
Localização de estados quânticos em cadeias de spins com anisotropia

Márcio Guimarães de Sousa



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Uberlândia
2024

Márcio Guimarães de Sousa

Localização de estados quânticos em cadeias de spins com anisotropia

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física de Materiais da Universidade Federal de Uberlândia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física de Materiais.

Área de concentração: Física da matéria condensada

Orientador: Prof. Dr. Edson Vernek

Uberlândia

2024

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

S725
2024

Sousa, Márcio Guimarães de, 1998-
Localização de estados quânticos em cadeias de spins
com anisotropia [recurso eletrônico] / Márcio Guimarães
de Sousa. - 2024.

Orientador: Edson Vernek.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
Uberlândia, Pós-graduação em Física.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2024.141>
Inclui bibliografia.

1. Física. I. Vernek, Edson, 1973-, (Orient.). II.
Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em
Física. III. Título.

CDU: 53

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Física				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado				
Data:	Quatro de março de 2024	Hora de início:	09:00	Hora de encerramento:	11:21
Matrícula do Discente:	12212FIS003				
Nome do Discente:	Marcio Guimarães de Sousa				
Título do Trabalho:	Localização de estados quânticos em cadeias de spins com anisotropia				
Área de concentração:	Física				
Linha de pesquisa:	Sistemas Fortemente Correlacionados				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	N.A.				

Reuniu-se por meio de videoconferência, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Uberlândia - UFU, assim composta: Professores Doutores: George Balster Martins-INFIS/UFU, Vivian Vanessa França Henn - UNESP e Edson Vernek - INFIS/UFU, orientador do discente.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Edson Vernek, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Vivian Vanessa França Henn, Usuário Externo**, em 04/03/2024, às 11:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Edson Vernek, Presidente**, em 04/03/2024, às 11:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **George Balster Martins, Professor(a) do Magistério Superior**, em 04/03/2024, às 13:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5236051** e o código CRC **8449E796**.

Referência: Processo nº 23117.016706/2024-67

SEI nº 5236051

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha sincera gratidão a todas as pessoas que contribuíram para o sucesso deste trabalho e para a conclusão desta dissertação.

Primeiramente, quero expressar minha profunda gratidão ao meu orientador, o Professor Edson Vernek, pela orientação paciente, apoio incansável e valiosas contribuições ao longo deste processo. Seu comprometimento e paixão pelo conhecimento foram inspiradores e fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Minha gratidão se estende aos colegas de laboratório e de curso, cuja colaboração e apoio foram fundamentais para superar os desafios acadêmicos e enriquecer meu entendimento. As discussões e trocas de experiências foram essenciais para o desenvolvimento das ideias apresentadas nesta dissertação.

Agradeço também à minha família pelo amor incondicional, paciência e apoio constante ao longo dessa jornada acadêmica.

Por fim, quero expressar minha gratidão a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para este trabalho. Cada interação, conselho e encorajamento foram fundamentais para a conclusão deste projeto.

Resumo

Os princípios da ergodicidade e da termalização constituem a base da mecânica estatística, estabelecendo que um sistema de muitos corpos perde progressivamente sua informação local à medida que evolui no tempo. No entanto, esses princípios podem ser perturbados quando a dinâmica de termalização leva à conservação da informação local, como observado no fenômeno conhecido como localização de muitos corpos. As cadeias quânticas de spins fornecem uma plataforma fundamental para explorar a dinâmica de sistemas quânticos de muitos corpos fechados e interagentes. Este estudo explora a dinâmica de uma cadeia de spins com $S \geq 1/2$ dentro do modelo $J_1 - J_2$ (ou modelo de Majumdar-Ghosh), incorporando um campo magnético não uniforme e anisotropia de íon único. Utilizando diagonalização numérica exata, revelamos que um campo magnético com gradiente quase constante suprime a termalização, um fenômeno denominado localização de muitos corpos de Stark (SMBL), previamente observado em cadeias com $S = 1/2$. Além disso, nossas descobertas revelam que a presença apenas da anisotropia de íon único é suficiente para impedir a termalização no sistema. Interessantemente, quando as magnitudes do campo magnético e da anisotropia são comparáveis, elas competem, favorecendo a delocalização. Apesar do potencial obstáculo da SMBL pela anisotropia de íon único nesse cenário, ela introduz um mecanismo alternativo para a localização. Nossa interpretação, considerando as restrições energéticas locais e ressonâncias entre estados próprios degenerados, não apenas fornece insights sobre a SMBL, mas também abre caminhos para investigações experimentais futuras sobre a fenomenologia enriquecida de sistemas localizados desordenados livres com $S \geq 1/2$.

Palavras-chave: Termalização. Localização. Sistemas de muitos corpos.

Abstract

The principles of ergodicity and thermalization constitute the foundation of statistical mechanics, establishing that a many-body system loses progressively its local information as it evolves in time. Nevertheless, these principles can be disrupted when thermalization dynamics lead to the conservation of local information, as observed in the phenomenon known as many-body localization. Quantum spin chains provide a fundamental platform for exploring the dynamics of closed interacting quantum many-body systems. This study explores the dynamics of a spin chain with $S \geq 1/2$ within the $J_1 - J_2$ (or Majumdar-Ghosh) model, incorporating a non-uniform magnetic field and single-ion anisotropy. Employing exact numerical diagonalization, we unveil that a nearly constant-gradient magnetic field suppress thermalization, a phenomenon termed Stark many-body localization (SMBL), previously observed in $S = 1/2$ chains. Furthermore, our findings reveal that the presence of single-ion anisotropy alone is sufficient to prevent thermalization in the system. Interestingly, when the magnitudes of the magnetic field and anisotropy are comparable, they compete, favoring delocalization. Despite the potential hindrance of SMBL by single-ion anisotropy in this scenario, it introduces an alternative mechanism for localization. Our interpretation, considering local energetic constraints and resonances between degenerate eigenstates, not only provides insights into SMBL but also opens avenues for future experimental investigations into the enriched phenomenology of disordered free localized $S \geq 1/2$ systems.

Keywords: Thermalization. Localization. Many-body systems..

Lista de ilustrações

- Figura 1 – Ilustração esquemática do modelo referente a Eq. (18). Em uma rede finita unidimensional, usando estados de partícula única de férmions sem spin, onde o mecanismo que leva a termaliza o sistema é o termo de acoplamento J . os estados são exponencialmente localizados quando inserido um campo elétrico suficientemente forte. Para um campo estritamente uniforme, isso é equivalente a localização de Wannier-Stark [1]. Quando as partículas interagem via interações entre vizinhos V , elas compartilham muitas propriedades com a fenomenologia bem estudada de MBL (Many-Body Localization). Imagem retira da Ref. [2]. 33
- Figura 2 – Diferença ΔS entre o emaranhamento bipartido nos casos interagente e não interagente. O parâmetro α denota o efeito cumulativo da não uniformidade do campo no potencial no sítio final, o hopping foi em $J = 2$, e foi considerado uma cadeia de $L = 16$ sítios com ocupação média. Imagem retira da Ref. [2]. 34
- Figura 3 – Imbalance vs t para um sistema com $L = 16$, de um estado inicial CDW. As diferentes curvas representam diferentes intensidades de campo γ com $\alpha = 0.5$. Inseto à esquerda: Visualização do potencial correspondente. Inseto à direita: Imbalance médio I nos tempos $10^{13} \geq \frac{t}{J} \geq 10^{11}$. Imagem retira da Ref. [2]. 35
- Figura 4 – Localização em uma cadeia de spins $1/2$, para diferentes valores de h_0 e θ , com $D = 0$, utilizando a média do imbalance \bar{I} em função de h_0 e a média da entropia de emaranhamento \bar{S}_ℓ em função de h_0 . O sistema é configurado no espaço $S_z = 0$, com $L = 12$ e $L = 20$, apresentando uma ilha de magnetização de $1/2$ no meio da cadeia e $-1/2$ nas extremidades. 43

Figura 5	– Imbalance em função do tempo para a localização de muitos corpos stark para h_0 crescente e $D = 0$. Diferentes curvas correspondem a diferentes valores de θ (ver legenda). O sistema consiste em $L = 12$ spins, e o estado inicial corresponde a uma ilha de spins com $S_j^z = 3/2$ no meio da cadeia, enquanto todos os outros têm $S_j^z = -3/2$	45
Figura 6	– Imbalance em função do tempo para a localização de muitos corpos stark com anisotropia de íon único para D crescente e $h_0 = 0$. Diferentes curvas correspondem a diferentes valores de θ (ver legenda). O sistema consiste em $L = 12$ spins, e o estado inicial corresponde a uma ilha de spins com $S_j^z = 3/2$ no meio da cadeia, enquanto todos os outros têm $S_j^z = -3/2$	46
Figura 7	– Imbalance em função do tempo com $\theta = 0$ fixo para ambos os painéis. (a) $D = 0$ e vários valores de campo h_0 . (b) $h_0 = 0$ e variando o valor da anisotropia D . O sistema e o estado inicial aqui é o mesmo que foi utilizado nas Figuras 5 e 6	47
Figura 8	– Efeito de um campo magnético variável linearmente (a) e uma anisotropia constante (b) na energia local de uma cadeia de spins $S = 3/2$. (c) Representação do espaço de Hilbert e estado inicial típico dentro do espaço de Hilbert para uma cadeia de spins $3/2$. As regiões brancas englobam apenas estados nos quais todos os spins têm sua projeção de spin no eixo z sendo máximo ou mínimo, ou seja, suas projeções são $S_j^z \pm 3/2$. A região mais escura contém estados nos quais alguns dos seus spins têm projeções $S_j^z = \pm 1/2$. As curvas vermelha e violeta representam estados iniciais com uma e duas paredes de domínio, respectivamente. Os pontos marcam as regiões ativas no tempo $t = 0^+$ no operador de evolução temporal $\exp(-iH0^+/\hbar)$	48
Figura 9	– Densidade de estados em função da energia para $D = 0.5$ para $J = 0$ (a), $J = 0.1$ (b), $J = 1$ (c) e $J = 0.4$ (d). Para todos eles, usamos o subespaço de $S_z = 0$, com a ilha de magnetização de spin para cima no meio para $L = 8$	49
Figura 10	– Densidade de estados em função da energia para $D = 0$ para $J = 1$ (a), $J = -1$ (b). Para todos eles, usamos o subespaço de $S_z = 0$, com a ilha de magnetização de spin para cima no meio para $L = 8$	50
Figura 11	– Evolução temporal do imbalance para diferentes condições iniciais (curvas diferentes). Os painéis superiores e inferiores correspondem a $D = 0$ e $D = 4$, enquanto os painéis esquerdo e direito correspondem a $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi/3$. Para todos os painéis, use uma cadeia de espíns $3/2$ com $L = 12$ e $h_0 = 0$. Todos os estados iniciais aqui estão no subespaço $S_z = 0$	51

Figura 12 – Evolução temporal do imbalance para diferentes valores de h_0 e D . O sistema e estado inicial aqui e o mesmo utilizado nas Figuras 5 e 6. As curvas correspondem a diferentes valores de θ (veja a legenda).	52
Figura 13 – Evolução temporal da entropia de emaranhamento para diferentes valores de h_0 e D . O sistema e a condição inicial aqui são os mesmos utilizados nas Figuras 12. As curvas correspondem a diferentes valores de θ (veja a legenda).	52
Figura 14 – (a) Entropia de participação vs $\ln \mathcal{N}$ para $(D, h_0) = (0, 0)$ (círculos vermelhos), $(D, h_0) = (8, 0)$ (quadrados pretos) e $(D, h_0) = (0, 8)$ (triângulos ciano). Linhas tracejadas correspondem a um ajuste linear das curvas e servem como guia visual. Para alterar o tamanho do espaço de Hilbert, L inclui todos os números pares de 4 a 14. (b) e (c) mostram, respectivamente, a média temporal posterior do imbalance e da entropia como função de D (para $h_0 = 0$) (quadrados vermelhos) e h_0 (para $D_0 = 0$) (triângulos azuis) para $L = 12$. Para todos os painéis, definimos $\theta = 0$ e usamos um estado inicial do tipo $ \cdots, \bar{3}, 3, 3, \bar{3}, \cdots\rangle$, que corresponde a uma ilha de spins $S_j^z = 3/2$ no meio de uma cadeia de spins $S_j^z = -3/2$	54
Figura 15 – (a) Entropia de participação Eq. 28 vs $\ln(\mathcal{N})$ para $(D, h_0) = (0, 0)$ (círculos vermelhos), $(D, h_0) = (8, 0)$ (quadrados pretos) e $(D, h_0) = (0, 8)$ (triângulos ciano). Linhas tracejadas correspondem a um ajuste linear das curvas e servem como guia visual. Para alterar o tamanho do espaço de Hilbert, L inclui todos os números pares de 4 a 14. (b) mostra D_q que é a inclinação das retas que ajustam os pontos da EP em função do campo e anisotropia. O sistema e estado inicial usados aqui são os mesmos da Figura 14.	55
Figura 16 – imbalance em função do tempo para uma cadeia de spin-1 com $h_0 = 0$ fixo e D crescente. As curvas correspondem a diferentes valores de θ . Utilizamos uma cadeia com $L = 12$ spins, onde o estado inicial consiste em uma ilha de seis spins “up” no meio da cadeia, enquanto todos os outros spins estão “down”.	56
Figura 17 – imbalance em função do tempo para uma cadeia de spin-1 com $D = 0$ fixo e h_0 crescente. As curvas correspondem a diferentes valores de θ . Utilizamos uma cadeia com $L = 12$ spins, onde o estado inicial consiste em uma ilha de seis spins “up” no meio da cadeia, enquanto todos os outros spins estão “down”.	57

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Organização da Dissertação	18
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	19
2.1	Termalização em sistemas quânticos fechados	19
2.1.1	Hipótese da termalização dos auto-estados - ETH	21
2.2	Sistemas localizados	23
2.2.1	Integrabilidade	24
2.2.2	Localização de partícula única	25
2.2.3	localização de muitos corpos	27
2.2.4	Definição da fase MBL	28
2.2.5	Transição de fase de localização de muitos corpos	30
2.2.6	Localização de muitos corpos livre de desordem	31
3	MODELO E MÉTODOS	37
3.1	Sistema utilizado	37
3.2	Análise da Evolução temporal	38
3.3	Imbalance	39
3.4	Entropia de emaranhamento	40

3.4.1	Entropia de participação	40
3.5	Densidade de estados	41
3.6	Resultados numéricos	42
4	RESULTADOS	43
4.1	Sistema de Spin 1/2: efeito do campo magnético	43
4.2	Sistema de spin 3/2: efeito do campo magnético e anisotropia de íon único.	44
4.3	Interrelação entre anisotropia e campo magnético.	51
4.4	Sistema de spin 1: efeito de anisotropia de íon único.	56
5	CONCLUSÃO	59
	REFERÊNCIAS	61

Introdução

Na mecânica quântica, um determinado estado inicial $|\psi(0)\rangle$ de um sistema quântico fechado evoluirá unitariamente ao longo do tempo de acordo com o operador Hamiltoniano H associado ao sistema. Essa evolução temporal é descrita pela equação de Schrödinger, que é fundamental na teoria quântica. A equação de Schrödinger para a evolução temporal do estado quântico $|\psi(t)\rangle$ é dada por

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle, \quad (1)$$

onde \hbar é a constante de Planck reduzida ($h/2\pi$), i é a unidade imaginária, $\frac{d}{dt}$ representa a derivada em relação ao tempo, H é o operador Hamiltoniano que descreve toda a física do sistema fechado. A solução geral desta equação para um H que independe do tempo é dada por

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} |\psi(0)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle \quad (2)$$

onde $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$ é o conhecido operador de evolução temporal. Essa expressão mostra como o estado quântico evolui ao longo do tempo devido à ação do Hamiltoniano. É importante notar que a evolução unitária preserva a norma do estado quântico, garantindo a conservação da probabilidade. Vamos ver isso em termos matemáticos. Se $U(t)$ é o operador de evolução temporal e $|\psi(0)\rangle$ é o estado inicial do sistema, então o estado do sistema em um tempo t posterior é dado por

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle. \quad (3)$$

A norma do estado $|\psi(t)\rangle$ então será

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | U^\dagger(t) U(t) | \psi(0) \rangle, \quad (4)$$

onde $U^\dagger(t)$ é o conjugado adjunto de $U(t)$. Como os operadores unitários satisfazem $U^\dagger(t)U(t) = U(t)U^\dagger(t) = \mathbf{1}$ (onde $\mathbf{1}$ é o operador identidade), temos

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | \psi(0) \rangle. \quad (5)$$

Isso mostra que a norma do estado $|\psi(t)\rangle$ é igual à norma do estado inicial $|\psi(0)\rangle$, ou seja, a norma do estado quântico é preservada durante a evolução temporal.

No âmbito da física estatística, uma suposição fundamental é que sistemas quânticos fechados e genéricos tendem a termalizar sob sua própria dinâmica [3, 4]. Isso implica que, sob a evolução temporal unitária, a matriz de densidade reduzida de qualquer estado inicial genérico $|\Psi(0)\rangle$ tenderá a evoluir em direção ao estado de equilíbrio de Gibbs dentro desse subsistema.

A matriz de densidade reduzida, que é uma quantidade física crucial nesse contexto, é definida a partir da matriz de densidade completa. Suponha que temos um sistema composto por vários subsistemas. A matriz de densidade completa ρ descreveria o estado quântico de todo o sistema. No entanto, a matriz de densidade reduzida $\rho^{(n)}$ está associada à descrição estatística de apenas um subconjunto de n partes do sistema.

A definição geral da matriz de densidade reduzida para n subsistemas, denotada como $\rho^{(n)}$, é obtida pelo traço parcial da matriz de densidade completa sobre as variáveis associadas aos $N - n$ subsistemas restantes

$$\rho^{(n)} = \text{Tr}_{N-n}(\rho). \quad (6)$$

Aqui, Tr_{N-n} representa o traço parcial, e N é o número total de subsistemas no sistema. Essa operação de traço parcial essencialmente "ignora" as variáveis dos subsistemas que não fazem parte do subconjunto de n subsistemas, resultando na matriz de densidade reduzida que descreve estatisticamente esse subconjunto específico.

Essa quantidade é crucial para analisar como a informação estatística se distribui em diferentes partes de sistemas quânticos complexos durante sua evolução temporal. A tendência em direção ao estado de equilíbrio de Gibbs é então estudada através da evolução temporal da matriz de densidade reduzida. Dado que qualquer estado inicial pode ser expandido por autoestados do Hamiltoniano, a matriz reduzida construída com

os autoestados também deve evoluir em direção ao equilíbrio. Essa é a ideia subjacente à conhecida hipótese da termalização de autoestados (ETH) [5, 6, 7].

À primeira vista, parece que qualquer estado fora do equilíbrio evolui em direção ao equilíbrio. No entanto, nem sempre esse é o caso. Foi demonstrado que a desordem pode induzir a localização em uma variedade de sistemas interagentes [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23], um fenômeno chamado localização de muitos corpos (MBL), como uma generalização da conhecida localização de Anderson proposta por P. W. Anderson há cerca de cinquenta anos [24, 25, 26].

O intrigante fenômeno de quebra de ergodicidade em sistemas localizados de muitos corpos tem motivado grandes esforços na comunidade científica para entender os mecanismos que levam à MBL [27, 28, 29, 30]. De fato, o fenômeno da localização em sistemas quânticos interagentes é um problema intrigante ainda em estudo [31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40]. Do ponto de vista teórico, é bem estabelecido que a quebra da ETH em sistemas localizados de muitos corpos induzidos por desordem pode ser capturada pelas estatísticas de espaçamento de níveis [4, 7, 41, 32] ou propriedades de emaranhamento de seus autoestados [17, 42, 12]. A ETH é geralmente compreendida em duas classes: sentido forte, em que todos os estados termalizam, e sentido fraco, onde quase todos os estados termalizam. As principais características das fases de MBL induzidas por desordem foram observadas em várias plataformas experimentais [43, 44, 45, 46, 47]. Apesar das complexidades do fenômeno MBL, resultados teóricos e experimentais sugerem que, pelo menos em uma dimensão, a forte desordem induz o surgimento de quantidades locais quase conservadas, levando à integrabilidade [48, 49, 50, 51, 52].

Recentemente, Pollman e colaboradores mostraram que é possível ter localização em sistemas interagentes mesmo sem a presença de desordem. O fator-chave aqui é ter um potencial de gradiente quase uniforme em um sistema que interage, e isso está relacionado ao processo de localização de partícula única conhecido como localização de Wannier-Stark. Esse fenômeno foi chamado de Localização de Muitos Corpos de Stark (SMBL) Ref. [2].

Em um estudo recente, que é uma extensão dos resultados Ref. [53] incluindo interações de troca até os segundos vizinhos [54]. Mostrou-se que o fenômeno SMBL é robusto para qualquer razão J_2/J_1 , uma característica também encontrada em férmions sem spin com interações de longo alcance [55]. SMBL também foi investigado no contexto de redes bosônicas [56, 57] e vale destacar que outros mecanismos podem levar à MBL, como potenciais quase periódicos [58, 59] e condução periódica [60, 61].

Devemos mencionar que investigações sobre estados ligados de magnons foram realizadas examinando o impacto de uma anisotropia fraca (D muito menor que a interação de troca J) nas escalas de tempo de termalização de sistemas de spin -1 [62, 63].

Notavelmente, anisotropias ajustáveis em um único íon foram realizadas experimentalmente em íons aprisionados [64], átomos ultrafrios [65], e compostos como NiNb_2O_6 [66] e $[\text{Ni}(\text{HF}_2)(3\text{-Clpiradina})_4]\text{BF}_4$ [67].

Neste trabalho investigamos a localização de estados quânticos em um modelo de Majumdar-Ghosh [68] na presença de um campo magnético não uniforme, incorporando um termo adicional para abordar a anisotropia uniaxial de um único íon, que naturalmente surge em modelos magnéticos com $S \geq 1/2$ [69, 70, 71]. Utilizando diagonalização numericamente exata, calculamos a evolução temporal de quantificadores complementares, a saber, imbalance, entropia de emaranhamento e entropia de participação. Essas medidas são comumente usadas para caracterizar o diagrama de fases de ergódico para MBL em sistemas quânticos de muitos corpos. Nossos resultados revelam que, para alguns estados iniciais produto: (i) Similar ao caso da cadeia $S = 1/2$, MBL induzida por h_0 finito também é capaz de localizar sistemas com $S > 1/2$; (ii) Para $S \geq 1$, a anisotropia uniaxial sozinha localiza o sistema; (iii) Se o sistema está localizado para um valor particular de h_0 , a presença de ambos $D \sim h_0$ suprime a localização; e (iv) para $D, h_0 \gg J$, o sistema se localiza. Esses resultados sugerem que o fenômeno de localização para ambos D e h_0 é da mesma natureza. De fato, eles parecem resultar da supressão da dinâmica de spin por uma restrição local de energia. Embora nossa abordagem numericamente exata seja limitada pelo tamanho do sistema, nossos resultados indicam uma forma diferente de induzir localização em um sistema quântico de muitos corpos. Além disso, nossos resultados lançam luz sobre a natureza do SMLB, atualmente sob intensas investigações, e abrem caminho para futuras investigações experimentais desses fenômenos.

