Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

SISTEMAS LINEARES: ABORDAGEM POR SITUAÇÕES PROBLEMA

Adilson Reis Ferreira Júnior

Uberlândia-MG
2024

Adilson Reis Ferreira Júnior

SISTEMAS LINEARES: ABORDAGEM POR SITUAÇÕES PROBLEMA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção de título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de concentração: Matemática
Linha de pesquisa: Álgebra Linear

Orientador(a): Wallisom da Silva Rosa

Uberlândia-MG
2024

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

F383
2024

Ferreira Júnior, Adilson Reis, 1981-
Sistemas Lineares Abordagem por Situações Problema [recurso eletrônico] / Adilson Reis Ferreira Júnior. - 2024.

Orientador: Wallisom da Silva Rosa.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2024.569
Inclui bibliografia.

1. Matemática. I. Rosa, Wallisom da Silva,1979-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3230-9452 - www.famat.ufu.br - profmat@famat.ufu.br

ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PPGMPMAT UFU				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Profissional, 06, PPGMPMAT				
Data:	Vinte e três de agosto de dois mil e vinte e quatro	Hora de início:	16:00	Hora de encerramento:	18:00
Matrícula do Discente:	12212PFT001				
Nome do Discente:	Adilson Reis Ferreira Júnior				
Título do Trabalho:	Sistemas lineares: abordagem por situações-problema				
Área de concentração:	Ciências e Humanidades para a Educação Básica				
Linha de pesquisa:	Formação de Professores de Matemática da Educação Básica				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Não há				

Reuniu-se de forma presencial na sala: 1F119 do IME (UFU, bloco F – Campus Santa Mônica, piso térreo) a Banca Examinadora, aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PPGMPMAT), assim composta pelos professores doutores: Giovana Siracusa Gouveia - UFS; Fábio José Bertoloto - IME/UFU e Wallisom da Silva Rosa - ICENP/UFU, orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Prof. Dr. Wallisom da Silva Rosa, apresentou a Comissão Examinadora e juntamente com o candidato agradeceram a presença de todos. Posteriormente, o presidente concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

Dando continuidade, o senhor presidente concedeu a palavra para os examinadores que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final considerando o candidato:

Aprovado

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

Documento assinado eletronicamente por **Giovana Siracusa Gouveia**, **Usuário Externo**, em 23/08/2024, às 17:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Fabio José Bertoloto**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 23/08/2024, às 17:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Wallisom da Silva Rosa**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 23/08/2024, às 17:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5601405** e o código CRC **8C10CA84**.

Referência: Processo nº 23117.051637/2024-38 SEI nº 5601405

Dedico este trabalho a minha família, em especial a minha esposa e filhas que sempre me apoiaram e me incentivaram nos momentos nos quais pensei que não teria como continuar.

Agradecimentos

Agradeço a Deus em primeiro lugar, pois sem Ele nada seria possível. Agradeço ainda a Deus que me permitiu inspiração e tempo para me dedicar a esta pesquisa e por me orientar e me motivar a todo instante.

A minha esposa Josilene e minhas filhas Letícia e Mariana que foram sempre fontes de inspiração e motivação. O fato de estarem ao meu lado me apoiando sempre foi determinante para que eu pudesse chegar até aqui.

Aos meus pais, Adilson e Jesuina que me deram a motivação inicial ainda na infância de estudar para ter um futuro melhor. Ensinamento este que aprendi, ensino para minhas filhas e compartilho com amigos e alunos.

A minha sogra Maria que em todos os momentos esteve presente nos confortando sempre com uma palavra acertada de motivação e fé.

Aos amigos(irmãos) que conheci na caminhada do Profmat, pessoas extraordinárias que tive o privilégio de conviver por algum tempo. Essas pessoas têm um capítulo especial na minha história, sempre dispostas a ajudar o próximo e o mais importante, sem esperar nada em troca.

Aos meus amigos de trabalho que foram fundamentais nesse período, pois estavam sempre dispostos a me ajudar, cada um da sua forma, mas todos contribuíram imensamente que eu pudesse concluir este trabalho.

Não poderia deixar de citar um amigo que muito me ajudou nessa etapa final de trabalho: Pedro, fico muito agradecido pelo tempo que você dedicou a me ajudar a fechar esse trabalho.

Ao meu orientador, Wallisom, pela paciência, orientação precisa e pela confiança depositada em mim ao longo deste processo. Seus conselhos e direcionamentos foram cruciais para o desenvolvimento desta pesquisa.

Enfim, agradeço a todos os envolvidos que contribuíram de alguma forma direta ou indireta-

mente para que esse sonho pudesse vir a se tornar realidade.

JÚNIOR, A. R. F. .***Sistemas Lineares: Abordagem por Situações Problema***. **2024**. **49p**. **Dissertação de Mestrado , Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.**

Resumo

Este trabalho versa Sistemas lineares: Resolução e aplicações no Ensino Médio. Num primeiro momento, dedicamos nossa atenção à teoria de sistemas lineares e sua resolução. Focamos em um método específico de resolução: O Escalonamento. Num segundo momento do trabalho, apresentamos uma interpretação geométrica para sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas com o auxílio do software GeoGebra. Por fim, a parte mais importante deste trabalho, que é a apresentação dos sistemas lineares através de problemas. Utilizei algumas situações problema para serem interpretados e modelados utilizando sistemas lineares, problemas estes que variavam do básico ao avançado em relação a dificuldade de modelagem e resolução. Assim fecho meu trabalho tendo apresentado os conceitos chaves a respeito da modelagem, resolução e discussão de um sistema linear.

Palavras-chave: Sistema Linear; Método de Escalonamento; GeoGebra.

JÚNIOR, A. R. F. .***Linear Systems: Problem-Solving Approach***. **2024**. **49p**. **M. Sc. Dissertation**, **Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.**

Abstract

This work deals with Linear systems: Resolution and applications in high school. Initially, we dedicate our attention to the theory of linear systems and their resolution. We focus on a specific resolution method: Row reduction. In a second part of the work, we present a geometric interpretation for linear systems of two equations and two unknowns with the help of the GeoGebra software. Finally, the most important part of this work, which is the presentation of linear systems through problems. I used some problem situations to be interpreted and modeled using linear systems, problems that ranged from basic to advanced in terms of modeling and resolution difficulty. This concludes my work having presented the key concepts regarding the modeling, resolution and discussion of a linear system.

Keywords: Linear System; Row Reduction; GeoGebra.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

Neste trabalho temos como objetivo apresentar o conteúdo de sistemas lineares de uma forma diferente, com menos teoria que o convencional abordados nos livros de Ensino Médio. Focaremos apenas em um método de resolução, que é do Método de Escalonamento para a sua resolução. Outros métodos são importantes, mas o Método de Escalonamento é a principal ferramenta e pode ser utilizada para a resolução ou discussão de qualquer tipo de problema associado a Sistemas lineares.

No primeiro capítulo trataremos de um estudo teórico sobre Sistemas Lineares. Seguindo [1] e [2], introduziremos a temática de sistemas lineares, definindo o que são sistemas lineares e sistemas lineares equivalentes, seguindo com uma discussão sobre a classificação dos sistemas lineares de acordo com o número de soluções que o sistema apresenta: compatível determinado (uma solução), compatível e indeterminado (infinitas soluções) e incompatível (nenhuma solução). E por fim, apresentaremos o método de resolução de sistemas que é o assunto principal deste trabalho que é o Método de Escalonamento apresentando vários exemplos que nos auxiliaram em todo este primeiro capítulo. Para cada item da teoria que iremos desenvolver, concederemos exemplos que podem ser simples, mas de grande significância para a assimilação por parte dos alunos de Ensino Médio, que é o foco principal. Neste capítulo ainda iremos apresentar alguns exemplos na forma de problemas para que se tenha a oportunidade de se entender Sistemas Lineares através de problemas, que é uma importante estratégia de ensino: a problematização.

Seguindo essa ideia de ensinar Sistemas Lineares através de problemas, no capítulo dois traremos algumas propostas de problemas para se trabalhar em sala de aula sobre sistemas lineares. As Propostas 1 e 2, foram feitas em sala de aula e discorreremos sobre eles apresentando observações feitas pelo professor em sala. Essas duas propostas são totalmente plausíveis para o entendimento, construção de raciocínio e a resolução do problema. Já as Propostas 3 e 4 foram trazidas como sugestões que podem ser feitas em outro momento mais oportuno, sendo que na proposta 3 foi necessário utilizar uma ferramenta tecnológica digital, dado o tamanho do sistema linear obtido e seus coeficientes, pois trata-se de um problema real e com dados reais. Esse problema poderia ser aplicado em sala de aula em duas situações: Apenas para ilustração mostrando que existe uma aplicação real e verdadeira para o assunto, demonstrando o uso da tecnologia em sala de aula ou ainda como um trabalho de Extensão buscando encontrar aquele aluno com maior aptidão em Exatas. Prefiro eu a primeira opção. Já a proposta 4, foi retirada de uma prova da OBMEP: Olimpíada Brasileira de Matemática da Escolas Públicas. Como sempre essa prova traz questões bem elaboradas e com um forte apelo gráfico, questões bonitas. Esse problema muito interessante, muitos de nós até poderiam tentar resolver mentalmente a questão, mas é um excelente problema que pode ser modelado e resolvido utilizando sistemas lineares.

