

Universidade Federal de Uberlândia

ICENP Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal

Curso de Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso

Teorema das Quatro Cores e Aplicações na Educação Básica

por

Matheus Henrique Silva do Nascimento †

Licenciatura em Matemática - Ituiutaba - MG

Orientadora: Profa. Dra. Evaneide Alves Carneiro

Teorema das Quatro Cores e Aplicações na Educação Básica

Este exemplar corresponde à redação final da Monografia devidamente corrigida e defendida por **Matheus Henrique Silva do Nascimento** e aprovada pela comissão julgadora.

Ituiutaba, 23 de novembro de 2023.

Prof. Dra. Evaneide Alves Carneiro

Banca examinadora:

Prof. Dra. Cristiane Coppe de Oliveira.

Prof. Dra. Evaneide Alves Carneiro.

Prof. Dr. Wallisom da Silva Rosa.

Monografia apresentada ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal, UFU como requisito parcial para obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Agradeço de todo coração:

À minha família

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por todas as oportunidades que me foram dadas, e pela força para enfrentar as adversidades da vida. Meus mais sinceros agradecimentos a toda minha família, em especial minha mãe Valdeí, que moveu céus e terras para que eu pudesse chegar onde estou hoje, e que sempre me apoiou em tudo que me propus a fazer. A meu pai José Henrique, que me incentiva a correr atrás dos meus sonhos, e me ensinou que nada na vida vem fácil, mesmo distante, em distância, se fazia presente de diversas maneiras, me animando e sonhando meus sonhos. A meu irmão, que como este trabalho, fez diferença nos meus dias. A minha Luna, que me aguentou explicando cada página desse TCC por quase um ano, e mesmo assim não desistiu de mim, muito obrigado por todo apoio, incentivo, e auxílio que me concedeu nos dias tristes e felizes, Amo você. Agradeço a todos que de forma direta ou indireta fizeram parte dessa minha jornada como: companheiros de casa e de turma, professores, funcionários da universidade, familiares mais distantes, Pró-Reitoria de Assistência Estudantil, e a FAPEMIG, pois sem eles não conseguiria permanecer no curso, muito menos completar essa tão bela jornada. Agradeço a uma companheira especial que fez o processo da graduação ficar mais leve e descontraído, “valeu Cleitin!(Brenda)”. Por fim, mas não menos importante, um gigantesco agradecimento à minha orientadora Evaneide Alves Carneiro, por ter topado a ideia de uma iniciação científica que originou este trabalho, por toda atenção, dedicação, e todo esforço que ela desempenhou. Obrigado Eva!.

RESUMO

Neste trabalho, fizemos um estudo sobre a Teoria dos Grafos, abordando a coloração de vértices associada a mapas, enunciamos e demonstramos o Teorema das Cinco Cores, e apresentamos a história do surgimento do Teorema das Quatro Cores junto à ideia de sua demonstração, e ainda, tentamos desvendar o porquê desses conteúdos não serem utilizados ou apresentados nos ambientes de escolarização básica.

Inicialmente são evidenciadas as motivações para a elaboração dessa pesquisa, e ainda, um pouco sobre o surgimento da ideia. Após, trabalhadas as principais definições, lemas, teoremas e demonstrações necessárias para compreensão do tema. Durante todo o texto fez-se uso, quando possível, de figuras, com o objetivo de tornar a compreensão facilitada.

A partir disso, é apresentada a história do surgimento do Problema das Quatro Cores, seu longo período de demonstração, e os indivíduos envolvidos nesse processo, além dos benefícios vindos de sua prova. São discutidas também as melhorias alcançadas em sua demonstração, obtidas ao longo dos anos com o desenvolvimento da tecnologia e da descoberta de configurações redundantes.

Para aprofundar mais no tema, mergulhamos na contraprova obtida sobre uma das demonstrações falhas do teorema, e analisamos o quanto essa falha foi benéfica para o desenvolvimento da prova final, junto a diversas contribuições para a matemática e outros ramos da ciência.

A seguir, com todas as informações estudadas, foi elaborado um plano de aula envolvendo a coloração de mapas e a teoria dos grafos, que após ser aplicado, durante o

estágio supervisionado, em uma aula do 1º ano do ensino médio foi analisado levando em consideração toda experiência vivenciada, sendo o primeiro contato dos alunos com o assunto.

Por fim, é exposta a resposta obtida até então para a indagação feita inicialmente, de acordo com as vivências e discussões presenciadas, trazendo apontamentos sobre cada um dos capítulos apresentados, junto ao fechamento das ideias discutidas.

CONTEÚDO

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Introdução	1
Objetivo	3
Estrutura dos Tópicos Apresentados	3
1 Definições e resultados básicos	4
1.1 Introdução	4
1.1.1 A relação entre Mapas e Grafos	7
1.1.2 Demonstração do Teorema das Cinco Cores	8
1.1.3 A primeira prova do Teorema das Quatro Cores	11
2 Teorema das 5 cores	17
2.1 História	17
2.2 Demonstração	18
2.2.1 Considerações	22
3 Teorema das Quatro Cores e sua História	23
3.1 Sobre a História da Matemática	24
3.1.1 O Surgimento do Problema	24
3.2 Observações históricas sobre a demonstração do Teorema das Quatro Cores	27
3.2.1 Melhorias posteriores	30

3.3	A idéia da demonstração do Teorema das Quatro Cores	31
3.3.1	Considerações	32
4	Atividades Propostas	34
4.1	Coloração de Mapas	34
4.1.1	Justificativa	34
4.1.2	Observações	34
4.1.3	Descrição da Atividade	35
4.1.4	Avaliação	36
4.1.5	Sugestões de problemas	36
4.2	Análise da atividade Coloração de Mapas	36
4.2.1	Sobre as Etapas e Momentos	37
4.2.2	Conclusão	41
4.3	Inter-Grafos	42
4.3.1	Justificativa	42
4.3.2	Observações	42
4.3.3	Descrição da Atividade	43
4.3.4	Avaliação	44
4.3.5	Sugestões de problemas	45
4.3.6	Exemplo da atividade	45
5	Considerações Finais	47
	Bibliografia	50
	Índice Remissivo	52

Introdução

Desde os primórdios a busca pelo conhecimento é acompanhada de desafios que movimentam as engrenagens do saber e aprender, muitas vezes desencadeando acontecimentos imprevisíveis, divertidos e elegantes. Este trabalho parte de uma curiosidade despertada durante as aulas de graduação em licenciatura matemática da Universidade Federal de Uberlândia - Campus Pontal (cidade de Ituiutaba), onde, na disciplina de Matemática Finita, 6º período no segundo semestre de 2020, foi abordado nos últimos dias letivos, um conteúdo singular e inédito para mim até então.

O assunto apresentado foi a Teoria dos Grafos, junto ao problema do carteiro viajante e das pontes de Königsberg. Fácil de compreender, lúdico, e uma boa didática: foram esses os pontos que me motivaram a pesquisar um pouco mais sobre o assunto que havia aguardado 22 anos para conhecer. Durante a única aula em que essa teoria foi abordada ficou nítida sua relevância e utilidade para os dias atuais, onde a sociedade é movida pela otimização e resolução de problemas, e ao mesmo tempo surge a inquietação: “Dada sua importância e aplicabilidade, porque essa teoria não é amplamente conhecida ou utilizada?”.

Partindo disso, realizei diversas pesquisas e anotações sobre a temática, busquei informações com a professora da disciplina citada, e formulei uma ideia na qual gostaria de trabalhar, o intuito era encontrar um tema e objetivo digno de se tornar uma iniciação científica. Após alterações, discussões e alinhamentos surge então o elemento principal da pesquisa, o Teorema das Quatro Cores, apresentado a mim na época pela atual orientadora deste trabalho, Evaneide Alves Carneiro.

Com isso, o plano era desenvolver uma pesquisa na qual nós iríamos nos aprofundar no tema e apresentaríamos somente as informações encontradas, mas devido ao fato de

eu estar sempre envolvido com projetos de iniciação à docência como PIBID e Residência pedagógica, e minha orientadora ser adepta a aceitar desafios, fizemos uma mudança em nossa questão norteadora que ficou a seguinte: “Dada sua importância e aplicabilidade, porque o Teorema das Quatro Cores e a Teoria dos Grafos não são amplamente conhecidos, utilizados ou ao menos apresentados nos ambientes de escolarização básica?” Com essa questão em mente, tornou-se possível ramificar e selecionar os caminhos a serem tomados rumo a uma resposta.

No primeiro passo, são abordadas as definições e conceitos básicos necessários à compreensão dos assuntos tratados em todo o texto, um apanhado de informações que tem por objetivo instruir o leitor. Buscamos utilizar uma linguagem clara, objetiva e simples quando possível, para abranger diferentes tipos de públicos, proporcionando assim a disseminação do tema e gerando uma facilidade na compreensão.

O segundo passo foi pensado para ambientar e apresentar o tema principal do trabalho, o Teorema das Quatro Cores. É nele onde são contadas as histórias mais conhecidas que envolvem esse teorema, e um pouco sobre os 124 anos percorridos até a prova de sua veracidade, e ainda, algumas curiosidades sobre a contribuição deste teorema mesmo antes de sua demonstração.

Já no terceiro passo voltamos nosso olhar para uma peça muito importante na construção da demonstração do teorema das quatro cores, conheceremos os conceitos e métodos que influenciaram ou não nessa prova, exemplificando ideias por meio de grafos e coloração de vértices para que seja possível uma visualização das concepções discutidas na época. Vale apontar que estamos falando do Teorema das Cinco Cores, o qual foi provado a partir de uma tentativa falha de demonstrar o Teorema das Quatro Cores.

O quarto passo traz a junção dos passos anteriores de forma a condensar as informações e conceitos assimilados em uma proposta de atividade que seguiu diversos processos, sendo eles: idealização, planejamento, aplicação e análise, para que fosse possível verificar a fundo a relevância desse estudo e significância diante do público alvo, que foram alunos do ensino básico.

E por fim a chegada, onde é evidenciada a resposta obtida até o momento da finalização deste trabalho, pois como tudo na vida e ainda mais, o conhecimento evolui, estudos progridem, respostas são refutadas ou melhoradas, e acima de tudo se fortalecem com novos dados quando devidamente continuadas.

Objetivo

O objetivo deste trabalho é fazer um estudo mais detalhado e aprofundado sobre o Teorema das Quatro Cores e a Teoria dos Grafos, enquanto tentamos desvendar possíveis motivos para esses conteúdos não serem utilizados ou ao menos apresentados nos ambientes de escolarização básica.

Estrutura dos Tópicos Apresentados

O presente trabalho está dividido da seguinte maneira:

- No capítulo 1, são apresentadas as definições e resultados básicos necessários para a compreensão dos termos e conceitos utilizados durante todo o trabalho. Dentre eles destaca-se o Teorema de Euler que foi um teorema chave para a demonstração do teorema principal.
- No capítulo 2, Contamos um pouco sobre o Teorema das Cinco Cores, o qual surge de uma demonstração falha do Teorema das Quatro Cores, porém ainda carrega consigo ideias e contribuições importantes, e mostra que há fracassos que vêm para nos impulsionar.
- No capítulo 3, é apresentado enfim o Teorema das Quatro Cores e sua História, desde sua conjectura até sua prova, passando pelos principais envolvidos nesse processo de tentativa de comprovação e trazendo a ideia da demonstração de maneira objetiva e sucinta, comparada à prova original.
- No capítulo 4, Atividades Propostas, é exposto um plano de aula que tem como base a coloração de mapas e grafos, e que foi aplicado em uma turma de 1º ano do ensino médio. Trazemos também uma análise baseada em toda a experiência vivenciada, que serviu como apoio para a argumentação da resposta elaborada para atingir o nosso objetivo.
- No capítulo 5, Considerações Finais, expomos um apanhado de considerações sobre cada capítulo individualmente, e por fim, a resposta obtida até a finalização deste trabalho.

CAPÍTULO 1

Definições e resultados básicos

Nesta seção apresentamos as definições e resultados necessários para enunciarmos e demonstrarmos o resultado principal. Estas e outras definições básicas podem ser encontradas na referência [9]. Durante todo o texto, o símbolo $\#A$ representa a cardinalidade do conjunto A .

1.1 Introdução

Definição 1. • *Um grafo é um par ordenado $G = (V; E)$ formado por um conjunto não vazio V , cujos elementos são chamados de vértices e um conjunto E cujos elementos são pares não ordenados de vértices e são chamados de arestas.*

- *Os dois vértices que correspondem a uma aresta são chamados de extremidades da aresta, e neste caso dizemos que os vértices são adjacentes.*
- *Uma aresta em que as duas extremidades são iguais é chamada de laço.*
- *Quando cada par de vértices de um grafo corresponde a no máximo uma aresta e o grafo não possui laços, dizemos que ele é um grafo simples.*

Definição 2. *Uma coloração de vértices de um grafo $G = (V; E)$ é uma atribuição de cores aos vértices de G , de modo que vértices adjacentes tenham cores distintas.*

Definição 3. Se v é um vértice do grafo G , a quantidade de arestas que possuem v como extremidade é chamada de *grau de v* e é denotada por $d(v)$.

