

**Universidade Federal de Uberlândia**

**Faculdade de Matemática**

**Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**

**EXPLORAÇÃO DE GRAFOS NA EDUCAÇÃO  
BÁSICA**

**Wellington Vieira**



**Uberlândia-MG**

**2024**

**Wellington Vieira**

# **EXPLORAÇÃO DE GRAFOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção de título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

**Área de concentração:** Ciências e Humanidades para a Educação Básica

**Linha de pesquisa:** Matemática Discreta

**Orientador(a):** Evaneide Alves Carneiro



**Uberlândia-MG**

**2024**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

---

V658e  
2024      Vieira, Wellington, 1975-  
            Exploração de grafos na Educação Básica [recurso eletrônico] /  
            Wellington Vieira. - 2024.

Orientadora: Evaneide Alves Carneiro.  
Dissertação (Mestrado profissional) - Universidade Federal de  
Uberlândia. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
Nacional – PROFMAT.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.V658e>

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Matemática. 2. Teoria dos Grafos. 3. Educação de base. I. Carneiro,  
Evaneide Alves, 1981-, (Orient.). II. Universidade Federal de  
Uberlândia. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
Nacional - PROFMAT. III. Título.

---

CDU: 51

Rejâne Maria da Silva  
Bibliotecária Documentalista – CRB6/1925



## ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PPGMPMAT UFU				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Profissional, 05, PPGMPMAT				
Data:	Vinte e dois de agosto de dois mil e vinte e quatro	Hora de início:	16:00	Hora de encerramento:	18:18
Matrícula do Discente:	12212PFT014				
Nome do Discente:	Wellington Vieira				
Título do Trabalho:	O uso dos grafos como recurso metodológico na educação básica				
Área de concentração:	Ciências e Humanidades para a Educação Básica				
Linha de pesquisa:	Formação de Professores de Matemática da Educação Básica				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Não há				

Reuniu-se em webconferência pela plataforma *Google Meet* a Banca Examinadora, aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PPGMPMAT), assim composta pelos professores doutores: Fabiana Santos Cotrim - UFSCar; Taciana Oliveira Souza - IME/UFU e Evaneide Alves Carneiro - IME/UFU, orientadora do candidato.

Iniciando os trabalhos, a presidente da mesa, Profa. Dra. Evaneide Alves Carneiro, apresentou a Comissão Examinadora e juntamente com o candidato agradeceram a presença de todos. Posteriormente, o presidente concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

Dando continuidade, o senhor presidente concedeu a palavra para os examinadores que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final considerando o candidato:

Aprovado

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Taciana Oliveira Souza, Professor(a) do Magistério Superior**, em 22/08/2024, às 18:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Evaneide Alves Carneiro, Professor(a) do Magistério Superior**, em 22/08/2024, às 18:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Fabiana Santos Cotrim, Usuário Externo**, em 22/08/2024, às 18:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **5601287** e o código CRC **8977A9B7**.

*Dedico esse trabalho a todas as pessoas que procuram no seu dia a dia vencer as suas batalhas diariamente.*

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, por me conceder a oportunidade, a força e a sabedoria para concluir esta jornada. Sem sua orientação e bênçãos, este trabalho não seria possível.

À minha querida esposa, Glauciene, e à minha amada filha, Bianca, expresso minha profunda gratidão pelo amor, apoio incondicional e compreensão durante todo este período. Vocês são a minha inspiração e minha força diária.

Aos meus amigos Adriano, Carlos Eduardo, Carol, Cristiano, Guilherme, Marlúcia, João Barbosa, Raison, Renato e Robson, agradeço pelo encorajamento, pelas palavras de incentivo e pela camaradagem. Sua amizade foi fundamental para que eu mantivesse o foco e a motivação.

Agradeço aos professores do programa de mestrado, cujos ensinamentos e orientações foram cruciais para o desenvolvimento deste trabalho. Em especial, agradeço à minha orientadora, Professora Evaneide, por sua orientação, paciência e apoio constante. Sua dedicação e expertise foram fundamentais para a realização desta pesquisa.

Por fim, agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho. Seja através de palavras de incentivo, sugestões, ou mesmo pela companhia durante as longas horas de estudo, cada um de vocês desempenhou um papel importante nesta conquista.

A todos, meu sincero e profundo agradecimento.

**VIEIRA, W. .EXPLORAÇÃO DE GRAFOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA. 2024. 62p. Dissertação de Mestrado , Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.**

## **Resumo**

O presente estudo tem por objetivo explorar a aplicação de conceitos da teoria de grafos na prática escolar, com foco na seguinte questão norteadora: “Que vantagens existem em utilizar os grafos na Educação Básica?” Para nos auxiliar na busca da resposta aplicamos algumas atividades envolvendo caminhos eulerianos, Teorema das quatro cores, dentre outros conceitos. Propusemos a criação de atividades aplicáveis a estudantes do ensino médio de uma escola particular da cidade de Itumbiara-GO. O intuito foi, além de coletar dados para esta investigação, incentivar o interesse por ciências, e especialmente pela matemática. A pesquisa se justifica por permitir integrar teoria e prática para benefício do aprendizado, associando ao um envolvimento nas resoluções das propostas de trabalho, utilizando conceitos que não são normalmente vistos na educação básica.

**Palavras-chave:** Aplicação da teoria de grafos, Teoria das quatro cores, Problemas eulerianos, Educação básica.



## **Abstract**

The present study aims to explore the application of concepts from graph theory in school practice, focusing on the following guiding question: “What advantages are there in using graphs in Basic Education?” To help us search for the answer, we applied some activities involving Eulerian paths, the four-color theorem, among other concepts. We proposed the creation of activities applicable to high school students at a private school in the city of Itumbiara-GO. The aim was, in addition to collecting data for this investigation, to encourage interest in science, and especially mathematics. The research is justified by allowing the integration of theory and practice for the benefit of learning, associating it with involvement in the resolution of work proposals, using concepts that are not normally seen in basic education.

**Keywords:** Application of Graph Theory, Four Color Theory, Problems eulerians, Basic education.

---

# Sumário

---

<b>Lista de Figuras</b> . . . . .	<b>iii</b>
<b>Introdução</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>1 Fundamentos</b> . . . . .	<b>3</b>
1.1 Introdução à teoria dos grafos . . . . .	3
1.1.1 Antecedentes históricos . . . . .	3
1.2 Grafos Eulerianos . . . . .	14
1.3 Coloração . . . . .	16
1.3.1 Sobre o Teorema das Quatro Cores . . . . .	17
<b>2 Procedimentos metodológicos</b> . . . . .	<b>18</b>
2.1 Pesquisa bibliográfica . . . . .	18
2.2 Elaboração e aplicação das atividades . . . . .	19
2.2.1 Atividade 01 - Grafos Eulerianos . . . . .	19
2.2.2 Atividade 02 - Coloração de Grafos . . . . .	22
<b>3 Grafos no ensino de matemática da Educação Básica</b> . . . . .	<b>24</b>
3.1 História dos grafos no ensino de matemática . . . . .	24
3.1.1 Aplicações iniciais na educação . . . . .	24
3.1.2 Era contemporânea, integração dos grafos no ensino . . . . .	25
3.1.3 Aplicação de metodologias utilizando grafos no estudo da matemática em sala de aula . . . . .	26
3.1.4 Desafios e Perspectivas Futuras . . . . .	27
3.2 Utilização de grafos na resolução de problemas matemáticos . . . . .	28
3.3 Aplicações interdisciplinares . . . . .	29
3.4 Compreendendo a estrutura de grafo no contexto matemático . . . . .	30

<b>4</b>	<b>Atividades desenvolvidas</b>	<b>35</b>
4.1	Atividade 01 - Grafos Eulerianos	35
4.1.1	Descrição e objetivo	35
4.1.2	Aplicação e análise	36
4.1.3	Considerações sobre a atividade	40
4.2	Atividade 02 - Teorema das quatro cores	41
4.2.1	Descrição e objetivo	41
4.2.2	Aplicação e análise	42
4.2.3	Considerações sobre a atividade	43
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>46</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>48</b>

---

# Lista de Figuras

---

1.1	O problema das pontes de Königsberg. . . . .	3
1.2	Grafo das pontes de Königsberg. . . . .	4
1.3	Exemplo de grafo. . . . .	5
1.4	Exemplo de grafo. . . . .	6
1.5	Caminho. . . . .	9
1.6	Um grafo desconexo. . . . .	9
1.7	Um grafo conexo. . . . .	10
1.8	Ilustração do caso inicial da indução. . . . .	11
1.9	Ilustração do primeiro caso citado. . . . .	12
1.10	Ilustração do segundo caso citado. . . . .	13
1.11	Passeio. . . . .	13
1.12	Trilha. . . . .	14
1.13	Grafo euleriano. . . . .	15
1.14	Grafo semi euleriano. . . . .	15
1.15	Grafo não euleriano. . . . .	15
2.1	Situação problema, com traçado de lápis. . . . .	19
2.2	Figura dos três quadrados. . . . .	20
2.3	Figura dos olhos de Saron. . . . .	21
2.4	Figura do barco. . . . .	21
2.5	Figura do Wolverine. . . . .	21
2.6	Região metropolitana de Goiânia. . . . .	23
2.7	Região metropolitana de Belo Horizonte. . . . .	23
3.1	Problema do Caixeiro Viajante. . . . .	28
3.2	Rede de interação. . . . .	30
3.3	Grafo: exemplo 2.1. . . . .	31

3.4	Grafo: exemplo 2.2. . . . .	33
4.1	Atividade sobre grafos eulerianos. . . . .	36
4.2	Figura dos três quadrados. . . . .	37
4.3	Olhos de Sharon. . . . .	38
4.4	Figura do barco. . . . .	38
4.5	Wolverine. . . . .	39
4.6	Região metropolitana de Goiânia. . . . .	41
4.7	Região metropolitana de Belo Horizonte. . . . .	42

---

# Introdução

---

O ensino de matemática é uma jornada complexa que busca não apenas transmitir conhecimentos, mas desenvolver o raciocínio lógico e a capacidade de resolver problemas. Nesse contexto, a teoria dos grafos emerge como uma sugestão na exploração de atividades lúdicas, oferecendo uma abordagem visual e intuitiva para explorar conceitos matemáticos. Nos últimos anos, a educação matemática tem buscado incorporar abordagens mais dinâmicas e práticas, com o intuito de proporcionar aos estudantes, uma compreensão mais profunda e significativa dos conceitos matemáticos.

As reflexões de Toledo e Toledo (1997) caracterizam uma realidade dentro do Ensino Básico, como por exemplo, quando mencionam a metodologia da resolução de problemas:

... os problemas de matemática muitas vezes são trabalhados de forma desmotivadora, apenas como um conjunto de exercícios acadêmicos. A tarefa do aluno geralmente se resume a descobrir que conta deve fazer para acertar a resolução e, assim, obter uma boa nota. Perde-se com isso o aspecto lúdico que um problema pode ter quando é encarado como um desafio.(TOLEDO; TOLEDO, 1997, p.83) [14]

Diante deste cenário, a utilização da teoria de grafos pode contribuir com a quebra de algumas práticas educacionais pouco produtivas e, ao mesmo tempo, estimular o emprego de metodologias mais dinâmicas.

Por meio dessa abordagem, busca-se não apenas transmitir conhecimento, mas cultivar o pensamento crítico e a resolução de problemas. Para tanto, foram utilizadas algumas referências para construir o arcabouço teórico que fundamenta este trabalho sobre a aplicação dos grafos no contexto educacional.

Este trabalho tem como objetivo explorar a aplicação dos grafos no ambiente educacional, especificamente em salas de aula de matemática, e analisar como essa exploração pode contribuir para o aprimoramento do aprendizado dos alunos. Investigaremos como a teoria dos grafos pode enriquecer o processo de aprendizagem matemática, proporcionando aos alunos uma abordagem mais visual e interativa para a compreensão de conceitos abstratos.

---

Além disso, buscaremos compreender como a incorporação dos grafos pode contribuir para o desenvolvimento de habilidades cognitivas, promovendo uma aprendizagem mais ativa e engajadora. Os grafos, estruturas formadas por vértices e arestas, têm uma ampla gama de aplicações em diversas áreas, como ciência da computação, engenharia, biologia, entre outras. No entanto, seu potencial no ensino de matemática muitas vezes é subestimado. A visualização proporcionada pelos grafos pode transformar abstrações matemáticas em conceitos tangíveis e acessíveis, tornando o aprendizado mais envolvente e compreensível para os estudantes.

