Juan David Rubio Tabares

A propriedade positiva de Schur em reticulados de Banach

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

2024

Juan David Rubio Tabares

A propriedade positiva de Schur em reticulados de Banach

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Botelho.

UBERLÂNDIA - MG
2024

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

T112 2024

Tabares, Juan David Rubio, 1994-
A Propriedade de Schur Positiva em Reticulados de Banach [recurso eletrônico] / Juan David Rubio Tabares. - 2024.

Orientador: Geraldo Marcio De Azevedo Botelho.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2024.174
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Matemática. I. Botelho, Geraldo Marcio De Azevedo, 1962-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 160 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3239-4209/4154 - www.posgrad.famat.ufu.br - pgmat@famat.ufu.br

ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Matemática				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, 116, PPGMAT				
Data:	23 de fevereiro de 2024	Hora de início:	10:00	Hora de encerramento:	11:30
Matrícula do Discente:	12212MAT007				
Nome do Discente:	Juan David Rubio Tabares				
Título do Trabalho:	A propriedade positiva de Schur em reticulados de Banach				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Análise Funcional e Equações Diferenciais				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Teoria dos espaços de Banach: lineabilidade, produtos tensoriais topológicos e ideais de operadores multilineares				

Reuniu-se na Sala 1F 119 (Sala Multiuso da Faculdade de Matemática) - Bloco 1F (Campus Santa Mônica) da Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática, assim composta: Professores Doutores: José Lucas Pereira Luiz - Instituto Federal do Norte de Minas Gerais/ IFNMG; Vinícius Colferai Corrêa Miranda - FAMAT/ UFU e Geraldo Márcio de Azevedo Botelho - FAMAT/UFU, orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu o Discente a palavra para a exposição do seu trabalho.

A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa. A seguir o senhor presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o candidato:

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Vinicius Colferai Corrêa Miranda**, **Usuário Externo**, em 23/02/2024, às 11:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **José Lucas Pereira Luiz**, **Usuário Externo**, em 23/02/2024, às 11:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Geraldo Marcio de Azevedo Botelho**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 23/02/2024, às 11:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5177629** e o código CRC **6CC0BB8C**.

Referência: Processo nº 23117.010680/2024-43 SEI nº 5177629

Dedicatória

Este trabalho é em memória do meu pai, descanse em paz, sou quem sou graças a ele. A minha mai Margarita por todo seu amor e dedicação constantes, a minha irma Paula por su apoio e companhia em todos os momentos difficiles, à minha avó por me apoiar constantemente e a todas as pessoas que estiveram comigo me apoiando, obrigada infinitamente.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por todas as abençoes. Agradeço ao meu pai, Duvan Rubio, à minha mãe, Margarita Tabares Giraldo, à minha irma Paula Yiseth Rubio Tabares, e a minha avó por sempre estar a meu lado e todo seu apoio. Ao professor Geraldo pela orientação, apoio e paciência durante este processo de formação e por me motivar cada semana. Agradeço aos professores do mestrado por suas ensinamentos, foi muito confortável e benéfico aprender com eles. À CAPES por ter concedido apoio financeiro. Aos meus amigos que conheci no Brasil que tornaram minha estadia nesses dois anos maravilhosa e a todas as pessoas que me ajudaram nesse período, um agradecimento infinito.

RUBIO TABARES, J. D.. *A propriedade de Schur positiva em reticulados de Banach.* 2024. 80 pág p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

O objetivo desta dissertação é estudar, em vários aspectos, a propriedade de Schur positiva em reticulados de Banach. Para justificar o exemplo de um reticulado de Banach que tem a propriedade de Schur positiva e não tem a propriedade de Schur, provamos um critério de convergência fraca em $L_1[0,1]$, que tem a sequência de Rademacher como caso particular. Exemplos, contraexemplos e propriedades diversas da propriedade de Schur positiva são apresentadas. Estudamos também essa propriedade em somas diretas enumeráveis e em espaços $\ell_p(\Gamma)$. Em seguida, estuda-se a propriedade positiva de Schur em espaços de operadores regulares, e uma versão reticulada do Teorema de Ryan é demonstrada. Por fim, várias caracterizações da propriedade de Schur positiva em reticulados duais são provadas.

Palavras-chave: Reticulados de Banach, propriedade de Schur positiva, operadores regulares, operadores compactos, operadores fracamente compactos.

RUBIO TABARES, J. D. *The positive Schur property in Banach lattices.* 2024. 80 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

The purpose of this dissertation is to study, in several aspects, the positive Schur property in Banach lattices. In order to justify the example of a Banach lattice with the positive Schur property failing the Schur property, a criterion for weak convergence in $L_1[0,1]$, which recovers the Rademacher sequence as a particular instance, is proved. Examples, counterexamples and several properties of the positive Schur property are provided. We also study this property in countable direct sums and in $\ell_p(\Gamma)$-spaces. Next, the positive Schur property in spaces of regular operators is investigated, and a lattice version of Ryan's Theorem is proved. Finally, several characterizations of the positive Schur property in dual lattices are proved.

Keywords: Banach lattices, positive Schur property, regular operators, compact operators, weakly compact operators.

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
ℓ_p	espaço das sequências de escalares absolutamente p-somáveis
ℓ_∞	espaço das sequências de escalares limitadas
$L_p(\mu)$	$\{[f]; f: \Omega \to \mathbb{R}, \lvert f\rvert^p$ é μ-integrável sobre $\Omega\}$, onde $1 \leq p < \infty$
$L_\infty(\mu)$	$\{[f]; f: \Omega \to \mathbb{R}, f$ é essencialmente limitada em $\Omega\}$
$C(K)$	espaço vetorial das funções reais contínuas no espaço topológico compacto de Hausdorff K
c_0	conjunto das sequências em $\mathbb{R}$ que convergem para 0
χ_A	função característica do conjunto A
B_E	bola unitária fechada do espaço de Banach E
$CI(A)$	conjunto das cotas inferiores do conjunto A
E^*	dual topológico do espaço normado E
$f\vert_C$	restrição de f a C
E^{**}	bidual do espaço E
$F \hookrightarrow E$	o espaço normado F contém uma cópia do espaço normado E
$F \overset{R}{\hookrightarrow} E$	E tem uma cópia reticulada do reticulado de Banach F
$x_n \longrightarrow x$	a sequência $(x_n)_n$ converge para x
$x_n \overset{\omega}{\longrightarrow} x$	a sequência $(x_n)_n$ converge fracamente para x
$x_n \overset{\omega^*}{\longrightarrow} x$	a sequência $(x_n)_n$ converge fraco-estrela para x
$\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$	$\left\{(x_j)_j : x_j \in E_j \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \lVert (x_j)_j\rVert_1 := \sum_{j=1}^{\infty} \lVert x_j\rVert_{E_j} < \infty\right\}$
$\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_\infty$	$\left\{(x_j)_j : x_j \in E_j \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \lVert (x_j)_j\rVert_\infty := \sup_{j\in\mathbb{N}} \lVert x_j\rVert_{E_j} < \infty\right\}$
$\ell_p(\Gamma)$	$\left\{\begin{array}{l}(x_i)_{i\in\Gamma} : x_i \in \mathbb{R} \text{ para todo } i \in \Gamma, x_i \neq 0 \text{ apenas para uma} \\ \text{quantidade enumerável de índices e } \sum_{i\in I} \lvert x_i\rvert^p < \infty\end{array}\right\}.$
$\ell_p(\Gamma, E)$	$\{(x_i)_{i\in\Gamma} : x_i \in E \text{ para todo } i \in \Gamma \text{ e } (\lVert x_i\rVert_E)_{i\in\Gamma} \in \ell_p(\Gamma)\}$
$\overline{A}^\omega$	fecho fraco do conjunto A
$\lvert x\rvert$	valor absoluto do vetor x no espaço de Riesz
$x \vee y$	supremo do conjunto $\{x, y\}$ no espaço de Riesz
$x \wedge y$	ínfimo do conjunto $\{x, y\}$ no espaço de Riesz
$\mathrm{sol}(A)$	envoltória sólida do conjunto A
E^+	cone positivo do espaço vetorial ordenado E

$[x, y]$	ordem intervalo entre os vetores x e y em um espaço de Riesz
$x+$	parte positiva do vetor x em espaço de Riesz
$x-$	parte negativa do vetor x em espaço de Riesz
$x_\alpha \downarrow$	a rede $(x_\alpha)_\alpha$ é decrescente em espaço de Riesz
$E^\sim$	ordem dual do espaço de Riesz E
$E_n^\sim$	espaço dos funcionais lineares ordem limitados de E em $\mathbb{R}$
$\mathcal{L}(E, F)$	espaço de todos os operadores lineares contínuos de E em F
$\mathcal{L}_n(E, F)$	espaço vetorial dos operadores lineares ordem contínuos de E em F
$\mathcal{L}^r(E, F)$	espaço de todos os operadores lineares regulares
$\mathcal{L}^b(E, F)$	espaço de todos os operadores lineares ordem limitados
$\\|T\\|_r$	norma regular do operador T
T^*	adjunto do operador T
(E, F)	par ordenado de reticulados de Banach

Sumário

Introdução

O estudo dos espaços de Banach, em vários aspectos, é um tema central na matemática moderna. A Análise Funcional é a grande área da matemática que aprofunda o estudo desses espaços e dos operadores entre eles. Na década de 1900, David Hilbert e Marcel Riesz iniciaram os estudos sobre tipos de convergência nesses espaços, uma vez que os pioneiros da Análise Funcional se restringiram à convergência na topologia da norma. Esse foi o embrião para a consideração das topologias fracas, que se mostraram fundamentais no desenvolvimento da teoria. Mais precisamente, em 1929 Stefan Banach introduziu a convergência fraca para espaços normados e também introduziu a convergência fraca estrela em espaço duais. Quanto a espaços munidos de estruturas de ordem abstratas, um ano antes, em 1928, foi F. Riesz [34] quem, no Congresso Internacional de Bolonha, Itália, marcou o início da teoria dos espaços que se tornariam conhecidos como espaços de Riesz, ou reticulados vetoriais.

Apesar de presente na teoria, e reconhecidamente relevante, desde os trabalhos de F. Riesz, o estudo da positividade manteve posição discreta por muitas décadas na análise moderna. Foi a partir da década de 1970, principalmente com os trabalhos de A. Zaanen e seus colaboradores, mas também pelas escolas russa e polonesa (veja [46]), que a positividade passou a ocupar posição central na análise. Isso resultou no rápido desenvolvimento da teoria dos espaços de Riesz e dos reticulados de Banach. Rapidamente, aplicações da teoria da positividade foram encontradas, por exemplo, na teoria espectral dos operadores e na economia. Em 1990, C. Aliprantis e sua equipe de colaboradores realizaram uma conferência sobre operadores positivos, espaços de Riesz e suas aplicações, convidando especialistas em espaços de Riesz e economistas que trabalhavam em problemas de equilíbrio para trocar ideias e compartilhar experiências. A partir daí, muitas descobertas foram feitas resultando na publicação de diversos artigos e livros nessas áreas. Alguns livros dos seminários sobre espaços de Riesz com aplicações à economia foram escritos por Aliprantis e seus colaboradores, notadamente a extensa monografia *Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics* [2]. Na década de 2000, aplicações dos espaços Riesz a processos estocásticos foram desenvolvidas principalmente por C.C.A. Labuschagne e sua equipe de colaboradores, bem como por Troitsky e outros. Labuschagne e seus alunos de doutorado desenvolveram uma ideia em processos estocásticos em espaços de Riesz que forneceu novas e mais informações sobre a convergência de Martingais em espaços de Bochner. Recentemente, foram dadas aplicações de espaços de Riesz em redes normadas assimétricas e alguns progressos foram alcançados nesta direção, em particular no que diz respeito à noção de compacidade em tais espaços. A principal motivação para esse estudo vem de suas aplicações à ciência da computação teórica. A principal referência sobre desenvolvimentos recentes nesta área é o livro Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces de S. Cobzas [16].

Em 1921, Issai Schur mostrou no artigo [37] que existem espaços de Banach de dimensão infinita nos quais toda sequência fracamente convergente é convergente em norma. Seu exemplo foi o espaço ℓ_1. Imediatamente os matemáticos passaram a buscar outros espaços nos quais esse fenômeno ocorre, quais são suas propriedades e quais condições devem ser satisfeitas para que isso ocorra. Diz-se que tais espaços têm a *propriedade de Schur*. Um estudo detalhado sobre a propriedade de Schur pode ser encontrado em [27]. Fazendo a relação da propriedade de Schur com positividade, Witold Wnuk e Frank Räbiger, no final da década de 1980 e início da década de 1990, começaram o estudo de reticulados de Banach nos quais sequências *positivas* fracamente nulas são nulas em norma. Ambos fizeram importantes contribuições nessa direção (veja [33, 40–43]), e, naturalmente, essa propriedade ficou conhecida como *propriedade de Schur positiva*. Essa propridade é o foco principal desta dissertação.

Atualmente muitos pesquisadores têm desenvolvido a propriedade de Schur positiva, bem como outras propriedades relacionadas, por exemplo, a propriedade de Schur positiva dual. Desenvolvimentos recentes podem ser encontrados em, por exemplo, [10, 12, 13, 38].

A proposta deste trabalho é abordar partes importantes dos desenvolvimentos sobre a propriedade de Schur positiva. É importante mencionar que muitos dos trabalhos pioneiros sobre a propriedade de Schur positiva, e também alguns mais recentes, apresentam seus resultados e seus exemplos sem demonstrações, ou apenas com demonstrações muito resumidas. Um dos objetivos principais deste trabalho é apresentar demonstrações detalhadas de muitos resultados conhecidos que são fartamente utilizados pelos especialistas. No decorrer deste trabalho, nos inteiramos de que muitas dessas demonstrações requerem vários pré-requisitos e são, de fato, trabalhosas. Talvez por isso muitas delas não apareçam nas referências clássicas. Sendo assim, pretendemos com essa dissertação dar uma contribuição para a literatura na área, apresentando demonstrações detalhadas de muitos resultados cujas demonstrações não são facilmente encontradas.

Apresentaremos primeiro, na seção 1, as noções básicas de Análise Funcional, assim como as definições de espaço de Riesz e reticulado de Banach. Os principais resultados que usaremos durante este trabalho também serão apresentados aqui neste trabalho, a maioria destas propriedades podem ser achadas nos livros [3, 30]. Como temos bastantes propriedades que só serão usadas em casos específicos, apresentaremos nesta seção as mais usadas comumente.

Descreveremos a seguir como o trabalho encontra-se organizado. No Capítulo 1 apresentamos os conceitos e os resultados básicos de espaços de Banach e de reticulados de Banach que serão usados ao longo do texto.

Dedicamos o Capítulo 2 a apresentar um resultado que foi produzido em nossos estudos, o qual, tanto quanto sabemos, é inédito. Na busca de exemplos de reticulados com a propriedade de Schur positiva e que não possuem a propriedade de Schur, o exemplo clássico deste fato é o espaço $L_1[0,1]$. Entretanto, para provar que esse espaço não tem a propriedade de Schur, a grande maioria das referências se apoiam no fato da sequência das funções de Rademacher ser fracamente nula e não nula em norma em $L_1[0,1]$. Mas a convergência fraca das funções de Rademacher também é um fato bem conhecido que não tem demonstrações facilmente encontradas na literatura. Diante disso, nos propusemos a encontrar uma demonstração para esse fato e o resultado é que obtivemos um critério para que uma sequência seja fracamente nula em $L_1[0,1]$ que, tanto quanto sabemos, não é conhecido na literatura. Importante também é dizer que a demonstração desse critério usa apenas técnicas da Teoria da Medida e Integração, e nenhum teorema profundo da Teoria dos Espaços de Banach é utilizado. Mais ainda, o critério serve para provar a convergência fraca de uma grande quantidade de sequências, sendo a sequência das funções de Rademacher um caso particular.

No Capítulo 3 entraremos no foco principal desta dissertação, que é a propriedade de Schur positiva em reticulados de Banach. Exibiremos muitos exemplos e contraexemplos dessa propriedade e provaremos vários resultados e caracterizações da propriedade de Schur positiva. Trabalharemos também com somas diretas enumeráveis de reticulados com a propriedade de Schur positiva e também com os espaços $\ell_p(\Gamma)$.

O Capítulo 4 se dedica unicamente à exploração da propriedade de Schur positiva em espaços de operadores lineares regulares entre reticulados de Banach. No caso da propriedade de Schur, um teorema bem conhecido e muito utilizado, devido a R. Ryan, diz que o espaços dos operadores lineares contínuos do espaço de Banach X a valores no espaço de Banach Y tem a propriedade de Schur se, e somente, Y e o dual X^* de X têm essa propriedade. Para reticulados, é bem conhecido, e também muito utilizado, que o reticulado dos operadores lineares regulares do reticulado de Banach E a valores no reticulado de Banach F tem a propriedade de Schur positiva se, e somente, F e o dual E^* de E têm essa propriedade. Mais uma vez, o problema é que demonstrações desses resultados não são encontradas na literatura. Um dos principais objetivos deste Capítulo 4 é oferecer uma demonstração detalhada dessa versão reticulada do Teorema de Ryan.

O último capítulo é dedicado a explorar as condições necessárias e suficientes para que o dual de um reticulado de Banach tenha a propriedade de Schur positiva. Este capítulo é talvez o mais denso de todos, uma vez que as demonstrações dos resultados principais necessitam de muitas ferramentas e conhecimentos que, mais uma vez, não são facilmente encontrados na literatura. Esperamos ter conseguido apresentar as demonstrações completas e em detalhes.

É importante ressaltar que, à exceção do critério de convergência fraca provado no Capítulo 2, todos os resultados apresentados nesta dissertação são conhecidos, explicitamente ou de forma implícita nos livros e artigos da área. Como mencionado várias vezes, muitos desses resultados e exemplos conhecidos e largamente utilizados aparecem na literatura com demonstrações pouco detalhadas, muitas vezes omitindo detalhes importantes, e algumas vezes até sem que apareça demostração nenhuma. Reiteramos que é objetivo deste trabalho apresentar todas essas demonstrações, exemplos com detalhes suficientes para a compreensão do leitor. Nossa aspiração é que, após estudar esta dissertação e acompanhar o trabalho [27], o leitor estará preparado para acompanhar os avanços recentes na área e, eventualmente, desenvolver um interesse pelas novas vertentes do assunto.

Juan David Rubio Tabares
Uberlândia-MG, 23 de março de 2024.

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo introduziremos as noções essenciais da Análise Funcional, da teoria de espaços de Riesz e da teoria de reticulados de Banach, bem como os resultados que serão utilizados ao longo da dissertação. Nosso foco principal está nos reticulados de Banach, que são espaços de Banach munidos de uma estrutura de ordem compatível com a norma e com a estrutura vetorial.

Para os conceitos e resultados deste capítulo, referimos o leitor aos livros Fundamentos de Análise Funcional [14], Banach Lattices [30] e Positive Operators [3]. A maior parte dos resultados que usaremos estão no livro Positive Operators. Por serem apenas uma preparação para os resultados principais da dissertação, os resultados deste capítulo serão enunciados sem demonstração, apenas com referências para o leitor interessado. Para noções básicas de topologia geral, nos referimos a [25].

Nesta dissertação, todos os espaços vetoriais são reais, isto é, estão definidos sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais.

1.1 Espaços de Banach

Como todo reticulado de Banach é um espaço de Banach, esses últimos estão na base de nosso estudo. Apresentaremos as definições e teoremas clássicos que usaremos direta ou indiretamente neste trabalho. Supomos que o leitor está familiarizado com as noções de norma, espaço normado e operadores lineares contínuos. Lembramos que um espaço de Banach é um espaço normado completo na topologia de espaço métrico induzida por sua norma.

Definição 1.1.1 (Espaço dual)**.** Seja E um espaço normado. O dual de E, denotado por E^*, é o espaço de Banach formado por todos os funcionais lineares contínuos sobre E com as operações algébricas usuais de funções e a norma do supremo definida da seguinte forma: para $\varphi \in E^*$,

$$\begin{aligned} \|\varphi\| &= \sup\{|\varphi(x)| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= \inf\{C > 0 : |\varphi(x)| \leq C\|x\| \text{ para todo } x \in E\}. \end{aligned}$$

O dual de qualquer espaço normado é um espaço de Banach. O bidual de E é definido por $E^{**} := (E^*)^*$.

Definição 1.1.2. Seja $T\colon X \longrightarrow Y$ um operador linear entre dois espaços normados. Dizemos que T é um *isomorfismo* de espaços de Banach se T é contínuo, bijetor e o seu operador inverso $T^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ também é contínuo. Quando existir um isomorfismo entre X e Y, dizemos que X e Y são *isomorfos*.

Um resultado importante é que um espaço normado que é isomorfo a um espaço de Banach é também um espaço de Banach, veja [14, Exercicio 2.7.7].

Definição 1.1.3. Dizemos que um espaço de Banach E *contém uma cópia* do espaço de Banach F se E contém um subespaço isomorfo a F, ou seja, se existe um subespaço G de E e um isomorfismo $T\colon F \longrightarrow G$. Neste caso escrevemos $F \hookrightarrow E$.

Note que, neste caso, como G é isomorfo a um espaço de Banach, G também é Banach. Mas um subespaço de um espaço de Banach é um espaço de Banach se, e somente se, o subespaço é fechado. Segue que G é subespaço fechado de E.

Definição 1.1.4. Sejam $f\colon A \longrightarrow B$ uma função entre os conjuntos A e B, e C um subconjunto de A. Definimos a *restrição* de f a C, denotada $f\big|_C$, como sendo a função

$$\begin{array}{rcl} f\big|_C : C & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f\big|_C(x) = f(x). \end{array}$$

Teorema 1.1.5 (Teorema de Hahn-Banach). *Seja F um subespaço vetorial de um espaço normado E e seja $\varphi : F \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo $\tilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ cuja restrição a F coincide com φ e $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

Demonstração. Veja [14, Corolario 3.1.3]. □

A seguinte consequência do Teorema de Hahn-Banach também será muito útil em nosso trabalho.

Teorema 1.1.6 (Teorema de Hahn-Banach). *Seja E um espaço normado. Para todo $x_0 \in E$, com $x_0 \neq 0$, existe um funcional linear $\varphi \in E^*$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|$.*

Demonstração. Veja [14, Corolario 3.1.4]. □

Dado um espaço topológico compacto de Hausdorff K, o conjunto

$$C(K) = \{f\colon K \longrightarrow \mathbb{K} : f \text{ é contínua}\},$$

munido com as operações algébricas pontuais de funções, é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in K\}.$$

Se $(x_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência em um espaço topológico X que converge para $x \in X$, indicaremos este fato por $x_n \longrightarrow x$ ou $x = \lim_n x_n$.

Consideraremos também o espaço das sequências de números reais que convergem para zero, definido por

$$c_0 = \{(a_n)_{n=1}^\infty : a_n \in \mathbb{R} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } a_n \longrightarrow 0\},$$

que é um espaço de Banach com as operações algébricas usuais de sequências e com a norma

$$\|(a_n)_{n=1}^\infty\|_\infty = \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Teorema 1.1.7. *Seja K um espaço topológico, de Hausdorff, infinito e compacto. Então $C(K)$ contém uma cópia isométrica de c_0.*

Demonstração. Veja [1, Proposition 4.3.11]. □

Um operador linear $u\colon E \longrightarrow F$ entre espaços normados é uma *imersão isométrica* se $\|u(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$. Alguns textos também usam o termo *injeção métrica*. É claro que toda imersão isométrica é contínua, injetora, $\|u\| = 1$ e $u(E)$ é um cópia de E em F.

Proposição 1.1.8. *Para todo espaço normado E, o operador*

$$J_E\colon E \longrightarrow E^{**}\ ,\ J_E(x)(\varphi) = \varphi(x),$$

é uma imersão isométrica, chamada de mergulho canônico. Em particular, E^{**} contém uma cópia de E.

Demonstração. Veja [14, Proposição 4.3.1]. □

Definição 1.1.9. Um espaço normado E é dito *reflexivo* se o mergulho canônico $J_E\colon E \longrightarrow E^{**}$ for sobrejetor, ou seja, $J_E(E) = E^{**}$.

Espaços de dimensão finita são reflexivos. O espaço c_0 e os espaços $C(K)$ de dimensão infinita não são reflexivos.

Exemplo 1.1.10. Para $1 \leq p < \infty$, o espaço

$$\ell_p = \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} : a_n \in \mathbb{R} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \ \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}$$

é um espaço de Banach com as operações algébricas usuais de sequências e com a norma

$$\|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

O espaço ℓ_1 não é reflexivo (veja [14, Exemplo 4.3.8]) e os espaços ℓ_p, $1 < p < \infty$, são todos reflexivos (veja [14, Exemplo 4.3.12]).

Proposição 1.1.11. *Seja E um espaço reflexivo. Então todo subespaço fechado de E também é reflexivo.*

Demonstração. Veja [14, Exercício 4.5.31]. □

Teorema 1.1.12. (Desigualdade de Hölder) *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q \right)^{1/q}$$

para todas sequências $(x_n)_n \in \ell_p$ e $(y_n)_n \in \ell_q$.

Demonstração. Veja [8, p. 14]. □

Nas condições do teorema acima, dizemos que os números p e q são *conjugados*.

Quando não houver perigo de ambiguidade, passaremos a denotar uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ simplesmente por $(x_j)_j$.

Definição 1.1.13. Dada uma sequência de espaços de Banach $(E_j)_j$, definimos:

a)

$$\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1 := \left\{(x_j)_j : x_j \in E_j \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \|(x_j)_j\|_1 := \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_{E_j} < \infty\right\}.$$

b)

$$\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_\infty := \left\{(x_j)_j : x_j \in E_j \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \|(x_j)_j\|_\infty := \sup_{j\in\mathbb{N}} \|x_j\|_{E_j} < \infty\right\}.$$

c)

$$\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_0 := \left\{(x_j)_j \in \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_\infty : \|x_j\|_{E_j} \longrightarrow 0\right\}.$$

Nesses três espaços consideramos as operações usuais de espaços de sequências, isto é

$$(x_j)_j + (y_j)_j = (x_j + y_j)_j \quad \text{e} \quad \lambda(x_j)_j = (\lambda x_j)_j.$$

Note que, no caso particular em que $E_j = \mathbb{R}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, temos $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{R}\right)_1 = \ell_1$, $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{R}\right)_0 = c_0$. E também escrevemos $\ell_\infty := \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{R}\right)_\infty$ para o espaços das sequências limitadas de números reais.

Proposição 1.1.14. *Seja $(E_j)_j$ uma sequência de espaços de Banach. Então*

$$\left(\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1, \|\cdot\|_1\right), \left(\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_\infty, \|\cdot\|_\infty\right) \text{ e } \left(\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_0, \|\cdot\|_\infty\right)$$

são espaços de Banach.

Demonstração. Veja [44, p. 43]. □

O próximo teorema dá a descrição dos duais das somas diretas ℓ_1 e c_0.

Um isomorfismo $T : E \longrightarrow F$ entre espaços de Banach que é um imersão isométrica é chamado de *isomorfismo isométrico*. Neste caso dizemos que os espaços são *isomorfos isometricamente*.

Teorema 1.1.15. *Seja $(E_j)_j$ uma sequência de espaços de Banach. Então $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_0^*$ é isomorfo isometricamente a $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j^*\right)_1$ e $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1^*$ é isomorfo isometricamente a $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j^*\right)_\infty$. Em ambos casos a relação de dualidade é dada por*

$$(\varphi_j)_j \in \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j^* \longmapsto (\varphi_j)_j((x_j)_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x_j). \tag{1.1}$$

Demonstração. Veja [44, p. 44]. □

Teorema 1.1.16. *Seja $(E_n)_n$ uma sequência de espaços de Banach. Cada E_k é isomorfo isometricamente a um subespaço fechado de $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$ por meio do seguinte operador, que é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem:*

$$T\colon E_k \longrightarrow \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1, \ T(x) = (z_j)_j \text{ onde } z_j = 0 \text{ para todo } j \neq k \text{ e } z_k = x.$$

Demonstração. Veja [27, Proposição 3.1.4]. □

O resultado a seguir também pode ser visto como um caso particular do Teorema 1.1.15.

Teorema 1.1.17. *Os espaços ℓ_1 e $(c_0)^*$ são isomorfos isometricamente por meio da relação de dualidade*

$$b = (b_j)_j \in \ell_1 \mapsto \phi_b \in (c_0)^*, \ \phi_b((a_j)_j) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j \text{ para toda } (a_j)_j \in c_0.$$

Demonstração. Veja [14, Proposição 4.2.3]. □

Definição 1.1.18. Seja E um espaço de Banach. Um operador linear contínuo $P : E \longrightarrow E$ é uma *projeção* se $P^2 := P \circ P = P$.

Teorema 1.1.19. *As seguintes afirmações são equivalentes para um subespaço F de um espaço de Banach E.*

(i) *Existe uma projeção $P\colon E \longrightarrow E$ cuja imagem coincide com F. Neste caso dizemos que P é uma projeção de E sobre F.*

(ii) *F é fechado e existe um subespaço fechado G de E tal que $E = F \oplus G$, isto é, $E = F + G$ e $F \cap G = \{0\}$. Neste caso, $F = \{x \in E : P(x) = x\}$ e $G = ker(P)$.*

Demonstração. Veja [14, Proposição 3.2.2]. □

Definição 1.1.20. Diz-se que um subespaço F de um espaço de Banach E é *complementado* se F satisfaz as condições equivalentes do teorema anterior.

1.2 A topologia fraca

Nas primeiras décadas do século XX, David Hilbert e Marcel Riesz fizerem muitos estudos sobre a convergência fraca. Mas foi apenas em 1929 que S. Banach introduziu o conceito de convergência fraca para espaços normados. Os conceitos e resultados que apresentaremos agora são resultados essenciais sobre a topologia fraca. Lembramos que a topologia em um conjunto A gerada por uma família de funções $f_i\colon A \longrightarrow X, i \in I$, em que X é um espaço topológico, é a topologia em A que tem como base as interseções finitas das imagens inversas de abertos em X (veja [14, Seção 6.1]).

Definição 1.2.1 (Topologia Fraca)**.** A topologia fraca no espaço normado E, denotada por $\sigma(E, E^*)$, é a topologia gerada pelos funcionais lineares contínuos $\phi \in E^*$. Denotaremos a convergência na topologia fraca por $x_n \xrightarrow{\omega} x$.

Definição 1.2.2 (Topologia Fraca Estrela)**.** A topologia fraca estrela no dual E^* de um espaço normado E é a topologia gerada pelos funcionais lineares $(J_E(x))_{x \in E}$, em que

$$\begin{aligned} J_E(x) : E^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto \phi(x). \end{aligned}$$

Ela é denotada por $\sigma(E^*, E)$. Denotaremos a convergência na topologia fraca estrela por $\varphi_n \xrightarrow{\omega^*} \varphi$.