1.1 Organização da Dissertação

A dissertação está organizada da seguinte forma: No Capítulo 1, é apresentada uma introdução ao tema da pesquisa, descrevendo o contexto dos trabalhos sobre localização, até chegarmos à abordagem adotada para o fenômeno de localização em nosso trabalho. No Capítulo 2, abordamos conceitos e definições importantes da física para o trabalho, desde o que é a termalização em sistemas quânticos fechados até descrições de alguns modelos de sistemas de muitos corpos que apresentam uma fase localizada. No Capítulo 3, detalhamos o sistema utilizado e as abordagens empregadas, discutindo o método de evolução temporal utilizado e as métricas empregadas para verificar a existência ou não de fase localizada. No Capítulo 4, apresentamos nossos resultados para diferentes spins $S = (1/2, 1, 3/2)$, onde realizamos as devidas análises e discussões sobre a física obtida. Finalmente, no Capítulo 5, apresentamos nossas conclusões obtidas sobre o trabalho.

Revisão Bibliográfica

2.1 Termalização em sistemas quânticos fechados

Quando um sistema isolado alcança o equilíbrio térmico, cada subsistema dentro desse sistema, ou seja, suas partes individuais ou componentes distintas, também atinge o equilíbrio térmico com os demais. Subsistemas são, portanto, as partes identificáveis que compõem o sistema todo. Esse comportamento implica que o restante do sistema atua como um banho térmico para cada subsistema, permitindo a troca de energia entre eles até que compartilhem uma temperatura comum e alcancem o equilíbrio térmico global [27]. No entanto, compreender como esse processo ocorre em sistemas quânticos fechados apresenta desafios únicos devido às peculiaridades da mecânica quântica. Em sistemas quânticos, os subsistemas podem exibir fenômenos como superposição de estados, onde partículas podem coexistir em múltiplos estados simultaneamente. Além disso, a preservação da coerência quântica durante a evolução temporal dos subsistemas pode influenciar a termalização de maneira não trivial. A interferência quântica e a propagação não local de informações são outros desafios [72], pois a correlação entre os subsistemas pode não se comportar de acordo com as expectativas clássicas. Essas peculiaridades introduzem complexidade na compreensão de como os subsistemas atingem o equilíbrio térmico em sistemas quânticos fechados, tornando o processo de termalização nesse contexto um campo de pesquisa desafiador e fascinante.

Diferentemente da termalização de sistemas clássicos, onde hipótese ergótica postula que, sistemas físicos complexos, compostos por um grande número de partículas interagindo entre si, eventualmente alcançam um estado de equilíbrio termodinâmico, no qual as propriedades macroscópicas do sistema, como temperatura, pressão e densidade, se tornam invariantes no tempo. A ideia por trás da hipótese de termalização é que, embora as partículas individuais em um sistema possam ter comportamentos altamente complexos e caóticos, as interações entre elas tendem a distribuir a energia de forma relativamente uniforme ao longo do sistema. Isso leva a uma distribuição de energia que é

consistentemente observada e que é característica do estado de equilíbrio termodinâmico.

A hipótese de termalização de sistemas clássico então não pode ser aplicada diretamente em sistemas quânticos fechados, uma vez que a dinâmica caótica, que é elemento fundamental que leva o sistema a evoluir para um estado de equilíbrio, não está presente em sistemas quânticos fechados, onde a evolução temporal se dá pela equação de Schrödinger [4]. Esse problema já tinha sido observado a muito tempo atrás por Von Neumann [73]. Uma solução proposta para entender a termalização em sistemas quânticos fechados é a Eigenstate Thermalization Hypothesis (ETH) [74, 75, 7]. A ETH postula que os autoestados do sistema evoluem de maneira a alcançar a termalização, mesmo em sistemas quânticos fechados. Essa hipótese oferece uma abordagem interessante para entender como a termalização ocorre em contextos quânticos, representando um avanço significativo na compreensão dos sistemas quânticos isolados.

Para sermos mais rigorosos, vamos definir precisamente o que significa um estado térmico de sistema quântico isolado. Para fins de concretude, considere um sistema com L spins, em um estado $|\psi(0)\rangle$ no tempo $t = 0$. Em configurações experimentais típicas, $|\psi(0)\rangle$ é um estado fundamental de um Hamiltoniano conhecido ou um estado produto. Um sistema quântico isolado evolui o estado unitariamente, ou seja, se o Hamiltoniano é H , o estado do sistema completo no tempo t é dado por

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle. \quad (7)$$

Imaginemos agora, que esse sistema é partido em dois \mathcal{A} e \mathcal{B} , com $L_{\mathcal{A}}$ e $L_{\mathcal{B}}$ spins, respectivamente, tal que $L_{\mathcal{A}} \ll L_{\mathcal{B}}$. Podemos definir uma matriz de densidade reduzida do estado completo $|\psi\rangle$ sobre o subsistema \mathcal{A} como

$$\rho_{\mathcal{A}} \equiv \text{Tr}_{\mathcal{B}}(|\psi\rangle\langle\psi|). \quad (8)$$

Um sistema quântico isolado, sem outras simetrias além da conservação da energia, é considerado térmico se a matriz de densidade reduzida de qualquer pequeno subsistema \mathcal{A} evolui para uma matriz de densidade de Gibbs

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_{\mathcal{A}}(t) = \text{Tr}_{\mathcal{B}}(\rho^{\text{eq}}) \approx \rho_{\mathcal{A}}^{\text{eq}}, \quad \rho^{\text{eq}} = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}, \quad (9)$$

onde H é o Hamiltoniano, Z é uma função de partição para o subsistema e $\beta = \frac{1}{k_b T}$ é chamado de temperatura inversa, associada ao estado, como discutido abaixo. Em particular, a Eq. (9) implica que o restante do subsistema \mathcal{B} age como um banho térmico para

o pequeno subsistema \mathcal{A} . Na presença de simetrias adicionais, a Eq. (9) é modificada para incluir um ensemble canônico formado pelas simetrias. Por exemplo, com a conservação do número de partículas, esperamos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_{\mathcal{A}}(t) = \text{Tr}_{\mathcal{B}}(\rho^{\text{eq}}), \quad \rho^{\text{eq}} = \frac{1}{Z} e^{-\beta H - \mu N}, \quad (10)$$

onde μ é um potencial químico e N é o operador de número de partículas. Essas condições na dinâmica dos estados têm uma implicação direta na estrutura dos autovetores do sistema. Isso significa que as condições que determinam como os estados do sistema evoluem ao longo do tempo têm um impacto significativo na distribuição e organização dos possíveis estados em que o sistema pode existir. Essa organização dos autovetores é fundamental para entender como as propriedades termodinâmicas emergem no nível quântico e como o sistema atinge e mantém o equilíbrio térmico.

Ao explorar a relação entre os conceitos mencionados e os desafios específicos associados à termalização quântica, podemos aprofundar nossa compreensão das propriedades fundamentais dos sistemas fechados e do papel essencial desempenhado pela ETH nesse contexto.

2.1.1 Hipótese da termalização dos auto-estados - ETH

A hipótese de termalização de autoestado (ETH) proporciona uma base matemática para compreender valores esperados térmicos de operadores em sistemas quânticos grandes. Ela sugere que, em estados próprios desses sistemas, mesmo em contexto quântico, observáveis específicos exibem comportamento termal, similar ao de sistemas clássicos em equilíbrio térmico. A ETH é comumente aplicada a operadores que afetam apenas algumas partículas, sendo crucial na compreensão de como a termalização emerge em sistemas quânticos complexos [4, 7, 76, 77, 78]. A ideia central é que os autoestados do sistema já possuem características térmicas, reveladas pelo desfaseamento do estado inicial devido à evolução temporal unitária [7]. Um aspecto chave para entender a ETH é a expressão matemática que descreve a média de longo prazo do valor esperado de um operador A no estado $|\psi(t)\rangle$. Esta expressão, representada pela equação abaixo, incorpora informações das condições iniciais do sistema e fornece uma maneira de calcular como os observáveis se comportam em média em estados próprios de sistemas quânticos grandes

$$\begin{aligned} \langle\langle A \rangle\rangle_T &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha}^* c_{\beta} e^{-i(E_{\beta} - E_{\alpha})t} \langle \alpha | A | \beta \rangle \\ &= \sum_{\alpha} |c_{\alpha}|^2 \langle \alpha | A | \alpha \rangle \end{aligned} \quad (11)$$

Na primeira linha da expressão, estamos calculando o valor esperado do operador A no estado $|\psi(t)\rangle$. Esse valor representa a média temporal do comportamento do operador A ao longo do tempo t , sendo obtido através do produto interno entre o estado $|\psi(t)\rangle$ e o operador A , integrado ao longo do tempo de 0 até T . Essa média nos fornece uma medida do comportamento médio de A em relação ao estado evolutivo do sistema. Na segunda linha, estamos reescrevendo o valor esperado de A de uma forma mais detalhada, expressando-o em termos dos autoestados do sistema ($|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$) e seus coeficientes de expansão (c_α e c_β). Essa reescrita nos permite entender como cada par de autoestados contribui para o valor esperado de A , considerando a evolução temporal das amplitudes de probabilidade ao longo do tempo. Na terceira linha, estamos considerando o limite em que o tempo de integração tende ao infinito ($T \rightarrow \infty$). Nesse limite, os termos exponenciais associados à diferença de energia entre os autoestados ($E_\beta - E_\alpha$) oscilam rapidamente ao longo do tempo. Isso resulta no cancelamento dos termos fora da diagonal na soma sobre os autoestados ($\alpha \neq \beta$), devido à ortogonalidade dos autoestados. Essa ortogonalidade é possível porque assumimos que os estados são não degenerados, o que elimina os termos fora da diagonal na média temporal. Como consequência, a expressão é simplificada para uma soma sobre os autoestados individuais ($|\alpha\rangle$). Essa simplificação simplifica o cálculo da média temporal e incorpora informações das condições iniciais através da $|c_\alpha|^2$. Portanto, para estados e operadores arbitrários, não há razão para que coincida com um valor térmico.

As flutuações de $\langle A \rangle$ são influenciadas pelos elementos fora da diagonal

$$\begin{aligned} \langle (\langle A \rangle - \langle \langle A \rangle \rangle_T)^2 \rangle_T &= \langle (\sum_{\alpha \neq \beta} c_\alpha^* c_\beta e^{-i(E_\beta - E_\alpha)t} \langle \alpha | A | \beta \rangle)^2 \rangle_T \\ &= \sum_{\alpha \neq \beta} |c_\alpha|^2 |c_\beta|^2 |\langle \alpha | A | \beta \rangle|^2, \end{aligned} \quad (12)$$

onde a restrição $\alpha \neq \beta$ resulta da subtração dos termos α que são iguais a β da Eq. (11), e a simplificação na última linha é resultado do cancelamento de fase em todos os outros termos. No limite termodinâmico, é necessário que às flutuações sejam pequenas para que a média temporal Eq. (11) represente a média térmica do sistema.

As consequências dessa conjectura podem ser observadas ao construir um estado quântico $|\psi_{E_0}\rangle$ a partir de uma superposição arbitrária de autoestados dentro de uma pequena janela de energia δE em torno de E_0 . Nesse caso, o valor médio Eq. (11) torna-se

$$\langle \psi_{E_0} | A | \psi_{E_0} \rangle = \sum_{\alpha} |c_\alpha|^2 \bar{A}(E_\alpha) \approx \bar{A}(E_0) \sum_{\alpha} |c_\alpha|^2 = A(E_0), \quad (13)$$

mostrando que os valores esperados quânticos e termodinâmicos são equivalentes.

2.2 Sistemas localizados

A maioria dos Hamiltonianos locais interagentes são amplamente considerados não integrável e completamente ergódico, o que implica que os estados próprios desses Hamiltonianos aderem à hipótese forte de termalização quântica (ETH). Este entendimento é respaldado pelo fato de que o espectro de um Hamiltoniano local comum exibe repulsão entre níveis e segue estatísticas de níveis do tipo Wigner–Dyson, indicando a presença de caos quântico. Em termos simples, o caos quântico refere-se a um comportamento imprevisível e complexo em sistemas quânticos. Em sistemas caóticos quânticos, pequenas alterações nas condições iniciais podem resultar em evoluções drasticamente diferentes ao longo do tempo. No caso dos Hamiltonianos mencionados, o caos quântico se manifesta na repulsão entre os níveis de energia, onde os estados próprios do sistema exibem uma falta de regularidade em suas órbitas e seguem estatísticas de níveis universais do tipo Wigner–Dyson. Essas características são indicativas de um comportamento caótico, essencial para a compreensão da termalização quântica descrita pela ETH [79, 80, 81, 82]

Uma quebra completa de ergodicidade, manifestada como um fracasso tanto na ETH forte quanto na fraca, é observada em dois tipos de sistemas: os integráveis e os MBL (Many-Body Localized). Adicionalmente, foram identificadas duas formas de quebra parcial de ergodicidade, conhecidas como QMBS (Quantum Many-Body Scarring) e fragmentação do espaço de Hilbert. Estes fenômenos desafiam a expectativa inicial de que sistemas com uma quebra parcial ou total de ergodicidade não seriam genericamente interessantes, ou experimentalmente relevantes.

A situação intermediária, caracterizada por uma violação fraca ou parcial da hipótese de termalização quântica (ETH) por um número pequeno de autoestados (exponencialmente menor do que a dimensão do espaço de Hilbert), pode inicialmente parecer pouco genérica e, portanto, não suscitar muito interesse experimental. Isso ocorre porque autoestados não térmicos desse tipo não possuem uma lacuna de energia que proteja sua natureza e estão muito próximos em energia de autoestados térmicos. No entanto, observações em um simulador quântico de átomos de Rydberg [83], desafiam essa perspectiva. A quebra da ergodicidade foi atribuída a um pequeno conjunto de autoestados não térmicos, denominados quantum many-body scars (QMBS).

No modelo PXP não integrável que capturou o experimento da Ref. [84, 85]. Esses resultados em átomos de Rydberg desencadearam numerosas investigações teóricas adicionais do modelo PXP [86, 87, 88], cujos aspectos foram resumidos em uma revisão recente por Ref. [89]. O espectro característico de um sistema que exibe QMBS é representado por um número discreto de autoestados não-ETH que marcam o espectro de um sistema aparentemente ergódico. Com a escolha apropriada de um estado inicial motivado experimentalmente, a evolução temporal do sistema many-body quântico apresenta uma forte

divergência do comportamento típico de modelos térmicos não integráveis. O modelo PXP, é caracterizado por um Hamiltoniano específico. Nesse modelo, a Hamiltoniano é formulada como $H = \sum_i P_i X_{i,i+1} P_{i+1}$, onde P_i e P_{i+1} representa o operador de projeção no sítio i e $i + 1$, respectivamente, e $X_{i,i+1}$ denota o operador de troca entre os sítios i e $i + 1$. Enquanto isso, o termo $X_{i,i+1}$ descreve as interações entre partículas adjacentes, representando a possibilidade de trocas entre os sítios i e $i + 1$. Essa formulação peculiar do Hamiltoniano é frequentemente utilizada para investigar fenômenos em sistemas físicos, como átomos de Rydberg, nos quais partículas são excitadas para níveis de energia elevados.

Os QMBS estão intrinsecamente ligados a um fenômeno mais abrangente conhecido como fragmentação do espaço de Hilbert [90], também referido como quebra do espaço de Hilbert [91], fratura de Krylov [92]. Esse fenômeno diz respeito à presença de inúmeros subespaços dinamicamente desconectados, que não são capturados por simetrias convencionais. Nesse cenário, a escolha de uma base com motivação física revela uma estrutura complexa dentro do Hamiltoniano, constituída por subespaços dinamicamente desconectados que exibem distintas propriedades de termalização e emaranhamento. Similarmente aos QMBS, modelos analiticamente tratáveis fornecem uma valiosa plataforma para a compreensão da natureza da fragmentação do espaço de Hilbert e seus impactos na dinâmica.

2.2.1 Integrabilidade

Sistemas integráveis é um exemplo de sistema que falha no processo de termalização, assim como ocorre em sistemas localizados. Sistemas integráveis possuem um número extenso de quantidades conservadas não triviais e frequentemente são solucionáveis pelos métodos de Ansatz de Bethe [93]. O grande número de quantidades conservadas restringe a dinâmica, impossibilitando para o sistema atingir um estado térmico. Em vez disso, o estado estacionário de longo prazo será descrito por um ensemble de Gibbs generalizado construído de maneira apropriada [94]. No entanto, esses sistemas são frágeis, e perturbações mesmo fracas são conhecidas por quebrar a integrabilidade. Em sistemas MBL, por outro lado, o comportamento de não termalização é robusto a perturbações locais arbitrariamente pequenas no Hamiltoniano [27].

A relação entre MBL e sistemas integráveis é algo relmente peculiar, uma vez que em sistemas MBL pode emergir um certo tipo de integrabilidade. Essa integrabilidade aparece na forma de um extenso conjunto de operadores quasilocalizados independentes que comutam mutuamente $\{I_\alpha\}$ e que comutam com o Hamiltoniano, conhecidos como integrais locais de movimento (LIOMs) [95, 96, 52, 97, 98]. Esses operadores são considerados quasilocais, uma vez que possuem uma extensão espacial finita, resultando na supressão do transporte e da termalização. Essa característica decorre do fato de o sistema manter

uma memória local de suas condições iniciais anteriores ao instante de evolução temporal. Um LIOM construído centrado em R_α partindo de uma superposição de operadores locais, teremos que a contribuição de cada operador local ira decair exponencialmente com sua distância de R_α [52, 97]. Os LIOMs podem ser construídos por uma operação unitária quasilocal Ω na base de Pauli: $I_\alpha = \Omega^\dagger \sigma_\alpha^z \Omega$ [96, 51]. Em um sistema fracamente interagente, os LIOMs podem ser vistos como operadores de Pauli vestidos: I_α terá uma sobreposição significativa com o operador de Pauli original, e a sobreposição com os outros operadores de Pauli decairá exponencialmente no espaço real [27]. Um Hamiltoniano MBL pode ser escrito em forma diagonal como uma combinação não linear dos LIOMs

$$H = E_0 + \sum_{\alpha} h_{\alpha} I_{\alpha} + \sum_{\alpha, \beta} J_{\alpha\beta} I_{\alpha} I_{\beta} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha, \beta, \{\gamma\}} K_{\alpha\{\gamma\}\beta}^n I_{\alpha} I_{\gamma_1} \dots I_{\gamma_n} I_{\beta}, \quad (14)$$

e os autoestados de H são os autoestados simultâneos de $\{I_\alpha\}$, que podem ser rotulados de maneira única por seus autovalores. A estrutura quasilocal dos LIOMs implica que as forças de interação $J_{\alpha\beta}$ e $K_{\alpha\{\gamma\}\beta}^n$ decaem exponencialmente com a distância Ref. [27, 95] E_0 a quantidade E_0 representa a energia de base, uma constante que contribui para o termo constante no Hamiltoniano (H). Essa constante é adicionada para garantir que a Hamiltoniano tenha um valor mínimo, estabelecendo assim uma referência de energia mínima para o sistema, independentemente dos valores dos termos restantes.

O Hamiltoniano H é expressa como uma série de termos que envolvem os operadores I_α . Os termos $h_\alpha I_\alpha$, $J_{\alpha\beta} I_\alpha I_\beta$, e $K_{\alpha\{\gamma\}\beta}^n I_\alpha I_{\gamma_1} \dots I_{\gamma_n} I_\beta$ representam diferentes interações no sistema, onde os I_α são os Integrais Locais de Movimento (LIOMs). Portanto, a energia de base (E_0) é um componente essencial para a calibração adequada do Hamiltoniano, estabelecendo uma referência de energia mínima para o sistema. Isso assegura a consistência na descrição do sistema, independentemente das contribuições específicas dos outros termos na Hamiltoniana.

2.2.2 Localização de partícula única

E interessante discutirmos um pouco sobre localização de partícula única antes de abordamos os casos com mais partículas. A física essencial da localização de partícula única pode ser ilustrada com um modelo de tight-binding de uma única partícula quântica saltando em uma rede infinita, com o Hamiltoniano dado pela Eq.(15), essa análise é equivalente a feita por Anderson [99], quando analisou um sistema de elétrons não-interagentes submetidos a potenciais estáticos, mas aleatórios em cada sítio, Ele mostrou que sistemas podem apresentar condutividade nula para intensidades de desordem suficientemente altas, isso é, o sistema torna-se um isolante

$$H = t \sum_{\langle i,j \rangle} (c_i^\dagger c_j + c_j^\dagger c_i) + \sum_i U_i c_i^\dagger c_i, \quad (15)$$

onde U_i é um potencial local estático e aleatório, $t \neq 0$ é o termo de hopping entre vizinhos mais próximos, o c_i^\dagger e c_i são respectivamente operadores de criação e aniquilação de um férmion no sítio i . Consideremos o movimento de uma única partícula neste sistema. Para desordem suficientemente fraca, os autoestados deste Hamiltoniano podem se estender com peso em todos os sítios, e a dinâmica difusiva de uma partícula pode ser iniciada em um pacote de ondas composto por tais autoestados estendidos. No entanto, já com desordem suficientemente forte, os autoestados estão todos exponencialmente localizados, com funções de onda que têm a forma assintótica de longa distância $\psi_\alpha(\mathbf{r}) \sim \exp(-|\mathbf{r} - \mathbf{R}_\alpha|/\xi)$, onde ξ é o comprimento de localização, que depende da intensidade da desordem e da energia [100]. O estado α está localizado perto da posição \mathbf{R}_α , e uma partícula permanece localizada perto do local em que foi introduzida inicialmente. Temos também que, como foi previsto pela scaling theory of localization [101], todos os estados são localizados em sistemas 1- e 2-dimensionais para qualquer intensidade de desordem. Em três dimensões, a transição entre estados localizados e estendidos ocorre por meio de estados críticos especiais na borda de mobilidade, que exibem localização de lei de potência. Uma transformação de base direta reformula este Hamiltoniano na forma simples:

$$H = \sum_\alpha E_\alpha c_\alpha^\dagger c_\alpha, \quad (16)$$

onde c_α^\dagger cria uma partícula no autoestado de partícula única $|\alpha\rangle$, e E_α é a energia própria de uma partícula ocupando este estado. Escrevemos este Hamiltoniano na forma de segunda quantização, portanto, é também um Hamiltoniano de muitas partículas, embora ainda sem interações entre as partículas. Seus autoestados de muitas partículas são estados de produto simples em termos dos autoestados de partícula única e podem ser rotulados pelos números de ocupação de todos os vários autoestados de partícula única $|\alpha\rangle$. Para sistemas nos quais pelo menos alguns dos autoestados de partícula única estão localizados, quase todos esses autoestados de muitas partículas violam a ETH. Como exemplo para mostrar a falta de termalização quântica, o sistema é inicializado com uma densidade de partículas espacialmente não uniforme nos estados localizados em uma grande escala de comprimento. Esse padrão de densidade inicial não uniforme então persiste para todos os tempos porque essas partículas estão localizadas.