Teorema 1 (Teorema de Euler). *A soma dos graus dos vértices de um grafo $G = (V; E)$ é igual a duas vezes o número de arestas nesse grafo, ou seja:*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\#E.$$

Demonstração. Para cada vértice do grafo G , conte seu grau e marque cada uma das arestas que possuem aquele vértice como extremidade. Por um lado, o número de total de marcas que foram utilizadas é exatamente a soma dos graus dos vértices. Por outro lado, cada aresta foi marcada exatamente duas vezes (uma vez para cada uma de suas extremidades). Assim, o número de marcas utilizadas é exatamente duas vezes o número de arestas. \square

Corolário 1. *Em todo grafo, a quantidade de vértices que possuem grau ímpar é um número par.*

Demonstração. Seja $G = (V; E)$ um grafo com n vértices e sejam d_1, \dots, d_n os graus desses vértices. Suponhamos que, dentre eles, existem r números pares e s números ímpares. Denotemos por p_1, \dots, p_r os pares e por i_1, \dots, i_s os ímpares. Pelo Teorema de Euler, temos:

$$2\#E = d_1 + \dots + d_n = (p_1 + \dots + p_r) + (i_1 + \dots + i_s).$$

Portanto,

$$i_1 + \dots + i_s = 2\#E - (p_1 + \dots + p_r).$$

Como o lado direito é um número par, vemos que $i_1 + \dots + i_s$ é par. Agora para que uma soma de números ímpares resulte em um número par, é necessário que a quantidade de parcelas seja par. Portanto, s é par, como queríamos. \square

Observação 1. *O corolário acima é conhecido como **Lema do aperto de mãos**. Embora muito simples de provar, o lema do aperto de mãos pode ser uma poderosa ferramenta na Análise Combinatória. Vamos discutir a ideia por trás de sua demonstração. Começemos fazendo uma pergunta simples, que talvez você já saiba a resposta. Se não, tire um tempinho para pensar sobre isso: Há nove pessoas em uma festa. É possível que cada uma delas aperte a mão de exatamente cinco outras pessoas?*

Na linguagem da Teoria dos Grafos, estamos pedindo um grafo com 9 vértices em que cada vértice tenha grau 5, onde cada vértice representa uma pessoa, e cada aresta representa um aperto de mão, ou seja, o grau de cada vértice é a quantidade de apertos de mão que aquela pessoa deu. Logo, qual seria a resposta para a pergunta feita acima? Pelo Corolário 1, não seria possível tal acontecimento, pois o número de pessoas é ímpar.

Definição 4. Um caminho de comprimento n , denotado por P_n , é um grafo com $n + 1$ vértices distintos, ordenados em uma sequência, tal que suas arestas ligam vértices consecutivos dessa sequência, isto é:

$$V(P_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_n\} \text{ e } E(P_n) = \{v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n\}.$$

Os vértices v_0 e v_n são os extremos do caminho.

Definição 5. Dizemos que um grafo $G = (V; E)$ é conexo quando, para quaisquer dois vértices u e v de G existe um caminho em G de extremos u e v . Caso contrário, dizemos que $G = (V; E)$ é desconexo.

Definição 6. Dizemos que um grafo H é um subgrafo de um grafo G , e escrevemos $H \subseteq G$, quando H é um grafo e temos $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Um subgrafo $H \subseteq G$ é dito maximal em relação a uma certa propriedade P se H tem a propriedade P , mas nenhum outro subgrafo de G que contenha H tem a propriedade P . Dado um grafo G , um subgrafo que seja conexo e maximal é chamado de componente conexa de G .

Observação 2. Para qualquer vértice $x \in V(G)$, existe uma única componente conexa de G à qual x pertence. Tal componente será denotada por C_x .

Definição 7. Dizemos que um grafo é *planar* se puder ser desenhado no plano sem que haja arestas se cruzando, ou seja, sem que haja interseção das linhas que representam as arestas, exceto possivelmente em um vértice. Tal desenho é chamado *representação planar* do grafo. Uma *face* de um grafo planar G é qualquer região do conjunto $\mathbb{R}^2 - G$.

Teorema 2. Se $G = (V; E)$ é um grafo planar conexo com f faces, $\#V = n$ e $\#E = m$, então vale:

$$f - m + n = 2.$$

Demonstração. Ver em [8], p. 4.

□

1.1.1 A relação entre Mapas e Grafos

Para estudarmos matematicamente o Problema das Quatro Cores, primeiro precisamos compreender como funciona a relação entre mapas e grafos, e ainda, mais alguns conceitos envolvidos. Existem várias maneiras de realizar essa associação, dependendo do objetivo. Neste trabalho adotaremos o seguinte: sejam M um mapa e $G(M)$ um grafo planar definido de tal forma que cada um dos vértices de G representa uma das regiões de M , e cada aresta representa uma fronteira entre duas regiões.

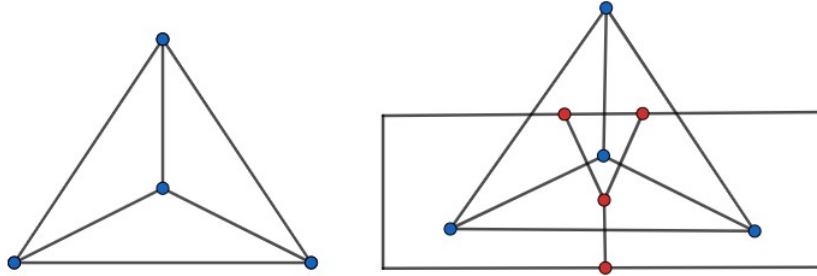
Quando pensamos em desenhar um mapa, com as arestas correspondentes às fronteiras entre os países ou regiões, na teoria básica dos grafos, só precisamos colocar vértices onde três ou mais regiões se encontram em um ponto. Para os nossos propósitos consideraremos apenas vértices de grau maior do que 2, pois, para regiões que possuem vértices com grau menor ou igual a dois, a quantidade de cores propostas pelo teorema é suficiente para coloração sem grandes complicações.

Assim, podemos assumir que todo vértice de $G(M)$ tem grau pelo menos 3. A menos que especificado de outra forma, faremos esta suposição do começo ao fim. Por razões técnicas, quando consideramos a coloração dos mapas, contabilizamos também a região exterior do plano como um dos países que necessita ser colorido.

Segue-se que, para efeitos de considerar o problema das quatro cores, e muitos problemas semelhantes, podemos assumir que $G(M)$ é conexo, não tem laços e nem arestas paralelas e não tem vértices de grau menor que 3. Um mapa M com esta propriedade é chamado de mapa padrão. Durante o trabalho assumimos que nossos mapas são padronizados, sem necessariamente dizer isso explicitamente todas as vezes.

Um outro conceito necessário para essa relação é o de dualidade, frequentemente utilizado em poliedros regulares, mas com imaginação podemos adaptá-lo tranquilamente a qualquer mapa ou grafo planar. Assim, dado um mapa M , iremos definir o seu dual, $D(M)$ da seguinte forma os vértices de $D(M)$ são pontos no interior de cada região de M (incluindo a região exterior) e as arestas de $D(M)$ cruzando as arestas de M . Veja a figura abaixo.

Figura 1.1: Dualidade - Mapa M e Dual do mapa M respectivamente.



Fonte: Elaborado pelo autor no software GeoGebra (2023)

1.1.2 Demonstração do Teorema das Cinco Cores

Nesta seção, f denotará o número de faces, n o número de vértices e m o número de arestas de um grafo.

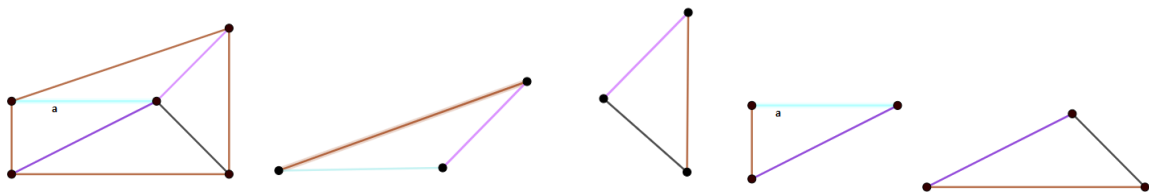
Lema 1. *Em um grafo planar conexo, existe pelo menos um vértice de grau no máximo 5.*

Demonstração. Seja G um grafo planar conexo. Como cada face de um grafo planar é delimitada por pelo menos 3 arestas, e cada aresta limita no máximo 2 faces, temos:

$$2m \geq 3f.$$

Vamos ilustrar esse resultado a seguir. Destaca-se que as cores utilizadas na imagem a seguir não possuem relação com o teorema, sendo seu único objetivo identificar as arestas.

Figura 1.2: Um exemplo de grafo e suas faces separadas



Fonte: Elaborado pelo autor no software GeoGebra (2022)

Para o grafo representado na figura acima, temos $m = 8$ e $f = 5$. (Lembre-se que além das quatro faces separadas acima, temos também a face exterior, como explicado em 7) Logo, $2m \geq 3f$.

Utilizando essa relação e a Fórmula de Euler, obtemos:

$$\begin{aligned}
 2 &= n - m + f \\
 \Rightarrow 2 &\leq n - m + \frac{2m}{3} \\
 \Rightarrow 6 &\leq 3n - 3m + 2m \\
 \Rightarrow 6 &\leq 3n - m \\
 \Rightarrow m &\leq 3n - 6 \\
 \Rightarrow 2m &\leq 6n - 12.
 \end{aligned}$$

Como, pelo Teorema (1), temos $2m = \sum_{v \in V} d(v)$, concluimos, da última desigualdade acima, que:

$$\sum_{v \in V} d(v) \leq 6n - 12. \quad (1.1)$$

Suponhamos agora que cada vértice de G tenha grau maior do que ou igual a 6. Neste caso, a somatória dos graus resultaria em:

$$\sum_{v \in V} d(v) \geq 6n,$$

o que é uma contradição com (1.1), pois chegaríamos a:

$$6n \leq 6n - 12.$$

Portanto, deve haver algum vértice com grau no máximo 5. □

Corolário 2. *Todo grafo G planar conexo com todos os vértices de grau pelo menos 3 tem uma face com no máximo cinco lados.*

Demonstração. Vamos provar por contradição. Suponha que todos os vértices tenham grau pelo menos 3, e todas as faces tenham pelo menos seis lados. Em seguida, utilizando o lema do aperto de mãos, obtemos:

$$2m \geq 3n \implies 2m \geq 6f.$$

Portanto, se substituirmos na Fórmula de Euler, ficamos com:

$$\begin{aligned}
 2 &= n - m + f \\
 \Rightarrow 2 &\leq \frac{2m}{3} - m + \frac{m}{3} \\
 \Rightarrow 2 &\leq 0,
 \end{aligned}$$

o que é uma contradição. □

Observação 3. *Antes de apresentarmos a tentativa de Kempe de uma prova falha para o Teorema das Quatro Cores, vamos mostrar como Heawood recuperou o Teorema das Cinco Cores dos destroços, com o argumento indutivo e a Fórmula de Euler. Ele apenas permitiu-se provar o Teorema das Seis Cores, como segue.*

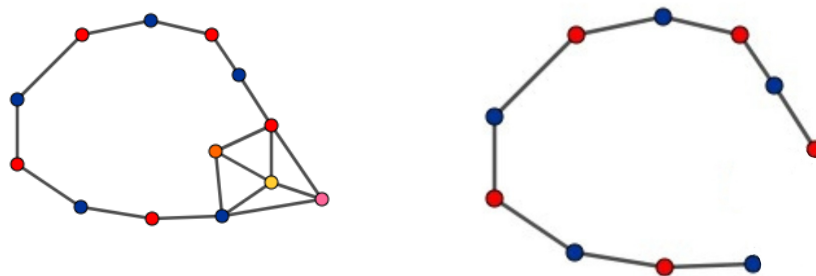
Teorema 3. *Todo mapa pode ser colorido com no máximo seis cores.*

Demonstração. Claramente, isso é verdade para qualquer mapa com não mais de seis países. Então suponha que exista um mapa com pelo menos sete países. Em seguida, pelo corolário (2), existe um país com menos de seis vizinhos. Se removermos tal país, o mapa resultante terá um país a menos e, por indução, pode ser colorido com no máximo seis cores. Agora, voltamos o país removido para o mapa. Como ele tem no máximo cinco vizinhos, que já estão coloridos, existe pelo menos uma cor disponível para completar a coloração do mapa.

