</b>	<b>Parâmetros para o projeto do <i>LQR</i></b>	<b>46</b>
<b>4.2</b>	<b>Resultados de simulação</b>	<b>48</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>57</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>58</b>

# 1 Introdução

Especialmente no século XX, a era da aviação foi marcada por invenções promissoras que impulsionaram os desenvolvimentos atuais. Um marco importante foi a invenção do 14-bis, o primeiro avião a decolar sem auxílio externo (PEREIRA; HAUENSTEIN; FRIEDRICH, 2018). A era também foi notável pelos projetos de asas rotativas, como o Bréguet-Richet Gyroplane N<sup>o</sup>1, o primeiro quadricóptero da história. Por ser estruturalmente pouco otimizado, não era capaz de atingir uma altura de voo de 60 cm (SRIRAM et al., 2022). Desde então, diversos projetos surgiram impulsionados pela necessidade de mobilidade, defesa civil, entre outros motivos, com o objetivo de melhorar a autonomia e a capacidade das aeronaves (EMIMI; KHALEEL; ALKRASH, 2023).

O avanço da tecnologia aplicada a projetos de aeronaves de asas rotativas tem sido tão significativo que permite a utilização de quadricópteros remotamente pilotados para diversas necessidades cotidianas. A operação de quadricópteros é simplificada, mesmo em áreas remotas e de difícil acesso, principalmente por conta da sua capacidade de pouso e decolagem vertical, eliminando a necessidade de pistas. Além disso, seu baixo custo operacional é uma vantagem significativa (EMIMI; KHALEEL; ALKRASH, 2023). Na indústria da construção, quadricópteros são amplamente utilizados para inspeções, análises topográficas, mapeamentos, entre outras funções (CHOI et al., 2023). No setor agrícola, destacam-se no monitoramento de cultivos, acompanhamento do crescimento das plantas e detecção de ervas daninhas, entre outras aplicações (REJEB et al., 2022). Além disso, é importante destacar a capacidade dessa tecnologia em gerenciar desastres naturais e no transporte de alimentos e medicamentos para áreas de difícil acesso (REJEB et al., 2022).

A confiabilidade dessas operações é associada à tecnologia empregada nos veículos. Para garantir a estabilidade em voo e possibilitar operações autônomas, é necessária a aplicação de metodologias de controle. Também é fundamental obter estimativas de estados confiáveis, o que requer a integração de diversos sensores e a aplicação de fusão sensorial. Mais ainda, é necessário obter um modelo matemático representativo do veículo. Nesse contexto, Azzam e Wang. (2010) modelam o veículo utilizando a metodologia de Newton-Euler. No trabalho em questão, são implementados quatro controladores distintos. A arquitetura consiste em um controlador de atitude, que recebe referências do controlador de posição, enquanto os controladores de rumo e altitude operam de forma independente. São empregadas metodologias de controle linear, como o PID (Proporcional Integral Derivativo) e o PD (Proporcional Derivativo). Para lidar com as não linearidades inerentes da dinâmica de voo, o escalonamento de ganhos é adotado. Segundo Azzam e Wang. (2010), apesar da dinâmica do veículo ser de natureza não linear, os controla-

dores lineares mencionados demonstraram grande eficácia em diversas literaturas. Além disso, foram utilizadas técnicas de controle não linear, como o controle com modos deslizantes e também o *Backstepping*. Os parâmetros desses controladores foram ajustados utilizando Algoritmos Genéticos. Já em Vieira (2017), lineariza-se o modelo de atitude e simplifica-se o modelo de posição do quadricóptero, permitindo a aplicação de técnicas de controle linear, como LQR (*Linear Quadratic Regulator*). São adotados dois controladores em cascata, de atitude e posição. Já em Hoffmann, Goddemeier e Bertram (2010) são implementadas duas técnicas de controle somente para o sistema de atitude, sendo estas PID e *Integral-Backstepping*. O diferencial desse último trabalho está na estimativa dos estados de atitude, que foi realizada combinando-se sinais de acelerômetro e giroscópio, obtidos por um sensor IMU (*Inertial Measurement Unit*) de baixo custo.

Com o intuito de estudar o controle de quadricópteros, o presente trabalho envolve a modelagem e o projeto de um sistema de controle de posição. Em particular, a modelagem é realizada utilizando o formalismo de Newton-Euler. Mais ainda, são incluídos modelos para sensores tipicamente instalados nesse tipo de veículo: acelerômetro, giroscópio, magnetômetro e GPS. Então, os dados provenientes desses sensores são combinados para estimar posição e velocidade angulares e lineares do veículo. O sistema de controle é baseado em uma arquitetura em cascata entre controladores de atitude e posição. Ambos os controladores são projetados utilizando realimentação de estados, especificamente empregando o LQR. Para verificar o desempenho do sistema de controle proposto, simulações são realizadas considerando referências de posição constantes e variantes no tempo. As referências de posição são definidas previamente, enquanto que as referências de atitude são geradas pelo controlador de posição. A estimativa da atitude é realizada por meio da fusão dos dados da IMU. Já a estimativa dos estados de posição é obtida através dos dados do GPS (*Global Positioning System*).

A sequência do trabalho está organizada do seguinte modo: No Capítulo 2 é apresentada a modelagem matemática do quadricóptero. Além disso, são detalhados os modelos dos sensores IMU e GPS. No Capítulo 3, é descrita a técnica de fusão de dados utilizando um filtro complementar e também o projeto do sistema de controle. No Capítulo 4, são apresentados os resultados de simulação, demonstrando o desempenho do controlador proposto e realizando uma análise dos resultados obtidos. Por fim, no Capítulo 5 são realizadas as conclusões do trabalho, acompanhando sugestões para trabalhos futuros.

## 2 Descrição do Sistema

Neste capítulo será apresentado o modelo dinâmico do quadricóptero. Posteriormente, o modelo será simplificado e linearizado em torno da condição reto e nivelado, resultando em um sistema linear e invariante no tempo.

### 2.1 Sistemas de referência

Antes de realizar a modelagem propriamente dita, serão definidos os sistemas de referência adotados no projeto, bem como as matrizes de transformação entre eles.

Primeiramente, adota-se o sistema de referência da terra, comumente conhecido como NED (*North, East and Down*). Esse sistema é obtido ao ajustar um plano tangente à superfície terrestre (representada como uma elipse). Dessa forma, tem-se um plano cartesiano tridimensional (cujos eixos serão denotados por  $X^G$ ,  $Y^G$ ,  $Z^G$ ), com origem no ponto inicial de decolagem, o qual se relaciona com o sistema de coordenadas geodésicas (Latitude, Longitude, Altitude) da seguinte maneira:

- $X^G$  e  $Y^G$ : Vetores com mesmo sentido e direção do norte e do leste verdadeiro, respectivamente;
- $Z^G$ : Aponta para o centro da terra.

A localização de um ponto nesse sistema é representada na Figura 1.

Para determinar a orientação do veículo em relação ao referencial NED é realizada a definição de um referencial do próprio corpo (indicado pelo sobrescrito  $b$ ). Especificamente, esse referencial é obtido trasladando-se o NED até o centro de massa do veículo (ROSKAM, 2001). Os sentidos e as direções dos eixos do referencial do corpo, denotados por  $x^b$ ,  $y^b$  e  $z^b$ , estão alinhados, inicialmente, com os do NED. Vale comentar que o referencial do corpo se movimenta junto com o veículo, pois está fixado a ele; contudo, o referencial do NED trasladado até o corpo, composto pelos eixos  $X^{G'}$ ,  $Y^{G'}$  e  $Z^{G'}$ , estará sempre alinhado com os eixos do NED.

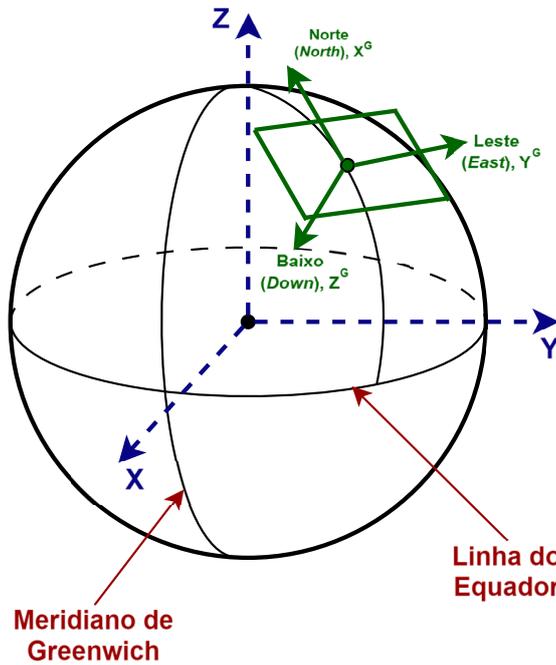


Figura 1 – Representação do referencial NED. Fonte: (CENTER, 2023) e modificado pelo autor.

O quadricóptero tem uma estrutura composta por quatro motores, com uma disposição do tipo “Quad +”, como apresentado na Figura 2. Nessa configuração, os braços do veículo estão dispostos com os eixos de rotação do seu próprio referencial. Ao posicionar os referenciais segundo as definições anteriores, determina-se a orientação (ou atitude) do veículo, a qual está associada com as rotações do sistema  $b$  em relação ao sistema  $G$ . Em particular, os ângulos de rotação em torno dos eixos  $x^b$ ,  $y^b$  e  $z^b$  são denominados rolagem ( $\phi$ ), arfagem ( $\theta$ ) e guinada ( $\psi$ ), respectivamente (ROSKAM, 2001).

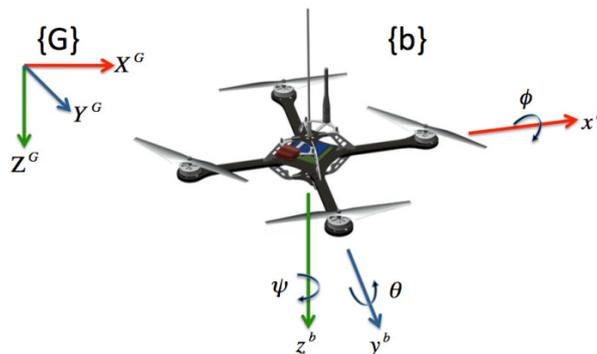


Figura 2 – Sistemas de referência do corpo e do referencial inercial. Fonte: (WU; SARDAHI, 2023).

### 2.1.1 Matrizes de transformação

Segundo Roskam (2001), dados os ângulos  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$ , é possível obter matrizes de transformação que convertem componentes vetoriais, como velocidade e aceleração linear, entre os referenciais  $G$  e  $b$ . Especificamente, as rotações em torno dos ângulos de guinada, arfagem e rolagem são dadas respectivamente por

$$\mathbf{R}_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\text{sen } \psi & 0 \\ \text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{R}_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\text{sen } \phi \\ 0 & \text{sen } \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Uma vez definidas as matriz de rotação em torno de cada eixo do referencial do corpo para o NED, um vetor no referencial do corpo pode ser transformado para o NED utilizando a seguinte matriz:

$$\mathbf{S}_b^G = \mathbf{R}_\psi \mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\phi \quad (2.4)$$

$$\mathbf{S}_b^G = \begin{bmatrix} C(\psi)C(\theta) & C(\psi)S(\theta)S(\phi) - S(\psi)C(\phi) & S(\psi)S(\phi) + C(\psi)S(\theta)C(\phi) \\ S(\psi)C(\theta) & C(\psi)C(\phi) + S(\psi)S(\theta)S(\phi) & S(\psi)S(\theta)C(\phi) - C(\psi)S(\phi) \\ -S(\theta) & C(\theta)S(\phi) & C(\theta)C(\phi) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

em que  $C(\bullet)$  e  $S(\bullet)$  denotam os cosseno e seno, respectivamente.

Ainda, pode-se estabelecer uma relação entre as velocidades angulares do corpo, denotadas por  $p$ ,  $q$  e  $r$ , com as velocidades dos ângulos de Euler ( $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\psi}$ ), através das seguintes equações (ROSKAM, 2001):

$$p(t) = \dot{\phi}(t) - \dot{\psi}(t)S(\theta(t)) \quad (2.6)$$

$$q(t) = \dot{\theta}(t)C(\phi(t)) + \dot{\psi}(t)C(\theta(t))S(\phi(t)) \quad (2.7)$$

$$r(t) = \dot{\psi}(t)C(\theta(t))C(\phi(t)) - \dot{\theta}(t)S(\phi(t)) \quad (2.8)$$

Uma vez obtidas as velocidades angulares do corpo, é possível reestabelecer as taxas dos ângulos de Euler ( $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\psi}$ ), assim como é demonstrado a seguir (ROSKAM, 2001):

$$\dot{\phi}(t) = p(t) + q(t)S(\phi(t))T(\theta(t)) + r(t)C(\phi(t))T(\theta(t)) \quad (2.9)$$

$$\dot{\theta}(t) = q(t)C(\phi(t)) - r(t)S(\phi(t)) \quad (2.10)$$

$$\dot{\psi}(t) = (q(t)S(\phi(t)) + r(t)C(\phi(t)))SEC(\theta(t)) \quad (2.11)$$

em que  $T(\bullet)$  e  $SEC(\bullet)$  referem-se à função tangente e secante, respectivamente.