Tal localização deve-se à interferência quântica induzida pelos espalhamentos elásticos provocados pelas aleatoriedades dos potenciais, e assim, a desordem pode localizar uma partícula quântica, apesar do tunelamento quântico, e mesmo em situações em que a partícula não é localizada classicamente [102].

Devido a essa natureza localizada induzida por potenciais aleatórios, sistemas descritos pela Eq. (15) possuem uma transição metal-isolante, em que as funções de onda estendidas descrevem situações em que existe uma condutividade não-nula, enquanto os estados localizados descrevem situações em que a condutividade é nula. A fase localizada para tais sistemas é conhecida como fase de Anderson, bem como a transição de fase associada é chamada de transição de Anderson.

Embora partículas saltando em um potencial aleatório forneçam o exemplo mais conhecido de localização de partícula única, o fenômeno é mais geral e ocorre também em sistemas de spins. Por exemplo, uma versão de localização de partícula única para spins $1/2$ surge em um sistema governado pelo Hamiltoniano de spin

$$H = \sum_i h_i \sigma_i^z + \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j, \quad (17)$$

onde os spins são representados por operadores de Pauli. Os termos σ_i^z denotam componentes z do spin no sítio i , refletindo a orientação do spin em relação ao eixo z . O primeiro termo, incorpora a interação dos spins com campos magnéticos locais h_i . O segundo termo, descreve a interação de troca entre spins vizinhos nos sítios i e j , aqui J_{ij} representa o termo de hopping. Os campos magnéticos locais h_i são variáveis aleatórias estáticas, por exemplo, retiradas de uma distribuição contínua de probabilidade com largura $W > 0$, e os saltos e interações de spin J_{ij} são estritamente de curto alcance no espaço real (para especificidade, tome $J_{ij} = J \neq 0$ para vizinhos mais próximos e zero caso contrário). Consideramos então uma condição inicial em que há um único spin para cima (por exemplo, no sítio i) com todos os outros spins para baixo e perguntamos sobre a dinâmica desse spin para cima.

Se houver estados de partícula única localizados com peso no sítio i , há uma probabilidade não nula de que o sítio i ainda contenha um spin para cima mesmo no tempo infinito, ou seja, a memória das condições iniciais é preservada em um observável local por tempos infinitos. Isso constitui manifestamente uma falha na termalização quântica e é bastante semelhante ao contexto em que a localização de partícula única foi inicialmente estabelecida na [99].

É fundamental ressaltar que a localização de Anderson ou fase de Anderson foi experimentalmente observada em ondas de luz [103, 104, 105, 106, 107, 108], em microondas [109, 110], no condensado de Bose-Einstein [111, 112], e em ondas de matéria [113].

2.2.3 localização de muitos corpos

Anderson já havia abordado de forma superficial sobre o fenômeno de localização de sistemas interagentes de muitos corpos, conhecido como fase MBL, em seu trabalho

de sistemas não-interagentes e esta fase MBL pode ser abordada como uma generalização da fase de Anderson, porém a MBL foi deixada de lado por algum tempo sem grandes investigações, até Basko [10] que trouxe de fato argumentos teóricos convincentes sobre as características Físicas em relação à estabilidade da fase MBL, apresentando de forma detalhada que sistemas de elétrons interagentes quando submetidos a potenciais aleatórios estaticos podem apresentar uma transição de fase metal-isolante, de forma semelhante a caso não-interagente. Outras grandes contribuições surgiram para autoestados de muitos corpos excitados [114], contribuição teóricas relevantes também foram dadas na mesma linha que Basko. [115, 116, 117, 118, 119, 103, 51], onde corroboram com diversos trabalhos numéricos [120, 121, 122, 123, 124]

Uma revisão das observações experimentais da fase MBL abrange uma variedade de sistemas, incluindo um gás de férmions interagentes em uma cadeia ótica quasi-aleatória unidimensional [114], uma cadeia de Ising com interações de longo alcance e desordens aleatórias programáveis [30], bósons em uma rede ótica bidimensional desordenada [125], além de outros experimentos [126, 127, 128, 129].

2.2.4 Definição da fase MBL

A física do fenômeno MBL é mais simples de ser exposta no contexto de modelos de spin, devido a características que simplificam sua compreensão. A discretização dos valores dos spins, as interações de troca naturais, a representação matemática conveniente e as técnicas analíticas e numéricas estabelecidas tornam esse modelo uma escolha acessível e eficaz para estudar o fenômeno da MBL, proporcionando insights valiosos com aplicabilidade a sistemas físicos reais. O sistema que foi descrito acima Eq. (17) é adequado para ilustrar o MBL; consideramos simplesmente estados nos quais as densidades de spins para cima e para baixo são diferentes de zero, em vez de considerar apenas um spin invertido. Estamos interessados em saber se um sistema governado pelo Hamiltoniano Eq. (17) termaliza quanticamente para condições iniciais arbitrárias. Portanto, questionamos se os estados próprios de muitos corpos do Hamiltoniano acima obedecem à Hipótese de Termalização de autoestados ETH, dado que esta é uma condição necessária para a termalização quântica aconteça.

Quando temos $J = 0$, os autoestados de muitos corpos da Eq. (17) são caracterizados por estados produtos da forma $|\sigma_1^z\rangle \otimes |\sigma_2^z\rangle \otimes \dots$, o sistema está totalmente localizado, pelo fato que a falta de interação não deixa o estado se emaranha durante a dinâmica. Para J diferente de zero, no regime em que $J \ll W$, é possível construir os estados próprios de muitos corpos de forma perturbativa em J pequeno [116, 13, 10]. Dado que, nesse regime, as divisões típicas entre os níveis nos sítios vizinhos são muito maiores do que as interações J , os estados em diferentes sítios geralmente estão apenas fracamente interligados.

Esta linha de raciocínio, que é semelhante à usada por Anderson [99], pode se tirar a conclusão de que, quando o sistema estiver sob influência de uma desordem suficientemente forte $W \gg J$, o transporte de spin e o transporte de energia estão ausentes, e, portanto, a termalização quântica não ocorre em nenhuma ordem na teoria de perturbação mantendo assim o estado evoluído por um longo tempo as informações do estado inicial [10].

Autoestados caracterizados por um elevado emaranhamento e uma entropia significativa na Eq. (17) tendem a obedecer à Hipótese de Termalização Quântica (ETH) quando a desordem (W) é pequena. Por outro lado, em presença de desordem suficientemente forte (W grande), todos os estados próprios violarão a ETH, mantendo, assim, esses estados localizados. Evidências numéricas, especialmente para sistemas unidimensionais, sustentam essa conclusão, como indicado nas [120, 130, 12].

Com base nas explicações acima fica claro que acontece uma transição de fase a medida que se varia a intensidade da desordem. Muitas questões sobre a natureza dessa transição de fase permanecem em aberto, como a falta de clareza quanto aos mecanismos subjacentes e características distintivas dessa transição. A influência específica de parâmetros, como a intensidade da desordem e a interação entre spins, permanece uma área de investigação ativa. A caracterização detalhada dos estados críticos que marcam a transição e a compreensão de como a MBL se conecta a outras transições de fase são tópicos em aberto. Essa transição é uma transição de fase de autoestados, marcada por uma mudança acentuada nas propriedades dos autoestados de muitos corpos e, portanto, na dinâmica do sistema, sendo visível ao se estudar o sistema usando os conjuntos de autoestados individuais. No entanto, essa transição é invisível à termodinâmica de equilíbrio e aos conjuntos tradicionais da mecânica estatística [120, 131, 130, 132], pois eles fazem uma média sobre muitos autoestados. De fato, a transição de MBL marca a falha na aplicabilidade da mecânica estatística quântica de equilíbrio às propriedades de longo prazo do sistema.

Embora estejamos empregando modelos de spins para elucidar o fenômeno de localização, onde a escolha foi motivada pelo fato de que modelos de spins fornecem exemplos simplificados para investigar a MBL. Vale ressaltar que existem estudos que consideram sistemas de férmions, conforme discutido em trabalhos anteriores, como na Ref. [116]. Neste estudo, observou-se que um sistema de férmions interagindo em zero dimensões (um ponto quântico) pode ser aproximado por um problema de localização de partícula única. Esse resultado foi extensivamente detalhado nas Refs [13, 10] para mostrar que a localização de partícula única em dimensões espaciais $d \geq 1$ é robusta para interações fracas não nulas, em todas as ordens na teoria de perturbação.

Uma característica fundamental do fenômeno MBL, como discutido aqui, é que

sistemas MBL fechados não termalizam quanticamente, preservando alguma memória das condições iniciais locais ao longo de tempos arbitrariamente longos. Isso implica que a condutividade de corrente contínua (DC), que representa o fluxo constante de carga elétrica em um sistema, deve ser estritamente zero na fase MBL. Em termos mais precisos, a corrente contínua, que quantifica o transporte de carga persistente, é anulada em sistemas MBL devido à sua natureza localizada e à preservação da informação local ao longo do tempo.

Essa característica não apenas fornece um diagnóstico útil para a presença da MBL em certos sistemas, mas também destaca a incapacidade do sistema de suportar um transporte de carga persistente, reforçando assim sua não termalização quântica. Vale notar que, embora o desaparecimento do transporte de corrente contínua seja uma característica proeminente, não é a única distintiva. Por exemplo, sistemas Floquet de muitos corpos, que são sistemas quânticos periódicos em tempo, podem apresentar uma transição de fase quântica entre as fases térmica e MBL, mesmo sem densidades locais conservadas significativas, conforme explorado em estudos anteriores [133, 134]. Nesses sistemas Floquet, a evolução temporal é governada por operadores periódicos, abrindo caminho para fenômenos de transição de fase além do cenário tradicional de sistemas quânticos isolados.

2.2.5 Transição de fase de localização de muitos corpos

Existem questões em aberto sobre a natureza do processo de transição de fase da fase térmica para localizada à medida que a desordem aumenta no sistema. Uma dessas questões é se a transição de fase entre térmica e localizada é única, sem a presença de uma fase intermediária que não seja completamente localizada, mas também não apresente comportamento totalmente térmico. Os esforços para analisar essa transição intermediária têm sido principalmente conduzidos por estudos numéricos baseados na diagonalização exata de sistemas relativamente curtos [120, 130, 135]. Informações sobre essa transição são extremamente limitadas, e realizar uma análise adequada do escalonamento de tamanho finito para esses dados é incerto. Os autores da Ref. [130] investigaram o escalonamento dinâmico e as distribuições de probabilidades próximas à transição, sugerindo um expoente crítico $z \rightarrow 1$. O expoente crítico é uma medida que descreve como certas quantidades dinâmicas, como o tempo de relaxação, se comportam à medida que nos aproximamos de um ponto especial chamado ponto crítico. O ponto crítico é um estado peculiar próximo à transição de fase, onde fenômenos críticos e comportamentos singulares ocorrem. A sugestão de que essa transição intermediária possa ser governada por um ponto fixo de desordem infinita, O que leva a sugestão de que a transição possa ser tratada com alguma versão de um grupo de renormalização. Implicando que a dinâmica do sistema pode se tornar mais complexa e menos previsível nessa região crítica. Esse

ponto crítico é crucial para compreender as propriedades dessa fase intermediária.

Em um estudo relativamente recente, um avanço significativo ocorreu no entendimento da transição de fase da fase térmica para a fase de Localização de Muitos Corpos (MBL). Especificamente, usando a poderosa métrica entropia de emaranhamento para esclarecer um ponto crucial. estabelecendo o fato de que se houver uma transição de fase contínua direta de uma fase térmica, seguindo a Teoria Ergódica Quântica (ETH), para uma fase MBL, então a ETH permanece válida durante toda a transição [136]. Essa constatação é essencial para compreender a dinâmica dessa transição. A ETH descreve a propriedade fundamental de sistemas térmicos, indicando que as propriedades estatísticas de um sistema isolado se assemelham às de um sistema térmico clássico. Se, durante a transição de fase para a MBL, a ETH ainda é válida, isso sugere que, mesmo quando o sistema está evoluindo para um estado mais localizado e menos térmico, ele mantém certas características de comportamento térmico. Essa conclusão coloca restrições importantes sobre as possíveis teorias que explicam a transição de MBL. Os modelos teóricos precisam ser compatíveis com a continuidade da ETH durante a transição, o que adiciona um elemento crítico para entender os mecanismos subjacentes à transição de fase complexa da fase térmica para a MBL.

Uma abordagem distinta foi adotada na Ref. [137], que investigou as funções espectrais locais na fase térmica próxima à transição para a localização. Na abordagem apresentada na Ref. [47], a premissa baseou-se na discrepância dos espectros locais entre as fases localizada e térmica. A ideia era que os espectros locais em uma fase térmica próxima à localização se tornassem extremamente heterogêneos, caracterizados por uma largura de linha espectral que se aproxima de zero conforme a fase localizada é alcançada. A largura de linha espectral, relacionada a observáveis como a condutividade de corrente contínua (DC), foi considerada como um parâmetro indicativo da transição. A relação da largura de linha com parâmetros de controle, como intensidade da desordem, força da interação e temperatura, foi analisada em uma aproximação autoconsistente de campo médio. Contudo, é esperado que qualquer teoria de campo médio falhe nas proximidades do ponto crítico devido à complexidade da transição, onde flutuações e correlações críticas emergem. Essa limitação torna a descrição da física crítica uma questão desafiadora e em aberto. O avanço no entendimento mais profundo dessa transição de fase permanece como um desafio significativo.

2.2.6 **Localização de muitos corpos livre de desordem**

Discutimos já neste texto de forma breve sobre fenômeno da fase de Anderson, onde constatamos que, as autofunções de uma partícula quântica em movimento em sistema com uma desordem suficiente forte apresentam comportamento de localização. Assim como discutimos também sobre a fase MBL, onde vimos que o fenômeno de localização

persiste para modelos interagentes desordenados como modelo de spins e férmios interagentes.

Uma pergunta natural que surge imediatamente é se a desordem é de fato um ingrediente essencial para observar a fenomenologia da localização, ou se é possível que a termalização falhe em sistemas interagentes por outras razões. Uma maneira óbvia é o caso de sistemas integráveis, abordagem também discutida brevemente neste trabalho. No entanto, esses casos acabam sendo pontos isolados no espaço de parâmetros, com variações genéricas arbitrariamente pequenas nos parâmetros do Hamiltoniano restaurando a ergodicidade. Uma pergunta importante é então se pode haver fases não ergódicas robustas em modelos sem desordem.

A resposta é sim, em trabalhos recentes [2, 138], uma fase de localização onde o elemento que induz a quebra da ergodicidade do sistema é um campo aplicado com gradiente quase constante, a qual recebeu o nome de Stark many-body localization (MBL). Em uma abordagem de partícula única, o campo aplicado pode induzir uma localização de Wannier-Stark, que é fenômeno quântico em que uma partícula única, como um elétron, sujeita a um campo elétrico constante, experimenta uma aceleração contínua devido à força elétrica. Esse processo leva à acumulação preferencial da partícula em regiões específicas do espaço, conhecidas como poços de Wannier-Stark. Os Schulz *et al* argumentam também que uma transição da fase ergótica para a não ergótica deve acontecer para um valor finito do campo aplicado. As características inerentes à fase localizada SMBL assemelham-se à Many-Body Localization (MBL), evidenciando a presença tanto do Level Spacing Ratio (LSR) quanto da memória do estado inicial. O LSR é uma métrica que descreve a distribuição dos espaçamentos entre os níveis de energia em sistemas quânticos. LSR pode indicar comportamentos específicos. Como uma distribuição de Poisson, que está associada a sistemas independentes e não correlacionados, o LSR sugere interações mais tênues e níveis de energia independentes. Já na distribuição de Wigner-Dyson, característica de sistemas termalizados com interações significativas entre partículas. A SMBL foi posteriormente constatada para outros sistemas, como férmios [139, 140, 141], sistemas topológicos [142] e spins [53], a fase SMBL constatada no trabalho de Schulz [2], se dar em uma cadeia de férmios sem spins unidimensional interagente com L sítios livre de desordem e com um campo elétrico externo. A dinâmica mostra que o sistema é extremamente dependente das condições iniciais, e que o sistema tende a quebrar a ETH para valores de campo suficientemente grandes, mostrando que essa localização possui uma certa diferença da MBL convencional, onde a desordem é o elemento que leva a indução de fases localizadas. Como meio de explicar a observação de SMBL, estudos teóricos recentes tem atrelado a forte localização aqui tem sido associada a fragmentação do espaço de Hilbert [90, 91, 143], isso se dar quando a evolução temporal desses estados evitam algumas regiões do espaço de Hilbert, isso impede que o processo de termalização

aconteça.

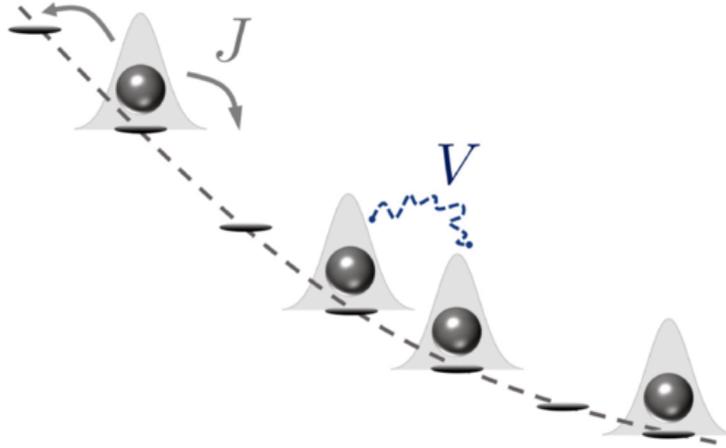


Figura 1 – Ilustração esquemática do modelo referente a Eq. (18). Em uma rede finita unidimensional, usando estados de partícula única de férmions sem spin, onde o mecanismo que leva a termaliza o sistema é o termo de acoplamento J . Os estados são exponencialmente localizados quando inserido um campo elétrico suficientemente forte. Para um campo estritamente uniforme, isso é equivalente a localização de Wannier-Stark [1]. Quando as partículas interagem via interações entre vizinhos V , elas compartilham muitas propriedades com a fenomenologia bem estudada de MBL (Many-Body Localization). Imagem retira da Ref. [2].

Abordando um pouco o trabalho de Schulz *et al* Ref. [2], onde hamiltoniano do modelo é dado por

$$H = \frac{J}{2} \sum_{j=0}^{L-2} (c_j^\dagger c_{j+1} + \text{h.c.}) + \sum_{j=0}^{L-1} W_j \left(n_j - \frac{1}{2} \right) + V \sum_{j=0}^{L-2} \left(n_j - \frac{1}{2} \right) \left(n_{j+1} - \frac{1}{2} \right). \quad (18)$$

Este hamiltoniano descreve um sistema de férmions sem spin em uma rede unidimensional finita. O operador c_j^\dagger cria um férmion no sítio j , e c_{j+1} aniquila um férmion no sítio $j + 1$ da rede, $n_j = c_j^\dagger c_j$ é o operador de número. $\frac{J}{2}$ é o termo de interação hopping entre sítios férmios vizinhos, V é a intensidade da repulsão entre os férmions, e L é o número de sítios na rede. W_j é a energia potencial no local devido ao campo elétrico aplicado. Para um campo uniforme γ , ele assume a forma $W_j = -\gamma j$. Para um campo não uniforme, adquire alguma curvatura, $W_j = -\gamma j + \frac{\alpha j^2}{L^2}$. Isso significa que o potencial tem o mesmo valor e inclinação que o linear em $j = 0$, mas difere na outra extremidade da cadeia por α em relação ao caso puramente linear.

Schulz *et al* conseguiram verificar a fase localizada SMBL, do seu modelo, utilizando de algumas medidas para característica como a entropia de emaranhamento [144], como comumente utilizada para verificar MBL. A entropia de emaranhamento usada é definida por

$$S = -\text{tr}(\rho_{\text{red}} \log(\rho_{\text{red}})), \quad (19)$$

essa entropia é calculada tornando a partir de uma bipartição em duas metades, com a matriz de densidade reduzida do subsistema na forma ρ_{red} , argumentos como o de Serbyn e colaboradores [145], que gira em torno do estudo da Many-Body Localization (MBL) e da entropia de emaranhamento em sistemas quânticos. Eles propõem que, no que regime de MBL, onde as interações quânticas levam à localização da informação em 'l-bits' (bits locais), a entropia de emaranhamento (S) deve crescer de forma logarítmica ao longo do tempo, ou seja, $S(t) \sim S_0 \ln(Vt)$. Essa previsão logarítmica reflete a ideia de que, em sistemas MBL, as correlações quânticas locais e os 'l-bits' conduzem a um crescimento específico da entropia com o tempo. Essa característica logarítmica é uma assinatura importante do comportamento de MBL em longas escalas temporais.

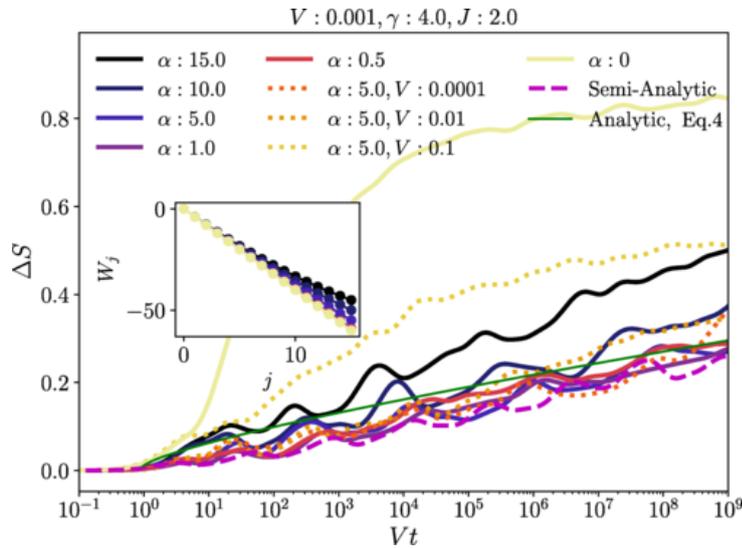


Figura 2 – Diferença ΔS entre o emaranhamento bipartido nos casos interagente e não interagente. O parâmetro α denota o efeito cumulativo da não uniformidade do campo no potencial no sítio final, o hopping foi em $J = 2$, e foi considerado uma cadeia de $L = 16$ sítios com ocupação média. Imagem retira da Ref. [2].