O desenvolvimento deste trabalho aconteceu na forma de uma pesquisa ação, se estende a partir do capítulo um, dando ênfase na fundamentação teórica de grafos, apresentando algumas definições, teoremas, corolários, demonstrações, bem como alguns exemplos para deixar mais claro ao leitor o entendimento do assunto a ser percorrido.

No capítulo dois, descrevemos os procedimentos metodológicos que foram adotados na realização deste trabalho.

No capítulo três, são apresentados um pouco da história sobre grafos, que vem desde os antecedentes históricos a aplicações no contexto de sala de aula. Para isso, foram considerados a história em sala da aplicação em sala de aula, iniciação na educação, a própria integração no ensino, metodologia para o estudo de grafos e a compreensão da estrutura de grafo no contexto matemático. E algumas aplicações que podem ser aprimoradas e aplicadas dentro do contexto de sala de aula.

No capítulo quatro, é realizado um relato da aplicação das atividades nas turmas do ensino básico, bem como quais foram os resultados obtidos, e a análise destes resultados.

O capítulo cinco apresenta as considerações finais do trabalho juntamente com algumas conclusões e resultados.

## Fundamentos

### 1.1 Introdução à teoria dos grafos

#### 1.1.1 Antecedentes históricos

A história dos grafos remonta ao século XVIII, quando o matemático suíço Leonhard Euler [4] introduziu o problema das Pontes de Königsberg<sup>1</sup>. Este problema, que envolvia a busca por um caminho que cruzasse cada uma das sete pontes da cidade uma única vez, serviu como catalisador para o desenvolvimento da teoria dos grafos. Euler representou as terras e as pontes utilizando pontos e linhas, criando assim o que conhecemos hoje como um grafo.

**Figura 1.1:** O problema das pontes de Königsberg.



**Fonte:** Matemática IME USP, disponível em: <https://images.app.goo.gl/Nbupnh8BxF6hwqPR7>.

Sua solução, publicada em 1736, estabeleceu as bases da teoria dos grafos e marcou o início de

<sup>1</sup>São sete pontes que ligam uma ilha formada na cidade de Königsberg (na antiga Prússia), atual cidade de Kaliningrado na Rússia, no curso do rio Pregel.

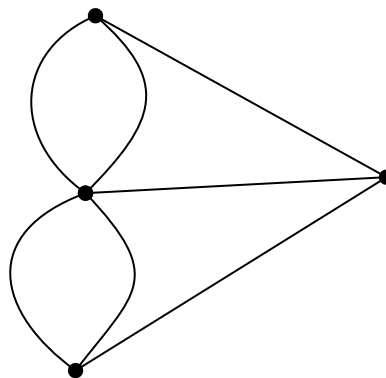


uma jornada que transformaria a matemática e, eventualmente, a educação.

Observe na Figura 1.1 a representação do desafio proposto pelos habitantes de Königsberg, que era fazer um passeio passando pelas sete pontes, porém passando apenas uma vez sobre cada uma das pontes.

A representação geométrica dada pela teoria de grafos faz uma tradução na sua criação do desafio proposto na solução do passeio sobre as pontes de Königsberg, onde as pontes serão representadas por arestas, e as regiões serão representadas por vértices. Assim temos a seguinte representação gráfica.

**Figura 1.2:** Grafo das pontes de Königsberg.



**Fonte:** Elaborado pelo autor.

É da natureza da matemática descrever e conjecturar linha de pensamento em situações correlatas. A visão de Leonhard Euler, em procurar descrever em forma simbólica a situação de atravessar as pontes e voltar ao mesmo lugar, na Figura 1.2, contribuiu na construção da Teoria de Grafos.

A partir deste momento, serão apresentadas as definições e os resultados necessários para a compreensão do restante do trabalho. Esses resultados podem ser encontrados, por exemplo, em [10] e [13].

### Definição 1.1: Grafo

- Um **grafo** é um par ordenado  $G = (V; E)$  formado por um conjunto não vazio  $V$ , cujos elementos são chamados de **vértices** e um conjunto  $E$  cujos elementos são pares não ordenados de vértices e são chamados de **arestas**.
- Os dois vértices que correspondem a uma aresta são chamados de **extremidades** da aresta, e neste caso dizemos que os vértices são **adjacentes**.
- Uma aresta em que as duas extremidades são iguais é chamada de **laço**.

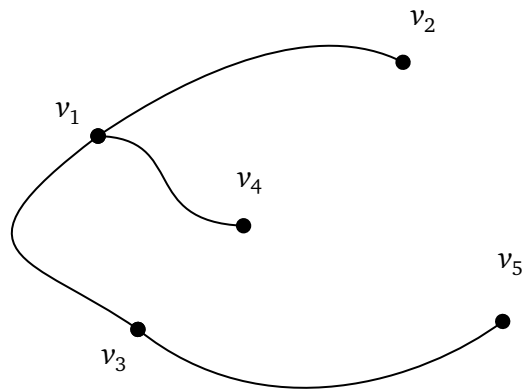
- Quando cada par de vértices de um grafo corresponde a no máximo uma aresta e o grafo não possui laços, dizemos que ele é um **grafo simples**.

### Definição 1.2: Grau

Se  $v$  é um vértice do grafo  $G$ , a quantidade de arestas que possuem  $v$  como extremidade é chamada de **grau de  $v$**  e é denotada por  $d(v)$ .

### Exemplo 1.1

**Figura 1.3:** Exemplo de grafo.



**Fonte:** Elaborado pelo autor.

No grafo acima podemos observar o conjunto de vértices,

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

e o conjunto  $E$ , que neste caso é descrito por:

$$E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_3v_5\}.$$

A notação de grau será dada da seguinte forma:

$$d(\text{nome}) = \text{grau}.$$

Representando o grau de cada vértice, temos:

$$d(v_1) = 3,$$

$$d(v_2) = 1,$$

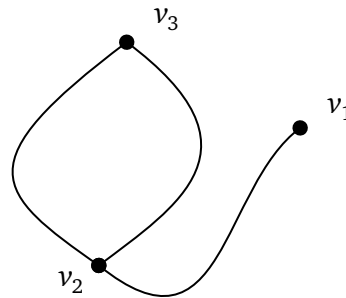
$$d(v_3) = 2,$$

$$d(v_4) = 1,$$

$$d(v_5) = 1.$$

### Exemplo 1.2

**Figura 1.4:** Exemplo de grafo.



**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Neste grafo acima, temos a representação de um laço construído no  $v_1$  e podemos observar o conjunto de vértices,

$$V = \{v_1, v_2, v_3\}$$

e o conjunto  $E$ , descrito por:

$$E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_2\}.$$

Representando o grau de cada vértice, temos:

$$d(v_1) = 1,$$

$$d(v_2) = 3,$$

$$d(v_3) = 2.$$

**Observação 1.1**

Durante todo o texto, o símbolo  $\#A$  representa a cardinalidade do conjunto  $A$ .

**Teorema 1.1: Teorema de Euler**

A soma dos graus dos vértices de um grafo  $G = (V; E)$  é igual a duas vezes o número de arestas nesse grafo, ou seja:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\#E.$$

**Demonstração.** Para cada vértice do grafo  $G$ , conte seu grau e marque cada uma das arestas que possuem aquele vértice como extremidade. Por um lado, o número total de marcas que foram utilizadas é exatamente a soma dos graus dos vértices. Por outro lado, cada aresta foi marcada exatamente duas vezes (uma vez para cada uma de suas extremidades). Assim, o número de marcas utilizadas é exatamente duas vezes o número de arestas.  $\square$

**Corolário 1.1**

Em todo grafo, a quantidade de vértices que possuem grau ímpar é um número par.

**Demonstração.** Seja  $G = (V; E)$  um grafo com  $n$  vértices e sejam  $d_1, \dots, d_n$  os graus desses vértices. Suponhamos que, dentre eles, existem  $r$  números pares e  $s$  números ímpares. Denotemos por  $p_1, \dots, p_r$  os pares e por  $i_1, \dots, i_s$  os ímpares. Pelo Teorema de Euler, temos:

$$2\#E = d_1 + \dots + d_n = (p_1 + \dots + p_r) + (i_1 + \dots + i_s).$$

Assim,

$$i_1 + \dots + i_s = 2\#E - (p_1 + \dots + p_r).$$

Como o lado direito é um número par, vemos que  $i_1 + \dots + i_s$  é par. Agora para que uma soma de números ímpares resulte em um número par, é necessário que a quantidade de parcelas seja par. Portanto,  $s$  é par, como queríamos.  $\square$

**Observação 1.2**

O corolário acima é conhecido como **Lema do aperto de mãos**. Embora seja simples de provar, o lema do aperto de mãos se constitui uma poderosa ferramenta na Análise Combinatória. Agora, por que esse nome “Lema do aperto de mãos”? Imaginemos a seguinte situação: em

uma festa há onze pessoas. É possível que cada uma delas aperte a mão de exatamente três outras pessoas?

Passando esse problema para a linguagem da teoria dos grafos, podemos imaginar que cada pessoa é um vértice e cada aperto de mão é uma aresta. Portanto, estamos perguntando se existe um grafo com 11 vértices em que cada vértice tenha grau 3, e pelo Corolário 1.1.1, a resposta é: “não é possível que cada uma das onze pessoas na festa aperte a mão de exatamente três outras pessoas”.

### Exemplo 1.3

Aplicando o teorema de Euler no Exemplo 1.1.1, temos a seguinte análise:

$$\begin{aligned}\sum d(v) &= 3 + 1 + 2 + 1 + 1 = 8 \\ \Rightarrow \sum d(v) &= 2 \cdot 4 \\ \Rightarrow \sum d(v) &= 2\#E.\end{aligned}$$

Ainda na mesma análise, vemos que o Corolário 1.1.1 também se verifica, pois o grafo em questão tem 4 vértices de grau ímpar.

### Definição 1.3: Caminho

Um **caminho** de comprimento  $n$ , denotado por  $P_n$ , é um grafo com  $n + 1$  vértices distintos, ordenados em uma sequência tal que suas arestas ligam vértices consecutivos dessa sequência, isto é:

$$V(P_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_n\} \text{ e } E(P_n) = \{v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n\}.$$

Os vértices  $v_0$  e  $v_n$  são os *extremos* do caminho.

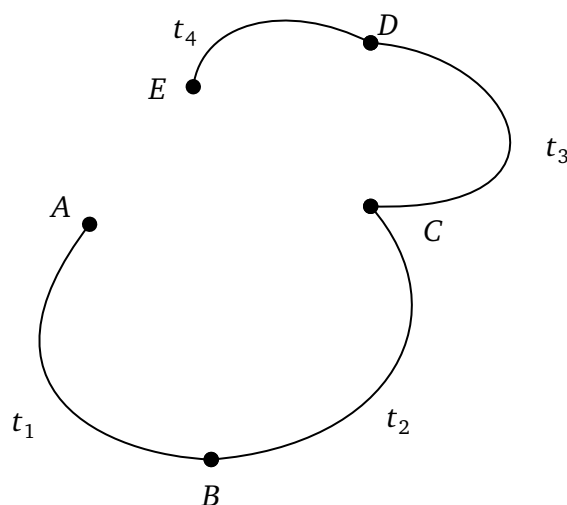
Dado um grafo  $G = (V; E)$  e dois vértices  $u, v \in V$ , um **caminho em  $G$  que vai de  $u$  a  $v$**  é uma sequência de vértices distintos de  $G$ , começando em  $u$  e terminando em  $v$ , ou seja,  $u = v_0, v_1, \dots, v_n = v$  e  $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n$  são arestas de  $G$ . Neste caso, podem existir outras arestas no grafo, além das arestas do caminho.

**Definição 1.4: Conexidade**

Dizemos que um grafo  $G = (V; E)$  é **conexo** quando, para quaisquer dois vértices  $u$  e  $v$  de  $G$  existe um caminho em  $G$  de extremos  $u$  e  $v$ . Caso contrário, dizemos que  $G = (V; E)$  é desconexo.