Finalizo meu trabalho pensando que o Método de Escalonamento é um método completo e sem tirar a importância de outros métodos de resolução de sistemas, o escalonamento é o mais importante e eficaz quando queremos resolver, classificar ou discutir um sistema linear.

CAPÍTULO 1

Sistemas de Equações Lineares

Neste capítulo, iremos conceituar e dar exemplos dos sistemas lineares de m equações e n incógnitas. Mas antes, vamos fazer um breve estudo sobre as equações lineares.

1.1 Equações lineares

Definição 1.1

Equações lineares são expressões matemáticas de primeiro grau, caracterizadas pela presença de variáveis elevadas à potência 1. Em sua forma padrão, uma equação linear é escrita como:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

onde:

- a_i representa o coeficiente associado à variável x_i;
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as variáveis (ou incógnitas) da equação linear;
- b é o termo independente da equação.

A solução de uma equação linear é uma n-upla de números reais da forma $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$. Estes valores, quando substituídos na equação linear, a transformam numa identidade verdadeira.

Exemplo 1.1

Em um hotel, há dois tipos de quartos disponíveis. Alguns cujo valor da tarifa é $R\$150,00$ cada um e outros quartos em que a tarifa custa $R\$180,00$ cada um. Em um determinado dia todos os quartos do hotel estavam ocupados e apurou-se um faturamento de $R\$19.500,00$. Escreva uma equação linear que represente o faturamento do hotel nesse dia, sabendo que todos os quartos estavam ocupados.

Solução: Este é um exemplo clássico utilizado no Ensino Médio que pode ser modelado com uma equação linear com duas incógnitas. Vejamos a seguir um modelo matemático que pode representar o problema apresentado:

Considere que x seja a quantidade de quartos que custam $R\$150,00$ e y seja a quantidade de quartos que custam $R\$180,00$.

Daí, temos a equação linear:

$$150x + 180y = 19500.$$

1.2 Sistemas de Equações Lineares

Agora vamos falar sobre um sistema linear:

Definição 1.2

Um sistema linear é um conjunto de equações lineares que envolvem um conjunto comum de variáveis. Cada equação do sistema é uma expressão linear dessas variáveis, onde os coeficientes das variáveis e os termos constantes são números reais. Em sua forma geral, um sistema linear pode ser representado como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

onde

- $x_1, x_2, \dots, x_n$ são as variáveis do sistema;
- a_{ij} representa o coeficiente associado à variável x_i $(i = 1, ..., n)$;

- b_j é o termo independente da equação j ($j = 1, ..., m$).
- Essa definição exibe um sistema linear em sua forma geral.

Cada equação representa uma restrição ou condição e a solução do sistema é um conjunto de valores para as variáveis que satisfaz todas as equações simultaneamente. Um sistema será classificado de acordo com o número de soluções que ele admitir. Daremos mais detalhes sobre essa classificação de um sistema linear num momento mais oportuno. Para ilustrar abaixo exibiremos sistemas lineares, que também em um momento mais oportuno faremos a sua resolução.

Exemplo 1.2: Exemplo de sistema linear 2x2

Considere o seguinte sistema de duas equações e duas incógnitas:

$$\begin{cases} 2x + 3y &= 8 \\ -4x + 6y &= 10 \end{cases}$$

Neste exemplo, temos um sistema linear com duas equações e duas variáveis x e y. As variáveis são multiplicadas por coeficientes e somadas para igualar os termos constantes. Este sistema pode ser representado na forma geral mencionada acima.

Exemplo 1.3: Exemplo de Sistema Linear 3×3

Considere o seguinte sistema com 3 equações e 3 incógnitas:

$$\begin{cases} x & + & 5y & - & 3z & = & 12 \\ -3x & - & 2y & + & 4z & = & -5 \\ 2x & + & y & - & z & = & 7 \end{cases}$$

A seguir vamos analisar um problema abordado no Ensino Médio:

Exemplo 1.4

Em uma papelaria, dois lápis e três canetas custam juntos $R\$29,00$, três lápis e uma caneta custam juntos $R\$19,00$ e um lápis e duas canetas juntas custasm $R\$18,00$. Elaborar um modelo matemático que possa representar a situção descrita.

O modelo matemático mais adequado que representa o problema é um sistema linear de três equações e duas incógnitas.

Considere que x seja a quantidade de lápis e y é a quantidade de canetas. Assim, podemos representar o sistema linear:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 29 \\ 3x + y = 19 \\ x + 2y = 18 \end{cases}$$

1.3 Sistemas Lineares Equivalentes

Sistemas lineares equivalentes referem-se a sistemas de equações lineares que compartilham a mesma solução. Dois sistemas lineares são considerados equivalentes se um pode ser obtido do outro através de operações elementares de linha. As operações elementares de linha incluem:

I. Permurtar duas das equações de S. É evidente que se S_1 indicar o sistema obtido, então toda solução de S_1 é solução de S e vice-versa.

II. Multiplicar uma das equações de S por um número real K, sendo $k \neq 0$. Indicando por S_1 o sistema assim obtido é possível mostrar que toda solução de S_1 é solução de S e vice-versa.

III. Somar a uma das equações do sistema uma outra equação desse sistema multiplicada por um número real.

Essas operações preservam a solução do sistema, o que significa que se você resolver um sistema linear e obtiver um conjunto de soluções, essas soluções também serão soluções para qualquer sistema linear equivalente.

A grande vantagem é ter a possibilidade de se resolver um sistema mais simples para se obter as soluçoes de um sistema mais elaborado.

Exemplo 1.5

Considere os sistemas lineares

$$(I)\begin{cases} x - y + z = -2 \\ x - 2y - 2z = -1 \\ 2x + y + 3z = 1 \end{cases} \quad e \quad (II)\begin{cases} x - y + z = -2 \\ y + 3z = -1 \\ -8z = 8 \end{cases}$$

O sistema (II) foi obtido através de um número finito operações entre as equações do sistema

(I), gerando sistemas equivalentes, o qual resultou no sistema (II). Dessa forma, os sistemas (I) e (II) são equivalentes. Observaremos futuramente que o sistema (II) está escrito num formato que facilita sua resolução e por consequência obtendo a resolução do sistema (I).

1.4 Discussão e Resolução de um Sistema Linear

1.4.1 Discussão de um Sistema Linear

Seguindo [2] faremos a discussão de um sistema linear. Para isso a seguinte definição se faz importante.

Definição 1.3: (Classificação de um sistema linear)

Dizemos que um sistema linear S é incompatível se S não admite nenhuma solução. Um sistema linear que admite uma única solução é chamado compatível determinado. Se um sistema linear S admitir mais do que uma solução então ele recebe o nome de compatível indeterminado.

Esse processo envolve identificar o número de equações e incógnitas no sistema, aplicar técnicas algébricas para simplificar as equações e, por fim, determinar as condições para a existência e unicidade da solução.
A discussão de um sistema linear geralmente envolve os seguintes passos:

1. Verifique o número de equações e incógnitas no sistema.
2. Aplicar operações entre as equações para simplificar o sistema, como a eliminação de várias incognitas e possivelmente equações.
3. Determinar se o sistema é compatível (possui solução) ou incompatível (não possui solução).
4. Se o sistema for compatível, verifique se possui uma única solução ou infinitas soluções.

Note que tão importante quanto a classificação de um sistema linear são os métodos de resolução de um sistema linear. Neste trabalho daremos ênfase a um método de resolução em específico: o método de escalomento. Este método foi escolhido pela sua capacidade de extrair informações do sistema linear mesmo que o processo de resolução não seja finalizado. Tal método encontra certa resistência por parte dos alunos de Ensino Médio por acharem, num primeiro momento, complexo e trabalhoso, mas acabam compreendendo que este método é um muito útil para se resolver, classificar ou discutir um sistema linear.

1.4.2 Resolução de um Sistema Linear via Método de Escalonamento

Mas, afinal, o que é fazer um escalonamento?