A Fig. 2 mostra o crescimento de entropia de longo tempo no sistema Stark-MBL da Eq. 18 se comporta de forma semelhante ao MBL. Onde para α suficientemente pequeno e um campo γ suficientemente grande, há uma boa concordância qualitativa com os cálculos semi-analíticos (linha tracejada magenta) e cálculo analítico completo (linha verde) afim de verificar os cálculos analíticos ver referencia [2]. Para α maior, o emaranhamento se torna substantivamente mais forte visto a termalização progressiva de alguns orbitais de partículas, uma vez que se tem o campo dependendo da posição, enfraquecendo a cadeia, para um campo que é uniforme o aumento acentuado é atribuído pelos autores as degenerescências adicionais no espectro de muitos corpos.

O efeito das interações é mostrado por $\Delta S(t) \equiv S(t) - S_0(t)$, onde $S_0(t)$ é a entropia do caso não interativo. Os efeitos de desfasamento de muitos corpos, nomeado ao fenômeno físico que acontece em sistemas de muitas partículas ou corpos, onde a informação ou coerência quântica é perdida por interações significativamente fortes. Leva aos emaranhamentos começarem em tempos $Vt \sim 1$. As curvas escalonam com função de Vt .

Outra medida para verificar a fase SMBL utilizada pelos autores da Ref. [2], foi o imbalance Eq. 20, motivados pelo fato da dificuldade de extrair informações do emaranhamento. O imbalance foi utilizado para monitorar de uma Charge-Density Wave (CDW), onde na mesma todos os sítios pares estavam ocupadas por férmios

$$\mathcal{I} = \frac{N_e - N_o}{N_e + N_o}. \quad (20)$$

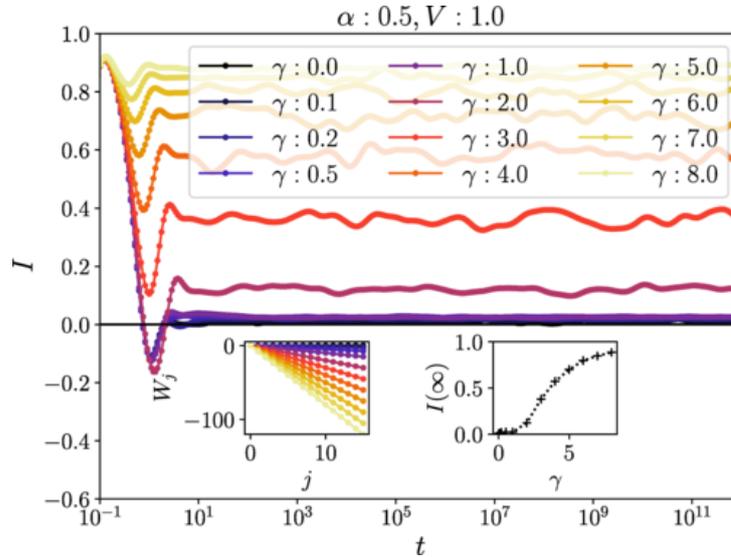


Figura 3 – Imbalance vc t para um sistema com $L = 16$, de um estado icial CDW. As diferentes curvas representam diferentes intensidades de campo γ com $\alpha = 0.5$. Inseto à esquerda: Visualização do potencial correspondente. Inseto à direita: Imbalance médio I nos tempos $10^{13} \geq \frac{t}{j} \geq 10^{11}$. Imagem retira da Ref. [2].

Um observável associado é o imbalance entre a ocupação nos sítios ímpares (N_o) e pares (N_e), respectivamente. No caso onde o sistema venha a termalizar, teremos um decaimento para zero assim como mostrado no caso de $\gamma = 0$ na Fig. 3, enquanto para o caso não ergótico, o imbalance deve se manter próximo à unidade como verificado quando há um aumento de γ . Ou seja, para campos suficientemente fortes, temos que o sistema permanece não ergótico por longos tempos. Os resultados da Fig. 3, são realizados usando diagonalização exata de uma evolução temporal unitária da Eq. 18.

Assim como já mencionado antes, a SMBL foi observada em sistemas de spins interagentes em uma rede unidimensional com um campo que cresce linearmente [53].

Esse trabalho realiza alguns avanços em comparação com os de Schulz *et al*, que se limitou a realizar as análises para sistemas só até $L = 24$ sítios. Pois ainda é discutido se tais estudos fornecem uma visão confiável do limite termodinâmico conceitualmente mais interessante [146, 36, 147]. Foi demonstrado numericamente que a transição MBL para a cadeia de Heisenberg com desordem no local muda substancialmente com o tamanho do sistema [148]. Como SMBL tem sido observado experimentalmente, como, por exemplo, o estudo que observou a SMBL em um processador quântico supercondutor [149] e configurações de átomos frios [150, 151]. Com isso Elmer *et al* [53] analisou a fase SMBL para cadeias maiores de até $L = 48$ Sítios. O mesmo mostrou que não há uma fase ergótica descrita pela ETH forte, pois a dinâmica em tempos longos se mostrou fortemente dependente das condições iniciais para um valor de campo finito. Vernek [54] mostrou Também que uma cadeia de spins $1/2$ de Heisenberg com interações de primeiro e segundos vizinhos na presença de um campo magnético não uniforme pode haver fase SMBL para valores e campo finitos. Onde o sistema se mostrou robusto frente ao termo de interação de segundo vizinhos. Sendo que para certos valores atribuídos ao termo de segundos vizinhos, constatou um aprimoramento na fase SMBL. Mostrando ainda que para um gradiente de campo uniforme, as previsões da distribuição de estatísticas LSR, desviam adequadamente para a descrição das fases localizadas e termalizadas. Enquanto que para para um gradiente que seja não uniforme, o LSR preveem muito bem os casos localizados e termalizados.

Modelo e métodos

3.1 Sistema utilizado

Para sermos mais concretos, consideramos uma cadeia de spins modelada por uma versão estendida do Hamiltoniano de Majumdar-Ghosh [68], que descreve um sistema físico composto por uma cadeia unidimensional de spins interagindo entre si. Explicitamente, o Hamiltoniano para L spins pode ser escrito como

$$H = J_1 \sum_{j=1}^{L-1} \mathbf{S}_j \cdot \mathbf{S}_{j+1} + J_2 \sum_{j=1}^{L-2} \mathbf{S}_j \cdot \mathbf{S}_{j+2} + \sum_{j=1}^L (h_j + DS_j^z) S_j^z. \quad (21)$$

O primeiro termo descreve a interação entre spins adjacentes, enquanto que o segundo representa a interação entre spins separados por um spin na cadeia. J_1 e J_2 definem a intensidade dos acoplamentos primeiro e segundos vizinhos, respectivamente. Esses são os dois termos que correspondem ao que é conhecido como Hamiltoniano de Majumdar-Ghosh [68]. Na última soma da Eq. (21), $h_j S_j^z$ (com $h_j = jh_0 + \gamma j^2/L^2$) introduz o efeito de um campo magnético não uniforme ao longo da direção z , permitindo o estudo da localização Stark de muitos corpos. Por fim, $D(S_j^z)^2$ representa uma anisotropia de íon único, que leva em consideração a preferência direcional dos spins ao longo do eixo z . Essa forma específica do Hamiltoniano (21) fornece um quadro teórico para investigar propriedades fundamentais do sistema para spins $S = 1/2$ e $S \geq 1$. Devemos mencionar que o efeito de D só pode ser observado na dinâmica de sistemas de spins $S > 1/2$. No caso especial de $S = 1/2$, o efeito de D é apenas deslocar o espectro do Hamiltoniano por uma quantidade $DL/4$.

Para conveniência, seguindo as Refs. [152, 54], parametrizamos os acoplamentos de troca J_1 e J_2 como $(J_1, J_2) = (J_0 \cos \theta, J_0 \sin \theta)$, com $0 \leq \theta < 2\pi$. As propriedades do estado fundamental para $h_0 = \gamma = 0$ na Eq. (21) têm recebido grande atenção nas últimas décadas [153, 154]. No entanto, nosso foco principal aqui são os processos de termaliza-

ção, que potencialmente envolvem todos os autoestados do sistema, consistentes com a simetria específica do estado inicial. A ausência de invariância de translação devido a um gradiente de campo finito, naturalmente nos leva a adotar condição de contorno aberta. Essa escolha permite explorar propriedades estáticas e dinâmicas do sistema em sua totalidade, com o preço de efeitos de tamanhos finitos. Aqui, buscamos entender como o sistema se termaliza, ou seja, como ele evolui de um determinado estado não equilibrado inicial para um estado de equilíbrio térmico. Mais especificamente, abordaremos estados iniciais da forma $|\Psi_0\rangle = |\cdots m, m, m, \bar{m}, \bar{m}, \bar{m}, \cdots\rangle$, onde $m = 2S_j^z$ e $\bar{m} = -m$. Esse tipo particular de estados corresponde a um estado com uma única parede de domínios, mas estados com várias paredes de domínio também serão considerados. Esse tipo de estado inicial já foi analisado em outros estudos, nos quais foi possível revelar várias características interessantes do fenômeno de localização Stark de muitos corpos [53, 54]. Aqui, exploraremos principalmente o caso de $S > 1/2$ considerando os efeitos da anisotropia de íon único D e dos gradientes de campos magnéticos h_0 , a fim de obter uma melhor compreensão dos efeitos locais e globais sobre o comportamento coletivo da dinâmica de spins.

Nosso Hamiltoniano é particularmente interessante, pois permite estudar de modo mais realista o fenômeno de localização para cadeias de spins com $S > 1/2$. De fato é notável que os estudos em cadeias de spins estão concentrados apenas em spins $1/2$, onde em tais modelos não possibilita interações entre excitações elementares no sistema.

3.2 Análise da Evolução temporal

Para estudar os fenômenos de localização e termalização em nosso sistema quântico fechado, adotamos a representação de Schrödinger e realizamos a evolução temporal de um dado estado inicial $|\Psi_0\rangle \equiv |\Psi(t=0)\rangle$ em $t=0$ como $|\Psi(t)\rangle = U(t)|\Psi_0\rangle$, onde

$$U(t) = \exp(-iHt/\hbar), \quad (22)$$

é o operador de evolução temporal. Tendo o estado quântico evoluído no tempo $|\Psi(t)\rangle$, somos capazes de calcular a quantidade física relevante que testemunha o fenômeno de localização/termalização, como imbalance, entropia de participação, entropia de emaranhamento e densidade de estados. Como essas grandezas são, em geral, individualmente inconclusivas, elas são usadas de forma complementar. Nas seções a seguir definiremos tais métricas que usamos e descrevendo um pouco sobre cada uma mostrando como aplicamos ao nosso sistema.

Para a realização da dinâmica do nosso Hamiltoniano utilizamos das abordagens computacionais como o pacote Qutip em Python [155, 156]. Esse pacote oferece uma variedade de funcionalidades para simular a dinâmica temporal e diagonalização exata

de sistemas quânticos de muitos corpos de forma eficiente e precisa. Também utilizamos o método TDVP (Time-Dependent Variational Principle) [157], que é uma abordagem poderosa implementada no pacote ITensors em Julia para conduzir a evolução temporal de sistemas quânticos de muitos corpos. Essa técnica combina princípios variacionais com métodos numéricos eficientes, permitindo uma simulação precisa e escalável de sistemas complexos. Ao empregar tensores para representar estados quânticos, o ITensors oferece uma estrutura flexível e otimizada para manipular a evolução temporal de sistemas com interações fortes.

3.3 Imbalance

Imbalance, denotado como $\mathcal{I}(t)$, é uma medida fundamental para investigar a dinâmica de sistemas quânticos, especialmente no contexto de modelos de Heisenberg [53, 114, 2]. Ele fornece insights sobre se o sistema mantém ou perde informações sobre a magnetização local à medida que evolui no tempo. Definimos o imbalance para uma cadeia de L spins S como:

$$\mathcal{I}(t) = \frac{1}{LS^2} \sum_{j=1}^L \langle S_j^z(t) \rangle \langle S_j^z(0) \rangle, \quad (23)$$

onde $\langle S_j^z(t) \rangle = \langle \Psi(t) | S_j^z | \Psi(t) \rangle$ representa o valor esperado de S^z do j -ésimo spin da cadeia dentro do estado quântico evoluído $|\Psi(t)\rangle$. Dessa forma, temos claramente $\mathcal{I}(0) = 1$ se individualmente os spins estiverem completamente polarizados, ao longo das projeções positivas ou negativas de S^z . Além disso, no regime de forte localização, $\mathcal{I}(t)$ permanece próxima ao seu valor em $t = 0$, indicando que a informação sobre a magnetização local é preservada durante a evolução. Por outro lado, no regime termalizado, $\mathcal{I}(t)$ tende a algum valor mais baixo em longas escalas de tempo. O valor assintótico preciso do imbalance no regime térmico depende do estado inicial. Por exemplo, suponha um estado inicial produto $|\Psi_0\rangle$, conforme definido acima para uma cadeia de L spins, com $L = N_\uparrow + N_\downarrow$ onde N_\uparrow e N_\downarrow representam o número de spins com projeções máximas e mínimas de S^z , respectivamente. Assim, a projeção total do spin ao longo do eixo z é dada por $S_{\text{tot}}^z = (N_\uparrow - N_\downarrow)S$. Uma vez que, no estado térmico, essa quantidade será uniformemente distribuída ao longo da cadeia, cada sítio exibirá uma magnetização S_{tot}^z/L , se o total de S^z for conservado. Com isso, podemos mostrar facilmente que o valor térmico para o imbalance é dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \frac{1}{LS^2} \left[N_{\downarrow} (-S) \frac{S_{\text{tot}}^z}{L} + N_{\uparrow} (S) \frac{S_{\text{tot}}^z}{L} \right] \\
&= \frac{S_{\text{tot}}^z}{L^2 S} [N_{\uparrow} - N_{\downarrow}] \\
\mathcal{I}_{\text{thermal}} &= \left(\frac{S_{\text{tot}}^z}{LS} \right)^2.
\end{aligned} \tag{24}$$

Em particular, para um estado inicial no setor $S_{\text{tot}}^z = 0$, obtemos $\mathcal{I}_{\text{thermal}} = 0$. Devemos ressaltar que, conforme definido na Eq. (23), o imbalance não é capaz de detectar a dinâmica dos spins que ocorre apenas no plano xy . Nesse caso, $\mathcal{I}(t) = 0$, independentemente da dinâmica do estado inicial.

3.4 Entropia de emaranhamento

Outra quantidade importante para monitorar a localização de estados quânticos é a conhecida entropia de emaranhamento $S_{\ell}(t)$

$$S_{\ell}(t) = -\frac{1}{\ln 2} \text{Tr} \left[\rho_A^{\ell}(t) \ln \rho_A^{\ell}(t) \right], \tag{25}$$

onde $\rho_A^{\ell}(t) = \text{Tr}[\rho_B^{\ell}]$ é a matriz de densidade reduzida de um subconjunto A . Aqui, dada a natureza unidimensional de uma cadeia, ℓ representa simplesmente o sítio que define a interface entre duas porções da cadeia que chamamos de subsistema A e B .

Enquanto o imbalance fornece dados locais qualitativos úteis para descrever a dinâmica de estados individuais, o uso da entropia de emaranhamento para sistemas de muitos corpos permite investigar suas propriedades coletivas e emergentes, proporcionando insights sobre a natureza das correlações quânticas e como a informação se distribui por todo o sistema [144].

3.4.1 Entropia de participação

A entropia de participação (EP) tem ganhado atenção em estudos sobre a dinâmica de sistemas de muitos corpos. Aqui, seguimos a Ref. [158] e definimos essa quantidade como

$$S_2 = -\ln \left(\sum_{mn} |c_n|^2 |c_m|^2 \delta_{E_n, E_m} \right), \tag{26}$$

onde $c_n = \langle n | \Psi_0 \rangle$ é a projeção do estado inicial $|\Psi_0\rangle$ sobre a base de autovetores $\{|n\rangle\}$. Para fins práticos, ao calcular S_2 , primeiro definimos a quantidade $f(t) = \langle \Psi_0 | \exp(-iHt/\hbar) | \Psi_0 \rangle$,

que é a projeção do estado inicial evoluído no tempo sobre o autovetor $|n\rangle$. Ao transformar $f(t)$ para o domínio de energia através da transformada de Fourier, obtemos $F(\omega)$. O inverso da razão de participação (IPR) pode ser obtido como [158]

$$IPR = \int F^2(\omega) d\omega = \sum_{mn} |c_n|^2 |c_m|^2 \delta_{E_n, E_m}, \quad (27)$$

com isso, a entropia de participação Eq. (26) é simplesmente $S_2 = -\ln(IPR)$. Para o caso não degenerado, essa quantidade coincide com a quantidade S_q para $q = 2$ definida em Ref. [159]. Definido dessa forma, S_2 fornece uma medida de como as projeções do estado inicial estão distribuídas entre os autovetores do Hamiltoniano. Na ausência de simetrias, para um estado delocalizado, $S_2 \sim \ln(\mathcal{N})$, onde \mathcal{N} é a dimensão do espaço de Hilbert. A EP aumentara de forma logarítmica com o tamanho do sistema. Por outro lado, em um estado fortemente localizado, apenas um subconjunto limitado de coeficientes contribui significativamente para a soma, resultando em uma entropia de participação constante $S_2 \sim \text{constante}$. Em outras palavras, o estado é totalmente expandido sobre uma região restrita do espaço de Hilbert, indicando a presença de localização.

A quantidade designada como S_q conforme definida na Ref. [159], representa uma alternativa para a caracterização da entropia de participação. Porém desta forma não é necessário realizar a dinâmica sobre o sistema, aqui em última instância se diagonaliza o hamiltoniano.

$$S_q = \frac{1}{1-q} \ln \left(\sum_{\alpha=1}^{\mathcal{N}} |\psi_{\alpha}|^{2q} \right), \quad (28)$$

de forma que ψ_{α} é a projeção de um estado dado $|\Psi\rangle$ na base de spin $\{|\alpha\rangle\}$ e \mathcal{N} é a dimensão do espaço de Hilbert. A entropia de participação S_q , conforme definida acima, fornece informações sobre como os coeficientes de um estado dado estão distribuídos entre os diferentes estados de base [159]. Aqui, consideramos $|\alpha\rangle$ como um autovetor do Hamiltoniano. Portanto, $S_q(t)$ mede como as projeções do estado inicial estão distribuídas entre os autovetores do Hamiltoniano. Semelhante a S_2 , para caso de termalização teremos uma $S_q \sim \ln \mathcal{N}$, e no caso localizado será constante.

3.5 Densidade de estados

A densidade de estados, representada por $DOS(E)$, descreve a distribuição de estados disponíveis em um sistema físico em função da energia E . No contexto do nosso estudo, ela é calculada como a média de todas as contribuições de estados E_k no espaço de Hilbert, onde N é a dimensão desse espaço, considerando um subsistema com magnetização total zero. A expressão matemática para isso é dada pela soma de funções delta

de Dirac $\delta(E - E_k)$, onde cada termo na soma representa a contribuição de um estado específico E_k .

$$\text{DOS}(E) = \frac{1}{N} \sum_k \delta(E - E_k) \quad (29)$$

Essencialmente, essa expressão descreve a distribuição de estados disponíveis em um sistema em função das energias. Para cálculos práticos e para obter uma representação mais suave da DOS, utilizamos uma função Lorentziana $L(E; E_k, \eta) = \frac{1}{\pi} \frac{\eta}{(E - E_k)^2 + \eta^2}$ de largura $\eta = 0,05$, que é uma abordagem comum para lidar com funções delta em contextos numéricos. Esta quantidade nos permite visualizar de maneira eficaz a distribuição de estados em relação à energia no sistema, proporcionando uma compreensão mais profunda do comportamento do sistema em estudo.

3.6 Resultados numéricos

Para apresentar nossos resultados numéricos para a evolução temporal do estado inicial de muitos corpos, primeiro fixamos $J_0 = 1$ como unidade de energia e assumimos $\hbar = 1$, de modo que o tempo tem unidades de inverso de energia. Como o sistema é fechado, a evolução unitária numérica exata pode ser realizada para cadeias pequenas. Para isso, utilizamos a biblioteca Python Quspin [155, 156], esta biblioteca constitui uma ferramenta essencial para a simulação e análise de sistemas quânticos no domínio da física da matéria condensada, principalmente sobre sistema de spins, permitindo a precisa definição de Hamiltonianos quânticos de muitos corpos, que nos permite realizar a evolução temporal e calcular todas as grandezas físicas necessárias. Como o espaço de Hilbert aumenta como $(2S + 1)^L$, onde L é o comprimento da cadeia, para um spin-1/2, por exemplo, podemos lidar com cadeias de até aproximadamente $L = 22$ spins, dependendo da simetria do setor relevante do espaço de Hilbert, e dos recursos computacionais disponíveis. Dentre os recursos computacionais que estavam disponíveis durante esse trabalho, tinha 2 nanquinas com processadores Ryzen 7 5700G com 16-GB de memória RAM, ao fim do processo tivemos acesso Centro Nacional de Processamento de Alto Desempenho em São Paulo (CENAPAD).

Resultados

4.1 Sistema de Spin 1/2: efeito do campo magnético

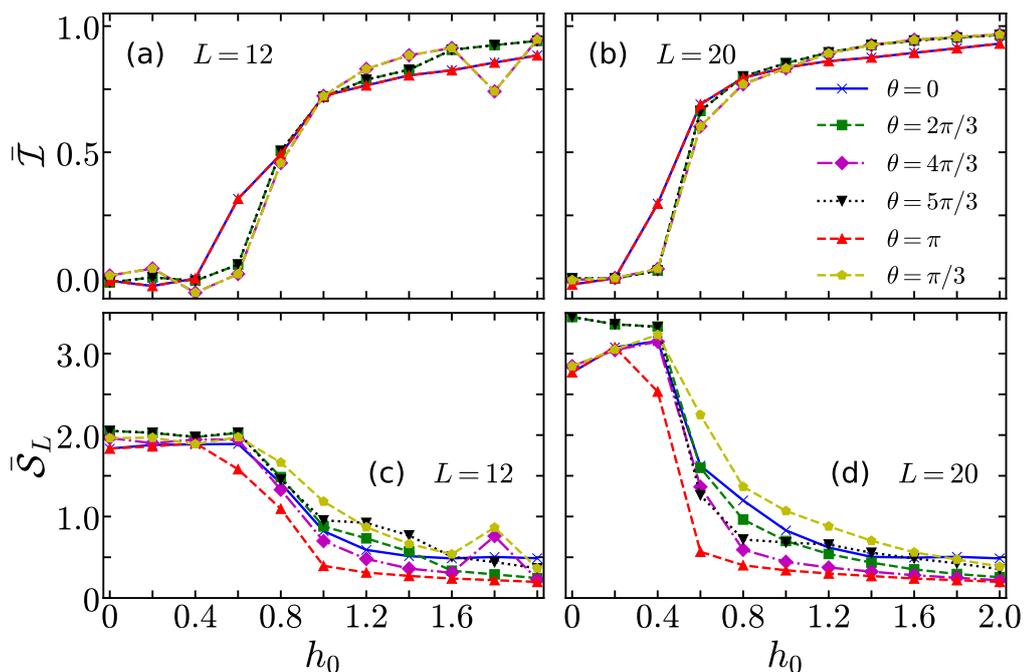


Figura 4 – Localização em uma cadeia de spins 1/2, para diferentes valores de h_0 e θ , com $D = 0$, utilizando a média do imbalance \bar{I} em função de h_0 e a média da entropia de emaranhamento \bar{S}_L em função de h_0 . O sistema é configurado no espaço $S_z = 0$, com $L = 12$ e $L = 20$, apresentando uma ilha de magnetização de $1/2$ no meio da cadeia e $-1/2$ nas extremidades.