## 2.2 Modelagem

Os efeitos aerodinâmicos gerados nas hélices produzem forças de empuxo  $F$ , promovendo o deslocamento do veículo. Além disso, a velocidade e a aceleração angular das hélices também produzem torques  $\tau_M$  em torno do eixo do rotor. Esses efeitos são fisicamente definidos por (LUUKKONEN, 2011)

$$F_i^b(t) = K_T \omega_i^2(t) \quad (2.12)$$

$$\tau_{M_i}^b(t) = K_D \omega_i^2(t) + I_M \dot{\omega}_i(t) \quad (2.13)$$

em que

- $i$ : Número de motores. Logo  $i = 1, 2, 3$  e  $4$ ;
- $\omega_i$ : Velocidade angular do  $i$ -ésimo rotor;
- $K_T$ : Coeficiente aerodinâmico de empuxo;
- $K_D$ : Coeficiente aerodinâmico de arrasto;
- $I_M$ : Momento de inércia do rotor.

O empuxo total no centro de massa do veículo  $\mathbf{T}^b$  é resultado da combinação das forças de cada rotor. Matematicamente,

$$\mathbf{T}^b(t) = \sum_{i=1}^4 F_i(t) = K_T \sum_{i=1}^4 \omega_i^2(t) \quad (2.14)$$

$$\mathbf{T}^b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(F_1(t) + F_2(t) + F_3(t) + F_4(t)) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

É importante ressaltar que, em (2.15),  $\mathbf{T}^b$  resulta em um empuxo total negativo, uma vez que o sentido vetorial deste é contrário ao referencial  $Z^G$  representado na Figura 2.

Variando a velocidade angular das hélices, é possível controlar os momentos em torno do centro de massa e, conseqüentemente, os ângulos de rotação. No caso particular do momento de guinada, o controle é realizado girando pares de hélices em sentidos contrários (como ilustrado na Figura 3). Na figura, os motores 1 e 3 giram no sentido horário (*Clockwise* - CW) enquanto 2 e 4 no sentido anti-horário (*Counter Clockwise* - CCW). Dessa forma, caso esses torques gerados nos sentidos CW e CCW não tiverem intensidades iguais, a resultante do momento contribuirá para um deslocamento angular em torno do eixo  $z^b$ .

Já os torques associados aos movimentos de rolagem e arfagem são resultados do produto das forças produzidas pelas hélices com o braço de alavanca do veículo.

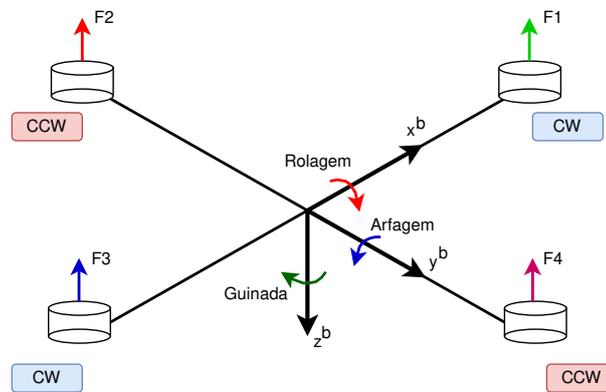


Figura 3 – Sentido de rotação dos motores de um quadricóptero. Fonte: Autor.

A Tabela 1 mostra como a velocidade de rotação de cada motor deve ser alterada para movimentos no sentido positivo dos graus de liberdade  $z^b$ ,  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$ , considerando voo reto e nivelado.

Tabela 1 – Influência da velocidade de rotação dos motores no sentido positivo dos graus de liberdade  $z^b$ ,  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$ .

	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$
$z^b$	↓	↓	↓	↓
$\phi$	–	↑	–	↓
$\theta$	↑	–	↓	–
$\psi$	↓	↑	↓	↑

Segundo Luukkonen (2011), a aceleração angular dos rotores é pequena, e pode ser desconsiderada. Sendo assim, com base na influência dos motores na dinâmica do veículo, denominando  $d$  como o braço de alavanca do quadricóptero (distância entre o centro de massa e os rotores), fazendo-se uso de (2.13), os torques gerados em torno dos eixos do sistema de coordenadas do corpo são

$$\boldsymbol{\tau}_M^b(t) = \begin{bmatrix} \tau_\phi^b(t) \\ \tau_\theta^b(t) \\ \tau_\psi^b(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dK_T(-\omega_2^2(t) + \omega_4^2(t)) \\ dK_T(-\omega_1^2(t) + \omega_3^2(t)) \\ K_D(-\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) - \omega_3^2(t) + \omega_4^2(t)) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Denominando  $U_2(t) = -\omega_2^2(t) + \omega_4^2(t)$ ,  $U_3(t) = -\omega_1^2(t) + \omega_3^2(t)$  e  $U_4(t) = -\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) - \omega_3^2(t) + \omega_4^2(t)$ , tem-se que

$$\boldsymbol{\tau}_M^b(t) = \begin{bmatrix} \tau_\phi^b(t) \\ \tau_\theta^b(t) \\ \tau_\psi^b(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dK_T U_2(t) \\ dK_T U_3(t) \\ K_D U_4(t) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

em que  $U_2$ ,  $U_3$  e  $U_4$  são denominados ações de controle de rolagem, arfagem e guinada, respectivamente.

Para a modelagem do quadricóptero será utilizado o modelo dinâmico de corpos rígidos baseando-se no formalismo de Newton-Euler (BOUABDALLAH, 2007). Segundo essa metodologia, pode-se descrever a dinâmica translacional e rotacional para um corpo rígido de maneira combinada. Matematicamente,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}^b(t) \\ \boldsymbol{\tau}^b(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}^b(t) \times m\mathbf{V}^b(t) \\ \boldsymbol{\Omega}^b(t) \times \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}^b(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{V}}^b(t) \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}}^b(t) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

em que  $m$  é a massa total do veículo,  $\boldsymbol{\Omega}^b = [\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$  (assumindo  $\phi \approx \theta \approx \psi \approx 0$ ) (VIEIRA, 2017), e  $\mathbf{V}^b = [\dot{x}^b \ \dot{y}^b \ \dot{z}^b]^T$  são, respectivamente, vetores de velocidade angular e linear em relação aos referências do corpo,  $\mathbf{I} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$  é a matriz de inércia do veículo. O termo  $m\dot{\mathbf{V}}^b(t)$  representa a força gerada pela aceleração linear do corpo,  $\boldsymbol{\Omega}^b(t) \times m\mathbf{V}^b(t)$  a força centrípeta,  $\dot{\boldsymbol{\Omega}}^b(t)$  a aceleração angular, e, por fim,  $\boldsymbol{\Omega}^b(t) \times \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}^b(t)$  representa as força centrífuga. Como resultado, têm-se o vetor de força  $\mathbf{F}^b = [F_x \ F_y \ F_z]^T$  e o vetor de torque  $\boldsymbol{\tau}^b = [\tau_x \ \tau_y \ \tau_z]^T$ , ambos definidos no referencial do corpo.

Nessa forma de modelagem, assumem-se as seguintes hipóteses:

- O veículo é considerado como um corpo rígido e simétrico;
- A origem do referencial do corpo está posicionada no centro de massa do corpo;
- Terra plana e estacionária.

Sabe-se que a matriz de inércia, para um corpo simétrico, é definida da seguinte maneira (SHIRSAT, 2015):

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

em que  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$  e  $I_{zz}$  representam o momento de inércia em torno do eixo  $x^b$ ,  $y^b$  e  $z^b$ , respectivamente.

Considerando apenas a força em (2.18), tem-se que

$$\mathbf{F}^b(t) = \boldsymbol{\Omega}^b(t) \times (m\mathbf{V}^b(t)) + m\dot{\mathbf{V}}^b(t) \quad (2.20)$$

No veículo há duas forças atuantes: a força devido à aceleração gravitacional, e a força devido ao empuxo dos motores. Com isso,  $\mathbf{F}^b(t)$  pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$m\mathbf{S}_G^b \mathbf{G}^G + \mathbf{T}^b(t) = \boldsymbol{\Omega}^b(t) \times (m\mathbf{V}^b(t)) + m\dot{\mathbf{V}}^b(t) \quad (2.21)$$

em que o termo  $\mathbf{S}_G^b \mathbf{G}^G$  representa a aceleração gravitacional transformada para o referencial do corpo, sendo  $\mathbf{G}^G = [0 \ 0 \ g]^T$  m/s<sup>2</sup> e  $g$  a aceleração gravitacional.

Multiplicando-se (2.21) por  $\mathbf{S}_b^G$  de ambos os lados (i.e. passando para o referencial da terra) e desprezando a força centrífuga, é possível escrever:

$$m\mathbf{S}_b^G \dot{\mathbf{V}}^b(t) = \mathbf{G}^G + \mathbf{S}_b^G \mathbf{T}^b(t) \quad (2.22)$$

$$m\dot{\boldsymbol{\xi}}^G(t) = \mathbf{G}^G + \mathbf{S}_b^G \mathbf{T}^b(t) \quad (2.23)$$

em que  $\dot{\boldsymbol{\xi}}^G$  representa a aceleração linear no referencial inercial,  $\dot{\boldsymbol{\xi}}^G = [\dot{X}^G \ \dot{Y}^G \ \dot{Z}^G]^T$ . Por conseguinte,  $\boldsymbol{\xi}^G$  e  $\boldsymbol{\xi}^G$  representam a velocidade linear e a própria posição no referencial inercial, respectivamente. Expandindo (2.23), tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{X}^G(t) \\ \dot{Y}^G(t) \\ \dot{Z}^G(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \mathbf{S}_b^G \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(F_1(t) + F_2(t) + F_3(t) + F_4(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \mathbf{S}_b^G \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -U_1(t) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

sendo  $U_1 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$ . Com base na matriz de rotação dada por (2.5), pode-se expressar:

$$\begin{bmatrix} \ddot{X}^G(t) \\ \ddot{Y}^G(t) \\ \ddot{Z}^G(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + \frac{-U_1(t)}{m} \begin{bmatrix} C(\phi(t)) S(\theta(t)) C(\psi(t)) + S(\phi(t)) S(\psi(t)) \\ C(\phi(t)) S(\theta(t)) S(\psi(t)) - S(\phi(t)) C(\psi(t)) \\ C(\phi(t)) C(\theta(t)) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

De forma similar, a partir de (2.18) a dinâmica de movimento rotacional do veículo pode ser escrita do seguinte modo:

$$\boldsymbol{\tau}^b(t) = \boldsymbol{\Omega}^b(t) \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}^b(t)) + \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\Omega}}^b(t) + \mathbf{F}^b(t) \quad (2.26)$$

em que  $\mathbf{F}^b$  representa as forças giroscópicas (VIEIRA, 2017), e é expresso pela seguinte equação:

$$\mathbf{F}^b = J\boldsymbol{\Omega}^b(t) \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_r^b(t) \quad (2.27)$$

Nessa equação,  $J$  é a inércia do rotor, e  $\boldsymbol{\Omega}_r^b$  a velocidade angular total residual das hélices, expressa como  $\boldsymbol{\Omega}_r^b = U_4$  (OLIVEIRA et al., 2021).

Isolando a aceleração angular em (2.26), e substituindo  $\mathbf{F}^b$  por (2.27), obtém-se a seguinte formulação (VIEIRA, 2017):

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}^b(t) = \mathbf{I}^{-1} \left( - \begin{bmatrix} \dot{\phi}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{xx} \dot{\phi}(t) \\ I_{yy} \dot{\theta}(t) \\ I_{zz} \dot{\psi}(t) \end{bmatrix} - J \begin{bmatrix} \dot{\phi}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_r^b(t) + \boldsymbol{\tau}^b(t) \right) \quad (2.28)$$

Rearranjando a equação acima, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{\psi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(I_{xx}-I_{zz})\dot{\theta}(t)\dot{\psi}(t)}{I_{xx}} \\ \frac{(I_{zz}-I_{xx})\dot{\phi}(t)\dot{\psi}(t)}{I_{yy}} \\ \frac{(I_{xx}-I_{yy})\dot{\phi}(t)\dot{\theta}(t)}{I_{zz}} \end{bmatrix} + J \begin{bmatrix} \frac{\dot{\theta}(t)}{I_{xx}} \\ -\frac{\dot{\phi}(t)}{I_{yy}} \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_r^b(t) + \begin{bmatrix} \frac{\tau_{\phi}^b(t)}{I_{xx}} \\ \frac{\tau_{\theta}^b(t)}{I_{yy}} \\ \frac{\tau_{\psi}^b(t)}{I_{zz}} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Por fim, de (2.25) e (2.29), aplicando as simplificações de  $\boldsymbol{\tau}^b$  apresentadas em (2.17), o modelo dinâmico do quadricóptero pode ser representado por