Teorema 1.2.3. *Seja E um espaço normado e $(x_n)_n \subset E$. Então $x_n \xrightarrow{\omega} x$ se, e somente se, $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ para todo $\varphi \in E^*$.*

Demonstração. Veja [14, Proposição 6.2.2]. □

Teorema 1.2.4. *Seja E um espaço normado,*

(a) *A topologia fraca está contida na topologia da norma.*

(b) *A topologia da norma coincide com a topologia fraca se, e somente se, E tem dimensão finita.*

Demonstração. Veja [14, Proposição 6.2.6]. □

Definição 1.2.5. Uma sequência $(x_n)_n$ em um espaço de Banach E é *fracamente de Cauchy* se, para todo $\varphi \in E^*$, a sequência $(\varphi(x_n))_n$ for uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$.

Teorema 1.2.6 (Teorema ℓ_1 de Rosenthal)**.** *Seja $(x_n)_n$ uma sequência em um espaço de Banach X. Então $(x_n)_n$ admite uma subsequência $(x_{n_k})_k$ satisfazendo uma das seguintes alternativas mutuamente excludentes:*

(i) *$(x_{n_k})_k$ é uma sequência fracamente de Cauchy.*

(ii) $(x_{n_k})_k$ é equivalente à base usual de ℓ_1.

Demonstração. Veja [35, The Main Theorem]. □

Definição 1.2.7. Uma sequência $(x_n)_n$ em um espaço de Banach E é fracamente convergente se existe $x \in E$ tal que $(x_n)_n$ converge para x na topologia fraca, isto é, $x_n \xrightarrow{\omega} x$.

Segue diretamente das definições que toda subsequência de uma sequência fracamente convergente também é fracamente convergente, para o mesmo limite.

Teorema 1.2.8. *Seja E um espaço normado. Se $x_n \xrightarrow{\omega} x$ em E, então a sequência $(\|x_n\|)_n \subset \mathbb{R}$ é limitada.*

Demonstração. Veja [14, Proposição 6.2.5]. □

Teorema 1.2.9 (Mazur)**.** *Seja $A \subset E$ com E um espaço normado. Se A é convexo, então o fecho $\overline{A}$ e o fecho fraco $\overline{A}^{\omega}$ coincidem.*

Demonstração. Veja [14, Teorema 6.2.11] ou [29, Theorem 2.5.16]. □

Definição 1.2.10. Um espaço de Banach E é chamado *sequencialmente fracamente completo* sempre que toda sequência fracamente de Cauchy de E for fracamente convergente para algum vetor de E.

Teorema 1.2.11. *Sejam E e F espaços de Banach. Um operador linear $T : E \longrightarrow F$ é contínuo se, e somente se, $T : (E, (E, E^*)) \longrightarrow (F, (F, F^*))$ é contínuo.*

Demonstração. Veja [14, Proposição 6.2.9]. □

O resultado acima diz, em particular, que operadores lineares contínuos levam redes fracamente convergentes em redes fracamente convergentes.

1.3 Espaços de Riesz

Uma conferência de F. Riesz em 1928, intitulada On the Decomposition of Linear Functionals, veja [34], proferida no Congresso Internacional de Matemáticos em Bolonha, Itália, marcou o início dos estudos de espaços que viriam a ser chamados de espaços de Riesz. Essa teoria foi desenvolvida principalmente por F. Riesz, H. Freudenthal e L. V. Kantorovich na década de 1930. Nos início, Riesz se interessou mais pelo que hoje é conhecido como o espaço ordem dual de um espaço vetorial ordenado. Os espaços de Riesz são importantes no sentido de que capturam a noção natural de positividade, para elementos e funções em espaços vetoriais ordenados.

Manteremos a notação $\|x\|$ para a norma de um vetor x em um espaço normado, e usaremos a notação $|x|$ para o valor absoluto de um vetor x em um espaço vetorial ordenado, conforme definido abaixo. Os espaços vetoriais seguem sempre sendo reais, isto é, sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais.

Definição 1.3.1 (Espaço de Riesz)**.** Seja $(E, \leq)$ um espaço vetorial munido de uma relação de ordem parcial $\leq$, isto é, $\leq$ é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Suponha que as seguintes condições estejam satisfeitas:

(a) Se $x \leq y$, então $x + z \geq y + z$ para todos $x, y, z \in E$.

b) Se $x \geq y$, então $\alpha x \geq \alpha y$ para todos $x, y \in E$ e $\alpha \geq 0$.

c) Para todo par de elementos $x, y \in E$, o conjunto $\{x, y\}$ possui um supremo e um ínfimo, ambos em E.

Nesse caso $(E, \leq)$ é chamado *espaço de Riesz*, quando a relação de ordem parcial estiver subentendida, escreveremos simplesmente E no lugar de $(E, \leq)$. Escrevemos $x \geq y$ significando $y \leq x$

Para $x, y \in E$, usaremos as seguintes notações para o supremo e para o ínfimo:

$$x \vee y := \sup\{x, y\} \quad , \quad x \wedge y := \inf\{x, y\}.$$

Apresentaremos a seguir algumas definições que envolvem os espaços de Riesz.

Definição 1.3.2. Sejam E um espaço de Riesz e $x, y \in E$.

a) x é dito *positivo* se $x \geq 0$.

b) O *cone positivo* de E é o conjunto de todos os elementos positivos de E, isto é

$$E_+ := \{x \in E : x \geq 0\}.$$

c) O *valor absoluto* de x é definido por

$$|x| := x \vee (-x) = \sup\{x, -x\}.$$

d) A *parte positiva* e a *parte negativa* de x são definidas, respectivamente, por

$$x^+ := x \vee 0 = \sup\{x, 0\} \quad , \quad x^- := -x \vee 0 = \sup\{-x, 0\}.$$

e) x e y são ditos *disjuntos* se

$$|x| \wedge |y| = \inf\{|x|, |y|\} = 0.$$

Este fato será denotado pelo símbolo $x \perp y$.

f) Uma sequência $(x_n)_n$ em E é dita *disjunta* se $x_i \perp x_j$ para todos $i \neq j$. Segue imediatamente da definição que toda subsequência de uma sequência disjunta também é disjunta.

Definição 1.3.3. Sejam E um espaço de Riesz e $A \subset E$.

- Diz-se que A é um *subespaço de Riesz* de E se A é subespaço vetorial de E e, além disso, $x \wedge y \in A$ e $x \vee y \in A$ para todos $x, y \in A$.

- A é chamado de *conjunto sólido* se satisfaz a seguinte implicação:

$$x \in E, y \in A \text{ e } |x| \leq |y| \Longrightarrow x \in A.$$

- Um subespaço vetorial sólido de E é chamado de *ideal* de E.

- Um ideal B de E é uma *faixa* se $\sup A \in B$ para todo subconjunto A de B que possui supremo em E.

- A *envoltória sólida* de A é o menor subconjunto sólido de E que contém A. Abaixo apresentamos a notação e uma descrição da envoltória sólida de A:

$$\text{sol}(A) = \{x \in E : \text{ existe } y \in A \text{ tal que } |x| \leq |y|\}.$$

Definição 1.3.4. Sejam E um espaço de Riesz e $x, y \in E$ com $x \leq y$. O conjunto

$$[x, y] := \{z \in E : x \leq z \leq y\}$$

é chamado *ordem intervalo*.

Segue diretamente das definições que todo ordem intervalo da forma $[-x, x]$, $x \geq 0$, é um conjunto sólido.

Exemplo 1.3.5. Seja $\{E_i : i \in I\}$ uma família de espaços de Riesz. O produto cartesiano generalizado $\prod_{i\in I} E_i$ é um espaço de Riesz com a ordenação coordenada a coordenada, isto é: para $x = (x_i)_{i\in I}$ e $y = (y_i)_{i\in I}$,

$$x \leq y \Longleftrightarrow x_i \leq y_i \text{ em } E_i \text{ para todo } i \in I.$$

Neste caso,

$$x \vee y = (x_i \vee y_i)_{i\in I} \quad \text{e} \quad x \wedge y = (x_i \wedge y_i)_{i\in I}.$$

Veja [3, p. 20].

Definição 1.3.6. Uma seminorma ρ no espaço de Riesz E satisfazendo a implicação

$$x, y \in E, |x| \leq |y| \Longrightarrow \rho(x) \leq \rho(y),$$

é chamada de *seminorma reticulada*. Dizemos *norma reticulada* no caso em que ρ é uma norma. Nesse último caso $(E, \|\cdot\|)$ é chamado de *espaço de Riesz normado*.

Definição 1.3.7. Sejam E, F espaços de Riesz e $T\colon E \longrightarrow F$ linear. Diz-se que T é um *homomorfismo de Riesz* se

$$T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$$

para todos $x, y \in E$.

Teorema 1.3.8. *Seja E um espaço de Riesz. Se $x, y \in E$, então:*

- $x = (x - y)^+ + x \wedge y$.
- $x \vee y = \dfrac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ *e* $x \wedge y = \dfrac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

Demonstração. Veja [3, Theorem 1.7]. □

Teorema 1.3.9. *As seguintes afirmações são equivalentes para um operador linear $T\colon E \longrightarrow F$ entre dois espaços de Riesz E e F.*

(i) *T é um homomorfismo de Riesz.*

(ii) $T(x^+) = (T(x))^+$ *para todo* $x \in E$.

(iii) $T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$ *para todos* $x, y \in E$.

(iv) *Se* $x \wedge y = 0$ *em* E, *então* $T(x) \wedge T(y) = 0$ *em* F.

(v) $T(|x|) = |T(x)|$ *para todo* $x \in E$.

Demonstração. Veja [3, Theorem 2.14]. □

Definição 1.3.10. Seja A um subconjunto de um espaço de Riesz E. Diz-se que:

(i) A é ordem limitado superiormente se existe $x \in E$ tal que $y \leq x$ para todo $y \in A$.

(ii) A é ordem limitado inferiormente se existe $x \in E$ tal que $x \leq y$ para todo $y \in A$.

(iii) A é ordem limitado se é ordem limitado superiormente e ordem limitado inferiormente.

Definição 1.3.11. Um espaço de Riesz E é dito *Dedekind completo* se todo subconjunto ordem limitado e não vazio de E tem supremo e ínfimo em E.

Definição 1.3.12. Um espaço de Riesz E é dito *σ-Dedekind completo* se todo subconjunto enumerável, ordem limitado e não vazio de E tem supremo e ínfimo em E.

Segue diretamente das definições anteriores que todo espaço de Riesz Dedekind completo é σ-Dedekind completo.

Definição 1.3.13. Uma rede $(x_\alpha)_\alpha$ em um espaço de Riesz é dita *decrescente*, em símbolos $x_\alpha \downarrow$, sempre que $\alpha \succeq \beta$ implica $x_\alpha \leq x_\beta$. A notação $x_\alpha \downarrow x$ significa que $x_\alpha \downarrow$ e que $\inf\limits_\alpha \{x_\alpha\} = x$.

Analogamente, uma rede $(x_\alpha)_\alpha$ em um espaço de Riesz é dita *crescente*, em símbolos $x_\alpha \uparrow$, sempre que $\alpha \succeq \beta$ implica $x_\alpha \geq x_\beta$. A notação $x_\alpha \uparrow x$ significa que $x_\alpha \uparrow$ e que $\sup\limits_\alpha \{x_\alpha\} = x$.

Definição 1.3.14. Uma rede $(x_\alpha)_\alpha$ em um espaço de Riesz E é dita *ordem convergente* a um vetor $x \in E$ sempre que existir uma outra rede $(y_\alpha)_\alpha$ em E, com o mesmo conjunto de índices, tal que $y_\alpha \downarrow 0$ e $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha$ para todos os índices α. Tal fato será denotado pelo símbolo $x_\alpha \xrightarrow{o} x$.

Definição 1.3.15. Um operador $T\colon E \longrightarrow F$ linear entre dois espaços de Riesz é dito *ordem contínuo* se $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ em E implica $T(x_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ em F.

O espaço vetorial dos operadores lineares ordem contínuos de E em F será denotado por $\mathcal{L}_n(E, F)$. No caso em que $F = \mathbb{R}$, o espaço $\mathcal{L}_n(E, \mathbb{R})$ de todos os funcionais lineares ordem contínuos em E será denotado $E_n^\sim$.

Definição 1.3.16. Seja E um espaço de Riesz. Um funcional linear $\varphi\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamado *ordem limitado* se φ leva subconjuntos ordem limitados de E em subconjuntos limitados de $\mathbb{R}$.

O espaço vetorial de todos os funcionais lineares ordem limitados em E é chamado de *ordem dual* de E e será denotado por $E^\sim$.

Sabe-se que para cada número real $x > 0$, a sequência $(nx)_n$ é ilimitada superiormente em $\mathbb{R}$. Tal fato é normalmente chamado de *propriedade Arquimediana* de $\mathbb{R}$. Esta propriedade também é muito importante em espaços de Riesz, fato este que motivou a definição a seguir.

Definição 1.3.17. Um espaço de Riesz E é chamado de *Arquimediano* se a seguinte implicação é satisfeita:

$$x \in E \text{ e } \{nx : n \in \mathbb{N}\} \text{ é limitado superiormente} \Longrightarrow x \leq 0.$$

Isso é equivalente a dizer que, para cada $x \in E^+$, tem-se $\frac{1}{n}x \downarrow 0$.

Todos os espaços de Banach clássicos da Análise Funcional (espaços de sequências com a ordem coordenada a coordenada e espaços de funções com a ordem pontual), são espaços de Riesz Arquimedianos [3, p. 9].

1.4 Reticulados de Banach

Foi mérito de H. H. Schafer apresentar a teoria dos reticulados de Banach e dos operadores positivos como parte da teoria dos espaços de Banach e da teoria de operadores. Em particular, alguns resultados clássicos da Análise Funcional e da Análise Clássica foram usados pra provar propriedades no caso geral de reticulados de Banach. Os reticulados de Banach são um caso especial de espaços de Riesz e de espaços de Banach, pois são espaços de Banach munidos de uma ordem que o faz um espaço de Riesz e que é compativel com sua norma. Apresentamos a seguir as definições e os resultados sobre reticulados de Banach que serão necessários para o desenvolvimento da dissertação.

Definição 1.4.1 (Reticulado de Banach)**.** Um *reticulado de Banach* é um espaço de Riesz E munido de uma norma $\|\cdot\|$ que o torna um espaço de Banach e que satisfaz a seguinte implicação:

$$x, y \in E, |x| \leq |y| \Longrightarrow \|x\| \leq \|y\|.$$

Vejamos que, para todo elemento x de um reticulado de Banach, tem-se $\|x\| = \big\||x|\big\|$. De fato, por um lado, de $|x| \leq |(|x|)|$ segue que $\|x\| \leq \big\||x|\big\|$. Por outro lado, de $|(|x|)| \leq |x|$ segue que $\big\||x|\big\| \leq \|x\|$; e portanto $\|x\| = \big\||x|\big\|$.

Exemplo 1.4.2. Seja E um reticulado de Banach. A bola unitária fechada de E,

$$B_E := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$$

é um conjunto sólido (veja [3, p. 169.].

Definição 1.4.3. Um subespaço vetorial U do reticulado de Banach E é chamado de *subreticulado* de E se $x \wedge y \in U$ e $x \vee y \in U$ para todos $x, y \in U$.

Os seguintes exemplos podem ser encontrados no livro [30].

Exemplo 1.4.4. c_0 e ℓ_∞ são reticulados de Banach e c_0 é um ideal em ℓ_∞. É claro que todo ideal de um reticulado de Banach é um subreticulado de Banach.

Exemplo 1.4.5. Seja K é um espaço topológico compacto de Haussdorf. Então o espaço $C(K)$ das funções contínuas de K em $\mathbb{R}$ é um reticulado de Banach com a ordem pontual (veja [30, p. 8]).

Exemplo 1.4.6. Os espaços ℓ_p, para $1 \leq p \leq \infty$, e c_0 são reticulados de Banach Dedekind completos (veja [30, p. 8]).

Os espaços $L_p(\mu)$ serão tratados no início do Capítulo 2.

Exemplo 1.4.7. Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Para $1 \leq p < \infty$, $L_p(\mu)$ é um reticulado de Banach Dedekind completo. Se a medida μ for σ-finita, então $L_\infty(\mu)$ é Dedekind completo (veja [30, Example (v), p. 9]).

Veremos a seguir mais algumas relações em espaços de Riesz que nos serão úteis.

Teorema 1.4.8. *Sejam E um espaço de Riesz e $x \in E$. Então:*

- $x = x^+ - x^-$,
- $|x| = x^+ + x^-$,
- $x^+ \wedge x^- = 0$.

Mais ainda, a primeira descomposição satisfaz a seguinte condição de minimalidade e unicidade:

(i) *Se $x = y - z$ com $y, z \in E^+$, então $y \geq x^+$ e $z \geq x^-$.*

(ii) *Se $x = y - z$ com $y \wedge z = 0$, então $y = x^+$ e $z = x^-$.*

Demonstração. Veja [3, Theorem 1.5]. □

Definição 1.4.9. Um operador linear $T\colon E \longrightarrow F$ entre dois espaços de Riesz é dito *positivo* se $T(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$. Neste caso, escrevemos $T \geq 0$ ou $0 \leq T$.

Definição 1.4.10. Sejam E, F reticulados de Banach e $T\colon E \longrightarrow F$ um operador linear. Diz-se que T é um *isomorfismo de Riesz* se T é isomorfismo de espaços de Banach e T é homomorfismo de Riesz.

Definição 1.4.11. Diz-se que um reticulado de Banach E *contém uma cópia reticulada* do reticulado de Banach F se E contém um subreticulado Riez-isomorfo a F, ou seja, se existe um subreticulado G de E e um isomorfismo de Riesz $T\colon F \longrightarrow G$. Neste caso escrevemos ($F \overset{R}{\hookrightarrow} E$).

Definição 1.4.12. Um reticulado de Banach E é dito um *espaço de Kantorovich-Banach*, ou simplesmente um *KB-espaço*, se toda sequência crescente em ordem e limitada em norma de E^+ é convergente em norma.

As seguintes caracterizações são extremamente úteis:

Teorema 1.4.13. *Para um reticulado de Banach E, as seguintes condições são equivalentes:*

(1) *E é um KB-espaço.*

(2) *E é uma faixa de E^{**}.*

(3) *$E = (E^*)^\sim_n$.*

(4) *E é fracamente sequencialmente completo.*

(5) *E não tem cópia de c_0.*

(6) *E não tem cópia reticulada de c_0.*

Demonstração. Veja [3, Theorem 4.60]. □

Exemplo 1.4.14. Segue imediatamente da condição (2) do teorema acima (ou da condição (5)) que todo reticulado de Banach reflexivo é um KB-espaço. Veremos em breve que a relação entre reticulados de Banach reflexivos e KB-espaços é mais estreita ainda.

Teorema 1.4.15. *O dual de um espaço de Riesz normado qualquer é um reticulado de Banach.*

Demonstração. Veja [3, Theorem 4.1]. □

Definição 1.4.16. Um subconjunto A de um espaço de Banach é dito:
• *Fracamente compacto* se A é compacto na topologia fraca.
• *Relativamente fracamente compacto* se seu fecho $\overline{A}^{\omega}$ na topologia fraca é fracamente compacto.

Teorema 1.4.17. *Se W é um subconjunto relativamente fracamente compacto de um reticulado de Banach, então toda sequência disjunta na envoltória sólida de W converge fracamente a zero.*

Demonstração. Veja [3, Theorem 4.34]. □

Teorema 1.4.18. *Seja E um espaço de Riesz e seja $(x_n)_n$ uma sequência em E tal que $x_n \geq 0$ para todo n. Se algum $x \in E^+$ satisfaz $2^{-n}x_n \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então a sequência $(u_n)_n$ definida por*

$$u_n = \left[x_{n+1} - 4^n \sum_{i=1}^{n} x_i - 2^n x \right]^+ ,$$

é uma sequência disjunta.

Demonstração. Veja [3, Theorem 4.35]. □

Teorema 1.4.19. *Para um reticulado de Banach E, as seguintes condições são equivalentes:*

(1) *E tem cópia reticulada de ℓ_1.*

(2) *Existe uma sequência limitada em norma disjunta de E^+ que é equivalente à base canônica de ℓ_1.*

(3) *Existe uma sequência limitada em norma disjunta de E^+ que não converge fracamente a 0.*

(4) *E^* não tem norma ordem contínua.*

(5) *E^* não é fracamente sequencialmente completo.*

(6) *E^* tem uma cópia reticulada de ℓ_∞.*

(7) *E^* tem uma cópia reticulada de c_0.*

(8) *E^* tem uma cópia de c_0.*

(9) *E^* tem uma cópia complementada de ℓ_∞.*

(10) *E^* tem uma cópia de ℓ_∞.*

(11) *E tem cópia complementada de ℓ_1.*

Demonstração. Veja [3, Theorem 4.69]. □

Teorema 1.4.20 (Ogasawara)**.** *Um reticulado de Banach E é reflexivo se, e somente se, E e E^* são $KB-$espaços.*

Demonstração. Veja [3, Teorema 4.70]. □

Teorema 1.4.21. *Seja E um reticulado de Banach e seja $\|\cdot\|'$ uma seminorma reticulada contínua em E. Seja $(v_n)_n \subset E_+$ uma sequência com $\|v_n\|' \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e com $v_n \xrightarrow{\omega} 0$ em E, isto é, $v_n \longrightarrow 0$ na topologia fraca $\sigma(E, E^*)$. Então, existe $C > 0$, uma subsequência de índices $(n_k)_k$ e uma sequência disjunta $(y_k)_k \subset E_+$ com $y_k \leq v_{n_k}$ e com $\|y_k\|' \geq C$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Veja [23, Corollary 5]. □

Capítulo 2

Sequências Fracamente Nulas Em $L_1[0,1]$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima função de Rademacher é a função

$$r_n \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ r_n(t) = \operatorname{sgn}(\operatorname{sen}(2^n \pi t)),$$

em que sgn é a função sinal.

O resultado principal deste capítulo surgiu da necessidade, que encontraremos no capítulo seguinte, de provar que a sequência $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ das funções de Rademacher é fracamente nula em $L_1[0,1]$. Conforme veremos, esse fato é fundamental para comprovar que o espaço $L_1[0,1]$ não tem a propriedade de Schur. Isso completará o exemplo de um reticulado de Banach com a propriedade positiva de Schur que não tem a propriedade de Schur.

O fato da sequência das funções de Rademacher ser fracamente nula em $L_1[0,1]$ é largamente citado e usado na literatura, mas sua demonstração não é fácil de ser encontrada. Existem indicações de argumentos usando técnicas abstratas e resultados profundos de Análise Funcional, por exemplo a Desigualdade de Khintchine. Optamos por buscar uma demonstração que depende apenas de técnicas usuais de teoria da medida. E o resultado acabou sendo um critério para convergência fraca em $L_1[0,1]$ do qual o caso das funções de Rademacher segue como caso particular. Cabe dizer que, tanto quanto sabemos, o resultado principal, a saber Teorema 2.2.3, é inédito. Além da sequência de Rademacher, daremos mais um exemplo concreto de aplicação do Teorema 2.2.3, evidenciando que sua utilidade pode ser bem mais abrangente que o objetivo inicial.

2.1 Noções e resultados de Teoria da Medida

Definição 2.1.1. Uma família Σ de subconjuntos de um conjunto X é chamada de *σ-álgebra* se satisfaz as seguintes condições:

(i) $\emptyset$, X pertencem a Σ .

(ii) Se $A \in \Sigma$ então, $A^c := (X - A) \in \Sigma$.

(iii) Se $(A_n)_n$ é uma sequência de elementos de Σ, então $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

Segue desses axiomas que também tem-se $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

Um par ordenado (X, Σ) em que X é um conjunto e Σ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X é chamado de *espaço mensurável.* Qualquer elemente A de Σ é chamado de conjunto Σ-mensurável, ou simplesmente mensurável quando a σ-álgebra estiver subentendida.

Definição 2.1.2. Seja (X, Σ) um espaço mensurável. Uma *medida* é uma função $\mu\colon \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1) $\mu(\emptyset) = 0$.

2) $\mu(E) \geq 0$ para todo $E \in \Sigma$.

3) $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu\left(E_n\right)$ sempre que $E_n \in \Sigma$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $E_n \cap E_m$ para todos $n \neq m$.

Além disso, dizemos que μ é uma *medida finita* se $\mu(X) < \infty$. E se existir uma sequência $(E_n)_n \subset \Sigma$ satisfazendo $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ e $\mu(E_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, dizemos que μ é uma medida σ-finita.

Definição 2.1.3. Uma tripla (X, Σ, μ) formada por um conjunto X, uma σ-álgebra Σ de subconjuntos de X e uma medida $\mu\colon \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamado de *espaço de medida.*

Neste caso, uma função $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita *mensurável* se, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f^{-1}((\alpha, +\infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \Sigma.$$

Exemplo 2.1.4. Para $A \in \Sigma$, a função característica de A definida por

$$\chi_A\colon X \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(x) = 1 \text{ se } x \in A \text{ e } f(x) = 0 \text{ se } x \notin A,$$

é mensurável.

Definição 2.1.5. Uma função é dita *simples* se assume apenas um número finito de valores em seu contradomínio.

Uma função simples mensurável $\varphi\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ pode ser representada, de forma única, da forma

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j},$$

onde $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ são escalares distintos e $E_1, \ldots, E_n \in \Sigma$ são conjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos. Esta representação é conhecida como *representação canônica* de φ.

Definição 2.1.6. Sejam A e B subconjuntos de X. A *diferença simétrica* de A e B é definida como

$$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)\,.$$

Para a definição e as propriedades da integral de Lebesgue $\int_X f d\mu$ de uma função mensurável f em relação a uma medida μ nos referimos a [8].

O único teorema profundo que usaremos na demonstração do teorema principal deste capítulo é o seguinte:

Teorema 2.1.7 (Teorema da Representação de Riesz)**.** *Sejam $1 \leq p < \infty$ e (X, Σ, μ) um espaço de medida. No caso $p = 1$ supomos que μ seja uma medida σ-finita. Então a seguinte correspondência é um isomorfismo isométrico:*

$$g \in L_q(X, \Sigma, \mu) \mapsto \varphi_g \in L_p(X, \Sigma, \mu)^*,$$

onde

$$\varphi_g(f) = \int_X fg d\mu \text{ para toda } f \in L_p(X, \Sigma, \mu).$$

Demonstração. Veja [14, Teorema 4.1.2]. □

Precisaremos de mais dois resultados de teoria da medida.

Teorema 2.1.8. *Para uma função Lebesgue integrável f,*

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

Demonstração. Veja [8, Theorem 5.3]. □

Teorema 2.1.9. *Seja $E \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto Lebesgue-mensurável. Se $\mu(E) < \infty$, então para todo $\epsilon > 0$ existe um número finito de intervalos abertos disjuntos dois a dois $J_1, ..., Jn$ tais que*

$$\mu\left(E \,\Delta \bigcup_{k=1}^{n} J_k \right) < \epsilon.$$

Demonstração. Veja [45, Theorem 3.25]. □

2.2 Um critério de convergência fraca em $L_1[0, 1]$

Na definição a seguir o leitor encontrará a propriedade que a sequência das funções de Rademacher tem e que, conforme veremos, garante a sua convergência fraca para zero em $L_1[0, 1]$.

A partir de agora trabalharemos com a medida de Lebesgue em $[0, 1]$, que será denotada por μ. Por simplicidade, para uma função Lebesgue integrável $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, escreveremos $\int_a^b f(t)dt$ na notação da integral de Riemann no lugar da notação $\int_{[a,b]} f d\mu$ da integral de Lebesgue.

Definição 2.2.1. Dizemos que uma sequência de funções Lebesgue integráveis

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

tem *integral nula de ordem par* se para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todos $L, H \in \left\{0, 1, 2, \ldots, 2^k\right\}$ com $H < L$ e $H - L$ par, tem-se

$$\int_{\frac{H}{2^k}}^{\frac{L}{2^k}} f_n(t)dt = 0 \text{ para todo } n \geq N.$$

O seguinte lema ajuda na compreensão dos resultados seguintes.

Lema 2.2.2. *Sejam $A, B \subset X$ e $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

- $f(t) = 1$ *se* $t \in A$ *e* $t \notin B$,
- $f(t) = 0$ *se* $t \in A$ *e* $t \in B$,
- $f(t) = 1$ *se* $t \notin A$ *e* $t \in B$,
- $f(t) = 0$ *se* $t \notin A$ *e* $t \notin B$.

Então $f = \chi_{A \,\Delta\, B}$.

Demonstração. Dividiremos a análise em quatro casos.