Para efeitos de consistências deste trabalho, reproduzimos e elaboramos sobre resultados para um SMBL com spin-1/2, a física desses resultados também pode ser encontrada na Ref. [54]. Validamos que as características fundamentais são capturadas qualitativamente em uma escala envolvendo 12 e 20 spins. Na Fig. 4, utilizamos o imbalance e a entropia de emaranhamento para mostrar como o sistema evolui de um regime termalizado

para um regime localizado à medida que h_0 aumenta. Utilizamos um estado inicial restrito ao subespaço de Hilbert com $S_{\text{tot}}^z = 0$, consistindo em uma ilha de spins *up* no centro da cadeia. Para um valor dado de h_0 , realizamos a evolução temporal até $J_0 t = 500$, assim como em Ref. [54]. Dado que tanto $\mathcal{I}(t)$ quanto $S_L(t)$ oscilam em torno de um valor fixo para t grande, calculamos a média temporal de cada um, $\bar{\mathcal{I}}$ e \bar{S}_L , para $J_0 t \in [400, 500]$. Onde $\ell = L$ indica que a entropia de emaranhamento está sendo calculada na porção esquerda do sistema referente a $N/4$.

Nas Figuras 4(a) e 4(b), $\bar{\mathcal{I}}$ é representado como uma função de h_0 para tamanhos de sistema $L = 12$ e $L = 20$, respectivamente, para vários valores de θ . Observamos que para $h_0 = 0$, $\bar{\mathcal{I}} \approx 0$ o que mostra que o sistema sofreu termalização, o que era já era esperado, uma vez que para o caso onde a ausência do campo, o hamiltoniano é governado apenas pelos termos de interação de Majumdar-Ghos. Porém, com o aumento de h_0 , as curvas dos imbalaces começam a crescer assumindo valores maiores que 0, atingindo valores próximos à unidade para $h_0 = 2$ para todos os valores de θ . Os valores de $\bar{\mathcal{I}}$ próximos a zero para pequenos valores de h_0 revela que a informação local do estado inicial é perdida a longo prazo, embora a dinâmica seja unitária, enquanto valores grandes de $\bar{\mathcal{I}}$ indicam que a informação do estado inicial permanece local a longo prazo. Existe uma interessante concordância qualitativa entre os resultados para $L = 12$ e $L = 20$, mostrando que a localização pode ser observada em cadeias relativamente pequenas. Da mesma forma, a entropia de emaranhamento mostrada nas Figuras 4(c) e 4(d) (para $L = 12$ e $L = 20$, respectivamente) confirma a localização no sistema conforme h_0 aumenta. Dado que o estado inicial é um estado produto, com entropia de emaranhamento $S_L(t) = 0$, valores grandes de \bar{S}_L para $h_0 \rightarrow 0$ indicam que o sistema se torna emaranhado, significando a propagação de informação por todo o sistema no regime termalizado. Por outro lado, o desaparecimento de \bar{S}_L no regime localizado para h_0 grande confirma que a informação permanece local a longo prazo. É importante mencionar uma simetria relacionada aos imbalances θ e $\theta + \pi$, como destacado anteriormente em Ref. [54].

4.2 Sistema de spin 3/2: efeito do campo magnético e anisotropia de íon único.

O caso $S = 3/2$ oferece um espaço de Hilbert muito mais rico em comparação com $S = 1/2$. Neste caso, cada spin exibe $S^z = (3/2, 1/2, -1/2, -3/2)$, onde os dois subespaços *locais* definidos por $|S_j^z| = 1/2$ e $|S_j^z| = 3/2$ estão ambos ativos em relação ao campo magnético externo com gradiente h_0 e à anisotropia D . Isso leva a dinâmicas mais complexas do sistema em direção à termalização. Primeiramente, estudaremos a localização na presença de h_0 e compararemos com o caso de $S = 1/2$, para em seguida investigar o efeito de D isoladamente. Em uma terceira etapa, examinaremos a interação

entre h_0 e D na dinâmica do sistema.

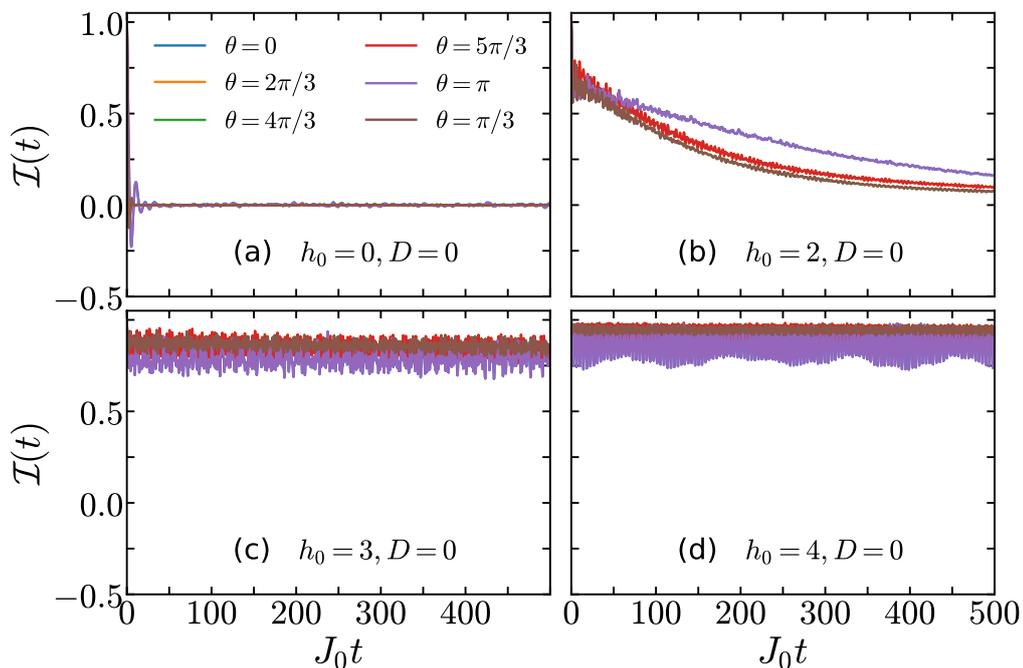


Figura 5 – Imbalance em função do tempo para a localização de muitos corpos stark para h_0 crescente e $D = 0$. Diferentes curvas correspondem a diferentes valores de θ (ver legenda). O sistema consiste em $L = 12$ spins, e o estado inicial corresponde a uma ilha de spins com $S_j^z = 3/2$ no meio da cadeia, enquanto todos os outros têm $S_j^z = -3/2$.

Seguindo a mesma estratégia utilizada anteriormente, analisaremos a evolução temporal para um estado inicial em que há uma ilha de $L/2$ spins com $S_j^z = -3/2$ centrada em $L/2$, enquanto o restante do sistema possui $S_j^z = 3/2$. Assim como o estado inicial anterior que usamos para $S = 1/2$, este é um estado produto de não equilíbrio, portanto, não emaranhado. O efeito de h_0 na evolução temporal desse estado é mostrado na Figura 5(a)-5(d) para $h_0 = 0$, $h_0 = 2.0$, $h_0 = 3.0$ e $h_0 = 4.0$, mantendo $D = 0$. Na Figura 5(a), correspondente ao caso $h_0 = 0$, o Hamiltoniano do sistema é exclusivamente governado pelos termos de troca de Majumdar-Ghosh. Observamos termalização rápida no sistema, levando à diminuição de $\mathcal{I}(t)$. Quando o gradiente do campo magnético é aumentado para $h_0 = 2$, conforme representado na Figura 5(b), o sistema continua a passar por termalização para todos os ângulos, embora a um ritmo mais lento para cada θ . Notavelmente, $\mathcal{I}(t, \theta) = \mathcal{I}(t, \theta + \pi)$, uma simetria anteriormente observada para spins $S = 1/2$. As Figuras 5(c) e 5(d) exibem os resultados para $h_0 = 3$ e $h_0 = 4$, respectivamente. Em ambas as situações, onde os imbalances permanecem próximos à unidade, indicando estados localizados, a persistência observada desses imbalance em sistemas com spins 3/2 sugere fortemente a ocorrência de Localização de Muitos Corpos Stark (SMBL) em redes com configurações de spins mais elevadas. É importante ressaltar que a SMBL para cadeia de spins apenas havia sido demonstrada para spin 1/2.

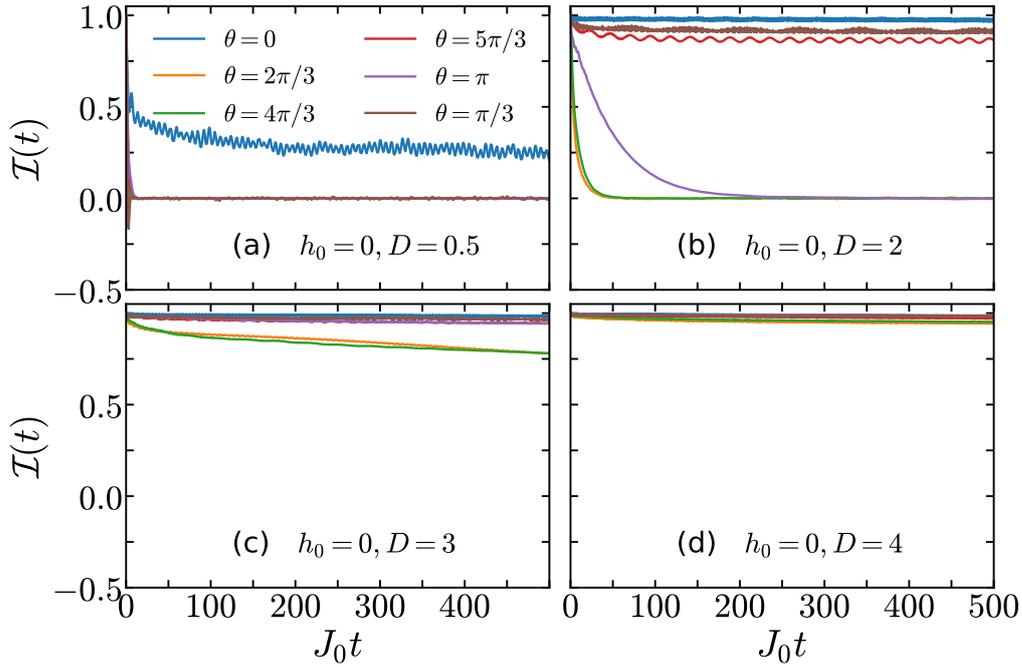


Figura 6 – Imbalance em função do tempo para a localização de muitos corpos stark com anisotropia de íon único para D crescente e $h_0 = 0$. Diferentes curvas correspondem a diferentes valores de θ (ver legenda). O sistema consiste em $L = 12$ spins, e o estado inicial corresponde a uma ilha de spins com $S_j^z = 3/2$ no meio da cadeia, enquanto todos os outros têm $S_j^z = -3/2$.

Agora voltamos nossa atenção para o impacto da anisotropia de íon único na dinâmica do sistema, utilizando os mesmos estados iniciais da análise anterior. Na Figura 6(a)-6(d), fixamos $h_0 = 0$ e apresentamos a dinâmica de $\mathcal{I}(t)$ para $D > 0$. Especificamente, a Figura 6(a) exibe os resultados para $D = 0.5$ em vários valores de θ . Todas as curvas mostram termalização rápida, exceto no caso específico de $\theta = 0$, onde o imbalance permanece finito por uma longa duração, até $J_0 t = 500$. Essa observação indica fortemente que a anisotropia tem o potencial de induzir localização, com uma notável dependência do ângulo θ . De fato, para $D = 4$, conforme mostrado na Figura 6(d), o maior D considerado aqui, o sistema permanece localizado, pois todos os imbalances permanecem próximos à unidade.

A localização observada para grandes valores de D pode ser facilmente compreendida ao observar que, para $D \gg J$, o estado inicial torna-se *quase* um autovetor do sistema, exceto por alguma perturbação muito pequena introduzida por J_1 e J_2 . Nesse cenário, a localização é alcançada quase trivialmente. A situação intrigante surge no regime competitivo onde $D \sim J_0$. Vamos analisar mais detalhadamente a Figura 6(b) (onde $D = 2$). Observe que as curvas para $\theta = 0$, $\theta = \pi/3$ e $\theta = 5\pi/3$ permanecem próximas à unidade, indicando forte localização. Por outro lado, para $\theta = 2\pi/3$, $\theta = \pi$ e $\theta = 4\pi/3$, o sistema passa por termalização. Note que J_2 é o mesmo para $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, no entanto, a

dinâmica é totalmente distinta. Essa diferença pode ser atribuída exclusivamente ao sinal de J_1 . Em outras palavras, a termalização é principalmente governada por processos de inversão de spins entre vizinhos facilitados por J_1 .

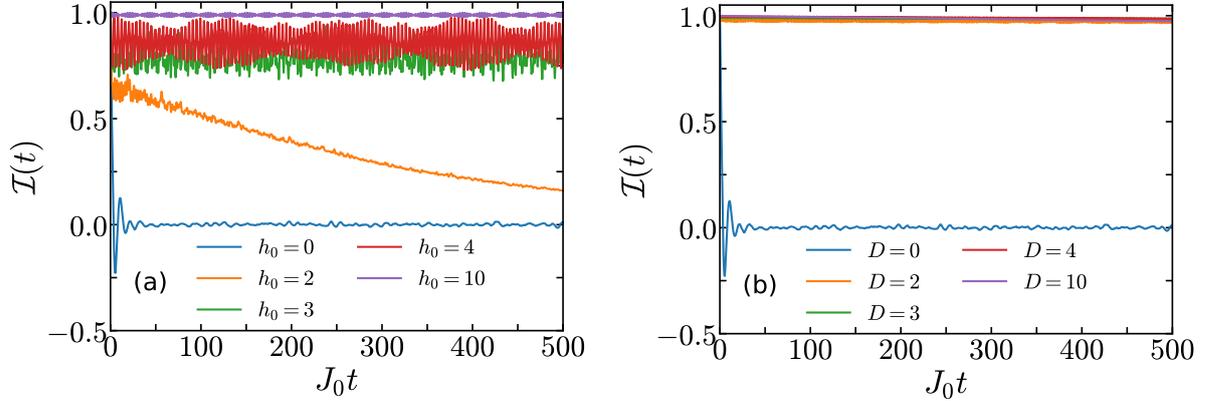


Figura 7 – Imbalace em função do tempo com $\theta = 0$ fixo para ambos os painéis. (a) $D = 0$ e vários valores de campo h_0 . (b) $h_0 = 0$ e variando o valor da anisotropia D . O sistema e o estado inicial aqui é o mesmo que foi utilizado nas Figuras 5 e 6

A fim de visualizar melhor como a magnitude do campo e anisotropia induz a localização sobre o sistema com $S = 3/2$, vamos analisar a Figura 7, onde Fig. 7(a) mostra apenas a atuação de h_0 e Fig. 7(b) apenas D . Temos uma localização significativamente robusta com a anisotropia quando $D = 2J$, enquanto que a localização induzida pelo campo só começa a aparecer para $h_0 = (3j, 4J)$, porém o imbalance mostram flutuações significativas, para $h_0 = 10J$ uma localização robusta pode ser visualizada. Mostrando que as magnitudes necessárias de h_0 e D para induzir uma localização são ligeiramente distintas analisando frente J_1

Para compreender os mecanismos que levam à localização (termalização) com $J > 0$ ($J < 0$) em grandes t , analisemos as fases iniciais da destruição da parede de domínio em uma interface específica entre spins $S^z = +3/2$ e $S^z = -3/2$. O primeiro processo que destrói a interface é dado pelo termo $JS_i^- S_{i+1}^+$ agindo na interface $|\cdots 3, 3, \bar{3}, \bar{3} \cdots\rangle$, resultando em uma interface mais suave $|\cdots 3, 1, \bar{1}, \bar{3} \cdots\rangle$. Devido a D finito, há um custo associado em suavizar a parede de domínio, uma vez que a energia local em sítios com $S_j^z = \pm 1/2$ difere significativamente daquela em sítios com $S_j^z = \pm 3/2$. Essa diferença de energia age como uma barreira que só pode ser ultrapassada por meio de processos virtuais durante a evolução temporal do sistema.

Para obter uma compreensão mais aprofundada da origem física dessa localização, pode-se explorar o limite de $|D|$ muito grande ou, equivalentemente, $J \rightarrow 0$. Para simplificar, vamos assumir $D > 0$. Quando $J = 0$, nosso estado inicial é um autovetor do Hamiltoniano com a energia mais alta, uma vez que todos os spins têm o máximo $|S_j^z|$. Na verdade, qualquer estado produto construído a partir da base S^z é um autovetor do

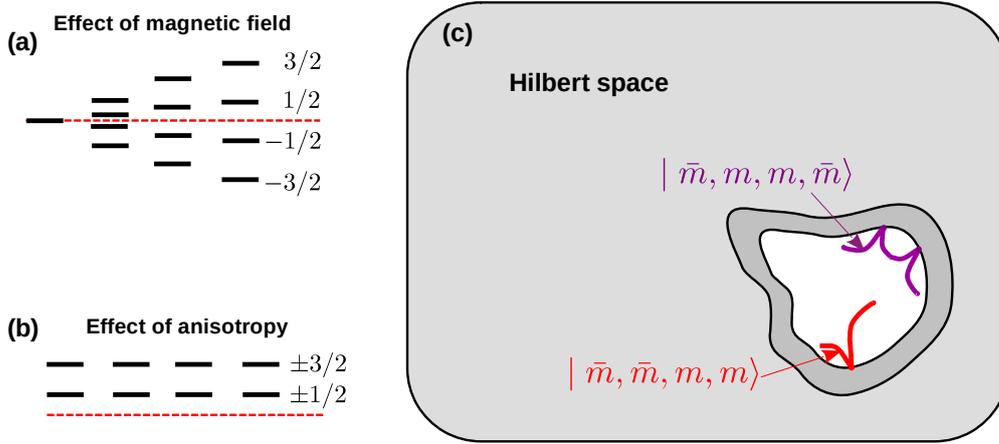


Figura 8 – Efeito de um campo magnético variável linearmente (a) e uma anisotropia constante (b) na energia local de uma cadeia de spins $S = 3/2$. (c) Representação do espaço de Hilbert e estado inicial típico dentro do espaço de Hilbert para uma cadeia de spins $3/2$. As regiões brancas englobam apenas estados nos quais todos os spins têm sua projeção de spin no eixo z sendo máximo ou mínimo, ou seja, suas projeções são $S_j^z \pm 3/2$. A região mais escura contém estados nos quais alguns dos seus spins têm projeções $S_j^z = \pm 1/2$. As curvas vermelha e violeta representam estados iniciais com uma e duas paredes de domínio, respectivamente. Os pontos marcam as regiões ativas no tempo $t = 0^+$ no operador de evolução temporal $\exp(-iH0^+/\hbar)$.

Hamiltoniano para $J = 0$, o espectro do Hamiltoniano consiste em uma série de picos delta, entre os quais o estado inicial corresponde a um dos estados de maior energia (para $D > 0$). Para maior clareza, nas Figuras 8(a) e 8(b), ilustramos o custo de energia associado ao posicionar um spin com diferentes S_j^z ao longo da cadeia, considerando um campo magnético de gradiente constante h_0 e uma anisotropia D , respectivamente. A Figura 8(c) representa todo o espaço de Hilbert do sistema, com a região branca denotando o setor do espaço de Hilbert onde os estados têm spins completamente alinhados ao longo da direção z . Considere o caso simples do estado inicial $|\cdots \bar{3}, \bar{3}, \bar{3}, 3, 3, 3 \cdots\rangle$. Este estado exibe uma única parede de domínio, representada pela linha vermelha dentro do setor do espaço de Hilbert indicado pela região branca. O ponto onde a curva toca a borda da região branca representa a parede do domínio. Em $t = 0^+$, apenas a região representada pela linha vermelha está ativa. A linha roxa indica um estado com uma parede dupla, apresentando duas regiões ativas. Nas proximidades do setor branco, existem estados nos quais os dois spins ao redor da parede têm projeções $\pm 1/2$, como o estado $|\cdots \bar{3}, \bar{3}, \bar{1}, 1, 3, 3 \cdots\rangle$. Pode-se confirmar facilmente que, para $J = 0$, este estado é trivialmente localizado, mas para J finito, sua evolução temporal torna-se altamente complexa. Considere que em $t = 0$, o sistema está preparado no estado inicial com uma única parede de domínio. Em $t = 0^+$, a única região ativa do estado está ao redor da parede de domínio, pois H agindo nesse estado modifica apenas os spins na vizinhança da parede de domínio. Agora, ao longo da

evolução temporal, para atingir uma situação térmica, o mecanismo envolve estados com $S_j^z \pm 1/2$ nas proximidades da parede (representada pela região cinza escura). Acontece que, para $D > 0$, esses estados intermediários têm energias muito diferentes para $D \gg J$. Portanto, para um J fixo dado, aumentando D , esse setor fica isolado do resto do espaço de Hilbert.