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{\psi}(t) \\ \ddot{X}^G(t) \\ \ddot{Y}^G(t) \\ \ddot{Z}^G(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}(t)\dot{\psi}(t) \left( \frac{I_{xx}-I_{zz}}{I_{xx}} \right) + \dot{\theta}(t) \left( \frac{J}{I_{xx}} \right) \Omega_r^b(t) + \frac{d}{I_{xx}} U_2(t) \\ \dot{\phi}(t)\dot{\psi}(t) \left( \frac{I_{zz}-I_{xx}}{I_{yy}} \right) - \dot{\phi}(t) \left( \frac{J}{I_{yy}} \right) \Omega_r^b(t) + \frac{d}{I_{yy}} U_3(t) \\ \dot{\theta}(t)\dot{\phi}(t) \left( \frac{I_{xx}-I_{yy}}{I_{zz}} \right) + \frac{1}{I_{zz}} U_4(t) \\ -(C(\phi(t)) S(\theta(t)) C(\psi(t)) + S(\phi(t)) S(\psi(t))) \frac{1}{m} U_1(t) \\ -(C(\phi(t)) S(\theta(t)) S(\psi(t)) - S(\phi(t)) C(\psi(t))) \frac{1}{m} U_1(t) \\ g - (C(\phi(t)) C(\theta(t))) \frac{1}{m} U_1(t) \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

simplicando

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{\psi}(t) \\ \ddot{X}^G(t) \\ \ddot{Y}^G(t) \\ \ddot{Z}^G(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}(t)\dot{\psi}(t) \left( \frac{I_{xx}-I_{zz}}{I_{xx}} \right) + \dot{\theta}(t) \left( \frac{J}{I_{xx}} \right) \Omega_r^b(t) + \frac{d}{I_{xx}} U_2(t) \\ \dot{\phi}(t)\dot{\psi}(t) \left( \frac{I_{zz}-I_{xx}}{I_{yy}} \right) - \dot{\phi}(t) \left( \frac{J}{I_{yy}} \right) \Omega_r^b(t) + \frac{d}{I_{yy}} U_3(t) \\ \dot{\theta}(t)\dot{\phi}(t) \left( \frac{I_{xx}-I_{yy}}{I_{zz}} \right) + \frac{1}{I_z} U_4(t) \\ \frac{U_x(t)}{m} \\ \frac{U_y(t)}{m} \\ U_z(t) \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

em que

- $U_x$  é a ação de controle de aceleração no eixo  $X^G$ :

$$U_x(t) = -(C(\phi(t)) S(\theta(t)) C(\psi(t)) + S(\phi(t)) S(\psi(t))) U_1(t) \quad (2.32)$$

- $U_y$  é a ação de controle de aceleração no eixo  $Y^G$ :

$$U_y(t) = -(C(\phi(t)) S(\theta(t)) S(\psi(t)) - S(\phi(t)) C(\psi(t))) U_1(t) \quad (2.33)$$

- $U_z$  é a ação de controle de aceleração no eixo  $Z^G$ :

$$U_z(t) = g - (C(\phi(t)) C(\theta(t))) \frac{U_1(t)}{m} \quad (2.34)$$

O modelo do veículo apresentado em (2.31) expressa as acelerações de cada estado, uma vez que são representadas as derivada dupla sobre cada um deles. Tanto na modelagem de sensores quanto no projeto de controle, os quais serão abordados posteriormente, torna-se, por vezes, necessário utilizar a integral desses estados. Nesses casos será aplicada a metodologia de integração numérica Euler *Forward* de primeira ordem (LEVEQUE, 2005) nos estados  $\ddot{\phi}$ ,  $\ddot{\theta}$ ,  $\ddot{\psi}$ ,  $\ddot{X}^G$ ,  $\ddot{Y}^G$  e  $\ddot{Z}^G$  obtidos em simulação. Este método é expresso pela equação a seguir:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_{k-1} + dt \mathbf{f}(t_{k-1}, \mathbf{y}_{k-1}) \quad (2.35)$$

em que  $\mathbf{y}$  representa uma aproximação numérica da integral de  $\mathbf{y}'$ . Nesse caso,  $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  simboliza a variável a ser integrada numericamente. Além disso,  $dt$  representa o período de amostragem.

## 2.3 Linearização

No projeto do controlador de atitude utilizou-se o modelo de (2.31) linearizado. A metodologia de linearização é baseada na expansão da série de Taylor de primeira ordem a partir de uma função multivariável (OGATA, 2010)

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx f(a_1, a_2, \dots, a_n) + \sum_{n=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_n)(x_n - a_n) \quad (2.36)$$

em que

- $n$ : Número de variáveis;
- $x_n$ : Variáveis da função a ser linearizada;
- $a_n$ : Condições de contorno.

Neste trabalho, assumiu-se o seguinte ponto de linearização  $\phi = \theta = \psi = \dot{\phi} = \dot{\theta} = \dot{\psi} = 0$

Sendo assim, aplicando o procedimento de linearização no modelo do quadricóptero é possível obter

$$\ddot{\phi}(t) \approx \frac{d}{I_{xx}} U_2(t) \quad (2.37)$$

$$\ddot{\theta}(t) \approx \frac{d}{I_{yy}} U_3(t) \quad (2.38)$$

$$\ddot{\psi}(t) \approx \frac{U_4(t)}{I_{zz}} \quad (2.39)$$

As equações acima podem ser representadas na forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{\psi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{I_{xx}} U_2(t) \\ \frac{d}{I_{yy}} U_3(t) \\ \frac{1}{I_{zz}} U_4(t) \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

## 2.4 Modelagem de sensores

Na prática, o controlador recebe dados de sensores que não refletem exatamente os estados verdadeiros do sistema. Existem diversas características dos sensores que podem acarretar em divergências de medição, como, por exemplo, tempo de resposta (tempo de duração para que o valor medido atinja uma fração de 90% a 100% do valor final) (ALEX et al., 2009), ruídos, limites de medição (medição máxima e mínima), intervalos de medição (frequência de atualização), entre outros. Considerando isso, para se obter uma boa representatividade da simulação, é importante incluir modelos para os sensores do veículo. Em particular, foram incluídos os seguintes sensores na simulação:

- Acelerômetro: Fornece dados de aceleração linear no referencial do corpo ( $\ddot{x}^b$ ,  $\ddot{y}^b$ ,  $\ddot{z}^b$ );
- Giroscópio: Mede a velocidade angular do veículo ( $p$ ,  $q$ ,  $r$ );
- Magnetômetro: Mensura a intensidade do campo magnético da terra nos eixos do veículo;
- GPS (*Global Position System*): Informa a posição do veículo em relação ao referencial inercial.

Na sequência, os modelos matemáticos assumidos para cada um desses sensores são detalhados. É importante ressaltar que todos os ruídos brancos admitidos nos modelos são de média zero.

### 2.4.1 Unidade de Medida Inercial: Acelerômetro, Giroscópio e Magnetômetro

O IMU (*Inertial Measurement Unit*) é um sensor utilizado para medir força específica, velocidade angular e orientação. Geralmente, é composto pela combinação de acelerômetro, giroscópio e magnetômetro. No caso do acelerômetro, pode-se considerar o seguinte modelo (MARTON et al., 2022):

$$\mathbf{a}_{ac}^b(k) = \dot{\mathbf{V}}^b(k) + \dot{\mathbf{\Omega}}^b(k) \times \widetilde{\mathbf{O}}_{xsens} - \mathbf{S}_G^b \mathbf{G}^G + \mathbf{a}_c^b(k) + \mathbf{N}_{wac} \quad (2.41)$$

sendo

- $\mathbf{a}_{ac}^b = [a_{ac_x^b} \ a_{ac_y^b} \ a_{ac_z^b}]^T$ : Vetor de aceleração total medida em cada eixo do veículo;
- $\widetilde{\mathbf{O}}_{xsens}$ : Vetor posição com origem no centro de massa até a localização do sensor;
- $\mathbf{a}_c^b$ : Aceleração centrípeta;

- $\mathbf{N}_{w_{ac}}$ : Vetor com ruídos brancos nos eixos do sensor relacionado aos dados de aceleração;
- $k$ : Índice representa o passo atual da simulação.

Assumindo que o sensor está posicionado no centro de massa do veículo e que a aceleração centrípeta é desprezível, (2.41) pode ser simplificada da seguinte forma:

$$\mathbf{a}_{ac}^b(k) = \dot{\mathbf{V}}^b(k) + \mathbf{S}_G^b \mathbf{G}^G + \mathbf{N}_{w_{ac}} \quad (2.42)$$

Já para o modelo do giroscópio, assumindo que tal sensor está posicionado na origem do referencial do corpo e desconsiderando o viés de tal sensor, pode ser modelado da seguinte maneira (MARTON et al., 2022):

$$\boldsymbol{\Omega}_{gir}^b(k) = \boldsymbol{\Omega}^b(k) + \mathbf{N}_{w_{gir}} \quad (2.43)$$

Ou seja, assume-se que a medida atual do giroscópio ( $\boldsymbol{\Omega}_{gir}^b(k)$ ) é o vetor de velocidade angular do veículo no instante atual de simulação ( $\boldsymbol{\Omega}^b = [p_{gir} \ q_{gir} \ r_{gir}]^T$ ) adicionado de um vetor de ruído branco  $\mathbf{N}_{w_{gir}}$ .

Para a modelagem do magnetômetro, considera-se o modelo de campo magnético mundial (*World Magnetic Model*, WMM), conforme estudado e desenvolvido por Information (2023). Para cada posição geodésica, existe uma magnitude e uma direção tridimensional do vetor que representa o campo magnético. Essa definição ressalta que o norte indicado por uma bússola, por exemplo, nem sempre coincide com a direção do norte geográfico. Segundo Marton et al. (2022), o modelo do magnetômetro é expresso da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\Phi}_{mag}^b(k) = \mathbf{S}_{G_{mag}}^b \boldsymbol{\Phi}^G(k) + \mathbf{N}_{w_{mag}} \quad (2.44)$$

em que  $\boldsymbol{\Phi}^G = [\Phi_{XG} \ \Phi_{YG} \ \Phi_{ZG}]^T$  define a intensidade do campo magnético em cada eixo do referencial inercial,  $\mathbf{N}_{w_{mag}}$  o vetor de ruído branco relacionado as medições do magnetômetro,  $\boldsymbol{\Phi}_{mag}^b = [\Phi_{mag_{x^b}} \ \Phi_{mag_{y^b}} \ \Phi_{mag_{z^b}}]^T$  a intensidade do campo magnético medida em cada eixo do referencial corpo e, por fim,  $\mathbf{S}_{G_{mag}}^b$ , definido a partir de (2.45), é a matriz de transformação do referencial inercial para o referencial do corpo, similar à transposta de (2.4), porém desconsiderando a rotação causada pelo ângulo  $\psi$  (PFEIFER, 2013), como demonstrado a seguir:

$$\mathbf{S}_{G_{mag}}^b = [\mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\phi]^T \quad (2.45)$$

$$\mathbf{S}_{G_{mag}}^b = \begin{bmatrix} C(\theta) & S(\theta)S(\phi) - C(\phi) & S(\phi) + S(\theta)C(\phi) \\ C(\theta) & C(\phi) + S(\theta)S(\phi) & S(\theta)C(\phi) - S(\phi) \\ -S(\theta) & C(\theta)S(\phi) & C(\theta)C(\phi) \end{bmatrix}^T \quad (2.46)$$

### 2.4.2 GPS (*Global Position System*)

O modelo de GPS empregado é relativamente simplificado, consistindo na adição de um ruído branco à posição atual obtida através da simulação. Dessa forma, os controladores recebem uma atualização de posição com menos determinismo.

$$\mathbf{X}_{GPS}^G(k) = \mathbf{X}^G(k) + \mathbf{N}_{w_{GPS}} \quad (2.47)$$

sendo  $\mathbf{X}^G = [X_{X^G} \ X_{Y^G} \ X_{Z^G}]^T$  as posições no espaço tridimensional em relação ao referencial inercial, respectivamente.  $\mathbf{N}_{w_{GPS}}$  é o vetor de ruído branco associado as medições de GPS.

### 3 Projeto de controle

Após a apresentação da modelagem dinâmica do quadricóptero, pode-se projetar o sistema de controle, o qual é responsável por guiar o veículo para a posição desejada. O diagrama que representa o simulador como um todo, especificando o fluxo de sinais e os elementos que fazem parte do projeto, é representado na Figura 4.

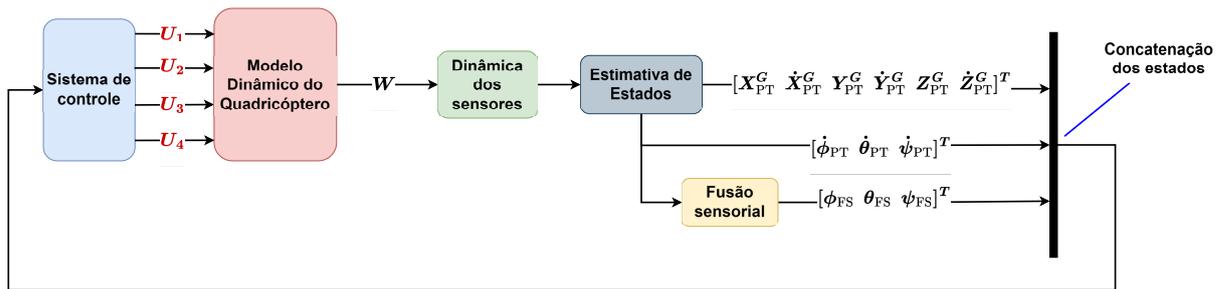


Figura 4 – Diagrama representando todos os elementos do simulador. Fonte: Autor.

Na Figura 4, o subscrito *PT* indica estados após o tratamento de sinais, enquanto que *FS* representa estados calculados empregando fusão sensorial. Já o vetor  $\mathbf{W}$  é definido concatenando-se posições, velocidades e acelerações lineares e angulares. Isto é,

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \xi^G(t) \\ \dot{\xi}^G(t) \\ \ddot{\xi}^G(t) \\ \phi(t) \\ \theta(t) \\ \psi(t) \\ \Omega^b(t) \\ \dot{\Omega}^b(t) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Nos próximos tópicos serão detalhados os elementos do diagrama, incluindo os métodos utilizados para estimar os estados a partir de dados de sensores, a fusão desses dados e, por fim, o sistema de controle implementado em simulação. Vale comentar que o bloco “Modelo Dinâmico do Quadricóptero” representa a simulação do modelo não linear do veículo apresentado no Capítulo 2.