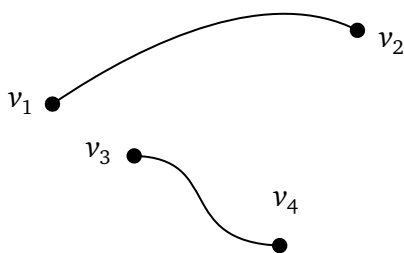
**Exemplo 1.4**

A seguir temos a representação de um **caminho** de comprimento  $n = 4$ .

**Figura 1.5:** Caminho.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

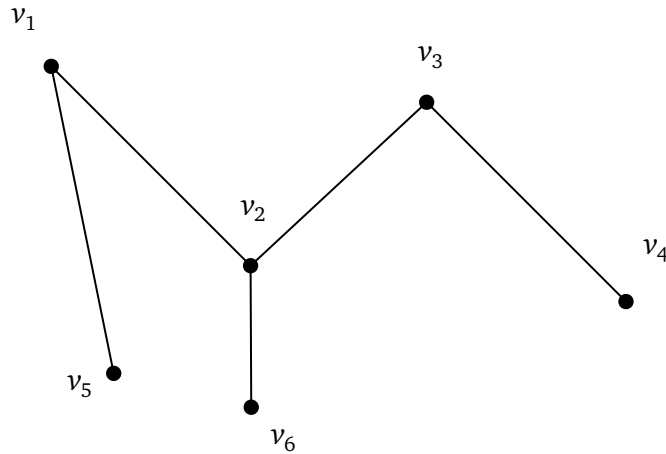
Abaixo temos a representação de um **grafo desconexo**. Observe, por exemplo, que não existe um caminho ligando o vértice  $v_1$  ao vértice  $v_3$ .

**Figura 1.6:** Um grafo desconexo.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Agora temos um exemplo de **grafo conexo**. Em qualquer das possibilidades de escolha de um vértice, existirá um percurso que chegará em outro vértice qualquer escolhido.

**Figura 1.7:** Um grafo conexo.



**Fonte:** Elaborado pelo autor.

### Definição 1.5: Componente conexa

Dizemos que um grafo  $H$  é um **subgrafo** de um grafo  $G$ , e escrevemos  $H \subseteq G$ , quando  $H$  é um grafo e temos:

$$V(H) \subseteq V(G) \text{ e } E(H) \subseteq E(G).$$

Um subgrafo  $H \subseteq G$  é dito **maximal** em relação a uma certa propriedade  $P$  se  $H$  tem a propriedade  $P$ , mas nenhum outro subgrafo de  $G$  que contenha  $H$  tem a propriedade  $P$ . Dado um grafo  $G$ , um subgrafo que seja conexo e maximal é chamado de **componente conexa** de  $G$ .

### Observação 1.3

Para qualquer vértice  $x \in V(G)$ , existe uma única componente conexa de  $G$  à qual  $x$  pertence. Tal componente será denotada por  $C_x$ .

### Definição 1.6: Grafo planar

Dizemos que um grafo é **planar** se puder ser desenhado no plano sem que haja arestas se cruzando, ou seja, sem que haja interseção das linhas que representam as arestas, exceto possível-

mente em um vértice. Tal desenho é chamado **representação planar** do grafo. Uma **face** de um grafo planar  $G$  é qualquer região do conjunto  $\mathbb{R}^2 - G$ .

### Teorema 1.2

Se  $G = (V; E)$  é um grafo planar conexo com  $f$  faces,  $\#V = n$  e  $\#E = m$ , então vale:

$$f - m + n = 2.$$

**Demonstração.** A ideia da demonstração é usar indução em uma sequência de subgrafos  $G_1, G_2, \dots, G_m = G$ , onde cada  $G_k$  será um grafo com  $k$  arestas. A sequência é construída da seguinte forma:

- Escolhemos arbitrariamente uma aresta de  $G$  para obter  $G_1$ .
- Obtemos  $G_n$  a partir de  $G_{n-1}$  acrescentando arbitrariamente uma aresta que é incidente a um vértice de  $G_{n-1}$  que não está presente ainda.

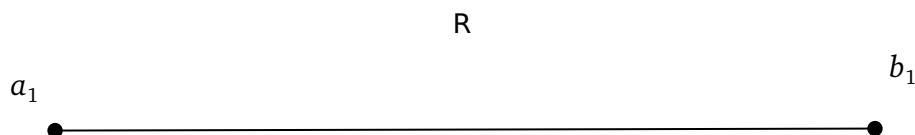
Esta construção é possível porque  $G$  é conexo. Notemos que  $G$  é obtido depois de  $m$  arestas serem acrescentadas.

Denotemos por  $f_k, m_k$  e  $n_k$  o número de faces, arestas e vértices de  $G_k$ , respectivamente.

A relação é verdadeira para  $G_1$ , pois neste caso temos:  $f_1 = 1, n_1 = 2$  e  $m_1 = 1$ . Logo,

$$f_1 - m_1 + n_1 = 1 - 1 + 2 = 2.$$

**Figura 1.8:** Ilustração do caso inicial da indução.



**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Suponhamos que a relação é verdadeira para  $G_k$ , e provemos que é válida para  $G_{k+1}$ .

Seja  $a_{k+1}b_{k+1}$  a aresta acrescentada a  $G_k$  para obter  $G_{k+1}$ .

Temos duas possibilidades: ou ambos os vértices  $a_{k+1}$  e  $b_{k+1}$  já estão em  $G_k$  ou um dos dois vértices da nova aresta ainda não está em  $G_k$ .

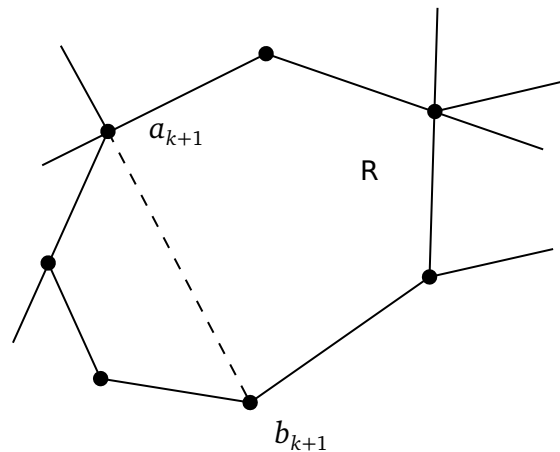


No primeiro caso, os dois vértices devem estar na fronteira de uma região comum  $R$ , pois se estivessem em regiões distintas não seria possível acrescentar a aresta sem haver um cruzamento. A adição desta nova aresta divide  $R$  em duas regiões, e portanto temos:  $f_{k+1} = f_k + 1$ ,  $m_{k+1} = m_k + 1$  e  $n_{k+1} = n_k$ . Logo,

$$f_{k+1} - m_{k+1} + n_{k+1} = f_k + 1 - (m_k + 1) + n_k = f_k - m_k + n_k = 2,$$

pela hipótese de indução.

**Figura 1.9:** Ilustração do primeiro caso citado.



**Fonte:** Elaborado pelo autor.

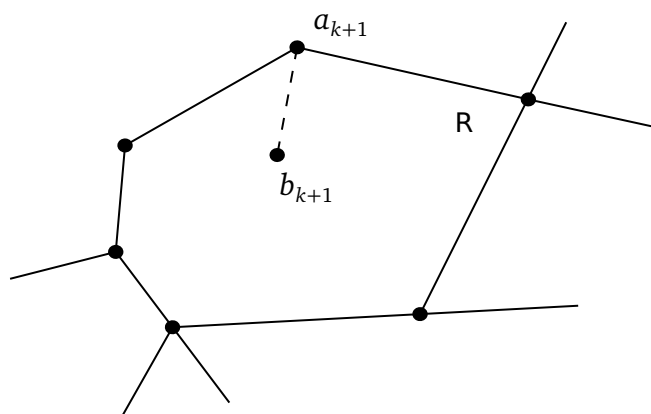
Já no segundo caso, suponhamos que  $a_{k+1}$  está em  $G_k$ , mas  $b_{k+1}$  não está. Acrescentar esta nova aresta não gera novas regiões, já que  $b_{k+1}$  deve estar em uma região que tem  $a_{k+1}$  em seu limite.

Assim,  $f_{k+1} = f_k$ ,  $m_{k+1} = m_k + 1$  e  $n_{k+1} = n_k + 1$ . Portanto,

$$f_{k+1} - m_{k+1} + n_{k+1} = f_k - (m_k + 1) + n_k + 1 = f_k - m_k + n_k = 2,$$

novamente pela hipótese de indução, e isso finaliza a demonstração.

Figura 1.10: Ilustração do segundo caso citado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

□

### Definição 1.7: Passeio e Trilha

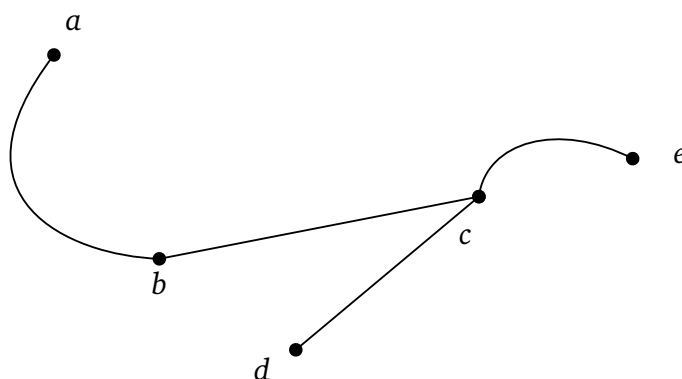
Se, na definição de caminho, abrirmos mão da condição de que os vértices  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, \dots, v_n$  sejam distintos, temos o que é usualmente chamado de **passeio** em um grafo. Em um passeio é permitido, inclusive, passar várias vezes sobre uma mesma aresta.

Por outro lado, se permitirmos repetir vértices mas não permitirmos passar mais de uma vez sobre uma mesma aresta, teremos uma **trilha**. Se os vértices inicial e final coincidirem, dizemos que a trilha é **fechada**. Caso contrário, ela é uma trilha **aberta**.

### Exemplo 1.5

No exemplo abaixo, temos o passeio a, b, c, d, c, e. Este passeio não é caminho e nem trilha.

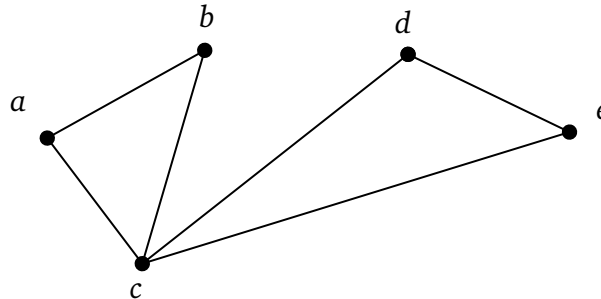
Figura 1.11: Passeio.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Neste exemplo, temos um passeio que é trilha, mas não é caminho:  $c, a, b, c, d, e, c$ .

**Figura 1.12:** Trilha.



**Fonte:** Elaborado pelo autor.

## 1.2 Grafos Eulerianos

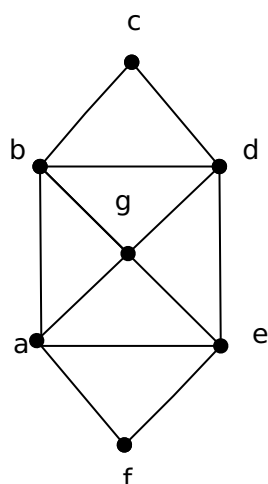
### Definição 1.8

Um grafo com  $m$  arestas é dito **euleriano** se existe uma trilha fechada de comprimento  $m$  em  $G$ ; em outras palavras, se podemos percorrer cada aresta uma e só uma vez partindo de um vértice e a ele retornando. Se o grafo não é euleriano mas tem uma trilha aberta de comprimento  $m$ , ele é dito **semi-euleriano**.

### Exemplo 1.6

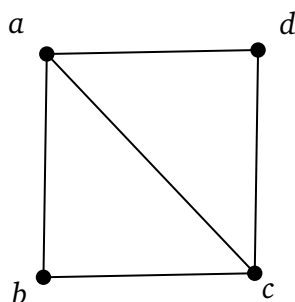
Vamos visualizar as definições acima com exemplos de grafos **euleriano** (Figura 1.13) e **semi-euleriano** (Figura 1.14).