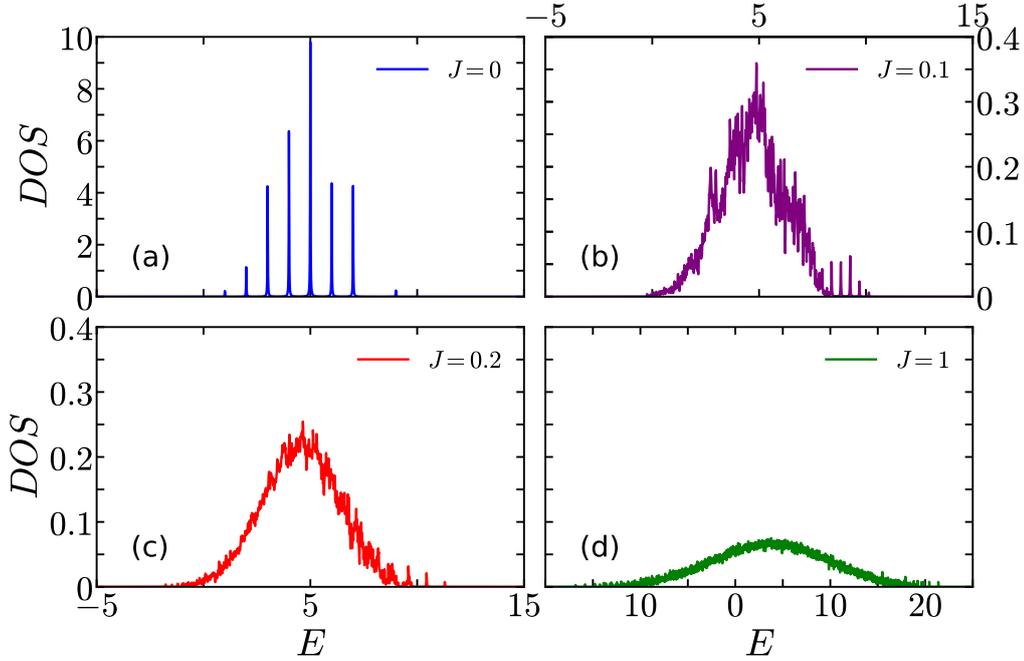


Figura 9 – Densidade de estados em função da energia para $D = 0.5$ para $J = 0$ (a), $J = 0.1$ (b), $J = 1$ (c) e $J = 0.4$ (d). Para todos eles, usamos o subespaço de $S_z = 0$, com a ilha de magnetização de spin para cima no meio para $L = 8$.

Na Figura 9(a)-9(d), apresentamos a densidade de estados para um sistema de $L = 8$ spins $S = 3/2$ para vários valores de J e D fixo ($D = 0.5$). Aqui novamente utilizamos a biblioteca Quspin para modelar e diagonalizar o hamiltoniano dentro do subespaço de $S_z = 0$, isso é necessário, pois o custo computacional para se diagonalizar um hamiltoniano inteiro dessa natureza é extremamente alto e inviável para os recursos computacionais que tínhamos a disposição no momento. Na ausência de J ($J = 0$) em 9(a), o estado inicial corresponde precisamente a um dos autovetores associados ao pico de energia degenerado mais à direita. À medida que J aumenta, esses picos hibridizam com outros estados, resultando na divisão dos picos. Por exemplo, em $J = 0.1$, os picos se dividem devido à hibridização com o restante da banda. Portanto, o efeito de $D > 0$ é evidente ao empurrar o estado inicial para uma energia mais alta, criando um “gap” entre este estado e os demais. Conseqüentemente, toda a região branca do espaço de Hilbert, como ilustrado em 8(c), fica isolada do restante. Ao contrário do QMBS, onde a fragmentação do espaço de Hilbert é impulsionada por quantidades conservadas emergentes, a observada supressão da termalização neste sistema decorre da inibição dos

processos de inversão de spins devido às restrições energéticas.

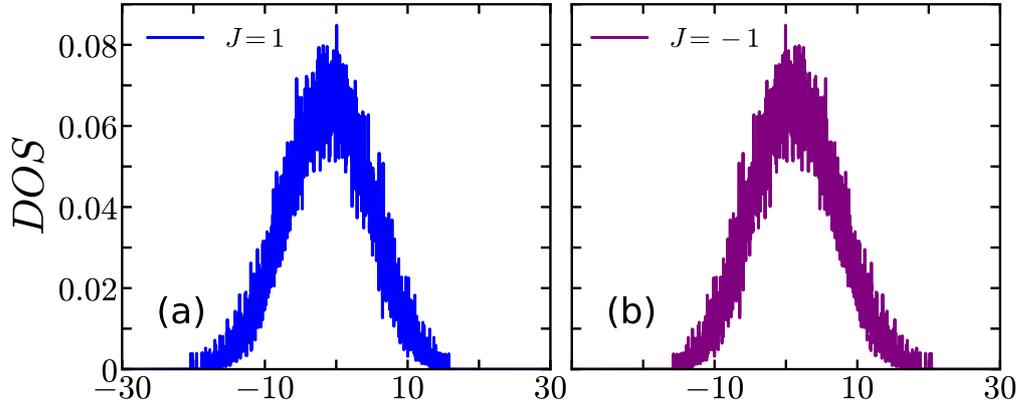


Figura 10 – Densidade de estados em função da energia para $D = 0$ para $J = 1$ (a), $J = -1$ (b). Para todos eles, usamos o subespaço de $S_z = 0$, com a ilha de magnetização de spin para cima no meio para $L = 8$.

A Fig. 10 é útil para entender o por que, para um valor moderado de D , como $D = 2$ e $J = 1$ mostrado na Figura 6(b), ao mudar $\theta = 0$ para $\theta = \pi$ (que corresponde a mudar, J para $-J$), o sistema vai de localizado para termalizado. A razão para isso é que o espectro não é simétrico quando $J \rightarrow -J$. Na verdade, para $J > 0$, o espectro se estende mais em direção ao lado negativo do eixo de energia. O oposto ocorre para $J < 0$. Portanto, para um D fixo, o “gap” de energia entre o setor do estado inicial é maior para $J > 0$, tornando a localização mais facilmente alcançável. A evidência de que aumentar D suprime a dinâmica dos spins ao redor das paredes de domínio coloca o mecanismo de localização aqui na mesma perspectiva da SML. Conforme discutido em Ref. [160], na SML, somente para h_0 infinito os spins são completamente congelados pela restrição de energia local. Da mesma forma, aqui, a dinâmica dos spins só será completamente congelada para D infinito. No entanto, nossos resultados sugerem localização já para $D \sim 2J$, como na Figura 6(d).

Dado que a destruição das paredes de domínio dos estados iniciais ocorre por causa das regiões ativas ao redor das interfaces, vamos analisar como o número de paredes modifica a localização/termalização. Na Figura 11, é mostrada a evolução temporal do imbalance a partir de estados iniciais contendo uma, duas, três quatro e cinco paredes de domínio, todos os estados com magnetização total zero, todos os estados foram analisados com duas configurações de θ diferentes. As escolhas para análises utilizando esses valores de θ foram motivadas pelo fato de que $\theta = 0$ representa a configuração na qual a fase localizada é alcançada para as menores magnitudes da anisotropia. Por outro lado, $\theta = 2\pi/3$ demonstrou ser a configuração com maiores propensões à termalização quando sujeita à anisotropia. Dessa forma, garantiríamos estados com interações com tendências distintas em relação aos valores de θ , conferindo características de resistência à localização

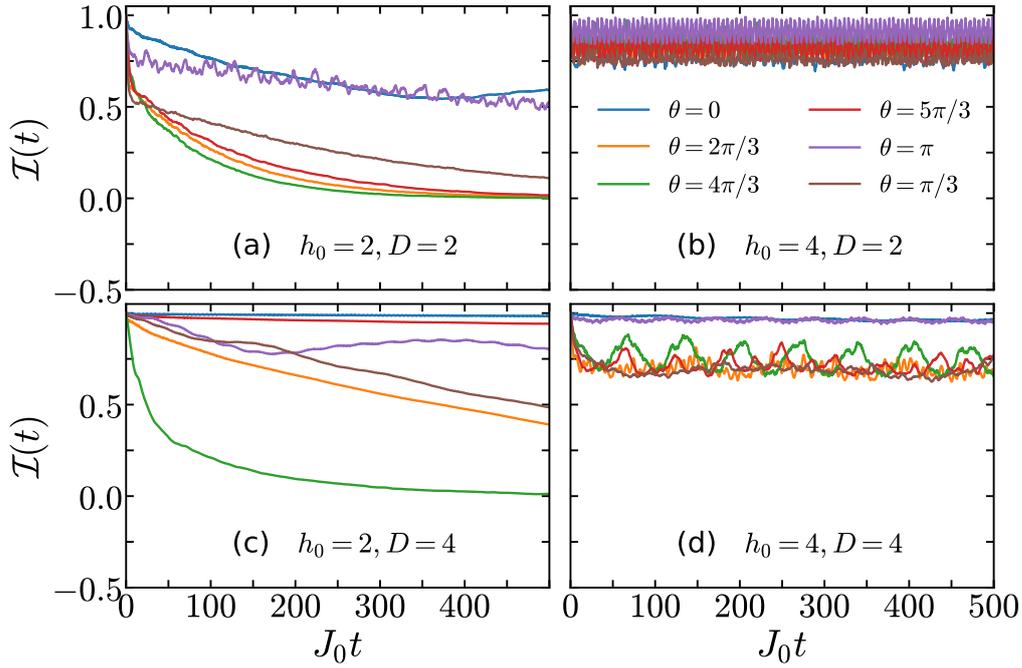


Figura 12 – Evolução temporal do imbalance para diferentes valores de h_0 e D . O sistema e estado inicial aqui e o mesmo utilizado nas Figuras 5 e 6. As curvas correspondem a diferentes valores de θ (veja a legenda).

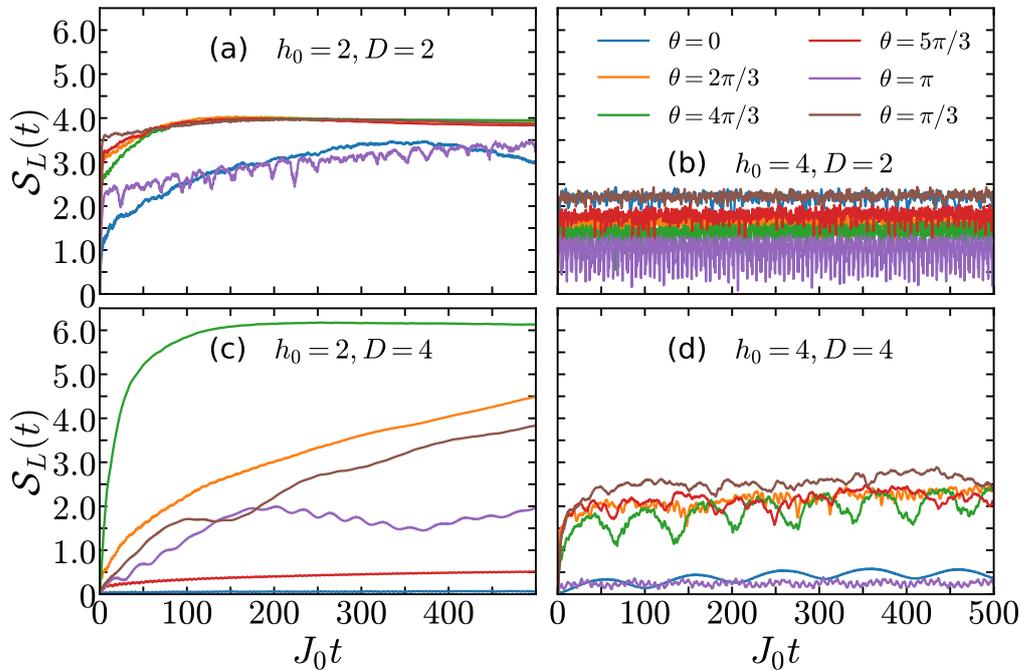


Figura 13 – Evolução temporal da entropia de emaranhamento para diferentes valores de h_0 e D . O sistema e a condição inicial aqui são os mesmos utilizados nas Figuras 12. As curvas correspondem a diferentes valores de θ (veja a legenda).

entre esses dois termos do Hamiltoniano. Na Figura 12(a)-12(d), repetimos o mesmo cálculo das Figuras 5 e 6, mas agora tanto h_0 quanto D são finitos. A Figura 12(a) mostra o imbalance para $h_0 = D = 2$. Observamos que, enquanto a localização foi observada para alguns valores de θ para $D = 2$ e $h_0 = 0$ mostrados na Figura 6(b), agora a localização não é mais observada para nenhum valor de θ . Curiosamente, se fizermos $h_0 = 4, D = 2$, como mostrado na Figura 12(b), a localização é recuperada novamente. No entanto, para $D = 4, h_0 = 2$, a localização é observada apenas para alguns valores de θ , na verdade, para aqueles mais próximos de $\theta = 0$ ou $\theta = 5\pi/3$. Agora, para $D = h_0 = 4$, todas as curvas se aproximam de 1 em tempos grandes. Apesar da complexidade do comportamento das várias curvas, os resultados indicam que, para valores moderados de $D \approx h_0$, eles competem entre si e fracassam em localizar o sistema. No entanto, se ambos forem muito maiores que J , a localização pode ser recuperada. A competição entre D e h_0 observada aqui pode ser compreendida da seguinte forma: o preço energético que suprime fortemente a dinâmica de spins ao redor da parede de domínio para D finito e ($h_0 = 0$) agora é, de certo modo, compensado por h_0 finito. Da mesma forma, a supressão da dinâmica para h_0 finito e ($D = 0$) agora é relaxada energeticamente se D for comparável a h_0 . Na Figura 13 são mostradas as entropias de emaranhamento para o mesmo sistema da Figura 12, e sobre os mesmos parâmetros. Pode-se notar que todos os dados entre as duas métricas validam as fases localizadas\termalizadas, assim como os processos de interferências em localizar, ocasionados pela competição entre o campo e a anisotropia.

Na Figura 14(a), mostramos a entropia de participação formulada pela Eq. 26 em função de $\ln \mathcal{N}$ (a dimensão do espaço de Hilbert para $(D, h_0 = 0) = (0, 0)$ (círculos vermelhos), $(D, h_0) = (8, 0)$ (quadrados pretos) e $(D, h_0) = (0, 8)$ (triângulos ciano). Aqui, usamos um estado inicial consistindo em cadeias de número par de sítios de $L = 4$ a $L = 14$. Os estados iniciais são do tipo $|\cdots \bar{3}, 3, 3, \bar{3} \cdots\rangle$. Para todos os tamanhos de sistema, o estado inicial contém uma ilha de apenas dois spins com projeção, $S_j^z = 3/2$ enquanto as bordas são sempre preenchidas por spins com projeção $S_z = -3/2$. A utilização de um subespaço ainda menor aqui. Onde temos apenas dois spins $+3/2$ enquanto o resto da cadeia é $-3/2$ é justificado para conseguirmos aumentar o tamanho da cadeia até $L = 14$ sítios, e termos uma quantidade de pontos o suficiente para gerar um gráfico de EP, com uma boa escala que mostre as tendências corretas do sistema. Para $(D, h_0 = 0) = (0, 0)$ observamos que S_2 aumenta linearmente com $\ln \mathcal{N}$, como esperado para um regime ergódico. Em contraste, para ambos os casos $(D, h_0) = (0, 8)$ e $(D, h_0) = (8, 0)$, S_2 permanece praticamente constante. Isso indica que, para o regime ergódico, o número de autoestados que participa na dinâmica aumenta com a dimensão do espaço de Hilbert. No regime localizado, por outro lado, apenas uma porção limitada dos autoestados contribui para a dinâmica.

A Figura 14(b) mostra \bar{I} em função de D para $h_0 = 0$ (quadrados verdes) e \bar{I} em

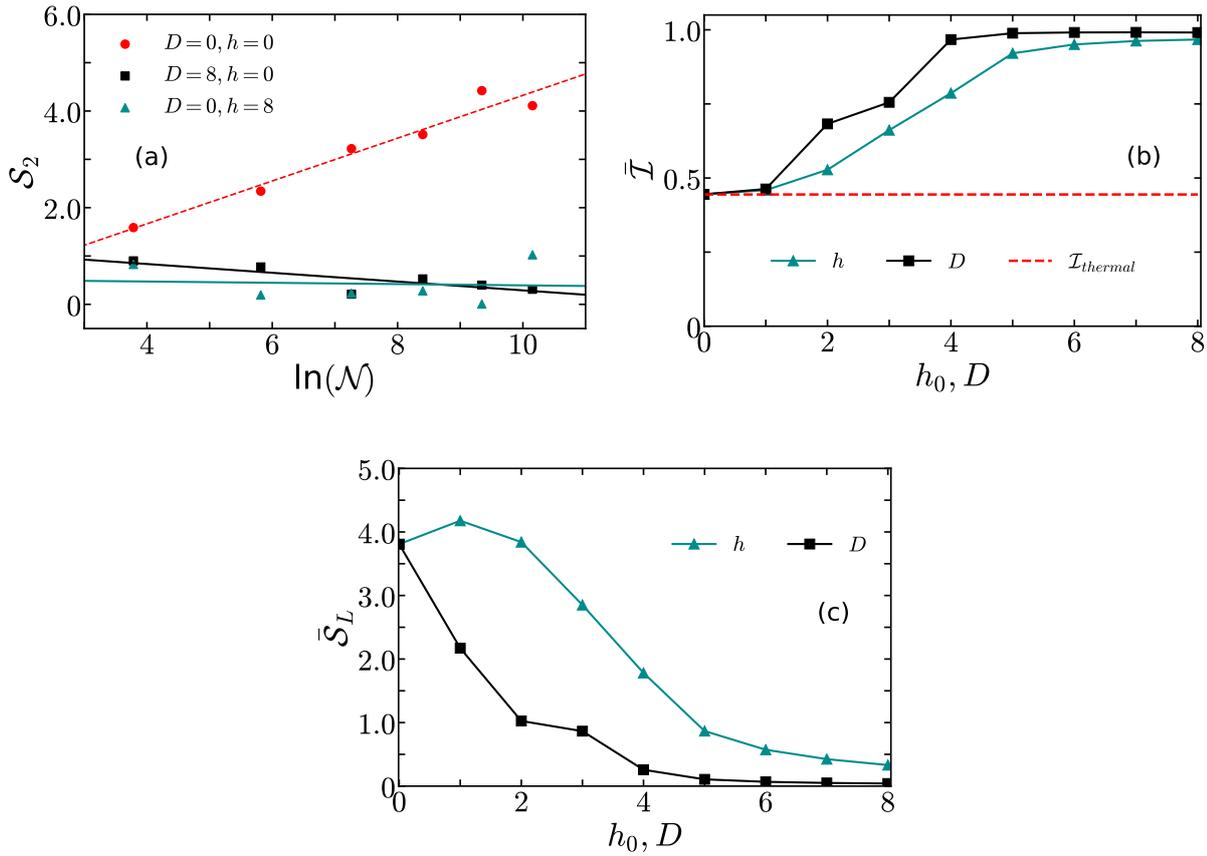


Figura 14 – (a) Entropia de participação vs $\ln \mathcal{N}$ para $(D, h_0) = (0, 0)$ (círculos vermelhos), $(D, h_0) = (8, 0)$ (quadrados pretos) e $(D, h_0) = (0, 8)$ (triângulos ciano). Linhas tracejadas correspondem a um ajuste linear das curvas e servem como guia visual. Para alterar o tamanho do espaço de Hilbert, L inclui todos os números pares de 4 a 14. (b) e (c) mostram, respectivamente, a média temporal posterior do imbalance e da entropia como função de D (para $h_0 = 0$) (quadrados vermelhos) e h_0 (para $D_0 = 0$) (triângulos azuis) para $L = 12$. Para todos os painéis, definimos $\theta = 0$ e usamos um estado inicial do tipo $|\cdots, \bar{3}, 3, 3, \bar{3}, \cdots\rangle$, que corresponde a uma ilha de spins $S_j^z = 3/2$ no meio de uma cadeia de spins $S_j^z = -3/2$.

função de h_0 para $D = 0$. Usamos uma cadeia de $L = 12$ e o mesmo estado inicial que na Figura 14(a), com $\theta = 0$. Novamente, $\bar{\mathcal{I}}$ é a média de $\mathcal{I}(t)$ para $t \in [400, 500]$. Observamos que ambas as curvas evoluem de maneira suave de um regime termalizado ($\bar{\mathcal{I}} \approx 0.5$) para um regime localizado ($\bar{\mathcal{I}} \approx 1$) conforme D e h_0 aumentam de zero para 8. Curiosamente, a transição ocorre para valores semelhantes de D e h_0 . Isso é corroborado pela entropia \bar{S}_L representada na Figura 14(c), onde fica evidente que \bar{S}_L se anula se tanto h_0 quanto D aumentam, indicando a localização dos estados.

Na Figura 15(a) temos a entropia de participação denotada pela Eq. (28) essa entropia é calculada usando não dinâmica do estado inicial, aqui usa-se o processo de diagonalização do hamiltoniano para obter os estados da base do hamiltoniano, com isso conseguimos fazer a soma $\sum_{\alpha=1}^{\mathcal{N}} |\psi_{\alpha}|^{2q}$ dos estados projetados na base de spins, mostrando

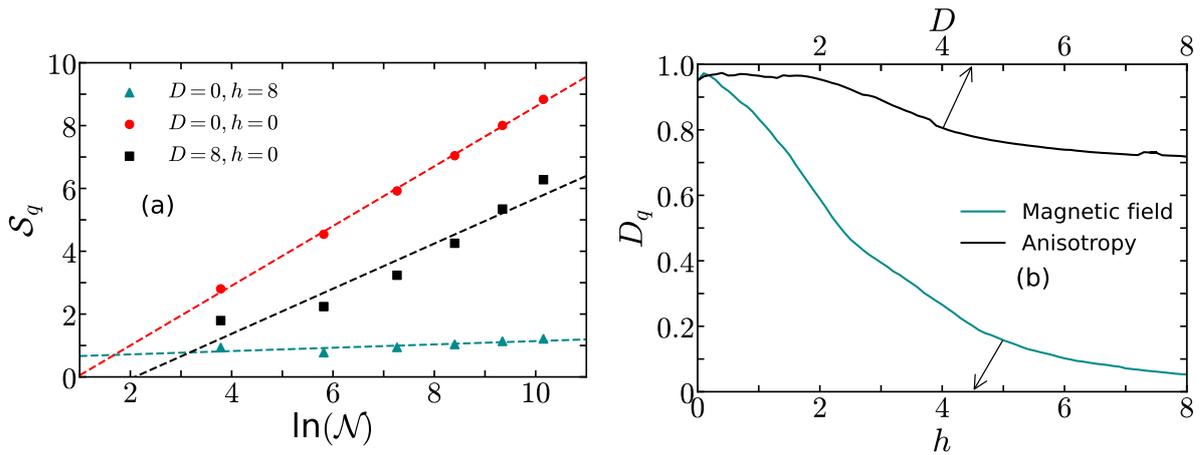


Figura 15 – (a) Entropia de participação Eq. 28 vs $\ln(\mathcal{N})$ para $(D, h_0) = (0, 0)$ (círculos vermelhos), $(D, h_0) = (8, 0)$ (quadrados pretos) e $(D, h_0) = (0, 8)$ (triângulos ciano). Linhas tracejadas correspondem a um ajuste linear das curvas e servem como guia visual. Para alterar o tamanho do espaço de Hilbert, L inclui todos os números pares de 4 a 14. (b) mostra D_q que é a inclinação das retas que ajustam os pontos da EP em função do campo e anisotropia. O sistema e estado inicial usados aqui são os mesmos da Figura 14.

assim as informações sobre como os coeficientes de um estado estão distribuídos entre os estados da base. A escolha de analisar um estado inicial, tanto aqui quanto nos resultados da Figura 14, é motivado pela dificuldade de se diagonalizar o hamiltoniano inteiro, com isso o maior sistema que se mostrou possível de se realizar tal diagonalização foi no subespaço onde temos apenas duas excitações no meio da cadeia. para o caso de $(D, h_0) = (0, 0)$ é mostrada S_q aumenta de forma linear com o $\ln(\mathcal{N})$ mostrando assim o regime ergótico do sistema como já era previsto. Para o caso de $(D, h_0) = (8, 0)$ observamos um resultado onde, novamente, temos o crescimento da entropia com o aumento do espaço de hilbert. Neste caso esperava-se um comportamento de um sistema localizado, de acordo com imbalance e entropia de emaranhamento que podem ser visto na Figura 14(c) e (c). Porém, S_q mostra resultados que corresponde a um sistema ergótico. Isso revela a fragilidade de utilizar a EP definida pela Eq. (28) que, aparentemente, não consegue descrever bem casos onde se tem grandes degenerescências, veja que para $(D, h_0) = (0, 8)$ a S_q se mostra relativamente constante com o crescimento do espaço de hilbert indicando um regime localizado de forma correta.