### 3.1 Estimativa de estados e fusão sensorial

A partir dos dados coletados dos sensores, é possível estimar os estados do veículo e, em seguida, utilizá-los para fins de controle. Especificamente, o GPS é utilizado para estimar posição e velocidade linear. Por outro lado, os dados de acelerômetro, magnetômetro e giroscópio são convertidos em estados de atitude. A organização dessas estimativas, como o fluxo, obtenção e tratamento de sinais, é apresentada na Figura 5.

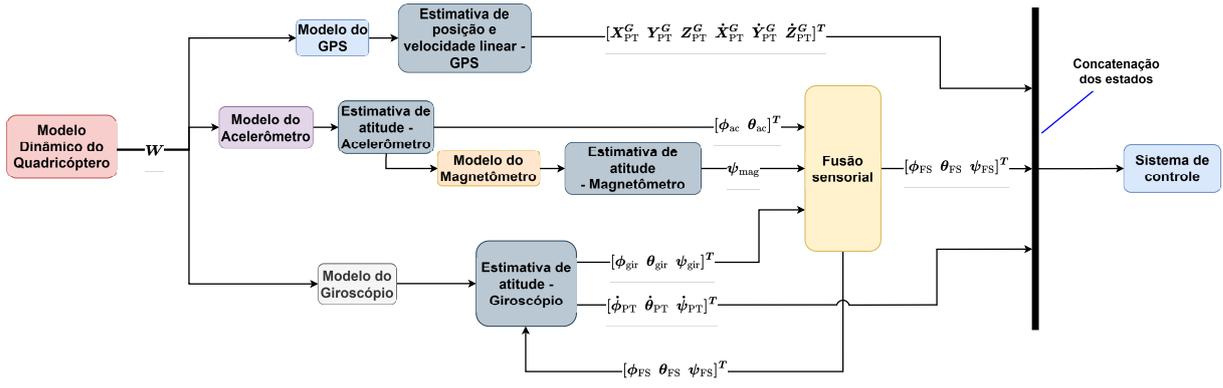


Figura 5 – Detalhamento dos blocos “Dinâmica de sensores”, “Estimativa de estados” e “Fusão sensorial”. Fonte: Autor.

#### 3.1.1 Estimativa de posição e velocidade linear a partir do GPS

As informações do GPS são processadas em um filtro passa-baixas para mitigação dos efeitos do ruído de medida. Para estimativa da velocidade linear ( $\dot{X}_{PT}^G$ ,  $\dot{Y}_{PT}^G$  e  $\dot{Z}_{PT}^G$ ) é realizada uma diferenciação numérica dos dados pós tratados de posição ( $X_{PT}^G$ ,  $Y_{PT}^G$  e  $Z_{PT}^G$ ). A representação da estimativa por parte do GPS é apresentada na Figura 6.

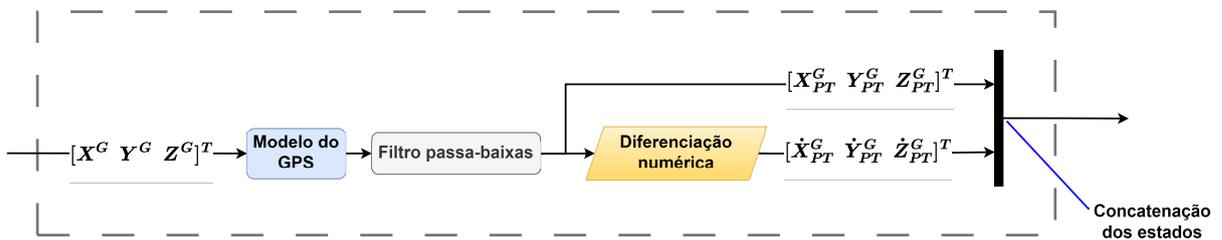


Figura 6 – Estimativa de posição e velocidade linear a partir do GPS. Fonte: Autor.

#### 3.1.2 Estimativa de atitude a partir do Acelerômetro e do Magnetômetro

Por parte do acelerômetro, como pode ser visualizado na Figura 7, a estimativa se inicia alimentando o modelo do acelerômetro (representado por (2.42)) com os dados de

aceleração no referencial inercial e atitude provenientes do modelo do quadricóptero. Em seguida, esses dados passam por um filtro passa-baixas e por uma computação condicional antes de serem incorporados ao sistema de estimativa.

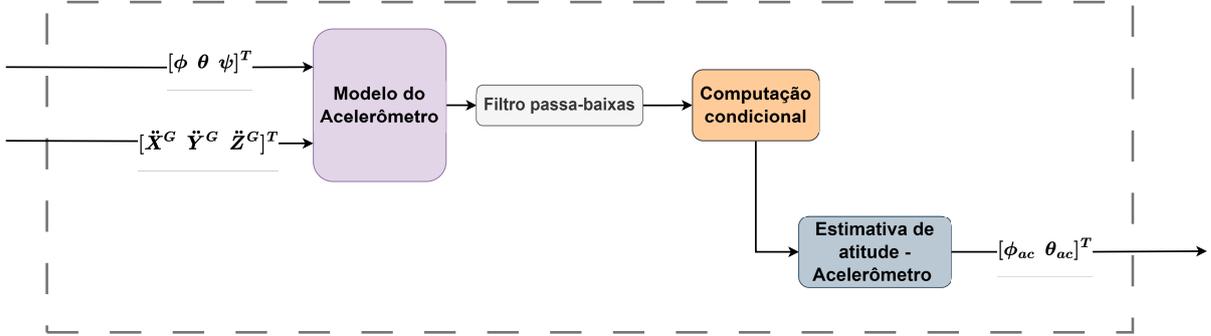


Figura 7 – Estimativa de  $\phi$  e  $\theta$  a partir do Acelerômetro. Fonte: Autor.

Em particular, as estimativas dos ângulos de arfagem e rolagem são realizadas com base no conhecimento da magnitude e direção da aceleração gravitacional  $g$ . Em situações em que a aceleração do veículo é desprezível, ao aplicar operações trigonométrica, é possível calcular tais ângulos. Contudo, quando o veículo está em movimento acelerado, essa estimativa deixa de ser confiável.

Uma das maneiras de evitar a estimativa incorreta da atitude é denominada computação condicional. Nessa metodologia, a nova informação do acelerômetro é desconsiderada quando a diferença entre as normas da aceleração medida por esse sensor e da aceleração gravitacional for maior que um limiar  $\beta$  (ZHE et al., 2020), mantendo-se assim a estimativa anterior. Matematicamente,

$$\mathbf{a}_{ac}^b(k) = \begin{cases} \mathbf{a}_{ac}^b(k) & , \text{ se } \left| \|\mathbf{a}_{ac}^b(k)\|_2 - \|\mathbf{G}^G\|_2 \right| < \beta \\ \mathbf{a}_{ac}^b(k-1) & , \text{ se } \left| \|\mathbf{a}_{ac}^b(k)\|_2 - \|\mathbf{G}^G\|_2 \right| \geq \beta \end{cases} \quad (3.2)$$

Seja o sistema de coordenadas composto pelos eixos  $X^{G'}$ ,  $Y^{G'}$  e  $Z^{G'}$  obtidos ao transladar o sistema do referencial  $G$  até o centro de massa do veículo, tem-se então a representação da aceleração gravitacional no mesmo ponto de origem das acelerações  $a_{ac_xb}$ ,  $a_{ac_yb}$  e  $a_{ac_zb}$ , ou seja, no centro de massa do veículo. Assim como representado na Figura 8, a estimativa do ângulo de rolagem  $\phi_{ac}$  pode ser expressa pela equação a seguir (KOKSAL; JALALMAAB; FIDAN, 2019):

$$\phi_{ac}(k) = \arctan 2(a_{ac_yb}(k), a_{ac_zb}(k)) \quad (3.3)$$

A função trigonométrica  $\arctan 2$  calcula o arco tangente de dois argumentos e é essencial no cálculo da atitude, pois determina o ângulo em relação ao quadrante apro-

priado.

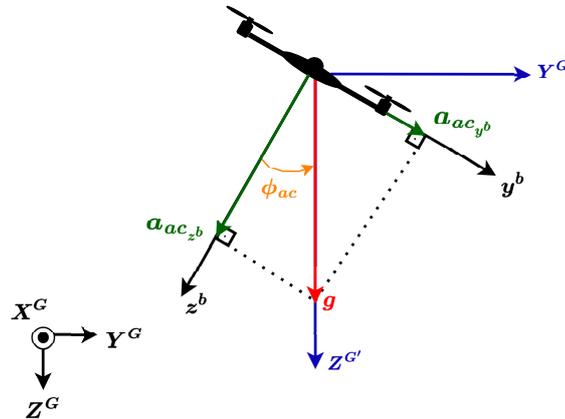


Figura 8 – Estimativa do ângulo de rolagem pela decomposição vetorial da aceleração gravitacional. Fonte: Autor.

Para a estimativa do ângulo de arfagem a partir das informações do acelerômetro  $\theta_{ac}$  é importante considerar que o veículo foi previamente rotacionado em torno do eixo  $X^{G'}$ , a partir da rolagem calculada em (3.3). Assim, o eixo do corpo que se alinha com o eixo  $Z^{G'}$  não é simplesmente o eixo  $z^b$ , mas sim a projeção deste no plano  $X^{G'} Z^{G'}$ , representado por  $z^{b'}$ . Essa caracterização fica evidente na Figura 9. De maneira análoga a estimativa de  $\phi_{ac}$ ,  $\theta_{ac}$  é determinado pela equação a seguir (KOKSAL; JALALMAAB; FIDAN, 2019):

$$\theta_{ac}(k) = \arctan 2(-a_{ac_{x^b}}(k), \sqrt{a_{ac_{y^b}}^2(k) + a_{ac_{z^b}}^2(k)}) \quad (3.4)$$

A representação da estimativa de  $\theta_{ac}$  é apresentada na Figura 9.

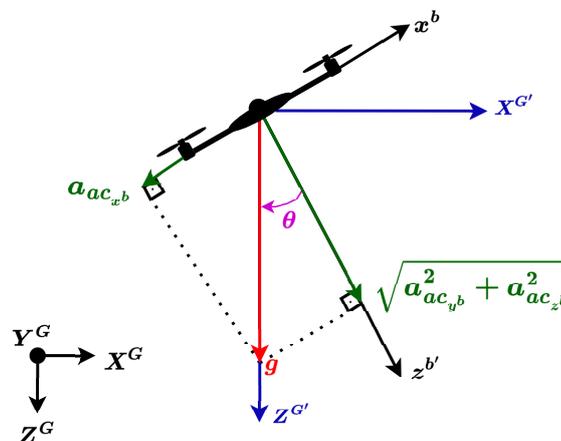


Figura 9 – Estimativa do ângulo de arfagem pela decomposição vetorial da aceleração gravitacional. Fonte: Autor.

Já o ângulo de guinada  $\psi$  é estimado utilizando os dados do magnetômetro, assim como representado na Figura 10. Os dados do magnetômetro são obtidos conforme (2.44), considerando  $\mathbf{S}_{G_{mag}}^b$  com os ângulos estimados a partir do acelerômetro ( $\phi_{ac}$  e  $\theta_{ac}$ ).

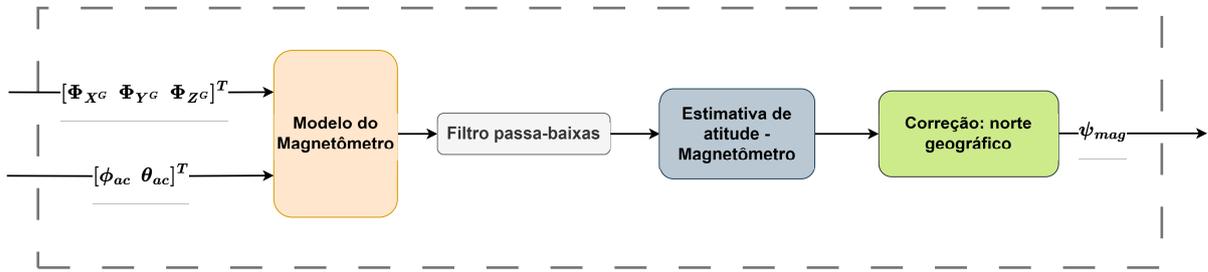


Figura 10 – Estimativa de  $\psi$  a partir do Magnetômetro. Fonte: Autor.

Mais precisamente, o ângulo de guinada é determinado resolvendo-se (KOKSAL; JALALMAAB; FIDAN, 2019):

$$\psi_{mag}(k) = \arctan 2(-\Phi_{mag_{y^b}}(k), \Phi_{mag_{x^b}}(k)) \quad (3.5)$$

em que  $\Phi_{y^b}(k)$  e  $\Phi_{x^b}(k)$  são as intensidades do campo magnético medidas no referencial do corpo do instante de tempo atual  $k$ , como ilustrado na Figura 11.

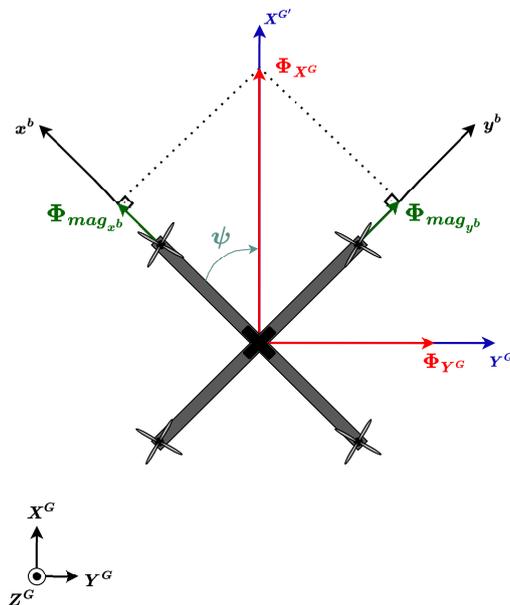


Figura 11 – Estimativa do ângulo de guinada pela decomposição vetorial do campo magnético. Fonte: Autor.