Neste exemplo abaixo, temos a trilha  $a, b, c, d, e, g, b, d, g, a, e, f, a$ .

**Figura 1.13:** Grafo euleriano.

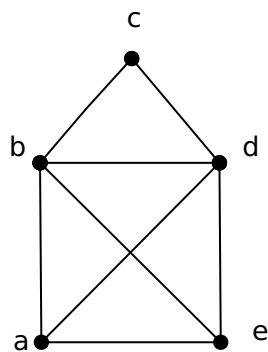
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Neste exemplo abaixo, temos a trilha aberta a, b, c, d, a, c.

**Figura 1.14:** Grafo semi euleriano.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Agora temos um exemplo de um grafo não euleriano.

**Figura 1.15:** Grafo não euleriano.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

**Observação 1.4**

Tendo em mente o último exemplo, poderíamos nos perguntar: como justificar que o grafo do exemplo 1.15 não é euleriano? A resposta está no teorema abaixo. Essa questão está diretamente ligada à Atividade 01 descrita no Capítulo 3 deste trabalho.

**Teorema 1.3**

Um grafo conexo  $G = (V; E)$  é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices têm grau par.

*Demonstração.* Veja em [13]. □

## 1.3 Coloração

**Definição 1.9**

Dado um grafo qualquer, realizar uma coloração nada mais é do que atribuir rótulos a elementos de um grafo (vértices ou arestas), os quais chamamos de “cores”. Tal processo é efetuado com base em algumas restrições e é chamado de uma *coloração de vértices (ou arestas)*. No caso de uma coloração de vértices, dois vértices adjacentes não devem receber a mesma cor e, no caso de uma coloração de arestas, atribuímos uma cor para cada aresta de modo que duas arestas adjacentes não possuam a mesma cor. Diremos sempre “uma” e não “a” coloração.

**Observação 1.5**

Para entendermos a relação desse conceito de coloração de grafos com a atividade a ser aplicada, de coloração de mapas, faz-se necessário estabelecer uma associação entre mapas e grafos, que neste trabalho será da seguinte forma: um mapa  $M$  está associado a um grafo  $G$ , de modo que cada região de  $M$  será um vértice de  $G$ , e cada aresta de  $G$  representa uma fronteira entre duas regiões de  $M$ .

Existem outras formas de relacionar mapas e grafos, dependendo do objetivo do estudo.

**Teorema 1.4: Teorema das quatro cores**

Um grafo planar simples pode ser colorido com 4 cores.

### 1.3.1 Sobre o Teorema das Quatro Cores

Para finalizarmos este capítulo inicial, falaremos um pouco sobre O Teorema das Quatro Cores, que se tornou um dos problemas mais famosos da teoria dos grafos, e teve seu início em 1852, quando Francis Guthrie [7], um estudante de matemática, tentou colorir um mapa dos condados da Inglaterra. Ao realizar essa tarefa aparentemente simples, Guthrie notou algo intrigante: ele conseguiu colorir todo o mapa usando apenas quatro cores, garantindo que nenhum par de condados vizinhos fosse colorido com a mesma cor.

Esse fenômeno despertou o interesse de Guthrie [7], levando-o a conjecturar se esse mesmo padrão poderia ser aplicado a outros mapas, tanto em superfícies planas quanto em superfícies esféricas. A questão central que ele formulou foi: “É possível colorir um mapa de forma que regiões adjacentes tenham cores diferentes, utilizando apenas quatro cores?” Essa simples pergunta desencadeou uma busca intensa por uma resposta matemática sólida, tornando-se um dos problemas mais intrigantes e desafiadores da matemática. Durante décadas, matemáticos de todo o mundo se dedicaram a investigar essa questão, explorando uma variedade de abordagens e técnicas para tentar provar ou refutar o teorema.

Após muitos anos de pesquisa e desenvolvimento de métodos complexos, o Teorema das Quatro Cores finalmente foi demonstrado em 1976 por Kenneth Appel e Wolfgang Haken [1], utilizando técnicas computacionais avançadas. Sua demonstração, embora controversa devido ao uso de computadores para testar um número imenso de casos, estabeleceu que, de fato, é possível colorir qualquer mapa de forma que regiões vizinhas tenham cores distintas usando apenas quatro cores.

Desde então, o Teorema das Quatro Cores tornou-se um marco na história da matemática, destacando a interseção entre a teoria dos grafos, a topologia e a computação. Sua resolução não apenas forneceu uma solução para um problema intrigante, mas também ilustrou o poder da matemática e da tecnologia em resolver questões complexas e fundamentais. Mais detalhes da história do Teorema das Quatro Cores podem ser encontrados em [10].

# Procedimentos metodológicos

---

Neste capítulo apresentaremos os procedimentos metodológicos utilizados no desenvolvimento da pesquisa, desde a busca por referências sobre o assunto em questão até a elaboração e aplicação das atividades.

## 2.1 Pesquisa bibliográfica

As referências que fundamentam este trabalho são fruto de uma pesquisa bibliográfica, que podemos dividir em duas etapas, a saber:

- **Etapa 1:** Das definições e resultados relacionados aos conceitos matemáticos nos quais se baseiam a elaboração e as soluções das atividades.
- **Etapa 2:** De pesquisas anteriores sobre o uso de grafos na Educação Básica.

Na Etapa 1, foram utilizadas as referências [10] e [13]. Destacamos que, após a inserção dos conceitos básicos, íamos fazendo ajustes à medida que pensávamos as atividades, com o objetivo de deixar o trabalho autossuficiente no que diz respeito ao entendimento das soluções dos problemas propostos.

Já na Etapa 2, pudemos perceber a existência de outras dissertações do PROFMAT relacionadas ao tema, e destas utilizamos principalmente: **Um estudo sobre teoria dos grafos e o Teorema das quatro cores** [10], e **Grafos no Ensino Médio: uma inserção possível** [11].

## 2.2 Elaboração e aplicação das atividades

Nesta seção, detalhamos os procedimentos utilizados na elaboração e aplicação das atividades desenvolvidas.

### 2.2.1 Atividade 01 - Grafos Eulerianos

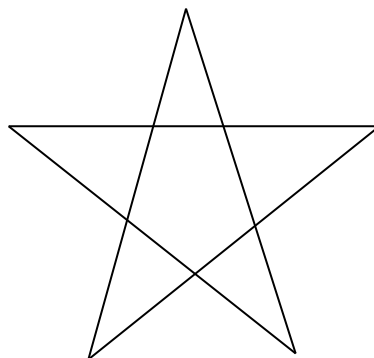
#### Elaboração

Para o desenvolvimento das atividades decidimos iniciar envolvendo grafos eulerianos, que caracterizavam um desafio mais lúdico.

Na busca de construir atividades de grafos a serem aplicadas aos alunos de ensino médio, foram feitas pesquisas para encontrar uma atividade que pudessem ser apresentadas aos alunos na forma mais “recreativa”. Essa atividade deveria ter uma representação instigadora, que ao ser proposta, os alunos tivessem um sensação de desafio em conseguir resolvê-la. Nesse contexto a atividade encontrada, que tem essa característica foi a atividade de sobrepor em forma de linha o grafo indicado e fazer com que os alunos conseguissem fazer essa representação sem perceber o contexto de grafo.

Conforme orientação presente no texto de Sampaio (2002) [13], foi pensado na sugestão de atividades que contemplem a metodologia lúdica de passar o lápis em representações gráficas que podem ser visualizadas como grafos de forma a verificar se o lápis passa sobre a mesma aresta mais de uma vez. Na figura abaixo, é possível aplicar essa situação proposta. Tente traçá-la sem tirar o lápis do papel.

**Figura 2.1:** Situação problema, com traçado de lápis.



**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Uma outra atividade pesquisada foi apresentada no canal do youtube da MathGurl,



<https://www.youtube.com/watch?v=dfgkEYIIIQ4>, **Desafio sem levantar a mão**. Assim com as orientações construímos a atividade a ser aplicada.

## Aplicação

Na turma a ser aplicada, o grau de envolvimento dos alunos nos conteúdos da série que o mesmo estuda, não era considerado bom. Sobre a ótica de habilidades do contexto de desenvolvimento teórico, ou compreensão de tópicos antecedentes, demonstram uma grande dificuldade em desenvolver habilidades matemáticas das competências que deveriam possuir na série em questão. Logo a ideia principal foi levar ao aluno um desafio, que o mesmo visualizassem como um estímulo a ser resolvido, logo, nenhum assunto ou comentário sobre o conteúdo de grafo foi mencionado, fazendo com que o aluno, se comportasse de maneira mais natural para resolver o desafio, sem nenhuma busca de alguma estrutura matemática, utilizando apenas a linha de raciocínio que o aluno possuísse.

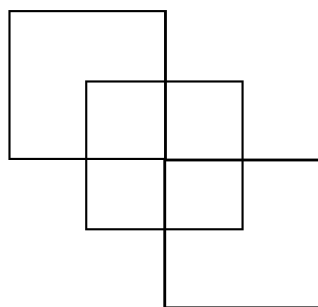
Essa atividade foi aplicada para alunos do 1º ano do ensino médio. Para o momento da aplicação da atividade, foi proposto um tempo de 50 minutos, para que pudessem decorrer para resolver o desafio. Não foi comentando nada sobre o tema grafo, e apenas proposta a situação problema, deixando com que eles desenvolvessem suas habilidades de raciocínio matemático.

Nesta atividade foram propostos quatro desafios: três quadrados, barco, olhos de Saron e Wolverine.

Cada desenho possui uma peculiaridade na sua resolução.

O desenho dos três quadrados (2.2), temos a possibilidade de uma solução euleriano, onde percebemos iniciamos e finalizando a desenho sobre o mesmo vértice.

**Figura 2.2:** Figura dos três quadrados.

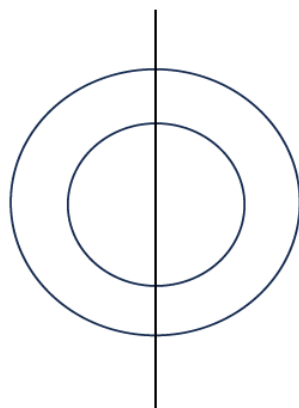


**Fonte:** Elaborado pelo autor.

No desenho Olhos de Saron (2.3), temos a possibilidade de uma solução semi euleriano, iniciamos

em um vértice e finalizamos em outro vértice do desenho.

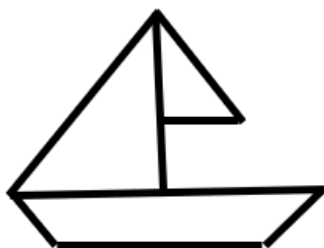
**Figura 2.3:** Figura dos olhos de Saron.



**Fonte:** Elaborado pelo autor.

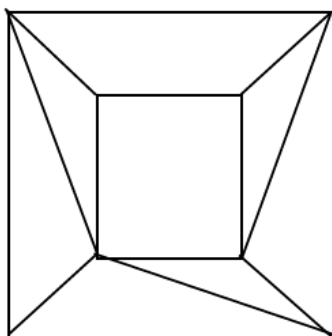
Nos desenhos do barco (2.4) e do Wolverine (2.5), não é possível executar a desafio, pois não existe uma solução, de acordo com as solicitações, devido ao Teorema de Euler.

**Figura 2.4:** Figura do barco.



**Fonte:** Elaborado pelo autor.

**Figura 2.5:** Figura do Wolverine.



**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Após aplicada o desafio lúdico, foi utilizada uma nova aula, para trazer para os alunos uma análise da situação proposta. Foi apresentada aos alunos a definição de grafo, bem como as formações teóricas necessárias sobre grau, caminho euleriano, e a possibilidade de existência destes caminhos, com base no Teorema de Euler. Este momento foi realizado para que os alunos pudessem esclarecer dúvidas das possibilidades dos desenhos na sua execução, de conseguir ou não finalizar o desenho, sobrepondo as linhas, digo, as arestas. Esse passo, feito após o desenvolvimento das atividades, foi necessário para esclarecer como algumas figuras possuíam a sobreposição pedida e para outras não era possível a construção.

## 2.2.2 Atividade 02 - Coloração de Grafos

### Elaboração

Na atividade de coloração de grafos, a idéia principal era investigar o desenvolvimento de habilidades inseridas em situações de coloração, onde o alunos desenvolvem habilidades de decisão e interpretação.