□

Observação 1.1. *Kempe publicou sua “prova” do Teorema das Quatro Cores em 1879, e durante uma década ela foi considerada como uma prova válida, e uma solução para o problema. Continha várias ideias inteligentes e que foram úteis posteriormente, como veremos a seguir. Definimos uma cadeia de Kempe como o maior conjunto de países de duas determinadas cores. Em outras palavras, na sua forma dual deve consistir de um subgrafo conexo maximal, constituído pelos vértices coloridos com as duas cores escolhidas. Por exemplo, uma cadeia vermelho-azul seria um subgrafo maximal conexo, consistindo de países de cor vermelho ou azul.*

Figura 1.3: Exemplo de um grafo com uma cadeia de Kempe; Cadeia Vermelho-Azul



Fonte: Elaborado pelo autor no software GeoGebra (2023)

Agora, para provar o teorema das cinco cores de Heawood, usaremos o lema (2) ao invés do refutado lema (4).

Lema 2. *Seja M um mapa colorível com 5 cores. Se cinco países se encontram num ponto t , então esse mapa pode ser colorido com 5 cores, de tal forma que apenas quatro cores são usadas para estes cinco países.*

Demonstração. Por uma questão de argumentação, suponha que as cinco cores que você precisa são: vermelho, laranja, amarelo, verde e azul em ordem cíclica. Se os países vermelho e amarelo não estão na mesma cadeia vermelho-amarelo, trocamos as cores em uma dessas cadeias, e alcançamos a coloração desejada. Mas se eles estão na mesma cadeia vermelho-amarelo, então isso separa os países laranja e verde, portanto, não estão na mesma cadeia verde-laranja, portanto, um deles pode ser recolorido \square

Teorema 4 (Heawood 1890). *Todo mapa planar pode ser colorido com no máximo cinco cores.*

Demonstração. Pelo corolário (2) podemos escolher um país com cinco ou menos arestas, e dividi-lo igualmente entre os seus vizinhos, para obter um mapa com menos países, que pode ser colorido com 5 cores, por indução. Em seguida, colocamos o país de volta e escolhemos uma cor para ele. Se houver quatro ou menos vizinhos, estes consomem no máximo quatro cores, por isso resta sempre uma. Da mesma forma, se houver cinco vizinhos, então o lema (2) diz que será necessário quatro cores para elas, ainda restando uma. \square

Observação 4. *No capítulo seguinte faremos uma demonstração do teorema das cinco cores de maneira mais didática e ilustrativa, que faz uso apenas do argumento de indução finita no número de vértices e do lema (1).*

1.1.3 A primeira prova do Teorema das Quatro Cores

Lema 3. *Seja M um mapa colorível com 4 cores. Se quatro países se encontram em um ponto v , então, o mapa pode ser colorido com 4 cores de tal forma que apenas três cores são usadas para estes quatro países.*

Demonstração. Suponha que você usou quatro cores, digamos vermelho, verde, azul e amarelo em ordem em torno do ponto. Então, se os países vermelho e azul não pertencem

à mesma cadeia vermelho-azul, podemos trocar vermelho e azul e uma dessas cadeias, e obter a coloração necessária. Se pertencerem à mesma cadeia vermelho-azul, então os países verde e amarelo são separados um do outro por esta cadeia vermelho-azul e, portanto, não podem pertencer a cadeia verde-amarelo. \square

Figura 1.4: Prova do Lema 3 (caso 1): Cadeia Vermelho-Azul



Fonte: Elaborado pelo autor no software GeoGebra (2023)

Figura 1.5: Prova do lema 3 (caso 1): Troca Vermelho-Azul.



Fonte: Elaborado pelo autor no software GeoGebra (2023)

Figura 1.6: Prova do lema 3 (caso 2): Cadeia Vermelho-Azul.



Fonte: Elaborado pelo autor no software GeoGebra (2023)

Figura 1.7: Prova do lema 3 (caso 2): Troca Verde-Amarelo.



Fonte: Elaborado pelo autor no software GeoGebra (2023)

Lema 4. *Seja M um mapa colorível com 4 cores. Se cinco países se encontram num ponto v , então, o mapa pode ser colorido com 4 cores de tal forma que apenas três cores são usadas para esses cinco países.*

Demonstração. Na verdade, esta é a parte onde Kempe errou, veja se consegue identificar o erro:

Se você precisa de todas as quatro cores em torno de v , então dois países coloridos são separados por um país em uma direção, e dois na outra, então podemos supor que as cores são vermelho, verde e azul no sentido horário em ordem. Agora, se os países vermelho e azul não pertencem a cadeia azul-vermelho, então podemos trocar as cores em uma

dessas cadeias e assim usar apenas três cores. Da mesma forma, se os países vermelho e amarelo não pertencem à mesma cadeia vermelho-amarelo, podemos voltar e reduzir para três cores. O único outro caso (figura (1.1.3)) é onde existe um isolamento da cadeia azul-vermelho um país verde e uma cadeia amarelo-vermelho que isola o outro país verde.

Figura 1.8: "Prova" do lema 4



Fonte: Elaborado pelo autor no software GeoGebra (2023)

Assim, podemos trocar as cores na cadeia verde-amarelo que contém o primeiro dos países verdes, e na cadeia verde-azul que contém o segundo. Isso faz com que as cores vermelho, amarelo e azul fiquem no sentido horário em ordem, assim alcançamos as 3 cores desejadas em torno deste ponto. Detectou o erro? Não se preocupe se você não o identificou originalmente! Explicaremos o problema adiante. Enquanto isso, continue pensando. A “prova” de Kempe do teorema passa agora por indução sobre o número de países (vértices). Já sabemos que todo grafo G planar conexo com todos os vértices de grau pelo menos 3 tem uma face com no máximo cinco lados, podemos escolher um país com cinco ou menos arestas, e distribuí-lo igualmente entre os seus vizinhos, para obter um mapa com menos países, que podem ser de quatro cores, por indução. Em seguida, colocamos o país de volta e escolhemos uma cor para ele. Se tiver três ou menos vizinhos, então estes utilizam no máximo três cores, logo, sempre resta uma. Da mesma forma, se houver quatro vizinhos, então o lema 3 (3) diz que só é preciso três cores para realizar a coloração, então ainda resta uma. E o lema 4 (4) trataria do único caso remanescente, de cinco vizinhos, se o lema fosse verdadeiro! \square

Observação 5. *Embora tenhamos constatado que o argumento de Kempe era falacioso,*

devemos ainda lhe dar crédito por várias ideias inteligentes. Em particular, o uso da fórmula de Euler para chamar a atenção para um área local, e o argumento em cadeia de Kempe, são todos os ingredientes essenciais da prova final de quase 100 anos depois.

Onde a prova de Kempe falha? Ela falha, pois nem sempre é possível mudar as cores em ambas as cadeias de Kempe simultaneamente. Isto é, mudando as cores no interior de uma cadeia, você muda completamente a outra cadeia, de modo que a mudança de cores dentro desta segunda cadeia já não alcança o resultado que deveria alcançar. Isso ocorre se as duas cadeias se cruzarem, o que pode acontecer, uma vez que têm uma cor em comum. A figura (5) mostra um pequeno exemplo, com as cores vermelho, verde, azul e amarelo. O argumento de Kempe troca primeiro as cores da cadeia verde-amarelo que contém o país 1. Isso tem o efeito de quebrar a cadeia vermelho-amarelo e criar uma cadeia verde-azul do país 2 para o país 3. Se então executarmos a segunda mudança de cor exigida por Kempe, trocamos as cores na cadeia verde-azul, que tem o efeito na coloração do país 3 com a cor verde. Assim, não conseguimos o resultado desejado, de colorir os cinco países em torno do vértice central com três cores.

Figura 1.9: Contraexemplo do lema 4: Coloração original



Fonte: Elaborado pelo autor no software GeoGebra (2023)

Figura 1.10: Contraexemplo do lema 4: Após a troca Verde-Amarelo



Fonte: Elaborado pelo autor no software GeoGebra (2023)

Observação 6. *Essa demonstração do Teorema das Quatro Cores foi apresentada aqui com objetivo de destacar onde a primeira prova, feita por Kempe, falha, e que apesar disso, durante determinado tempo ela foi tida como válida. Esse é um processo natural dentro da comunidade matemática, principalmente com resultados que ficam muito tempo sem demonstração, normalmente são expostos e em alguns casos podem ser encontrados pequenos erros ou falhas, o que não significa que aquela demonstração tenha sido inútil, como veremos nos capítulos a seguir.*

CAPÍTULO 2

Teorema das 5 cores

2.1 História

A Teoria dos Grafos surgiu em meados do século XVIII, quando começou a ser estudada sistematicamente pelo influente e prolífico matemático suíço Leonhard Euler. Temos as definições formalmente no capítulo 1, mas citamos novamente que um grafo é um par ordenado $G = (V; E)$, sendo V o conjunto de vértices e E o conjunto de arestas.

Quando dois vértices são extremidades de uma mesma aresta, dizemos que os vértices são adjacentes. Uma coloração de vértices de um grafo G consiste de uma atribuição de cores aos vértices de G , de modo que vértices adjacentes tenham cores diferentes. Um mapa planar pode ser associado a um grafo.

Durante muito tempo, matemáticos em várias partes do mundo tentaram responder à seguinte pergunta: quantas cores são suficientes para colorir qualquer mapa planar? Em 1852, Francis Guthrie conjecturou que 4 era o número “mágico”. Apesar da aparente simplicidade do problema, só em 1976 foi provado que a conjectura estava certa, obtendo-se assim o teorema das quatro cores, e neste processo houve uma contribuição significativa para a Teoria dos Grafos. A prova inicialmente era extensa (50 páginas) e faz uso de computadores de grande porte (por volta de 1200 horas de processamento).

Um dos resultados gerados durante a discussão do problema das quatro cores foi o teorema das cinco cores, e o nosso objetivo neste capítulo é apresentar uma demonstração

desse resultado. A metodologia utilizada foi a pesquisa bibliográfica.

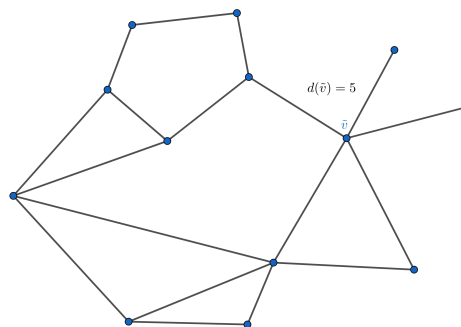
2.2 Demonstração

Teorema 5. Teorema [Teorema das Cinco Cores]: *Todo grafo planar simples pode ser colorido com no máximo cinco cores.*

Demonstração. Seja $G = (V, E)$ o grafo que queremos colorir. Faremos a prova por indução no número de vértices. Se $n \leq 5$, o resultado é válido. Mostraremos a seguir que, se é possível colorir um grafo com $n - 1$ vértices com 5 cores, então também é possível colorir um grafo com n vértices.

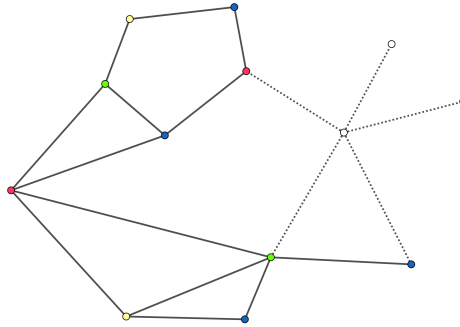
Pelo lema (1), em todo grafo planar existe um vértice com grau menor do que ou igual a 5. Denotemos esse vértice por \tilde{v} .

Figura 2.1: Exemplo de um grafo com vértice \tilde{v} tal que $d(\tilde{v}) = 5$



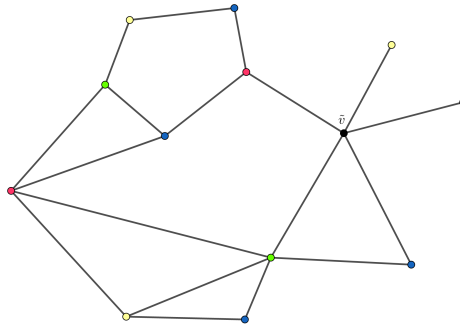
Fonte: Elaborado pelo autor no software GeoGebra (2022)

Retirando o vértice \tilde{v} do grafo G , obtemos um novo grafo, que denotaremos por $R(\tilde{v})$, e pela hipótese de indução esse novo grafo pode ser colorido com no máximo 5 cores.

Figura 2.2: Representação do Grafo $R(\tilde{v})$ 

Fonte: Elaborado pelo autor no software GeoGebra (2022)

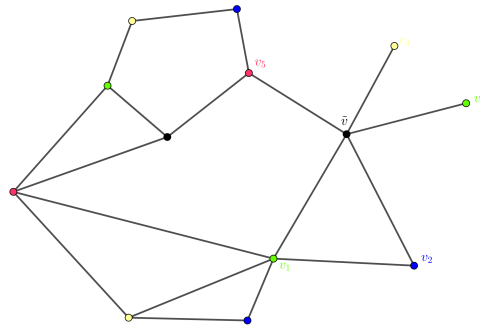
Se os vértices em $R(\tilde{v})$ estão coloridos com menos do que 5 cores, basta colorir o vértice \tilde{v} com uma cor não utilizada nos vértices de $R(\tilde{v})$.