A resposta a essa pergunta consiste em fazer operações elementares entre as equações de um sistema linear, obtendo sistemas lineares equivalentes ao original com o objetivo de se obter um sistema no formato de uma "escada", um sistema mais simples e fácil de se obter solução. Como são equivalentes (pois foram utilizadas operações elementares entre as equações), pode-se obter a solução facilmente.

Definição 1.4

De acordo com [2] um sistema linear escalonado é aquele que apresenta as seguintes características:

- As incógnitas das equações estão na mesma ordem;
- O primeiro coeficiente diferente de zero de uma equação está à esquerda do primeiro coeficiente diferente de zero da linha seguinte;
- Uma linha com todos os coeficientes nulos deve estar abaixo de todas as outras.

Vamos mostrar um exemplo de Sistema Linear não escalonado e outro Sistema Linear escalonado para que possamos visualizar a diferença entre um Sistema Linear escalonado e outro não escalonado.

O exemplo a seguir mostra um sistema linear que não está escalonado:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+y-z=1 \\ 3x-y+2z=7 \end{cases}$$

Agora vamos ver um exemplo de um sistema linear escalonado:

$$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ \qquad y+z=3 \\ \qquad\quad z=2 \end{cases}$$

Note que o sistema linear escalonado tem um formato de uma "escada"e desta forma fica fácil de calcular o valor das incógnitas, bastando substituir a incógnita calculada na equação linear anterior.

Proposição 1.1

Todo sistema linear S é equivalente a um sistema escalonado.

Neste trabalho não vamos demonstrar essa proposição, porém a demostração encontra-se em [2] na página 7.

A discussão de sistemas lineares é uma parte fundamental da Álgebra Linear e tem diversas aplicações em áreas como Engenharias, Física, Economia e Ciência da Computação.

Voltaremos aos Exemplos 1.2, 1.3 e 1.4 e os resolveremos abaixo.

Resolução do Exemplo 1.2

$$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ -4x+6y=10 \quad (L2+2L1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y=8 \\ 12y=26 \Rightarrow y=\dfrac{13}{6} \end{cases}$$

Voltando na primeira equação temos $x=\dfrac{3}{4}$.

Resolução do Exemplo 1.3

$$\begin{cases} x+5y-3z=12 \\ -3x-2y+4z=-5 \quad (L2+3L1) \\ 2x+y-z=7 \quad (L3-2L1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+5y-3z=12 \\ 13y-5z=31 \\ -9y+5z=-17 \quad (L3+L2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+5y-3z=12 \\ 13y-5z=31 \\ 4y=14 \qquad \Rightarrow y=\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Fazendo as substituições obtemos $z=\dfrac{29}{10}$ e $x=\dfrac{-17}{10}$

Resolução do Exemplo 1.4

$$\begin{cases} 2x+3y=29 \\ 3x+y=19 \qquad (3L1-2L2) \\ x+2y=18 \qquad (L1-2L3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y=29 \\ 7y=49 \Rightarrow y=7 \\ -y=-7 \Rightarrow y=7 \end{cases}$$

Fazendo a substituição encontramos $x=4$.

Agora faremos mais alguns exemplos contextualizados de sistemas lineares e apresentaremos as suas resoluções via método de escalonamento.

Um problema muito comum apresentado a alunos de Ensino Médio é discutir um sistema em relação a um determinado parâmetro. Vamos ver, a seguir alguns exemplos:

Exemplo 1.6

Uma pessoa pretende viajar por uma companhia aérea que despacha gratuitamente uma mala com até 10 kg.

Em duas viagens que realizou, essa pessoa utilizou a mesma mala e conseguiu 10 kg com as seguintes combinações de itens:

Viagens	Camisetas	Calças	Sapatos
I	12	4	3
II	18	3	2

Para ter certeza de que sua bagagem terá massa de 10 kg, ela decide levar essa mala com duas calças, um sapato e o máximo de camisetas, admitindo que itens do mesmo tipo têm a mesma massa.

Qual a quantidade máxima de camisetas que essa pessoa poderá levar?

a) 22

b) 24

c) 26

d) 33

e) 39

Resolução:

Sendo x a massa de cada camiseta, y a massa de cada calça e z a massa de cada sapato, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 12x+4y+3z=10 \quad \text{(I)} \\ 18x+3y+2z=10 \quad \text{(II)} \\ kx+2y+z=10 \quad \text{(III)} \end{cases}$$

onde k é a quantidade máxima de camisetas que a pessoa poderá levar.

Do sistema, temos:

$\text{(II)}-\text{(I)}: 6x-y-z=0 \quad \text{(IV)}$

$\text{(II)}-\text{(III)}: (18-k)x+y+z=0 \quad \text{(V)}$

Somando (IV) e (V), temos:

$$(18-K+6)x=0.$$

Como $x \neq 0$, temos: $18-k+6=0 \Rightarrow k=24$.

Resposta: B.

Exemplo 1.7

Pedro precisa comprar x borrachas, y lápis e z canetas. Após fazer um levantamento em duas papelarias, Pedro descobriu que a papelaria A cobra R$ 23,00 pelo conjunto de borrachas, lápis e canetas, enquanto a papelaria B cobra R$ 25,00 pelo mesmo material. Em seu levantamento, Pedro descobriu que a papelaria A cobra R$ 1,00 pela borracha, R$ 2,00 pelo lápis e R$ 3,00 pela caneta e que a papelaria B cobra R$ 1,00 pela borracha, R$ 1,00 pelo lápis e R$ 4,00 pela caneta.

(a) Forneça o número de lápis e de borrachas que Pedro precisa comprar em função do número de canetas que ele pretende adquirir.

(b) Levando em conta que $x \geq 1$, $y \geq 1$ e $z \geq 1$, e que essas três variáveis são inteiras, determine todas as possíveis quantidades de lápis, borrachas e canetas que Pedro deseja comprar.

Solução:

(a) O problema pode ser equacionado pelo seguinte sistema, onde L_1 e L_2 são, respectivamente, as linhas referentes à primeira e segunda equação. Segue que:

$$\begin{cases} x+2y+3z=23 \\ x+y+4z=25 \end{cases} \overset{L_2-L_1}{\Rightarrow} \begin{cases} x+2y+3z=23 \\ -y+z=2 \end{cases}$$

Portanto, $y=z-2$ e, substituindo y na primeira equação, encontramos:

$$x=27-5z.$$

(b) Como $x \geq 1$, $y \geq 1$ e $z \geq 1$, temos as seguintes relações:

$$y=z-2 \quad \Rightarrow \quad z-2 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad z \geq 3,$$

por outro lado,

$$x=27-5z \quad \Rightarrow \quad 27-5z \geq 1 \quad \Rightarrow \quad z \leq 5.2,$$

portanto, $z \in \{3,4,5\}$. Assim, temos as possíveis soluções:

z	y	x
3	1	12
4	2	7
5	3	2

Definição 1.5: Sistema Linear Homogêneo

Um sistema linear é chamado de homogêneo se for da forma $A\mathbf{X}=0$, ou seja, se todos os termos independentes forem iguais a zero. De modo geral podemos escrever este sistema da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

No caso de um sistema linear homogêneo, a discussão é mais simplificada, pois todo sistema linear homogêneo apresenta pelo menos uma solução (a solução trivial, sendo a n-úpla $(0,0,\ldots,0)$). Assim, esse tipo de sistema será sempre Compatível, bastando assim apenas analisar via escalonamento, o comportamento do sistema, ou seja, se o sistema é Compatível e Determinado ou Compatível e Indeterminado.

Abaixo será feito um exemplo a respeito dessa discussão.

Exemplo 1.8

Discutir, em função de m, se o sistema linear homogêneo a seguir é compatível e determinado ou compatível e indeterminado.

$$\begin{cases} 3x+6y-z=0 \\ 9x+my-3z=0. \end{cases}$$

<u>Resolução</u>: Usaremos para discutir esse sistema o método do escalonamento:

$$\begin{cases} 3x+6y-z=0 \\ 9x+my-3z=0 \quad (L_2-3L_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+6y-z=0 \\ (m-18)y=0 \end{cases} \text{Sistema escalonado.}$$

Note que, que nesse caso o sistema será compatível e indeterminado para qualquer valor de m.

Veja que:

Para $m-18\neq 0 \Rightarrow m\neq 18$, teríamos então que $(m-18)y=0 \Rightarrow y=0$.

Substituindo na 1^a equação, temos:

$$3x+6y-z=0 \Rightarrow 3x-z=0 \Rightarrow z=3x \text{ para todo } x\in\mathbb{R}.$$

As soluções teriam o formato $(x,y,z)=(x,0,3x)$. Como $x\in\mathbb{R}$, então temos infinitas soluções, bastando atribuir valores a x. Por exemplo:

Para $x=0 \Rightarrow (0,0,0)$.