É importante ressaltar que a estimativa de guinada passa por uma correção do norte verdadeiro. Esse procedimento é direto: subtrai-se a declinação magnética da Terra, determinada pela posição geodésica atual do veículo (INFORMATION, 2023).

Unificando as estimativas de atitude ( $\phi_{ac}$ ,  $\theta_{ac}$  e  $\psi_{mag}$ ) fornecidas pelo acelerômetro e magnetômetro, obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} \phi_{ac}(k) \\ \theta_{ac}(k) \\ \psi_{mag}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan 2(a_{ac_{yb}}(k), a_{ac_{zb}}(k)) \\ \arctan 2(-a_{ac_{xb}}(k), \sqrt{a_{ac_{yb}}^2(k) + a_{ac_{zb}}^2(k)}) \\ \arctan 2(-\Phi_{mag_{yb}}(k), \Phi_{mag_{xb}}(k)) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

### 3.1.3 Estimativa de atitude a partir do Giroscópio

A partir dos dados de velocidade angular provenientes do modelo do sensor giroscópio ( $p_{gir}$ ,  $q_{gir}$  e  $r_{gir}$ ), realiza-se uma conversão para a taxa dos ângulos de Euler ( $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\theta}$  e  $\dot{\psi}$ ) utilizando (2.9), (2.10) e (2.11). Posteriormente, emprega-se integração numérica Euler para estimar a atitude do veículo. Matematicamente,

$$\begin{bmatrix} \phi_{gir}(k) \\ \theta_{gir}(k) \\ \psi_{gir}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{FS}(k-1) + dt \dot{\phi}_{gir}(k-1) \\ \theta_{FS}(k-1) + dt \dot{\theta}_{gir}(k-1) \\ \psi_{FS}(k-1) + dt \dot{\psi}_{gir}(k-1) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

em que  $\phi_{FS}(k-1)$ ,  $\theta_{FS}(k-1)$ ,  $\psi_{FS}(k-1)$  são os ângulos de Euler resultantes da Fusão Sensorial no passo anterior de simulação, que será descrita na seção seguinte. Já  $dt$  é o passo de integração. A representação dessa estimativa pode ser visualizada na Figura 12.

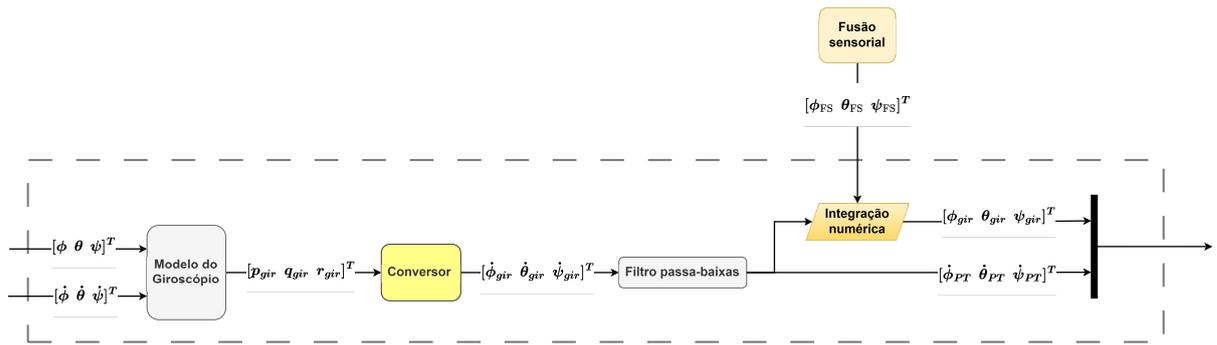


Figura 12 – Estimativa de atitude a partir do Giroscópio. Fonte: Autor.

### 3.1.4 Fusão sensorial

Essencialmente, o acelerômetro e o magnetômetro apresentam ruídos na medição em altas frequências, enquanto que o giroscópio tende a ter desvio de medida (*drift*) em

baixas frequências. A ideia da fusão sensorial é realizar um compromisso entre as estimativas de atitude realizadas como descrito nas Seções 3.1.2 e 3.1.3. Matematicamente, os estados de atitude estimados pela fusão sensorial são (GUI; TANG; MUKHOPADHYAY, 2015)

$$\begin{bmatrix} \phi_{FS}(k) \\ \theta_{FS}(k) \\ \psi_{FS}(k) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \phi_{gir}(k) \\ \theta_{gir}(k) \\ \psi_{gir}(k) \end{bmatrix} + (1 - \alpha) \begin{bmatrix} \phi_{ac}(k) \\ \theta_{ac}(k) \\ \psi_{mag}(k) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

sendo  $\alpha \in [0, 1]$  um parâmetro de ajuste.

Quando a estimativa dos ângulos de Euler pelo acelerômetro não está confiável, conforme indicado pela condição computacional (3.2), a fusão sensorial descarta esses dados como perturbações. Assim, apenas os dados de estimativa do giroscópio são utilizados (GUI; TANG; MUKHOPADHYAY, 2015).

### 3.2 Sistema de Controle

O sistema de controle do quadricóptero utiliza dois controladores: um para atitude e outro para posição, ambos projetados usando a metodologia LQR (*Linear Quadratic Regulator*) (FRANKLIN; POWELL; WORKMAN, 1998). A interação de tais controladores com o ambiente de simulação é ilustrada na Figura 13. Para aplicar o LQR, foram obtidos modelos lineares discretos para atitude e posição inercial utilizando o modelo do Capítulo 2. Esse procedimento, bem como outras etapas, como discretização do modelo, são apresentados na sequência.

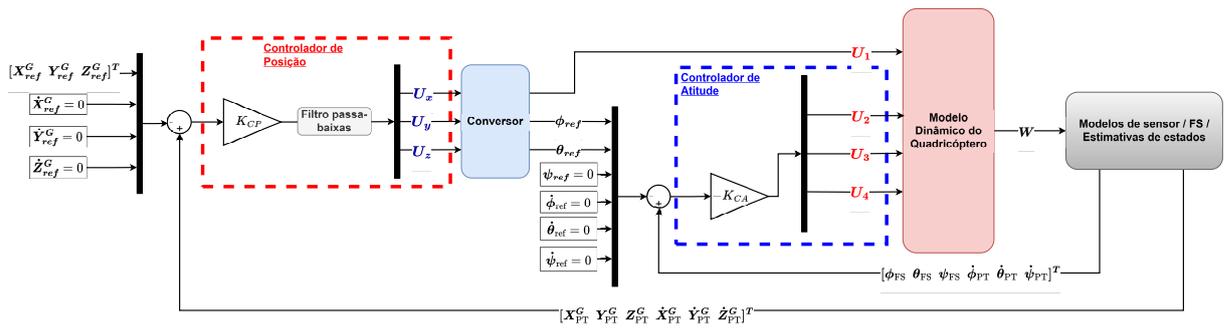


Figura 13 – Sistema de controle. Fonte: Autor.

É necessário ressaltar que doravante os subscritos *CA* e *CP* apresentados na Figura 13 significam “Controlador de Atitude” e “Controlador de Posição”, respectivamente.

### 3.2.1 Representação do modelo do quadricóptero no espaço de estados

Qualquer sistema linear e invariante no tempo pode ser representado no espaço de estados da seguinte forma (OGATA, 2010):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (3.9)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (3.10)$$

em que

- $\mathbf{x}$ : Vetor de estados (dimensão  $n$ );
- $\mathbf{y}$ : Vetor de saída (dimensão  $q$ );
- $\mathbf{u}$ : Vetor de sinais de controle (dimensão  $p$ );
- $\mathbf{A}$ : Matriz dinâmica (dimensão  $n \times n$ );
- $\mathbf{B}$ : Matriz de entrada (dimensão  $n \times p$ );
- $\mathbf{C}$ : Matriz de saída (dimensão  $q \times n$ );
- $\mathbf{D}$ : Matriz de transmissão direta (dimensão  $q \times p$ ).

Para a dinâmica de atitude, definida em (2.40), obtém-se a seguinte representação no espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}(t) \\ \ddot{\phi}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \\ \dot{\psi}(t) \\ \ddot{\psi}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{DA}} \begin{bmatrix} \phi(t) \\ \dot{\phi}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{d}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{DA}} \begin{bmatrix} U_2(t) \\ U_3(t) \\ U_4(t) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\begin{bmatrix} \phi(t) \\ \dot{\phi}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{DA}} \begin{bmatrix} \phi(t) \\ \dot{\phi}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_{DA}} \begin{bmatrix} U_2(t) \\ U_3(t) \\ U_4(t) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

em que o subscrito  $DA$  significa “Dinâmica de Atitude”.

De maneira semelhante, para a dinâmica relacionada a posição (indicada pelo subscrito  $DP$ , de maneira análoga ao  $DA$ ), definida em (2.31), tem-se a seguinte representação:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}^G(t) \\ \ddot{X}^G(t) \\ \dot{Y}^G(t) \\ \ddot{Y}^G(t) \\ \dot{Z}^G(t) \\ \ddot{Z}^G(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{DP}} \begin{bmatrix} X^G(t) \\ \dot{X}^G(t) \\ Y^G(t) \\ \dot{Y}^G(t) \\ Z^G(t) \\ \dot{Z}^G(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B_{DP}} \begin{bmatrix} U_x(t) \\ U_y(t) \\ U_z(t) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\begin{bmatrix} X^G(t) \\ \dot{X}^G(t) \\ Y^G(t) \\ \dot{Y}^G(t) \\ Z^G(t) \\ \dot{Z}^G(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_{DP}} \begin{bmatrix} X^G(t) \\ \dot{X}^G(t) \\ Y^G(t) \\ \dot{Y}^G(t) \\ Z^G(t) \\ \dot{Z}^G(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{D_{DP}} \begin{bmatrix} U_x(t) \\ U_y(t) \\ U_z(t) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

### 3.2.2 Conversão da dinâmica do quadricóptero para tempo discreto

Na prática, todos os sensores fornecem dados quantizados e discretizados, sendo crucial a implementação de sistemas de controle a tempo discreto. Para realizar essa conversão utiliza-se a metodologia *Zero-Order Hold* (ZOH), na qual considera-se que a ação de controle é mantida constante entre dois instantes de amostragem consecutivos (FRANKLIN; POWELL; WORKMAN, 1998). Como resultado, tem-se um sistema a tempo discreto na forma

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(k) \quad (3.15)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_d \mathbf{u}(k) \quad (3.16)$$

sendo  $\mathbf{A}_d$ ,  $\mathbf{B}_d$ ,  $\mathbf{C}_d$  e  $\mathbf{D}_d$  são as matrizes dinâmica, de entrada, saída e de transmissão direta a tempo discreto. Tem-se que

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}dt} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{B}_d = \int_0^{dt} e^{A\eta} d\eta B \quad (3.18)$$

$$\mathbf{C}_d = \mathbf{C} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{D}_d = \mathbf{D} \quad (3.20)$$

### 3.2.3 Projeto do controlador utilizando LQR

Como já mencionado, tanto o controlador de atitude como o de posição foram projetados considerando o problema do LQR. Nessa abordagem, a ação de controle é calculada por realimentação de estados, ou seja,

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}) = -\mathbf{K}(\mathbf{x}_{PT}(\mathbf{k}) - \mathbf{x}_{ref}) \quad (3.21)$$

em que  $\mathbf{x}_{PT}(\mathbf{k})$  são os estados estimados como descrito na Seção 3.1, e  $\mathbf{x}_{ref}$  o vetor de estado de referência. Já  $\mathbf{K}$  é uma matriz de realimentação de estados com dimensão adequada.

Considerando que o objetivo dos controladores é rastrear referências constantes de ângulo e posição, as leis de controle para as dinâmicas de atitude e posição podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} U_2(k) \\ U_3(k) \\ U_4(k) \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_{CA} \left( \begin{bmatrix} \phi_{FS}(k) \\ \dot{\phi}_{PT}(k) \\ \theta_{FS}(k) \\ \dot{\theta}_{PT}(k) \\ \psi_{FS}(k) \\ \dot{\psi}_{PT}(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_{ref} \\ 0 \\ \theta_{ref} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (3.22)$$

$$\begin{bmatrix} U_x(k) \\ U_y(k) \\ U_z(k) \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_{CP} \left( \begin{bmatrix} X_{PT}^G(k) \\ \dot{X}_{PT}^G(k) \\ Y_{PT}^G(k) \\ \dot{Y}_{PT}^G(k) \\ Z_{PT}^G(k) \\ \dot{Z}_{PT}^G(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_{ref} \\ 0 \\ Y_{ref} \\ 0 \\ Z_{ref} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (3.23)$$

Note que, neste trabalho, definiu-se que a guinada do veículo será mantida nula durante a operação. Isto é, foi imposto que  $\psi_{ref} = 0$ . Mais ainda,  $\mathbf{K}_{CA} \in \mathbf{R}^{6 \times 6}$  e

$K_{CP} \in \mathbf{R}^{6 \times 6}$  foram projetadas resolvendo o conhecido problema do LQR discreto (FRANKLIN; POWELL; WORKMAN, 1998). Já  $X_{ref}$ ,  $Y_{ref}$  e  $Z_{ref}$  define uma posição inercial de referência para o veículo escolhida pelo operador, e  $\phi_{ref}$  e  $\theta_{ref}$  são definidas pelo CP.