Diante das inconsistências observadas em S_q na captura da fase localizada do sistema quando induzido uma anisotropia, recorreremos à Figura 15(b) na qual D_q , representa a inclinação da reta que ajusta os pontos da Fig. 15(a). A representação gráfica de D_q foi elaborada para destacar como os resultados entre h e D são incorporados por S_q . Quando temos $(D, h_0) = (0, 0)$, observamos que D_q tem uma magnitude próxima à unidade, isso mostra que o sistema possui uma S_q , que corresponde uma reta crescente que indica a

termalização do sistema. A medida que aumentamos o campo e anisotropia, as curvas de D_q , correspondente ao campo diminuem até próximo a zero para $h_0 = 8$, e para a anisotropia permanece próximo à unidade até $D = 2$, e posteriormente apresentando um leve decréscimo, porém muito longe de chegar a zero. Quando as curvas de D_q chegam a valores próximos a zero isso corresponderá ao caso onde temos uma reta quase constante em S_q , evidenciando que o sistema transacionou para uma fase localizada. A abordagem para S_q , usada neste caso, demonstrou eficaz apenas para captura a fase localizada induzida pelo campo magnético, não mostrando a fase localizada frente a anisotropia.

4.4 Sistema de spin 1: efeito de anisotropia de íon único.

Deixamos por último a análise para spin 1, visto que o foco do trabalho é para $S = 3/2$ nos quais o efeito combinado de D e h_0 , são mais ricos. Isso porque inverter um spin dado de $S_z = -1$ para $S_z = +1$ requer passar por $S_z = 0$, que permanece inerte ao campo magnético ao longo da direção z . Para explorar a interação entre h_0 e D , o caso de $S = 1$ não abrange o cenário mais geral. Conseqüentemente, abordaremos de forma breve o caso de $S = 1$.

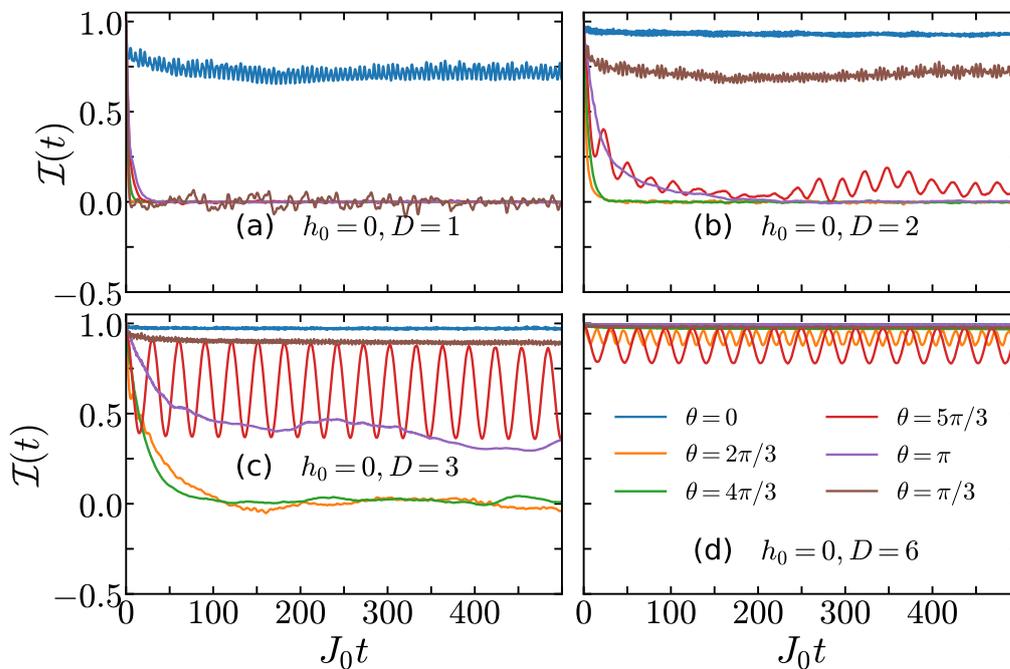


Figura 16 – imbalance em função do tempo para uma cadeia de spin-1 com $h_0 = 0$ fixo e D crescente. As curvas correspondem a diferentes valores de θ . Utilizamos uma cadeia com $L = 12$ spins, onde o estado inicial consiste em uma ilha de seis spins “up” no meio da cadeia, enquanto todos os outros spins estão “down”.

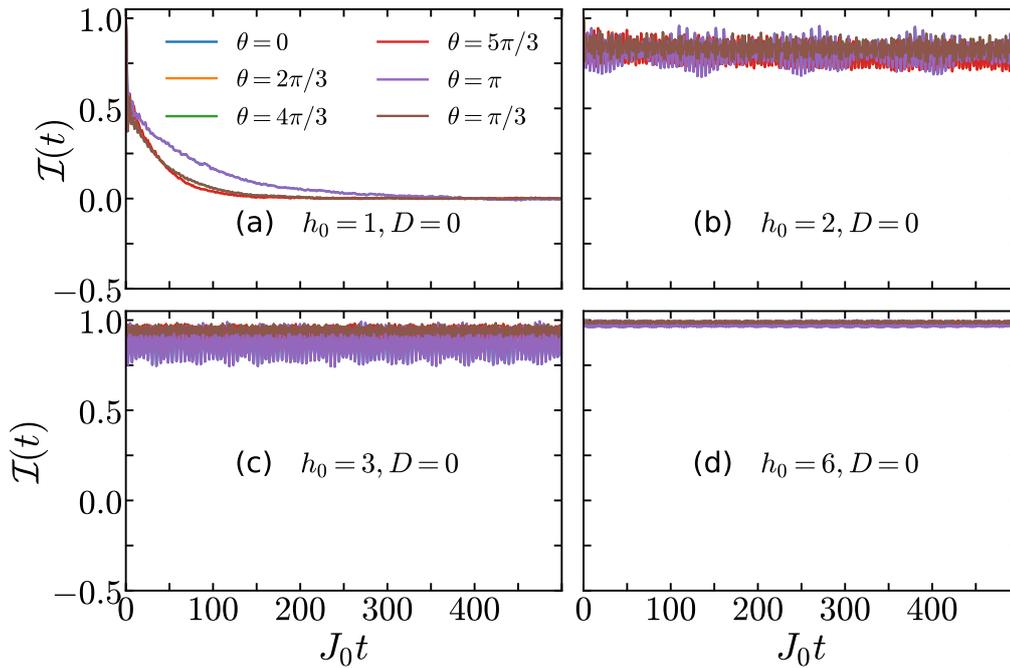


Figura 17 – imbalance em função do tempo para uma cadeia de spin-1 com $D = 0$ fixo e h_0 crescente. As curvas correspondem a diferentes valores de θ . Utilizamos uma cadeia com $L = 12$ spins, onde o estado inicial consiste em uma ilha de seis spins “up” no meio da cadeia, enquanto todos os outros spins estão “down”.

Aqui, buscamos brevemente demonstrar que a anisotropia D também impede a termalização da cadeia de spin-1. Consideramos uma cadeia com $L = 12$ e $h_0 = 0$. Na Figura 16, os painéis mostram os efeitos de uma progressão de D . Utilizamos um estado inicial $|\cdots \bar{2}, 2, 2, 2, 2, 2, \bar{2} \cdots\rangle$ e apresentamos os resultados para vários ângulos θ . Nas Figuras 16(a-c), mostramos $\mathcal{I}(t)$ para $D = (1, 2, 3)$ respectivamente. Aqui podemos notar o mesmo fenômeno abordado para o caso do $S = 3/2$, onde para valores de D não muito maiores do que J apenas para alguns valores de θ localizam, para $D = 6$ temos a fase localizada para todos os θ

A fins de concretude também mostramos que a SMBL também é válida para $S = 1$, na Figura 17 temos painéis com alguns valores de campo. na Figura 17(a) onde $h_0 = 1$ mostra que o sistema termalizou durante a dinâmica, nas Figuras 17(b - d), todos os ângulos sofrem localização induzida pelo campo. Pode se observar que para $h_0 \leq J$, corresponde a fase térmica, e $h_0 \geq J$ observa-se a fase localizada. Ressaltando que tanto a fase SMBL quando a localização induzidas pela anisotropia para spin 1, até o momento não haviam sido exploradas.

Conclusão

Em resumo, investigamos a dinâmica de uma cadeia de spins fechada modelada como um Hamiltoniano de Majumdar-Ghosh na presença de um campo magnético de gradiente finito h_0 , induzindo Localização de Muitos Corpos (SMBL). Um termo adicional que considera anisotropia uniaxial de um íon único D foi incluído. Utilizando cálculos numéricos exatos, computamos várias quantidades, como imbalance e entropia de emaranhamento, comumente utilizadas para investigar fenômenos de localização. Nossos resultados mostram que a conhecida SMBL observada para cadeias com spins $S = 1/2$ é observada para $S > 1/2$. Da mesma forma, na ausência de campo magnético, a presença apenas da anisotropia é capaz de induzir localização no sistema para $S > 1/2$ em certos estados iniciais do tipo produto, onde os spins têm projeção máxima de S_j^z . Nossos resultados sugerem que a localização induzida por D resulta da supressão da dinâmica de spin através das paredes de domínio bem definidas dos estados iniciais. Isso pode ser entendido como uma barreira de energia imposta pela anisotropia que precisa ser superada para embaralhar os spins a partir de um estado inicial do tipo produto, onde todos os spins têm suas projeções S_j^z máximas ou mínimas. Embora o setor do espaço de Hilbert contendo essa família de estados produto não esteja completamente desacoplado do restante sob a evolução temporal, ele se torna progressivamente isolado à medida que D aumenta. Isso é algo semelhante ao que foi apontado por Zisling et al. em Ref. [160] no contexto de SMBL. Mais interessante, descobrimos que, para $D \approx h_0 \gtrsim J$, o campo magnético e a anisotropia competem para localizar o sistema, favorecendo a delocalização. Interpretamos isso como uma interação entre os custos energéticos para derreter as paredes de domínio. No regime de competição, o preço energético cobrado por D é de alguma forma compensado pelo custo imposto por h_0 . Embora nossos cálculos numéricos exatos atualmente se apliquem a sistemas de poucos sítios, argumentamos que essas descobertas iniciais são relevantes no contexto mais amplo da dinâmica de sistemas quânticos fechados de muitos corpos. Em particular, elas contribuem para nossa compreensão das conexões entre a fragmentação do espaço de Hilbert e sistemas localizados desordenados.

É importante destacar que nossos resultados não excluem a possibilidade, por exemplo, do desaparecimento gradual de regiões localizadas no espaço de Hilbert em sistemas grandes ou em limites de tempo longos. Abordar essas questões exige exploração adicional, tanto experimentalmente usando sondas comumente empregadas em estudos convencionais de MBL quanto teoricamente por meio de investigações que poderiam, por exemplo, estender a teoria dos l-bits dinâmicos [161] para redes de spins com $S \geq 1$. Finalmente, vale ressaltar que os modelos examinados neste estudo podem ser realizados experimentalmente usando simuladores quânticos atuais, incluindo átomos frios, íons aprisionados e qubits supercondutores.

Referências

- 1 WANNIER, G. H. Dynamics of band electrons in electric and magnetic fields. *Reviews of Modern Physics*, American Physical Society (APS), v. 34, n. 4, p. 645–655, out. 1962. ISSN 0034-6861. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.34.645>>.
- 2 SCHULZ, M. et al. Stark many-body localization. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 122, n. 4, jan. 2019. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.040606>>.
- 3 POLKOVNIKOV, A. et al. Colloquium: Nonequilibrium dynamics of closed interacting quantum systems. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 83, p. 863–883, Aug 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.83.863>>.
- 4 D’ALESSIO, L. et al. From quantum chaos and eigenstate thermalization to statistical mechanics and thermodynamics. *Advances in Physics*, Informa UK Limited, v. 65, n. 3, p. 239–362, maio 2016. ISSN 1460-6976. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/00018732.2016.1198134>>.
- 5 DEUTSCH, J. M. Quantum statistical mechanics in a closed system. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 43, p. 2046–2049, Feb 1991. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.43.2046>>.
- 6 TASAKI, H. From quantum dynamics to the canonical distribution: General picture and a rigorous example. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 80, p. 1373–1376, Feb 1998. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.80.1373>>.
- 7 RIGOL, M.; DUNJKO, V.; OLSHANII, M. Thermalization and its mechanism for generic isolated quantum systems. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 452, n. 7189, p. 854–858, abr. 2008. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/nature06838>>.
- 8 ALET, F.; LAFLORENCIE, N. Many-body localization: An introduction and selected topics. *Comptes Rendus Physique*, Cellule MathDoc/CEDRAM, v. 19, n. 6, p. 498–525, set. 2018. ISSN 1631-0705. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.crhy.2018.03.003>>.
- 9 CHANDRAN, A. et al. Many-body localization and symmetry-protected topological order. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 89, p. 144201, Apr 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.89.144201>>.

- 10 BASKO, D.; ALEINER, I.; ALTSHULER, B. Metal–insulator transition in a weakly interacting many-electron system with localized single-particle states. *Annals of Physics*, Elsevier BV, v. 321, n. 5, p. 1126–1205, maio 2006. ISSN 0003-4916. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.aop.2005.11.014>.
- 11 ZANGARA, P. R. et al. Interaction-disorder competition in a spin system evaluated through the loschmidt echo. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 88, p. 195106, Nov 2013. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.88.195106>.
- 12 BAUER, B.; NAYAK, C. Area laws in a many-body localized state and its implications for topological order. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, IOP Publishing, v. 2013, n. 09, p. P09005, set. 2013. ISSN 1742-5468. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-5468/2013/09/P09005>.
- 13 GORNYI, I. V.; MIRLIN, A. D.; POLYAKOV, D. G. Interacting electrons in disordered wires: Anderson localization and low- t transport. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 95, p. 206603, Nov 2005. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.95.206603>.
- 14 VASSEUR, R.; MOORE, J. E. Nonequilibrium quantum dynamics and transport: from integrability to many-body localization. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, IOP Publishing, v. 2016, n. 6, p. 064010, jun. 2016. ISSN 1742-5468. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-5468/2016/06/064010>.
- 15 ABANIN, D. A. et al. Colloquium: Many-body localization, thermalization, and entanglement. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 91, p. 021001, May 2019. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.91.021001>.
- 16 OGANESYAN, V.; HUSE, D. A. Localization of interacting fermions at high temperature. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 75, p. 155111, Apr 2007. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.75.155111>.
- 17 ŽNIDARIČ, M.; PROSEN, T.; PRELOVŠEK, P. Many-body localization in the heisenberg xxz magnet in a random field. *Physical Review B*, American Physical Society (APS), v. 77, n. 6, fev. 2008. ISSN 1550-235X. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.77.064426>.
- 18 OGANESYAN, V.; PAL, A.; HUSE, D. A. Energy transport in disordered classical spin chains. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 80, p. 115104, Sep 2009. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.80.115104>.
- 19 VASQUEZ, L. et al. Scaling law and critical exponent for α_0 at the 3d anderson transition. *Annalen der Physik*, Wiley, v. 521, n. 12, p. 901–904, dec 2009. ISSN 1521-3889. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1002/andp.20095211218>.
- 20 IOFFE, L. B.; MÉZARD, M. Disorder-driven quantum phase transitions in superconductors and magnets. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 105, p. 037001, Jul 2010. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.037001>.
- 21 ALEINER, I. L.; ALTSHULER, B. L.; SHLYAPNIKOV, G. V. A finite-temperature phase transition for disordered weakly interacting bosons in one dimension. *Nature*

Physics, Springer Science and Business Media LLC, v. 6, n. 11, p. 900–904, set. 2010. ISSN 1745-2481. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/nphys1758>>.

22 MONTHUS, C.; GAREL, T. Many-body localization transition in a lattice model of interacting fermions: Statistics of renormalized hoppings in configuration space. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 81, p. 134202, Apr 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.81.134202>>.

23 BERKELBACH, T. C.; REICHMAN, D. R. Conductivity of disordered quantum lattice models at infinite temperature: Many-body localization. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 81, p. 224429, Jun 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.81.224429>>.

24 ANDERSON, P. W. Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 109, p. 1492–1505, Mar 1958. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.109.1492>>.

25 LAGENDIJK, A.; TIGGELEN, B. van; WIERSMA, D. S. Fifty years of anderson localization. *Physics Today*, AIP Publishing, v. 62, n. 8, p. 24–29, ago. 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.3206091>>.

26 KRAMER, B.; MACKINNON, A. Localization: theory and experiment. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 56, n. 12, p. 1469–1564, dec 1993. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0034-4885/56/12/001>>.

27 NANDKISHORE, R.; HUSE, D. A. Many-body localization and thermalization in quantum statistical mechanics. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, Annual Reviews, v. 6, n. 1, p. 15–38, mar. 2015. ISSN 1947-5462. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031214-014726>>.

28 ALTMAN, E.; VOSK, R. Universal dynamics and renormalization in many-body-localized systems. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, Annual Reviews, v. 6, n. 1, p. 383–409, mar. 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031214-014701>>.

29 ABANIN, D. A.; PAPIĆ, Z. Recent progress in many-body localization. *Annalen der Physik*, Wiley, v. 529, n. 7, p. 1700169, jul. 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/andp.201700169>>.

30 SMITH, J. et al. Many-body localization in a quantum simulator with programmable random disorder. *Nature Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 12, n. 10, p. 907–911, jun. 2016. ISSN 1745-2481. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/nphys3783>>.

31 SUNTAJS, J. et al. Quantum chaos challenges many-body localization. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 102, p. 062144, Dec 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.102.062144>>.

32 HUANG, Y. Finite-size scaling analysis of eigenstate thermalization. *Annals of Physics*, Elsevier BV, v. 438, p. 168761, mar. 2022. ISSN 0003-4916. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.aop.2022.168761>>.

- 33 LUITZ, D. J. Long tail distributions near the many-body localization transition. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 93, p. 134201, Apr 2016. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.93.134201>.
- 34 YU, X.; LUITZ, D. J.; CLARK, B. K. Bimodal entanglement entropy distribution in the many-body localization transition. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 94, p. 184202, Nov 2016. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.94.184202>.
- 35 ABANIN, D. et al. Distinguishing localization from chaos: Challenges in finite-size systems. *Annals of Physics*, Elsevier BV, v. 427, p. 168415, abr. 2021. ISSN 0003-4916. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.aop.2021.168415>.
- 36 PANDA, R. K. et al. Can we study the many-body localisation transition? *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 128, n. 6, p. 67003, fev. 2020. ISSN 1286-4854. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1209/0295-5075/128/67003>.
- 37 SIERANT, P.; DELANDE, D.; ZAKRZEWSKI, J. Thouless time analysis of anderson and many-body localization transitions. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 124, p. 186601, May 2020. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.186601>.
- 38 SIERANT, P.; LEWENSTEIN, M.; ZAKRZEWSKI, J. Polynomially filtered exact diagonalization approach to many-body localization. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 125, p. 156601, Oct 2020. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.125.156601>.
- 39 KIEFER-EMMANOUILIDIS, M. et al. Evidence for unbounded growth of the number entropy in many-body localized phases. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 124, p. 243601, Jun 2020. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.243601>.
- 40 KIEFER-EMMANOUILIDIS, M. et al. Slow delocalization of particles in many-body localized phases. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 103, p. 024203, Jan 2021. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.103.024203>.
- 41 MONDAINI, R. et al. Comment on “systematic construction of counterexamples to the eigenstate thermalization hypothesis”. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 121, p. 038901, Jul 2018. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.121.038901>.
- 42 BARDARSON, J. H.; POLLMANN, F.; MOORE, J. E. Unbounded growth of entanglement in models of many-body localization. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 109, p. 017202, Jul 2012. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.017202>.
- 43 SMITH, J. et al. Many-body localization in a quantum simulator with programmable random disorder. *Nature Physics*, Nature Publishing Group UK London, v. 12, n. 10, p. 907–911, 2016. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1038/nphys3783>.
- 44 XU, K. et al. Emulating many-body localization with a superconducting quantum processor. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 120, n. 5, p. 050507, 2018. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.120.050507>.

- 45 CHOI, J.-y. et al. Exploring the many-body localization transition in two dimensions. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 352, n. 6293, p. 1547–1552, 2016.
- 46 LÜSCHEN, H. P. et al. Observation of slow dynamics near the many-body localization transition in one-dimensional quasiperiodic systems. *Phys. Rev. Lett.*, APS, v. 119, n. 26, p. 260401, 2017. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.260401>>.
- 47 GONG, M. et al. Experimental characterization of the quantum many-body localization transition. *Phys. Rev. Res.*, APS, v. 3, n. 3, p. 033043, 2021. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevResearch.3.033043>>.
- 48 SERBYN, M.; é, Z. Papi; ABANIN, D. A. Local conservation laws and the structure of the many-body localized states. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 111, p. 127201, Sep 2013. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.111.127201>>.
- 49 HUSE, D. A.; NANDKISHORE, R.; OGANESYAN, V. Phenomenology of fully many-body-localized systems. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 90, p. 174202, Nov 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.90.174202>>.
- 50 RADEMAKER, L.; NO, M. O. Explicit local integrals of motion for the many-body localized state. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 116, p. 010404, Jan 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.010404>>.
- 51 IMBRIE, J. Z. On many-body localization for quantum spin chains. *Journal of Statistical Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 163, n. 5, p. 998–1048, abr. 2016. ISSN 1572-9613. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10955-016-1508-x>>.
- 52 O'BRIEN, T. E. et al. Explicit construction of local conserved operators in disordered many-body systems. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 94, p. 144208, Oct 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.94.144208>>.
- 53 DOGGEN, E. V. H.; GORNYI, I. V.; POLYAKOV, D. G. Stark many-body localization: Evidence for hilbert-space shattering. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 103, p. L100202, Mar 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.103.L100202>>.
- 54 VERNEK, E. Robustness of stark many-body localization in the J_1-J_2 heisenberg model. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 105, p. 075124, Feb 2022. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.105.075124>>.
- 55 JIANG, X.-P. et al. Stark many-body localization with long-range interactions. *arXiv preprint arXiv:2307.12376*, 2023. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2307.12376>>.
- 56 YAO, R.; ZAKRZEWSKI, J. Many-body localization of bosons in an optical lattice: Dynamics in disorder-free potentials. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 102, p. 104203, Sep 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.102.104203>>.
- 57 TAYLOR, S. R. et al. Experimental probes of stark many-body localization. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 102, p. 054206, Aug 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.102.054206>>.