Para $x=1 \Rightarrow (1,0,3)$.

Para $x=2 \Rightarrow (2,0,6)$.

O conjunto solução será $S=\{(x,0,3x) \mid x\in\mathbb{R}\}$.

Por outro lado, caso $m=18$ o sistema será também compatível e indeterminado. Vamos substituir então $m = 18$ no sistema:

$$\begin{cases} 3x+6y-z=0 \\ 9x+18y-3z=0 \end{cases}.$$

Observe que a segunda equação é igual a três vezes a primeira equação, logo uma é múltipla da outra. Assim, este sistema aoresenta infinitas soluções também. Ao fazer o escalonamento, temos:

$$\begin{cases} 3x+6y-z=0 \\ 9x+18y-3z=0 \quad (L_2-3L_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+6y-z=0 \\ 0=0. \end{cases}$$

As soluções são do tipo $3x+6y-z=0 \Rightarrow z=3x+6y$ com $x, y \in \mathbb{R}$. Logo o conjunto solução seria $S = \{(x, y, 3x-6y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

Portanto, para qualquer valor de m, o sistema apresentado $\begin{cases} 3x+6y-z=0 \\ 9x+18y-3z=0 \end{cases}$ apresenta infinitas soluções, sendo classificado como compatível e indeterminado.

No ensino médio, comumente suprimimos a demonstração da proposição 1.10, mostramos com exemplos práticos a importância do escalonamento. Vamos, a seguir, mostrar alguns exemplos práticos.

Exemplo 1.9

Em uma floricultura, os poucos buquês de flores se diferenciam pelo tipo e pela quantidade de flores usadas em sua montagem. Quatro desses buquês estão representados na figura a seguir, sendo que três deles estão com os respectivos preços.

De acordo com a Figura 1.1, nessa floricultura, o buquê, sem preço indicado, custa:

a)R$ 15,30 b)R$ 16,20 c)R$14,80 d)R$17,00 e)R$15,50

Resolução: Sejam r o preço da flor rosa, a o preço da flor azul e V o preço da flor amarela e vermelha, todos em reais.

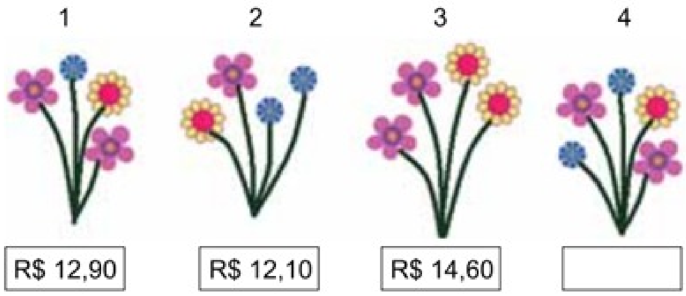

Figura 1.1: Etiquetas de preços de cada arranjo de buquê.

Fonte: https://www.curso-objetivo.br/vestibular/resolucao-comentada/unesp/2015_2/1fase/UNESP2015_2_1fase_prova.pdf

Do enunciado, temos o sistema:

$$S: \begin{cases} 2r + a + V = 12,90 \\ r + 2a + V = 12,10 \rightarrow (2L_2 - L_1) \\ 2r + 2V = 14,60 \rightarrow (L_3 - L_1) \end{cases}$$

Para se resolver, vamos utilizar o método escalonamento.

Vamos fazer algumas operações entre as equações.

Após realizar as operações indicadas, iremos obter um sistema S_1 equivalente ao sistema S:

$$S_1: \begin{cases} 2r + a + V = 12,90 \\ 3a + V = 11,30 \\ -a + V = 1,70 \rightarrow (3L_3 + L_2) \end{cases}$$

Note que S_1 ainda não é um sistema escalonado, apesar de ser mais simples que S

Vamos continuar as operações: $3L_3 + L_2$

Após realizar esta última operação, vamos obter o sistema S_2 equivalente a S:

$$S_2: \begin{cases} 2r + a + V = 12,90 \\ 3a + V = 11,30 \\ 4V = 16,40 \end{cases}$$

O sistema S_2 é um sistema escalonado. Neste caso, obtemos o valor de V (e em maioria dos casos uma das incógnitas é independente em relação as outras, e também percebemos uma relação de dependência das incógnitas a e r em V) e de forma simples podemos obter os valores de a e r. Isso nos mostra primeiramente que S é um sistema compatível. Agora veremos se S é compatível e determinado ou compatível e indeterminado.

Note que, $V = 4,10$ (valor obtido na 3ª equação).

Substituindo V na 2ª equação, obtemos a do sistema linear S_2:

$$3a + V = 11,30 \Rightarrow 3a + 4,10 = 11,30 \Rightarrow a = 2,40$$

Substituindo $a = 2,40$ e $V = 4,10$ na 1ª equação, obtemos r.

$$2r + a + V = 12,90 \Rightarrow 2r + 2,40 + 4,10 \Rightarrow 2r = 6,40 \Rightarrow r = 3,20.$$

Finalizamos a discussão sabendo que o sistema linear S é compatível e determinado.
Dessa forma podemos responder a pergunta: O valor do buquê 4 é

$$2r + 2a + V = 2.3,20 + 2.2,40 + 4,10 = 6,40 + 4,80 + 4,10 = 15,30$$

A resposta corresponde ao item A. Vamos ver alguns exemplos.

Exemplo 1.10

Considere sistema linear:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x - y = -1 \\ 2x + y = 2 \end{cases},$$

Este sistema é incompatível, compatível e determinado, compatível e indeterminado?

Resolução:Para resolver este sistema, basta somar membro a membro as linhas 2 e 3. Com isso obtemos:

$$(x - y) + (2x + y) = -1 + 2 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Substituindo em uma das equações (no caso a equação 3), temos:

$$2\frac{1}{3} + y = 2 \Rightarrow \frac{2}{3} + y = 2 \Rightarrow y = 2 - \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{3}.$$

Ao substituir $x = \frac{1}{3}$ e $y = \frac{4}{3}$ na primeira equação do sistema, obtemos uma igualdade verdadeira. Veja

$$2\frac{1}{3} + 4\frac{4}{3} = 6 \Rightarrow \frac{2}{3} + \frac{16}{3} = \frac{18}{3} = 6.$$

Portanto, $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ satisfaz as três equações e é a única solução do sistema. Por esse motivo, tal sistema é compatível e determinado.

Exemplo 1.11

Neste exemplo também iremos discutir sobre a existência ou não de soluções

$$s : \begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ x - y = -1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

Resolução: Vamos, inicialmente tentar resolver este sistema. Desta vez iremos utilizar o método de escalonamento:

$$s : \begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ x - y = -1 \\ 2x + y = 2 \ \ (L_3 - 2L_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ x - y = -1 \\ 3y = 4 \end{cases}.$$

Tomando $y = \frac{4}{3}$ e substituindo na equação 2, temos:

$$x - y = -1 \Rightarrow x - \frac{4}{3} = -1 \ \Rightarrow x = -1 + \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Note que o par ordenado $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ é solução da segunda e terceira equação, mas não é solução da primeira, pois

$$2\frac{1}{3} + 4\frac{4}{3} = 6 \Rightarrow \frac{2}{3} + \frac{16}{3} = \frac{18}{3} = 6 \neq 1.$$

Portanto, o sistema s não tem solução e pode ser classificado como sistema incompatível.

Exemplo 1.12

Vamos analisar o sistema linear a seguir:

$$h:\begin{cases} 2x+4y=1 \\ x+2y=\dfrac{1}{2} \\ -x-2y=2 \end{cases}$$

Resolução: Vamos novamente tentar resolver este sistema por escalonamento.

$$h:\begin{cases} 2x+4y=1 \\ x+2y=\dfrac{1}{2} \\ -x-2y=2 \ \ (L_3+L_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+4y=1 \\ x+2y=\dfrac{1}{2} \\ 0=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Note que há uma inconsistência, pois ao se realizar operações entre as linhas do sistema, o mesmo apresentou uma afirmação falsa pois $0 \neq \frac{5}{2}$.

Por outro lado, mesmo sem resolver o sistema h já era possível verificar que havia uma inconsistência, pois se:

$$x+2y=\frac{1}{2} \Rightarrow -x-2y=-\frac{1}{2} \text{ e no sistema } -x-2y=2.$$

Portanto o sistema linear h não apresenta solução, sendo classificado como um sistema incompatível.