Figura 2.3: Grafo que representa a coloração do vértice \tilde{v} com uma cor restante

Fonte: Elaborado pelo autor no software GeoGebra (2022)

Caso contrário, se cinco cores são utilizadas para colorir $R(\tilde{v})$, analisamos os vértices adjacentes a \tilde{v} em G . Denotaremos esses vértices por v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 , e por c_1, c_2, c_3, c_4 e c_5 as cores dos vértices, respectivamente. Como podemos observar na figura abaixo.

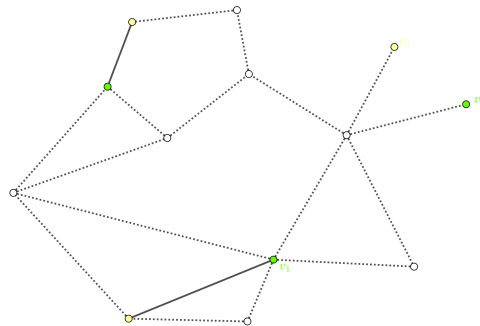
Figura 2.4: Grafo que representa a análise dos vértices adjacentes a \tilde{v} em G



Fonte: Elaborado pelo autor no software GeoGebra (2022)

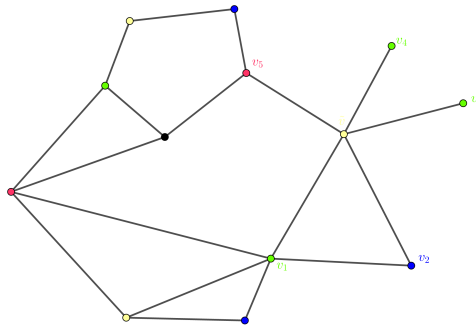
Consideremos o subgrafo induzido pelos vértices coloridos com as cores c_1 e c_3 . Se a componente conexa que contém o vértice de $R(\tilde{v})$ colorido com c_1 não contiver o vértice colorido com c_3 , podemos trocar as cores desta componente: quem está colorido com c_1 fica colorido com c_3 , e vice-versa, e então colorir o vértice \tilde{v} com a cor c_1 .

Figura 2.5: Subgrafo induzido pelos vértices coloridos com as cores c_1 e c_3



Fonte: Elaborado pelo autor no software GeoGebra (2022)

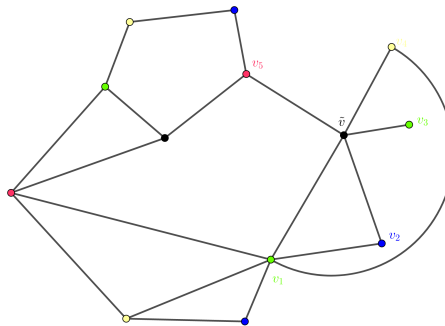
Figura 2.6: Grafo com a troca de cores descrita acima.



Fonte: Elaborado pelo autor no software GeoGebra (2022)

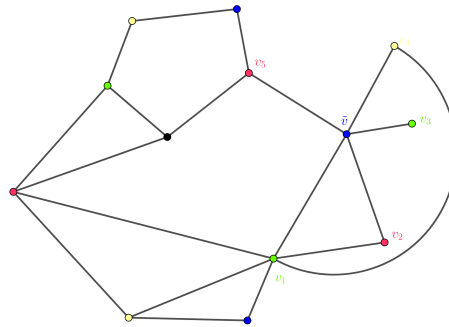
Caso a componente que contém o vértice de $R(\tilde{v})$ colorido com c_1 seja a mesma do vértice colorido com c_3 , existe um caminho de vértices que “cerca” o vértice colorido com c_2 . Logo, não existe um caminho ligando v_2 a v_5 , pois se existisse o grafo não seria planar. (veja figura (2.7) e (2.8)).

Figura 2.7: Grafo que representa a ideia da demonstração acima



Fonte: Elaborado pelo autor no software GeoGebra (2022)

Figura 2.8: Grafo que representa a ideia da demonstração acima



Fonte: Elaborado pelo autor no software GeoGebra (2022)

Tomamos então a componente conexa do grafo induzida pelos vértices coloridos com c_2 e c_4 , que contém o vértice de $R(\tilde{v})$ colorido com c_2 . Depois de trocar as cores c_2 e c_5 nesta componente, podemos colorir o vértice \tilde{v} com a cor c_2 , o que conclui a demonstração. \square

2.2.1 Considerações

Ao longo de sua história, o Teorema das Quatro Cores atraiu muitas provas errôneas, consequentemente gerando refutações. Um dos casos mais conhecidos foi o do *The New York Times*, que rejeitou uma publicação da demonstração feita por Appel e Haken por temer sua veracidade, como em algumas provas anteriores.

A maioria dos contraexemplos buscam uma forma de criar uma região que faça fronteira com outras regiões, forçando o uso de apenas três cores nas regiões restantes. Isso será possível sempre, pois o Teorema das Quatro Cores é verídico, porém aquele que busca tal contraexemplo, tem seu foco em uma grande região, deixando de perceber que as demais regiões podem ser coloridas com três cores.

Faz-se necessário destacar que mesmo antes de sua demonstração, o Teorema das Quatro Cores contribuiu significativamente com diversas áreas. Uma prova disso é o Teorema das Cinco Cores, o qual foi conjecturado e demonstrado a partir de um contraexemplo de uma das demonstrações falhas do Teorema das Quatro Cores.

Por fim, é válido apontar algumas aplicações descobertas por meio desse teorema, são elas: a coloração de vértices; a separação de produtos explosivos; atribuição de frequências de rádio; agendamento de provas na universidade; alocação de registradores; semáforos; e até mesmo o famoso puzzle Sudoku.

CAPÍTULO 3

Teorema das Quatro Cores e sua História

Neste capítulo aborda-se um pouco sobre o Teorema das Quatro Cores. Durante algum tempo popularmente conhecido como “Problema das Quatro Cores”, ele determina que são necessárias quatro cores para se colorir um mapa, seja de regiões, estados e países reais ou imaginários, tendo como critério essencial que países vizinhos sejam pintados com cores diferentes. Trata-se de um problema simples, belo e útil, porém sua solução não é trivial.

O estudo de tal problema proporciona a oportunidade de observar que mesmo os problemas de mais simples compreensão podem exigir anos de estudo para serem resolvidos, e mesmo que sem validação ainda podem gerar contribuições de grande valor para a sociedade, sejam elas práticas ou teóricas. A partir de pesquisas bibliográficas, espera-se discorrer um pouco sobre a história do Teorema das Quatro Cores e sua evolução, partindo do seu surgimento, a divulgação do problema, alguns dos indivíduos envolvidos no processo de tentativa de demonstração, exemplos de colorações mínimas de mapas, e ainda suas diversas contribuições para a vida moderna.

3.1 Sobre a História da Matemática

A Matemática foi, por muito tempo, associada a números, grandezas e formas. Nesse sentido, raramente procurava-se associar seus vestígios com acontecimentos históricos e não se levava em consideração o vínculo da Matemática com as atividades humanas. Por esta razão, Boyer e Merzbach (2019, p.25)[1] afirmam que aqueles que procuram os primeiros exemplos de atividade matemática apontarão para resquícios arqueológicos que refletem a consciência humana das operações numéricas.

Nesse contexto, a História da Matemática surge como um instrumento de investigação das práticas matemáticas que surgiram com as antigas civilizações e vêm se desenvolvendo até os dias atuais. Com isso: A História da Matemática constitui um dos capítulos mais interessantes do conhecimento. Permite compreender a origem das ideias que deram forma à nossa cultura e observar também os aspectos humanos do seu desenvolvimento: enxergar os homens que criaram essas ideias e estudar as circunstâncias em que elas se desenvolveram.

Assim, esta História é um valioso instrumento para o ensino e aprendizagem da própria Matemática. Podemos entender por que cada conceito foi introduzido nesta ciência e por que, no fundo, ele sempre era algo natural no seu momento. (FARAGO, 2003, p.17)[3]. Partindo do pressuposto de que a construção histórica aponta uma evolução dos conceitos matemáticos, acompanharemos as etapas e processos vivenciados desde a conjectura até após a demonstração do Teorema das Quatro Cores.

3.1.1 O Surgimento do Problema

O Teorema das Quatro Cores surgiu em 1852, quando Francis Guthrie (1831-1899) tentou colorir um mapa dos condados da Inglaterra e algo lhe chamou a atenção. O matemático conseguiu pintar todo o mapa com apenas quatro cores garantindo que dois condados vizinhos não seriam pintados com a mesma cor e, ao ver que isso se repetia para outros mapas iniciou sua busca para responder à seguinte questão: “É possível colorir um mapa, plano ou sobre uma superfície esférica, respeitado o critério imposto, com apenas quatro cores?”.

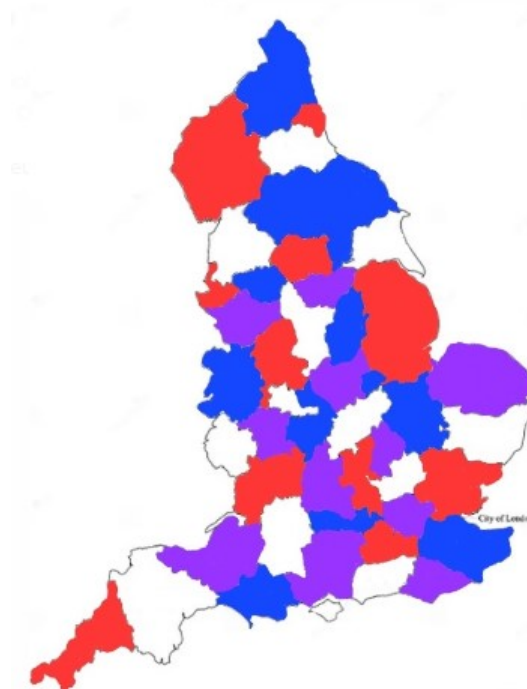
Figura 3.1: Mapa dos condados da Inglaterra em preto e branco.



Fonte: Site dreamstime. Disponível em: https://pt.dreamstime.com/mapa-dos-condados-cerimoniais-da-inglaterra-brancos-do-pa_

[_C3%ADs-europeu-image177564312\(2023\)](https://pt.dreamstime.com/mapa-dos-condados-cerimoniais-da-inglaterra-brancos-do-pa_%C3%ADs-europeu-image177564312(2023)) [2]

Figura 3.2: Mapa dos condados da Inglaterra colorido de acordo com o critério do Teorema das Quatro Cores.



Fonte: Colorido pelo autor (2023)[2]

Naquela época Francis dedicou-se à tentativa de demonstrar o teorema. O inglês tentou pintar outros mapas com apenas quatro cores, na busca de validar sua hipótese e, mesmo almejando provar sua veracidade, não conseguiu formular uma demonstração para esse problema. Nesse sentido, Francis apresentou-o para seu irmão mais novo, Frederick Guthrie (1833-1866). Frederick, que era aluno de Augustus De Morgan (1806-1871), apresentou o problema para o professor, a pedido de seu irmão e, este se encantou com a ideia e decidiu prosseguir em busca de sua comprovação.

De Morgan foi quem deu visibilidade ao Problema das Quatro Cores, apresentando-o para a comunidade científica e conseguindo avanços consideráveis rumo à sua demonstração. O professor observou que, seguindo os critérios estabelecidos, alguns mapas não seriam possíveis de colorir com menos de quatro cores, ou seja, aqueles que continham quatro “condados” que faziam fronteira entre si, não poderiam ser pintados com apenas três cores. Era necessário, no mínimo, o uso de quatro cores. Além disso, De Morgan tentou encontrar um mapa que necessariamente utilizasse pelo menos cinco cores, entretanto não encontrou nenhum contraexemplo para o problema de Guthrie.

Sendo assim, De Morgan apresentou a conjectura para o matemático Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), que não apresentou interesse e relatou estar sem tempo para dedicar-se ao problema. Logo, o professor colocou essa questão para outros matemáticos. Após esse período, o interesse pelo teorema caiu demasiadamente, ou ao menos não se tem notícias de trabalhos sobre o tema.

Em 1878 houve alguns questionamentos em revista se já existia comprovação para o Problema das Quatro Cores, mas somente em 1879 foi realizada a publicação de uma demonstração no *American Journal of Mathematics*, elaborada por Alfred Bray Kempe (1849-1922). Tal demonstração foi estudada por diversos matemáticos renomados e que sugeriram alguns ajustes para sua melhoria e, até então, estabeleceu-se definitivamente a Teoria das Quatro Cores.

A calma gerada por Kempe, que conclui a busca pela demonstração, não durou muito, pois em 1890 Percy John Heawood (1861-1955) provou que Kempe estava errado através de um contraexemplo, criando um mapa não passível de coloração de acordo com os passos da demonstração de Kempe. Lima (2016, p.71)[10] afirma que o “(...) contraexemplo de Heawood foi uma forma de mostrar que a estratégia de Kempe não é válida para provar o Teorema das Quatro Cores, mas não que o teorema em si não é válido.”