### 3.2.4 Conversor

Conforme ilustrado na Figura 13, o  $CA$  recebe referências de estados  $\phi_{ref}$  e  $\theta_{ref}$  do  $CP$ . Além disso, o  $CP$  gera o controle  $U_1$  para o modelo dinâmico. Em particular, a partir dos valores de  $U_x$ ,  $U_y$  e  $U_z$  oriundos de (3.23), calculam-se  $\phi_{ref}$ ,  $\theta_{ref}$  e  $U_1$  resolvendo-se o sistema de equações formado por (2.32), (2.33) e (2.34). A solução para esse sistema é analítica e foi obtida utilizando-se computação simbólica.

É importante ressaltar que o sistema de equações mencionado possui inúmeras soluções. No entanto, após realizar uma análise de sinais de  $\phi_{ref}$ ,  $U_1$  e  $\theta_{ref}$  chegaram-se às seguintes soluções únicas:

$$\phi_{ref}(k) = -2 \operatorname{atan} \left( \frac{\sqrt{-\left(U_y(k) + \sqrt{U_x^2(k) + U_y^2(k) + U_z^2(k) m^2 - 2 U_z(k) g m^2 + g^2 m^2}\right)}}{U_y(k)} \right. \\ \left. \frac{\left(U_y(k) - \sqrt{U_x^2(k) + U_y^2(k) + U_z^2(k) m^2 - 2 U_z(k) g m^2 + g^2 m^2}\right)}{U_y(k)} \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{U_x^2(k) + U_y^2(k) + U_z^2(k) m^2 - 2 U_z(k) g m^2 + g^2 m^2}}{U_y(k)} \right) \quad (3.24)$$

$$\theta_{ref}(k) = -2 \operatorname{atan} \left( \frac{\sqrt{-\left(U_y(k) + \sqrt{U_x^2(k) + U_y^2(k) + U_z^2(k) m^2 - 2 U_z(k) g m^2 + g^2 m^2}\right)}}{U_x(k)} \right. \\ \left. \frac{\left(U_y(k) - \sqrt{U_x^2(k) + U_y^2(k) + U_z^2(k) m^2 - 2 U_z(k) g m^2 + g^2 m^2}\right)}{U_x(k)} \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{U_x^2(k) + U_y^2(k) + U_z^2(k) m^2 - 2 U_z(k) g m^2 + g^2 m^2}}{U_x(k)} \right. \\ \left. + \frac{U_z(k) m - g m}{U_x(k)} + \frac{\sqrt{U_x^2(k) + U_y^2(k) + U_z^2(k) m^2 - 2 U_z(k) g m^2 + g^2 m^2}}{U_x(k)} \right) \quad (3.25)$$

$$U_1(k) = \sqrt{U_x^2(k) + U_y^2(k) + U_z^2(k) m^2 - 2 U_z(k) g m^2 + g^2 m^2} \quad (3.26)$$

Vale comentar que, na prática, os valores de  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  e  $U_4$  são empregados para calcular as rotações dos motores ( $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  e  $\omega_4$ ). Neste trabalho, por simplicidade, os

valores de  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  e  $U_4$  são passados diretamente para o modelo do veículo. Além disso, para garantir que as referências geradas  $\phi_{ref}$  e  $\theta_{ref}$  e o sinal de controle  $U_1$  sejam menos ruidosos, antes de fazer uso de (3.24), (3.25) e (3.26), os sinais  $U_x$ ,  $U_y$  e  $U_z$  são filtrados por filtros passa-baixas, estes referidos como filtros do sinal de controle do *CP*.

## 4 Resultados e Discussões

A metodologia de controle descrita no capítulo anterior foi empregada no modelo não linear descrito no Capítulo 2 em ambiente de simulação. Em particular, o trabalho foi realizado no MATLAB/SIMULINK®. Uma imagem da simulação desenvolvida encontra-se na Figura 14. Os parâmetros do quadricóptero foram retirados de Oliveira et al. (2021) e são apresentados na Tabela 2.

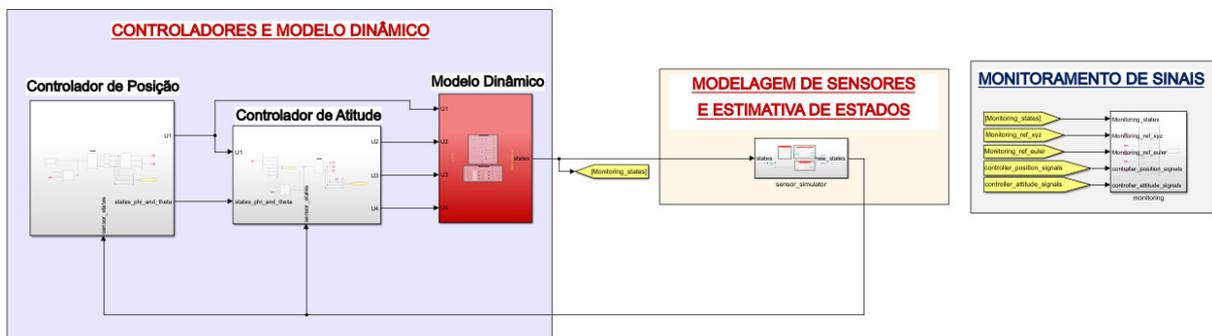


Figura 14 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para estado inicial nulo.  
Fonte: Autor.

Tabela 2 – Parâmetros do quadricóptero.

Variável	Valor	Unidade
$K_T$	1,03	kg
$K_D$	$1,4341 \times 10^{-5}$	$N/(\text{rad/s})^2$
$d$	0,26	m
$I_{xx}$	0,01683	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$
$I_{yy}$	0,01683	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$
$I_{zz}$	0,02834	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$
$J$	$5 \times 10^{-5}$	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$
$m$	1,03	kg
$g$	9,81	$\text{m/s}^2$

Os demais parâmetros de simulação: período de amostragem, magnitude da densidade espectral de potência do ruído branco associado aos sensores (a qual é constante no domínio da frequência), frequência de corte dos filtros passa-baixas, parâmetro de ajuste do filtro complementar e o parâmetro da computação condicional, são descritos na Tabela 3.

Tabela 3 – Parâmetros de simulação.

Variável	Valor	Unidade
$dt$	0,001	s
$\alpha$	0,99	-
$\beta$	0,2	-
$N_{w_{ac}}$	$1 \times 10^{-8}$	W/Hz
$N_{w_{gir}}$	$1 \times 10^{-9}$	W/Hz
$N_{w_{mag}}$	$1 \times 10^{-4}$	W/Hz
$N_{w_{GPS}}$	$2 \times 10^{-5}$	W/Hz
Filtro passa-baixa: Acel., Gir. e Mag.	0,6 (frequência de corte)	Hz
Filtro passa-baixa: GPS	1 (frequência de corte)	Hz
Filtro passa-baixa: Sinal de controle do CP	0,3 (frequência de corte)	Hz

## 4.1 Parâmetros para o projeto do $LQR$

Considerando os parâmetros da Tabela 2 e os modelos de atitude e posição dados respectivamente por (3.11)–(3.12) e (3.13)–(3.14), é possível obter as seguintes matrizes de tempo discreto:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathbf{A}_{DA_d} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \times 10^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \times 10^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{B}_{DA_d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1,54 \times 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,54 \times 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3,53 \times 10^{-2} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{C}_{DA_d} = [\mathbf{I}_6] \\
 \mathbf{D}_{DA_d} = [\mathbf{0}_{6 \times 3}]
 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathbf{A}_{DP_d} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \times 10^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \times 10^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{B}_{DP_d} = \begin{bmatrix} 5 \times 10^{-7} & 0 & 0 \\ 9,709 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 5 \times 10^{-7} & 0 \\ 0 & 9,709 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \times 10^{-7} \\ 0 & 0 & 1 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{C}_{DP_d} = [\mathbf{I}_6] \\
 \mathbf{D}_{DP_d} = [\mathbf{0}_{6 \times 3}]
 \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Para calcular a matriz de ganhos  $\mathbf{K}$  para os controladores de atitude e posição utilizando o LQR, é necessário definir as matrizes de peso de estado  $\mathbf{Q}$  e de controle  $\mathbf{R}$  (FRANKLIN; POWELL; WORKMAN, 1998). Neste trabalho, por tentativa e erro, definiram-se as seguintes matrizes de ajuste:

$$\mathbf{Q}_{CA} = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{R}_{CA} = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{Q}_{CP} = [\mathbf{I}_6] \quad (4.5)$$

$$\mathbf{R}_{CP} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Então, resolvendo o problema do LQR obtiveram-se

$$\mathbf{K}_{CA} = \begin{bmatrix} 61,2298 & 61,2945 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 61,2298 & 61,2945 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 28,2692 & 28,2975 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{K}_{CP} = \begin{bmatrix} 0,2581 & 0,7735 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2581 & 0,7735 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2581 & 0,7634 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

que são usadas para calcular as ações de controle de acordo com (3.22) e (3.23).

## 4.2 Resultados de simulação

Buscando avaliar o desempenho do controlador realizaram-se três simulações. A primeira busca demonstrar a resposta do sistema para referências constantes por partes com diferentes amplitudes. Com a segunda pretende-se evidenciar a capacidade do sistema de retornar à origem zero após uma condição inicial não nula. Por fim, objetiva-se exibir a capacidade do veículo em seguir uma trajetória diversa. Em particular, gerou-se uma trajetória de referência do tipo helicoidal.

A primeira simulação é ilustrada nas Figuras 15 e 16. É importante ressaltar que, para essa simulação, a condição inicial é nula. Nos gráficos é possível evidenciar que, tanto o controlador de atitude, como o controlador de posição, são capazes de seguir as referências ao longo do tempo.

O movimento imposto corresponde a uma subida de até 15 m com movimentos associados ao longo dos eixos  $X^G$  e  $Y^G$ . Na Figura 16 é possível verificar os movimentos de atitude gerados pelo controlador de posição de modo a rastrear as referências.

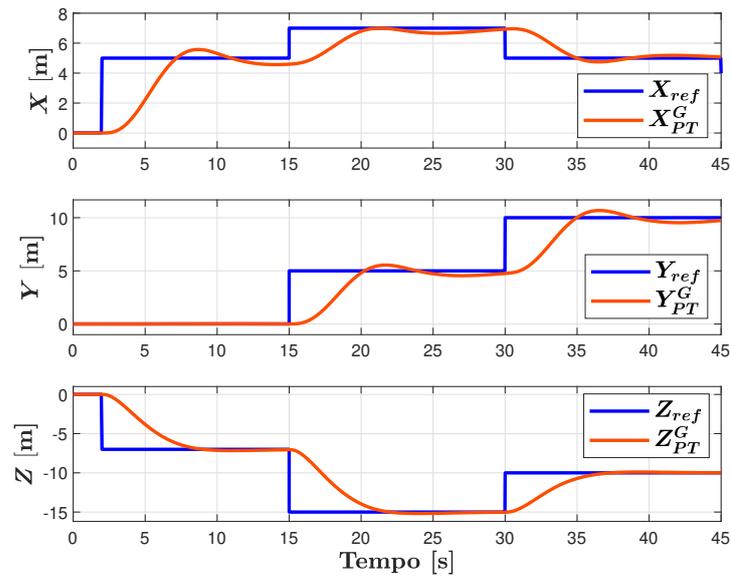


Figura 15 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para estado inicial nulo e referências constantes por partes. Evolução da posição do veículo em relação ao referencial  $G$ . Fonte: Autor.

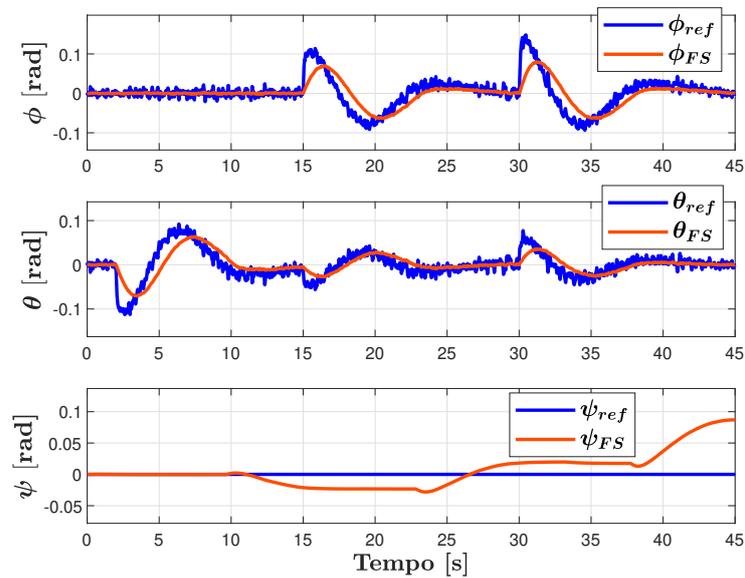


Figura 16 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para estado inicial nulo e referências constantes por partes. Evolução da atitude do veículo. Fonte: Autor.

Na Figura 16, pode-se verificar que o sistema de controle projetado não foi capaz de manter a guinada do veículo nula ao longo do movimento. Isso pode estar associado com o acoplamento entre os diferentes graus de liberdade e também às matrizes de ajuste adotadas. Além disso, o estado de guinada naturalmente apresenta uma resposta mais lenta, devido à necessidade de grandes esforços dos motores para momentos em torno desse grau de liberdade.

Apresenta-se também, nas Figuras 17 e 18, os sinais de controle como resposta dos controladores para as referências impostas.