Exemplo 1.13

Vamos analisar e classificar o sistema linar a seguir e o resolveremos por escalonamento.

$$l:\begin{cases} 2x-y+z=-2 \\ -3x+y+2z=1 \ \ L_2+L_1 \end{cases}$$

Resolução:

$$l:\begin{cases} 2x-y+z=-2 \\ -3x+y+2z=1 \ \ L_2+L_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y+z=-2 \\ -x+3z=-1 \end{cases}$$

Colocando as equações 1 e 2 em termos de z obtemos:

$$l : \begin{cases} x = 1 + 3z \\ y = 7z + 4 \end{cases} .$$

Note que as soluções (x, y, z) dependem de um valor z. Neste caso, as soluções são da forma $(x, y, z) = (1 + 3z, 7z + 4, z)$ em que $z \in \mathbb{R}$. A medida que atribuimos um valor a z, obtemos uma nova solução. E como z pode assumir infinitos valores em $\mathbb{R}$ temos infinitas soluções para o sistema l.

Portanto o sistema l é classificado como sistema compatível e indeterminado.

Observação 1.1

Os exemplos trabalhados acima mostram que sutis alterações nos coeficientes alteram a classificação de um sistema linear, mostrando que este estudo realmente se faz muito necessário.

Essa definição segue de [1] e veremos um exemplo de um sistema linear homogeneo e faremos uma discussão sobre a existência de soluções.

Exemplo 1.14

Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

onde x, y e z são número reais.

Resolução: Note que o 2^o membro de cada equação linear é igual a zero e portanto este sistema é homogêneo.

Apesar de ser um sistema de simples resolução, utilizaremos o escalonamento.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 0 \\ x + y + 2z = 0.(2l_2 - L1_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} .$$

Observe ainda que o sistema apresentado neste exemplo possui solução $(0, 0, 0)$. Na verdade, todo sistema linear homogêneo possui pelo menos (e visivelmente) a solução chamada de **solução**

trivial, a solução com o trio de números $S_1 = 0, 0, 0$. Veja que neste caso podemos ter soluções que depende do valores de x e z uma vez que $y = 0$. Logo a primeira equação do sistema escalonado nos fornece uma condição na qual encontramos as soluções do sistema:

$$2x + 3y + 4z = 0 \Rightarrow 2x + 4z = 0 \Rightarrow x = -2z.$$

Então o conjunto de todas as soluções é do tipo $S = \{(-2z, 0, z) \ : \ z \in \mathbb{R}\}$.

Observação 1.2

Todo sistema linear homogêneo admite a solução trivial. Nos restando discutir se o sistema linear homogêneo trabalhado em questão é compatível e determinado ou compatível e indeterminado.

1.5 Interpretação Gráfica

É possível interpretar geometricamente diversos conceitos estudados em Álgebra, em particular podemos fazer uma interpretação geométrica de um sistema linear. Este é um tema pouco abordado e trabalhado no Ensino Médio, apesar de que o tema sistema linear é sempre estudado por alunos de Ensino Médio. Dependendo se o sistema tem solução única é possível visualizar tal solução sem ao menos resolver o sistema algebricamente, ou se caso o sistema tenha múltiplas soluções também é possível visualizar estas soluções. Caso o sistema linear não tenha solução, a interpretação geométrica ajuda a compreender melhor o fato de não ter solução.

Note que uma equação linear do tipo ax+by=c, representa uma equação de reta e portanto pode ser representada geometricamente por uma reta. Como as funções Afim também são representadas geometricamente por uma reta, é possível fazer a conexão entre os dois assuntos e concluir que cada equação linear do tipo ax+by=c corresponde a uma reta no plano cartesiano.

Com ajuda de uma tecnologia de fácil acesso às escolas, é possível fazer essa interpretação geométrica com diversos softwares. Para este trabalho escolhemos utilizar um software de utilização gratuita e disponível na rede mundial de computadores: o GeoGebra. Este programa (ou aplicativo) pode ser utilizado gratuitamente de forma *online* ou baixar diretamente para os celulares dos alunos.

Ele permite dentre outras opções, plotar de forma bem simples a representação gráfica de uma ou mais equações lineares, ou seja, permite representar geometricamente um sistema de equações lineares.

Interpretação Geométrica de Sistemas Lineares 2×2

Vamos, a seguir fazer a interpretação gráfica de alguns sistemas lineares, inicialmente de duas equações e duas incógnitas:

- Sistema Compatível e determinado: Esse tipo de sistema linear apresenta uma única solução. Graficamente, cada equação representa uma reta para cada equação linear do sistema. Nesse caso temos duas retas concorrentes, e mais ainda, o ponto de interseção dessas duas retas corresponde ao par ordenado que corresponde a solução do sistema linear.

  Vamos ver a representação gráfica de um sistema apresentado e resolvido anteriormente neste trabalho. Voltemos ao Exemplo 1.2 que possui o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ -4x+6y=10 \end{cases},$$

  que possui como solução $(\frac{3}{4}, \frac{13}{6})$. Geometricamente, sua representação é:

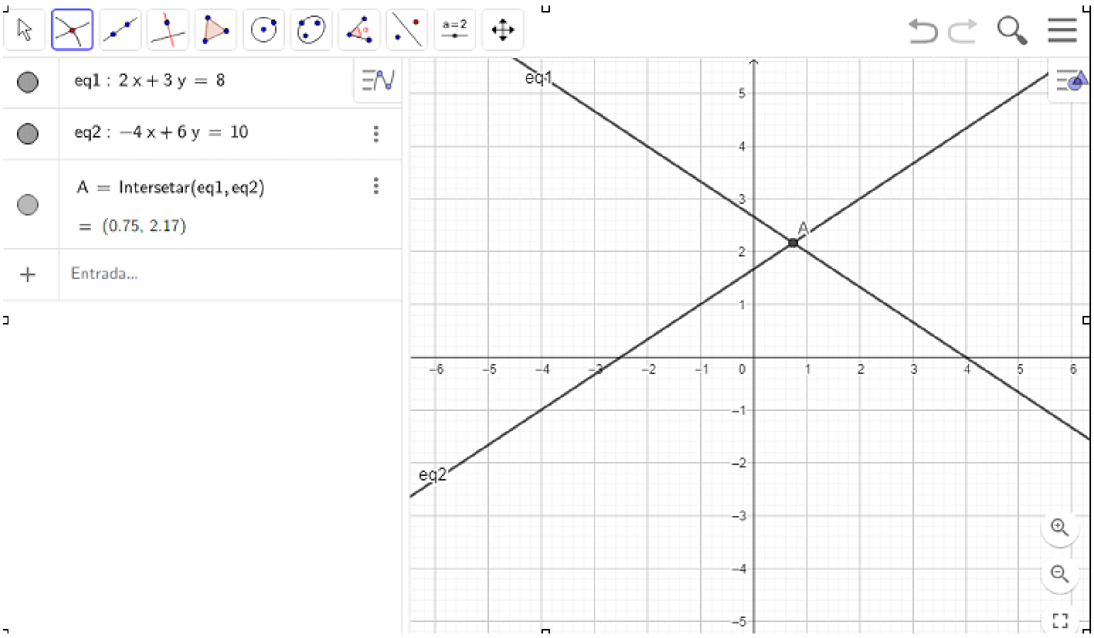

Figura 1.2: Interpretação geométrica do sistema apresentado no Exemplo 1.2.

Fonte: Autoria própria.

  Note que as duas retas que representam as equações lineares são concorrentes. O ponto $A = (0,75; 2,17)$ corresponde a solução do sistema linear informado inicialmente. Assim o sistema linear formado pelas duas equações apresenta solução única, sendo classificado como: Sistema Compatível e Determinado.

- Sistema Linear Compatível e Indeterminado: Esse tipo de sistema linear apresenta infinitas soluções. Graficamente, são duas retas que representam cada equação linear do sistema. Nesse caso, temos duas retas paralelas e coincidentes, ou seja, temos infinitos pontos comuns: Todo ponto que pertence a primeira reta também pertence a segunda reta. Esses infinitos pontos representam as infinitas soluções do sistema linear.

  Vamos ver a representação gráfica de um sistema linear incompatível: Considere o seguinte Sistema Linear Compatível e Indeterminado.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10. \end{cases}$$

  Que possui a seguinte representação gráfica.