- $t \in A$ e $t \notin B$. Neste caso, por um lado, $f(t) = 1$. Por outro lado, como $t \in A$ e $t \notin B$, temos $t \in A - B$, e portanto $t \in A \,\Delta\, B$ Segue que $\chi_{A\Delta B}(t) = 1 = f(t)$.
- $t \in A$ e $t \in B$. Neste caso, por um lado, $f(t) = 0$. Por outro lado, como $t \in A$ e $t \in B$, temos $t \in A \cap B$, e portanto $t \notin A \,\Delta\, B$. Segue que $\chi_{A\Delta B}(t) = 0 = f(t)$.
- $t \notin A$ e $t \in B$. Neste caso, $f(t) = 1$. Por outro lado, como $t \in A$ e $t \notin B$, temos $t \in B - A$, e portanto $t \in A \,\Delta\, B$. Segue que $\chi_{A\Delta B}(t) = 1 = f(t)$.
- $t \notin A$ e $t \notin B$. Neste caso, $f(t) = 0$. Por outro lado, como $t \notin A$ e $t \notin B$, temos $t \in A \cap B$, e portanto $t \notin A \,\Delta\, B$. Segue que $\chi_{A\Delta B}(t) = 0 = f(t)$.

portanto, $f = \chi_{A \,\Delta\, B}$. □

Teorema 2.2.3. *Seja $f_n\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de funções Lebesgue integráveis, essencialmente limitada e que tem integral nula de ordem par. Então $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ é fracamente nula em $L_1[0,1]$*

Demonstração. Seja $\varphi \in L_1[0,1]^*$. Pelo Teorema da Representação de Riesz (Teorema 2.1.7), existe $g \in L_\infty[0,1]$ tal que

$$\varphi(f) = \int_0^1 g(t)f(t)dt$$

para toda $f \in L_1[0,1]$. Em particular,

$$\varphi(f_n) = \int_0^1 g(t)f_n(t)dt$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como a sequência $(f_n)_n$ é essencialmente limitada, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $|f_n(t)| < s$ para quase todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $t \in [0,1]$. Usando que as funções simples mensuráveis são densas em $L_1[0,1]$ ([8, Exercise 6.D]) e $g \in L_\infty[0,1] \subset L_1[0,1]$, dado $\epsilon > 0$ existe uma função simples mensurável ψ tal que

$$\|g - \psi\|_1 < \frac{\epsilon}{2s}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 g(t)f_n(t)dt\right| &= \left|\int_0^1 [g(t)f_n(t) - \psi(t)f_n(t) + \psi(t)f_n(t)]\,dt\right| \\
&= \left|\int_0^1 [g(t)f_n(t) - \psi(t)f_n(t)]\,dt + \int_0^1 \psi(t)f_n(t)dt\right| \\
&\leq \left|\int_0^1 [g(t)f_n(t) - \psi(t)f_n(t)]\,dt\right| + \left|\int_0^1 \psi(t)f_n(t)dt\right| \\
&= \left|\int_0^1 f_n(t)(g(t) - \psi(t))dt\right| + \left|\int_0^1 \psi(t)f_n(t)dt\right| \\
&\leq \int_0^1 |f_n(t)|\,|g(t) - \psi(t)|\,dt + \left|\int_0^1 \psi(t)f_n(t)dt\right| \\
&\leq \int_0^1 s\,|g(t) - \psi(t)|\,dt + \left|\int_0^1 \psi(t)f_n(t)\right| dt \\
&< s\frac{\epsilon}{2s} + \left|\int_0^1 \psi(t)f_n(t)\right| dt \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \left|\int_0^1 \psi(t)f_n(t)dt\right|.
\end{aligned}$$

O próximo passo é limitar a função ψ de forma conveniente. Como ψ é uma função simples mensurável, podemos tomar sua representação canônica

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k \chi_{E_k},$$

em que $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_m$ são números reais distintos não nulos e $E_1, \ldots, E_m$ são subconjuntos Lebesgue mensuráveis de $[0,1]$ disjuntos dois a dois. Como $E_k \subseteq [0,1]$, temos $\mu(E_k) \leq \mu([0,1]) < \infty$ para todo k. Pelo Teorema 2.1.9, existem intervalos abertos disjuntos dois a dois $J_1^k, \ldots, J_{m_k}^k$ tais que

$$\mu\left(E_k \,\Delta \left(\bigcup_{h=1}^{m_k} J_h^k\right)\right) < \frac{\epsilon}{s2^{k+2}|a_k|}.$$

Segue que

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 a_k\chi_{E_k}(t)f_n(t)dt\right| &\leq \left|\int_0^1 a_k\chi_{E_k}(t)f_n(t) - \sum_{h=1}^{m_k} a_k\chi_{J_h^k}(t)f_n(t) + \sum_{h=1}^{m_k} a_k\chi_{J_h^k}(t)f_n(t)dt\right| \\ &\leq \left|\int_0^1 a_k\chi_{E_k}(t)f_n(t) - \sum_{h=1}^{m_k} a_k\chi_{J_h^k}(t)f_n(t)dt\right| + \\ &\quad + \left|\int_0^1 \sum_{h=1}^{m_k} a_k\chi_{J_h^k}(t)f_n(t)dt\right| \\ &\leq \int_0^1 |a_kf_n(t)| \left|\chi_{E_k}(t) - \sum_{h=1}^{m_k}\chi_{J_h^k}(t)\right| dt + \\ &\quad + \left|\int_0^1 \sum_{h=1}^{m_k} a_k\chi_{J_h^k}(t)f_n(t)dt\right|.\end{aligned}$$

Veja que a função

$$\left|\chi_{E_k} - \sum_{h=1}^{m_k}\chi_{J_h^k}\right|$$

satisfaz as condições do Lema 2.2.2 para $A = E_k$ e $B = \bigcup_{h=1}^{m_k} J_h^k$. Portanto,

$$\left|\chi_{E_k}(t) - \sum_{h=1}^{m_k}\chi_{J_h^k}(t)\right| = \chi_{\left(E_k\Delta\bigcup_{h=1}^{m_k} J_h^k\right)}(t)$$

para todo $t \in [0,1]$. Disso decorre que

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 a_k\chi_{E_k}(t)f_n(t)dt\right| &\leq \int_0^1 |a_kf_n(t)|\,\chi_{\left(E_k\Delta\bigcup_{t=1}^{m_k} J_n^k\right)}dt + \left|\int_0^1 \sum_{h=1}^{m_k} a_k\chi_{J_h^k}(t)f_n(t)dt\right| \\ &\leq s\,|a_k| \int_0^1 \chi_{\left(E_k\Delta\bigcup_{t=1}^{m_k} J_n^k\right)}dt + \left|\int_0^1 \sum_{h=1}^{m_k} a_k\chi_{J_h^k}(t)f_n(t)dt\right| \\ &\leq s\,|a_k|\,\mu\left(E_k\Delta\bigcup_{t=1}^{m_k} J_n^k\right) + \left|\int_0^1 \sum_{h=1}^{m_k} a_k\chi_{J_h^k}(t)f_n(t)dt\right| \\ &\leq s\,|a_k|\,\frac{\epsilon}{s2^{k+2}|a_k|} + \left|\int_0^1 \sum_{h=1}^{m_k} a_k\chi_{J_h^k}(t)f_n(t)dt\right| \\ &= \frac{\epsilon}{2^{k+2}} + \left|\int_0^1 \sum_{h=1}^{m_k} a_k\chi_{J_h^k}(t)f_n(t)dt\right|. \qquad (2.1)\end{aligned}$$

Temos também

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 \psi(t)f_n(t)dt\right| &= \left|\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^m a_k\chi_{E_k}(t)\right) f_n(t)dt\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^m \int_0^1 a_k\chi_{E_k}(t)f_n(t)dt\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^m \left|\int_0^1 a_k\chi_{E_k}(t)f_n(t)dt\right|.
\end{aligned}$$

De (2.1) segue que

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 \psi(t)f_n(t)dt\right| &\leq \sum_{k=1}^m \left|\int_0^1 a_k\chi_{E_k}(t)f_n(t)dt\right| \\
&< \sum_{k=1}^m \left(\frac{\epsilon}{2^{k+2}} + \left|\int_0^1 \sum_{h=1}^{m_k} a_k\chi_{J_n^k}(t)f_n(t)dt\right|\right) \\
&< \frac{\epsilon}{4} + \sum_{k=1}^m \left|\int_0^1 \sum_{h=1}^{m_k} a_k\chi_{J_h^k}(t)f_n(t)dt\right| \\
&= \frac{\epsilon}{4} + \sum_{k=1}^m \left|\sum_{h=1}^{m_k} a_k \int_0^1 \chi_{J_h^k}(t)f_n(t)dt\right|. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Vamos agora trabalhar para estimar a segunda parcela da soma acima. Para isso tome $\dfrac{\epsilon}{s2^{h+k+2}|a_k|} > 0$. Podemos tomar $V_{h,k} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{2^{V_{k,h}}} < \frac{\epsilon}{2^{h+k+1}|a_k|s}.$$

Como os intervalos J_h^k são abertos, podemos escrever

$$J_h^k = (a_h^k, b_h^k) \subset [0,1]$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo $h = 1,\ldots,m_k$. Tomando uma partição do intervalo $[0,1]$ cujos subintervalos tenham todos comprimento menor que $\dfrac{1}{2^{V_{k,h}+1}}$, existem $H, L \in \mathbb{N}$ com $1 \leq H \leq L \leq 2^{V_{h,k}+1} - 1$ tais que,

$$\begin{aligned}
a_h^k &\in \left[\frac{H-1}{2^{V_{h,k}+1}}, \frac{H}{2^{V_{h,k}+1}}\right], \\
b_h^k &\in \left[\frac{L}{2^{V_{h,k}+1}}, \frac{L+1}{2^{V_{h,k}+1}}\right].
\end{aligned}$$

Não sabemos se $H - L$ é par ou impar, mas sabemos que tomando uma partição cujos subintervalos têm comprimentos menores que $\dfrac{1}{2^{V_{k,h}+2}}$, podemos tomar $H', L' \in \left\{1,\ldots,2^{V_{h,k}+2}\right\}$ tais que

$$\frac{H}{2^{V_{h,k}+1}} = \frac{H'}{2^{V_{h,k}+2}} \quad , \quad \frac{L}{2^{V_{h,k}+1}} = \frac{L'}{2^{V_{h,k}+2}},$$

e $L' - H'$ é par. Como a sequência de funções $(f_n)_n$ tem integral nula de ordem par, para $V_{h,k} + 2$ existe $N_{h,k} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{H'/2^{V_{h,k}+2}}^{L'/2^{V_{h,k}+2}} f_n(t)dt = 0 \text{ para todo } n \geq N_{h,k}.$$

Daí,

$$\int_{H/2^{V_{h,k}+1}}^{L/2^{V_{h,k}+1}} f_n(t)dt = 0 \text{ para todo } n \geq N_{h,k}.$$

Retomando a última integral que aparece em (2.2), para $n \geq N_{h,k}$ temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 a_k \chi_{J_h^k}(t) f_n(t)dt\right| &= \left|\int_{a_h^k}^{b_h^k} a_k f_n(t)dt\right| \\
&= \left|\int_{a_h^k}^{H/2^{V_{h,k}+1}} a_k f_n(t)dt + \int_{H/2^{V_{h,k}+1}}^{L/2^{V_{h,k}+1}} a_k f_n(t)dt + \right. \\
&\quad \left. + \int_{L/2^{V_{h,k}+1}}^{b_h^k} a_k f_n(t)dt\right| \\
&= \left|\int_{a_h^k}^{H/2^{V_{h,k}+1}} a_k f_n(t)dt + \int_{L/2^{V_{h,k}+1}}^{b_h^k} a_k f_n(t)dt\right| \\
&\leq \int_{a_h^k}^{H/2^{V_{h,k}+1}} |a_k f_n(t)|\, dt + \int_{L/2^{V_{h,k}+1}}^{b_h^k} |a_k f_n(t)|\, dt \\
&\leq \int_{a_h^k}^{H/2^{V_{h,k}+1}} s\, |a_k|\, dt + \int_{L/2^{V_{h,k}+1}}^{b_h^k} s\, |a_k|\, dt \\
&= s\, |a_k|\, \mu\left(\left[a_h^k, \frac{H}{2^{V_{h,k}+1}}\right]\right) + s\, |a_k|\, \mu\left(\left[\frac{L}{2^{V_{h,k}+1}}, b_h^k\right]\right) \\
&\leq s\, |a_k|\, \mu\left(\left[\frac{H-1}{2^{V_{h,k}+1}}, \frac{H}{2^{V_{h,k}+1}}\right]\right) + s\, |a_k|\, \mu\left(\left[\frac{L}{2^{V_{h,k}+1}}, \frac{L+1}{2^{V_{h,k}+1}}\right]\right) \\
&= \frac{s\, |a_k|\, 2}{2^{V_{h+k}+1}} \\
&< s\, |a_k|\, \frac{\epsilon}{2^{h+k+2}|a_k| s} \\
&= \frac{\epsilon}{2^{h+k+2}}.
\end{aligned}$$

Aplicando esta estimativa em (2.2), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m}\left|\sum_{h=1}^{m_k} a_k \int_0^1 \chi_{J_h^k}(t) f_n(t)dt\right| &\leq \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{h=1}^{m_k}\left|a_k \int_0^1 \chi_{J_h^k}(t) f_n(t)dt\right|\right) \\
&< \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{h=1}^{m_k} \frac{\epsilon}{2^{h+k+2}}\right) \\
&= \frac{\epsilon}{4}\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} \underbrace{\left(\sum_{h=1}^{m_k} \frac{1}{2^h}\right)}_{<1}\right) \\
&< \frac{\epsilon}{4} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k}}_{<1} < \frac{\epsilon}{4}. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Tomando $N = \max\{V_{h,k} : 1 \leq h \leq m_k, 1 \leq k \leq m\}$ e combinando (2.1), (2.2) e (2.3), temos

$$\left|\int_0^1 g(t) f_n(t)dt\right| < \epsilon \text{ para todo } n \geq N.$$

Logo

$$\lim_{n \mapsto \infty}\left|\int_0^1 g(t) f_n(t)dt\right| = 0.$$

Isso prova que

$$\lim_{n \mapsto \infty} \varphi(f_n) = \lim_{n \mapsto \infty} \int_0^1 g(t) f_n(t)dt = 0,$$

completando a demonstração de que $f_n \xrightarrow{\omega} 0$ em $L_1[0,1]$. $\square$

Obteremos a seguir que a sequência das funções de Rademacher é fracamente nula em $L_1[0,1]$ como aplicação do teorema acima.

Exemplo 2.2.4. Considere a sequência de funções de Rademacher $(r_n)_{n=1}^{\infty}$, $r_n \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$r_n(t) = \operatorname{sgn}(\operatorname{sen}(2^n \pi t)) = \begin{cases} 1 & se \quad \frac{k-1}{2^n} \leq t < \frac{k}{2^n} \quad e \quad k \text{ é impar.} \\ \\ -1 & se \quad \frac{k-1}{2^n} \leq t \leq \frac{k}{2^n} \quad e \quad k \text{ é par.} \end{cases}$$

Cada r_n é contínua por partes, logo é Riemann-integrável e portanto é Lebesgue-integrável. Vejamos que a sequência $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ tem integral nula de ordem par. Primeiro pedimos ao leitor que analise os seguintes gráficos das primeiras funções de Rademacher, os quais indicam que elas, de fato, satisfazem a nossa definição de funções com integral nula de ordem par.

Figura 2.1: Rademacher para n=2

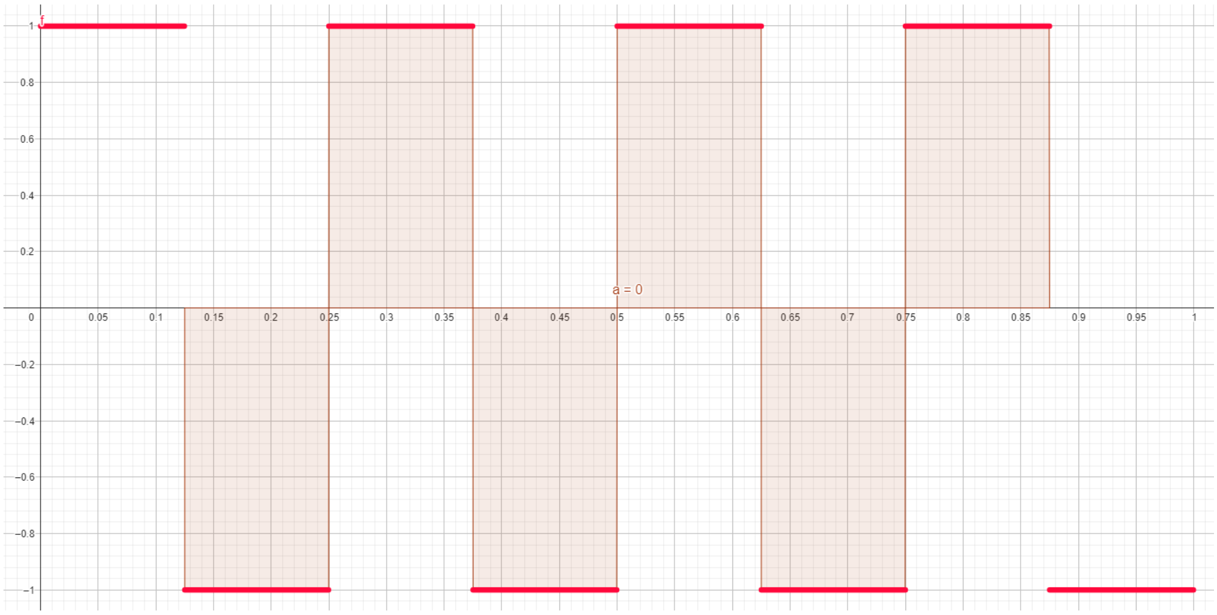

Figura 2.2: Rademacher para n=3

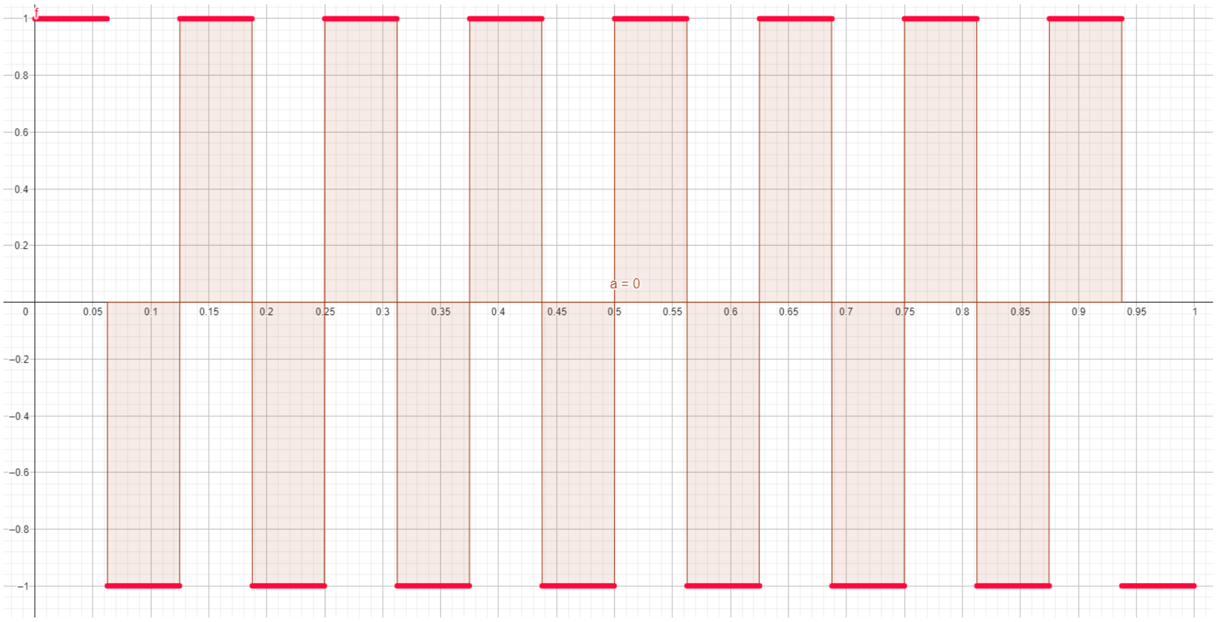

Figura 2.3: Rademacher para n=4

Agora provemos isso. De fato, seja $k \in \mathbb{N}$ e tome $N = k$. Se $n \geq N$ e $L, H \in \{0, 1, 2, \dots, 2^k\}$ são tais que $L < H$ e $H - L$ é par, existem $L', H' \in \{0, 1, 2, \dots, 2^n\}$ tais que

$$\frac{H}{2^k} = \frac{H'}{2^n} \quad \text{e} \quad \frac{L}{2^k} = \frac{L'}{2^n}.$$

Alem disso, $H' - L' = 2^{n-k}(L - H)$, e portanto $L' - H'$ também é par. Usando a aditividade da integral,

$$\int_{\frac{L}{2^k}}^{\frac{H}{2^k}} r_n(t)dt \quad = \quad \int_{\frac{L'}{2^n}}^{\frac{H'}{2^n}} r_n(t)dt = \sum_{K=L'+1}^{H'} \int_{\frac{K-1}{2^n}}^{\frac{K}{2^n}} r_n(t)dt.$$

Sabemos que $r_n(t) = 1$ ou $r_n(t) = -1$ em cada um dos intervalos. Como $H - L$ é par, temos a mesma quantidade de intervalos com 1 e com -1 e

$$\int_{\frac{K-1}{2^n}}^{\frac{K}{2^n}} r_n(t)dt = \int_{\frac{K-1}{2^n}}^{\frac{K}{2^n}} 1dt = \frac{K}{2^n} - \frac{K-1}{2^n} = \frac{1}{2^n}.$$

Da mesma forma,

$$\int_{\frac{K-1}{2^n}}^{\frac{K}{2^n}} r_n(t)dt = \int_{\frac{K-1}{2^n}}^{\frac{K}{2^n}} -1dt = \frac{K-1}{2^n} - \frac{K}{2^n} = -\frac{1}{2^n}.$$

Daí,

$$\int_{\frac{L}{2^k}}^{\frac{H}{2^k}} f_n(t)dt = \sum_{K=L'+1}^{H'} \int_{\frac{K-1}{2^n}}^{\frac{K}{2^n}} r_n(t)dt = 0$$

para todo $n \geq N$. Portanto, $(f_n)_n$ é uma sequência de funções Lebesgue integráveis com integral nula de ordem par. Pelo Teorema 2.2.3 segue que $(f_n)_n$ é fracamente nula em $L_1[0,1]$.

Apresentaremos a seguir mais uma aplicação do Teorema 2.2.3, mostrando que sua aplicabilidade vai além da conclusão de que a sequência das funções de Rademacher é fracamente nula em $L_1[0,1]$.

Exemplo 2.2.5. Fixe $a > 0$ e considere a sequência de funções $f_n\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = \; -2^{n+1}ax + a\,(2(k-1)+1) \quad se \quad \tfrac{k-1}{2^n} < x < \tfrac{k}{2^n} \quad e \quad k \in \{1, \ldots, 2^n\}$$

Mais uma vez, cada f_n é Lebesgue-integrável por ser contínua por partes, e define uma sequência de funções com integral nula de ordem par. Exibimos abaixo os gráficos das primeiras funções da sequência, nos quais é clara a indicação de que essa sequência tem integral nula de ordem par.

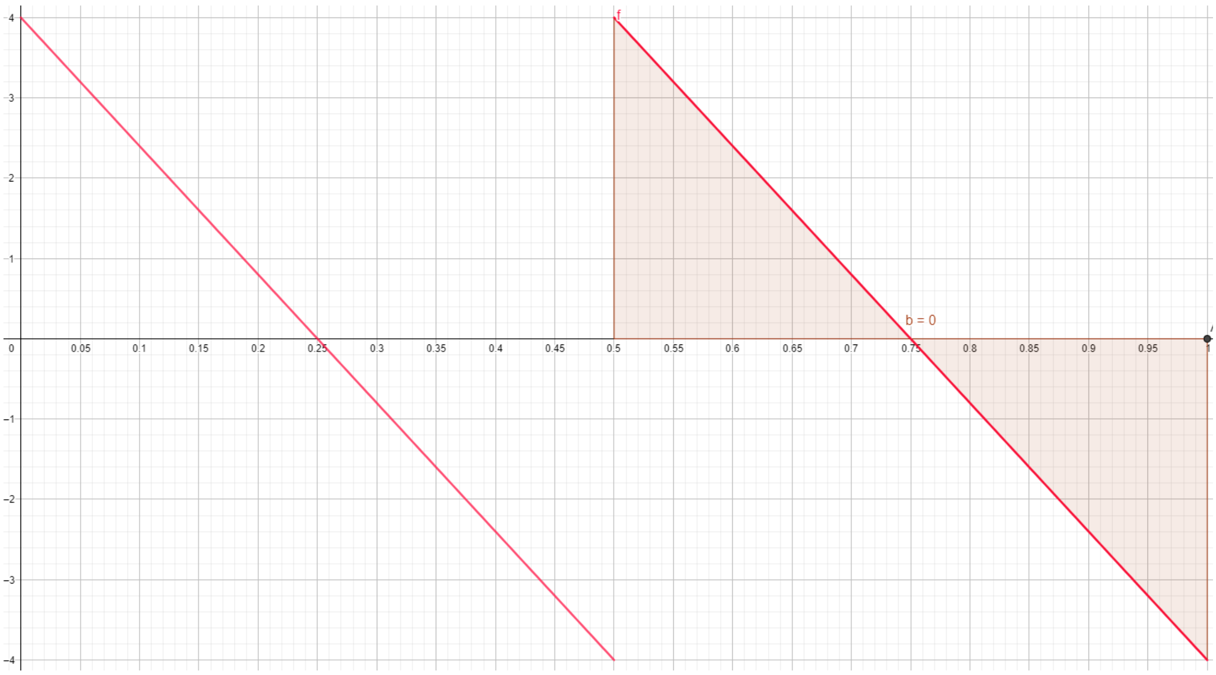

Figura 2.4: f_1

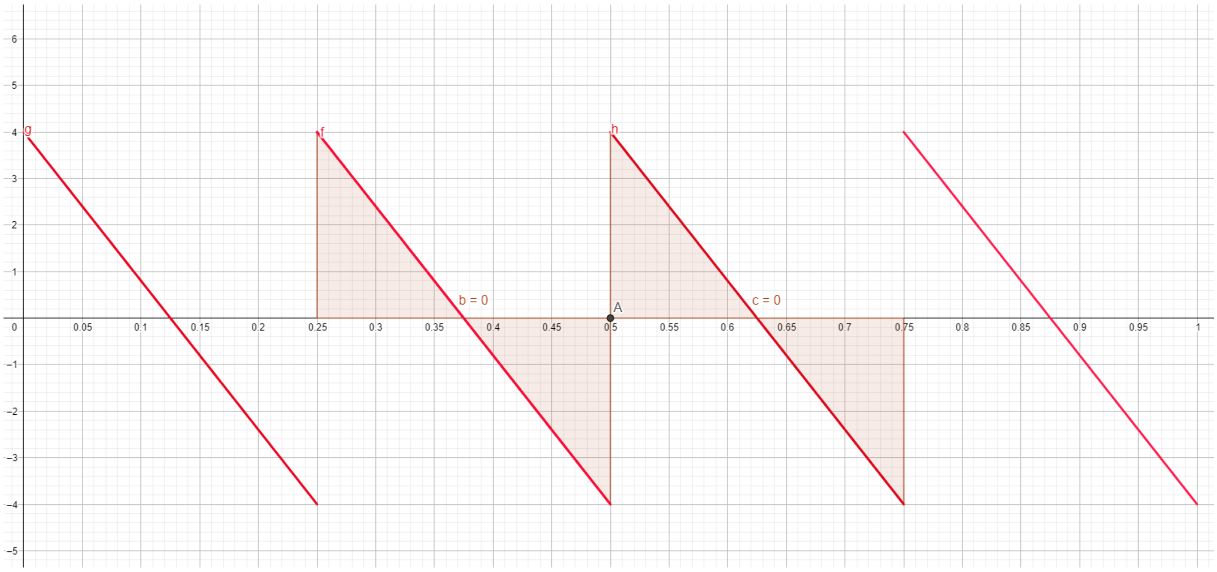

Figura 2.5: f_2

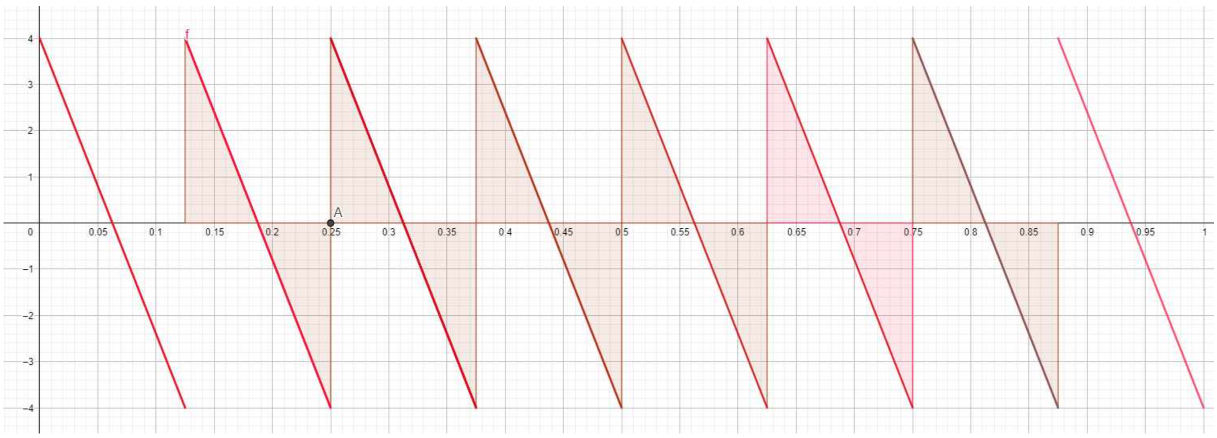

Figura 2.6: f_3

Provemos isso. De fato, seja $k \in \mathbb{N}$ e tome $N = k$. Se $n \geq N$ e $L, H \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^k\}$ são tais que $L < H$ e $H - L$ é par, existem $L', H' \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n\}$ tais que

$$\frac{H}{2^k} = \frac{H'}{2^n} \quad \text{e} \quad \frac{L}{2^k} = \frac{L'}{2^n}.$$

Além disso $L' - H' = 2^{n-k}(L - H)$, e portanto $L' - H'$ também é par. Usando novamente a aditividade da integral,

$$\int_{\frac{L}{2^k}}^{\frac{H}{2^k}} f_n(t)dt \quad = \quad \int_{\frac{L'}{2^n}}^{\frac{H'}{2^n}} f_n(t)dt = \sum_{K=L'+1}^{H'} \int_{\frac{K-1}{2^n}}^{\frac{K}{2^n}} f_n(t)dt.$$

De

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{K-1}{2^n}}^{\frac{K}{2^n}} f_n(t)dt &= a\int_{\frac{K-1}{2^n}}^{\frac{K}{2^n}} -2^{n+1}t + (2(K-1)+1)\,dt \\
&= a\left(-2^{n+1}\frac{t^2}{2} + (2(K-1)+1)\,t\Big|_{\frac{K-1}{2^n}}^{\frac{K}{2^n}}\right) \\
&= a\left(-2^{n+1}\frac{\left(\frac{K}{2^n}\right)^2}{2} + (2(K-1)+1)\left(\frac{K}{2^n}\right)\right) \\
&- a\left(-2^{n+1}\frac{\left(\frac{K-1}{2^n}\right)^2}{2} + (2(K-1)+1)\left(\frac{K-1}{2^n}\right)\right) \\
&= a\left(-\frac{K^2}{2^n} + (2(K-1)+1)\left(\frac{K}{2^n}\right) + \frac{(K-1)^2}{2^n}\right) \\
&- a\left((2(K-1)+1)\left(\frac{K-1}{2^n}\right)\right) \\
&= a\left(\frac{-2K}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{2K}{2^n} - \frac{2}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

segue que

$$
\int_{\frac{L}{2^k}}^{\frac{H}{2^k}} f_n(t)dt = 0 \text{ se } n \geq N.
$$

Isso prova que $(f_n)_n$ é uma sequência de funções com integral nula de ordem par, e portanto é fracamente nula em $L_1[0,1]$ pelo Teorema 2.2.3.

Capítulo 3

A propriedade de Schur positiva

Issai Schur provou em 1921, no artigo [37], que sequências fracamente convergentes em ℓ_1 são convergentes em norma. Até então acreditava-se que convergência fraca seria equivalente a convergência em norma apenas em espaços de dimensão finita. Com esse resultado, Schur abriu toda uma nova frente de pesquisa na Análise Funcional, a saber, os espaços de dimensão infinita nos quais convergência fraca e convergência em norma são equivalentes. Naturalmente, tais espaços são ditos *espaços de Schur* ou espaços que têm a *propriedade de Schur*. A dissertação [27] é uma boa fonte de referências para essa propriedadee para o impacto da propriedade de Schur na teoria dos espaços de Banach.