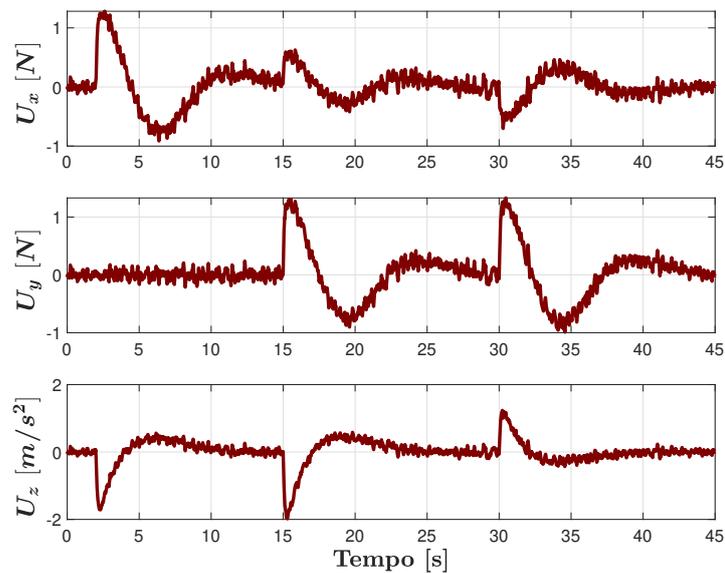


Figura 17 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para estado inicial nulo e referências constantes por partes. Evolução dos sinais de controle do CP. Fonte: Autor.

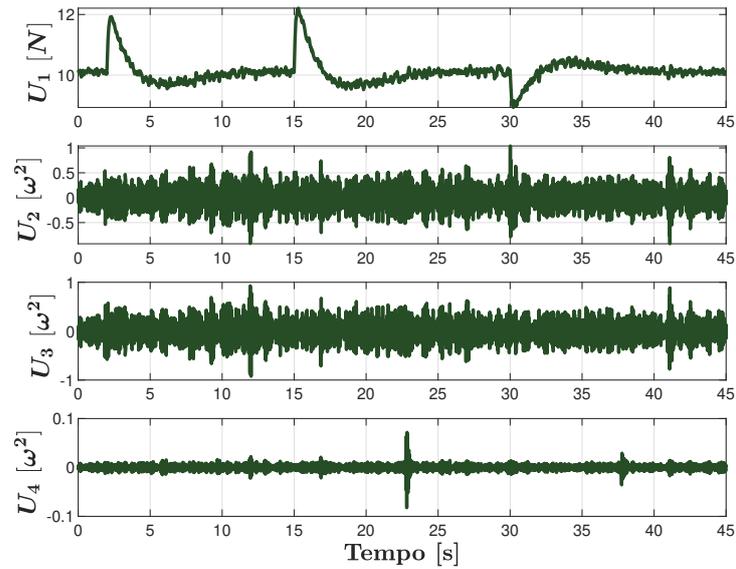


Figura 18 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para estado inicial nulo e referências constantes por partes. Evolução dos sinais de controle do CA. Fonte: Autor.

É importante destacar a eficácia da filtragem dos sinais. As Figuras 19 e 20 mostram a resposta dos sistemas sob as mesmas condições da simulação anterior, porém sem a aplicação dos filtros passa-baixas nos subsistemas de estimativa de estados e nos sinais de controle. Fica claro que os estados de posição divergem da referência demandada. Além disso, os sinais de referência de atitude chegam a ser desfigurados pelo ruído.

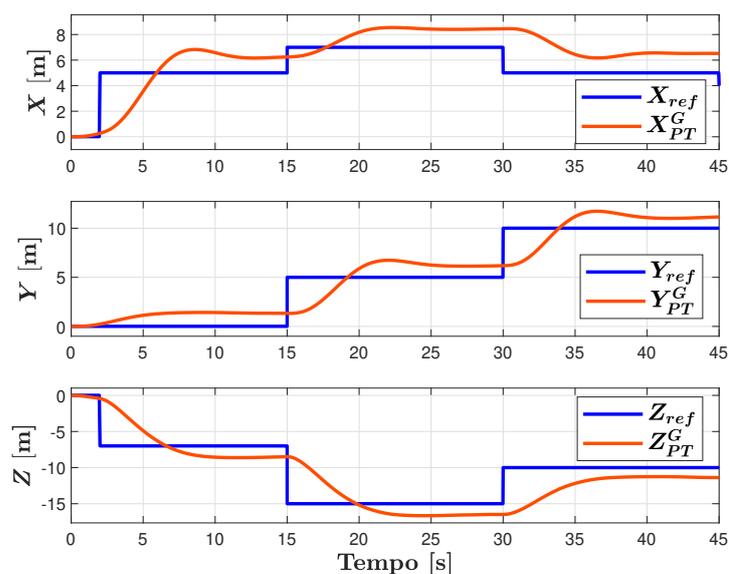


Figura 19 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para estado inicial nulo e referências constantes por partes sem influência de filtragem dos sinais. Evolução da posição do veículo em relação ao referencial  $G$ . Fonte: Autor.

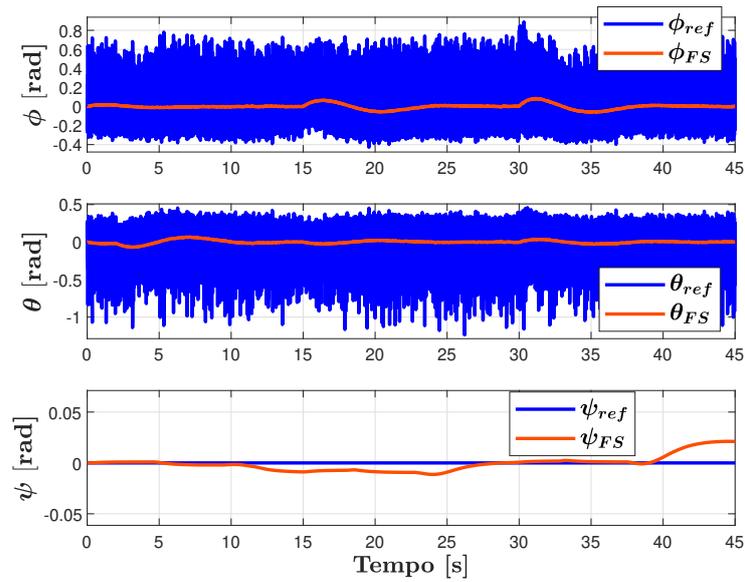


Figura 20 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para estado inicial nulo e referências constantes por partes sem influência de filtragem dos sinais. Evolução da atitude do veículo. Fonte: Autor.

Para a segunda simulação adotou-se  $X^G(0) = Y^G(0) = Z^G(0) = 5 \text{ m}$ . No geral, o controlador é capaz de estabilizar todos os estados, levando-os para a condição nula. Especialmente, percebe-se na Figura 22 a estabilização do estado  $\psi_{FS}$  com uma certa lentidão, assim como comentado anteriormente. Nas Figuras 23 e 24 são apresentados os sinais de controle.

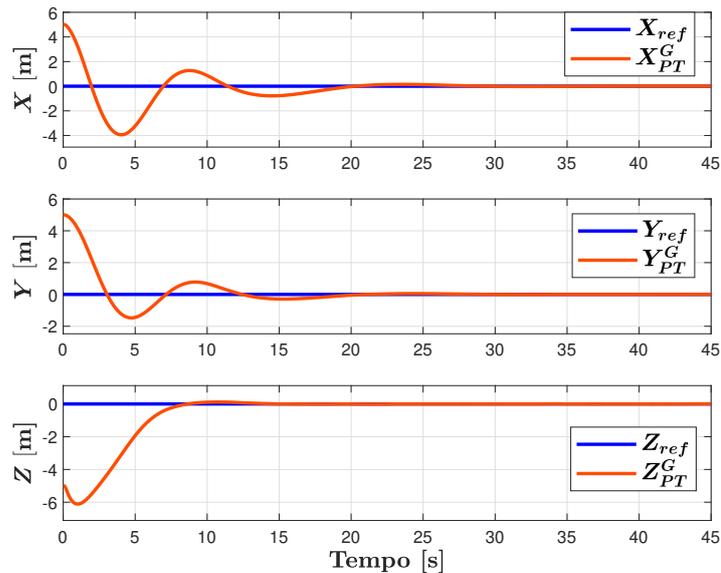


Figura 21 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para uma condição inicial não nula e referências nulas. Evolução da posição do veículo em relação ao referencial  $G$ . Fonte: Autor.

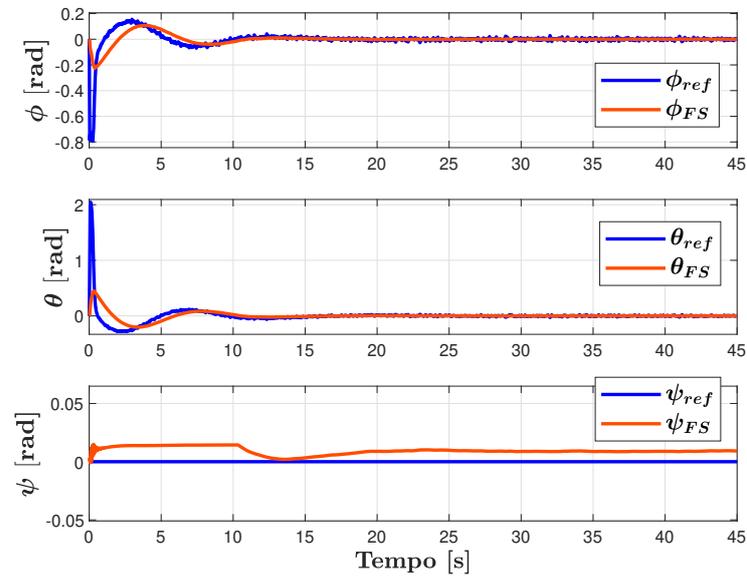


Figura 22 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para uma condição inicial não nula e referências nulas. Evolução da atitude do veículo. Fonte: Autor.

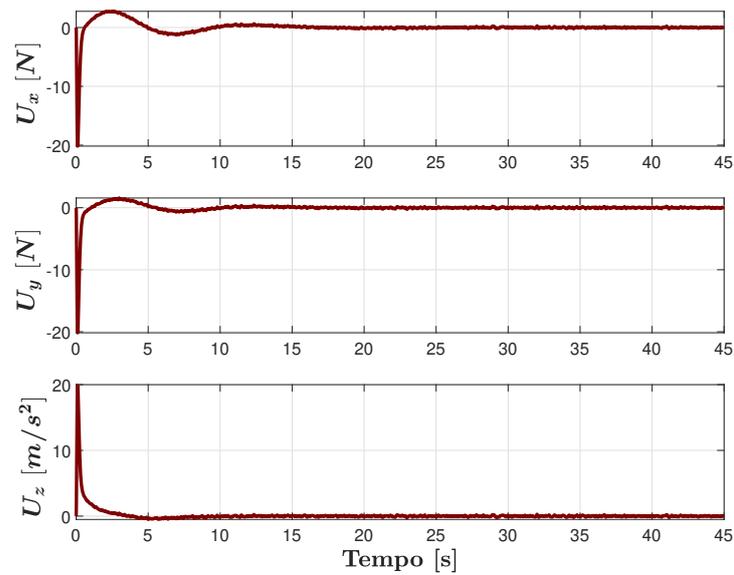


Figura 23 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para uma condição inicial não nula e referências nulas. Evolução dos sinais de controle do CP. Fonte: Autor.

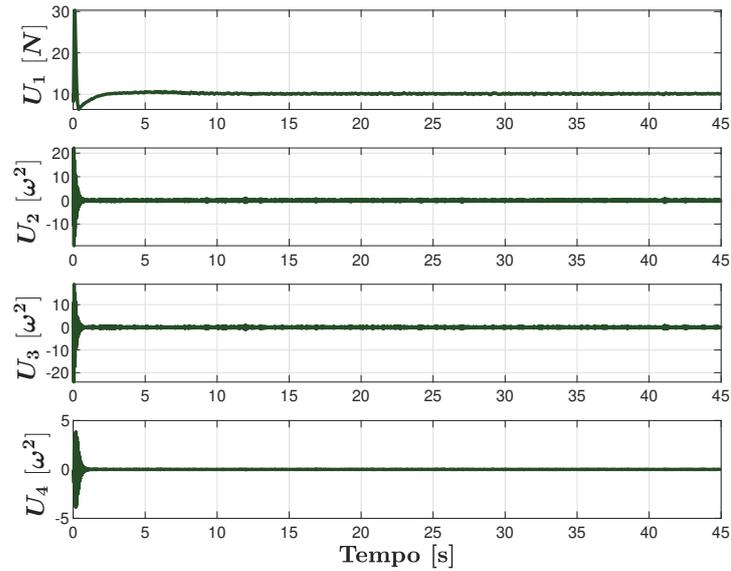


Figura 24 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para uma condição inicial não nula e referências nulas. Evolução dos sinais de controle do CA. Fonte: Autor.

Por fim, na terceira simulação, verifica-se a capacidade de seguir trajetórias variadas. Nesse caso, foi adotada uma trajetória helicoidal com raio de 5 m. Matematicamente (STEWART, 2013),

$$\begin{bmatrix} X_{ref}(t) \\ Y_{ref}(t) \\ Z_{ref}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 C(0,2793t) \\ 5 S(0,2793t) \\ -0,1t \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Perceba, na Figura 25 que o veículo inicia sua trajetória no ponto 0, 0 e 0 para  $X_{PT}^G$ ,  $Y_{PT}^G$  e  $Z_{PT}^G$ , respectivamente. Simultaneamente, a referência começa em um raio de 5 metros, solicitando uma mudança de coordenada que dá início à rota helicoidal. Dessa forma, o veículo deixa seu ponto inicial e começa a ganhar altitude em direção à referência negativa de  $Z$ . A Figura 26 mostra os comandos de ângulo realizados pelo quadricóptero nessa simulação. Adicionalmente, as Figuras 27 e 28 ilustram os sinais de controle para essa simulação.