Nesse sentido, Heawood não conseguiu nenhuma demonstração alternativa para esse teorema, todavia provou o Teorema das Cinco Cores, ou seja, ele conseguiu demonstrar que, para colorir qualquer mapa, seguindo o critério imposto por Francis, são necessárias no máximo cinco cores.

Depois de muitos anos, vários matemáticos e suas diversas tentativas de demonstração, foi apresentada em 1976, por Wolfgang Haken (nascido em 1928) e Kenneth Appel (1932-2013), a demonstração do Teorema das Quatro Cores, ou seja, 124 anos após o surgimento do problema. O ponto chave na comprovação apresentada por eles foi o uso de computadores de grande porte, os quais realizaram cálculos por, aproximadamente, 1200 horas. Ao mesmo tempo que essa descoberta gerou euforia, o entusiasmo esmoreceu devido ao extenso tempo de demonstração e ao uso dos computadores. Muitos matemáticos não se sentiam à vontade com o uso de computadores, pois estes poderiam gerar erros que compromettesse a validade da demonstração.

Por fim, em 1993, foi apresentada uma nova demonstração para o Teorema, sendo ela “mais simples” que a anterior, pois é passível de verificação em, aproximadamente 24h, todavia ainda envolvendo o uso de computadores. Até os dias atuais não se tem notícias de uma demonstração que não envolva o uso de computadores, mas espera-se que se torne cada vez mais rápida a verificação da demonstração, devido ao aumento na velocidade de processamento dos equipamentos utilizados.



3.2 Observações históricas sobre a demonstração do Teorema das Quatro Cores

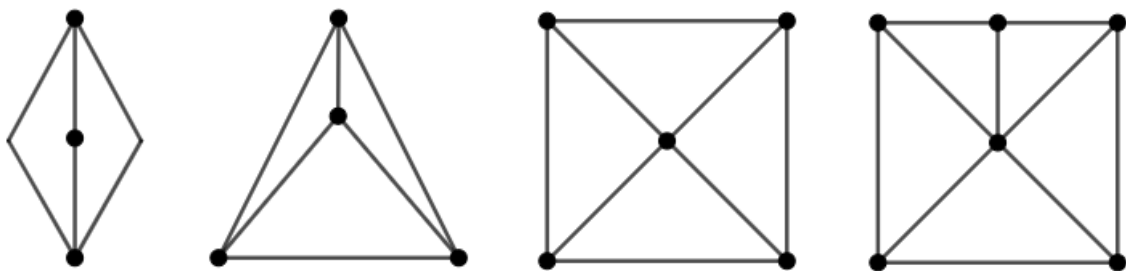
A estratégia geral da prova do Teorema das Quatro Cores não difere muito daquela adotada por Kempe em seu artigo de 1879, sendo feita por indução no número de vértices. O primeiro passo da indução é observar que qualquer grafo com no máximo quatro vértices pode ser colorido com 4 cores. A prova geral consiste em remover um vértice de um dado

grafo, reduzindo assim a um caso menor, que pela hipótese de indução pode ser colorido com 4 cores. O problema então consiste em estender a coloração para incluir o vértice extra, ou mais geralmente, encontrar uma maneira de mudar a coloração de forma que ela possa ser estendida para o vértice extra.

De acordo com Robert Wilson ([20], 2002, p.31-37), se o vértice tiver grau menor que 4, então a coloração se estende de maneira direta, enquanto se tiver grau 4, podemos alterar a coloração usando as cadeias de Kempe (1.3) de forma que a nova coloração se estenda para o vértice extra. Em linguagem moderna, dizemos que um vértice de grau no máximo 4 é redutível, ou que qualquer grafo contendo um vértice de grau no máximo 4 é redutível.

A outra parte do problema é mostrar que todo grafo planar contém uma configuração redutível. Kempe usou a fórmula de Euler para mostrar que todo grafo planar contém um vértice de grau no máximo 5. Em outras palavras, o grafo não pode “evitar” ter um vértice de grau 5 ou menos. Dizemos que esse conjunto de configurações é inevitável, pois todo grafo planar contém pelo menos um deles. Se negligenciarmos os casos triviais em que um vértice não tem vizinhos ou tem um vizinho, esse conjunto inevitável é ilustrado na figura a abaixo.

Figura 3.3: Conjuntos inevitáveis de configurações



Fonte: Elaborado pelo autor no software Geogebra (2023)

A razão pela qual a tentativa de prova de Kempe falha é porque o conjunto inevitável, caso possua um vértice de grau 5 não é um subconjunto do conjunto redutível. Se pudéssemos de alguma forma encontrar um conjunto inevitável consistindo apenas de configurações redutíveis, teríamos concluído a prova do teorema das quatro cores.

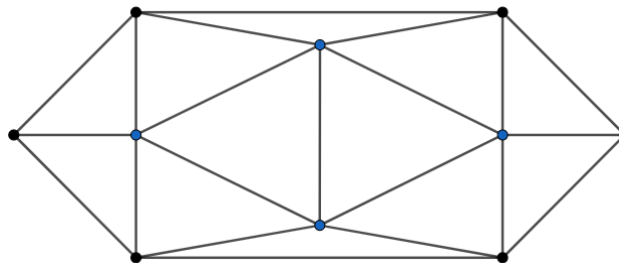
Historicamente, a tentativa de demonstração foi perseguida de ambos os lados simultaneamente, de modo que melhorias foram feitas tanto nos conjuntos inevitáveis quanto

nos argumentos de redutibilidade. Ficou imediatamente claro que era necessário olhar não apenas para vértices individuais e seus graus, mas para configurações maiores de vértices adjacentes.

O primeiro resultado nessa direção foi a prova de Wernicke em 1904 de que o vértice de grau 5 pode ser substituído por um par de vértices adjacentes, um de grau 5 e o outro de grau 5 ou 6. Isso fornece informações extras sobre a vizinhança do vértice de grau 5, o que pode ajudar quando tentamos provar redutibilidade. No entanto, descobriu-se que essa informação não era útil para o propósito.

Birkhoff em 1913 abordou o problema de outra direção e mostrou que um vértice de grau 5 com três vizinhos consecutivos de grau 5 é redutível. Ficou claro, porém, que ainda havia uma enorme lacuna entre o conjunto de configurações redutíveis conhecidas e qualquer conjunto inevitável conhecido. No entanto, houve um progresso constante de ambas as direções.

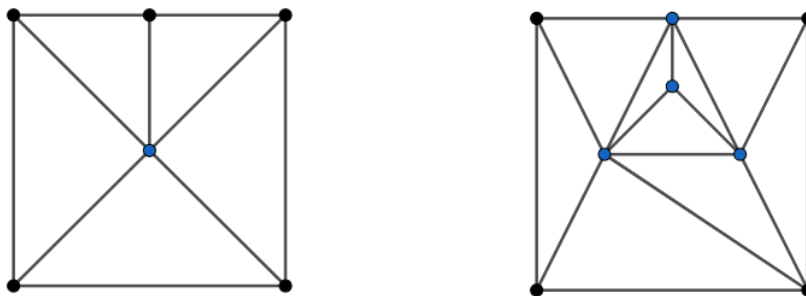
Figura 3.4: Resultado de Birkhoff



Fonte: Elaborado pelo autor no software Geogebra (2023)

Em 1922, Franklin, um aluno de Birkhoff, melhorou o resultado de Wernicke mostrando que o vértice de grau 5 no conjunto inevitável poderia ser substituído por um vértice de grau 5 com dois vizinhos de grau 5 ou 6. Ao mesmo tempo, ele mostrou que um vértice de grau 6 com três vizinhos consecutivos de grau 5 é redutível. Autores posteriores provaram a redutibilidade de cada vez mais configurações desse tipo.

Figura 3.5: Resultado de Franklin



Fonte: Elaborado pelo autor no software Geogebra (2023)

Uma ideia chave para a demonstração é a de “descarga”, que de acordo com Júnior e Osvaldo (2007)[7] foi introduzida por Heesch em 1969, e consiste em associar uma carga de magnitude $6 - d(v)$, a cada vértice v (sendo $d(v)$ o grau de v) e, em seguida, criar um método (chamado de “algoritmo de descarga”) para espalhar a carga de um vértice para seus vizinhos, de tal forma que cargas positivas só surgem sob certas condições restritas (onde há muitos vértices de grau 5 próximos). Essas condições restritas constituem então o “conjunto inevitável”.

A maneira como Appel e Haken conseguiram provar o Teorema das Quatro Cores foi modificando sucessivamente o algoritmo de descarga para produzir um conjunto inevitável melhor a cada vez. A essa altura, Heesch desenvolveu uma ideia de que tipo de configurações provavelmente seriam problemáticas e, portanto, sabia o que procurar ao buscar conjuntos inevitáveis. Usando essa intuição, Appel e Haken examinaram as configurações do conjunto inevitável que pareciam difíceis de reduzir.

Em seguida, eles redesenharam o algoritmo de descarga para eliminar esses casos particulares. Ao repetir esse procedimento, eles finalmente encontraram um algoritmo de descarga que produziu um conjunto inevitável de 1936 configurações que eles acreditavam poder provar que eram redutíveis. De fato, com a ajuda de um computador que foi programado por John Koch (1909-1978) para procurar as extensões de coloração necessárias, provou-se que tais configurações eram redutíveis. A prova foi concluída em 1976.

3.2.1 Melhorias posteriores

Logo ficou claro que nem todas as configurações de 1936 eram distintas – algumas eram realmente repetidas e outras eram subconfigurações de outras maiores onde apenas 1834 eram realmente necessárias na prova. Um pouco mais tarde, outras melhorias na prova

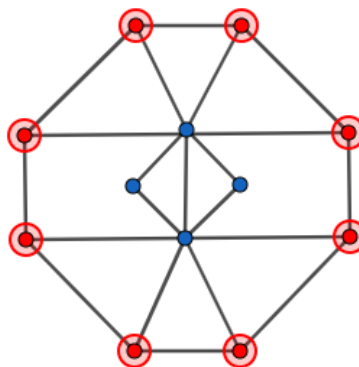
de inevitabilidade resultaram em outras 352 configurações sendo declaradas redundantes, deixando apenas 1482 configurações no conjunto inevitável. Mais recentemente (em 1997), uma versão simplificada da prova de Appel-Haken foi publicada por Robertson, Sanders, Seymour e Thomas ([14]).

Ele ainda depende de cálculos de computador, mas o número de configurações inevitáveis foi reduzido para 633, e o algoritmo de descarga foi bastante simplificado. De fato, eles encontraram um conjunto inevitável de 591 configurações, mas o rejeitaram porque tornava a prova da redutibilidade mais difícil. Além disso, o artigo é bem mais curto, com 43 páginas em vez de 139 da demonstração original, e chega perto de fornecer uma prova que pode ser verificada por um leitor suficientemente determinado.

3.3 A idéia da demonstração do Teorema das Quatro Cores

A prova do Teorema das Quatro Cores por Appel e Haken. Para falarmos um pouco mais sobre essa tão famosa demonstração que provou o Teorema das quatro cores precisamos de mais uma definição, sendo ela a de uma configuração F em uma triangulação plana G que consiste na parte de G que está dentro de algum circuito chamada de anel, o qual limita a configuração, o número de vértices neste anel é chamado de tamanho do anel de F .

Figura 3.6: Exemplo de uma configuração com tamanho de anel 8



Fonte: Feita pelo autor no software Geogebra (2023)

Para provar o teorema das quatro cores, basta encontrarmos um conjunto inevitável

U de configurações redutíveis. Como U é um conjunto inevitável, toda triangulação plana deve conter pelo menos uma dessas configurações; mas como todas as configurações são redutíveis, nenhuma delas pode ocorrer em um contra-exemplo mínimo. Segue-se que nenhum contra-exemplo pode existir e, portanto, que o teorema está provado. Se Kempe tivesse conseguido provar que a configuração criada por ele era redutível, ele teria obtido um conjunto inevitável contendo apenas quatro configurações redutíveis, e o teorema das quatro cores teria sido provado.

A título de contraste, Appel e Haken provaram o teorema construindo um conjunto inevitável de quase 2.000 configurações redutíveis, até então reduziu-se esse número para cerca 633. Algumas dessas configurações são bastante grandes, indo até o tamanho do anel 14. Provar que configurações deste tamanho são redutíveis é muito complicado, envolvendo dependência maciça do computador.

3.3.1 Considerações

Vimos na seção anterior que a primeira demonstração válida do Teorema das Quatro Cores, a prova de Appel e Haken basicamente envolvem duas etapas principais:

- (i) a construção de um conjunto inevitável de configurações;
- (ii) a prova de que todas essas configurações são redutíveis.

Essas duas etapas em si são simples, porém a interação entre elas que é sofisticada, e na qual o trabalho de Appel e Haken vai muito além de tudo o que foi feito antes. Onde o computador se encaixa? Appel e Haken também utilizaram ideias probabilísticas para determinar se uma certa combinação teria chances de ser redutível. Utilizando o computador eles listaram possíveis esquemas de cores do circuito delimitador e calcularam a proporção de cores que seriam consideradas “boas” para o caso. Chegaram às seguintes conclusões: se a proporção for menor que 10% , então a configuração quase não tem chance de ser redutível, com 20% havia grandes chances de ser, e se fosse superior a 30% a redutibilidade era quase certa.