No contexto de reticulados de Banach, vetores positivos são muito importantes. Isso levou W. Wnuk [40] em 1989 e F. Räbiger [33] em 1991 a introduzirem, quase de forma simultânea, o estudo de reticulados de Banach nos quais sequências fracamente convergentes formadas por vetores positivos são convergentes em norma. Diz-se que tais espaços têm a *propriedade de Schur positiva*.

A propriedade de Schur positiva foi, a partir de então, muito estudada na teoria dos espaços de Banach. As contribuições de Wnuk, dentre as quais citamos [40–43], foram de grande importância. Desenvolvimentos recentes da propriedade de Schur positiva podem ser encontrados, por exemplo, em [5, 7, 10–13, 38]

A proposta deste capítulo é introduzir a propriedade de Schur positiva em reticulados de Banach, dar alguns exemplos e contraexemplos, discorrer sobre algumas propriedades e, também, dar algumas notas curiosas sobre essa propriedade.

3.1 Definições e primeiros exemplos

Definição 3.1.1. Um espaço de Banach E tem a *propriedade de Schur* se dada uma sequência $(x_n)_n \subset E$ tal que $x_n \xrightarrow{\omega} 0$, tem-se $\|x_n\| \longrightarrow 0$.

Teorema 3.1.2 (Teorema de Schur). *O espaço ℓ_1 tem a propriedade de Schur, isto é, em ℓ_1 uma sequência converge fracamente se, e somente se, converge na topologia da norma.*

Demonstração. Veja [14, Teorema 6.2.12]. □

Definição 3.1.3. Um reticulado de Banach E tem a *propriedade Schur positiva* se dada uma sequência $(x_n)_n \subset E^+$ tal que $x_n \xrightarrow{\omega} 0$, tem-se $\|x_n\| \longrightarrow 0$.

Proposição 3.1.4. *Todo reticulado de Banach com a propriedade de Schur tem a propriedade de Schur positiva.*

Demonstração. Seja E um reticulado de Banach com a propriedade de Schur. Dada uma sequência $(x_n)_n$ positiva e fracamente nula, como E tem a propriedade de Schur segue que $x_n \longrightarrow 0$. Daí E tem a propriedade de Schur positiva. $\square$

Exemplo 3.1.5. Pelo Teorema 3.1.2 sabemos que ℓ_1 tem a propriedade de Schur. E pelo exemplo 1.4.6 sabemos que ℓ_1 é um reticulado de Banach. Segue da proposição anterior que ℓ_1 tem a propriedade de Schur positiva.

Exemplo 3.1.6. Todo reticulado de Banach de dimensão finita tem a propriedade de Schur positiva. De fato, seja E um reticulado de Banach de dimensão finita. Pelo Teorema 1.2.4, a topologia fraca e a topologia da norma coincidem em E. Logo, se $(x_n)_n \subset (E)^+$ e $x_n \overset{\omega}{\longrightarrow} 0$, então $x_n \longrightarrow 0$.

Em particular, como $\mathbb{R}^n$ é um reticulado de Banach com a ordem dada por

$$(x_1, \dots, x_n) \leq (y_1, \dots, y_n) \Longleftrightarrow x_i \leq y_i \text{ para todo } i = 1, \cdots, n,$$

segue que $\mathbb{R}^n$ tem a propriedade de Schur positiva para todo $n \in \mathbb{N}$. .

O próximo exemplo e o teorema logo a seguir serão muito importantes na determinação se um reticulado de Banach tem a propriedade de Schur positiva ou não.

Exemplo 3.1.7. Conforme mencionado anteriormente, c_0, é um reticulado de Banach com a relação de ordem

$$(x_n)_n \leq (y_n)_n \Longleftrightarrow x_n \leq y_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Provemos que c_0 não tem a propriedade de Schur positiva. Para isso considere a sequência $(e_n)_n \subset (c_0)^+$ dos vetores canônicos positivos dos espaços de sequências, isto é,

$$e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

em que 1 aparece na n-ésima coordenada. Seja $\phi \in (c_0)^*$. Pelo Teorema 1.1.17 existe $(a_k)_k \in \ell_1$ tal que

$$\phi((b_k)_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \text{ para toda } (b_k)_k \in c_0.$$

Em particular,

$$\phi(e_n) = \phi((0, \dots, 0, 1, 0, \dots)) = a_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Daí,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\phi(e_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$$

pois $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$. Pelo teste do termo geral para séries convergentes segue que $|\phi(e_n)| \longrightarrow 0$, e portanto $\phi(e_n) \longrightarrow 0$ para todo funcional $\phi \in (c_0)^*$. Isso prova que $e_n \xrightarrow{\omega} 0$ em c_0. Por outro lado, como $\|e_n\| = 1$ para todo n, a sequência $(e_n)_n$ não converge para zero na norma de c_0. Assim $(e_n)_n$ é uma sequência fracamente nula, formada por vetores positivos, que não converge para zero em norma. Segue que c_0 não tem a propriedade de Schur positiva.

Teorema 3.1.8. *Sejam E e F reticulados de Banach. Se E tem a propriedade de Schur positiva e $F \overset{R}{\hookrightarrow} E$, então F tem a propriedade de Schur positiva.*

Demonstração. Por hipótese, E tem uma cópia reticulada de F. Logo existem um subreticulado $G \subset E$ e $T\colon F \longrightarrow G$ um isomorfismo de Riesz. Seja $(x_n)_n \subset F^+$ uma sequência tal que $x_n \xrightarrow{\omega} 0$ em F. Como T é isomorfismo de Riesz e homomorfismos de Riesz levam vetores positivos em vetores positivos, temos $(T(x_n))_n \subset G^+ \subset E^+$. Seja $\phi \in E^*$. Então $\phi\big|_G \in G^*$ e

$$\phi\big|_G \circ T : F \longrightarrow \mathbb{R}$$

é um funcional linear contínuo, isto é, $\phi\big|_G \circ T \in F^*$. Como $x_n \xrightarrow{\omega} 0$ em F, $\phi\big|_G(T(x_n)) = \phi(T(x_n)) \longrightarrow 0$ para todo $\phi \in E^*$. Pelo Teorema 1.2.3 sabemos que $(T(x_n))_n$ é uma sequência fracamente nula em E. Da propriedade de Schur positiva de E segue que $\|T(x_n)\|_E \longrightarrow 0$. Como T é isomorfismo de espaços de Banach, existe $k > 0$ tal que

$$\|T(x_n)\|_G \geq k\|x_n\|_F \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como $\|T(x_n)\|_G \longrightarrow 0$, temos $\|x_n\|_F \longrightarrow 0$. Isso prova que F tem a propriedade de Schur positiva. □

Uma conclusão imediata do resultado acima é que, para um reticulado de Banach ter a propriedade de Schur positiva, todo subreticulado tem que ter a propriedade de Schur positiva. Mais ainda, se um reticulado de Banach possui um subreticulado que não tem a propriedade de Schur positiva, ele não tem a propriedade de Schur positiva. Isto acontece em muitos espaços conhecidos, por exemplo muitos deles contém cópia de c_0 ou de outro reticulado que não tem esta propriedade. O exemplo a seguir é ilustrativo.

Exemplo 3.1.9. Seja K um espaço topológico de Hausdorff infinito e compacto. Pelo Teorema 1.1.7 sabemos que $C(K)$ contém uma cópia isométrica de c_0. Pelo Teorema 1.4.13, $C(K)$ possui uma cópia reticulada de c_0. Como c_0 não tem a propriedade de Schur positiva, do teorema anterior segue que $C(K)$ não tem a propriedade de Schur positiva. Em particular, ℓ_∞ não tem a propriedade de Schur positiva.

Na verdade, o exemplo 3.1.5 é caso particular de algo bem mais geral:

Exemplo 3.1.10. Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Vejamos que o reticulado de Banach $L_1(\mu)$ tem a propriedade de Schur positiva. Para isso seja $(f_n)_n$ uma sequência positiva e fracamente nula em $L_1(\mu)^+$. É claro que

$$\varphi\colon L_1(\mu) \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ \varphi(f) = \int_X f d\mu,$$

é um funcional linear contínuo. Pelo Teorema 1.2.3 temos

$$\int_X f_n d\mu = \varphi(f_n) \longrightarrow 0.$$

Como $f_n \geq 0$ em $L_1(\mu)$, temos $f_n(x) \geq 0$ μ-quase sempre, e portanto $|f_n| = f_n$ μ-quase sempre. Segue que

$$\|f_n\|_1 = \int_X |f_n| d\mu = \int_X f_n d\mu \longrightarrow 0.$$

Logo, $\|f_n\| \longrightarrow 0$. Isso prova que $L_1(\mu)$ tem a propriedade de Schur positiva.

É claro que a Proposição 3.1.4 levanta a questão se todo reticulado de Banach com a propriedade de Schur positiva tem a propriedade de Schur. O próximo exemplo comprova que não.

Exemplo 3.1.11. No Capítulo 2 vimos que a sequência $(r_n)_n$ das funções de Rademacher é fracamente nula em $L_1[0,1]$. Entretanto, ela não é nula em norma pois $\|r_n\|_1 = 1$ para todo n. Isso mostra que o espaço $L_1[0,1]$ não tem a propriedade de Schur. Mas, pelo exemplo anterior, sabemos que $L_1[0,1]$ tem a propriedade de Schur positiva.

3.2 Caracterizações e consequências

Provaremos inicialmente algumas caracterizações da propriedade de Schur positiva que são muito úteis no estudo dessa propriedade. Para isso precisamos do seguinte lema topológico bem simples.

Lema 3.2.1. *Seja $(x_n)_n$ uma sequência convergente para um elemento x em um espaço topológico de Hausdorff. Então o conjunto $B := \{x, x_1, x_2, \ldots\}$ é compacto e o conjunto $A := \{x_1, x_2, \ldots\}$ é relativamente compacto.*

Demonstração. Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma cobertura aberta de B. Então existe $i_0 \in I$ tal que $x \in A_{i_0}$. Como A_{i_0} é aberto contendo x e $x_n \longrightarrow x$, existe n_0 tal que $x_n \in A_{i_0}$ para todo $n \geq n_0$. Como os elementos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n_0 - 1}$ pertencem a B e $(A_i)_{i \in I}$ é cobertura de B, existem abertos A_{i_k} tais que $x_k \in A_{i_k}$ para $k = 1, \ldots, n_0 - 1$. Daí,

$$B = \{x\} \cup \{x_1, \ldots, x_{n_0 - 1}\} \bigcup_{n \geq n_0} \{x_n\} \subset \bigcup_{k=0}^{n_0 - 1} A_{i_k},$$

provando que B é compacto.

Como B é um compacto em um espaço de Hausdorff, por [14, Proposição B.33(b)] sabemos que B é fechado. De $A \subseteq B$ segue que

$$\overline{A} \subseteq \overline{B} = B.$$

Assim, $\overline{A}$ é um fechado dentro do compacto B. Por [14, Proposição B.33(a)] segue que $\overline{A}$ é compacto, isto é, A é relativamente compacto. $\square$

As caracterizações abaixo, que serão utilizadas várias vezes nesta dissertação, encontram-se enunciadas em [40]. Um dos principais objetivos desta seção é demonstrá-las em detalhes.

Teorema 3.2.2. *Seja E um reticulado de Banach. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *E tem a propriedade de Schur positiva.*

(b) *Toda sequência disjunta e fracamente nula em E é nula em norma.*

(c) *Toda sequência positiva, disjunta e fracamente nula em E é nula em norma.*

(d) *Toda sequência normalizada e positiva em E não é fracamente nula.*

(e) *Toda sequência normalizada, positiva e disjunta em E não é fracamente nula.*

Demonstração. As implicações (a) $\Longrightarrow$ (c), (d) $\Longrightarrow$ (e) e (b) $\Longrightarrow$ (c) são imediatas. Para o leitor acompanhar a demostração, note que basta mostrar que (a) $\Longrightarrow$ (d), (e) $\Longrightarrow$ (a), (c) $\Longrightarrow$ (a) e (c) $\Longrightarrow$ (b).

(c) $\Longrightarrow$ (a) Suponha que E não tenha a propriedade de Schur positiva. Neste caso existe uma sequência positiva $(x_n)_n$ em E tal que $x_n \xrightarrow{\omega} 0$ mas $\|x_n\| \not\longrightarrow 0$. Como $\|x_n\| \not\longrightarrow 0$, existe uma subsequência $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ tal que $\|x_{n_k}\| > \epsilon$ para algum $\epsilon > 0$ e para todo $k \in \mathbb{N}$. Podemos então tomar

$$y_k := \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} \in E.$$

Note que $\|y_k\| = 1$ para todo k e que a sequência $(y_k)_k$ é positiva. Dado um funcional linear $\phi \in E^*$, veja que

$$\begin{aligned} |\phi(y_k)| &= \left| \phi\left(\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} \right) \right| \\ &= \frac{|\phi(x_{n_k})|}{\|x_{n_k}\|} \\ &\leq \frac{|\phi(x_{n_k})|}{\epsilon}. \end{aligned}$$

Como subsequência de sequência fracamente nula é fracamente nula, temos $x_{n_k} \xrightarrow{\omega} 0$ em E. Em particular, $\phi(x_{n_k}) \longrightarrow 0$. Daí,

$$0 \leq \lim_{k \mapsto \infty} |\phi(y_k)| \leq \lim_{k \mapsto \infty} \frac{|\phi(x_{n_k})|}{\epsilon} = 0.$$

Logo $y_k \xrightarrow{\omega} 0$. Pelo Teorema 1.4.21, existem $c > 0$, uma subsequência de índices $(k_m)_m$ e uma sequência disjunta $(z_m)_m \subset E_+$ com $0 \leq z_m \leq y_{k_m}$ e $\|z_m\| \geq c$ para todo m.

De $y_k \xrightarrow{\omega} 0$ segue que $y_{k_m} \xrightarrow{\omega} 0$. Note que, pelo Teorema 1.4.15, E^* é um reticulado de Banach. Portanto, para todo $\varphi \in E^*$, $|\varphi|$ existe e $|\varphi| \in (E^*)^+$. De $y_{k_m} - z_m \geq 0$ temos $|\varphi|(y_{k_m} - z_m) \geq 0$, isto é

$$|\varphi|(y_{k_m}) \geq |\varphi|(z_m) \geq 0 \text{ para todo } m.$$

Como $y_{k_m} \xrightarrow{\omega} 0$ e $|\varphi| \in E^*$, temos $|\varphi|(y_{k_m}) \longrightarrow 0$. Daí e da desigualdade acima segue que $|\varphi|(z_m) \longrightarrow 0$ para todo $\varphi \in E^*$. Como $\varphi^+, \varphi^- \in (E^*)^+$, temos

$$\varphi^+(z_m) = |\varphi^+|(z_m) \longrightarrow 0 \;\text{ e }\; \varphi^-(z_m) = |\varphi^-|(z_m) \longrightarrow 0.$$

Portanto, para todo $\varphi \in E^*$,

$$\varphi(z_m) = \varphi(z_m)^+ - \varphi(z_m)^- \longrightarrow 0 - 0 = 0.$$

Isso prova que $z_m \xrightarrow{\omega} 0$. Sabemos também $\|z_m\| \not\longrightarrow 0$ pois $\|z_m\| \geq c > 0$ para todo m. Dessa forma, $(z_k)_k$ é uma sequência disjunta e positiva que converge fracamente para 0, mas não converge em norma para 0. Isso é uma contradição com a hipótese do item (c). Segue que E tem a propriedade de Schur positiva.

(c) $\Longrightarrow$ (b) Seja $(x_n)_n$ uma sequência disjunta e fracamente nula em E. Temos

$$|x_n| \wedge |x_m| = 0 \text{ para todos } n \neq m,$$

ou seja,

$$0 = \inf\left\{x_n^+ + x_n^-, x_m^+ + x_m^-\right\} \text{ para todos } n \neq m.$$

Denotaremos por $CI(A)$ o conjunto das cotas inferiores do conjunto A. Seja

$$z \in CI(\{x_n^+, x_m^+\}).$$

Então,

$$z \leq x_n^+ \leq x_n^+ + x_n^- \quad \text{e} \quad z \leq x_m^+ \leq x_m^+ + x_m^-.$$

Daí,

$$z \in CI(\{x_n^+ + x_n^-, x_m^+ + x_m^-\}).$$

Isso prova que

$$CI(\{x_n^+, x_m^+\}) \subset CI(\{x_n^+ + x_n^-, x_m^+ + x_m^-\}),$$

donde segue que

$$0 \leq \inf\left\{x_n^+, x_m^+\right\} \leq \inf\left\{x_n^+ + x_n^-, x_m^+ + x_m^-\right\} = 0.$$

Isso mostra que

$$|x_n^+| \wedge |x_m^+| = x_n^+ \wedge x_m^+ = 0.$$

Portanto, a sequência $(x_n^+)_n$ é disjunta. Da mesma forma, a sequência $(x_n^-)_n$ é disjunta. Agora, pelo Lema 3.2.1, o conjunto

$$B = \{0, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

é fracamente compacto, portanto relativamente fracamente compacto. Como

$$x_n^+ \leq |x_n| \;\text{ e }\; x_n^- \leq |x_n|,$$

as sequências $(x_n^-)_n$ e $(x_n^+)_n$ estão na envoltória sólida de $(x_n)_n$. Pelo Teorema 1.4.17 segue que

$$x_n^+ \xrightarrow{\omega} 0 \;\text{ e }\; x_n^- \xrightarrow{\omega} 0.$$

Por hipótese temos

$$x_n^+ \longrightarrow 0 \ \text{ e } \ x_n^- \longrightarrow 0.$$

Então, da igualdade $x_n = x_n^+ - x_n^-$ (Teorema 1.4.8), temos

$$0 \leq \|x_n\| = \|x_n^+ - x_n^-\| \leq \|x_n^+\| + \|x_n^-\| \longrightarrow 0 + 0 = 0.$$

Portanto, $x_n \longrightarrow 0$.

(a) $\Longrightarrow$ (d) Por hipótese, E tem a propriedade de Schur positiva. Seja $(x_n)_n$ uma sequência positiva em E tal que $\|x_n\| = 1$ para todo n. Suponha que $x_n \xrightarrow{\omega} 0$. Da propriedade de Schur positiva de E segue que $\|x_n\| \longrightarrow 0$, contradição esta que prova que $(x_n)_n$ não é fracamente nula.

(e) $\Longrightarrow$ (a) Suponha que E não possua a propriedade de Schur positiva. Como já provamos que (c) $\Longrightarrow$ (a), neste caso existe uma sequência positiva e disjunta $(x_n)_n$ em E tal que $x_n \xrightarrow{\omega} 0$, mas $x_n \not\longrightarrow 0$. Podemos tomar uma subsequência $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ tal que $\|x_{n_k}\| > \epsilon$ para algum $\epsilon > 0$ e para todo $k > 0$. Podemos então definir, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$z_k = \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}.$$

Note que $\|z_k\| = 1$ para todo k e que a sequência $(z_k)_k$ é positiva. Dado $\phi \in E^*$, para todo k temos

$$\begin{aligned} |\phi(z_k)| &= \left| \phi\left(\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} \right) \right| \\ &= \frac{|\phi(x_{n_k})|}{\|x_{n_k}\|} \\ &\leq \frac{|\phi(x_{n_k})|}{\epsilon}. \end{aligned}$$

Como $x_n \xrightarrow{\omega} 0$, temos $x_{n_k} \xrightarrow{\omega} 0$, e portanto

$$0 \leq \lim_{k \mapsto \infty} |\phi(z_k)| \leq \lim_{k \mapsto \infty} \frac{|\phi(x_{n_k})|}{\epsilon} = 0.$$

Isso prova que $z_k \xrightarrow{\omega} 0$.

O próximo passo é provar que a sequência $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ é disjunta. Para isso, sejam $k, m \in \mathbb{N}$ com $m \neq k$. Já sabemos que $|x_{n_k}| \wedge |x_{n_m}| = 0$. Como $x_{n_k} \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, temos $x_{n_m} \wedge x_{n_k} = 0$. Segue que

$$\begin{aligned} 0 &\leq |z_m| \wedge |z_k| \\ &= z_m \wedge z_n \\ &= \frac{x_{n_m}}{\|x_{n_m}\|} \wedge \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}. \end{aligned}$$

De $\dfrac{1}{\|x_{n_m}\|} \leq \max\left\{ \dfrac{1}{\|x_{n_m}\|}, \dfrac{1}{\|x_{n_k}\|} \right\}$ resulta que

$$\frac{x_{n_m}}{\|x_{n_m}\|} \leq \max\left\{\frac{1}{\|x_{n_m}\|}, \frac{1}{\|x_{n_k}\|}\right\} x_{n_m} \quad \text{e} \quad \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} \leq \max\left\{\frac{1}{\|x_{n_m}\|}, \frac{1}{\|x_{n_k}\|}\right\} x_{n_k}.$$

Podemos então concluir que toda cota inferior de $\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}$ e de $\frac{x_{n_m}}{\|x_{n_m}\|}$ também é cota inferior de $\max\left\{\frac{1}{\|x_{n_m}\|}, \frac{1}{\|x_{n_k}\|}\right\} x_{n_k}$ e de $\max\left\{\frac{1}{\|x_{n_m}\|}, \frac{1}{\|x_{n_k}\|}\right\} x_{n_m}$. Logo,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{x_{n_m}}{\|x_{n_m}\|} \wedge \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} \\
&\leq \left(\max\left\{\frac{1}{\|x_{n_m}\|}, \frac{1}{\|x_{n_k}\|}\right\} x_{n_m}\right) \wedge \left(\max\left\{\frac{1}{\|x_{n_m}\|}, \frac{1}{\|x_{n_k}\|}\right\} x_{n_k}\right) \\
&\leq \max\left\{\frac{1}{\|x_{n_m}\|}, \frac{1}{\|x_{n_k}\|}\right\} (x_{n_m} \wedge x_{n_k}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Disso segue que $|z_m| \wedge |z_n| = 0$, e portanto, $(z_k)_k$ é uma sequência normalizada, positiva, disjunta e fracamente nula. Isso é uma contradição com a hipótese do item (e), o que prova que E tem a propriedade de Schur positiva. $\square$

Nos próximos resultados provaremos que algumas características da propriedade de Schur em espaços de Banach têm suas análogas para a propriedade de Schur positiva em reticulados de Banach. Por exemplo, é conhecido que todo espaço de Banach de dimensão infinita com a propriedade de Schur contém uma cópia de ℓ_1. Espera-se então que todo reticulado de Banach de dimensão infinita com a propriedade positiva de Schur contenha um cópia reticulada de ℓ_1. Isso é o que provaremos em breve.

Para alcançar esse objetivo, usaremos a noção de reticulado de Banach p-homogêneo. Essa noção foi introduzida em [22] e atualmente é estudada para tratar com o problema de identificar quando, em reticulados de Banach, o ideal dos operadores estritamente singulares coincide com o ideal dos operadores compactos. Maiores detalhes podem ser encontrados em [19, 21].

Definição 3.2.3. Um reticulado de Banach E é chamado *p-disjunto homogêneo*, para $1 \leq p < \infty$, se toda sequência disjunta e normalizada em E admite uma subsequência equivalente à base canônica de ℓ_p.

O seguinte teorema é inspirado no clássico Teorema ℓ_1 de Rosenthal (Teorema 1.2.6) e baseado na demonstração apresentada em [20].

Teorema 3.2.4. *Um reticulado de Banach E é 1-disjunto homogêneo se, e somente se, E tem a propriedade de Schur positiva.*

Demonstração. Suponha que E seja 1-disjunto homogêneo e que não tenha a propriedade de Schur positiva. Pelo Teorema 3.2.2 existe uma sequência $(x_n)_n$ normalizada, disjunta, positiva e fracamente nula em E. Pelo Teorema de ℓ_1 Rosenthal (Teorema 1.2.6), $(x_n)_n$ não possui subsequência equivalente à base canônica de ℓ_1, pois todas as suas subsequências são fracamente de Cauchy (uma vez que a sequência é fracamente nula). Segue que E não é 1-disjunto homogêneo.

Reciprocamente, suponha que E tenha a propriedade de Schur positiva. Seja $(x_n)_n$ uma sequência positiva, disjunta e normalizada em E. Suponha que exista uma subsequência $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ fracamente de Cauchy. Como E tem a propriedade de Schur positiva e c_0 não tem a propriedade de Schur positiva (Exemplo 3.1.7), segue do Teorema 3.1.8 que $c_0 \overset{R}{\not\hookrightarrow} E$. Segue do Teorema 1.4.13 que o reticuldo E é fracamente sequencialmente completo. Portanto a sequência $(x_{n_k})_k$ converge fracamente em E. O Lema 3.2.1 nos garante que o conjunto

$$\{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$$

é relativamente fracamente compacto. Como a sequência $(x_n)_n$ é disjunta, sua subsequência $(x_{n_k})_k$ também é disjunta. E como $(x_{n_k})_k \subset \mathrm{sol}(\{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\})$, do Teorema 1.4.17, segue que $x_{n_k} \xrightarrow{\omega} 0$. E da propriedade de Schur positiva de E concluímos que $\|x_{n_k}\| \longrightarrow 0$. Isso é uma contradição pois $\|x_{n_k}\| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Isso prova que $(x_n)_n$ não possui subsequência fracamente de Cauchy. Pelo Teorema 1.2.6, $(x_n)_n$ possui uma subsequência equivalente à base canônica de ℓ_1, isto é, E é 1-disjunto homogêneo. $\square$

Corolário 3.2.5. *Se um reticulado de Banach E de dimensão infinita tem a propriedade de Schur positiva, então $\ell_1 \overset{R}{\hookrightarrow} E$.*

Demonstração. Primeiramente veja que em todo reticulado de Banach existe uma sequência positiva e disjunta. De fato, isso segue do Teorema 1.4.18 fixando $x \in E^+$, $x \neq 0$, e definindo $x_n = 2^{-n}x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo teorema anterior temos que E é 1-disjunto homogêneo, e portanto existe uma subsequência $(x_{n_k})_k$ equivalente à base canônica de ℓ_1. Do Teorema 1.4.19 segue que $\ell_1 \overset{R}{\hookrightarrow} E$. $\square$

Mais que isso, provamos que todo subreticulado de um reticulado de Banach com a propriedade de Schur positiva tem um subreticulado Riesz isomorfo a ℓ_1.

Os próximos corolários também são uma versão para a propriedade de Schur positiva de resultados conhecidos para a propriedade de Schur.

Corolário 3.2.6. *Seja E um reticulado de Banach de dimensão infinita. Se E tem a propriedade de Schur positiva, então E^* não tem a propriedade de Schur positiva.*

Demonstração. Como E tem a propriedade de Schur positiva, pelo corolário anterior temos $\ell_1 \overset{R}{\hookrightarrow} E$. Do Teorema 1.4.19 segue que $c_0 \overset{R}{\hookrightarrow} E^*$. O Teorema 3.1.8 e o Exemplo 3.1.7 implicam que E^* não tem a propriedade de Schur positiva. $\square$

Corolário 3.2.7. *Seja E um reticulado de Banach reflexivo de dimensão infinita. Então E não tem a propriedade de Schur positiva.*

Demonstração. Suponha que E tenha a propriedade de Schur positiva. Pelo Corolário 3.2.5 temos $\ell_1 \overset{R}{\hookrightarrow} E$. O fato de ℓ_1 não ser reflexivo mostra que isso está em contradição com a Proposição 1.1.11. Segue que E não tem a propriedade de Schur positiva. $\square$

Segue desse último corolário que, para $1 < p < \infty$, os espaços $L_p(\mu)$ não têm a propriedade de Schur positiva. Mais ainda, os espaços $L_p(\mu)$ são KB-espaços pelo Teorema 1.4.20. Isso mostra a existência de KB-espaços que não têm a propriedade de Schur positiva. Por outro lado, reticulados com a propriedade de Schur positiva são todos KB-espaços:

Corolário 3.2.8. *Se E é um reticulado de Banach com a propriedade de Schur positiva, então E é um KB-espaço.*

Demonstração. Suponha que E não seja um KB-espaço. Neste caso, pelo Teorema 1.4.19 sabemos que $c_0 \overset{R}{\hookrightarrow} E$. Combinando novamente o Exemplo 3.1.7 com o Teorema 3.1.8 segue que E não tem a propriedade de Schur positiva, o que contradiz a hipótese. □

Introduziremos a seguir duas classes de reticulados de Banach muito importantes na teoria. Os $AL-$ espaços foram introduzidos por G. Birkhoff em [9], e os $AM-$espaços foram estudados por Kakutani em [24]. Na verdade, as raízes dos AM-espaços remontam aos trabalho de Banach (veja [6]).

Definição 3.2.9. Diz-se que um reticulado de Banach E é:

1) Um *L_p-espaço abstrato*, para algum $1 \leq p < \infty$, sempre que sua norma for p-ortogonalmente aditiva no sentido de que

$$\|x + y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p$$

para todos $x, y \in E^+$ com $x \wedge y = 0$.

No caso $p = 1$ diz-se que E é um *AL-espaço*.

2) Um *M-espaço abstrato* (ou um *AM-espaço*) sempre que sua norma for uma M-norma, no sentido de que, se $x \wedge y = 0$ em E, então

$$\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Teorema 3.2.10. *Um reticulado de Banach E é um AL-espaço (respectivamente um AM-espaço) se, e somente se, E^* é um AM-espaço (respectivamente um AL-espaço).*

Demonstração. Veja [3, Theorem 4.23] □

Teorema 3.2.11. *Um reticulado de Banach E é um L_p-espaço abstrato para algum $1 \leq p < \infty$ se, e somente se, E é Riesz isométrico a algum espaço concreto $L_p(\mu)$.*

Demonstração. Veja [3, Teorema 4.27] □

Exemplo 3.2.12. Vejamos que todo AL-espaço tem a propriedade de Schur positiva. Pelo Teorema 3.2.11, se E é um AL-espaço então E é Riesz isométrico a algum $L_1(\mu)$, para alguma medida μ. Como $L_1(\mu)$ tem a propriedade de Schur positiva, pelo Teorema 3.1.8 segue que E tem a propriedade de Schur positiva.

Exemplo 3.2.13. Vejamos que nenhum AM-espaço tem a propriedade de Schur positiva. Pelo Teorema 3.2.10, todo AM-espaço é dual de um AL-espaço, e pelo Teorema 3.2.8 o dual de um espaço com a propriedade de Schur positiva não tem essa propriedade. Logo todo AM-espaço não tem a propriedade de Schur positiva.

O resultado a seguir mostra que a propriedade de Schur é bem rara no contexto dos espaços de Banach.

