



Universidade Federal de Uberlândia

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS DO PONTAL

GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

---

Trabalho de Conclusão de Curso

Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações

por

Felipe Farias Alves

Orientador: Prof. Dr. Edward Luís de Araújo

# Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações

Este exemplar corresponde à redação final do Trabalho de Conclusão de Curso devidamente corrigido e defendido por **Felipe Farias Alves** e aprovado pela comissão julgadora.

Ituiutaba, 25 de abril de 2024.

---

**Prof. Dr. Edward Luís de Araújo**

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Dr. Edward Luís de Araújo

---

Prof. Dr. Alessandro Santana Martins

---

Prof. Dr. André Ferreira e Pereira

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal, UFU, como requisito parcial para obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

# Conteúdo

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introdução</b>  | <b>3</b>  |
| <b>1 Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem</b>                      | <b>4</b>  |
| 1.1 Teoria preliminar . . . . .  | 4         |
| 1.2 Equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem. . . . .         | 6         |
| 1.2.1 Método de resolução . . . . .  | 6         |
| 1.3 Equações de variáveis separáveis . . . . .                                   | 9         |
| 1.3.1 Método de resolução . . . . .  | 9         |
| 1.4 Equações diferenciais exatas . . . . .                                       | 10        |
| 1.4.1 Método de resolução . . . . .  | 13        |
| 1.5 Equações diferenciais homogêneas . . . . .                                   | 13        |
| 1.5.1 Método de resolução . . . . .  | 14        |
| <b>2 Aplicações de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem</b>        | <b>17</b> |
| 2.1 Crescimento populacional . . . . .   | 17        |
| 2.1.1 O modelo de Malthus . . . . .  | 17        |
| 2.1.2 O modelo de Verhulst . . . . .   | 19        |
| 2.2 Decaimento radioativo . . . . .  | 21        |
| 2.3 O resfriamento de um corpo . . . . .   | 22        |
| 2.4 Queda de corpos . . . . .  | 24        |
| 2.4.1 Queda com resistência. . . . .   | 24        |
| 2.4.2 Queda livre. . . . .   | 26        |
| 2.5 Diluição de soluções . . . . .   | 28        |
| 2.6 Circuitos elétricos . . . . .  | 31        |
| 2.6.1 Circuito RL . . . . .  | 31        |
| 2.6.2 Circuito RC . . . . .  | 34        |
| 2.7 Trajetórias ortogonais . . . . .   | 36        |
| <b>3 Equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem</b>              | <b>38</b> |
| 3.1 Teoria preliminar . . . . .  | 38        |
| 3.2 Equações lineares homogêneas de segunda ordem . . . . .                      | 40        |
| 3.2.1 Redução de ordem . . . . .   | 42        |
| 3.2.2 Equação diferencial linear homogênea com coeficientes constantes . . . . . | 43        |
| 3.2.3 Método de resolução . . . . .  | 43        |
| 3.3 Equações lineares não homogêneas de segunda ordem . . . . .                  | 46        |
| 3.3.1 Coeficientes a determinar . . . . .  | 47        |
| 3.3.2 Variação de parâmetros . . . . .   | 49        |
| <b>4 Aplicações de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem.</b>        | <b>51</b> |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 4.1      | Vibrações mecânicas . . . . .                                       | 51        |
| 4.1.1    | Vibrações livres sem amortecimento. . . . .                         | 52        |
| 4.1.2    | Vibrações livres com amortecimento. . . . .                         | 53        |
| 4.1.3    | Vibrações forçadas amortecidas. . . . .                             | 54        |
| 4.1.4    | Vibrações forçadas sem amortecimento. . . . .                       | 54        |
| 4.2      | Circuitos elétricos . . . . .                                       | 55        |
| 4.3      | Curvas de perseguição . . . . .                                     | 56        |
| 4.4      | A catenária . . . . .   | 59        |
| <b>5</b> | <b>Equações diferenciais ordinárias com coeficientes variáveis.</b> | <b>63</b> |
| 5.1      | Teoria preliminar . . . . .   | 63        |
| 5.2      | Soluções na vizinhança de pontos ordinários . . . . .               | 64        |
| 5.3      | Soluções na vizinhança de pontos singulares regulares . . . . .     | 66        |
| 5.4      | Equações especiais . . . . .  | 71        |
| 5.4.1    | A equação de Bessel . . . . .                                       | 71        |
| 5.4.2    | Equação de Bessel de segunda espécie. . . . .                       | 73        |
| 5.4.3    | A equação paramétrica de Bessel. . . . .                            | 74        |
| 5.4.4    | A equação de Legendre . . . . .                                     | 74        |
| 5.4.5    | Polinômios de Legendre . . . . .                                    | 76        |
| <b>6</b> | <b>A transformada de Laplace</b>                                    | <b>78</b> |
| 6.1      | Teoria preliminar . . . . .   | 78        |
| 6.2      | A transformada inversa de Laplace . . . . .                         | 81        |
| 6.2.1    | Frações parciais. . . . .   | 82        |
| 6.3      | Convolução . . . . .  | 89        |
| 6.4      | Aplicações . . . . .  | 91        |
| 6.4.1    | Circuitos elétricos . . . . .                                       | 92        |
| 6.4.2    | Deflexão de vigas . . . . .   | 93        |
| 6.4.3    | Diluição de Soluções . . . . .                                      | 96        |
|          | <b>Referências</b>  | <b>99</b> |