A abordagem de Lima [10] sobre a coloração de mapas com a teoria das cores se faz idealizadora na construção e aplicação destas atividades.

A história da matemática, em especial a do Problema das Quatro cores, é muito interessante, pois dela podemos compreender melhor como surgiram curiosos problemas da matemática, as diferentes estratégias usadas pelos matemáticos em busca de solucioná-los, e os sucessos e “fracassos” que alcançaram no decorrer do tempo.

### Aplicação

Esta segunda atividade foi aplicada em uma turma de 18 anos do 2º ano do ensino médio, no período de recuperação. A atividade teve como objetivo buscar captar habilidades de tomadas de decisões e analisar a compreensão de enunciados, percepção de caminhos diferentes de resolução em situações diversas. Foram aplicadas em duas aulas diferentes, sendo utilizado apenas um período de 30 minutos para execução da situação problema em cada uma das aulas.

Nesta segunda situação, tiveram duas propostas diferentes.

Na primeira proposta, temos a situação da Figura 2.6, e o aluno teve a possibilidade de colorir o mapa com quantas cores quisesse, aplicando a condição de que regiões adjacentes não tivessem a mesma cor.

**Figura 2.6:** Região metropolitana de Goiânia.



**Fonte:** Mapas para colorir, disponível em:

<https://www.mapasparacolorir.com.br/mapa-regiao-metropolitana-de-goiania.php>.

Agora na segunda proposta, temos a situação da Figura 2.7, e aqui o aluno teve duas condições a serem seguidas. Um limite de no máximo 4 cores para utilizar e aplicar a condição de que regiões adjacentes não tenham a mesma cor.

**Figura 2.7:** Região metropolitana de Belo Horizonte.



**Fonte:** Mapas para colorir, disponível em:

<https://www.mapasparacolorir.com.br/mapa-regiao-metropolitana-de-belo-horizonte.php>.

Nesta atividade de coloração de grafos, foi apresentado ao alunos o Teorema das Quatro Cores, para fundamentar a possibilidade da coloração, e ao mesmo tempo dar a eles sentido da essência do pensamento matemático na atividade aparentemente recreativa de colorir um mapa.

# Grafos no ensino de matemática da Educação Básica

---

### 3.1 História dos grafos no ensino de matemática

A introdução histórica dos grafos na matemática destaca não apenas a evolução da teoria, mas o contexto em que a educação matemática se desenvolveu. Compreender esse percurso histórico é importante para contextualizar a atual ênfase na integração dos grafos no ensino de matemática em sala de aula. Este estudo visa investigar como a história dos grafos influenciou o ensino de matemática e como a utilização dessa teoria pode ser aplicada para promover uma compreensão mais profunda e envolvente dos conceitos matemáticos pelos estudantes.

Ao explorar os antecedentes históricos, pretendemos estabelecer uma base teórica para a análise crítica da aplicação dos grafos no contexto educacional contemporâneo. Este capítulo servirá como ponto de partida para a compreensão do papel dos grafos na sala de aula e como sua introdução gradual pode auxiliar a melhorar, de alguma forma, o cenário do ensino de matemática em alguns contextos.

#### 3.1.1 Aplicações iniciais na educação

Embora os grafos tenham se desenvolvido como uma disciplina matemática, suas aplicações na educação foram inicialmente limitadas. Foi somente nas últimas décadas que os educadores começaram a reconhecer o potencial educacional dos grafos.

Desta forma, fica evidente a evolução no reconhecimento e na utilização dos grafos como ferramenta educacional ao longo do tempo. Um fator que caminha junto ao desenvolvimento dessa utilização, que está ligado com o processo ensino aprendido, de acordo com Malta (2008) [11], onde o autor deixa claro esse paralelo.

A mobilização está relacionada com o despertar do desejo no aluno. Ele é quem deve construir os conceitos e para tanto deve querer. Quanto à construção do conhecimento, temos um processo mais complexo que exige que tomemos algumas decisões quanto às teorias de aprendizagem. Precisamos conhecer os fundamentos do nosso objeto de estudo para que possamos proporcionar a construção por parte do aluno. Não basta falar de determinado conceito, é preciso que haja de fato uma vivência que proporciona a apropriação daquele conceito. O processo de elaboração e síntese é constante e constitui-se na apropriação, por parte do sujeito, do conhecimento novo. A elaboração é feita a partir do conhecimento já existente. A síntese se dá quando o sujeito estabelece relações do real com a sua representação. A síntese é sempre provisória.

No entanto, mesmo que essa teoria tenha sido desenvolvida, suas aplicações práticas em ambientes educacionais eram reduzidas. A ênfase tradicional estava mais centrada em métodos de ensino que se concentravam em abordagens mais analíticas e algébricas.

A mudança significativa ocorreu nas últimas décadas, indicando que houve uma transição na percepção dos educadores em relação aos grafos. Professores e pesquisadores começaram a reconhecer o valor pedagógico dessas estruturas visuais e intuitivas. A aplicação dos grafos na educação começou a ser explorada de maneira mais extensiva, aproveitando a representação gráfica para tornar conceitos matemáticos mais acessíveis e compreensíveis para os alunos.

Assim, pudemos perceber pela pesquisa bibliográfica realizada, que ao longo do tempo houve um aumento gradual na conscientização sobre as aplicações educacionais dos grafos, sugerindo uma mudança de paradigma na forma como os educadores abordam o ensino de matemática, incorporando elementos visuais e explorando o potencial dos grafos para melhorar a compreensão e o interesse dos alunos.

### **3.1.2 Era contemporânea, integração dos grafos no ensino**

Um fato a ser observando e também explorado por Toledo e Toledo (1997), e que:

Sem dúvida, o sucesso de um trabalho baseado na resolução de problemas depende do professor. Cabe a ele preparar os alunos para as atividades, estar alerta para situações novas que possam surgir no dia a dia da escola, conhecer os interesses dos estudantes, saber diagnosticar o nível de conhecimento e as habilidades de seus alunos (para nunca propor problemas

muito acima ou abaixo de nível), além, é claro, de envolver-se com as questões propostas. [14]

Observa que ao final do século XX e o início do século XXI testemunharam um aumento significativo no interesse e na pesquisa sobre a integração dos grafos no ensino de matemática. Os avanços na tecnologia da informação facilitaram a visualização e a manipulação de grafos, tornando sua aplicação mais acessível em sala de aula. Além disso, a crescente conscientização sobre a importância do desenvolvimento do pensamento visual e lógico estimulou educadores a explorar abordagens inovadoras, incluindo o uso de grafos.

Sendo observado que o aumento significativo no interesse e na pesquisa sobre a integração dos grafos no ensino de matemática, pode ser atribuído a diversos fatores, incluindo avanços na tecnologia e uma mudança no enfoque pedagógico. A facilidade proporcionada pela tecnologia da informação para visualização e manipulação de grafos contribuiu significativamente para tornar a aplicação dessas estruturas mais acessível em ambientes educacionais.

O livro de Boles (2003) [2] discute as implicações da tecnologia na educação, destacando como ferramentas digitais podem impactar positivamente o ensino e a aprendizagem. No contexto da matemática, o trabalho de Harel e Sowder (2007) [8] explora perspectivas abrangentes sobre o aprendizado e ensino de demonstrações matemáticas, incluindo a importância da visualização. Além disso, a conscientização crescente sobre a importância do desenvolvimento do pensamento visual e lógico também desempenhou um papel fundamental na integração dos grafos no ensino.

Enquanto o livro de Mason, Burton e Stacey (2010) [12] aborda estratégias de ensino que visam desenvolver o pensamento matemático, enfatizando a importância do pensamento visual e lógico. Essa literatura pode ser relacionada a aplicação dos grafos em sala de aula, pois destaca a crescente valorização do pensamento visual na educação matemática.

Portanto, o aumento do interesse na integração dos grafos no ensino de matemática pode ser entendido como uma resposta à convergência de avanços tecnológicos e uma mudança nas perspectivas educacionais em relação ao pensamento visual e lógico.

### **3.1.3 Aplicação de metodologias utilizando grafos no estudo da matemática em sala de aula**

A abordagem de West (2001) [16] sobre a coloração de mapas com a teoria das cores também é pertinente para a conclusão da atividade.

A abordagem visual e intuitiva dos grafos oferece uma maneira única de explorar conceitos matemáticos complexos de forma acessível aos estudantes. A representação gráfica facilita a compreensão de tópicos como circuitos eulerianos, coloração de grafos e muitos outros.

A utilização de grafos em sala de aula não se limita apenas ao ensino de conceitos puramente matemáticos. A abordagem pode ser estendida para envolver problemas do mundo real, estimulando o pensamento crítico e a resolução de problemas. Por exemplo, os estudantes podem modelar redes sociais, sistemas de transporte ou cadeias alimentares utilizando grafos, proporcionando uma aplicação prática e motivadora dos conceitos aprendidos.

A abordagem dada por Gerson e Jefferson (2013), enfatiza uma característica importante que deve ser apresentada dentro da vivenciada na sala de aula.

Considerando as contribuições principais dos dois teóricos apresentados, as atividades relativas às oficinas foram elaboradas considerando que um aluno deve ser estimulado, em relação a um problema, a buscar seus dados, as incógnitas e as condicionantes, além de agir, formular, criar conjecturas, enxergar caminhos. Deve o aluno, igualmente, receber estímulos para buscar situações correlatas, discutir com seus pares, formar validações de seus pensamentos, bem como traçar retrospectivas de suas ações, com vistas a validar continuamente suas formulações. Já o professor deve interferir o mínimo possível no meio, sendo um mediador e trabalhando ao máximo com devolutivas que façam o aluno pensar, formular, concluir, além de institucionalizar um assunto apenas quando as etapas investigativas a cargo dos alunos tiverem sido concluídas.[5]

Diversas metodologias têm sido desenvolvidas para integrar efetivamente os grafos no ambiente educacional. O uso de tecnologias digitais, como softwares interativos, permite que os estudantes manipulem grafos de maneira dinâmica, explorando relações e propriedades de forma mais envolvente. Além disso, abordagens colaborativas e projetos práticos incentivam a aplicação dos conhecimentos adquiridos, promovendo uma aprendizagem mais significativa.

### **3.1.4 Desafios e Perspectivas Futuras**

Apesar dos benefícios evidentes, a implementação efetiva da metodologia dos grafos no ensino de matemática ainda enfrenta desafios. A formação de professores, a disponibilidade de recursos tecnológicos e a necessidade de currículos flexíveis são questões que precisam ser abordadas. No entanto, as perspectivas futuras apontam para uma maior integração dos grafos no ensino de matemática, promovendo uma abordagem inovadora e eficaz para a aprendizagem. Este capítulo busca fornecer uma visão histórica e contextual da aplicação dos grafos em sala de aula, estabelecendo a base para as investigações e reflexões subsequentes.

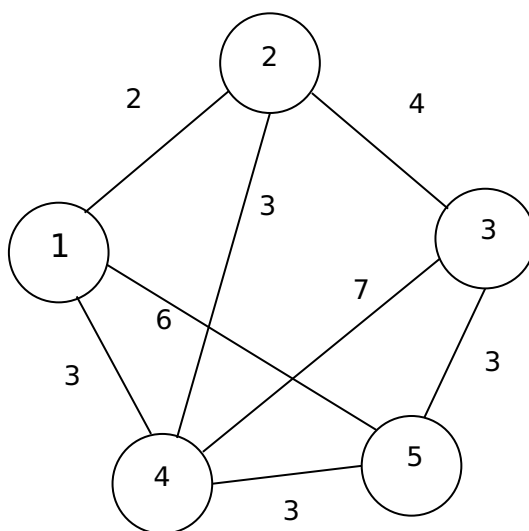


## 3.2 Utilização de grafos na resolução de problemas matemáticos

A teoria dos grafos, com suas representações visuais e estruturas intuitivas, oferece uma abordagem rica para a resolução de uma ampla gama de problemas matemáticos. Neste momento, exploraremos um caso de estudo e estratégias para utilizar os grafos como ferramenta eficaz na resolução de problemas matemáticos complexos.

A primeira etapa para resolver problemas matemáticos com grafos envolve a correta modelagem do problema. Grafos podem ser utilizados para representar relações entre elementos, identificar padrões e estruturar dados. Para ilustrar esse conceito, consideremos o "Problema do Caixeiro Viajante"(PCV), abordado por Lawler (1985) [9].