Teorema 3.2.14. *Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita. Então nenhum dos duais de ordem superior $E^{(n)}$, $n > 1$, tem a propriedade de Schur.*

Demonstração. Veja [32, Corollary 11]. □

Veremos a seguir que a característica da propriedade de Schur em espaços de Banach descrita no teorema anterior não se reproduz para a propriedade positiva de Schur em reticulados de Banach.

Exemplo 3.2.15. Pelo Teorema 3.2.14, espaços de Banach duais de ordem $n > 1$ de dimensão infinita nunca têm a propriedade de Schur. Vejamos que, para a propriedade de Schur positiva, a situação é bem diferente. Pelo Teorema 3.2.10, os duais de ordem par de todo AL-espaço são AL-espaços. Em outras palavras, se E é um AL-espaço, então $E^{(2n)}$ é um $AL-$espaço para todo $n \geq 1$. Pelo Exemplo 3.2.12, E^{2n} tem a propriedade de Schur positiva para todo AL-espaço E e todo $n > 1$.

Concretamente, $(\ell_\infty)^* = (\ell_1)^{**}$ tem a propriedade de Schur positiva mas não tem a propriedade de Schur.

3.3 $p-$Somas diretas

Estudaremos nesta seção o comportamento da propriedade de Schur positiva em relação à formação de somas diretas infinitas de reticulados de Banach. Lembramos que a propriedade de Schur é estável em relação à formação de somas diretas ℓ_1, isto é, se $(E_j)_j$ é uma sequência de espaços de Banach, então $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$ tem a propriedade de Schur se, e somente se, cada E_j tem a propriedade de Schur. Provaremos que isso também vale no caso da propriedade de Schur positiva em reticulados de Banach. Estudaremos também o caso mais geral de somas não enumeráveis (veja [27, Teorema 3.1.5]).

Precisamos primeiro provar que a soma direta ℓ_1 de uma sequência de reticulados de Banach é também um reticulado de Banach.

Teorema 3.3.1. *Seja $(E_j)_j$ uma sequência de reticulados de Banach. Então a soma direta*

$$\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$$

é um reticulado de Banach com a ordem coordenada a coordenada, isto é, $(x_j)_j \leq (y_j)_j$ em $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$ se, e somente se, $x_j \leq y_j$ em E_j para todo $j \in \mathbb{N}$.

Demonstração. É fácil ver que a relação definida no enunciado é uma ordem parcial em $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$.

Vejamos agora que o supremo e o ínfimo de dois elementos existem em $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$. Para isso sejam $x, y \in \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$ com $x = (x_i)_i$ e $y = (y_i)_i$, isto é, $x_i, y_i \in E_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Como cada E_i é reticulado de Banach, $z_i := \sup\{x_i, y_i\}$ e $v_i := \inf\{x_i, y_i\}$ existem em E_i. Definimos $z = (z_i)_i$ e $v = (v_i)_i$. Devemos provar duas coisas: (i) $z, v \in \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$, (ii) $\sup\{x, y\} = z$ e $\inf\{x, y\} = v$.

(i) Note que, pelo Teorema 1.3.8,

$$z_i = x_i \vee y_i = \frac{1}{2}(x_i + y_i + |x_i - y_i|).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|z_i\| &= \frac{1}{2}\big\|x_i + y_i + |x_i - y_i|\big\| \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\|x_i + y_i\| + \big\||x_i - y_i|\big\|\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\|x_i\| + \|y_i\| + \|x_i - y_i\|\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\|x_i\| + \|y_i\| + \|x_i\| + \|y_i\|\right) \\ &= \|x_i\| + \|y_i\|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{j=1}^{\infty}\|z_j\|_{E_j} \leq \sum_{j=1}^{\infty}\left(\|x_j\|_{E_j} + \|y_j\|_{E_j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\|x_j\|_{E_j} + \sum_{j=1}^{\infty}\|y_j\|_{E_j} < \infty$$

pois $x, y \in \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$. Isso prova que $z \in \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$.

(ii) Vejamos que z é o supremo do conjunto $\{x, y\}$. Por um lado, como $z_i = x_i \vee y_i$, temos $z_i \geq x_i$ e $z_i \geq y_i$ para todo i, logo $z \geq x$ e $z \geq y$. Isso mostra que z é cota superior de $\{x, y\}$. Por outro lado, seja $\omega = (\omega_i)_i \in \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$ uma cota superior do conjunto $\{x, y\}$. Então $x \leq \omega$ e $y \leq \omega$. Daí,

$$x_i \leq \omega_i \quad \text{e} \quad y_i \leq \omega_i \text{ para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Como $z_i = \sup\{x_i, y_i\}$, temos $z_i \leq \omega_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo, $z \leq \omega$, provando que z é a menor cota superior, ou seja, $\sup\{x, y\} = z$.

De forma totalmente análoga prova-se que v está em $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$ usando o Teorema 1.3.8, e que v é o ínfimo do conjunto $\{x, y\}$.

Está provado que $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$ é um espaço de Riesz. Falta provar que a norma é reticulada. Para isso sejam $x, y \in \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$, $x = (x_i)_i$ e $y = (y_i)_i$, com $|x| \leq |y|$. Segue direto da definição da ordem que $|x| = (|x_i|)_i$ e $|y| = (|y_i|)_i$. Daí, $|x_i| \leq |y_i|$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Como a norma de cada E_i é reticulado, temos $\|x_i\|_{E_i} \leq \|y_i\|_{E_i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\|(x_i)_i\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|_{E_i} \leq \sum_{i=1}^{\infty}\|y_i\|_{E_i} = \|(y_i)_i\|_1.$$

Está completa a demonstração de que $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$ é um reticulado de Banach. □

Proposição 3.3.2. *Seja $(E_j)_j$ uma sequência de reticulados de Banach. Então, para todo $k \in \mathbb{N}$,*

$$E_k \overset{R}{\hookrightarrow} \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1.$$

Demonstração. Pelo Teorema 1.1.16 sabemos que cada E_k é isomorfo isometricamente a um subespaço fechado de $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$ por meio do operador

$$T\colon E_k \longrightarrow \left(\bigoplus\nolimits_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1 \ , \ T(x) = (z_j)_j \text{ para todo } x \in E_k,$$

onde $z_j = 0$ para todo $j \neq k$ e $z_k = x$. Isso quer dizer que T é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem. Provemos que T é homomorfismo de Riesz. Para isso sejam $x, y \in E_k$. Temos

$$T(x \vee y) = (0, \ldots, 0, x \vee y, 0, \ldots).$$

Como $0 \vee 0 = 0$ e $x \vee y = (x_i \vee y_i)_i$,

$$\begin{aligned} T(x \vee y) &= (0, \ldots, 0, x \vee y, 0, \ldots) \\ &= (0 \vee 0, \ldots, 0 \vee 0, x \vee y, 0 \vee 0, \ldots) \\ &= (0, \ldots, 0, x, 0, \ldots) \vee (0, \ldots, 0, y, 0, \ldots) \\ &= T(x) \vee T(y). \end{aligned}$$

Assim, T é isomorfismo de Riesz e

$$E_k \overset{R}{\hookrightarrow} \left(\bigoplus\nolimits_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1 \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

□

Corolário 3.3.3. *Seja $(E_j)_j$ uma sequência de reticulados de Banach. Se $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$ tem a propriedade de Schur positiva, então E_j tem a propriedade de Schur positiva para todo $j \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Pela proposição anterior temos

$$E_k \overset{R}{\hookrightarrow} \left(\bigoplus\nolimits_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1 \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Logo, do Teorema 3.1.8 segue que E_j tem a propriedade de Schur positiva para todo $j \in \mathbb{N}$. □

Como cada elemento de $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$ é uma sequência, uma sequência arbitrária em $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$ será denotada por $(x^n)_n \subset \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$ em que $x^n = (x_j^n)_j$ com $x_j^n \in E_j$ para todos $j, n \in \mathbb{N}$.

Provaremos a seguir a recíproca do corolário anterior.

Teorema 3.3.4. *Seja $(E_j)_j$ uma sequência de reticulados de Banach. Se E_j tem a propriedade de Schur positiva para todo $j \in \mathbb{N}$, então $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$ tem a propriedade de Schur positiva.*

Demonstração. Seja $(E_j)_j$ uma sequência de reticulados de Banach com a propriedade de Schur positiva. Suponha por absurdo que exista uma sequência positiva $(a^n)_n$ em $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$ tal que

$$a^n \xrightarrow{\omega} 0 \text{ em } \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1 \quad \text{e } \|a^n\|_1 \not\longrightarrow 0.$$

Como $\|a^n\| \not\longrightarrow 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $j_n \in \mathbb{N}$, com $j_n \geq n$ satisfazendo $\|a^n\| \geq 5\epsilon$. Então, para $n = 1$ existe $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|a^{j_1}\| \geq 5\epsilon$. Para $n = j_1 + 1$, existe $j_2 \in \mathbb{N}$ tal que $j_2 > j_1$ e $\|a^{j_2}\| \geq 5\epsilon$. E assim indutivamente, construímos uma sequência crescente de índices $(j_n)_n$ tal que a subsequência $(x^n = a^{j_n})_n$ satisfaz $\|a^{j_n}\| \geq 5\epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $a^n \xrightarrow{\omega} 0$ em $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$, $x^n \xrightarrow{\omega} 0$ em $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$. Pelo Teorema 1.1.15, o dual de $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$ é isomorfo isometricamente a$\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j^*\right)_\infty$ por meio da correspondência (1.1). Então, cada funcional $\varphi \in \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1^*$ é da forma $\varphi = (\varphi_k)_k$ com $\varphi_k \in E_k^*$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Pela relação de dualidade (1.1), dados $\varphi \in \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1^*$ e $y = (y_k)_k \in \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$,

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(y_k).$$

Escrevemos $x^n = (x_j^n)_j$ para cada n. Seja k fixo. Provemos que $x_k^n \xrightarrow{\omega} 0$ em E_k. Para isso seja $\psi \in E_k^*$. Defina

$$\widetilde{\psi} = (0, \ldots, 0, \underbrace{\psi}_{k}, 0, \ldots).$$

Vejamos que $\widetilde{\psi}$ é um elemento de $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j^*\right)_\infty$. É claro que $\widetilde{\psi} \in \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j^*$. E também

$$\|\widetilde{\psi}\|_\infty = \sup\{\|0\|_{E_1^*}, \ldots, \|0\|_{E_{k-1}^*}, \|\psi\|_{E_k^*}, \|0\|_{E_{k+1}^*}, \ldots\} = \|\psi\|_{E_k^*} < \infty.$$

Podemos então enxergar $\widetilde{\psi}$ como um elemento de $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1^*$ e, neste caso,

$$\widetilde{\psi}((y_j)_j) = 0 + \cdots + 0 + \psi(y_k) + 0 + \cdots = \psi(y_k) \tag{3.1}$$

para toda sequência $(y_j)_j \in \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$. Como $\widetilde{\psi}$ é um funcional linear contínuo e $x^n \xrightarrow{\omega} 0$ em $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$, temos $\widetilde{\psi}(x^n) \longrightarrow 0$, isto é,

$$\psi(x_k^n) \overset{(3.1)}{=} \widetilde{\psi}\left((x_j^n)_j\right) = \widetilde{\psi}(x^n) \longrightarrow 0.$$

Provamos que $\psi(x_k^n) \longrightarrow 0$ para todo $\psi \in E_k^*$, ou seja, $(x_n^k)_n$ converge fracamente a 0 em E_k para todo k.

A sequência $(a^n)_n$ nasceu positiva, logo sua subsequência $(x^n)_n$ também é positiva. Portanto, a sequência $(x_n^k)_n$ é positiva em E_k. Como E_k tem a propriedade de Schur positiva, segue que $\|x_k^n\|_{E_k} \longrightarrow 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como $x^1 \in \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k^1\|_{E_k} < \infty,$$

e portanto existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=N_1}^{\infty}\|x_k^1\|_{E_k} \leq \epsilon.$$

Para cada $k \in \{1,\ldots,N_1\}$, como $\|x_k^n\|_{E_k} \longrightarrow 0$ existe $n_1^k \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_k^n\|_{E_k} < \frac{\epsilon}{N_1}$ para todo $n \geq n_1^k$. Tomando $n_1 = \max\left\{n_1^k : 1 \leq k \leq N_1\right\} \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{k=1}^{N_1}\|x_k^{n_1}\|_{E_k} \leq \sum_{k=1}^{N_1}\frac{\epsilon}{N_1} = \epsilon.$$

Como $x^{n_1} \in \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k^{n_1}\|_{E_k} < \infty,$$

e portanto existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=N_2}^{\infty}\|x_k^{n_1}\|_{E_k} \leq \epsilon.$$

É claro que podemos tomar $N_2 > N_1$. Para cada $k \in \{1,\ldots,N_2\}$, usando a convergência $\|x_k^n\|_{E_k} \longrightarrow 0$ existe $n_2^k \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_k^n\|_{E_k} < \frac{\epsilon}{N_2}$ para todo $n \geq n_2^k$. Tomando $n_2 = \max\left\{N_1+1, n_2^k : 1 \leq k \leq N_2\right\} \in \mathbb{N}$, temos $N_2 > N_1$ e

$$\sum_{k=1}^{N_2}\|x_k^{n_2}\|_{E_k} \leq \sum_{k=1}^{N_2}\frac{\epsilon}{N_2} = \epsilon.$$

O processo indutivo agora está claro. Construímos assim duas sequência crescentes $(N_i)_i$ e $(n_i)_i$ de números naturais tais que, para todo $i \in \mathbb{N}$:

I) $\displaystyle\sum_{k=1}^{N_i}\|x_k^{n_i}\|_{E_k} \leq \epsilon,$

II) $\displaystyle\sum_{k=N_{i+1}}^{\infty}\|x_k^{n_i}\|_{E_k} \leq \epsilon.$

Então, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
5\epsilon \leq \|x^{n_i}\|_1 &= \sum_{k=1}^{\infty}\|x_k^{n_i}\|_{E_k} \\
&= \sum_{k=1}^{N_i}\|x_k^{n_i}\|_{E_k} + \sum_{k=N_i+1}^{N_{i+1}}\|x_k^{n_i}\|_{E_k} + \sum_{k=N_{i+1}+1}^{\infty}\|x_k^{n_i}\|_{E_k} \\
&\leq 2\epsilon + \sum_{k=N_i+1}^{N_{i+1}}\|x_k^{n_i}\|_{E_k}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\sum_{k=N_i+1}^{N_{i+1}} \|x_k^{n_i}\|_{E_k} \geq 3\epsilon > 0. \tag{3.2}$$

Para todo $i \in \mathbb{N}$, da última desigualdade temos $\|x_k^{n_i}\| \neq 0$ para algum $N_i + 1 \leq k \leq N_{i+1}$. Para cada k tal que $\|x_k^{n_i}\| \neq 0$, por Hahn-Banach podemos tomar um funcional $\varphi_k \in E_k^*$ tal que $\varphi_k(x_k^{n_i}) = \|x_k^{n_i}\|_{E_k}$ e $\|\varphi_k\| = 1$. Para k tal que $\|x_k^{n_i}\| = 0$ tomamos $\varphi_k = 0 \in E_k^*$. Consideremos a sequência

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots).$$

Veja que cada $\varphi \in E_k^*$ e

$$\varphi_k(x_k^{n_i}) = \begin{cases} \|x_k^{n_i}\|_{E_k} & \text{se} \quad \|x_k^{n_i}\|_{E_k} \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se} \quad \|x_k^{n_i}\|_{E_k} = 0. \end{cases}$$

Note que, nos dois casos acima, $\varphi_k(x_k^{n_i}) = \|x_k^{n_i}\|_{E_k}$. E como, para cada k, $\|\varphi_k\| = 0$ ou $\|\varphi_k\| = 1$; e $\|\varphi_k\| = 1$ para pelo menos um k, temos

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|\varphi_k\|_{E_k} = 1.$$

Isso mostra que $\varphi \in \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j^*\right)_\infty$, e portanto φ pode ser visto como um funcional linear contínuo em $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1^*$, isto é, $\varphi \in \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1^*$. Fazendo essa identificação, para cada $i \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
|\varphi(x^{n_i})| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x_k^{n_i}) \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{N_i} \varphi_k(x_k^{n_i}) + \sum_{k=N_i+1}^{N_{i+1}} \varphi_k(x_k^{n_i}) + \sum_{k=N_{i+1}+1}^{\infty} \varphi_k(x_k^{n_i}) \right| \\
&= \left| \sum_{k=N_i+1}^{N_{i+1}} \varphi_k(x_k^{n_i}) + \sum_{k=1}^{N_i} \varphi_k(x_k^{n_i}) + \sum_{k=N_{i+1}+1}^{\infty} \varphi_k(x_k^{n_i}) \right| \\
&= \left| \sum_{k=N_i+1}^{N_{i+1}} \varphi_k(x_k^{n_i}) - \left(- \sum_{k=1}^{N_i} \varphi_k(x_k^{n_i}) \right) - \left(- \sum_{k=N_{i+1}+1}^{\infty} \varphi_k(x_k^{n_i}) \right) \right| \\
&\geq \sum_{k=N_i+1}^{N_{i+1}} \varphi_k(x_k^{n_i}) - \left| \sum_{k=1}^{N_i} \varphi_k(x_k^{n_i}) \right| - \left| \sum_{k=N_{i+1}+1}^{\infty} \varphi_k(x_k^{n_i}) \right| \\
&= \sum_{k=N_i+1}^{N_{i+1}} \|x_k^{n_i}\|_{E_k} - \left| \sum_{k=1}^{N_i} \varphi_k(x_k^{n_i}) \right| - \left| \sum_{k=N_{i+1}+1}^{\infty} \varphi_k(x_k^{n_i}) \right|.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Como cada $\|\varphi_k\| \leq 1$, de I) segue que

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{N_i} \varphi_k(x_k^{n_i})\right| &\leq \sum_{k=1}^{N_i} |\varphi_k(x_k^{n_i})| \\
&\leq \sum_{k=1}^{N_i} \|\varphi_k\| \cdot \|x_k^{n_i}\|_{E_k} \\
&= \sum_{k=1}^{N_i} \|x_k^{n_i}\|_{E_k} \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Da mesma forma, aplicando II) podemos ver que

$$\left|\sum_{k=N_{i+1}+1}^{\infty} \varphi_k(x_k^{n_i})\right| \leq \epsilon.$$

Aplicando essas duas estimativas acima,

$$\begin{aligned}
|\varphi(x^{n_i})| &\overset{(3.3)}{\geq} \sum_{k=N_i+1}^{N_{i+1}} \|x_k^{n_i}\|_{E_k} - \left|\sum_{k=1}^{N_i} \varphi_k(x_k^{n_i})\right| - \left|\sum_{k=N_{i+1}+1}^{\infty} \varphi_k(x_k^{n_i})\right|. \\
&\geq \sum_{k=N_i+1}^{N_{i+1}} \|x_k^{n_i}\|_{E_k} - \epsilon - \epsilon \\
&\overset{(3.2)}{\geq} 3\epsilon - \epsilon - \epsilon = \epsilon > 0
\end{aligned}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Portanto $\varphi(x^{n_i}) \not\longrightarrow 0$. Isso quer dizer que a sequência $(x^{n_i})_i$ não é fracamente nula em $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$. Mas, $(x^{n_i})_i$ é subsequência de $(x^n)_n$ que, por sua vez, é subsequência da sequência fracamente nula $(a^n)_n$, portanto, $x^{n_i} \xrightarrow{\omega} 0$ em $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$. Essa contradição mostra que $\|a^n\| \not\longrightarrow 0$, o que comprova que $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$ tem a propriedade de Schur positiva. $\square$

Corolário 3.3.5. *Seja $(E_j)_j$ uma sequência de reticulados de Banach. O reticulado de Banach $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$ tem a propriedade de Schur positiva se, e somente se, E_j tem a propriedade de Schur positiva para todo $j \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Basta combinar o teorema anterior com o Corolário 3.3.3. $\square$

O espaço do exemplo a seguir foi introduzido por Stegall como o primeiro exemplo de um espaço de Banach com a propriedade de Dunford-Pettis cujo dual não tem a propriedade de Dunford-Pettis.

Exemplo 3.3.6. O espaço de Stegall é definido por $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} \ell_2^n\right)_1$ onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, ℓ_2^n representa o espaço $\mathbb{R}^n$ com a norma euclidiana. Como $\mathbb{R}^n$ tem dimensão finita, $\mathbb{R}^n$ tem a propriedade de Schur positiva. Logo o espaço de Stegall tem a propriedade de Schur positiva pelo Corolário 3.3.5,.

Observação 3.3.7. Terminamos esta seção descrevendo mais uma aplicação das somas diretas para resolver um problema interessante relativo à propriedade de Schur positiva. Pelo Teorema 3.2.14 sabemos que o bidual E^{**} de qualquer espaço Banach E de dimensão infinita não tem a propriedade de Schur. Para a propriedade de Schur positiva, vimos que se E é um AL-espaço, então E e E^{**} têm a propriedade de Schur positiva. O que era desconhecido até pouco tempo é se existe um reticulado de Banach E com a propriedade de Schur positiva tal que seu bidual E^{**} não tem essa propriedade. Isso foi resolvido em [28] (veja também [12]): Tomando $E = \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} \ell_1^n\right)_1$, é verdade que E tem a propriedade de Schur positiva mas seu bidual E^{**} não tem essa propriedade.

3.4 Espaços $\ell_p(\Gamma)$

Trabalharemos nesta seção com espaços que são mais gerais que as somas diretas tratadas na seção anterior.

Definição 3.4.1. Seja Γ um conjunto não vazio e $1 \leq p < \infty$. O espaço $\ell_p(\Gamma)$ é definido como:

$$\ell_p(\Gamma) := \left\{ \begin{array}{ll} (x_i)_{i\in\Gamma} : x_i \in \mathbb{R} \text{ para todo } i \in \Gamma, & x_i \neq 0 \text{ apenas para uma quantidade} \\ & \text{enumerável de índices e } \displaystyle\sum_{i\in I} |x_i|^p < \infty \end{array} \right\}.$$

Veja que, na definição acima, não importa a ordem em que a soma $\sum\limits_{i\in I} |x_i|^p$ é tomada, pois uma série de números reais positivos é convergente se, e somente se, a série é incondicionalmente convergente.

O conjunto $\ell_p(\Gamma)$, munido com as operações algébricas coordenada a coordenada e com a norma

$$\|(x_i)_{i\in\Gamma}\|_p := \left(\sum_{i\in\Gamma} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

é um espaço de Banach (veja [18, p. 7]).

Usando o mesmo argumento do produto cartesiano generalizado (veja Exemplo 1.3.5), verifica-se facilmente que $\ell_p(\Gamma)$ é um espaço de Riesz. No próximo resultado provaremos algo mais geral que isso para espaços mais gerais que esses.

Proposição 3.4.2. *Sejam Γ um conjunto qualquer, $1 \leq p < \infty$ e E um espaço de Banach. Então:*

(a) *O conjunto*

$$\ell_p(\Gamma, E) := \{(x_i)_{i\in\Gamma} : x_i \in E \text{ para todo } i \in \Gamma \text{ e } (\|x_i\|_E)_{i\in\Gamma} \in \ell_p(\Gamma)\}$$

é um espaço de Banach com as opeerações algébricas usuais e com a norma

$$\|(x_i)_i\|_p = \left(\sum_{i\in\Gamma} \|x_i\|_E^p\right)^{1/p}.$$

(b) *Se E é reticulado de Banach, então $\ell_p(\Gamma, E)$ também é um reticulado de Banach com a ordem*
$$(x_i)_{i\in\Gamma} \geq 0 \Leftrightarrow x_i \geq 0 \text{ para todo } i \in \Gamma.$$

Demonstração. (a) Vejamos que $\ell_p(\Gamma, E)$ é espaço vetorial. Para isso, dados $x = (y_i)_{i\in\Gamma}, y = (x_i)_{i\in\Gamma} \in \ell_p(\Gamma, E)$, provemos que

$$(x + y) = (x_i + y_i)_{i\in\Gamma} \in \ell_p(\Gamma, E).$$

Como $x, y \in \ell_p(\Gamma, E)$, por definição $x_i \neq 0$ apenas para uma quantidade enumerável de índices e $y_i \neq 0$ apenas para uma quantidade enumerável de índices. Existem então conjuntos enumeráveis $J_x, J_y \subset \Gamma$ tais que $x_i = 0$ para todo $i \notin J_x$ e $y_i = 0$ para todo $i \notin J_y$. Portanto $J := J_x \cup J_y$ também é um subconjunto enumerável de Γ. E se $i \notin J$, então $x_i = y_i = 0$. Temos então $x_i + y_i = 0$ para todo $i \notin J$. Também temos $(\|x_i\|_E)_{i\in\Gamma} \in \ell_p$ e $(\|y_i\|_E)_{i\in\Gamma} \in \ell_p$, isto é,

$$\sum_{i\in J_x} \|x_i\|_E^p = \sum_{i\in J} \|x_i\|_E^p = \sum_{i\in\Gamma} \|x_i\|_E^p < \infty \quad \text{e} \quad \sum_{i\in J_y} \|y_i\|_E^p = \sum_{i\in J} \|y_i\|_E^p = \sum_{i\in\Gamma} \|y_i\|_E^p < \infty.$$

Pela desigualdade triangular, para todo $i \in \Gamma$,

$$\|x_i + y_i\|_E \leq \|x_i\|_E + \|y_i\|_E \leq 2\max\{\|x_i\|_E, \|y_i\|_E\}.$$

Daí,
$$\|x_i + y_i\|_E^p \leq (2\max\{\|x_i\|_E, \|y_i\|_E\})^p \leq 2^p(\|x_i\|_E^p + \|y_i\|_E^p)$$
para todo $i \in \Gamma$. Fazendo somatória,

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\Gamma} \|x_i + y_i\|_E^p &= \sum_{i\in J} \|x_i + y_i\|_E^p \\
&\leq 2^p \cdot \sum_{i\in J} \|x_i\|_E^p + 2^p \cdot \sum_{i\in J} \|y_i\|_E^p \\
&= 2^p \sum_{i\in\Gamma} \|x_i\|_E^p + 2^p \sum_{i\in\Gamma} \|y_i\|_E^p \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Isso prova que $(x+y) = (x_i+y_i)_{i\in\Gamma} \in \ell_p(\Gamma, E)$. Os demais axiomas de espaço vetorial são facilmente verificados. Para os axiomas de norma verificaremos apenas a desigualdade triangular. Os outros axiomas seguem imediatamente das propriedades da norma de E. Também a desigualdade triangular é trivial no caso $p = 1$, por isso faremos o caso $p > 1$. Seguimos com $x = (x_i)_{i\in\Gamma}, y = (y_i)_{i\in\Gamma} \in \ell_p(\Gamma, E)$ e J como antes. Para cada $i \in \Gamma$, tomando q como sendo o conjugado de p,

$$\begin{aligned}
\|x_i + y_i\|_E^p &= \|x_i + y_i\|_E \cdot \|x_i + y_i\|_E^{p-1} \\
&\leq \|x_i\|_E \cdot \|x_i + y_i\|_E^{p-1} + \|y_i\|_E \cdot \|x_i + y_i\|_E^{p-1} \\
&= \|x_i\|_E \cdot \|x_i + y_i\|_E^{p/q} + \|y_i\|_E \cdot \|x_i + y_i\|_E^{p/q}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Já sabemos que $(x + y) = (x_i + y_i)_{i\in\Gamma} \in \ell_p(\Gamma, E)$, logo

$$\sum_{i\in\Gamma} (\|x_i + y_i\|^{p/q})^q = \sum_{i\in\Gamma} \|x_i + y_i\|^p < \infty,$$

isto é, $(\|x_i+y_i\|^{p/q})_{i\in\Gamma} \in \ell_q(\Gamma,E)$. Aplicando a Desigualdade de Hölder (Teorema 1.1.12) para $(\|x_i\|_E)_{i\in J}, (\|y_i\|_E)_{i\in J} \in \ell_p(\Gamma,E)$ e $(\|x_i+y_i\|_E^p)_{i\in J} \in \ell_q(\Gamma,E)$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\Gamma}\|x_i+y_i\|_E^p &\overset{(3.4)}{\leq} \sum_{i\in\Gamma}\|x_i\|_E\cdot\|x_i+y_i\|_E^{p/q}+\sum_{i\in\Gamma}\|y_i\|_E\cdot\|x_i+y_i\|_E^{p/q}\\
&\leq \left(\sum_{i\in J}\|x_i\|_E^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{i\in J}\|x_i+y_i\|_E^{(p-1)q}\right)^{1/q}+\\
&\quad +\left(\sum_{i\in J}\|y_i\|_E^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{i\in J}\|x_i+y_i\|_E^{(p-1)q}\right)^{1/q}\\
&= \left(\sum_{i\in J}\|x_i\|_E^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{i\in J}\|x_i+y_i\|_E^{p}\right)^{1/q}+\\
&\quad +\left(\sum_{i\in J}\|y_i\|_E^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{i\in J}\|x_i+y_i\|_E^{p}\right)^{1/q}\\
&= \left(\sum_{i\in J}\|x_i+y_i\|_E^p\right)^{1/q}\cdot\left(\left(\sum_{i\in J}\|x_i\|_E^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i\in J}\|y_i\|_E^p\right)^{1/p}\right).
\end{aligned}$$

Daí,

$$\left(\sum_{i\in\Gamma}\|x_i+y_i\|_E^p\right)^{1-1/q} \leq \left(\sum_{i\in J}\|x_i\|_E^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i\in J}\|y_i\|_E^p\right)^{1/p},$$

ou seja,

$$\left(\sum_{i\in\Gamma}\|x_i+y_i\|_E^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i\in J}\|x_i\|_E^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i\in J}\|y_i\|_E^p\right)^{1/p}.$$

Está provado que $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p+\|y\|_p$.

Provemos agora a completude. Seja $(x_n)_n$ uma sequência de Cauchy em $\ell_p(\Gamma,E)$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, escrevemos $x_n=(x_i^n)_{i\in\Gamma}$, onde $x_i^n\in E$ para todos $i\in\Gamma$ e $n\in\mathbb{N}$. Dado $\epsilon>0$, existe $N_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}
\epsilon^p &\geq \|x_n-x_m\|_p^p\\
&= \|(x_i^n-x_i^m)_{i\in\Gamma}\|_p^p\\
&= \sum_{i\in\Gamma}\|x_i^n+x_i^m\|_E^p \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

para todos $n,m\geq N_0$. Como cada $x_n\in\ell_p(\Gamma,E)$, $x_i^n\neq 0$ apenas em um conjunto enumerável de índices $J_n\subset\Gamma$. Então $J:=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$ também é um subconjunto enumerável de Γ. Segue imediatamente de (3.5) que $\|x_i+x_i\|_E^p\leq\epsilon^p$ para todos $n,m\geq N_0$ e para todo $i\in J$. Seja $i\in\Gamma$. Se $i\in(\Gamma-J)$, então $x_i^n=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Neste caso

$x_i^n \longrightarrow 0$. E se $i \in J$, por essa última desigualdade segue que a sequência $(x_i^n)_n$ é uma sequência de Cauchy em E. Como E é espaço de Banach, existe $y_i \in E$ tal que $x_i^n \longrightarrow y_i$ em E. Chamando $y_i = 0$ para $i \notin J$, definimos $y = (y_i)_{i\in\Gamma}$.