Assim, após um processo que durou mais de um ano com tentativas, erros e auxílio de computadores, foi obtido um conjunto inicial inevitável de configurações geograficamente boas, no entanto Appel e Haken desenvolveram tamanha percepção do que provavelmente

funcionaria para a resolução do problema, que foram capazes de realizar o processo de descarga manualmente e assim construir o conjunto final inevitável sem utilizar o computador. Tal detalhe se torna o ponto crucial da demonstração, pois até aquele momento já haviam construído conjuntos inevitáveis e já existiam configurações comprovadas redutíveis, mas ninguém fora capaz de completar a tarefa admirável de construir um conjunto inevitável de configurações redutíveis.

CAPÍTULO 4

Atividades Propostas

4.1 Coloração de Mapas

O objetivo desta atividade consiste em introduzir o conceito de coloração mínima de um mapa, apresentar o Teorema das Quatro Cores e como resolver problemas de coloração utilizando Grafos. Essa proposta tem como público-alvo estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental ao 1º ano do Ensino Médio, podendo ser adaptada para outras turmas caso seja de interesse.

4.1.1 Justificativa

Diante da significância histórica que o Teorema das Quatro Cores possui, faz-se necessário sua inserção no ambiente escolar de modo a não concentrar tais conhecimentos somente no ensino superior, favorecendo novas formas de resolver problemas, de se organizar, ou até mesmo de se divertir, com uma tarefa que é considerada simples: colorir.

4.1.2 Observações

Lembrando que esta é uma atividade introdutória, que serve para iniciar o conteúdo de grafos e coloração mínima, de maneira a ser subseguida por outras atividades e definições, que ficarão a critério do professor.

4.1.3 Descrição da Atividade

Etapa 1

1º momento: Inicialmente deve ser entregue um mapa das cidades/países vizinhos da região em que a atividade for aplicada, e solicitado aos alunos para que pintem essas cidades/países seguindo o critério de que regiões vizinhas sejam pintadas com cores diferentes.

2º momento: Com o desenvolver da aula o professor deverá mediar a atividade de maneira a fazer com que os alunos conversem entre si sobre os métodos que optaram por utilizar e o porquê de tais escolhas.

3º momento: Após terminarem de pintar os mapas deverá ser pedido para que anotem na própria folha a quantidade de cores que foram utilizadas para colorir o mapa. O professor deverá problematizar essa etapa questionando os alunos sobre essa quantidade, se ela se repetiu, se houveram diversos valores, porque eles acreditam que isso pode ter ocorrido, se isso se repete em todos os mapas.

Etapa 2

1º momento: Seguindo a dinâmica da primeira Etapa. A partir das respostas dos alunos o professor deve fazer despertar a curiosidade os instigando para os próximos passos.

2º momento: A seguir os alunos serão divididos em duplas (ou trios caso a quantidade de alunos seja ímpar, ou se a quantidade de alunos for grande) e entregará outro mapa (De preferência que seja um nível a mais em questão da dificuldade comparado ao primeiro mapa) para que façam a coloração. Cada aluno pintará uma região com uma cor, seguindo o critério apresentado na Etapa 1, até que todo mapa seja pintado, e destacarão a quantidade de cores utilizada. Seguindo o mesmo processo de socializar e problematizar da etapa anterior. Para finalizar este momento o professor deve fazer com que os alunos cheguem a um consenso sobre a quantidade mínima de cores (4 cores).

3º momento: A partir das falas dos alunos sobre a quantidade de cores, deverá ser feita a explicação de como o teorema das quatro cores se encaixa na atividade, contando um pouco sobre sua história e origem. deve ser apresentada também a solução para a questão exposta durante a atividade (Qual a coloração mínima para os mapas dados?) por meio de grafos, explicando também brevemente o que são grafos.

4º momento Por fim, podem ser apresentadas algumas situações problemas para que tentem resolver e entreguem na aula seguinte. Essa atividade pode auxiliar na tomada de

decisão do próximo passo a ser dado, onde, lembrando sempre do trabalho com o erro, o professor deve dar seguimento as aulas.

4.1.4 Avaliação

Deve ser feita a partir das atividades com os mapas e a resolução dos problemas que deverão ser entregues. Também no decorrer das aulas observando o envolvimento dos alunos com a atividade, se interagiram com sua dupla e colegas de maneira a contribuir para o desenvolver da atividade, compreenderam, esclareceram suas dúvidas, se esforçaram para tentar resolver as questões levantadas. Recomenda-se que o educador faça anotações durante a aplicação da atividade, isso pode facilitar e organizar os dados coletados para a avaliação dos alunos.

4.1.5 Sugestões de problemas

- 1) Sabe se que determinado mapa tem 24 cidades. Gustavo tem intenção de presentear sua mãe com este mapa e decidiu pintá-lo com a menor quantidade de cores possível, seguindo o critério de que cidades vizinhas não fossem pintadas com a mesma cor. Quantas cores Gustavo utilizará para pintar este mapa?
- 2) Utilizando grafos, elabore uma sequência de coloração (Quais regiões pintar primeiro, e com quais cores) e veja no mínimo quantas cores são necessárias para pintar o mapa. (Mapa à escolha do professor. Indica-se mapas da região onde a atividade for aplicada.)

4.2 Análise da atividade Coloração de Mapas

A atividade Coloração de Mapas, descrita no Capítulo 4, foi desenvolvida na disciplina de Estágio Supervisionado IV, onde o objetivo foi elaborar um plano de aula a ser aplicado em sala de aula com a presença do professor supervisor. Tal plano foi feito com base no material de referência sobre a teoria dos grafos e coloração de vértices, e levado à discussão em sala com a orientadora do meu projeto de Iniciação Científica.

Durante a discussão foram feitos alguns apontamentos sobre o desenvolvimento da proposta visando o melhor aproveitamento na aplicação e compreensão do conteúdo por parte dos alunos. De antemão quero deixar registrada minha expectativa como discente do curso de licenciatura em matemática e futuro professor, baseado em minhas experiências

com o conteúdo em questão até o citado momento: imaginava uma reação de surpresa vinda dos alunos, ou negação, acreditava que eles determinariam ser falso o teorema por não ser fácil verificar a validade. Pensei que todos conseguiriam colorir os mapas com 4 cores, mas torcia para que não conseguissem, pois assim poderíamos comparar os métodos de coloração que utilizassem ou as ideias que tiveram para chegar a resultados diferentes.

Diante disso, visando auxiliar na luta diária de um professor que tenta motivar seus alunos a aprender matemática, surge a ideia de utilizar a coloração de mapas como um meio lúdico de apresentação da teoria dos grafos, fazendo o uso de história da matemática e das falas dos próprios alunos para despertar e cativar o interesse deles pelo tema. A coloração de mapas pode parecer uma simples dinâmica de colorir por colorir, já que muitos estão acostumados a fazer uso da coloração como hobby, descontração ou atividade secundária para finalização de um desenho. Mas nesse caso, atribui-se a ela o papel importante de ponte para chegar ao objetivo principal que é introduzir o conteúdo da teoria dos grafos e coloração de vértices.

Após decidido o conteúdo que iria ser trabalhado surge a seguinte dúvida: “Como vou ensinar isso para alunos do primeiro ano do ensino médio sendo que só tive contato com o tema na graduação em uma única aula?”. Já se originava, portanto, um objetivo: mostrar aos alunos que por mais complexo que algo possa parecer é possível compreender por meios os quais nem se imaginava e que ações simples do dia a dia estão envoltas em diversos conhecimentos de grande importância para a história.

4.2.1 Sobre as Etapas e Momentos

Etapa 1

- *1º momento: Inicialmente deve ser entregue um mapa das cidades/países vizinhos da região em que a atividade for aplicada, e solicitado aos alunos para que pintem essas cidades/países seguindo o critério de que regiões vizinhas sejam pintadas com cores diferentes.*

Nesta etapa é perceptível a indignação nos olhos de alguns alunos, devido ao fato de ser uma atividade simples, muitos pensam e até dizem em alto e bom som que isso seria perda de tempo, outros gostam da atividade, mas pelo fato de gostarem de colorir, e também há aquele tipo de aluno que sempre questiona “Porque temos que fazer isso professor, vou usar isso para quê?” e isso foi um ponto muito importante no desenvolvimento da

atividade. No fim esses mesmos alunos puderam perceber por si sós, sem receber dicas, qual era o objetivo final da atividade, pois a função do professor não é apenas transmitir conhecimento, mas dirigir o processo de assimilação do aprendiz, de acordo com Talizina (1988) [19].

- *2º momento: Com o desenvolver da aula o professor deverá mediar a atividade de maneira a fazer com que os alunos conversem entre si sobre os métodos que optaram por utilizar e o porquê de tais escolhas.*

Com o desenvolver da aula é importante a participação ativa do professor, de tal forma a propiciar o despertar da autonomia dos alunos. A partir da vivência, foi possível notar que os alunos tendem a elaborar argumentos consistentes a partir da lógica, e ainda mais quando discutem informações pertinentes à atividade. Exemplos disso foram os algoritmos de coloração que surgiram durante a aplicação. Algoritmo 1: O aluno pintou uma região e “pulou” o vizinho pois não podia ser colorido com a mesma cor, e continuou até que não fosse possível colorir mais regiões com aquela cor, então trocava-se a cor e recomeçava o processo; Algoritmo 2: O aluno escolheu 5 cores que gostava e foi colorindo o mapa, quando questionado respondeu “Eu gostei dessas cores, acho que vai ficar bonito”; Algoritmo 3: O aluno foi colorindo uma região e sua vizinha alternando duas cores, quando 3 regiões eram vizinhas entre si acrescentava outra cor, e assim por diante de acordo com a quantidade de regiões que eram vizinhas entre si. As situações descritas acima podem facilitar o aprendizado para esses alunos se feito um bom desenvolvimento pelo professor pois segundo Tavares (2004, p.57)[18], “É mais fácil construir o conhecimento, quando se inicia de uma ideia mais geral e inclusiva e se encaminha para ideias menos inclusivas”.

- *3º momento: Após terminarem de pintar os mapas deverá ser pedido para que anotem na própria folha a quantidade de cores que foram utilizadas para colorir o mapa. O professor deverá problematizar essa etapa questionando os alunos sobre essa quantidade, se ela se repetiu, se houve diversos valores, porque eles acreditam que isso pode ter ocorrido, se isso se repete em todos os mapas.*

Este momento é de grande importância para a conexão entre a teoria e a prática, essa relação abre caminhos emancipatórios norteadores para a formação de sujeitos, que pensam a sociedade de forma coerente aos preceitos do ser mais, afirma Fortuna (2016)[4]. O professor deve destacar as falas dos alunos, que muitas vezes envergonhados em dizer

o que pensam, acreditam estar errados, mas o importante é que consigam expressar suas ideias gerando discussão e produção de conhecimento em grupo. Nesta etapa alguns alunos tendem a dar palpites sobre qual é o foco da atividade e a criar hipóteses superficiais como por exemplo “... eu pinte com 5 cores, todos eu vou conseguir pintar com 5 então!”. Isso aflora sua vontade de confirmar essa teoria, o que nos leva à próxima etapa.

Etapa 2

- *1º momento: Seguindo a dinâmica da primeira Etapa, a partir das respostas dos alunos o professor deve fazer despertar a curiosidade os instigando para os próximos passos.*

O professor deve identificar e caracterizar as respostas que podem compor de maneira significativa a aprendizagem dos alunos, incentivando-os sempre a buscar o próximo passo e analisando o que fizeram até o momento. Podemos dizer que nessa etapa o professor assume o papel de mediador, que segundo Muniz (2007)[13], é ajudar a criança a dar sentido à sua ação e a criar ligações com saberes anteriores.

- *2º momento: A seguir os alunos serão divididos em dupla (ou trio caso a quantidade de alunos seja ímpar, ou a quantidade de alunos for grande) e entregará outro mapa (de preferência que seja um nível a mais em questão da dificuldade comparado ao primeiro mapa) para que façam a coloração. Cada aluno pintará uma região com uma cor, seguindo o critério apresentado na Etapa 1, até que todo mapa seja pintado, e destacarão a quantidade de cores utilizada, seguindo o mesmo processo de socializar e problematizar da etapa anterior. Para finalizar este momento o professor deve fazer com que os alunos cheguem a um consenso sobre a quantidade mínima de cores (4 cores).*

Vale destacar que este momento é o que pode gerar a maior quantidade de dúvidas com relação ao que deve ser feito, o importante é compreender que cada aluno tem seu tempo de assimilação e seu ritmo no processo de evoluir, determinado por uma série de acontecimentos em um sujeito específico, afirma Silva (2009)[17]. Em alguns casos a explicação com outras palavras ou vinda de um colega de classe pode ser uma grande aliada para enfrentar essa dificuldade. Quanto à finalização, a ideia é que seja feito um fechamento dos argumentos apresentados até então e uma retomada das informações, isso

pode facilitar a compreensão de conceitos que não foram assimilados por completo nas etapas anteriores.