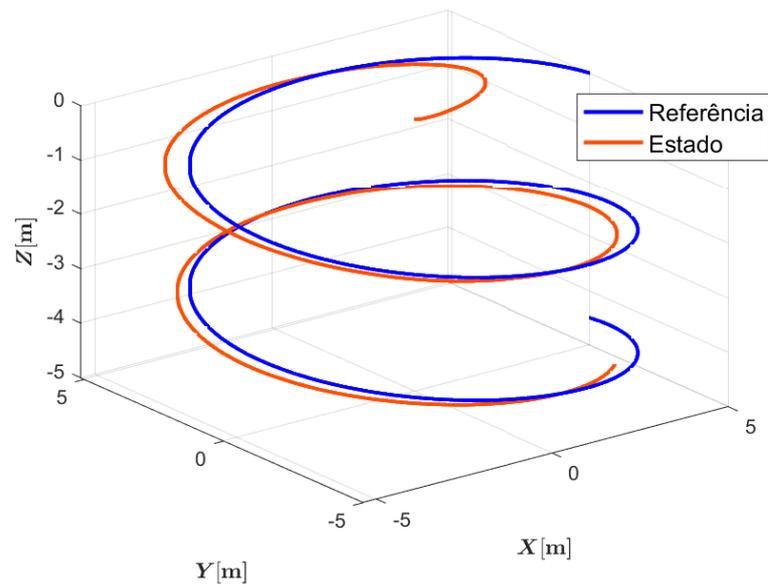


Figura 25 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para uma condição inicial nula e referências a partir de uma trajetória helicoidal. Evolução da posição do veículo em relação ao referencial  $G$ . Fonte: Autor.

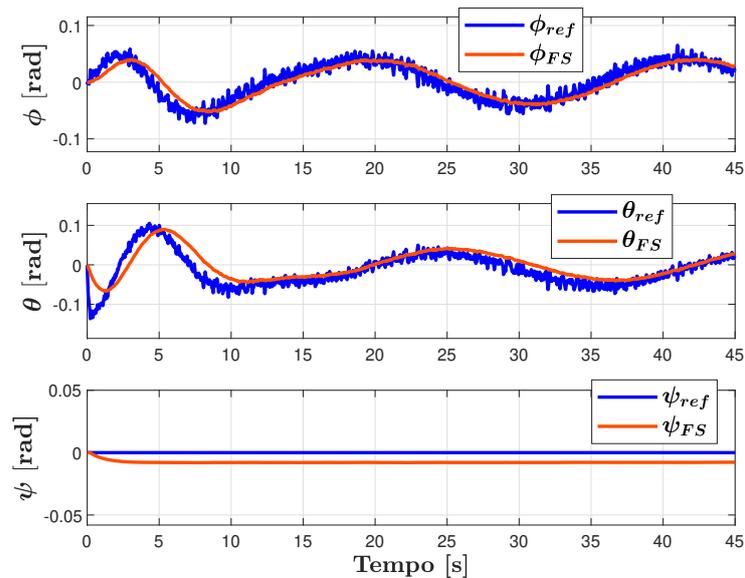


Figura 26 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para uma condição inicial nula e referências a partir de uma trajetória helicoidal. Evolução da atitude do veículo. Fonte: Autor.

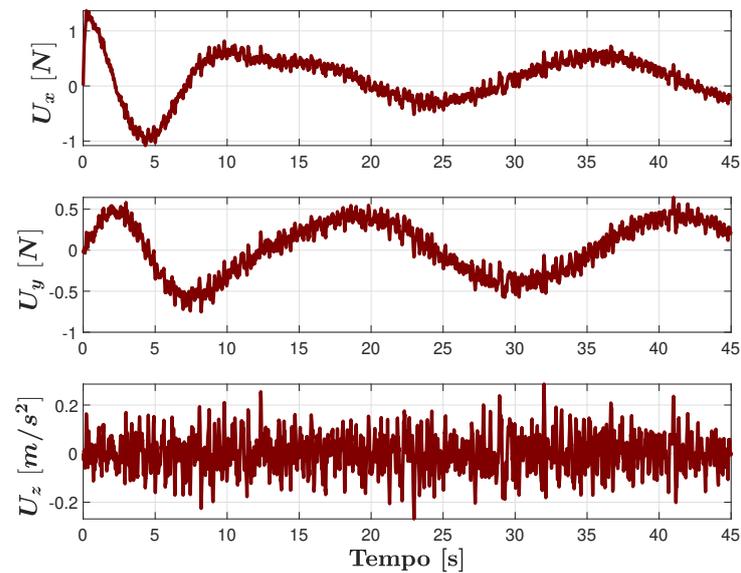


Figura 27 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para uma condição inicial nula e referências a partir de uma trajetória helicoidal. Evolução dos sinais de controle do CP. Fonte: Autor.

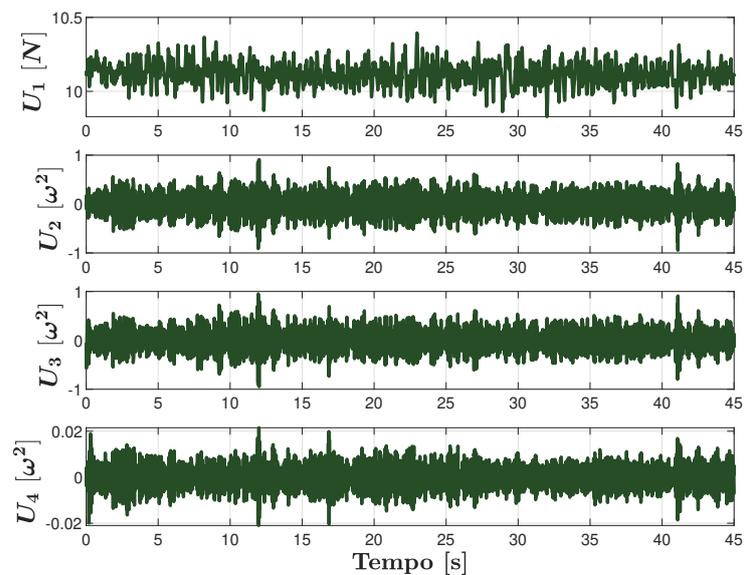


Figura 28 – Simulação de controle em malha fechada com LQR para uma condição inicial nula e referências a partir de uma trajetória helicoidal. Evolução dos sinais de controle do CA. Fonte: Autor.

## 5 Conclusões e sugestões de trabalhos futuros

Neste trabalho, foi estabelecido um sistema de controle para atitude e posição de um quadricóptero. Com esse propósito, primeiramente desenvolveu-se um modelo dinâmico para o veículo seguindo o formalismo de Newton-Euler. Então, para aumentar a representatividade da simulação, incluíram-se modelos para os sensores que tipicamente são instalados no veículo: Acelerômetro, giroscópio, magnetômetro e GPS. As estimativas dos estados de atitude foram obtidas pela fusão dos dados desses sensores, exceto o GPS, que foi especificamente utilizado para estimar os estados de posição, após a aplicação de uma filtragem. Para projetar o sistema de controle, o modelo de atitude foi linearizado e o de posição passou por simplificações. Ambos modelos resultantes foram discretizados e empregados no projeto. Em particular, os controladores foram baseados na realimentação de estados, sendo que as matrizes de ganhos foram ajustadas utilizando o Regulador Linear Quadrático.

Resultados de simulação mostraram que o sistema de controle proposto foi capaz de levar o veículo às posições desejadas, bem como em seguir trajetórias variadas. Entretanto, os resultados mostraram um certo atraso em seguir as referências, especialmente na estabilização do estado de arfagem  $\psi$ . Acredita-se que esse problema poderia ser resolvido modificando-se as matrizes de peso adotadas.

Para trabalhos futuros, sugere-se a implementação de outras metodologias de fusão de dados dos sensores. Por exemplo, a utilização do filtro de Kalman estendido pode trazer vantagens em termos de qualidade de estimativa. Ademais, sugere-se investigar outras metodologias para projetar os controladores. Especificamente, comparações com técnicas de controle robusto seriam interessantes.

# Referências

ALEX, J.; RIEGER, L.; COROMINAS, L.; WINKLER, S. *Models of Sensors and Actuators*. [S.l.], 2009.

AZZAM, A.; WANG., X. Quad rotor arial robot dynamic modeling and configuration stabilization. In: *2010 2nd International Asia Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (CAR 2010)*. Wuhan: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2010. p. 439–440.

BOUABDALLAH, S. *Design and control of quadrotors with application to autonomous flying*. Tese (Doutorado) — École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, Suíça, 2007.

CENTER, S. S. *Reference coordinate frames*. 2023. Disponível em: <<https://support.sbg-systems.com/sc/kb/latest/underlying-maths-conventions/reference-coordinate-frames>>.

CHOI, H. W.; KIM, H. J.; KIM, S. K.; NA, W. S. An overview of drone applications in the construction industry. *Drones*, v. 7, n. 8, 2023.

EMIMI, M.; KHALEEL, M.; ALKRASH, A. The current opportunities and challenges in drone technology. *International Journal of Electrical Engineering and Sustainability (IJEES)*, v. 1, n. 3, p. 74–79, 2023.

FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; WORKMAN, M. *Digital Control of Dynamic Systems*. 3. ed. Menlo Park, Califórnia: Addison-Wesley, 1998.

GUI, P.; TANG, L.; MUKHOPADHYAY, S. MEMS based IMU for tilting measurement: Comparison of complementary and Kalman filter based data fusion. In: *2015 IEEE 10th Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA)*. Auckland, Nova Zelândia: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2015. p. 2005.

HOFFMANM, F.; GODDEMEIER, N.; BERTRAM, T. Attitude estimation and control of a quadcopter. In: *2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Taipei, Taiwan: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2010. p. 1072–1077.

INFORMATION, N. C. for E. *World Magnetic Model (WMM)*. 2023. Disponível em: <<https://www.ncei.noaa.gov/products/world-magnetic-model>>.

KOKSAL, N.; JALALMAAB, M.; FIDAN, B. Adaptive linear quadratic attitude tracking control of a quadrotor UAV based on IMU sensor data fusion. *Sensors*, v. 19, n. 1, p. 6, 2019.

LEVEQUE, R. J. *Finite Difference Methods for Differential Equations*. Seattle, Washington: University of Washington, 2005.

LUUKKONEN, T. Modelling and control of quadcopter. *Independent research project in applied mathematics, Espoo*, v. 22, n. 22, p. 3, 2011.

- MARTON, A. S.; AZINHEIRA, J. R.; FIORAVANTI, A. R.; PAIVA, E. C. D.; CARVALHO, J. R. H.; COSTA, R. R. Filtering and estimation of state and wind disturbances aiming airship control and guidance. *Aerospace*, v. 9, n. 9, p. 3–5, 2022.
- OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. 5. ed. São Paulo, São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.
- OLIVEIRA, L. T.; COSTA, K. S. V.; PORTELLA, K. M.; BELINASSO, L. V.; CARNIELUTTI, F. M.; MORAES, D. D. Quadcopter modeling and control using controller hardware-in-the-loop. In: *Proceedings of the 13th Seminar on Power Electronics and Control (SEPOC 2021)*. Online: Universidade Federal de Santa Maria, 2021.
- PEREIRA, M. A.; HAUENSTEIN, N. E.; FRIEDRICH, A. Um relato sobre a evolução histórica da aviação. In: *XXIII Seminário Interinstitucional de Ensino, Pesquisa e Extensão*. Cruz Alta, Rio Grande do Sul: Universidade de Cruz Alta, 2018.
- PFEIFER, E. *Projeto e controle de um UAV Quadrirotor*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, São Paulo, 2013.
- REJEB, A.; ABDOLLAHI, A.; REJEB, K.; TREIBLMAIER, H. Drones in agriculture: A review and bibliometric analysis. *Computers and Electronics in Agriculture*, v. 198, p. 1–2, 2022.
- ROSKAM, J. *Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls: Part 1*. Lawrence, Kansas: Design, Analysis and Research Corporation (DARcorporation), 2001.
- SHIRSAT, A. R. *Modeling And Control of a Quadrotor Aircraft UAV*. Dissertação (Mestrado) — Arizona State University, Tempe, Arizona, 2015.
- SRIRAM, T. J.; REDDY, P. J.; RAJU, P. G.; KANAKARAJU, R. A study on helicopter mechanism. *International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)*, v. 9, n. 4, 2022.
- STEWART, J. *Cálculo: Volume 2*. 7. ed. São Paulo, São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- VIEIRA, I. S. *Modelagem Dinâmica e Controle de Atitude de um Quadricóptero*. Araxá, Minas Gerais: [s.n.], 2017. Trabalho de Conclusão de Curso, Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.
- WU, X.; SARDAHI, Y. Many-objective optimal control for quadcopters. In: IEEE. *2023 American Control Conference (ACC)*. San Diego, Califórnia, 2023. p. 2105–2110.
- ZHE, Z.; JIAN-BIN, W.; BO, S.; GUO-FENG, T. Adaptive complementary filtering algorithm for IMU based on MEMS. In: *2020 Chinese Control And Decision Conference (CCDC)*. Hefei, China: [s.n.], 2020. p. 5409–5416.