Nosso trabalho é provar que $y \in \ell_p(\Gamma, E)$ e que $x_n \longrightarrow y$ em $\ell_p(\Gamma, E)$. Como $(x_n)_n$ é sequência de Cauchy, $(x_n)_n$ é limitada. Logo existe $C > 0$ tal que $\|x_n\|_p^p \leq C^p$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\sum_{i\in\Gamma} \|x_i^n\|_E^p = \sum_{i\in J} \|x_i^n\|_E^p = \|x_n\|_p^p \leq C^p$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Escrevendo $J = \{i_1, i_2, \ldots\}$, temos

$$\sum_{k=1}^{n_0} \|x_{i_k}^n\|_E^p \leq \sum_{i\in J} \|x_i^n\|_E^p \leq C^p,$$

para todos $n, n_0 \in \mathbb{N}$. Fazendo $n \longrightarrow \infty$, da continuidade da norma segue que

$$\sum_{i=1}^{n_0} \|y_i\|_E^p = \sum_{i=1}^{n_0} \|\lim_n x_i^n\|_E^p = \sum_{i=1}^{n_0} \lim_n \|x_i^n\|_E^p = \lim_n \sum_{i=1}^{n_0} \|x_i^n\|_E^p \leq C^p$$

para todo $n_0 \in \mathbb{N}$. E fazendo $n_0 \longrightarrow \infty$ segue que

$$\sum_{i\in J} \|y_i\|_E^p \leq C^p.$$

Mas,

$$\|y\|_p^p = \sum_{i\in\Gamma} \|y_i\|_E^p = \sum_{i\in J} \|y_i\|_E^p \leq C^p < \infty,$$

isto é, $y \in \ell_p(\Gamma, E)$.

Vejamos agora que $x_n \longrightarrow y$ em $\ell_p(\Gamma, E)$. Como $(x_n)_n$ é sequência de Cauchy, para todo $\epsilon > 0$ existe N_0 tal que

$$\sum_{i\in\Gamma} \|x_i^n - x_i^m\|_E^p = \sum_{i\in J} \|x_i^n - x_i^m\|_E^p < \epsilon^p \text{ para todos } n, m \geq N_0.$$

Isso implica que

$$\sum_{k=1}^{m_0} \|x_{i_k}^n - x_{i_k}^m\|_E^p < \epsilon^p \text{ para todos } n, m \geq N_0 \text{ e } m_0 \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $m \longrightarrow \infty$ obtemos

$$\sum_{k=1}^{m_0} \|x_{i_k}^n - y_{i_k}\|_E^p < \epsilon^p \text{ para todos } n \geq N_0 \text{ e } m_0 \in \mathbb{N}.$$

Como isso vale para todo m_0, segue que

$$\sum_{i\in J} \|x_i^n - y_i\|_E^p < \epsilon^p \text{ para todo } n \geq N_0.$$

Isso implica que

$$\sum_{i\in\Gamma}\|x_i^n - y_i\|_E^p = \sum_{i\in J}\|x_i^n - y_i\|_E^p < \epsilon^p \text{ para todo } n \geq N_0,$$

o que prova que $\|x_n - y\|_p < \epsilon$ para todo $n \geq N_0$. Portanto, $x_n \overset{\ell_p(\Gamma,E)}{\longrightarrow} y$. Está provado que $\ell_p(\Gamma, E)$ é espaço de Banach.

(b) Pelo item anterior já sabemos que $\ell_p(\Gamma, E)$ é um espaço de Banach. Devemos provar que é também um espaço de Riesz e que sua norma é reticulada. As propriedades de espaço de Riesz seguem todas facilmente das definições. Para ilustrar, provaremos detalhadamente o item (c) da definição, isto é, a existência do supremo de dois vetores. Antes disso verifiquemos que se $x = (x_i)_{i\in\Gamma} \in \ell_p(\Gamma, E)$, então existe $|x| = x \vee -x$ e pertence a $\ell_p(\Gamma, E)$. Como cada x_i pertence ao reticulado de Banach E, existe $|x_i| \in E$, e portanto podemos definir $y = (|x_i|)_{i\in\Gamma}$. Provaremos que $y = |x| = x \vee -x$. Por um lado, $x_i \leq |x_i|$ e $-x_i \leq |x_i|$ em E para todo i, logo $x \leq y$ e $-x \leq y$. Isso prova que y é cota superior do conjunto $\{x, -x\}$. Por outro lado, seja $w = (w_i)_{i\in\Gamma}$ uma cota superior de $\{x, -x\}$. Então, $x_i \leq w_i$ e $-x_i \leq w_i$ para todo $i \in \Gamma$. Como $|x_i| = x_i \vee -x_i$ em E, temos $|x_i| \leq w_i$ para todo $i \in \Gamma$, e portanto, $y \leq w$. Isso prova que y é a menor cota superior do conjunto $\{x, -x\}$, isto é $y = |x|$. Mantendo a notação do início da demonstração, tome um subconjunto enumerável J_x de Γ tais que $x_i = 0$ para todo $i \notin J_x$. É evidente que

$$\big\||x|\big\|_p^p = \sum_{i\in J_x}\big\||x_i|\big\|_E^p.$$

Uma vez que E é reticulado de Banach sabemos que $\big\||x_i|\big\|_E = \big\|x_i\big\|_E$ para todo i, donde segue que

$$\big\||x|\big\|_p^p = \sum_{i\in J_x}\big\|x_i\big\|_E^p = \|x\|_p^p < \infty.$$

Isso prova que $|x| \in \ell_p(\Gamma, E)$. Sejam agora $x, y \in \ell_p(\Gamma, E)$, digamos $x = (x_i)_{i\in\Gamma}$ e $y = (y_i)_{i\in\Gamma}$. Para cada $i \in \Gamma$, como $x_i, y_i \in E$ e E é um reticulado de Banach, $z_i = \sup\{x_i, y_i\}$ existe em E. Definimos $z = (z_i)_{i\in\Gamma}$. Devemos provar que $\sup\{x, y\} = z \in \ell_p(\Gamma, E)$. Provemos primeiramente que $z \in \ell_p(\Gamma, E)$. Usando uma vez mais que $x, y \in \ell_p(\Gamma, E)$, sabemos que existem subconjuntos enumeráveis J_x e J_y de Γ tais que $x_i \neq 0$ para todo $i \notin J_x$ e $y_i \neq 0$ para todo $i \notin J_y$. Então $J := J_x \bigcup J_y$ é também um subconjunto enumerável de Γ. Pelo Teorema 1.3.8, para todo $i \in J$,

$$\|z_i\|_E^p \quad = \quad \left(\frac{1}{2}\big\|x_i + y_i + |x_i - y_i|\big\|_E\right)^p.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\|z\|_p \quad &= \quad \left(\sum_{i\in J}\left(\frac{1}{2}\big\|x_i + y_i + |x_i - y_i|\big\|_E\right)^p\right)^{1/p} \\ &= \quad \frac{1}{2}\left(\sum_{i\in J}\left(\big\|x_i + y_i + |x_i - y_i|\big\|_E\right)^p\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Como $x + y \in \ell_p(\Gamma, E)$, pelo que provamos anteriormente sabemos que $|x - y| = (|x_i - y_i|)_{i\in\Gamma} \in \ell_p(\Gamma, E)$. Da desigualdade triangular e do Teorema 1.3.8 podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\|z\|_p &= \frac{1}{2}\big\|(x+y) + |x-y|\big\|_p \\
&\leq \frac{1}{2}\Big(\big\|x+y\big\|_p + \big\||x-y|\big\|_p\Big) \\
&\leq \frac{1}{2}\Big(2\big\|x\big\|_p + 2\big\|y\big\|_p\Big) \\
&= \big\|x\big\|_p + \big\|y\big\|_p < \infty.
\end{aligned}$$

Logo, $z \in \ell_p(\Gamma, E)$. Provaremos a seguir que z é o supremo do conjunto $\{x, y\}$. Por um lado, por definição temos $z_i = \sup\{x_i, y_i\}$ para todo i, e disso segue que z é cota superior do conjunto $\{x, y\}$. Por outro lado, seja $\omega = (\omega_i)_{i\in\Gamma} \in \ell_p(\Gamma, E)$ uma cota superior do conjunto $\{x, y\}$. Então $x \leq \omega$ e $y \leq \omega$. Daí,

$$x_i \leq \omega_i \ \text{ e } \ y_i \leq \omega_i \text{ para todo } i \in \Gamma.$$

Usando novamente que $z_i = \sup\{x_i, y_i\}$, temos $z_i \leq \omega_i$ para todo $i \in \Gamma$. Segue que $z \leq \omega$, e portanto z é a menor cota superior do conjunto $\{x, y\}$, isto é, $\sup\{x, y\} = z$. Isso prova que $\ell_p(\Gamma, E)$ é um espaço de Riesz.

Por último devemos provar que a norma de $\ell_p(\Gamma, E)$ é reticulada. Para isso, sejam $x, y \in \ell_p(\Gamma, E)$ tais que $|x| \leq |y|$. Da definição da ordem segue que $|x_i| \leq |y_i|$ para todo $i \in J$. Como E é reticulado de Banach, sua norma é reticulada, logo

$$\|x_i\|_E \leq \|y_i\|_E, \text{ e portanto } \|x_i\|_E^p \leq \|y_i\|_E^p \text{ para todo } i \in \Gamma.$$

Daí,

$$\sum_{i\in J}\|x_i\|_E^p \leq \sum_{i\in J}\|y_i\|_E^p,$$

donde segue que

$$\sum_{i\in\Gamma}\|x_i\|_E^p = \sum_{i\in J}\|x_i\|_E^p \leq \sum_{i\in J}\|y_i\|_E^p = \sum_{i\in\Gamma}\|y_i\|_E^p.$$

Está provado que $\|x\|_p \leq \|y\|_p$, o que completa a demonstração de que $\ell_p(\Gamma, E)$ é um reticulado de Banach. □

No caso $E = \mathbb{R}$ escrevemos $\ell_p(\Gamma) := \ell_p(\Gamma, \mathbb{R})$.

Teorema 3.4.3. *Sejam Γ um conjunto qualquer e $1 \leq p < \infty$. Então:*

(a) *$\ell_p(\Gamma)$ é um reticulado de Banach.*

(b) *$\ell_1(\Gamma)$ tem a propriedade de Schur.*

(c) *$\ell_p(\Gamma)^*$ é isomorfo isometricamente a $\ell_q(\Gamma)$ por meio da identificação canônica.*

Demonstração. (a) Segue do teorema anterior tomando $E = \mathbb{R}$.
(b) Veja [27, Teorema 3.2.2].
(c) Veja [18, p. 45]. □

Corolário 3.4.4. *O espaço $\ell_1(\Gamma)$ tem a propriedade de Schur positiva.*

Demonstração. Pelo teorema anterior sabemos que $\ell_1(\Gamma)$ é um reticulado de Banach com a propriedade de Schur. Então, da Proposição 3.1.4 segue que $\ell_1(\Gamma)$ tem a propriedade de Schur positiva. $\square$

No próximo resultado provaremos uma generalização do corolário acima, que nos fornece uma grande quantidade de novos reticulados de Banach com a propriedade de Schur positiva.

Teorema 3.4.5. *Para todo conjunto Γ e toda medida μ, o reticulado de Banach $\ell_1(\Gamma, L_1(\mu))$ tem a propriedade de Schur positiva.*

Demonstração. Seja $G \in \ell_\infty(\Gamma) = \ell_1(\Gamma)^*$, digamos $G = (a_i)_{i\in\Gamma}$. Vejamos que a correspondência

$$\varphi_G \colon \ell_1(\Gamma, L_1(\mu)) \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ \varphi_G\left((f_i)_{i\in\Gamma}\right) = \sum_{i\in\Gamma} a_i \int f_i d\mu, \tag{3.6}$$

está bem definida e é um funcional linear contínuo. Seja $(f_i)_{i\in\Gamma} \in \ell_1(\Gamma, L_1(\mu))$. Como $G \in \ell_\infty(\Gamma)$, podemos tomar $k \in \mathbb{R}$ tal que $|a_i| \leq k$ para todo $i \in \Gamma$. Mais ainda, os termos da somatória em (3.6) são não nulos apenas para um número enumerável de índices, e portanto podemos tratá-la como uma série. Daí,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i\in\Gamma} a_i \int f_i d\mu\right| &\leq \sum_{i\in\Gamma} \left|a_i \int f_i d\mu\right| \\
&\leq \sum_{i\in\Gamma} k \left|\int f_i d\mu\right| \\
&= k \cdot \sum_{i\in\Gamma} \left|\int f_i d\mu\right|.
\end{aligned}$$

Chamemos de J um subconjunto enumerável de Γ tal que $f_i = 0$ para todo $i \notin J$. Segue que

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i\in\Gamma} a_i \int f_i d\mu\right| &\leq k \cdot \sum_{i\in\Gamma} \left|\int f_i d\mu\right| \\
&= k \cdot \sum_{i\in J} \left|\int f_i d\mu\right| \\
&\leq k \cdot \sum_{i\in J} \int |f_i|\, d\mu.
\end{aligned}$$

Usando novamente que $(f_i)_{i\in\Gamma} \in \ell_1(\Gamma, L_1(\mu))$, temos $\sum\limits_{i\in\Gamma} \|f_i\|_{L_1(\mu)} < \infty$, e daí,

$$\sum_{i\in J} \int |f_i|\, d\mu < \infty = \sum_{i\in J} \|f_i\|_{L_1(\mu)} = \sum_{i\in\Gamma} \|f_i\|_{L_1(\mu)}.$$

Combinando as desigualdades obtidas acima segue que $\left|\sum_{i\in\Gamma} a_i \int f_i d\mu\right| < \infty$, o que prova que a série $\sum_{i\in\Gamma} a_i \int f_i d\mu$ da definição de φ_G é convergente. Segue que φ_G está bem definida. Omitimos a (fácil) demonstração de que φ_G é linear. A continuidade de φ_G segue da seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} |\varphi_G((f_i)_{i\in\Gamma})| &= \left|\sum_{i\in\Gamma} a_i \int f_i d\mu\right| \\ &\leq k \cdot \sum_{i\in J} \int |f_i|\, d\mu \\ &= k \cdot \sum_{i\in J} \|f_i\|_{L_1(\mu)} \\ &= k \cdot \|(f_i)_{i\in\Gamma}\|. \end{aligned}$$

Está provado que $\varphi_G \in (\ell_1(\Gamma, L_1(\mu)))^*$ para todo $G \in \ell_\infty(\Gamma)$.

Seja agora $(F_n)_n$ uma sequência positiva fracamente nula em $\ell_1(\Gamma, L_1(\mu))$, isto é, $(F_n)_n \subset (\ell_1(\Gamma, L_1(\mu)))^+$ e $F_n \xrightarrow{\omega} 0$. Digamos $F_n = (f_i^n)_{i\in\Gamma}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para todo $G = (a_i)_{i\in\Gamma} \in \ell_\infty(\Gamma)$, como $\varphi_G \in (\ell_1(\Gamma, L_1(\mu)))^*$ e $F_n \xrightarrow{\omega} 0$ em $\ell_1(\Gamma, L_1(\mu))$, temos

$$\sum_{i\in\Gamma} a_i \int f_i^n d\mu = \varphi_G(F_n) \longrightarrow 0.$$

Para todo n temos $F_n \geq 0$, e portanto $f_i^n \geq 0$ μ-quase sempre para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $i \in \Gamma$. Disso segue que

$$\sum_{i\in\Gamma} a_i \int f_i^n d\mu = \sum_{i\in\Gamma} a_i \int |f_i^n| d\mu.$$

Seja $\varphi \in \ell_1(\Gamma)^*$. Pelo Teorema 3.4.3(c) existe $G = (a_i)_{i\in\Gamma} \in \ell_\infty(\Gamma)$ tal que

$$\varphi((b_i)_{i\in\Gamma}) = \sum_{i\in\Gamma} a_i b_i \text{ para toda } (b_i)_{i\in\Gamma} \in \ell_1(\Gamma).$$

Temos

$$\begin{aligned} \varphi\left(\left(\|f_i^n\|_{L_1(\mu)}\right)_{i\in\Gamma}\right) &= \sum_{i\in\Gamma} a_i \|f_i^n\|_{L_1(\mu)} \\ &= \sum_{i\in\Gamma} a_i \int |f_i^n| d\mu \\ &= \sum_{i\in\Gamma} a_i \int f_i^n d\mu \\ &= \varphi_G(F_n) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Isso prova que a sequência $((\|f_i^n\|_{L_1(\mu)})_{i\in\Gamma})_n$ converge fracamente a 0 em $\ell_1(\Gamma)$. Pelo Teorema 3.4.3(b) sabemos que $\ell_1(\Gamma)$ tem a propriedade de Schur, consequentemente a sequência $((\|f_i^n\|_{L_1(\mu)})_{i\in\Gamma})_n$ converge a 0 na norma de $\ell_1(\Gamma)$, isto é,

$$\|F_n\|_{\ell_1(\Gamma,L_1(\mu))} = \sum_{i\in\Gamma}\|f_i^n\|_{L_1(\mu)} = \|(\|f_i^n\|_{L_1(\mu)})_{i\in\Gamma}\|_{\ell_1(\Gamma)} \longrightarrow 0.$$

Isso significa que $F_n \longrightarrow 0$ em $\ell_1(\Gamma, L_1(\mu))$, o que completa a demonstração de que esse espaço tem a propriedade de Schur positiva. $\square$

Capítulo 4

Espaços de Operadores Regulares

Espaços de operadores lineares são amplamente estudados na teoria dos espaços de Banach. Neste capítulo estamos interessados na versão reticulada de um resultado clássico da propriedade de Schur, provado por R. Ryan em [36], que establece o seguinte:

Teorema 4.0.1. *Se E e F são espaços de Banach tais que E^* e F têm a propriedade de Schur, então o espaço $\mathcal{L}(E, F)$ de todos os operadores lineares contínuos de E em F também tem a propriedade de Schur.*

Uma demonstração detalhada desse teorema pode ser encontrada em [27, Teorema 3.4.2]. Além de ser fartamente usado na teoria dos espaços de Banach, esse teorema foi generalizado, por exemplo, para espaços localmente convexos (veja [15]).

Em reticulados de Banach, o espaço dos operadores lineares regulares (a definição será apresentada na primeira seção deste capítulo) desempenha o papel que o espaço dos operadores lineares contínuos desempenha na teoria dos espaços de Banach. Assim, a versão esperada do teorema de Ryan para reticulados de Banach é a seguinte:

Teorema 4.0.2. *Se E e F são reticulados de Banach tais que E^* e F têm a propriedade de Schur positiva, então o espaço $\mathcal{L}^r(E, F)$ de todos os operadores lineares regulares de E em F também tem a propriedade de Schur positiva.*

De fato, esse resultado é verdadeiro, como pode se ver em várias referências da área, por exemplo em [38, 41]. Esse resultado, para reticulados, tem sido usado na literatura, por exemplo, em [10] ele é utilizado para se obter versões mais gerais para operadores multilineares e polinômios homogêneos. Apesar de ser citado várias vezes e utilizado outras tantas vezes, não conseguimos encontrar nenhuma demonstração desse resultado na literatura. O objetivo deste capítulo é oferecer uma demonstração detalhada desse resultado para reticulados de Banach.

4.1 Reticulados de operadores lineares

Em espaços de Banach, se E e F são espaços de Banach, então o espaço dos operadores lineares contínuos de E em F também é um espaço de Banach com sua norma natural. Em reticulados de Banach, não é verdade que, se E e F são reticulados de Banach, então o espaço dos operadores lineares contínuos de E em F é também um reticulado de Banach.

Para obter um reticulado formado por operadores, é necessário passar para o subespaço dos operadores regulares, definidos a seguir, veja [31, Exemplo 3.1.8].

Por se tratarem de resultados preparatórios para o principal teorema do capítulo, os resultados dessa seção serão apresentados sem demonstração, apenas com referências.

Definição 4.1.1. Sejam E e F reticulados de Banach. Dizemos que um operador $T \in \mathcal{L}(E,F)$ é :
• *Positivo* se $T(x) \geq 0$ em F para todo $x \geq 0$ em E.
• *Regular* se T é a diferença de dois operadores positivos, isto é, se existem $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E,F)$ positivos tais que $T = T_1 - T_2$.

O conjunto de todos os operadores lineares regulares será denotado por $\mathcal{L}^r(E,F)$. Em $\mathcal{L}^r(E,F)$ consideramos a seguinte relação de ordem:

$$T, U \in \mathcal{L}^r(E,F), T \leq U \Longleftrightarrow U - T \text{ é um operador positivo.}$$

O teorema abaixo garante a continuidade automática dos operadores positivos, e portanto dos operadores regulares.

Teorema 4.1.2. *Se E é um reticulado de Banach e F é um espaço de Riesz normado, então todo operador linear positivo $T\colon E \longrightarrow F$ é contínuo. Mais ainda,*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in B_{E^+}\}.$$

Demonstração. Veja [30, Proposition 1.3.5]. □

Nem sempre a norma usual faz de $\mathcal{L}^r(E,F)$ um reticulado de Banach, veja [31, Exemplo 3.2.3]. Por isso precisamos da norma introduzida a seguir.

Teorema 4.1.3. *Sejam E e F reticulados de Banach. Para todo $T \in \mathcal{L}^r(E,F)$ definimos a norma regular de T por*

$$\|T\|_r = \inf\left\{\|S\| : S \in (\mathcal{L}(E,F))^+,\ |T(x)| \leq S(x) \text{ para todo } x \in E^+\right\}.$$

Então $(\mathcal{L}^r(E,F), \|\cdot\|_r)$ é um espaço de Banach e $\|T\| \leq \|T\|_r$ para todo operador regular $T\colon E \longrightarrow F$. Além disso, se F é Dedekind completo, então $(\mathcal{L}^r(E,F), \|\cdot\|_r)$ é um reticulado de Banach tal que

$$\||T|\| = \|T\|_r$$

para todo operador regular $T\colon E \longrightarrow F$.

Demonstração. Veja [30, Proposition 1.3.6]. □

A partir de agora, e sob as condições do teorema acima, $\mathcal{L}^r(E,F)$ será considerado munido da norma regular.

4.2 Versão reticulada do Teorema de Ryan

Pelo Teorema 4.1.3, se E e F são reticulados de Banach com F Dedekind completo, então $\mathcal{L}^r(E;F)$ é também um reticulado de Banach com a norma regular. Então Faz sentido perguntar quando $\mathcal{L}^r(E;F)$ tem a propriedade de Schur positiva. Conforme anunciado no início do capítulo, provaremos nesta seção que isso ocorre se, e somente se, E^* e F têm a propriedade de Schur positiva.

Começamos com alguns resultados e algumas noções que serão úteis.

Lema 4.2.1. *Sejam E e F espaços de Banach, $0 \neq \psi \in E^*$ e $0 \neq b \in F$. Então os seguintes operadores são isomorfismos sobre suas imagens:*

$$T_b\colon E^* \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)\ ,\ T_b(\varphi)(x) = \varphi(x)b,\ \varphi \in E^*, x \in E,$$

$$U_\psi\colon F \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)\ ,\ U_\psi(y)(x) = \psi(x)y,\ y \in F, x \in E.$$

Em particular, o espaço $\mathcal{L}(E,F)$ contém cópias isomorfas de E^* e de F. E se $\|\psi\| = \|b\| = 1$, então essas cópias são isométricas.

Demonstração. Veja [27, Lema 3.4.1]. □

Nem sempre é verdade que $|T|^* = |T^*|$ para todo operador linear regular T entre reticulados de Banach. Isso motiva a seguinte definição:

Definição 4.2.2. Diz-se que um par ordenado (E,F) de reticulados de Banach tem a *propriedade de módulo invariante* se $|T|^* = |T^*|$ para todo $T \in \mathcal{L}^r(E,F)$.

Teorema 4.2.3. *Um reticulado de Banach σ-Dedekind completo F tem norma ordem contínua se, e somente se, para todo reticulado de Banach E, o par (E,F) tem a propriedade de módulo invariante.*

Demonstração. Veja [39, Theorem 5.9 ou Corollary 5.10.]. □

Teorema 4.2.4. *Seja E um reticulado de Banach. Se E é um KB-espaço, então E tem norma ordem contínua.*

Demonstração. Veja [3, p. 232]. □

Teorema 4.2.5. *Todo reticulado de Banach com norma ordem contínua é Dedekind completo.*

Demonstração. Veja [3, Corollary 4.10]. □

Proposição 4.2.6. *Seja E um reticulado de Banach. Se E tem a propriedade de Schur positiva, então E tem norma ordem contínua e E é Dedekind completo.*

Demonstração. Como E tem a propriedade positiva de Schur, pelo Corolário 3.2.8 sabemos que E é um KB-espaço. Daí, pelo Teorema 4.2.4 segue que E tem norma ordem contínua.E é Dedekind completo pelo Teorema 4.2.5. □

O conceito a seguir foi introduzido em [10].

Definição 4.2.7. Sejam E e F espaços de Riesz. Dizemos que E é *positivamente isomorfo* a um subespaço de F se existe $T\colon E \longrightarrow F$ que é positivo e um isomorfismo topológico de Banach sobre sua imagem.

Proposição 4.2.8. *Sejam E e F reticulados de Banach. Se F tem a propriedade de Schur positiva e E é positivamente isomorfo a um subespaço de F, então E tem a propriedade de Schur positiva.*

Demonstração. Seja $(x_n)_n \in E^+$ tal que $x_n \xrightarrow{\omega} 0$. Como E é positivamente isomorfo a um subespaço de F, existe $T\colon E \longrightarrow F$ isormorfismo topológico de Banach positivo sobre $T(E)$. Como $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $(T(x_n))_n \in F^+$. Por ser um isormorfismo topológico de Banach, T é contínuo, e portanto $T(x_n) \xrightarrow{\omega} 0$ em F pelo Teorema 1.2.11. Por hipótese, F tem a propriedade de Schur positiva, logo $T(x_n) \longrightarrow 0$ em F. Por ser um isormorfismo topológico sobre sua imagem, T tem operator inverso $T^{-1}\colon T(E) \longrightarrow E$ contínuo. Pelo mesmo Teorema 1.2.11 temos

$$x_n = T^{-1}(T(x_n)) \longrightarrow T^{-1}(0) = 0 \text{ em } E.$$

Isso prova que E tem a propriedade de Schur positiva. $\square$

Agora estamos em condições de provar a versão reticulada do Teorema de Ryan.

Teorema 4.2.9. *Sejam E e F reticulados de Banach com F Dedekind completo. O reticulado de Banach $\mathcal{L}^r(E,F)$ tem a propriedade de Schur positiva se, e somente se, E^* e F têm a propriedade de Schur positiva.*

Demonstração. Suponha primeiramente que $\mathcal{L}^r(E,F)$ tenha a propriedade de Schur positiva. Vejamos que E^* e F são positivamente isomorfos a subespaços de $\mathcal{L}^r(E,F)$. Seja $0 \leq b \in F$. Do Lema 4.2.1 sabemos que o operador

$$T_b\colon E^* \longrightarrow \mathcal{L}(E,F) \ , \ T_b(\varphi)(x) = \varphi(x)b,$$

é um isomorfismo sobre sua imagem. Mostremos agora que T_b é positivo. De fato:

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi \in E^* &\Longrightarrow \varphi(x) \geq 0 \text{ para todo } 0 \leq x \in E \\ &\Longrightarrow T_b(\varphi)(x) = \varphi(x)b \geq 0 \text{ para todo } x \geq 0 \text{ pois } b \geq 0 \\ &\Longrightarrow T_b(\varphi) \geq 0. \end{aligned}$$

Seja agora $0 \leq \psi \in E^*$. Do Lema 4.2.1 sabemos que o operador

$$U_\psi\colon F \longrightarrow \mathcal{L}(E,F) \ , \ U_\psi(y)(x) = \psi(x)y,$$

é um isomorfismo sobre sua imagem. Mostremos agora que U_ψ é positivo. De fato:

$$\begin{aligned} 0 \leq y \in F &\Longrightarrow \lambda y \geq 0 \text{ para todo } 0 \leq \lambda \in \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow U_\psi(y)(x) = \psi(x)y \geq 0 \text{ para todo } 0 \leq x \in E \text{ pois } \psi \geq 0 \\ &\Longrightarrow U_\psi(y) \geq 0. \end{aligned}$$

Isso prova que E^* e F são positivamente isomorfos a subespaços de $\mathcal{L}^r(E,F)$. Como $\mathcal{L}^r(E,F)$ tem a propriedade de Schur positiva por hipótese, segue da Proposição 4.2.8 que E^* e F têm a propriedade de Schur positiva.