**Figura 3.1:** Problema do Caixeiro Viajante.



**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Neste problema, um caixeiro deve visitar diversas cidades exatamente uma vez e retornar à cidade de origem, minimizando a distância total percorrida. A Figura 3.1 ilustra a modelagem do PCV utilizando um grafo completo, onde cada vértice representa uma cidade e cada aresta representa uma rota entre duas cidades.

A resolução desse problema, que é um desafio clássico da matemática e ciência da computação, envolve técnicas avançadas de otimização combinatória para encontrar o circuito hamiltoniano de menor custo no grafo. Não entraremos em detalhes técnicos sobre esses conceitos, mas podemos destacar que diversos algoritmos foram desenvolvidos para resolver problemas específicos em grafos. Para o PCV, por exemplo, o algoritmo de vizinho mais próximo e o algoritmo de busca exaustiva são

estratégias comuns. Esses algoritmos exploram as propriedades dos grafos para encontrar soluções ótimas ou aproximadas.

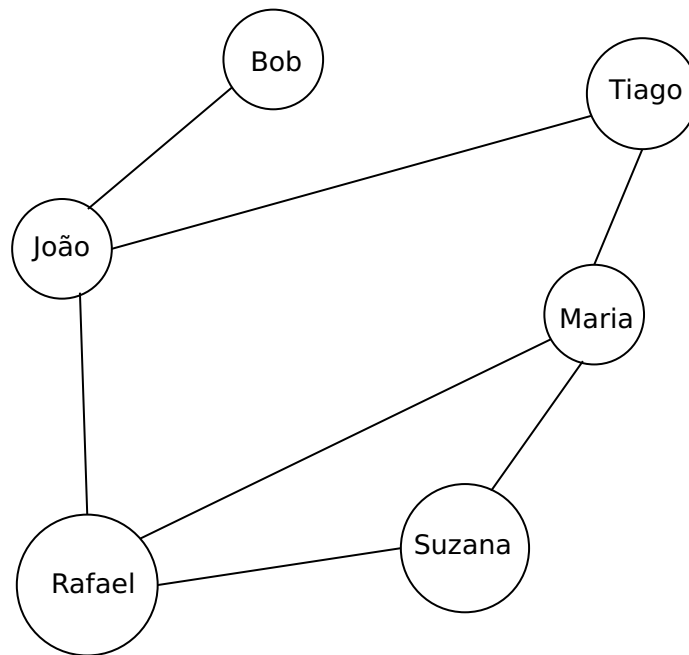
### 3.3 Aplicações interdisciplinares

A versatilidade dos grafos na resolução de problemas não se limita à matemática pura. A abordagem pode ser estendida para problemas em diversas disciplinas, como redes sociais, logística, biologia e ciência da computação.

Um caminho muito utilizado em Matemática, o termo otimização, que refere-se ao estudo de problemas em que se busca minimizar ou maximizar uma função através da escolha de valores de variáveis reais ou inteiras dentro de um conjunto viável, abordado por Anderson e Alexandre (2016) vem mostrar a importância desse estudo, onde se vê a aplicação interdisciplinar.

Por muitas vezes, em sala de aula, os professores de Matemática são questionados pelos alunos quanto à aplicabilidade e necessidade de aprender determinados conceitos matemáticos. Quando falamos em otimização, a Administração, a Engenharia, a Logística, a Biologia, por exemplo, fazem uso de modelos matemáticos para representar problemas e aplicando técnicas matemáticas chegam a resultados e soluções que contribuem para a melhoria de algum sistema relacionado a alguma dessas áreas. O índice de desempenho, o índice de performance e o índice de eficiência são calculados objetivando encontrar uma “solução ótima”, isto é, aquela que resulta no melhor desempenho possível de um sistema, segundo critérios previamente definidos.[15]

A Figura 3.2 apresenta um exemplo de aplicação interdisciplinar, modelando uma rede de interações sociais usando um grafo. No exemplo abaixo, temos a associação de seguidores e seguidos em determinada rede social. Observe que Bob segue João e João segue Bob, Tiago e Rafael. Tiago por sua vez segue João e Maria e não segue Bob. Notemos que a relação de seguir e ser seguido estão representados pelas arestas, e as pessoas estão representadas pelos vértices.

**Figura 3.2:** Rede de interação.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Apesar dos sucessos na aplicação dos grafos na resolução de problemas, desafios persistem, como a complexidade computacional de alguns algoritmos. No entanto, as perspectivas futuras apontam para o desenvolvimento de algoritmos mais eficientes e a expansão contínua das aplicações interdisciplinares dos grafos.

Ainda assim, a teoria dos grafos tem o potencial de enriquecer significativamente o ensino básico em diversas disciplinas. Uma aplicação prática dos grafos poderia ser na resolução de problemas do cotidiano. Por exemplo, ao estudar as redes sociais de uma comunidade, os estudantes podem visualizar conexões entre pessoas, identificar influenciadores e compreender conceitos de centralidade. Isso não apenas tornaria a aprendizagem mais contextualizada, mas também desenvolveria habilidades de pensamento crítico e análise de dados.

### 3.4 Compreendendo a estrutura de grafo no contexto matemático

Um pensamento importante e trabalhado foi que a construção da ideia, definição, estruturação dos conceitos relativos a grafos fosse algo bem natural na associação das idéias de crescimento da conceituação das novas habilidades e estruturação deste conceito. Com isso o desenvolvimento da compreensão de grafos foi algo onde o aluno pudesse perceber a evolução dessa estrutura. Os

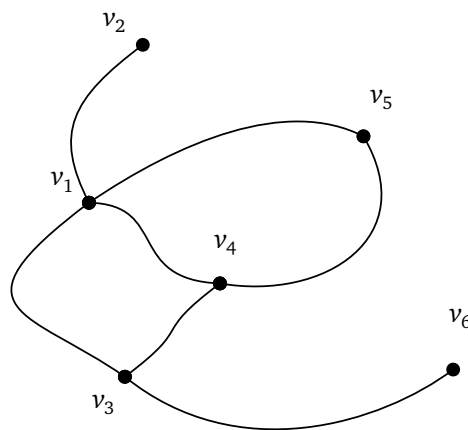
exemplos que veremos fazem parte da construção destas habilidades, de estruturação e aplicação dos teoremas e análises das propriedades bem como a visualização dos elementos. Dessa forma, fica evidente que a análise de um grafo vai muito além da visualização de um desenho, passando pela identificação de vértices e arestas, determinação dos graus, possibilidade de aplicação de teorema de Euler, dentre outras análises.

A seguir exibimos dois exemplos que ilustram o exposto acima.

**Exemplo 3.1**

Considere o grafo  $G$  representado abaixo:

**Figura 3.3:** Grafo: exemplo 2.1.



**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Utilizando a figura acima, vamos analisar algumas situações aplicando a parte teórica vista no Capítulo 01.

*Questão 01)* Se  $G = (V; E)$ , descreva os conjuntos  $V$  e  $G$ .

Temos o conjunto  $V$ , que será descrito por:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\},$$

e o conjunto  $E$ , que será descrito por:

$$E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_1v_6, v_3v_4, v_3v_6, v_4v_5\}.$$

*Questão 02)* Determine o grau de cada vértice de  $G$ . Quantos vértices tem grau ímpar?

Temos deste grafo a seguinte análise:

$$d(v_1) = 4,$$

$$d(v_2) = 1,$$

$$d(v_3) = 3,$$

$$d(v_4) = 3,$$

$$d(v_5) = 2,$$

$$d(v_6) = 1.$$

Fica evidenciado que neste grafo existem 4 vértices que tem grau ímpar.

*Questão 03)* Verifique a validade do Teorema de Euler neste caso.

$$\sum d(v) = 4 + 1 + 3 + 3 + 2 + 1 = 14$$

$$\Rightarrow \sum d(v) = 2 \cdot 7$$

$$\Rightarrow \sum d(v) = 2 \cdot \#E.$$

*Questão 04)* O grafo  $G$  é convexo?

Sim!

*Questão 05)* Quantas são as faces de  $G$ ?

Do Teorema (1.1.1),

$$f - m + n = 2,$$

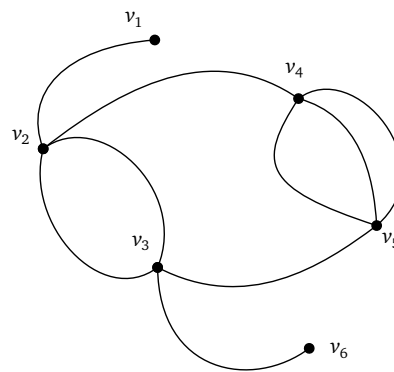
sendo  $f$  o número de faces,  $m$  o número de arestas e  $n$  o número de vértices. Assim, neste exemplo, temos:

$$f - m + n = 2 \Rightarrow f - 7 + 6 = 2 \Rightarrow f = 2.$$

### Exemplo 3.2

Considere o grafo  $G$  representado abaixo:

**Figura 3.4:** Grafo: exemplo 2.2.



**Fonte:** Elaborado pelo autor.

*Questão 01)* Se  $G = (V; E)$ , descreva os conjuntos  $V$  e  $E$ .

Temos o conjunto  $V$ , que será descrito por:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\},$$

e o conjunto  $E$ , que será descrito por:

$$E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_4v_5, v_4v_5, v_3v_6, v_5v_3\}.$$

*Questão 02)* Determine o grau de cada vértice de  $G$ . Quantos vértices tem grau ímpar?

Temos deste grafo a seguinte análise.

$$d(v_1) = 1,$$

$$d(v_2) = 4,$$

$$d(v_3) = 4,$$

$$d(v_4) = 4,$$

$$d(v_5) = 4,$$

$$d(v_6) = 1.$$

Fica evidenciado que este grafo possui 2 vértices que têm grau ímpar.

*Questão 03)* Verifique a validade do Teorema de Euler neste caso.

$$\sum d(v) = 1 + 4 + 4 + 4 + 4 + 1 = 18$$

$$\implies \sum d(v) = 2 \cdot 9$$

$$\implies \sum d(v) = 2 \cdot \#E.$$

Questão 04) O grafo G é convexo?

Sim!

Questão 05) Quantas são as faces de G? Neste caso, temos:

$$f - m + n = 2 \implies f - 9 + 6 = 2 \implies f = 5.$$

Observando os contextos históricos e a evolução da demanda sobre grafos, percebemos que sua utilização se torna cada vez mais uma oportunidade de enriquecimento, tanto como aplicação prática, como no contexto educacional. Isto nós dá uma possibilidade de crescimento pedagógico na utilização dessa ferramenta matemática de muitas possibilidade.

## Atividades desenvolvidas

---

No ensino médio, as atividades envolvendo grafos e o problema das quatro cores proporcionam uma oportunidade para que os estudantes explorem conceitos fundamentais aprendidos nos capítulos anteriores. Grafos, estruturas matemáticas que representam relações entre objetos, permitem visualizar e analisar problemas complexos de forma simplificada e intuitiva. O problema das quatro cores, um dos mais conhecidos na teoria dos grafos, desafia os estudantes a colorir um mapa de modo que países adjacentes recebam cores diferentes, utilizando no máximo quatro cores. Essa atividade não apenas reforça o entendimento de conceitos como vértices, arestas e planaridade, mas promove o desenvolvimento de habilidades de raciocínio crítico e resolução de problemas, essenciais para a matemática e outras disciplinas científicas.

### 4.1 Atividade 01 - Grafos Eulerianos

#### 4.1.1 Descrição e objetivo

O objetivo desta atividade consiste em provocar no estudante uma busca de utilização de raciocínio lógico para identificar grafos eulerianos, semi eulerianos ou não eulerianos, que é: utilizar uma caneta, que deve percorrer a imagem sem ser retirada do papel, de tal maneira que não se sobreponha uma linha sobre a outra.