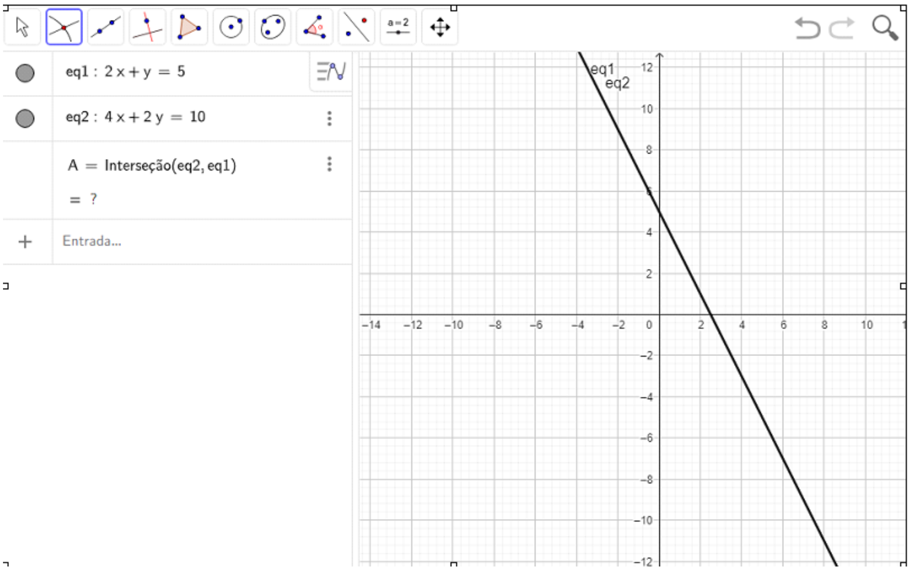

Figura 1.3: Interpretação geométrica.

Fonte: Autoria própria.

  Observe que as duas retas referentes a equação 1 e equação 2 são paralelas e coincidentes. Assim se um par ordenado que satisfaz a equação 1, então esse mesmo par ordenado também satisfaz a equação 2. Como uma equação linear admite infinitas soluções, então o sistema linear admite infinitas soluções, sendo classificado como: Sistema Compatível e Indeterminado.

- Sistema Linear Incompatível: Esse tipo de sistema linear não apresenta soluções. Graficamente, são duas retas paralelas e distintas, ou seja, não têm ponto comum e são coplanares. Cada reta representa as soluções de cada equação. Como não existe ponto de interseção entre essas retas, então o sistema linear não apresenta solução.

Vamos ver a representação gráfica de um sistema linear incompatível: Considere o seguinte Sistema Linear

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 8. \end{cases}$$

Que possui a seguinte representação gráfica:

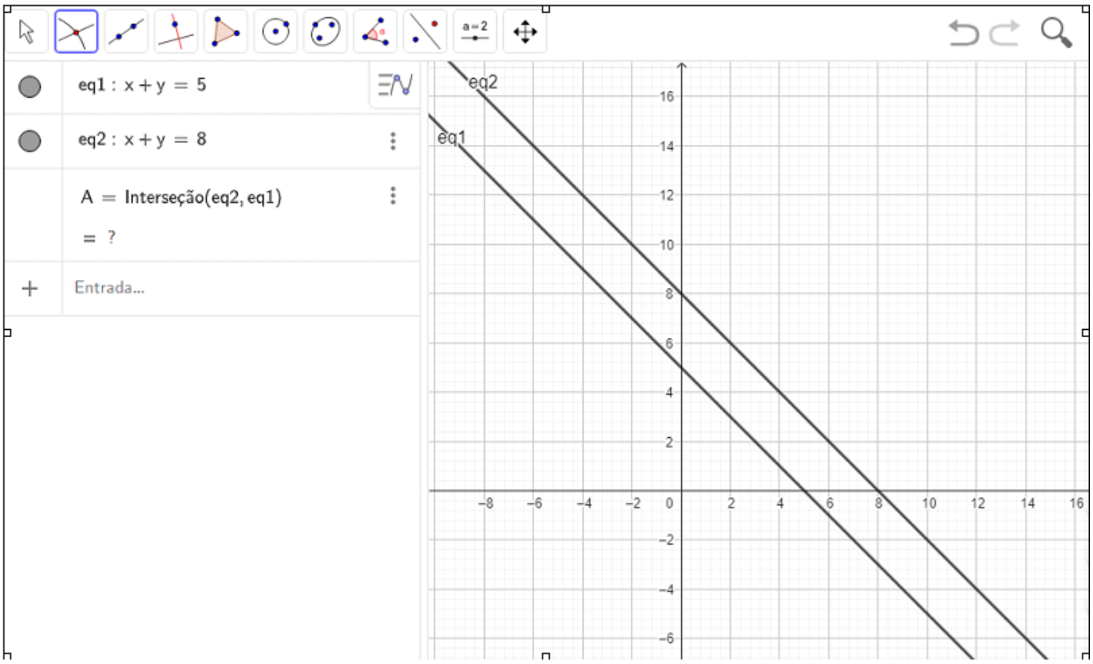

Figura 1.4: Interpretação geométrica.

Fonte: Autoria própria.

De fato, as retas referentes as equações 1 e 2 são retas paralelas e distintas. Assim o sistema linear formado pelas duas equações não apresenta solução sendo classificado como: Sistema incompatível.

Interpretação Geométrica de Sistemas Lineares 3×3

Caso o sistema linear seja formado por três equações com três incógnitas, a representação geométrica de cada equação linear será um plano.

Vamos voltar ao Exemplo 1.9 e exibir sua representação gráfica e a solução gráfica através do software Geogebra. Porém, desta vez teremos que utilizar a versão 3D do mesmo.

O Exemplo 1.9 possui o seguinte sistema de equações:

$$S : \begin{cases} 2r + a + V = 12,90 \\ r + 2a + V = 12,10 \\ 2r + 2V = 14,60 \end{cases}$$

Após o sistema ter sido resolvido, pelo Método Escalonamento, foi encontrado o conjunto solução $S = \{(3,2,\ \ 2,4,\ \ 4,1)\}$. Na Figura 1.5 daremos a interpretação geométrica deste sistema:

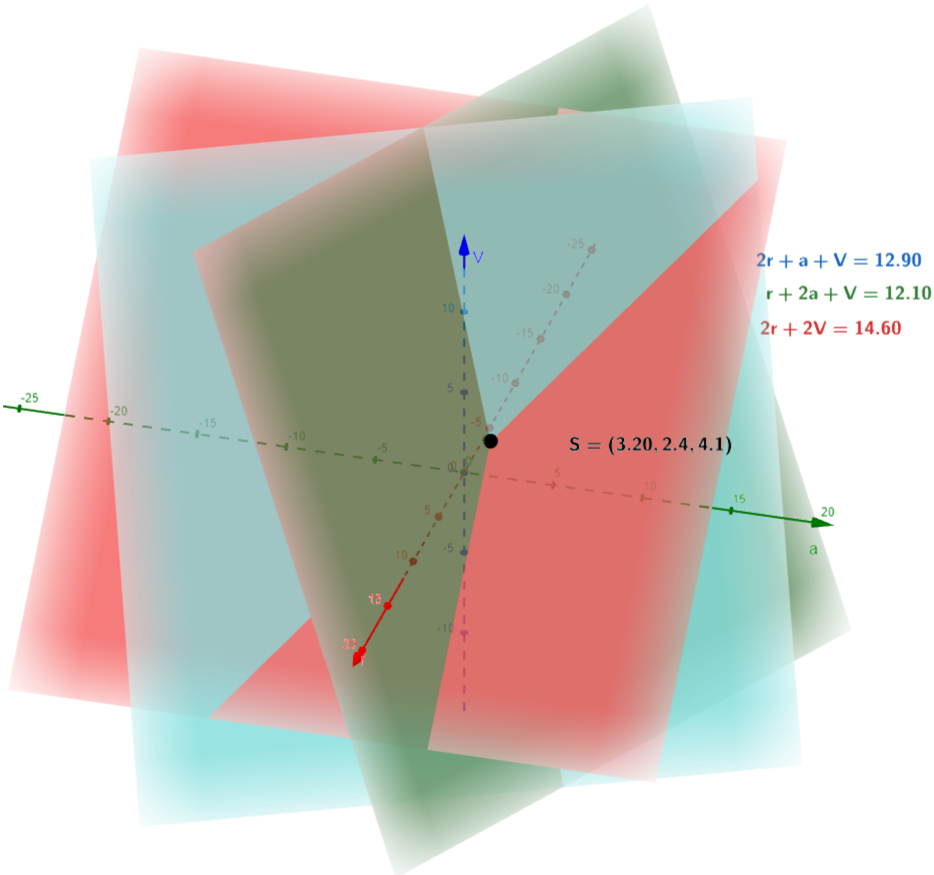

Figura 1.5: Interpretação geométrica do sistema apresentado no Exemplo 1.9.

Fonte: Autoria própria.

Note que existe um único ponto de interseção entre os três planos. Este ponto corresponde à solução do sistema linear que estamos analisando.

Conclusão: O uso de tecnologias em sala de aula é muito bem-vindo, é muito importante associar, quando possível, o uso de calculadoras gráficas para visualização e comprovação por parte dos alunos daquilo que está sendo calculado.