# Lista de Figuras

|    |   |    |
|----|---|----|
| 1  | Representação geométrica de uma solução de uma equação. . . . . | 4  |
| 2  | Soluções da equação (1.11). . . . .                             | 8  |
| 3  | Soluções da equação (1.13). . . . .                             | 9  |
| 4  | Gráfico de (2.4). . . . .                                       | 18 |
| 5  | Gráfico de (2.9). . . . .                                       | 20 |
| 6  | Gráfico de (2.14). . . . .                                      | 22 |
| 7  | Gráfico de (2.18). . . . .                                      | 24 |
| 8  | Corpo em queda. . . . .   | 25 |
| 9  | Gráfico de (2.23). . . . .                                      | 26 |
| 10 | Gráfico de (2.30). . . . .                                      | 28 |
| 11 | Tanque com $V_0$ litros de salmoura. . . . .                    | 28 |
| 12 | Gráfico de (2.33). . . . .                                      | 30 |
| 13 | Gráfico de (2.36). . . . .                                      | 31 |
| 14 | Sistema RL em série. . . . .                                    | 32 |
| 15 | Gráfico de (2.40). . . . .                                      | 33 |
| 16 | Gráfico de (2.41). . . . .                                      | 34 |
| 17 | Sistema RC em série. . . . .                                    | 34 |
| 18 | Gráfico de (2.45). . . . .                                      | 35 |
| 19 | Trajетórias ortogonais. . . . .                                 | 37 |
| 20 | Mola comprimida/esticada. . . . .                               | 51 |
| 21 | Sistema RLC em série. . . . .                                   | 55 |
| 22 | Curva de perseguição. . . . .                                   | 57 |
| 23 | A curva catenária. . . . .                                      | 60 |
| 24 | Alguns polinômios de Legendre. . . . .                          | 77 |
| 25 | Gráfico de $E(t)$ em função de $t$ . . . . .                    | 92 |
| 26 | Eixo de simetria em (a), curva de deflexão em (b). . . . .      | 94 |
| 27 | Problema da diluição de soluções. . . . .                       | 96 |

*À memória do meu pai,  
Ederson Eustáquio Alves.*

# AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha mãe, Wanglei Farias Rolim, por todo apoio que me deu durante toda minha vida, a tudo que me ensinou e por seu esforço na minha criação.

Agradeço à minha esposa, Leticia Costa Paranaíba, pelo apoio e incentivo, assim como à sua família pelo acolhimento e confiança, em especial aos meus sogros, Luciano Andrade Paranaíba e Adriana Costa Paranaíba, pelo afeto e por se tornarem minha segunda família.

Agradeço em especial ao Prof. Dr. Edward Luís de Araújo pela paciência e empenho nos momentos de escrita e revisão deste trabalho, que me renderam tantas boas memórias.

Agradeço ao meu grande amigo Maurício Rodrigues de Souza por dividir comigo as dificuldades do começo do curso e pela ajuda com as imagens presentes nesse trabalho.

Agradeço a todo o corpo docente do curso de Matemática da UFU-Pontal pelos ensinamentos nesses cinco anos de curso, em especial ao Prof. Dr. Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira, que foi meu tutor no programa PET Matemática Pontal, pelo auxílio e pelo seu empenho como coordenador do curso de Matemática.