- *3º momento: A partir das falas dos alunos sobre a quantidade de cores, deverá ser feita a explicação de como o teorema das quatro cores se encaixa na atividade, contando um pouco sobre sua história e origem. Deve ser apresentada também a solução para a questão exposta durante a atividade (Qual a coloração mínima para os mapas dados?) por meio de grafos, explicando também brevemente o que são grafos.*

Como esta atividade é voltada para inicialização da teoria dos grafos, se faz necessária uma abordagem que seja de fácil compreensão, ou seja, sem tantos termos técnicos, já que os mesmos serão trabalhados posteriormente com mais rigor. Neste momento, um pequeno apanhado do que foi trabalhado durante as duas aulas pode fazer com que os alunos busquem na memória informações mais completas e objetivas. “É necessário despertar novamente o gosto pela matemática, e que cada um possa descobrir seu verdadeiro potencial em produzir conhecimento.” (MUNIZ, 2007, p.25)[13]. É aqui onde o professor conclui os pensamentos, indagações e dúvidas levantadas, fazendo uso das ideias dos alunos e de suas experiências, ancorado em um bom estudo sobre a teoria discutida é possível gerar um diálogo coerente e assertivo com os alunos que aprendiam enquanto pintavam.

- *4º momento: Por fim, podem ser apresentadas algumas situações problemas para que tentem resolver e entreguem na aula seguinte. Essa atividade pode auxiliar na tomada de decisão do próximo passo a ser dado, onde, lembrando sempre do trabalho com o erro, o professor deve dar seguimento às aulas.*

Com o intuito de analisar se os alunos compreenderam os conceitos trabalhados se faz importante a aplicação de situações problemas onde

“...os estudantes vão exercitar as suas mais diversas capacidades intelectuais como também mobilizar estratégias das mais diversas naturezas para encontrar a resposta, tais como: criatividade, intuição, imaginação, iniciativa, autonomia, liberdade, estabelecimento de conexões, experimentação, tentativa e erro, utilização de problemas conhecidos, interpretação dos resultados...” (ROMANATTO, 2012, p.303)[15]

E o professor pode observar, para que seja possível intervir nos pontos onde houver maior dificuldade, ou constatar o sucesso em atingir seu objetivo. Acredita-se também na importância do trabalho com o erro, que tal como os acertos, são formas de pensar que revelam os limites e as possibilidades do raciocínio frente a um objeto de conhecimento, no caso os conceitos matemáticos, afirma Galvão et al (2014)[5], assim dando oportunidade para uma evolução constante com alto índice de aproveitamento.

- *Deve ser feita a partir das atividades com os mapas e a resolução dos problemas que deverão ser entregues. Também no decorrer das aulas observando o envolvimento dos alunos com a atividade, se interagiram com sua dupla e colegas de maneira a contribuir para o desenvolver da atividade, compreenderam, esclareceram suas dúvidas, se esforçaram para tentar resolver as questões levantadas. Recomenda-se que o educador faça anotações durante a aplicação da atividade, isso pode facilitar e organizar os dados coletados para a avaliação dos alunos.*

Considerando a sociedade atual, e sua obcecante busca por resultados práticos e rápidos, é essencial a organização de uma boa estrutura de avaliação visto que em alguns casos a única motivação de estudo dos alunos acaba sendo “ir bem na prova”, como confirma Menezes et al (2008, pg. 84)[12], “... ainda se insiste num ensino que exige dos alunos a repetição de exercícios, que posteriormente integrarão os testes avaliativos.”. O objetivo principal deste tópico deve ser verificar se o aluno conseguiu construir conhecimento no decorrer de cada etapa, se evoluiu suas percepções e ideias se adaptando de acordo com o que foi proposto. Cabe ao professor identificar a melhor forma de avaliar esses e outros pontos trabalhados a partir das particularidades do grupo no qual estiver aplicando a atividade.

4.2.2 Conclusão

Durante todo o processo de aplicação da atividade surgiram dúvidas por parte dos alunos, as quais não conseguiria nem imaginar, o interessante e belo desse caso está aí, pois, a partir dessas dúvidas foi possível apresentar explicações das mais diversas formas, com comparações, exemplos, teorias, palpites, indagações, mas sempre levando a um consenso e incentivando a participação de todos, buscando tornar o próprio aluno um construtor de conhecimento. A partir das informações postas no decorrer da análise percebe-se que o achismo apontado no início foi completamente superado, de maneira a contribuir e muito

para com o ensino e aprendizagem dos alunos, e ainda, tornando possível a realização de uma comparação de ideias, e com o passar do tempo evidenciaram uma evolução em relação à mentalidade. Pela maioria a atividade foi tida inicialmente como simples, trivial, ou apenas colorir, mas com o desenrolar dos momentos tornou-se visível a assimilação e conexão das informações feita pelos alunos. Eles perceberam o objetivo pelo qual aquela atividade estava sendo aplicada e compreenderam os conceitos apresentados, conceitos esses que só são comumente trabalhados na graduação. Assim, acredita-se constatar a capacidade de compreensão desse tipo de informação pelos alunos, e ainda, a relevância de sua aplicação para seu desenvolvimento educacional com relação ao raciocínio e assimilação de dados para introdução da Teoria dos Grafos e coloração de vértices.

4.3 Inter-Grafos

O objetivo desta atividade consiste em utilizar os conceitos da Teoria dos Grafos e da coloração de vértices para otimizar a organização de dias e horários dos jogos em torneios interclasses, seguindo certas restrições preestabelecidas. Essa proposta tem como público-alvo estudantes do 1º ano do Ensino Médio, podendo ser adaptada para outras turmas caso seja de seu interesse. Essa atividade tem sua estrutura baseada na proposta apresentada e aplicada 4.1, mas não foi aplicada.

4.3.1 Justificativa

Fazer uso dos grafos e da coloração de vértices se mostra muito eficaz com relação a distribuição dos horários e dias, de forma a economizar tempo durante a organização do evento esportivo incentivado pelas escolas, disponibilizando mais tempo aos alunos para diversão, enquanto praticam uma maneira nova de resolver problemas. O foco principal da atividade é evidenciar o quanto mais prático é utilizarmos essa teoria ao invés de outros métodos. No final da descrição haverá um exemplo da atividade.

4.3.2 Observações

Observação I: O conteúdo proposto para esta aula, deverá ser aplicado após os alunos terem trabalhado os seguintes temas: Teoria dos Grafos e coloração de vértices.

Observação II: É indicado que o professor confirme e liste, antes de aplicar a aula,

todos os horários e dias que estarão disponíveis para todos os jogos, e ainda, todas as modalidades que serão disputadas.

Observação III: Esta atividade pode ser realizada em parceria com os demais professores e outras turmas, onde cada turma pode ficar responsável por estruturar os horários de um determinado esporte e por fim organizar todos os horários, e também adaptada para qualquer outro tipo de organização que siga as ideias utilizadas nesse caso, contudo, utilizaremos como exemplo uma única turma para que fique mais objetiva a explicação.

4.3.3 Descrição da Atividade

Etapa 1:

1º momento: A princípio o professor deverá expor aos alunos a meta de “Organizar o interclasse” de acordo com as modalidades estabelecidas (Ex: Futsal, Vôlei, Basquete, Tênis de mesa, etc.), os horários disponíveis e as restrições (Ex: 8 horários na terça e 4 na quarta; Futsal e Vôlei não podem estar a menos de 2 horários de distância um do outro; Tênis de mesa só não pode bater o horário com basquete, etc.). A seguir o professor deverá dividi-los em equipes e cada uma delas ficará responsável por estruturar um interclasse com os esportes apresentados e de acordo com os horários e restrições.

2º momento: Após finalizarem a organização da maneira que julgarem mais prática, ou da forma que pensarem, será pedido que cada grupo explique aos demais qual foi o raciocínio por trás da divisão dos horários e como fizeram para chegar em tais resultados.

Adendo I: A ideia é que os alunos vejam como a tarefa pode ser mais complicada conforme se adicionam restrições, ou o acréscimo de mais esportes, para que posteriormente possamos utilizar da teoria para facilitar o processo.

3º momento: Deve ser feita uma junção das ideias apresentadas, observando onde houve mais dificuldade, para que seja possível fazer a conexão dessas questões à frente com o desenvolver das atividade. No fim da aula indicamos que seja feito um fechamento lembrando o que foi visto e qual será o desenvolver nas próximas aulas.

Adendo II: O ideal é que, antes de dar continuidade à atividade, seja feita no início da aula uma revisão do que foi visto na aula anterior, ainda mais se não forem aulas seguidas.

Etapa 2:

1º momento: Posteriormente começamos a questionar os alunos se poderia existir um método mais fácil de organizar os horário e modalidades, deixar que discutam um pouco entre si e cheguem a uma conclusão (lembrando que esta etapa ainda será com as equipes

formadas). Espera-se que recordem da teoria dos grafos que foi trabalhada anteriormente e dos problemas que comumente acompanham tal teoria. Caso não, o professor deverá usar de seus artifícios ou argumentos para que tentem fazer essa associação, indicamos uma leitura aprofundada sobre o tema para que facilite a argumentação.

2º momento: A partir daqui os alunos já devem perceber a relação entre os esportes, os horários e as restrições, então será pedido para que organizem novamente os horários dos jogos de acordo com a forma anterior mas utilizando dos grafos e da coloração de vértices. Indica-se que o professor oriente os alunos a utilizar as informações do caderno de anotações, caso tenham o costume de anotar, para que consigam sanar dúvidas, caso contrário tirem dúvidas com ele.

Adendo III: Nesse 2º momento, evite dar respostas diretas aos alunos, faça com que eles investiguem e descubram por conta própria os melhores meios de realizar a organização dos jogos.

3º momento: Para finalizar esta aula, peça para que comparem os dois métodos utilizados e cheguem às suas próprias conclusões, e lembre-se de realizar o fechamento como citado no final da aula anterior, destacando a relevância do método.

Etapa 3:

1º momento: A partir dos argumentos dos alunos o professor pode fazer uma breve explicação de como essa teoria pode facilitar na resolução de problemas como esse e muitos outros. (Falamos um pouco mais sobre isso no capítulo 2 deste trabalho).

2º momento: Por fim, os horários para o interclasse estarão todos organizados e os alunos poderão jogar e aproveitar da melhor forma. Como continuidade e para melhor fixação das ideias trabalhadas é sugerida a aplicação de alguns problemas a serem resolvidos individualmente, ou como tarefas de casa, assim tornando possível identificar os pontos onde há maior dificuldade para que possam ser trabalhados em seguida.

4.3.4 Avaliação

Deve ser feita a partir do decorrer das aulas, observando o envolvimento dos alunos com a atividade, se realizaram o que foi pedido, compreenderam, esclareceram suas dúvidas, se esforçaram para tentar resolver as questões levantadas. Recomenda-se que o educador faça anotações durante a aplicação da atividade, se possível com a utilização de uma tabela listando os pontos importantes, isso pode facilitar e organizar os dados coletados para a avaliação dos alunos.

4.3.5 Sugestões de problemas

1) Em determinada escola haverá uma semana de provas daqui a cinco dias. A questão é que ainda não foram distribuídos os dias que cada professor ficará responsável por aplicar cada prova. Sabendo que:

João só pode aplicar prova na segunda;

Maria o mesmo horário que João;

Lucas pode qualquer dia e horário;

Gina só pode na quinta e na sexta;

Emanuel só pode na quinta;

Valter só pode na sexta;

Luna só pode na quarta;

e que as provas serão aplicada nessa ordem:

Dia da Semana	Prova
Segunda-Feira	Português
Terça-Feira	Matemática
Quarta-Feira	Inglês
Quinta-Feira	Ciências
Sexta-Feira	Física

Quais provas cada um dos professores deverá aplicar?

4.3.6 Exemplo da atividade

Lembrando que o exemplo a seguir poderia ser resolvido de forma direta sem grandes dificuldades, por tentativa e erro. Porém, caso existissem mais esportes ou mais restrições, poderia ser bem complicada essa análise, e daí a Teoria dos Grafos torna-se uma grande aliada.

INTER-GRAFOS-EDIÇÃO 2023

Esportes: *Futsal, Vôlei, Basquete, Handball, Ping-pong*

Horários disponíveis:

Segunda-Feira: Quatro horários no período da manhã.

Terça-Feira: Quatro horários no período da manhã.

Quarta-Feira: Quatro horários no período da manhã e quatro no período da tarde.

Quinta-Feira: Quatro horários no período da tarde.

Restrições

- Futsal não pode ser no mesmo dia que nenhum outro esporte.
- Basquete e handball precisam ser no mesmo dia.
- Ping-pong pode ser em qualquer dia e horário.
- Futsal e handball precisam de um horário de diferença, no mínimo.