- 58 ZHANG, S.-X.; YAO, H. Universal properties of many-body localization transitions in quasiperiodic systems. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 121, p. 206601, Nov 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.121.206601>>.
- 59 SINGH, H. et al. Local integrals of motion and the quasiperiodic many-body localization transition. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 103, p. L220201, Jun 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.103.L220201>>.
- 60 BAIREY, E.; REFAEL, G.; LINDNER, N. H. Driving induced many-body localization. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 96, p. 020201, Jul 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.96.020201>>.
- 61 YOUSEFJANI, R.; BOSE, S.; BAYAT, A. Floquet-induced localization in long-range many-body systems. *Phys. Rev. Res.*, American Physical Society, v. 5, p. 013094, Feb 2023. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.5.013094>>.
- 62 WU, N. et al. Exact solutions of few-magnon problems in the spin- s periodic xxz chain. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 105, p. 064419, Feb 2022. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.105.064419>>.
- 63 SHARMA, P.; LEE, K.; CHANGLANI, H. J. Multimagnon dynamics and thermalization in the $s = 1$ easy-axis ferromagnetic chain. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 105, p. 054413, Feb 2022. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.105.054413>>.
- 64 SENKO, C. et al. Realization of a quantum integer-spin chain with controllable interactions. *Phys. Rev. X*, American Physical Society, v. 5, p. 021026, Jun 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.5.021026>>.
- 65 CHUNG, W. C. et al. Tunable single-ion anisotropy in spin-1 models realized with ultracold atoms. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 126, p. 163203, Apr 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.163203>>.
- 66 CHAUHAN, P. et al. Tunable magnon interactions in a ferromagnetic spin-1 chain. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 124, p. 037203, Jan 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.037203>>.
- 67 PAJEROWSKI, D. M. et al. High-pressure inelastic neutron scattering study of the anisotropic $S = 1$ spin chain $[\text{Ni}(\text{hf}_2)(3\text{-Clpyradine})_4]\text{Bf}_4$. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 105, p. 134420, Apr 2022. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.105.134420>>.
- 68 MAJUMDAR, C. K.; GHOSH, D. K. On next-nearest-neighbor interaction in linear chain. i. *Journal of Mathematical Physics*, AIP Publishing, v. 10, n. 8, p. 1388–1398, ago. 1969. ISSN 1089-7658. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1063/1.1664978>>.
- 69 LI, Y. et al. Magnetic anisotropy of the two-dimensional ferromagnetic insulator mnbi_2te_4 . *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 100, p. 134438, Oct 2019. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.100.134438>>.
- 70 LIU, J. et al. Most spin-1/2 transition-metal ions do have single ion anisotropy. *The Journal of Chemical Physics*, AIP Publishing, v. 141, n. 12, p. 124113, sep 2014. ISSN 1089-7690. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1063/1.4896148>>.

- 71 NARDELLI, F. et al. Anisotropy and nmr spectroscopy. *Rendiconti Lincei. Scienze Fisiche e Naturali*, Springer Science and Business Media LLC, v. 31, n. 4, p. 999–1010, ago. 2020. ISSN 1720-0776. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s12210-020-00945-3>>.
- 72 BELL, J. S. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics Physique Fizika*, American Physical Society (APS), v. 1, n. 3, p. 195–200, nov. 1964. ISSN 0554-128X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195>>.
- 73 NEUMANN, J. v. Beweis des ergodensatzes und desh-theorems in der neuen mechanik. *Zeitschrift für Physik*, Springer Science and Business Media LLC, v. 57, n. 1–2, p. 30–70, jan. 1929. ISSN 1434-601X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF01339852>>.
- 74 DEUTSCH, J. M. Quantum statistical mechanics in a closed system. *Physical Review A*, American Physical Society (APS), v. 43, n. 4, p. 2046–2049, fev. 1991. ISSN 1094-1622. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.43.2046>>.
- 75 SREDNICKI, M. Chaos and quantum thermalization. *Physical Review E*, American Physical Society (APS), v. 50, n. 2, p. 888–901, ago. 1994. ISSN 1095-3787. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.50.888>>.
- 76 RIGOL, M.; SREDNICKI, M. Alternatives to eigenstate thermalization. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 108, n. 11, mar. 2012. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.110601>>.
- 77 KIM, H.; IKEDA, T. N.; HUSE, D. A. Testing whether all eigenstates obey the eigenstate thermalization hypothesis. *Physical Review E*, American Physical Society (APS), v. 90, n. 5, nov. 2014. ISSN 1550-2376. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.90.052105>>.
- 78 LAUMANN, C.; PAL, A.; SCARDICCHIO, A. Many-body mobility edge in a mean-field quantum spin glass. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 113, n. 20, nov. 2014. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.200405>>.
- 79 ELKAMSHISHY, A. A.; GREENE, C. H. Observation of wigner-dyson level statistics in a classically integrable system. *Physical Review E*, American Physical Society (APS), v. 103, n. 6, jun. 2021. ISSN 2470-0053. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.103.062211>>.
- 80 BENITO-MATÍAS, E.; MOLINA, R. A. Localization length versus level repulsion in one-dimensional driven disordered quantum wires. *Physical Review B*, American Physical Society (APS), v. 96, n. 17, nov. 2017. ISSN 2469-9969. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.96.174202>>.
- 81 DYSON, F. J.; MEHTA, M. L. Statistical theory of the energy levels of complex systems. iv. *Journal of Mathematical Physics*, AIP Publishing, v. 4, n. 5, p. 701–712, maio 1963. ISSN 1089-7658. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1063/1.1704008>>.
- 82 SERBYN, M.; MOORE, J. E. Spectral statistics across the many-body localization transition. *Physical Review B*, American Physical Society (APS), v. 93, n. 4, jan. 2016. ISSN 2469-9969. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.93.041424>>.

- 83 BERNIEN, H. et al. Probing many-body dynamics on a 51-atom quantum simulator. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 551, n. 7682, p. 579–584, nov. 2017. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/nature24622>>.
- 84 TURNER, C. J. et al. Weak ergodicity breaking from quantum many-body scars. *Nature Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 14, n. 7, p. 745–749, maio 2018. ISSN 1745-2481. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/s41567-018-0137-5>>.
- 85 TURNER, C. J. et al. Quantum scarred eigenstates in a rydberg atom chain: Entanglement, breakdown of thermalization, and stability to perturbations. *Physical Review B*, American Physical Society (APS), v. 98, n. 15, out. 2018. ISSN 2469-9969. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.98.155134>>.
- 86 HO, W. W. et al. Periodic orbits, entanglement, and quantum many-body scars in constrained models: Matrix product state approach. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 122, n. 4, jan. 2019. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.040603>>.
- 87 KHEMANI, V.; LAUMANN, C. R.; CHANDRAN, A. Signatures of integrability in the dynamics of rydberg-blockaded chains. *Physical Review B*, American Physical Society (APS), v. 99, n. 16, abr. 2019. ISSN 2469-9969. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.99.161101>>.
- 88 CHOI, S. et al. Emergent $su(2)$ dynamics and perfect quantum many-body scars. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 122, n. 22, jun. 2019. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.220603>>.
- 89 SERBYN, M.; ABANIN, D. A.; PAPIĆ, Z. Quantum many-body scars and weak breaking of ergodicity. *Nature Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 17, n. 6, p. 675–685, maio 2021. ISSN 1745-2481. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/s41567-021-01230-2>>.
- 90 SALA, P. et al. Ergodicity breaking arising from hilbert space fragmentation in dipole-conserving hamiltonians. *Physical Review X*, American Physical Society (APS), v. 10, n. 1, fev. 2020. ISSN 2160-3308. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevX.10.011047>>.
- 91 KHEMANI, V.; HERMELE, M.; NANDKISHORE, R. Localization from hilbert space shattering: From theory to physical realizations. *Physical Review B*, American Physical Society (APS), v. 101, n. 17, maio 2020. ISSN 2469-9969. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.101.174204>>.
- 92 MOUDGALYA, S. et al. Thermalization and its absence within krylov subspaces of a constrained hamiltonian. In: _____. *Memorial Volume for Shoucheng Zhang*. WORLD SCIENTIFIC, 2021. p. 147–209. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1142/9789811231711_0009>.
- 93 CAUX, J.-S.; MOSSEL, J. Remarks on the notion of quantum integrability. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, IOP Publishing, v. 2011, n. 02, p. P02023, fev. 2011. ISSN 1742-5468. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1742-5468/2011/02/P02023>>.

- 94 ILIEVSKI, E. et al. Complete generalized gibbs ensembles in an interacting theory. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 115, p. 157201, Oct 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.157201>>.
- 95 IMBRIE, J. Z.; ROS, V.; SCARDICCHIO, A. Local integrals of motion in many-body localized systems. *Annalen der Physik*, Wiley, v. 529, n. 7, maio 2017. ISSN 1521-3889. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/andp.201600278>>.
- 96 IMBRIE, J. Z. Diagonalization and many-body localization for a disordered quantum spin chain. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 117, p. 027201, Jul 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.117.027201>>.
- 97 RADEMAKER, L.; ORTUÑO, M. Explicit local integrals of motion for the many-body localized state. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 116, n. 1, jan. 2016. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.010404>>.
- 98 ROS, V.; MÜLLER, M.; SCARDICCHIO, A. Integrals of motion in the many-body localized phase. *Nuclear Physics B*, Elsevier BV, v. 891, p. 420–465, fev. 2015. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2014.12.014>>.
- 99 ANDERSON, P. W. Absence of diffusion in certain random lattices. *Physical Review*, American Physical Society (APS), v. 109, n. 5, p. 1492–1505, mar. 1958. ISSN 0031-899X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.109.1492>>.
- 100 LEE, P. A.; RAMAKRISHNAN, T. V. Disordered electronic systems. *Reviews of Modern Physics*, American Physical Society (APS), v. 57, n. 2, p. 287–337, abr. 1985. ISSN 0034-6861. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.57.287>>.
- 101 ABRAHAMS, E. et al. Scaling theory of localization: Absence of quantum diffusion in two dimensions. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 42, n. 10, p. 673–676, mar. 1979. ISSN 0031-9007. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.42.673>>.
- 102 EVERS, F.; MIRLIN, A. D. Anderson transitions. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 80, p. 1355–1417, Oct 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.80.1355>>.
- 103 MASTROPIETRO, V. Localization of interacting fermions in the aubry-andré model. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 115, n. 18, out. 2015. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.180401>>.
- 104 SCHEFFOLD, F. et al. Localization or classical diffusion of light? *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 398, n. 6724, p. 206–207, mar. 1999. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/18347>>.
- 105 STÖRZER, M. et al. Observation of the critical regime near anderson localization of light. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 96, n. 6, fev. 2006. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.063904>>.
- 106 SCHWARTZ, T. et al. Transport and anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 446, n. 7131, p. 52–55, mar. 2007. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/nature05623>>.

- 107 LAHINI, Y. et al. Anderson localization and nonlinearity in one-dimensional disordered photonic lattices. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 100, n. 1, jan. 2008. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.013906>>.
- 108 JIMENEZ-VILLAR, E. et al. Anomalous transport of light at the phase transition to localization: strong dependence with incident angle. *Photonics Research*, The Optical Society, v. 6, n. 10, p. 929, set. 2018. ISSN 2327-9125. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1364/PRJ.6.000929>>.
- 109 DALICHAOUCH, R. et al. Microwave localization by two-dimensional random scattering. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 354, n. 6348, p. 53–55, nov. 1991. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/354053a0>>.
- 110 CHABANOV, A. A.; STOYTCHEV, M.; GENACK, A. Z. Statistical signatures of photon localization. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 404, n. 6780, p. 850–853, abr. 2000. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/35009055>>.
- 111 BILLY, J. et al. Direct observation of anderson localization of matter waves in a controlled disorder. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 453, n. 7197, p. 891–894, jun. 2008. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/nature07000>>.
- 112 ROATI, G. et al. Anderson localization of a non-interacting bose–einstein condensate. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 453, n. 7197, p. 895–898, jun. 2008. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/nature07071>>.
- 113 CHABÉ, J. et al. Experimental observation of the anderson metal-insulator transition with atomic matter waves. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 101, n. 25, dez. 2008. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.255702>>.
- 114 SCHREIBER, M. et al. Observation of many-body localization of interacting fermions in a quasirandom optical lattice. *Science*, American Association for the Advancement of Science (AAAS), v. 349, n. 6250, p. 842–845, ago. 2015. ISSN 1095-9203. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1126/science.aaa7432>>.
- 115 SHEPELYANSKY, D. L. Coherent propagation of two interacting particles in a random potential. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 73, p. 2607–2610, Nov 1994. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.73.2607>>.
- 116 ALTSHULER, B. L. et al. Quasiparticle lifetime in a finite system: A nonperturbative approach. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 78, p. 2803–2806, Apr 1997. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.2803>>.
- 117 JACQUOD, P.; SHEPELYANSKY, D. L. Emergence of quantum chaos in finite interacting fermi systems. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 79, p. 1837–1840, Sep 1997. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.79.1837>>.

- 118 GEORGEOT, B.; SHEPELYANSKY, D. L. Breit-wigner width and inverse participation ratio in finite interacting fermi systems. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 79, p. 4365–4368, Dec 1997. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.79.4365>>.
- 119 TOMASI, G. D. et al. Quantum mutual information as a probe for many-body localization. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 118, p. 016804, Jan 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.118.016804>>.
- 120 OGANESYAN, V.; HUSE, D. A. Localization of interacting fermions at high temperature. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 75, p. 155111, Apr 2007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.75.155111>>.
- 121 MONTHUS, C.; GAREL, T. Many-body localization transition in a lattice model of interacting fermions: Statistics of renormalized hoppings in configuration space. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 81, p. 134202, Apr 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.81.134202>>.
- 122 BERKELBACH, T. C.; REICHMAN, D. R. Conductivity of disordered quantum lattice models at infinite temperature: Many-body localization. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 81, p. 224429, Jun 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.81.224429>>.
- 123 BERKOVITS, R. Entanglement entropy in a one-dimensional disordered interacting system: The role of localization. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 108, p. 176803, Apr 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.176803>>.
- 124 KHATAMI, E. et al. Quantum quenches in disordered systems: Approach to thermal equilibrium without a typical relaxation time. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 85, p. 050102, May 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.85.050102>>.
- 125 CHOI, J.-y. et al. Exploring the many-body localization transition in two dimensions. *Science*, American Association for the Advancement of Science (AAAS), v. 352, n. 6293, p. 1547–1552, jun. 2016. ISSN 1095-9203. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1126/science.aaf8834>>.
- 126 ZHANG, J. et al. Observation of a discrete time crystal. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 543, n. 7644, p. 217–220, mar. 2017. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/nature21413>>.
- 127 BORDIA, P. et al. Periodically driving a many-body localized quantum system. *Nature Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 13, n. 5, p. 460–464, jan. 2017. ISSN 1745-2481. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/nphys4020>>.
- 128 LÜSCHEN, H. P. et al. Signatures of many-body localization in a controlled open quantum system. *Phys. Rev. X*, American Physical Society, v. 7, p. 011034, Mar 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.7.011034>>.
- 129 ROUSHAN, P. et al. Spectroscopic signatures of localization with interacting photons in superconducting qubits. *Science*, American Association for the Advancement

of Science (AAAS), v. 358, n. 6367, p. 1175–1179, dez. 2017. ISSN 1095-9203. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1126/science.aao1401>>.

130 PAL, A.; HUSE, D. A. Many-body localization phase transition. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 82, p. 174411, Nov 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.82.174411>>.

131 ZNIDARIC, M.; PROSEN, T.; PRELOVSEK, P. Many-body localization in the heisenberg xxz magnet in a random field. *Physical Review B*, American Physical Society (APS), v. 77, n. 6, fev. 2008. ISSN 1550-235X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.77.064426>>.

132 BUCCHERI, F.; LUCA, A. D.; SCARDICCHIO, A. Structure of typical states of a disordered richardson model and many-body localization. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 84, p. 094203, Sep 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.84.094203>>.

133 D'ALESSIO, L.; POLKOVNIKOV, A. Many-body energy localization transition in periodically driven systems. *Annals of Physics*, Elsevier BV, v. 333, p. 19–33, jun. 2013. ISSN 0003-4916. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.aop.2013.02.011>>.

134 PONTE, P. et al. Periodically driven ergodic and many-body localized quantum systems. *Annals of Physics*, Elsevier BV, v. 353, p. 196–204, fev. 2015. ISSN 0003-4916. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.aop.2014.11.008>>.

135 KJÄLL, J. A.; BARDARSON, J. H.; POLLMANN, F. Many-body localization in a disordered quantum ising chain. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 113, p. 107204, Sep 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.107204>>.

136 GROVER, T. *Certain General Constraints on the Many-Body Localization Transition*. arXiv, 2014. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1405.1471>>.

137 GOPALAKRISHNAN, S.; NANDKISHORE, R. Mean-field theory of nearly many-body localized metals. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 90, p. 224203, Dec 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.90.224203>>.

138 FRANZONI, M. B. et al. Storage of quantum coherences as phase-labelled local polarization in solid-state nuclear magnetic resonance. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, v. 370, n. 1976, p. 4713–4733, out. 2012. ISSN 1471-2962. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1098/rsta.2011.0363>>.

139 WU, L.-N.; ECKARDT, A. Bath-induced decay of stark many-body localization. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 123, n. 3, jul. 2019. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.030602>>.

140 DESAULES, J.-Y. et al. Proposal for realizing quantum scars in the tilted 1d fermi-hubbard model. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 126, p. 210601, May 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.210601>>.

141 ZHANG, L. et al. Mobility edge of stark many-body localization. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 103, p. 023323, Feb 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.103.023323>>.

- 142 KIM, K. W.; ANDREANOV, A.; FLACH, S. Anomalous transport in a topological wannier-stark ladder. *Phys. Rev. Res.*, American Physical Society, v. 2, p. 023067, Apr 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.2.023067>>.
- 143 TAYLOR, S. R. et al. Experimental probes of stark many-body localization. *Physical Review B*, American Physical Society (APS), v. 102, n. 5, ago. 2020. ISSN 2469-9969. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.102.054206>>.
- 144 EISERT, J.; CRAMER, M.; PLENIO, M. B. Colloquium: Area laws for the entanglement entropy. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 82, p. 277–306, Feb 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.82.277>>.
- 145 SERBYN, M.; Ć, Z. Papi; ABANIN, D. A. Universal slow growth of entanglement in interacting strongly disordered systems. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 110, p. 260601, Jun 2013. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.110.260601>>.
- 146 KHEMANI, V.; SHENG, D. N.; HUSE, D. A. Two universality classes for the many-body localization transition. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 119, p. 075702, Aug 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.119.075702>>.
- 147 SIERANT, P.; DELANDE, D.; ZAKRZEWSKI, J. Thouless time analysis of anderson and many-body localization transitions. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 124, p. 186601, May 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.186601>>.
- 148 DOGGEN, E. V. H. et al. Many-body localization and delocalization in large quantum chains. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 98, p. 174202, Nov 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.98.174202>>.
- 149 GUO, Q. et al. Stark many-body localization on a superconducting quantum processor. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 127, p. 240502, Dec 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.127.240502>>.
- 150 GUARDADO-SANCHEZ, E. et al. Subdiffusion and heat transport in a tilted two-dimensional fermi-hubbard system. *Phys. Rev. X*, American Physical Society, v. 10, p. 011042, Feb 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.10.011042>>.
- 151 SCHERG, S. et al. Observing non-ergodicity due to kinetic constraints in tilted fermi-hubbard chains. *Nature Communications*, Springer Science and Business Media LLC, v. 12, n. 1, jul. 2021. ISSN 2041-1723. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/s41467-021-24726-0>>.
- 152 BURSILL, R. et al. Numerical and approximate analytical results for the frustrated spin- 1/2 quantum spin chain. *Journal of Physics: Condensed Matter*, IOP Publishing, v. 7, n. 45, p. 8605–8618, nov 1995. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0953-8984/7/45/016>>.
- 153 KUMAR, B. Quantum spin models with exact dimer ground states. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 66, p. 024406, Jun 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.66.024406>>.

- 154 VERNEK, E.; ÁVALOS-OVANDO, O.; ULLOA, S. E. Competing interactions and spin-vector chirality in spin chains. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 102, p. 174427, Nov 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.102.174427>>.
- 155 WEINBERG, P.; BUKOV, M. QuSpin: a Python package for dynamics and exact diagonalisation of quantum many body systems part I: spin chains. *SciPost Phys.*, SciPost, v. 2, p. 003, 2017. Disponível em: <<https://scipost.org/10.21468/SciPostPhys.2.1.003>>.
- 156 WEINBERG, P.; BUKOV, M. QuSpin: a Python package for dynamics and exact diagonalisation of quantum many body systems. Part II: bosons, fermions and higher spins. *SciPost Phys.*, SciPost, v. 7, p. 020, 2019. Disponível em: <<https://scipost.org/10.21468/SciPostPhys.7.2.020>>.
- 157 HAEGEMAN, J. et al. Unifying time evolution and optimization with matrix product states. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 94, p. 165116, Oct 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.94.165116>>.
- 158 NIEUWENBURG, E. van; BAUM, Y.; REFAEL, G. From bloch oscillations to many-body localization in clean interacting systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Proceedings of the National Academy of Sciences, v. 116, n. 19, p. 9269–9274, Apr 2019. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1073/pnas.1819316116>>.
- 159 MACÉ, N.; ALET, F.; LAFLORENCIE, N. Multifractal scalings across the many-body localization transition. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 123, n. 18, out. 2019. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.180601>>.
- 160 ZISLING, G.; KENNES, D. M.; LEV, Y. B. Transport in stark many-body localized systems. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 105, p. L140201, Apr 2022. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.105.L140201>>.
- 161 GUNAWARDANA, T. M.; cA, B. Bu. Dynamical l-bits and persistent oscillations in stark many-body localization. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 106, p. L161111, Oct 2022. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.106.L161111>>.