Comentário: Devido a dificuldade de visualização de modelos em 3 dimensões dos alunos de ensino médio, foi trabalhando apenas este exemplo de interpretação geométrica 3×3 em sala.

CAPÍTULO 2

Situações Problemas

Neste capítulo iremos descrever como foi o estudo de sistemas lineares e sala e mostraremos algumas situações problemas (ou estudo de caso) que foram desenvolvidas com grupos distintos de alunos de Ensino Médio e as observações em relação ao desenvolvimento situações-problemas pelos grupos de alunos.

A cada grupo foi apresentado um problema diferente e proposto a eles que interpretassem o problema, buscassem em livros teóricos que os auxiliassem na interpretação e modelagem dos problemas.
Foi dado ainda um tempo para debate entre eles dos problemas, o que permitia a troca de experiência entre os alunos. Posteriormente, eles apresentavam suas conclusões. Coube ao professor ser o mediador desse processo, auxiliando na construção (ou sugestão) de alguns eixos teóricos.
Ao final do processo, o professor expôs em cada turma uma possível resolução do problema, uma vez que infelizmente, não houve engajamento de todos os alunos.

Por outro lado me senti satisfeito pelo desenvolvimento daqueles que aceitaram a proposta pedagógica “inovadora”.

2.1 Observações Pedagógicas

Nesta seção faremos uma breve descrição do desenvolvimento em sala de aula do tema Sistemas Lineares com objetivo de se apresentar o método de escalonamento.
Primeiramente foi importante desconstruir a ideia de fazer pelo método de substituição simples, que por algumas vezes pode dar certo, mas não é um bom método para resolução de sistemas com 3 ou

mais variáveis.

Segundo, foi notada uma dificuldade visualizar quais operações elementares deveriam ser utilizadas entre as equações do sistema linear, com objetivo de eliminar incógnitas do sistema.

Terceiro, após o escalonamento ser finalizado, foi notado por ele uma facilidade obtenção dos valores das variáveis feita com um seguinte comentário “agora é só subir a escadinha.”

2.2 Proposta 1

Procurando resolver um desafio proposto em certa disciplina do curso de Nutrição, uma estudante foi à Biblioteca e encontrou em um livro o seguinte problema:

Uma dieta requer, para a refeição principal, 7 unidades de gordura, 9 unidades de proteínas e 16 unidades de carboidratos. Certa pessoa dispõe de alimentos com os quais pode montar sua dieta.

- Alimento A: cada medida contém 2 unidades de gordura, 2 unidades de proteína e 4 unidades de carboidrato.
- Alimento B: cada medida contém 3 unidades de gordura, 1 unidade de proteína e 2 unidades de carboidrato.
- Alimento C: cada medida contém 1 unidade de gordura, 3 unidades de proteína e 5 unidades de carboidrato.

Fazendo a refeição principal utilizando apenas os três alimentos, qual o sistema linear que o representa? Este sistema linear apresenta solução?

Comentário: Este problema foi proposto a um grupo de 9 alunos do 2^o do ensino médio, para que eles pudessem interpretar o problema, identificar a qual conteúdo estava relacionado e qual a técnica mais adequada para a resolução do mesmo. Infelizmente poucos, apenas três alunos, conseguiram identificar que se tratava de um problema associado a sitemas lineares de três equações e três icógnitas. Desses três, apenas dois alunos optaram em utilizar o escalonamento como método para a resolução.

Após o tempo estimado para resolução individual, foi o momente de se fazer uma intervenção para iniciar um processo de discussão das ideias.

Comentário: Com as ideias que surgiram dos três alunos que conseguiram resolver o problema, foi possível fazer com que os demais alunos que outrora não tiveram ideias, passassem a fazer comentários pertinentes e se interessar pelo problema proposto e surgiu a seguinte ideia montar cada equação do sistema linear: (Neste trabalho iremos apenas descrever as conclusões matemáticas da discussão feita em sala de aula)

Ideia dos alunos: Para resolver este problema de uma forma simples, o primeiro passo será declarar as incógnitas:

- A_g é a quantidade de gordura do alimento A, A_p é a quantidade de proteína do alimento A e A_c é a quantidade de carboidrato do alimento A;
- B_g é a quantidade de gordura do alimento B, B_p é a quantidade de proteína do alimento B e B_c é a quantidade de carboidrato do alimento B;
- C_g é a quantidade de gordura do alimento C, C_p é a quantidade de proteína do alimento C e C_c é a quantidade de carboidrato do alimento C.

Observe que em primeiro momento parece que estamos trabalhando com 9 incógnitas neste problema, mas na verdade os subindices se tratam de qual nutriente estamos analisando de cada alimento. Exemplo a variável A_p trata-se da quantidade de proteína do alimento A já a variável A_c trata-se da quantidade de carboidrato do alimento A.

O sistema linear que representa a quantidade de nutrientes da refeição principal utilizando apenas os alimentos A, B e C é dado por:

$$\begin{cases} 2A_g + 3B_g + C_g = 7 \\ 2A_p + B_p + 3C_p = 9 \\ 4A_c + 2B_c + 5C_c = 16 \end{cases}$$

Note que, as variáveis acima nos foram úteis apenas para facilitar o entendimento da origem de cada equação acima (raciocínio oriundo das iterações entre os alunos em sala de aula).

Assim sem perda de generalidade, podemos representar as variáveis A_g, A_c e A_p simplesmente por A que representa a quantidade do alimento A, tendo em mente que cada equação do sistema esta falando de nutriente em específico presente no alimento. Analogamente faremos isso com as B e C. Como consequência o sistema acima pode ser simplificado como abaixo.

$$\begin{cases} 2A+3B+C=7 \\ 2A+B+3C=9 \\ 4A+2B+5C=16 \end{cases}$$

Comentário: Após esta discussão em sala, os demais alunos que em primeiro momento não estavam conseguindo resolver o problema pediram um tempo adicional para resolver. Alguns pelo método de escalonamento, já outros tentaram fazer pelo método da substituição, pois lembravam de ter o estudado no Ensino Fundamental II.

Depois desta narrativa apresentada, iremos aqui expor a resolução de tal sistema, via Método de Escalonamento.

$$\begin{cases} 2A+3B+C=7 \\ 2A+B+3C=9 \quad (L_2-L_1) \\ 4A+2B+5C=16 \quad (L_3-2L_1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2A+3B+C=7 \\ \quad -2B+2C=2 \\ \quad -4B+2C=2 \quad (L_3-2L_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2A+3B+C=7 \\ \quad -2B+2C=2 \\ \quad\quad -C=-2 \end{cases}$$

Logo $C=2$ quantidade do alimento C e substituindo na segunda equação do sistema linear escalonado temos:

$$-2B+2C=2 \Rightarrow -2B+2\cdot 2=2 \Rightarrow -2B+4=2 \Rightarrow -2B=-2 \Rightarrow B=1$$

Assim, é necessário $B=1$ quantidade do alimento B e por fim substituindo $B=1$ e $C=2$ na primeira equação do sistema escalonado, temos:

$$2A+3B+C=7 \Rightarrow 2A+3\cdot 1+2=7 \Rightarrow 2A+5=7 \Rightarrow 2A=2 \Rightarrow A=1$$

Portanto é ncessário $A = 1$ quantidade do alimento A. Assim, o nutricionista poderá saber exatamente as quantidades de exatas dos alimentos A, B e C.

2.3 Proposta 2

Seguindo um ideia interdisciplinar apresentado em [1] e [3] envolvendo o balanceamento de equações envolvendo reações químicas na transformação da matéria. Nesta seção apresentaremos uma situação similar que foi trabalhada juntamente ao professor de Química num trabalho interdisciplinar. E por isso focaremos nossa estudo apenas sobre a parte matemática do problema uma vez que parte referente a matéria de química foi feita pelo professor de química.

Foi proposto a seguinte equação química para ser balanceda

$$xC_6H_12O_6 \rightarrow yCO_2 + zC_2H_5OH,$$

que representa a fermentação do açucar em que x moléculas de açucar reagem formando y moléculas de gás carbônico e z moléculas de etanol. Esta equação química pode ser balanceada?

Mas afinal, o que balanceamento?
De grosso modo, entenderemos aqui que o balancemento é o processo que iguala na quantidade de átomos de reagente com um produto após uma reação química.

Uma das formas de equilibrar a equação química é igualar, em seus dois membros, a quantidade de átomos de cada elemento químico. Este processo nos fornece o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 6x = y + 2z \\ 12x = 6z \\ 6x = 2y + z \end{cases}.$$

Este sistema tem solução? <u>Comentário:</u> Foi visualizado por alguns alunos que o sistema acima é homogeneo, e, portanto admite a solução $x = y = z = 0$. Fazendo algumas operações em cada equação do sistema temos que

$$\begin{cases} 6x - y - 2z = 0 \\ 12x - 6z = 0 \\ 6x - 2y - z = 0 \end{cases}.$$

Será que este sistema é compatível e determinado ou compatível e inderterminado?