■ Segunda-Feira ■ Terça-Feira ■ Quarta-Feira ■ Quinta-Feira

Futsal (F)

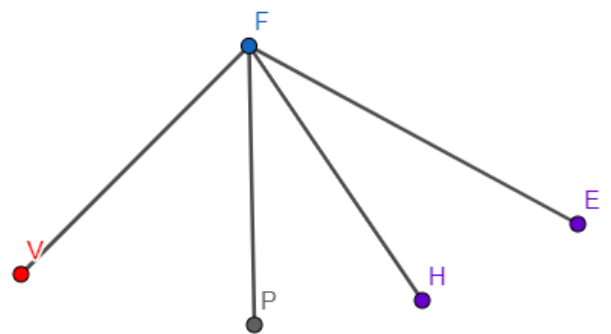
Vôlei (V)

Basquete (E)

Handball (H)

Ping-pong (P)

Figura 4.1: Grafo Solução



Fonte: Elaborado pelo autor no software Geogebra (2023)

Solução: Portanto, de acordo com o grafo solução, teremos vôlei na segunda-feira, futsal na terça-feira, basquete e handball na quarta-feira e ping-pong na quinta-feira.

CAPÍTULO 5

Considerações Finais

Para finalizar essa caminhada, temos a tão esperada “chegada” após interessantes quatro passos que se complementam e carregam uma grande história, a qual nos mostra simbolicamente que o simples pode não ser fácil de provar e que situações complexas podem ser resolvidas de maneira descomplicada e organizada. A questão levantada inicialmente foi a seguinte “Dada sua importância e aplicabilidade porque o Teorema das 4 Cores e a Teoria dos Grafos não são amplamente conhecidos, utilizados ou ao menos apresentados nos ambientes de escolarização básica?” e a partir das discussões abordadas em todo o decorrer do trabalho chegou-se a uma resposta que talvez não agrade a todos os leitores, resposta essa que será apresentada após alguns apontamentos.

Percebe-se, durante todo o trabalho, a necessidade da base teórica utilizada, para comprovação das informações discutidas e ainda como fonte de conhecimento explorada para enriquecer o planejamento das atividades desenvolvidas na pesquisa, tornando o processo de estruturação do texto facilitado e acessível.

A ideia de algo ser provado com uso da tecnologia (nesse caso computadores), não era muito bem vista no período da demonstração do Teorema das Quatro Cores, mas mesmo assim, ao que os estudos indicam, os matemáticos e filósofos da época aceitaram o fato de ser necessário o uso das máquinas para facilitar o processo. Muitos enfrentam dilemas similares a esse nos dias atuais, onde o uso de ferramentas virtuais está cada vez mais presente nas salas de aula e em todo o ambiente escolar, mas da mesma forma encontramos pessoa receosas que relutam em utilizar desses meios para ensinar ou aprender. Deixo

aqui uma constatação valiosa para que repensem seus pré-conceitos sobre esse assunto: sem o uso de computadores o Teorema das Quatro Cores poderia ter sido provado em anos, décadas ou séculos depois, e até mesmo não ter sido provado, e todas as utilidades, benefícios, melhorias que surgiram da sua demonstração poderiam não existir.

Quando falamos de um resultado não podemos deixar de observar o percurso e desafios que foram enfrentados até sua obtenção, e até mesmo os benefícios gerados ao longo do processo. Nesse sentido destaca-se firmemente a relevância do Teorema das 5 Cores, que foi o primeiro passo rumo à demonstração do teorema principal trazendo consigo ideias que foram primordiais para o sucesso da prova. E ainda hoje serve de base para inúmeros trabalhos que corroboram para o desenvolvimento da matemática.

Sempre que planejamos uma atividade imaginamos como será a recepção dela por aqueles que serão os “alunos da vez”, isso possibilita uma modelagem adequada para cada público, mas acima de tudo permite que o professor verifique sua capacidade de identificar as necessidades de determinado grupo, ou seja, ser capaz de saber através do convívio e da observação qual atividade, exercício, didática ou linguagem utilizar a fim de fazer florescer o máximo de suas capacidades. Isso faz com que os pensamentos sobre o conteúdo amadureçam na mente do aluno e do próprio professor. Assim, a análise vem para destacar esse fato, trazendo a evolução do pensamento com o desenvolver das aulas, mostrando uma boa interação para com um assunto até então desconhecido e incentivando a elaboração e aplicação de mais atividades como essa.

Quando observamos a estrutura de cada tópico abordado constatamos também uma ligação forte entre teoria e prática, que em todo momento se faz necessária ou se evidencia em alternância, hora estamos mais na teoria, hora na prática, de forma que podemos concluir para esse caso em específico que, talvez, sem a prática não haveria o surgimento do Problema das Quatro Cores, e sem a teoria não haveria sua demonstração.

Enfim, a resposta se inicia da seguinte forma: Algo pode ser simples, belo e útil, mas sempre tem que ser aos olhos de alguém, ou seja, apesar de toda relevância, aplicabilidade e importância do Teorema das Quatro Cores e da Teoria dos Grafos, de certo modo, ao que indicam os estudos, não possuem visibilidade suficiente para serem utilizados na Educação Básica, além de ser um conteúdo que necessita de uma base teórica consideravelmente maior que as convencionalmente utilizadas, junto a uma dedicação maior para a elaboração das aulas e adaptação de problemas, pois como ainda não há muitos dados sobre esse tipo de aplicação uma boa parte é o que chamamos de “criação própria”.

Assim, aponta-se também uma questão que pode ser crucial para essa não implementação: há indiscutivelmente uma falta de apoio à formação continuada de professores na educação básica, onde não existe, na maioria das vezes, a possibilidade de licença remunerada para formações ou cursos voltados para esse e outros assuntos. Logo, caso necessite de um aprimoramento ou de um maior período para elaboração das aulas o professor terá de utilizar do seu tempo pessoal, o que acaba desmotivando muitos professores, pois esse tempo comumente costuma ser escasso, e acabam optando por conteúdos que possuem base de dados pronta ou que já são normalmente trabalhados nos ambientes de ensino.

De fato, não foi possível concluir que esse seja o real motivo para a não implementação, mas há grandes indícios de que esse possa ser um dos principais. Diante de todo o convívio com os professores que cederam suas aulas para aplicação da atividade ficou nítida essa questão. Em contrapartida encontram-se professores que realmente não possuem o menor interesse em inovar ou aprimorar seus métodos de ensino, muito menos alterar os conteúdos que são trabalhados, seguem à risca o plano de curso disponibilizado pelo Estado, dizendo que não é indicado realizar modificações. Porém não se enquadra como modificação, pois o próprio Plano de Curso abre espaço para esse tipo de aplicação, onde fica a critério do professor elaborar as atividades a serem trabalhadas para alcançar determinadas habilidades e competências.

Contudo, há também aqueles que lutam por uma educação transformadora, com o uso de diferentes metodologias e conhecimentos que se adaptam de acordo com a realidade de cada aluno, e para esses professores deixo declarado meu apreço e admiração, mas, saibam que se realmente possuem o desejo de continuar em seu caminho de maneira a colaborar para a formação de cidadãos íntegros, criativos e resolvedores de problemas, devem ter como objetivo conquistar outras pessoas para que se juntem a você e façam parte dessa mudança.

Com isso, espera-se que esse trabalho sirva de incentivo e para orientação daqueles que se interessaram pelo mundo da coloração de grafos, mapas e pelos teoremas trabalhados, adianto que não irão se arrepender de se aventurarem pelas combinações de cores e ideias que surgem na discussão sobre esse tema, e que vocês possam pensar, refletir e disseminar os conteúdos trabalhados aqui, de maneira a contribuir para sua formação, pesquisa ou seu ambiente de ensino-aprendizagem.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. História da matemática. **Editora Blucher**, 2019.
- [2] DREAMSTIME. *In:* Figuras dos Condados da Inglaterra. Disponível em: https://pt.dreamstime.com/mapa-dos-condados-cerimoniais-da-inglaterra-brancos-do-pa_-C3%ADs-europeu-image177564312.
- [3] FARAGO, J. L. **Do ensino da História da Matemática a sua contextualização para uma aprendizagem significativa**. Dissertação de Mestrado. Florianópolis: UFSC, 2003.
- [4] FORTUNA, Volnei. **A relação teoria e prática na educação em Freire**. *Revista Brasileira de Ensino Superior*, v. 1, n. 2, p. 64-72, 2016. Disponível em: [file:///C:/Users/User/Desktop/\(VOLNEI%20FORTUNA\)%20A%20rela%C3%A7%C3%A3o%20teoria%20e%20pratica%20na%20educa%C3%A7%C3%A3o%20de%20freire.pdf](file:///C:/Users/User/Desktop/(VOLNEI%20FORTUNA)%20A%20rela%C3%A7%C3%A3o%20teoria%20e%20pratica%20na%20educa%C3%A7%C3%A3o%20de%20freire.pdf)
acesso em: 12/04/2023
- [5] GALVÃO, S. A.; BARALDI, P. A.; FERREIRA, G. J.; CAVALCANTI, L. **O erro no processo de ensino-aprendizagem da matemática: errar é preciso?**. *Boletim GEPEM*, [S. l.], n. 64, p. 57–70, 2014. Disponível em: <https://doi.editoracubo.com.br/10.4322/gepem.2015.005> Acesso em: 05/04/2023.

- [6] GASPAR, M. T. O Teorema das 4 cores: Uma história e uma proposta pedagógica para o Ensino Básico. **Belém: Editora da SBHMat**, 2009.
- [7] JÚNIOR, M; OSVALDO, D. **O Método de Distribuição de Cargas**. 2007.
- [8] LEWARD, O. **Graph Theory - The Four Color Theorem**. Uppsala: Department of Mathematics - Uppsala University, 2014. 31 p. Disponível em: <<https://uu.diva-portal.org/smash/get/diva2:749857/FULLTEXT01.pdf>>. Acesso em: 01 out. 2022.
- [9] LIMA, C. L. G. **Um estudo sobre teoria dos grafos e o Teorema das quatro cores**. 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.
- [10] LIMA, C. L. G. de. **Um estudo sobre teoria dos grafos e o teorema das quatro cores**. 2016. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.
- [11] LUIZ. A. G. **Coloração de grafos e suas aplicações**. V Workshop de Tecnologia da Informação do Sertão Central Universidade Federal do Ceará – Campus Quixadá. 13 de maio de 2015. Disponível em: <https://www.ic.unicamp.br/~atilio/slidesWtisc.pdf>> Acesso em: 18 de ago de 2022.
- [12] MENEZES, Luís, S.; LEONOR, S.; HELENA, G.; & RODRIGUES, C. **Avaliação em matemática: problemas e desafios**. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2008. Disponível em: https://repositorio.ipv.pt/bitstream/10400.19/1152/4/Atas_eiem_2007_SP.pdf Acesso em: 11/04/2023.
- [13] MUNIZ, C. A. **Pedagogia Educação e Linguagem matemática**. Brasília: Universidade de Brasília, 2007. Disponível em: https://www.professoresdematematica.com.br/wa_files/mdulo%201%20de%20educacao%20matemtica%20-%20significados%20do%20aprender%20e%20ensinar%20matemtica%20-%20cristiano.pdf Acesso em: 29/03/2023
- [14] ROBERTSON, Neil et al. **The four-colour theorem**. journal of combinatorial theory, Series B, v. 70, n. 1, p. 2-44, 1997
- [15] ROMANATTO, M. C. **Resolução de problemas nas aulas de Matemática**. **Revista Eletrônica de Educação**. São Carlos, SP: UFSCar, v. 6, no. 1, p.299-311,

- mai. 2012. Disponível em: <https://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/413/178> acesso em: 04/04/2023
- [16] SOUSA, L. O teorema das quatro cores. Millenium, p. 125-151, 2001. **TEOREMA DE QUATRO CORES. String Fixer**, 2022. Disponível em: https://stringfixer.com/pt/Four-color_theorem Acesso em: 18 de ago de 2022.
- [17] SILVA, J. A. da. **O sujeito psicológico e o tempo da aprendizagem**. 2009. 22f. Artigo. Faculdade de Educação, Universidade Federal de Pelotas: Rio Grande do Sul, 2009. Disponível em : <file:///C:/Users/User/Desktop/1733-2358-1-PB.pdf> acesso em: 30/03/2023
- [18] TAVARES, R. **Aprendizagem significativa**. Revista conceitos. 2004. 10(55), 55-60. Disponível em: [https://cmapspublic3.ihmc.us/rid=1227265963609\\$__\\$1109896658\\$__\\$6327/AprendizagemSignificativaConceitos.pdf](https://cmapspublic3.ihmc.us/rid=1227265963609$__$1109896658$__$6327/AprendizagemSignificativaConceitos.pdf) Acesso em: 04/04/2023
- [19] TALÍZINA, N. Psicología de la enseñanza. **Editorial Progreso**. Moscú URSS, 1988.
- [20] WILSON, R. A. **Graphs, colourings and the four-colour theorem**. OUP Oxford, 2002.