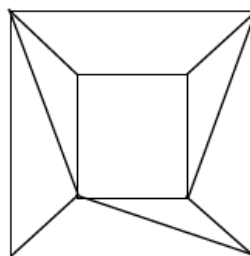
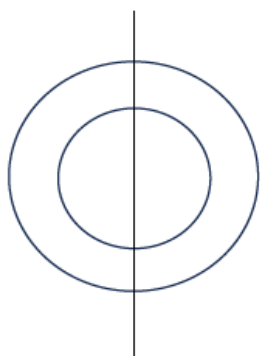
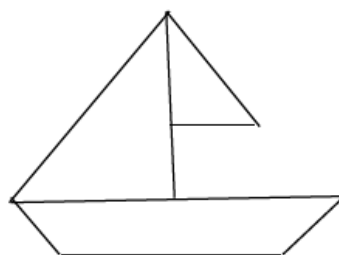
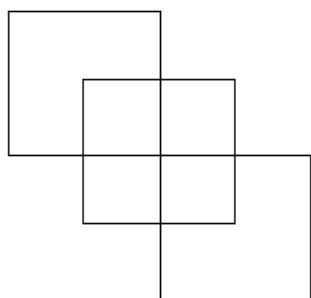
### 4.1.2 Aplicação e análise

Os resultados obtidos nesta aplicação revelaram uma assimilação positiva dos conceitos de grafos pelos estudantes. A abordagem de desenhar figuras sem levantar a caneta proporcionou uma compreensão mais intuitiva das propriedades dos grafos eulerianos, estimulando a visualização das conexões entre os vértices. No entanto, os estudantes não sabiam previamente o que eram os conceitos de grafos que estavam sendo utilizados nesta atividade.

**Figura 4.1:** Atividade sobre grafos eulerianos.

## ATIVIDADE LÚDICA

Desenhar cada figura sem levantar a caneta e sem repetir linhas já desenhadas nas figuras abaixo.



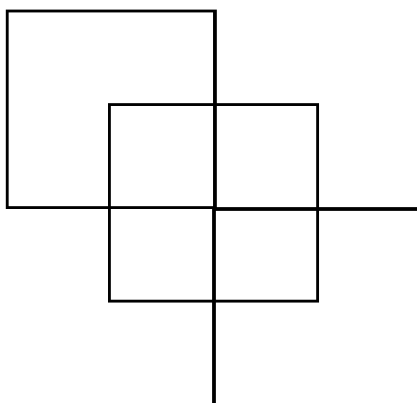
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

A Figura 4.1 mostra um exemplo de uma das fichas aplicadas, onde os estudantes foram desafiados a desenhar uma figura sem levantar a caneta do papel.

A atividade prática envolvendo grafos eulerianos, especificamente a tentativa de desenhar figuras sem levantar a caneta, trouxe percepções significativas sobre a compreensão dos estudantes do ensino médio em relação a conceitos fundamentais de teoria dos grafos. Embora tenha sido observado que alguns alunos encontraram desafios na execução da atividade, essa dificuldade oferece uma oportunidade de reflexão pedagógica.

Vamos analisar a atividade por partes, pois em cada imagem obtivemos uma análise diferente sobre a visão dos estudantes durante a aplicação da atividade lúdica.

**Figura 4.2:** Figura dos três quadrados.



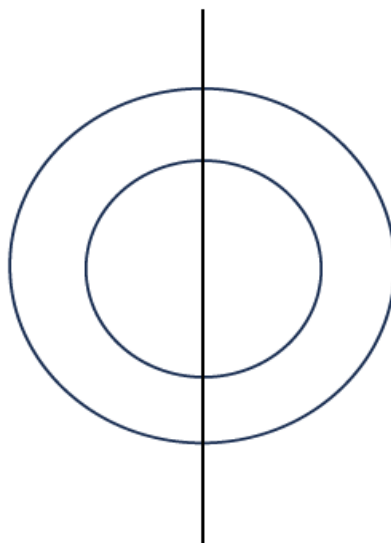
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Na análise da figura dos três quadrados (Figura 4.2), temos o seguinte resultado: 67% dos alunos conseguiram executar a atividade de condução da caneta sobre a imagem, assim este grupo de alunos conseguiram perceber, mesmo que de maneira indireta a existência de um grafo euleriano 33% não conseguiram executar a mesma atividade, que também nos remete a dizer que este grupo não conseguiu visualizar o grafo euleriano, que pode ser visto com uma dificuldade na compreensão da atividade, como um não entendimento do que foi proposto.

Na atividade do olhos de Sharon (Figura 4.3), que é um grafo semi euleriano, que é possível executar o caminho, mesmo que iniciando em um vértice e chegando em outro, ou digo, saindo de um lado e chegando em outro, o resultado obtido foi: 67% dos alunos conseguiram executar a atividade de condução da caneta sobre a imagem, e 33% não conseguiram executar a atividade. Este resultado mostra que os alunos ainda estão compreendendo, mesmo que indiretamente a existência de um grafo, neste caso, um semi euleriano. Que para essa proposta, não é importante saber esta distinção, mas poder executar a atividade. E os que não ainda, não conseguiram visualizar, faz com que pudessemos buscar uma melhor compreensão de quais habilidades ainda não estão claras para este

grupo de alunos.

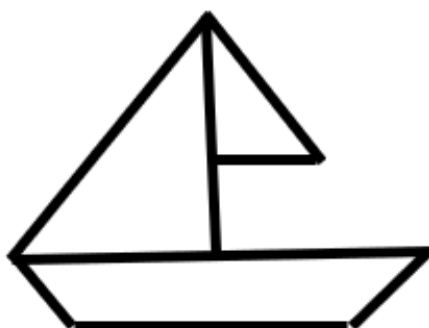
**Figura 4.3:** Olhos de Sharon.



**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Na atividade do barco (Figura 4.4), que não é grafo euleriano ou semi euleriano, houve o inverso dos resultados: 33% dos alunos conseguiram executar a atividade de condução da caneta sobre a imagem, nos mostra que este grupo ainda não compreenderam, mesmo que indiretamente a não existencia de um grafo, neste caso um semi euleriano. E aos 67% não conseguiram executar a atividade, este resultado, faz um paralelo como o resultado do três quadrados, e dos Olhos de Sharon, nos remete aos mesmo número de alunos que compreenderam mesmo que inderetamente o conceito de grafo, percebendo que não era possível a sua construção.

**Figura 4.4:** Figura do barco.

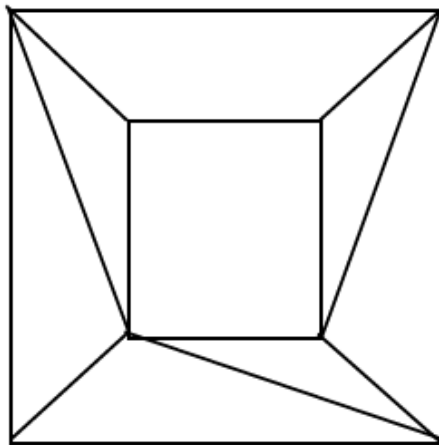


**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Na atividade do Wolverine (Figura 4.5), que também não é um grafo euleriano ou semi euleriano, tivemos o resultado: 31% dos alunos conseguiram executar a atividade de condução da caneta sobre

a imagem, e 69% não conseguiram executar a atividade. A disparidade nos resultados, destaca a variedade de habilidades e abordagens de aprendizado dos estudantes. Que podemos supor que na durante a execução da própria atividade, o alunos vai compreendendo melhor, que seja na observação ou no próprio raciocínio aplicado, uma certa evolução na compreensão do que executar. Essa diferença pode ser influenciada por fatores como a falta de familiaridade com a temática de grafos, as habilidades motoras e o grau de engajamento dos estudantes na atividade.

**Figura 4.5:** Wolverine.



**Fonte:** Elaborado pelo autor.

A análise destes resultados podem oferecer oportunidades para intervenção pedagógica, permitindo a adaptação da abordagem de ensino, fornecendo suporte aos estudantes que não conseguiram desenvolver a atividade adequadamente.

Podemos ter diferentes interpretações destes resultados, e é importante analisar o contexto e os fatores que podem ter influenciado. Uma possível interpretação do nível de dificuldade considerável para a maioria dos estudantes, pode ser devido à falta de motricidade. A habilidade de conduzir a caneta sobre a imagem pode exigir coordenação motora fina, atenção aos detalhes e compreensão espacial. Estudantes com diferentes estilos de aprendizagem, podem ter sido expostos às mesmas atividades durante a formação inicial. Além disso, outra hipótese é que os estudantes não "pensaram matematicamente", e isso pode refletir a diversidade de habilidades e experiências dos estudantes. Alguns podem ter sido expostos a um número maior de atividades que envolvem este tipo de raciocínio, enquanto outros podem não ter desenvolvido essas habilidades no ensino fundamental.

### 4.1.3 Considerações sobre a atividade

Como mencionado por Euler em sua obra clássica, “O método mais eficaz para estudar a geometria é começar com os problemas que são mais simples e mais facilmente compreendidos, e avançar, passo a passo, até os mais complexos” [4].

A dificuldade encontrada pelos estudantes pode refletir o processo de enfrentar desafios graduais na compreensão de conceitos matemáticos mais complexos. Além disso, a teoria dos grafos e o conceito de caminhos eulerianos têm aplicações práticas extensas, não apenas em matemática, mas em diversas disciplinas, incluindo ciência da computação e logística. Como mencionado por Bondy e Murty (2008) [3], “a teoria dos grafos tem uma profunda e rica interação com muitas áreas de matemática e de outras disciplinas”.

A dificuldade enfrentada pelos estudantes ao desenharem figuras sem levantar o lápis pode ser interpretada como uma oportunidade de aprendizado. Essa experiência pode estimular a curiosidade, motivando os estudantes a explorarem conceitos mais aprofundados e a aprimorarem suas habilidades de resolução de problemas.

Em suma, a dificuldade encontrada pelos alunos na atividade prática não deve ser considerada uma barreira, mas sim uma oportunidade de aprimoramento. A teoria dos grafos, com sua rica interação entre conceitos, oferece um terreno fértil para a exploração, e os desafios encontrados pelos estudantes podem servir como catalisadores para uma compreensão mais profunda e duradoura dos princípios matemáticos fundamentais.

### Competências trabalhadas

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [6] define as aprendizagens essenciais para todos os alunos na Educação Básica, e nesse sentido a teoria dos grafos pode ser uma excelente ferramenta para desenvolver competências específicas de matemática para o ensino fundamental. Entre essas competências, destaca-se a Competência 05 da BNCC para o Ensino Fundamental, que pode ser assim enunciada: “utilização de processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais, para modelar e resolver problemas cotidianos e de outras áreas do conhecimento, além de validar estratégias e resultados”[6]. Também é importante enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, expressar respostas e sintetizar conclusões utilizando diferentes registros e linguagens, como gráficos, tabelas e algoritmos, como fluxogramas e dados (Competência 06).

Esta experimentação oferece uma alternativa para trabalhar a teoria dos grafos com base no en-

sino por investigação. Durante a construção dessa experimentação, surgiram peculiaridades que validaram a inserção do ensino por investigação em sala de aula. Quando propusemos esta atividade, inicialmente focamos em problemas de forma lúdica. No entanto, ao aplicar a proposta, percebemos a viabilidade de incluir o estudo de Grafos Eulerianos.

## 4.2 Atividade 02 - Teorema das quatro cores

### 4.2.1 Descrição e objetivo

Nesta Atividade 02, temos outro universo de pesquisa, sendo 18 alunos da 2ª série do ensino médio. Ela foi dividida em dois desafios: Desafio 01 representado pela Figura 4.6, o aluno teve a possibilidade de colorir o mapa com quantos cores quiser, aplicando a condição de que regiões adjacentes, não tenham a mesma cor, para colorir o mapa da Região Metropolitana de Goiânia; Desafio 02 composto pela Mapa da Região Metropolitana de Belo Horizonte, o aluno teve duas condições a serem seguidas, um limite de no máximo 4 cores para utilizar e aplicar a condição de que regiões adjacentes não tenham a mesma cor, conforme Figura 4.7.

**Figura 4.6:** Região metropolitana de Goiânia.



**Fonte:** Mapas para colorir, disponível em:

<https://www.mapasparacolorir.com.br/mapa-regiao-metropolitana-de-goiania.php>.



afirmar que conseguiram a coloração com quatro cores, mas enfrentaram dificuldades na segunda etapa, ressalta a necessidade de uma compreensão mais profunda dos conceitos subjacentes à teoria das cores.