Reciprocamente, suponhamos que E^* e F tenham a propriedade de Schur positiva. Provaremos que $\mathcal{L}^r(E, F)$ tem a propriedade de Schur positiva aplicando a implicação (d) $\Longrightarrow$ (a) do Teorema 3.2.2. Para isso seja $(U_n)_n \in (\mathcal{L}^r(E, F)^+, \|\cdot\|_r)$ com $\|U_n\|_r = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Queremos provar que $U_n \overset{\omega}{\not\longrightarrow} 0$. Para isso basta provar a existência de uma subsequência $(U_{n_k})_k \subset (u_n)_n$ tal que $U_{n_k} \overset{\omega}{\not\longrightarrow} 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, como $\|U_n\|_r = 1$, temos

$$1 = \|U_n\|_r = \big\||U_n|\big\| = \sup_{x \in B_{E^+}} \big\||U_n|(x)\big\|_F.$$

Para todo n, $U_n \geq 0$, logo $|U_n|(x) = U_n(x)$ para todo $x \in E$. Daí,

$$1 = \|U_n\|_r = \sup_{x \in B_{E^+}} \|U_n(x)\|_F.$$

Logo, existe $x_n \in B_{E^+}$ tal que

$$\|U_n(x_n)\|_F \geq \frac{1}{2} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Considere em F a sequência $(U_n(x_n))_n$. Como $U_n(x_n) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $(U_n(x_n))_n \subset F^+$, e $\|U_n(x_n)\| \geq 1/2$ para todo n. Então $\|U_n(x_n)\| \not\longrightarrow 0$. Como F tem a propriedade de Schur positiva, $U_n(x_n) \overset{\omega}{\not\longrightarrow} 0$ em F. Existe então $\varphi \in F^*$ tal que

$$\varphi(U_n(x_n)) \not\longrightarrow 0 \text{ em } \mathbb{R}.$$

Daí, existem $\epsilon > 0$ e uma subsequência $(U_{n_k}(x_{n_k}))_k \subset U_n(x_n)_n$ que satisfaz

$$\begin{aligned}
\epsilon &\leq |\varphi(U_{n_k}(x_{n_k}))| \\
&\leq \left|U_{n_k}^*(\varphi)(x_{n_k})\right| \\
&\leq \|U_{n_k}^*(\varphi)\|_{E^*} \cdot \|x_{n_k}\|_E \\
&= \|U_{n_k}^*(\varphi)\|_{E^*} \\
&= \|U_{n_k}^*(\varphi^+ - \varphi^-)\|_{E^*} \\
&= \|U_{n_k}^*(\varphi^+) - U_{n_k}^*(\varphi^-)\|_{E^*} \\
&\leq \|U_{n_k}^*(\varphi^+)\|_{E^*} + \|U_{n_k}^*(\varphi^-)\|_{E^*} \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

De $\varphi^+ \leq |\varphi|$ segue que $0 \leq |\varphi| - \varphi^+$. Como, $U_{n_k} \geq 0$, temos

$$(|\varphi| - \varphi^+) \circ (U_{n_k}) \geq 0.$$

Ou seja,

$$U_{n_k}^*(|\varphi| - \varphi^+) \geq 0 \text{ ou ainda } U_{n_k}^*(|\varphi|) \geq U_{n_k}^*(\varphi^+).$$

Evidentemente vale o mesmo para φ^-. Pelo Teorema 1.4.15 sabemos que E^* é um reticulado de Banach, em particular a norma em E^* é reticulada. Segue que

$$\|U_{n_k}^*(\varphi^+)\|_{E^*} \leq \|U_{n_k}^*(|\varphi|)\|_{E^*} \text{ e } \|U_{n_k}^*(\varphi^-)\|_{E^*} \leq \|U_{n_k}^*(|\varphi|)\|_{E^*}.$$

De (4.1) segue que

$$\epsilon \leq \|U_{n_k}^*(\varphi^+)\|_{E^*} + \|U_{n_k}^*(\varphi^-)\|_{E^*} \leq 2\|U_{n_k}^*(|\varphi|)\|_{E^*}.$$

Temos $U_{n_k}^* \geq 0$ pois $U_{n_k} \geq 0$, logo $U_{n_k}^*(|\varphi|) \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Temos então $(U_{n_k}^*(|\varphi|))_k \subset (E^*)^+$ e $\|U_{n_k}^*(|\varphi|)\|_{E^*} \geq \epsilon/2$ para todo k. Como E^* tem a propriedade de Schur positiva, $U_{n_k}^*(|\varphi|) \overset{\omega}{\not\longrightarrow} 0$. Portanto existe $\psi \in E^{**}$ tal que

$$\psi(U_{n_k}^*(|\varphi|)) \not\longrightarrow 0. \tag{4.2}$$

O operador

$$\begin{array}{rcl} T\colon \mathcal{L}^r(E,F) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ U & \longmapsto & T(U) = \psi(U^*(|\varphi|)), \end{array}$$

está bem definido pois o adjunto é único. Vejamos que é linear: para todos $U, V \in \mathcal{L}^r(E,F)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} T((U+\lambda V)) & = & \psi((U+\lambda V)^*(|\varphi|)) \\ & = & \psi(U^*(|\varphi|)) + \lambda\psi(V^*(|\varphi|)) \\ & = & T(U) + \lambda T(V). \end{array}$$

Agora, veja que

$$\begin{array}{rcl} |T(U)| & = & |\psi(U^*(|\varphi|))| \\ & \leq & \|\psi\|_{E^{**}} \cdot \|U^*\| \cdot \big\||\varphi|\big\|_{F^*} \\ & = & \|\psi\|_{E^{**}} \cdot \|(U^*)^+ - (U^*)^-\| \cdot \big\||\varphi|\big\|_{F^*} \\ & \leq & \|\psi\|_{E^{**}} \cdot \|(U^*)^+\| \cdot \||\varphi|\|_{F^*} + \|\psi\|_{E^{**}} \cdot \|(U^*)^-\| \cdot \big\||\varphi|\big\|_{F^*}. \end{array}$$

Como $(U^*)^+ \leq |U^*|$ e $(U^*)^- \leq |U^*|$ temos

$$\|(U^*)^+\| \leq \||U^*|\| \quad \text{e} \quad \|(U^*)^-\| \leq \||U^*|\|.$$

Segue que

$$\begin{array}{rcl} |T(U)| & \leq & \|\psi\|_{E^{**}} \cdot \|(U^*)^+\| \cdot \||\varphi|\|_{F^*} + \|\psi\|_{E^{**}} \cdot \|(U^*)^-\| \cdot \||\varphi|\|_{F^*} \\ & \leq & \|\psi\|_{E^{**}} \cdot \||U^*|\| \cdot \||\varphi|\|_{F^*} + \|\psi\|_{E^{**}} \cdot \||U^*|\| \cdot \||\varphi|\|_{F^*} \\ & = & 2\|\psi\|_{E^{**}} \cdot \||U^*|\| \cdot \||\varphi|\|_{F^*}. \end{array}$$

Pela Proposição 4.2.6 sabemos que F é Dedekind completo e tem norma ordem contínua. O Teorema 4.2.3 garante que o par (E,F) tem a propriedade de módulo invariante. Daí,

$$\begin{array}{rcl} |T(U)| & \leq & 2\|\psi\|_{E^{**}} \cdot \||U^*|\| \cdot \||\varphi|\|_{F^*} \\ & = & 2\|\psi\|_{E^{**}} \cdot \||U|^*\| \cdot \||\varphi|\|_{F^*} \\ & = & 2\|\psi\|_{E^{**}} \cdot \||U|\| \cdot \||\varphi|\|_{F^*} \\ & = & 2\|\psi\|_{E^{**}} \cdot \|U\|_r \cdot \||\varphi|\|_{F^*}. \end{array}$$

Isso prova que T é contínuo, e portanto $T \in (\mathcal{L}(E,F))^*$. Por (4.2) temos

$$T(U_{n_K}) = \psi(U_{n_k}^*(|\varphi|) \not\longrightarrow 0.$$

Em resumo, encontramos um funcional linear contínuo que aplicado na subsequência (U_{n_k}) não converge a 0. Isso implica que $U_{n_k} \overset{\omega}{\not\longrightarrow} 0$, e portanto $U_n \overset{\omega}{\not\longrightarrow} 0$. Pelo Teorema 3.2.2 concluímos que $\mathcal{L}^r(E,F)$ tem a propriedade de Schur positiva. $\square$

Exemplo 4.2.10. Sejam E um $AM-$espaço e F um $AL-$espaço. Pelo Exemplo 3.2.12 sabemos que F tem a propriedade de Schur positiva. E pelo Teorema 3.2.10 sabemos que E^* é um $AL-$espaço, portanto E^* também tem a propriedade de Schur positiva. Pelo Teorema 4.2.9 segue que o reticulado $\mathcal{L}^r(E, F)$ tem a propriedade de Schur positiva.

Uma vez que c_0^* e ℓ_1 têm a propriedade de Schur, o espaço $\mathcal{L}(c_0, \ell_1)$ é o exemplo clássico de espaço de operadores que tem a propriedade de Schur. O fato que enunciamos no parágrafo anterior mostra que, para a propriedade de Schur positiva, podemos tomar espaços de operadores de qualquer AM-espaço a valores em qualquer AL-espaço.

Capítulo 5

A Propriedade de Schur Positiva em Espaços Duais

Neste capítulo estaremos interessados em quando o dual E^* de um reticulado de Banach E tem a propriedade de Schur positiva. Como E^* também é um reticulado de Banach, as caracterizações provadas no Capítulo 3 se aplicam a E^*. Mas para reticulados duais existem outras caracterizações que são muito úteis, e neste capítulo vamos provar várias delas. É comum em Análise Funcional obter caracterizações de uma propriedade do espaço por meio de propriedades de operadores definidos no espaço. Para um exemplo disso no caso de reticulados de Banach, veja o Lema 5.1.6. Seguindo essa linha, provaremos caracterizações da propriedade de Schur positiva em E^* por meio de propriedades especiais de operadores lineares definidos em E.

As caracterizações provadas neste capítulo exigem um grande número de definições e resultados bem conhecidos, que serão apresentados, sem demonstração, na primeira seção do capítulo. A maioria desses resultados podem ser encontrados no livro [3]. Os resultados principais do capítulo, que em sua maioria estão enunciados em [41], muitos sem demonstração ou apenas com demonstrações resumidas, serão provados detalhadamente na segunda seção.

5.1 Resultados preliminares

Começamos com algumas classes especiais de operadores lineares.

Definição 5.1.1. Sejam X e Y espaço de Banach. Um operador $T : X \longrightarrow Y$ é chamado de *operador de Dunford-Pettis*, ou *operador completamente contínuo*, se T leva sequências fracamente convergentes em X em sequências convergentes na norma de Y.

É conhecido que T é de Dunford-Pettis se, e somente se, T transforma conjuntos relativamente fracamente compactos em X em conjuntos totalmente limitados na norma de Y.

Lembremos que um subconjunto A de um espaço métrico é *totalmente limitado* se para todo $\epsilon > 0$ existem $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_n \in A$ tais que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \epsilon).$$

Definição 5.1.2. Um operador linear $T : X \longrightarrow Y$ entre espaços vetoriais normados é dito *compacto* se $T(B_X)$ é um subconjunto relativamente compacto de Y. No caso em que Y é um espaço de Banach, basta $T(B_X)$ ser um conjunto totalmente limitado em norma.

É conhecido que T é compacto se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_n$ limitada em X, $(T(x_n))_n$ admite subsequência convergente na norma de Y.

Definição 5.1.3. Um operador linear $T : X \longrightarrow Y$ entre espaços de Banach é dito *fracamente compacto* se T transforma conjuntos limitados em norma de X em conjuntos relativamente fracamente compactos de Y.

De acordo com o Teorema de Eberlein-Smulian (Teorema 3.40), T é fracamente compacto se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_n$ limitada em X, $(T(x_n))_n$ admite subsequência fracamente convergente Y.

Teorema 5.1.4 (Gantmacher)**.** *Um operador linear contínuo T entre espaços de Banach é fracamente compacto se, e somente se, seu adjunto T^* é fracamente compacto.*

Demonstração. Veja [3, Theorem 5.23]. □

Definição 5.1.5. Um operador $T : E \longrightarrow F$ entre dois espaços de Riesz dito *ordem limitado* se T transforma subconjuntos limitados em ordem de E em subconjuntos limitados em ordem de F.

Denotaremos por $\mathcal{L}^b(E, F)$ o conjunto de todos os operadores ordem limitados de E em F.

Lema 5.1.6. *As seguintes afirmações são equivalentes para um reticulado de Banach σ-Dedekind completo E:*

(a) *Todo operador linear de Dunford-Pettis $T : E \longrightarrow c_0$ é regular.*

(b) *E tem norma ordem contínua.*

Demonstração. Veja[40, Lemma 1.]. □

Definição 5.1.7. Seja E um reticulado de Banach. Um subconjunto $A \subset E$ é chamado de *quase ordem limitado* se para todo $\epsilon > 0$ existe $\mu \in E^+$ tal que

$$A \subset [-\mu, \mu] + \epsilon B_E.$$

Teorema 5.1.8. *Se um reticulado de Banach E é uma faixa de seu bidual E^{**}, então todo subconjunto relativamente fracamente compacto de E tem envoltória sólida relativamente fracamente compacta.*

Demonstração. Veja [3, Theorem 4.39]. □

Teorema 5.1.9. *Sejam E e F espaços de Riesz Arquimedianos. Se F é Dedekind Completo, então $\mathcal{L}^r(E, F)$ é um espaço de Riesz Dedekind completo que contém todos os operadores ordem limitados.*

Demonstração. Veja [30, Theorem 1.3.2]. □

Teorema 5.1.10. *As seguintes afirmações são equivalentes para um reticulado de Banach E:*

(1) *E tem norma ordem contínua.*

(2) *E é um ideal de E^{**}.*

(3) *Todo ordem intervalo de E é fracamente compacto.*

(4) *E é σ-Dedekind completo e $x_n \downarrow 0$ em E implica $\|x_n\| \downarrow 0$.*

Demonstração. Veja [3, Theorem 4.9]. □

A segunda afirmação do resultado a seguir será usada muitas vezes nas demonstrações da próxima seção.

Teorema 5.1.11. *Para quaisquer subconjuntos sólidos A e B de um espaço e Riesz, $A + B$ é um conjunto sólido. Em particular, se E é um espaço de Riesz e $\mu \in E$, então $B_E + [-\mu, \mu]$ é um conjunto sólido.*

Demonstração. Veja [3, p. 31]. □

Definição 5.1.12. Um subconjunto A de um reticulado de Banach que é limitado em norma é dito *disjunto fracamente compacto* (*disjunto compacto*, respectivamente) se toda sequência positiva disjunta em $Sol(A)$ é fracamente nula (nula em norma, respectivamente).

Teorema 5.1.13. *Seja $T : E \longrightarrow X$ um operador contínuo de um reticulado de Banach E em um espaço de Banach X. Seja A um subconjunto sólido limitado em norma de E. Se*

$$\lim_n \|(T(x_n))\|_X = 0 \text{ para toda sequência disjunta } (x_n)_n \subseteq A,$$

então para cada $\epsilon > 0$ existe $\mu \in E^+$ tal que

$$\|T\left((|x| - \mu)^+\right)\| < \epsilon,$$

para todo $x \in A$.

Demonstração. Veja [3, Theorem 4.36]. □

Lema 5.1.14. *Seja A um subconjunto não vazio limitado em norma de c_0. Seja*

$$s_n = \sup\{|a_n| : a = (a_1, a_2, \ldots) \in A\}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Então, A é totalmente limitado em norma se, e somente se, $s_n \longrightarrow 0$.

Demonstração. Veja [3, p. 168]. □

O resultado a seguir é um versão, devida a Lotz, do Teorema de Hahn-Banach para reticulados de Banach.

Teorema 5.1.15. *Sejam F um subreticulado fechado de um reticulado de Banach E e $\varphi \in F^*$ um funcional linear positivo. Então φ possui uma extensão linear positiva $\widetilde{\varphi}$ definida em E tal que $\|\varphi\| = \|\widetilde{\varphi}\|$.*

Demonstração. Veja [26, Corollary 1.3]. □

Teorema 5.1.16. *Seja $(x_n)_n$ uma sequência disjunta em um espaço de Riesz E. Se $(f_n)_n$ é uma sequência em $E^{\sim}$, então existe uma sequência disjunta $(g_n)_n$ de $E^{\sim}$, positiva no caso em que $(f_n)_n$ for positiva, tal que $|g_n| \leq |f_n|$ e $g_n(x_n) = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Veja [3, p. 77]. □

Teorema 5.1.17. *Um reticulado de Banach E tem norma ordem contínua se, e somente se, toda sequência disjunta de B_{E^*} é w^*-convergente a 0.*

Demonstração. Veja [3, p. 252]. □

Lema 5.1.18. *Seja E um reticulado de Banach tal que um operador $T : E \longrightarrow c_0$ é de Dunford-Pettis se, e somente se, T é regular e E é $\sigma-$Dedekind completo, então E é um $KB-$espaço.*

Demonstração. Veja [40, Lemma 2]. □

No teorema a seguir, $(e_n^*)_n$ é a sequência dos funcionais biortogonais associados à base de Schauder canônica $(e_n)_n$ de c_0.

Teorema 5.1.19. *Seja X um espaço de Banach.*

(i) *Um operador linear $T : X \longrightarrow c_0$ é contínuo se, e somente se, a sequência $(T^*(e_n^*))_n$ é fraca-estrela nula em X^*.*

(ii) *Um operador linear contínuo $T : X \longrightarrow c_0$ é fracamente compacto se, e somente se, a sequência $(T^*(e_n^*))_n$ é fracamente nula em X^*.*

(iii) *Um operador linear contínuo $T : X \longrightarrow c_0$ é compacto se, e somente se, a sequência $(T^*(e_n^*))_n$ converge a 0 em norma em X^*.*

Demonstração. Veja [17, p. 114]. □

Teorema 5.1.20. *Todo operador linear compacto entre espaços de Banach é de Dunford-Pettis, e todo operador linear de Dunford-Pettis é contínuo.*

Demonstração. Veja [3, p. 340]. □

Definição 5.1.21. Sejam X um espaço de Banach e E um reticulado de Banach. Um operador linear contínuo $T : X \longrightarrow E$ é dito *semi-compacto* sempre que para cada $\epsilon > 0$ existir um vetor $\mu \in E^+$ tal que

$$\|(|T(x)| - \mu)^+\| < \epsilon$$

para todo $x \in B_X$.

Definição 5.1.22. Um operador linear contínuo $T : X \longrightarrow E$ de um espaço de Banach X em um reticulado de Banach E é dito $L-$*fracamente compacto* se $\lim_n \|y_n\| = 0$ para toda sequência disjunta $(y_n)_n$ contida na envoltória sólida de $T(B_X)$.

Definição 5.1.23. Um operador linear contínuo $T : E \longrightarrow X$ de um reticulado de Banach em um espaço de Banach é dito *$M-$fracamente compacto* se $\lim_n T(x_n) = 0$ para toda sequência disjunta limitada em norma $(x_n)_n \subset E$.

Teorema 5.1.24. *Sejam E um reticulado de Banach e X um espaço de Banach.*

(i) *Um operador linear $T : E \longrightarrow X$ é $M-$fracamente compacto se, e somente se, $T^* : X^* \longrightarrow E^*$ é $L-$fracamente compacto.*

ii) Um operador $T : X \longrightarrow E$ é $L-$fracamente compacto se, e somente se, $T^* : E^* \longrightarrow X^*$ é $M-$fracamente compacto.

Demonstração. Veja [3, Theorem 5.64]. □

Teorema 5.1.25. *Todo operador linear positivo M-fracamente compacto entre reticulados de Banach é semi-compacto.*

Demonstração. Veja [3, Theorem 5.72]. □

Teorema 5.1.26. *Um espaço métrico E é compacto se, e somente se, E é completo e totalmente limitado em norma.*

Demonstração. Veja [4, Theorem 3.28]. □

Teorema 5.1.27. *A subset A de um espaço de Banach X é fracamente relativamente compacto se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe um subconjunto $W \subset X$ fracamente compacto tal que*

$$A \subset W + \epsilon B_X.$$

Demonstração. Veja [4, Theorem 3.44]. □

Teorema 5.1.28. *As seguintes afirmações são equivalentes para um subconjunto A de um espaço vetorial normado:*

(i) *A é totalmente limitado.*

(ii) *Para cada vizinhança V de zero existe um conjunto totalmente limitado B tal que $A \subset B + V$.*

Demonstração. Veja [3, Theorem 3.1]. □

5.2 Resultados principais

Primeiro exploraremos algumas propriedades dos conjuntos ordem limitados e compactos no espaço c_0. Vários desses resultados são mencionadas, sem demonstração, por Wnuk em [41]. Demonstraremos a maioria deles.

Lema 5.2.1. *Se A é um subconjunto compacto de c_0, então existe uma sequência positiva $x = (x_n)_n \in c_0$ tal que $|y| \le x$ para todo $y \in A$. Isso implica que todo subconjunto compacto em c_0 é ordem limitado.*

Demonstração. Seja $A \subset c_0$ compacto. Para cada $k \in \mathbb{N}$, provemos que a seguinte função é contínua:

$$f_k : c_0 \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f_k((y_j)_j) = |y_k|,$$

Para isso seja $(y_n)_n \subset c_o$ tal que $y_n \longrightarrow z \in c_0$. Digamos $y_n = (y_j^n)_j$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $z = (z_j)_j$. Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|y_n - z\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |y_j^n - z_j| < \epsilon \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Segue que

$$|y_j^n - z_j| < \epsilon$$

para todo $n \geq n_0$ e para todo $j \in \mathbb{N}$. Isso mostra que, para cada $j \in \mathbb{N}$, a sequência $(y_j^n)_n$ converge para z_j, isto é $y_j^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Da continuidade das operações reticuladas segue que

$$|y_j^n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} |z_j| \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$f_k(y_n) = |y_k^n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} |z_k| = f_k(z).$$

Isso prova que f_k é contínua para todo $k \in \mathbb{N}$. Como A é compacto, $f_k(A)$ é compacto em $\mathbb{R}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Em particular, cada $f_k(A)$ é limitado e portanto podemos tomar $x_k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} x_k &= \sup f_k(A) \\ &= \sup \{f_k(y) : y \in A\} \\ &= \sup \{|y_k| : y = (y_j)_j \in A\}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Pela definição de supremo, $x_k \geq |y_k|$ para todo $y = (y_j)_j \in A$ e para todo $k \in \mathbb{N}$. Isso implica duas coisas: (i) $x_k \geq 0$ para todo k; (ii) Tomando $x := (x_k)_k$, temos $|y| \leq x$ para todo $y = (y_j)_j \in A$. Para completar a demonstração resta mostrar que $x \in c_0$. Para isso suponha que $x \notin c_0$. Neste caso existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe k_n com $k_n \geq n$ tal que

$$x_{k_n} \geq \epsilon.$$

Por outro lado, como A é totalmente limitado, por ser compacto, e $\frac{\epsilon}{3} > 0$, existem $s \in \mathbb{N}$ e $y_1, y_2, \ldots, y_s \in A$ tais que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{s} B\left(y_j, \frac{\epsilon}{3}\right).$$

Escrevendo $y_j = (y_n^j)_n$ para $j = 1, \ldots, s$, como cada $y_j \in c_0$ existe um número natural N_j tal que

$$|y_n^j| < \frac{\epsilon}{3} \text{ para todo } n \geq N_j.$$

Seja $w = (w_n)_n \in A$. Então, $w \in B\left(y_j, \frac{\epsilon}{3}\right)$ para algum $j = 1, \ldots, s$. Veja que

$$\begin{aligned} |w_n| &= |w_n - y_n^j + y_n^j| \\ &\leq |w_n - y_n^j| + |y_n^j|, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas, $|w_n - y_n^j| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \{|w_k - y_k^j|\}$. Daí,

$$\begin{aligned} |w_n| &\leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \{|w_k - y_k^j|\} + |y_n^j| \\ &= \|w - y_j\|_\infty + |y_n^j| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + |y_n^j| \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Se, além disso, $n \geq N_j$, então

$$|w_n| < \frac{\epsilon}{3} + |y_n^j| < \frac{2\epsilon}{3}.$$

Para $N_j \in \mathbb{N}$, como $x \notin c_0$ existe $k_{N_j} \in \mathbb{N}$ com $k_{N_j} \geq N_j$ tal que

$$x_{k_{N_j}} \geq \epsilon.$$

Aplicando (5.1) para $k_{N_j} \in \mathbb{N}$ obtemos

$$x_{k_{N_j}} = \sup\left\{|y_{k_{N_j}}| : y = (y_i)_i \in A\right\}.$$

Como $x_{k_{N_j}} - \dfrac{\epsilon}{3} < x_{k_{N_j}}$, pela definição de supremo existe $t = (t_i)_i \in A$ tal que

$$x_{k_{N_j}} - \frac{\epsilon}{3} \leq |t_{k_{N_j}}|.$$

Mas ja sabemos que $x_{k_{N_j}} \geq \epsilon$ e $|t_{k_{N_j}}| < \frac{2\epsilon}{3}$, portanto

$$\frac{2\epsilon}{3} \leq x_{k_{N_j}} - \frac{\epsilon}{3} \leq |t_{k_{N_j}}| < \frac{2\epsilon}{3}.$$

Essa contradição prova que $x \in c_0$ e completa a demonstração. $\square$

Lema 5.2.2. *Para todo $\mu \in c_0^+$, o ordem intervalo $[-\mu, \mu]$ é totalmente limitado em norma.*

Demonstração. Seja $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots) \in c_0^+$ e considere o ordem intervalo $[-\mu, \mu]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$s_n = \sup\{|a_n| : a = (a_1, a_2, \ldots) \in [-\mu, \mu]\}.$$

Como cada $\mu_n \geq 0$, temos

$$|a_n| \leq \mu_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

E como $|a_n| \geq 0$, temos $0 \leq |a_n| \leq \mu_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\sup_{a\in[-\mu,\mu]} \{0\} \leq \sup_{a\in[-\mu,\mu]} \{|a_n|\} \leq \sup_{a\in[-\mu,\mu]} \{\mu_n\},$$

donde segue que

$$0 \leq s_n = \sup_{a\in[-\mu,\mu]} \{|a_n|\} \leq \mu_n.$$

Como $\mu \in c_0$, $\mu_n \longrightarrow 0$, e das desigualdades acima segue que $s_n \longrightarrow 0$. Por Lema 5.1.14 concluímos que $[-\mu, \mu]$ é totalmente limitado em norma. $\square$

Corolário 5.2.3. *Seja A um subconjunto de c_0 tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $\mu \in c_0^+$ de forma que $A \subset [-\mu, \mu] + \epsilon B_{c_0}$. Então A é totalmente limitado em norma.*

Demonstração. Por hipótese, para $\epsilon > 0$ existe $\mu \in c_0^+$ tal que $A \subset [-\mu, \mu] + \epsilon B_{c_0}$. Pelo Lema 5.2.2 sabemos que o ordem intervalo $[-\mu, \mu]$ é totalmente limitado em norma. Segue do Teorema 5.1.28 que A é totalmente limitado em norma em c_0. □

Corolário 5.2.4. *Todo subconjunto de c_0 quase ordem limitado é relativamente compacto.*

Demonstração. Seja A um subconjunto quase ordem limitado de c_0. Por definição, para todo $\epsilon > 0$ existe $\mu \in c_0^+$ tal que $A \subset [-\mu, \mu] + \epsilon B_{c_0}$. Pelo Corolário 5.2.3 segue que A é totalmente limitado em norma em c_0. Como c_0 é um espaço de Banach, $\overline{A}$ é completo em c_0. Pelo Teorema 5.1.26 concluímos que $\overline{A}$ é compacto, ou seja, A é relativamente compacto. □

Lema 5.2.5. *Sejam E, F e G espaços de Banach.*

(i) *Se E ou F é reflexivo, então todo operador linear contínuo $T : E \longrightarrow F$ é fracamente compacto.*

(ii) *Se $T : E \longrightarrow F$ e $S : F \longrightarrow G$ são operadores lineares contínuos com pelo menos um deles fracamente compacto, então $S \circ T$ é fracamente compacto.*

Demonstração. (i) Suponha primeiramente que F seja reflexivo e seja $(x_n)_n$ uma sequência limitada em E. Como T é contínuo, a sequência $(T(x_n))_n$ é limitada em F. Pela reflexividade de F, $(T(x_n))_n$ possui uma subsequência fracamente convergente. Segue que T é fracamente compacto. Suponha agora que E seja reflexivo. Se $(x_n)_n \subset E$ é limitada, a reflexividade de E garante a existência de uma subsequência $(x_{n_j})_j$ fracamente convergente, digamos $x_{n_j} \xrightarrow{\omega} x \in E$. Por ser contínuo, T é fraco-fraco contínuo, logo $T(x_{n_j}) \xrightarrow{\omega} T(x) \in F$. Assim, $(T(x_n))_n$ tem subsequência fracamente convergente, o que garante a compacidade fraca de T.

(ii) Suponha que T seja fracamente compacto e seja $(x_n)_n$ uma sequência limitada em E. Então $(T(x_n))_n$ possui uma subsequência fracamente convergente, digamos $T(x_{n_k}) \xrightarrow{\omega} y \in F$. Como S é operador contínuo, $S(T(x_{n_k})) \xrightarrow{\omega} S(T(y)) \in G$. Isso prova que $S \circ T$ é fracamente compacto. O caso em que S é fracamente compacto segue de forma análoga. □

Provaremos a seguir o último ingrediente que falta para os resultados principais do capítulo.

Lema 5.2.6. *Todo operador linear positivo entre espaços de Riesz é limitado em ordem.*

Demonstração. Sejam E e F espaços de Riesz e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear positivo. Para provar que T é limitado em ordem, seja $A \subset E$ um conjunto ordem limitado. Existem então $y, z \in E$ tais que

$$y \leq x \leq z \text{ para todo } x \in A.$$

Tomando $\mu = \sup\{|y|, |z|\}$ temos $A \subset [-\mu, \mu]$, e portanto $T(A) \subset T([-\mu, \mu])$. Como $\mu \in E^+$ e T é positivo, temos $T(\mu) \geq 0$. Seja $x \in [-\mu, \mu]$. Então $\mu - x \geq 0$, logo

$T(\mu - x) \geq 0$ pois T é positivo, e daí $T(\mu) - T(x) \geq 0$. Segue que $T(\mu) \geq T(x)$, e da mesma forma temos $T(-\mu) \leq T(x)$. Assim,

$$T(A) \subset T([-\mu, \mu]) \subset [T(-\mu), T(\mu)],$$

provando que T é ordem limitado. □

Provaremos a seguir o primeiro resultado principal desta seção.

Teorema 5.2.7. *As seguintes afirmações são equivalentes para um reticulado de Banach E:*

(a) *Todo subconjunto disjunto fracamente compacto de E é disjunto compacto.*

(b) *Todo subconjunto relativamente fracamente compacto de E é disjunto compacto.*

(c) *E tem a propriedade de Schur positiva.*

(d) *Um subconjunto A de E é relativamente fracamente compacto se, e somente se, A é quase ordem limitado.*

(e) *O reticulado de Banach E é σ-Dedekind completo e um operador $T : E \longrightarrow c_0$ é de Dunford-Pettis se, e somente se, T é regular.*

(f) *Toda sequência normalizada, positiva e disjunta em E possui uma subsequência equivalente à base canônica de ℓ_1.*

Demonstração. (a) $\Longrightarrow$ (b) Seja A um subconjunto relativamente fracamente compacto de E. Pelo Teorema 1.4.17, toda sequência disjunta na envoltória sólida de A é fracamente nula. Como conjunto fracamente compacto é limitado, pela hipótese segue que A é disjunto compacto.

(b) $\Longrightarrow$ (c) Seja $(x_n)_n$ uma sequência positiva disjunta em E tal que $x_n \xrightarrow{\omega} 0$. Pelo Lema 3.2.1, o conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente fracamente compacto. Por hipótese, A é disjunto compacto, e portanto $x_n \longrightarrow 0$. Isso prova que E tem a propriedade de Schur positiva.