Resolução: Utilizando o escalonamento temos

$$\begin{cases} 6x - y - 2z = 0 \\ 12x - 6z = 0 \quad (L2 - 2L1) \\ 6x - 2y - z = 0 \quad (L2 - 2L1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 6x - y - 2z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \\ -y + z = 0 \quad (2L3 + L2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - y - 2z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Portanto o sistema é compatível e indeterminado tendo como solução $S = \{\left(\frac{z}{2}, z, z\right)\}$ Veja que uma soluçao particular é a $x = 1$, $y = 2$ e $z = 2$.

Comentário: Foi uma novidade para os alunos a relação entre sistema linear e o balanceamento de equações químicas, essa dinamica trouxeram outros questionamentos de que onde mais os sistemas lineares poderiam ser aplicados.

Agora serão apresentadas duas propostas pedagógicas que não foram trabalhadas em sala, devido ao grau de dificuldade e tempo que seriam necessários. Mas que são muito interessantes de se analisar.

O problema a seguir foi encontrado em [6] e foi utilizado o software Matrix Calculator [4] para nos auxíliar em sua resolução. Aqui apresentaremos uma resolução para este problema.

2.4 Proposta 3

Após vasculhar a geladeira e os armários da cozinha, montamos a Tabela 2.1, que mostra os valores nutricionais de alguns alimentos encontrados: arroz e feijão in natura, peito de frango empanado congelado, suco de laranja pasteurizado e adoçado, pão tipo francês e margarina sem sal.

Tabela 2.1: Principais nutrientes de alguns alimentos

	Arroz (50g)	Feijão (30 g)	Frango (80 g)	Suco (200 ml)	Pão (50 g)	Margarina (14 g)	VDR
Energia (kcal)	190	100	150	120	130	45	2000
Carboidratos (g)	37	16	8	30	28	0	300
Proteínas (g)	3	7	13	1	4	0	75
Gorduras totais (g)	0	0	6	0	1,5	5	55

Para montar uma dieta é necessário determinar as quantidades $x_1, \ldots, x_6$ (em porções) de cada alimento, necessárias para compor o VDR. Isso corresponde a resolver o sistema linear:

$$\begin{cases} 190x_1 + 100x_2 + 150x_3 + 120x_4 + 130x_5 + 45x_6 = 2000 \\ 37x_1 + 16x_2 + 8x_3 + 30x_4 + 28x_5 = 300 \\ 3x_1 + 7x_2 + 13x_3 + x_4 + 4x_5 = 75 \\ 6x_3 + 1,5x_5 + 5x_6 = 55 \end{cases} \tag{1}$$

Observe que o sistema (1) possui quatro equações, correspondentes ao número de nutrientes, e seis incógnitas, correspondentes ao número de alimentos. A melhor maneira de resolver o sistema é por escalonamento, para tal devido a complexidade do sistema foi utilizado uma Matrix Calculator [4], que é uma calculadora capaz de fazer o escalomento do sistema por vários métodos de escalonamento. Aqui faremos interpretação para adaptar ao que foi feito pelo software para o seguinte sistema escalonado.

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{421}{1248}x_5 + \dfrac{167}{936}x_6 = \dfrac{365}{1872} \\ x_2 + \dfrac{185}{2496}x_5 - \dfrac{3163}{1872}x_6 = -\dfrac{30145}{3744} \\ x_3 + \dfrac{1}{4}x_5 + \dfrac{5}{6}x_6 = \dfrac{55}{6} \\ x_4 + \dfrac{3103}{2496}x_5 + \dfrac{859}{1872}x_6 = \dfrac{43465}{3744} \end{cases} \tag{2}$$

Note que a partir do sistema (2) a resposta ficará em termos de x_5 e x_6. E escrevendo as incognitas x_1, x_2, x_3 e x_4 em termos de x_5 e x_6 temos:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{421}{1248}x_5 - \dfrac{167}{936}x_6 + \dfrac{365}{1872} \\ x_2 = -\dfrac{185}{2496}x_5 + \dfrac{3163}{1872}x_6 - \dfrac{30145}{3744} \\ x_3 = -\dfrac{1}{4}x_5 - \dfrac{5}{6}x_6 + \dfrac{55}{6} \\ x_4 = -\dfrac{3103}{2496}x_5 - \dfrac{859}{1872}x_6 + \dfrac{43465}{3744} \end{cases} \quad (3)$$

E assim obtemos o seguinte conjunto solução:

$$S = \left\{ \left(\frac{421}{1248}x_5 - \frac{167}{936}x_6 + \frac{365}{1872},\ -\frac{185}{2496}x_5 + \frac{3163}{1872}x_6 - \frac{30145}{3744}, \right.\right.$$
$$\left.\left. -\frac{1}{4}x_5 - \frac{5}{6}x_6 + \frac{55}{6},\ -\frac{3103}{2496}x_5 - \frac{859}{1872}x_6 + \frac{43465}{3744},\ x_5,\ x_6 \right) \right\}.$$

Veja que nossa variáveis representam uma quantidade de alimento, logo nem todo valor atribuído para x_5 e x_6 são admissíveis na solução. Por isso consideraremos apenas os caso em que $x_5 \geq 0$ e $x_6 \geq 0$. Visto isso, temos que o sistema acima admite infinitas soluções sendo portanto, compatível e indeterminado.

Para finalizar, a proposta a seguir tem como finilidade o trabalho com o lúdico. Um problema que foi trabalhado em [5] no ano de 2016 no nível 1.

2.5 Proposta 4

Na figura vemos três cartelas com quatro adesivos e seus respectivos preços. O preço de uma cartela é a soma dos preços de seus adesivos.

Figura 2.1: Preços de algumas cartelas de adesivos.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Qual é o preço da cartela abaixo com seis adesivos?

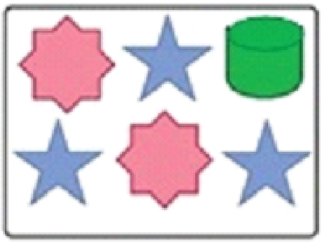

Figura 2.2: Cartela de adesivos.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Comentário: Este é um tipo de problema que tem viralizado nas redes sociais. Diversas vezes recebemos ou nos deparamos com problemas semelhantes a este nos grupos de mensageiros eletrônicos que usados frequentemente.
Aproveitei essa oportunidade e decidi fazer uma espécie de quiz eletrônico com um grupo de alunos do 2° ano do ensino médio. Foi uma atividade feita em sala de aula, porém com uma abordagem um pouco diferente. Nesse momento, já havia sido ministrado aos alunos o conteúdo de sistema linear, já estávamos na fase final de estudo e utilizei esse problema como forma de avaliar o desenvolvimento dos alunos.

Aqui faremos a resolução utilizando o método de escalonamento.

Considere que o cilindro Verde seja x, a estrela Azul seja y e o Hexadecágono (Estrela) rosa seja z.

Segue abaixo o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 16 \\ x + y + 2z = 12 \\ 2x + 2z = 10 \end{cases}$$

Assim obtemos o seguinte sistema escalonado

$$\begin{cases} x + 2y + z = 16 \\ -y + z = -4 \\ -4y = -22 \end{cases}$$

Logo o conjunto solução é $S = \left\{\left(\frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \frac{3}{2}\right)\right\}$ sendo um sistema é compatível e determinado.
Portanto, o preço da cartela de adesivos é $x + 3y + 2z = 23$.

Referências Bibliográficas

[1] BOLDRINI, José Luiz et al. ***Álgebra linear***. Harper & Row, 1980 (citado nas páginas 1, 19, 31).

[2] CALLIOLI, Carlos Alberto, DOMINGUES, Hygino Hugueros e COSTA, Roberto Celso Fabrício. ***Álgebra linear e aplicações***. Atual, 2007 (citado nas páginas 1, 7–9).

[3] CONSTANTINO, Fernando. "**Sistemas Lineares: uma abordagem para o ensino médio.**" Em: (2013) (citado na página 31).

[4] MATRIX CALCULATOR. ***Matrix Calculator - Solving Linear Systems***. https://matrixcalc.org/slu.html. Acesso em 10 junho de 2024 (citado nas páginas 32, 33).

[5] OBMEP. ***OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas***. http://www.obmep.org.br/. Acesso em 10 junho de 2024 (citado na página 34).

[6] SEVERO, Silviana Izabel Freire et al. "**DIETAS ALIMENTARES E SISTEMAS LINEARES: UTILIZANDO A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**". Em: () (citado na página 32).