Durante a aplicação da atividade relacionada ao Teorema das Quatro Cores, se observou uma disparidade na percepção e execução por parte dos estudantes. Notadamente, durante a análise das atividades, foi identificado que, em um dos mapas (distrito de Belo Horizonte), surgiram desafios decorrentes da presença de regiões com mais de um limite adjacente a outro território. Esta complexidade influenciou a maneira como os estudantes abordaram o posicionamento das cores, requisitado nas outras atividades propostas.

### 4.2.3 Considerações sobre a atividade

Ao analisar as representações cognitivas apresentadas pelos estudantes, se tornou evidente que a percepção deles está intrinsecamente relacionada à habilidade de conjecturar e compreender os parâmetros matemáticos da situação proposta. Isso nos fornece uma indicação de que tal habilidade possivelmente não foi completamente desenvolvida pelos estudantes, podendo ser atribuída à falta de exposição a essa forma de expressão das habilidades matemáticas, assim como à abordagem pedagógica utilizada na sala de aula para os conteúdos programáticos do ensino fundamental.

Outro aspecto a ser destacado é que os 18 alunos envolvidos nessa atividade são estudantes que enfrentam dificuldades nos conteúdos programáticos ao longo do ano letivo, todos estando em processo de recuperação final. Apesar disso, a aplicação do Teorema das Quatro Cores, ou seja, a atividade de colorir, foi amplamente realizada por todos, embora tenha havido variações na qualidade do estilo de colorir e na precisão da coloração da atividade. Este fato indica que, mesmo estudantes com dificuldades na assimilação de habilidades expressas de forma matemática, têm a capacidade de se organizar e apresentar soluções para problemas que envolvem compreensão básica de comandos, dada a natureza de estudantes da 2ª série do ensino médio.

A análise dos posicionamentos dos estudantes revelou dificuldades em expressar ideias de caracterização matemática que não envolvam representações numéricas. Esta lacuna pode ser percebida nos desenvolvimentos dos conteúdos programáticos em sala de aula, onde os professores frequentemente se limitam à apresentação de estruturas numéricas, leis de formação, linguagem simbólica, entre outros, deixando de lado a ênfase na expressão de ideias, conjecturas e devoluções orais sobre o entendimento e exemplificação das situações vivenciadas pelos estudantes. Essa observação ressalta a necessidade de uma abordagem pedagógica mais abrangente, que inclua o desenvolvimento



da capacidade de expressão matemática em contextos diversos.

A abordagem de West (2001) [16] sobre a coloração de mapas com a teoria das cores também é pertinente para a conclusão da atividade:

Embora o Teorema das Quatro Cores forneça uma solução eficaz e simples para a coloração de mapas, ele também destaca a complexidade subjacente da teoria dos grafos, evidenciando que, mesmo em problemas aparentemente simples, surgem questões intrigantes e desafiadoras.

A experiência dos estudantes ressalta a importância de não subestimar a complexidade dos conceitos de teoria dos grafos e da coloração de mapas. A atividade ofereceu uma oportunidade para os alunos explorarem a teoria de forma prática, revelando as nuances e desafios associados à aplicação efetiva dos conceitos estudados.

Ao considerar as dificuldades enfrentadas pelos estudantes na segunda etapa da atividade, é evidente que a compreensão da teoria das cores vai além da simples aplicação de regras, exigindo uma análise cuidadosa das relações entre as regiões do mapa. Isso ressalta a importância de abordagens pedagógicas que incentivem a investigação, a experimentação e a reflexão para fortalecer a compreensão dos alunos sobre conceitos matemáticos complexos, como a teoria dos grafos e a coloração de mapas.

Em síntese, a atividade prática com a Teoria das Quatro Cores destacou não apenas a aplicação efetiva do teorema, mas também a importância de considerar a complexidade subjacente e os desafios envolvidos na coloração de mapas. Essa experiência proporcionou aos estudantes uma visão ampla e contextualizada dos conceitos estudados, contribuindo para uma compreensão mais significativa e duradoura da teoria dos grafos. Bem como relacionar a diversidade de contextos matemáticos que pode ser abrangido nas aplicações das atividades de grafo.

### Habilidades trabalhadas

A segunda atividade mostra, de forma integradora, que a Teoria dos Grafos nas atividades escolares é importante para o desenvolvimento de algumas habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [6]. A habilidade EF07MA06, por exemplo, mesmo sendo do ensino fundamental, sendo ela uma habilidade que o aluno deve trazer com uma amplitude de compreensão no ensino médio, enfatiza a importância de reconhecer que a solução de problemas com estruturas semelhantes pode ser alcançada através de procedimentos comuns. Quando os alunos trabalham com a Teoria dos

Grafos, eles não só aprendem a resolver problemas específicos, mas também a identificar padrões e aplicar soluções generalizadas.

A aplicação da segunda atividade com os alunos do ensino médio mostra que algumas vezes é comum subestimar a necessidade de desenvolver certas habilidades, acreditando que os alunos já possuem essas capacidades. Contudo, essa suposição pode ser equivocada.

A Teoria dos Grafos é uma ferramenta valiosa para avaliar e fortalecer o raciocínio lógico e as habilidades procedimentais dos alunos. Ela oferece um método eficaz para diagnosticar e aprimorar essas competências, e por isso é um importante dispositivo que os professores podem utilizar e incorporar em suas práticas pedagógicas, pois ao fazê-lo, eles não apenas promovem o desenvolvimento das habilidades matemáticas dos alunos, mas também garantem uma abordagem diagnóstica e estruturada para o progresso educacional.

### CONSIDERAÇÕES FINAIS

---

A pesquisa investigou a questão: “Que vantagens existem em utilizar os grafos na Educação Básica?” e procurou responder através das aplicação de atividades envolvendo caminhos eulerianos e o Teorema das Quatro Cores, entre outros conceitos.

Esta investigação, fundamentada na pesquisa ação e participativa, demonstrou que o uso dos grafos na sala de aula pode ser enriquecedor. A abordagem diferenciada em relação aos métodos atuais, que envolveu desenhos práticos e atividades de coloração, proporcionou uma compreensão dos conceitos de grafos entre os estudantes do ensino médio. Os resultados positivos e o feedback encorajador destacam a viabilidade e a importância de integrar abordagens práticas no ensino de matemática, promovendo uma aprendizagem mais envolvente e significativa. Dessa forma, recomenda-se que estratégias semelhantes sejam incorporadas em ambientes educacionais, promovendo uma compreensão mais profunda e duradoura dos conceitos de grafos e suas aplicações em problemas matemáticos do cotidiano.

Apesar de a teoria dos grafos ser intrinsecamente lúdica e, muitas vezes, intuitiva, sua ausência no cotidiano da sala de aula pode ser atribuída a diversos fatores. Em primeiro lugar, a falta de familiaridade e compreensão dos educadores sobre a abordagem lúdica dos grafos que pode desempenhar um papel importante no ensino. Muitos professores podem não ter sido expostos a métodos de ensino que integram a teoria dos grafos de maneira eficaz durante sua formação acadêmica.

Além disso, o currículo tradicional muitas vezes enfatiza métodos de ensino mais convencionais e analíticos, deixando pouco espaço para a exploração de abordagens mais visuais e interativas, como os grafos. A resistência à mudança, a falta de recursos adequados e a pressão por cobrir um extenso conteúdo programático podem contribuir para a exclusão da teoria dos grafos nas salas de aula.

A inclusão da teoria dos grafos pode estimular o interesse dos alunos pela matemática, uma vez que fornece uma abordagem visual e concreta para conceitos abstratos. Ao utilizar atividades práticas, como desenhos de grafos ou jogos que envolvem estruturas gráficas, os alunos podem desenvolver uma compreensão mais sólida e intuitiva dos conceitos matemáticos, tornando a aprendizagem mais envolvente e acessível.

Percebe-se, durante todo o trabalho, a necessidade da base teórica utilizada, para comprovação das informações discutidas e ainda como fonte de conhecimento explorada para enriquecer o planejamento das atividades desenvolvidas na pesquisa, tornando o processo de estruturação do texto facilitado e acessível.

Embora os grafos não sejam um conteúdo obrigatório para a Educação Básica, o contato com essa abstração matemática contribui para que o aluno desenvolva a capacidade de explorar e experimentar novos conhecimentos. Portanto, acreditamos ser relevante a discussão e proposição de estruturas sobre o tema. A importância crescente do conhecimento matemático, incluindo abstrações matemáticas, leva-nos a refletir que o tema grafos poderia integrar a realidade da Educação Básica. A exploração e experimentação desse assunto incentivam os alunos a pensar a matemática de maneira consonante com o raciocínio lógico e crítico.

Finalmente, espera-se que momentos vivenciados em uma proposta de ensino por investigação sejam a porta de entrada para uma perspectiva de matemática integrada, onde os alunos tenham a oportunidade de explorar atividades que fomentem o diálogo entre diferentes aspectos da matemática. Isso imita o trabalho de um matemático profissional, que, ao abordar um problema, não vê suas ferramentas de forma isolada.

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] APPEL, Kenneth e HAKEN, Wolfgang. **Every Planar Map is Four Colorable**. Vol. 98. Contemporary Mathematics. American Mathematical Society, 1989. DOI: <https://doi.org/10.1090/conm/098> (citado na página 17).
- [2] BOLES, Edwin L. **Tecnologia e Educação: Questões de Administração, Políticas e Aplicações em Escolas K12**. Publicação da Era da Informação, 2003 (citado na página 26).
- [3] BONDY, John Adrian e MURTY, Uppaluri Siva Ramachandra. **Graph Theory**. Springer, 2008. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-84628-970-5> (citado na página 40).
- [4] CALINGER, Ronald. **Leonhard Euler: Mathematical Genius in the Enlightenment**. Princeton University Press, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1515/9781400866632> (citado nas páginas 3, 40).
- [5] DE OLIVEIRA, GERSON PASTRE e PÉZETA, JEFFERSON RICART. “Resolução de problemas em contextos de ensino de Matemática: uma abordagem por meio da Teoria dos Grafos”. Em: () (citado na página 27).
- [6] EDUCAÇÃO, Brasil. Ministério da. **Base Nacional Comum Curricular**. Acesso em: 19 outubro 2023. 2018. URL: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf) (citado nas páginas 40, 44).
- [7] GUTHRIE, Francis. **A Study on the Four Color Problem**. 1852 (citado na página 17).
- [8] HAREL, Guershon e SOWDER, Larry. **Advanced Mathematical Thinking**. Springer, 2007 (citado na página 26).
- [9] LAWLER, Eugene Leighton et al. **The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization**. John Wiley & Sons, 1985 (citado na página 28).
- [10] LIMA, Carlos Laércio Gomes de. “Um estudo sobre teoria dos grafos e o Teorema das quatro cores”. Dissertação de Mestrado. Instituto de Ciências Matemáticas de Computação, Universidade de São Paulo, 2016 (citado nas páginas 4, 17, 18, 22).

- [11] MALTA, Gláucia Helena Sarmiento. “**Grafos no Ensino Médio: uma inserção possível**”. Em: (2008) (citado nas páginas [18](#), [25](#)).
- [12] MASON, John, BURTON, Leone e STACEY, Kaye. **Mathematics teaching and learning in K-12: Equity and professional development**. Springer, 2010 (citado na página [26](#)).
- [13] SAMPAIO, João Carlos V. “**Passeios de Euler e as pontes de Königsberg**”. Em: **Disponível em <http://www.dm.ufscar.br/sampaio/PasseiosdeEuler.pdf>, acesso em 10 de junho de 2024** (2002) (citado nas páginas [4](#), [16](#), [18](#), [19](#)).
- [14] TOLEDO, Marília e TOLEDO, Mauro. **Didática da Matemática: como dois e dois: a construção da matemática**. FTD, 1997 (citado nas páginas [1](#), [26](#)).
- [15] VIANA, Anderson Oliveira e ALMEIDA, Alexandre Celestino Leite. **Algoritmos em Grafos e o Problema do Caixeiro Viajante: uma abordagem no Ensino Médio utilizando planilhas eletrônicas**. 2014 (citado na página [29](#)).
- [16] WEST, Douglas Brent. **Introduction to Graph Theory**. 2nd. Prentice Hall, 2001 (citado nas páginas [26](#), [44](#)).
- [17] WILSON, Robin J. **Introduction to Graph Theory**. Pearson Education, 2002 (citado na página [42](#)).