(c) $\Longrightarrow$ (d) Seja A um subconjunto relativamente fracamente compacto de E. Como E tem a propriedade de Schur positiva, pelo Corolário 3.2.8 sabemos que E é um KB-espaço. Do Teorema 1.4.13 segue que E é uma faixa de E^{**}. Pelo Teorema 5.1.8 concluímos que $\text{sol}(A)$ é relativamente fracamente compacta. Pelo Teorema 1.4.17, para toda sequência disjunta $(x_n)_n \subset \text{sol}(A)$ tem-se $x_n \xrightarrow{\omega} 0$. Como E tem a propriedade de Schur positiva por hipótese, $\|x_n\| \longrightarrow 0$. Considerando o operador identidade $I : E \longrightarrow E$, o que acabamos de mostrar prova que

$$\|I(x_n)\| = \|x_n\| \longrightarrow 0$$

para toda sequência disjunta $(x_n)_n \subset \text{sol}(A)$. Para todo $\epsilon > 0$, pelo Teorema 5.1.13 existe algum $\mu \in E^+$ tal que

$$\|(|x| - \mu)^+\| < \epsilon \tag{5.2}$$

para todo $x \in \text{sol}(A)$. Dessa ultima desigualdade segue que $(|x| - \mu)^+ \in \epsilon B_E$. Agora, veja que de $\mu \geq 0$ e $|x| \geq 0$ decorre que $|x| \wedge \mu \geq 0$. Além disso $|x| \wedge \mu \leq \mu$, e portanto

$$|x| \wedge \mu \in [-\mu, \mu]. \tag{5.3}$$

Pelo Teorema 1.3.8 temos $|x| = (|x| - \mu)^+ + |x| \wedge \mu$. De (5.2) e (5.3) obtemos

$$|x| \in [-\mu, \mu] + \epsilon B_E.$$

O Teorema 5.1.11 garante que o conjunto $[-\mu, \mu] + \epsilon B_E$ é sólido. Como $|x| \leq |x|$, segue que $x \in [-\mu, \mu] + \epsilon B_E$ para todo $x \in A$. Está provado que A é quase ordem limitado.

Agora suponha que A é quase ordem limitado, então para todo $\epsilon > 0$ existe $\mu \in E^+$ tal que

$$A \subset [-\mu, \mu] + \epsilon B_E.$$

Pelo Lema 5.1.18 sabemos que E é um KB- espaço, logo E tem norma ordem contínua. Daí, pelo teorema 5.1.10 $[-\mu, \mu]$ é fracamente compacto para todo $\epsilon > 0$. Pelo teorema 5.1.27 A é relativamente fracamente compacto.

(d) $\Longrightarrow$ (e) Seja $T : E \longrightarrow c_0$ um operador de Dunford-Pettis. Para todo $\mu \in E$, o ordem intervalo $[-\mu, \mu]$ é quase ordem limitado, logo $[-\mu, \mu]$ é relativamente fracamente compacto por hipótese. Como $[-\mu, \mu]$ é um subconjunto convexo, pelo Teorema de Mazur (Teorema 1.2.9) temos que $\overline{[-\mu, \mu]}^{\omega} = \overline{[-\mu, \mu]} = [-\mu, \mu]$ é fracamente compacto. Por T ser um operador de Dunford-Pettis, $T([-\mu, \mu])$ é compacto em c_0. E pelo Lema 5.2.1 sabemos que conjuntos compactos em c_0 são limitados em ordem. Vejamos que T é um operador ordem limitado. Para isso seja $A \subset E$ ordem limitado. Podemos tomar $\mu \in E^+$ tal que $A \subset [-\mu, \mu]$, daí $T(A) \subset T([-\mu, \mu])$ que é ordem limitado, portanto, $T \in \mathcal{L}^b(E, c_0)$. Como c_0 é Dedekind completo, do Teorema 5.1.9 decorre que $\mathcal{L}^b(E, c_0) \subset \mathcal{L}^r(E, c_0)$, donde segue que T é regular.

Reciprocamente, suponha que $T : E \longrightarrow c_0$ seja regular. Neste caso existem operadores lineares positivos $P_1, P_2 \colon E \longrightarrow c_0$ tais que

$$T = P_1 - P_2.$$

Devemos provar que T é de Dunford-Pettis. Para isto tomaremos um subconjunto relativamente fracamente compacto em E e mostraremos que sua imagem por T é relativamente compacta em c_0. Como a soma de dois conjuntos relativamente compactos é relativamente compacto, basta provar para operadores positivos. Sejam então $T : E \longrightarrow c_0$ um operador positivo e $A \subset E$ relativamente fracamente compacto. Por hipótese, A é quase ordem limitado, isto é, existem $\epsilon > 0$ e $\mu \in E^+$ tais que $A \subset [-\mu, \mu] + \epsilon B_E$. Chamando $x = T(\mu)$, segue que

$$\begin{aligned} T(A) &\subset T([-\mu, \mu]) + \epsilon T(B_E) \\ &\subset [-x, x] + \epsilon T(B_E) \\ &\subset [-x, x] + \epsilon B_{c_0}(0, \|T\|) \\ &\subset [-x, x] + \epsilon \|T\| B_{c_0}. \end{aligned}$$

Isso prova que $T(A)$ é quase ordem limitado em c_0. Do Corolário 5.2.4 segue que $T(A)$ é relativamente compacto, provando que T é um operador de Dunford-Pettis.

A hipótese garante que todo ordem intervalo em E é relativamente fracamente compacto. Do Teorema 5.1.10 segue que E é σ-Dedekind completo.

(e) $\Longrightarrow$ (f) A ideia é tomar uma sequência disjunta positiva normalizada em E e, por meio de operadores, mostrar que ela não possui uma subsequência fracamente de Cauchy. Em seguida usaremos o Teorema de Rosenthal para concluir. Seja então $(x_n)_n$ uma sequência normalizada positiva disjunta. Para n fixo, considere o subespaço $[x_n]$ de E gerado por x_n. Por ter dimensão finita, $[x_n]$ é fechado e, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$|\lambda x_n| \;=\; |\lambda| \cdot |x_n| = |\lambda| x_n \in [x_n].$$

Isso mostra que $[x_n]$ é um subreticulado fechado. Vejamos que

$$\begin{array}{rcl} f_n : [x_n] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda x_n & \longmapsto & \lambda \|x_n\|, \end{array}$$

é um funcional linear positivo. A linearidade é óbvia. Se $\lambda x_n \geq 0$, como $x_n \geq 0$, temos $\lambda \geq 0$. Logo $f_n(\lambda x_n) = \lambda \|x_n\| \geq 0$. Isso prova a positividade. Mais ainda,

$$\begin{array}{rcl} \|f_n\| & = & \sup\{|f_n(x)| : \|x\| = 1, x \in [x_n]\} \\ & = & \sup\big\{\big|\lambda \|x_n\|\big| : \|\lambda x_n\| = 1\big\} = 1. \end{array}$$

Isso prova que f_n é contínuo. Note também que $f_n(x_n) = \|x_n\|$. Pelo Teorema 5.1.15, f_n admite uma extensão linear positiva g_n definida em E tal que $\|f_n\| = \|g_n\|$. Pelo Lema 5.2.6 todo operador positivo é ordem limitado, logo $g_n \in E^{\sim}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 5.1.16 existe uma sequência positiva disjunta de funcionais $(h_n)_n \subset (E^{\sim})^{+}$ tal que $|h_n| \leq |g_n|$. Segue que $\|h_n\| \leq \|g_n\| = 1$ e

$$h_n(x_n) = g_n(x_n) = f_n(x_n) = \|x_n\| = 1.$$

Pelo Lema 5.1.18 sabemos que E é um KB- espaço, logo E tem norma ordem contínua pelo Teorema 4.2.4. Como a sequência $(h_n)_n$ é disjunta, pelo teorema 5.1.17 temos

$$h_n \xrightarrow{\omega^*} 0 \text{ em } E^*.$$

O operador

$$\begin{array}{rcl} T : E & \longrightarrow & c_0 \\ x & \longmapsto & (h_n(x))_n, \end{array}$$

está bem definido pois $h_n \xrightarrow{\omega^*} 0$. Vejamos que T é positivo: se $x \geq 0$, como $h_n \geq 0$, então $h_n(x) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dai, T é regular por ser positivo. Pela hipótese, T é de Dunford-Pettis. Agora suponha que $(x_n)_n$ possua uma subsequência $(x_{n_k})_k$ fracamente de Cauchy. Como E é um $KB-$espaço, E é fracamente sequencialmente completo pelo Teorema 1.4.13, o que implica que $(x_{n_k})_k$ é fracamente convergente a algum $x \in E$. Como essa subsequência está contida no conjunto relativamente fracamente compacto $\{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$, pelo Teorema 1.4.17 concluímos que essa subsequência é fracamente nula, isto é,

$$x_{n_k} \xrightarrow{\omega} 0.$$

Por T ser um operador de Dunford-Pettis,

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} h_i(x_{n_k}) = \|(h_i(x_{n_k}))_i\|_\infty = \|T(x_{n_k})\|_\infty \longrightarrow 0.$$

Mas para $i = n_k$ temos $h_{n_k}(x_{n_k}) = \|x_{n_k}\| = 1$, e portanto, $\sup_{i\in\mathbb{N}} h_i(x_{n_k}) \geq 1$. Essa contradição nos permite concluir que $(x_n)_n$ não possui subsequência fracamente de Cauchy. Pelo Teorema ℓ_1 de Rosenthal (Teorema 1.2.6), a sequência $(x_n)_n$ possui uma subsequência equivalente à base canônica de ℓ_1. Provamos que toda sequência positiva, disjunta e normalizada em E admite uma subsequência equivalente à base canônica de ℓ_1.

(f) $\Longrightarrow$ (a) Seja $A \subset E$ um conjunto disjunto fracamente compacto. Suponha que A não seja disjunto compacto. Neste caso existe uma sequência disjunta positiva $(x_n)_n \subset Sol(A)$ tal que

$$x_n \not\longrightarrow 0.$$

Como A é disjunto fracamente compacto, temos $x_n \xrightarrow{\omega} 0$. Seguindo os passos da demonstração do Teorema 3.2.2, concluímos que existe em E uma sequência positiva, disjunta e normalizada $(y_k)_k$ fracamente nula. Pela hipótese, $(y_k)_k$ possui uma subsequência $(y_{k_m})_m$ equivalente à base canônica de ℓ_1. Como $y_k \xrightarrow{\omega} 0$, temos $y_{k_m} \xrightarrow{\omega} 0$. Isso é uma contradição pois a base canônica de ℓ_1 não é fracamente nula. Portanto, A é disjunto compacto. □

Corolário 5.2.8. *Seja E um reticulado de Banach. E é 1-disjunto homogêneo se, e somente se, toda sequência positiva, normalizada e disjunta possuí uma subsequência equivalente á base canônica de ℓ_1.*

Demonstração. Segue direito do teorema anterior e do teorema 3.2.4 □

A seguir concluiremos nosso estudo provando as caracterizações da propriedade de Schur positiva em espaços duais por meio de operadores lineares compactos e fracamente compactos.

Teorema 5.2.9. *As seguintes afirmações são equivalentes para um reticulado de Banach E:*

(i) *E^* tem a propriedade de Schur positiva.*

(ii) *Todo operador linear fracamente compacto definido em E e tomando valores em um espaço de Banach qualquer é $M-$fracamente compacto.*

(iii) *Todo operador linear fracamente compacto $T : E \longrightarrow c_0$ é $M-$fracamente compacto.*

(iv) *Todo operador linear positivo e fracamente compacto $T : E \longrightarrow c_0$ é $M-$fracamente compacto.*

(v) *Todo operador linear positivo e fracamente compacto $T : E \longrightarrow c_0$ é um operador de Dunford-Pettis e E não contém cópia reticulada de ℓ_1.*

(vi) *Todo operador linear positivo e fracamente compacto $T : E \longrightarrow c_0$ é compacto.*

Demonstração. (i) $\implies$ (ii) Seja T um operador linear fracamente compacto definido em E a valores em um espaço de Banach X. Por hipótese, E^* tem a propriedade de Schur positiva, logo E^* é um $KB-$espaço pelo Corolário 3.2.8. Aplicando o Teorema 1.4.13 podemos concluir que E^* é uma faixa de E^{***}. Do Teorema 5.1.8 segue que todo subconjunto relativamente fracamente compacto de E^* tem envoltória sólida relativamente fracamente compacta. Sabemos pelo Teorema de Gantmacher (Teorema 5.1.4) que T^* é fracamente compacto, e portanto, $T^*(B_{X^*})$ é um subconjunto relativamente fracamente compacto de E^*. Seja $(x_n)_n \subset Sol(T^*(B_{X^*}))$ uma sequência disjunta. Pelo Teorema 1.4.17, como $T^*(B_{X^*})$ é relativamente fracamente compacto, temos $x_n \xrightarrow{\omega} 0$. Usando novamente que E^* tem a propriedade de Schur positiva, temos que $x_n \longrightarrow 0$ para toda sequência disjunta em $Sol(T^*(B_{X^*}))$. Isso implica que $T^*(B_{X^*})$ é um conjunto disjunto compacto. Isso prova que o operador T^* é $L-$fracamente compacto. Segue que T é $M-$fracamente compacto pelo Teorema 5.1.24.

As implicações (ii) $\implies$ (iii) e (iii) $\implies$ (iv) são imediatas e não requerem demonstração.

(iv) $\implies$ (v) Seja $T : E \longrightarrow c_0$ um operador linear positivo fracamente compacto. Por hipótese temos que T é $M-$ fracamente compacto. Pelo Teorema 5.1.25 concluímos que o operador T é semi-compacto, e portanto para todo $\epsilon > 0$ existe um vetor $\mu \in c_0^+$ tal que

$$\|(|T(x)| - \mu)^+\| < \epsilon$$

para todo $x \in B_E$. Chamando $w = T(\mu)$, temos

$$(|T(x)| - w)^+ = (|T(x)| - T(\mu))^+.$$

De $|T(x)| \leq |T|(|x|)$ segue que $|T(x)| - w \leq |T|(|x|) - w$. Portanto,

$$\begin{aligned} (|T(x)| - w)^+ &\leq (|T|(|x|) - w)^+ \\ &= (T(|x|) - T(\mu))^+ \\ &= (T(|x| - \mu))^+. \end{aligned}$$

E de

$$T(|x| - \mu) = (T(|x| - \mu))^+ - (T(|x| - \mu))^-,$$

segue que

$$\begin{aligned} T(|x| - \mu) &= T((|x| - \mu)^+ - (|x| - \mu)^-) \\ &= T((|x| - \mu)^+) - T((|x| - \mu)^-). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.4.8,

$$(T(|x| - \mu))^+ \leq T((|x| - \mu)^+).$$

Assim,

$$(|T(x)| - w)^+ \leq T((|x| - \mu)^+).$$

Como a norma de c_0 é reticulada, temos

$$\|(|T(x)| - w)^+\| \leq \|T((|x| - \mu)^+)\| < \epsilon.$$

Isso implica que $(|T(x)| - w)^+ \in \epsilon B_{c_0}$. Sabemos ainda que

$$0 \leq T(|x|) \wedge w \leq w,$$

portanto $T(|x| \wedge w) \in [-w, w]$. Assim, da igualdade

$$T(|x|) = (T(|x|) - w)^+ + T(|x|) \wedge w,$$

segue que

$$T(|x|) \in \epsilon B_{c_0} + [-w, w]$$

para todo $x \in B_E$. Usando que a soma de dois conjuntos sólidos é também um conjunto sólido, temos que $\epsilon B_{c_0} + [-w, w]$ é um conjunto sólido. Combinando isso com a desigualdade $|T(x)| \leq T(|x|)$ segue que

$$T(x) \in \epsilon B_{c_0} + [-w, w]$$

para todo $x \in B_E$. Isso prova que $T(B_E)$ é um conjunto quase ordem limitado. Logo $T(B_E)$ é totalmente limitado em norma em c_0 pelo Corolário 5.2.3. Isso implica que T é um operador compacto, e portanto T é de Dunford-Pettis pelo Teorema 5.1.20.

Resta provar que E não contém cópia reticulada de ℓ_1. Argumentando por contradição, suponha que E tenha uma cópia reticulada de ℓ_1. Neste caso, E tem uma cópia reticulada complementada de ℓ_1 pelo Teorema 1.4.19, e portanto existe um operador linear

$$S : \ell_1 \longrightarrow E,$$

que é isomorfismo de Banach e de Riesz sobre um subespaço complementado de E. Podemos então escrever $E = \mu(\ell_1) \oplus F$ para algum subespaço fechado F de E. É claro que o operador projeção

$$\begin{aligned} \pi_1 : E = S(\ell_1) \oplus F &\longrightarrow S(\ell_1) \\ x + y &\longmapsto x, \end{aligned}$$

é um operador linear positivo. Consideremos agora o operador inverso

$$S^{-1} : S(\ell_1) \longrightarrow \ell_1$$

e a inclusão

$$i_{\ell_1} : \ell_1 \longrightarrow c_0,$$

que também são operadores lineares positivos (relembre que, por ser um homomorfismo de Riesz, S e S^{-1} são positivos). Obviamente, o operador composição $i_{\ell_1} \circ S^{-1} \circ \pi_1$,

$$E \xrightarrow{\pi_1} S(\ell_1) \xrightarrow{S^{-1}} \ell_1 \xrightarrow{i_{\ell_1}} c_0$$

é um operador positivo. Provemos que é fracamente compacto. Para isso considere as inclusões

$$i_1 \colon \ell_1 \longrightarrow \ell_2 \ \text{ e } \ i_2 \colon \ell_2 \longrightarrow c_0.$$

Considerando a composição

$$E \xrightarrow{\pi_1} S(\ell_1) \xrightarrow{S^{-1}} \ell_1 \xrightarrow{i_1} \ell_2,$$

o operador $i_1 \circ S^{-1} \circ \pi_1$ toma valores no espaço reflexivo ℓ_2, e portanto é fracamente compacto pelo Lema 5.2.5. Por este mesmo teorema e pelo mesmo motivo, o operador i_1 é fracamente compacto. Considerando a composição,

$$\ell_1 \xrightarrow{i_1} \ell_2 \xrightarrow{i_2} c_0,$$

novamente pelo Lema 5.2.5 temos que $i_2 \circ i_1$ é fracamente compacto. É claro que $i_2 \circ i_1 = i_{\ell_1}$, logo i_{ℓ_1} é fracamente compacto. Aplicando o Lema 5.2.5(b) obtemos que o operador

$$T := i_{\ell_1} \circ S^{-1} \circ \pi_1 \colon E \longrightarrow c_0$$

é fracamente compacto. Por hipótese, T é $M-$fracamente compacto. Como S é homomorfismo de Riesz e $(e_n)_n$ é uma sequência disjunta limitada em ℓ_1, a sequência $(S(e_n))_n$ é disjunta e limitada em E. Para todo n,

$$\begin{aligned} T(S(e_n)) &= (i_{\ell_1} \circ S^{-1} \circ \pi_1)(S(e_n)) \\ &= (i_{\ell_1} \circ S^{-1})(S(e_n)) \\ &= i_{\ell_1}(e_n) \\ &= e_n. \end{aligned}$$

Assim, $(S(e_n))_n$ é uma sequência disjunta e limitada em E, mas $(T(S(e_n)))_n = (e_n)_n$ não converge para zero em c_0 pois $\|e_n\|_\infty = 1$ para todo n. Isso prova que T não é $M-$fracamente compacto. Essa contradição completa a demonstração de que E não contém uma cópia reticulada de ℓ_1.

(v) $\Longrightarrow$ (vi) Seja $T : E \longrightarrow c_0$, um operador linear positivo e fracamente compacto. Por hipótese, T é um operador de Dunford-Pettis e E não contém cópia reticulada de ℓ_1. Seja $(x_n)_n$ uma sequência disjunta e limitada em norma em E. Pelo Teorema 1.4.19,

$$x_n \xrightarrow{\omega} 0 \text{ em } E.$$

Por ser um operador de Dunford-Pettis, logo $T(x_n) \longrightarrow 0$. Provamos que $T(x_n) \longrightarrow 0$ para toda sequência disjunta e limitada em E. Como a bola B_E é um conjunto sólido (Exemplo 1.4.2), aplicando o Teorema 5.1.13 temos que para cada $\epsilon > 0$ existe algum $\mu \in E^+$ tal que

$$\|T((|x| - \mu)^+)\| < \epsilon$$

para todo $x \in B_E$. Repetindo o procedimento que fizemos anteriormente, tomando $w = T(\mu) \in c_0^+$, temos

$$(|T(x)| - w)^+ = (|T(x)| - T(\mu)).$$

Como $|T(x)| \leq |T|(|x|)$,

$$|T(x)| - w \leq |T|(|x|) - w.$$

Daí,

$$\begin{aligned} (|T(x)| - w)^+ &\leq (|T|(|x|) - w)^+ \\ &= (T(|x|) - T(\mu))^+ \\ &= (T(|x| - \mu))^+. \end{aligned}$$

De
$$T(|x|-\mu) = (T(|x|-\mu))^+ - (T(|x|-\mu))^-,$$
obtemos
$$\begin{aligned} T(|x|-\mu) &= T((|x|-\mu)^+ - (|x|-\mu)^-) \\ &= T((|x|-\mu)^+) - T((|x|-\mu)^-). \end{aligned}$$
Pelo Teorema 1.4.8,
$$(T(|x|-\mu))^+ \leq T((|x|-\mu)^+).$$
Assim,
$$(|T(x)|-w)^+ \leq T((|x|-\mu)^+).$$
Como a norma em c_0 é reticulada,
$$\|(|T(x)|-w)^+\| \leq \|T((|x|-\mu)^+)\| < \epsilon.$$
Isso prova que T é semi-compacto, e também que $(|T(x)|-w)^+ \in \epsilon B_{c_0}$. Sabemos que $T(|x|) \wedge w \leq w$ e $T(|x| \wedge w) \in [-w, w]$, assim, pela igualdade
$$T(|x|) = (T(|x|)-w)^+ + T(|x|) \wedge w$$
segue que
$$T(|x|) \in \epsilon B_{c_0} + [-w, w]$$
para todo $x \in B_E$. Como soma de dois conjuntos sólidos é também um conjunto sólido, $\epsilon B_{c_0} + [-w, w]$ é um conjunto sólido. De $|T(x)| \leq T(|x|)$ temos
$$T(x) \in \epsilon B_{c_0} + [-w, w]$$
para todo $x \in B_E$. Isso mostra que $T(B_E)$ é um conjunto quase ordem limitado e, pelo Corolário 5.2.3, é totalmente limitado em norma em c_0. Está provado que T é um operador compacto.

(vi) $\Longrightarrow$ (i) Seja $(f_m)_m \subset$ uma sequência positiva e fracamente nula em E^*. Em particular, para cada $x \in E$, como $J_E(x) \in E^{**}$, temos
$$f_m(x) = J_E(x)(f_m) \longrightarrow 0.$$
Então, está bem definido o operador
$$\begin{aligned} T : E &\longrightarrow c_0 \\ x &\longrightarrow (f_m(x))_m. \end{aligned}$$
O operador T é linear e positivo pois cada f_m é um funcional linear e positivo. Segue que T é contínuo por ser um operador linear e positivo entre reticulados de Banach. Consideremos seu adjunto
$$T^* : (c_0)^* = \ell_1 \longrightarrow E^*.$$

Considerando novamente a sequência $(e_n^*)_n$ dos funcionais biortogonais associados à base canônica $(e_n)_n$ de ℓ_1, para todos $n \in \mathbb{N}$ e $x \in E$,

$$\begin{aligned} T^*(e_n^*)(x) &= e_n(T(x)) \\ &= e_n((f_m(x))_m) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} e_n^i f_i(x) \\ &= f_n(x). \end{aligned}$$

Isso mostra que $T^*(e_n^*) = f_n$ para todo n. Assim, $T^*(e_m^*) = f_m \xrightarrow{\omega} 0$. Do Teorema 5.1.19(ii) segue que T é um operador fracamente compacto. Por hipótese, T é compacto. Aplicando agora o Teorema 5.1.19(iii), obtemos que a sequência $(f_m)_m = (T^*(e_m^*))_m$ é nula em norma em E^*. Está provado que E^* tem a propriedade de Schur positiva. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Albiac, F. & Kalton, N., *Topics in Banach Space Theory*, Springer, 2006.

[2] Aliprantis, C. & Burkinshaw, O., *Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics*, Amer. Math. Soc., 2003.

[3] Aliprantis, C. & Burkinshaw, O., *Positive Operators*, Springer, 2006. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5008-4

[4] Aliprantis, C. & Border, K., *Infinite Dimensional Analysis: a Hitchhiker's Guide*, Springer, 2006.

[5] Ardakani, H., Moshtaghioun, S. M., Mosadegh, S. M. S. M. & Salimi, M., *The strong Gelfand-Phillips property in Banach lattices*, Banach J. Math. Anal. 10 (2016), 15–26.

[6] Banach, S., *Théorie des Opérations Linéaires*, Z Subwencji Funduszu Kultury Narodowej, 1932.

[7] Baklouti, H. & Hajji, M., *Schur operators and domination problem*, Positivity 21 (2017), 35–48. https://doi.org/10.1007/s11117-016-0400-x

[8] Bartle, R., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley & Sons, 1995.

[9] Birkhoff, G., *Dependent probabilities and spaces (L)*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA. **24** (1938), no. 3, 154-159.

[10] Botelho, G., Bu, Q., Ji, D. & Navoyan, K., *The positive Schur property on positive projective tensor products and spaces of regular multilinear operators*, Monatsh. Math. **197** (2022), no. 4, 565–578. https://doi.org/10.1007/s00605-022-01677-2

[11] Botelho, G. & Luiz, J. L. P., *The positive polynomial Schur property in Banach lattices*, Proc. Amer. Math. Soc. 149(5) (2021), 2147-2160. https://doi.org/10.1090/proc/15392

[12] Botelho, G. & Luiz, J. L. P., *On the Schur, positive Schur and weak Dunford-Pettis properties in Fréchet lattices*, Ann. Fenn. Math. 46(2) (2021), 633-642. https://doi.org/10.5186/aasfm.2021.4642

[13] Botelho, G., Luiz, J. L. P. & Miranda, V. C. C., *Grothendieck's compactness principle for the absolute weak topology*, J. Anal. Math., to appear, 2024.

[14] Botelho, G., Pellegrino, D. & Teixeira, E., *Fundamentos de Análise Funcional*, 3a. Edição, Sociedade Brasileira de Matemática, 2023.

[15] Botelho, G. & Rueda, P., *The Schur property on projective and injective tensor products*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), no. 1, 219–225. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-08-09486-0

[16] Cobzaş, Ş., *Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces*, Birkhäuser Basel, 2012.

[17] Diestel, J., *Sequences and Series in Banach Spaces*, Graduate Texts in Mathematics, 1984.

[18] Fabian, M., Habala, P., Hajek, P., Santalucia, V., Pelant, J. & Zizler, V., *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, Springer, 2013.

[19] Flores, J., Hernández, F., Semenov, E. & Tradacete, P., *Strictly singular and power-compact operators on Banach lattices*, Israel J. Math. **188** (2012), 323–352. https://doi.org/10.1007/s11856-011-0152-z

[20] Flores, J., Hernández, F., Spinu, E., Tradacete, P. & Troitsky, V., *Disjointly homogeneous Banach lattices: duality and complementation*, J. Funct. Anal. **266** (2014), no. 9, 5858–5885. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2013.12.024

[21] Flores, J., Hernández, F. & Tradacete, P., *Disjointly homogeneous Banach lattices and applications. Ordered Structures And Applications*, 179–201, Trends Math., Springer, 2016.

[22] Flores, J., Tradacete, P. & Troitsky, V., *Disjointly homogeneous Banach lattices and compact products of operators*, J. Math. Anal. Appl. **354** (2009), no. 2, 657–663. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.01.025

[23] Groenewegen, G. & Meyer-Nieberg, P., *An elementary and unified approach to disjoint sequence theorems*, Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. **48** (1986), no. 3, 313–317.

[24] Kakutani, S., *Concrete representation of abstract (M)-Spaces (A characterization of the Space of Continuous Functions)*, Ann. of Math. (2). **42** (1941), 994–1024. https://doi.org/10.2307/1968778

[25] Lima, El. L., *Elementos de Topologia Geral*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.

[26] Lotz, H., *Extensions and liftings of positive linear mappings on Banach lattices*, Trans. Amer. Math. Soc. **211** (1975), 85–100. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1975-0383141-7

[27] Luiz, J. L. P., *A Propriedade de Schur em Espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2017.

[28] Luiz, J. L. P., *Propriedades de Schur Positivas em Reticulados de Banach e Reticulabilidade em Espaços de Sequências Vetoriais*, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2021.

[29] Megginson, R., *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer-Verlag, 1998. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0603-3

[30] Meyer-Nieberg, P., *Banach Lattices*, Springer-Verlag, 1991. https://doi.org/10.1007/978-3-642-76724-1

[31] Monção A. O., *Espaços de Operadores Lineares, Multilineares e Polinômios Regulares em Espaços de Riesz e Reticulados de Banach*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2022.

[32] Mujica, J., *Banach spaces not containing* l_1, Ark. Mat. **41** (2003), no. 2, 363 - 374. https://doi.org/10.1007/BF02390820

[33] Räbiger, F., *Lower 2-estimates for sequences in Banach lattices*, Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991), no. 1, 81–83. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1991-1023354-9

[34] Riesz, F., *Sur la décomposition des opérations linéaires*, Atti Congr. Internaz. Mat., Bologna **3** (1929), 143-148.

[35] Rosenthal, H., *A characterization of Banach spaces containing* ℓ_1, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **71** (1974), 2411–2413. https://doi.org/10.1073/pnas.71.6.2411

[36] Ryan, R., *The Dunford-Pettis property and projective tensor products*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **35** (1987), no. 11-12, 785–792.

[37] Schur, J., *Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen*, J. Reine Angew. Math. **151** (1921), 79–111. https://doi.org/10.1515/crll.1921.151.79

[38] Tradacete, P., *Positive Schur properties in spaces of regular operators*, Positivity **19** (2015), no. 2, 305–316.

[39] Wickstead, A., *Regular operators between Banach lattices*, Positivity, 255–279, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2007. https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8478-4_9

[40] Wnuk, W., *A note on the positive Schur property*, Glasgow Math. J. **31** (1989), no. 2, 169–172. https://doi.org/10.1017/S0017089500007692

[41] Wnuk, W., *Banach lattices with properties of the Schur type—a survey*, Confer. Sem. Mat., Univ. Bari, no. 249 (1993).

[42] Wnuk, W., *Some characterizations of Banach lattices with the Schur property*, Congress on Functional Analysis (Madrid, 1988), Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid 2 (1989), 217–224.

[43] Wnuk, W., *Some remarks on the positive Schur property in spaces of operators*, Funct. Approx. Comment. Math. **21** (1992), 65–68.

[44] Wojtaszczyk, P., *Banach Spaces for Analysts*, Cambridge University Press, 1991. https://doi.org/10.1017/CBO9780511608735

[45] Yeh, J., *Real analysis. Theory of measure and integration. Second edition*, World Scientific Publishing Co., 2006.

[46] Zaanen, A. *Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces.* Springer Berlin, Heidelberg, 1997.