Por fim, agradeço a minha filha, Felícia Alves Paranaíba por me ensinar tanto pela vida e por dar sentido a ela.

## Resumo

Neste trabalho apresentamos a teoria básica das equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem, seus métodos de resolução e dedicamos uma atenção especial às aplicações, pois as equações diferenciais ordinárias modelam diversos fenômenos nas mais variadas áreas do conhecimento. Abordamos os fenômenos de crescimento populacional, decaimento radioativo, resfriamento de um corpo, diluição de soluções, vibrações mecânicas, curvas de perseguição e deflexão de vigas. Além disso, discutimos algumas técnicas avançadas para a resolução de equações diferenciais ordinárias como o método de resolução por séries de potência e transformada de Laplace.

**Palavras-chave:** Equações diferenciais ordinárias, aplicações, métodos de resolução.

## Abstract

In this work, we present the basic theory of first and second-order ordinary differential equations, their solution methods, and we dedicate special attention to applications, as ordinary differential equations model various phenomena in a wide range of fields of knowledge. We address phenomena such as population growth, radioactive decay, body cooling, solution dilution, mechanical vibrations, pursuit curves, and beam deflection. Additionally, we discuss some advanced techniques for solving ordinary differential equations, such as the power series method and the Laplace transform.

**Keywords:** Ordinary differential equations, applications, method of solving.

# INTRODUÇÃO

As Equações Diferenciais constituem um dos ramos mais belos e promissores da Ciência Matemática pela sua relação intrínseca com as mais variadas áreas do saber e pelas suas aplicações. Diversos fenômenos são modelados por Equações Diferenciais, como o crescimento populacional, a queda livre de um corpo, a desintegração radioativa, o resfriamento de um corpo, o sistema massa-mola, circuitos elétricos ligados em série, perseguição entre presa e predador, entre outros, comprovando a importância das Equações Diferenciais nas outras Ciências.

A compreensão dos fenômenos de crescimento populacional tem importância destacada na Biologia, Geografia e até mesmo nas Ciências Sociais ou Ciência Política, para prever investimentos na saúde e previdência social. A queda livre de um corpo é um fenômeno físico clássico e evidencia o importante papel da Matemática como uma ferramenta para a Física. A desintegração radioativa é um fenômeno de interesse na Química e também possibilita a datação de fósseis, importante para o entendimento da História e para a compreensão de como se deu o desenvolvimento da humanidade. O resfriamento de um corpo obedece à lei do resfriamento de Newton e a correta compreensão deste fenômeno é de extrema importância nas Ciências Forenses e Medicina Legal, ajudando os peritos a desvendar crimes. O conhecimento sobre o sistema massa-mola e o estudo de oscilações é fundamental nas engenharias, além do estudo da frequência de tais oscilações que se observa aplicações na música, na afinação de instrumentos e na engenharia para estudo de desgaste de peças. O entendimento do fenômeno de perseguição tem importância na robótica e em astrodinâmica, onde é aplicada no controle de satélites artificiais para otimizar as trajetórias das manobras orbitais.

O objetivo desse trabalho é apresentar a teoria que envolve as equações diferenciais ordinárias, seus métodos de resolução e aplicações. Foi realizada uma revisão bibliográfica da literatura nas obras [1], [2] e [3] que contribuíram com a construção desse trabalho. Para isso, este trabalho foi dividido em seis capítulos. No primeiro, estudamos as equações diferenciais de primeira ordem. No segundo, apresentamos as aplicações das equações de primeira ordem. No terceiro, estudamos as equações lineares de segunda ordem. No quarto, apresentamos as aplicações das equações de segunda ordem. No quinto, apresentamos o caso em que as equações diferenciais tem coeficientes variáveis e seu método de resolução. No sexto, apresentamos o método da Transformada de Laplace para a resolução de equações diferenciais.

# EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM

Neste capítulo, vamos explorar os conceitos fundamentais das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, suas propriedades e métodos de resolução.

## 1.1 Teoria preliminar

**Definição 1.1.** Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, é uma equação da forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad (1.1)$$

onde  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função definida no conjunto aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .

**Definição 1.2.** Uma função  $y = y(t)$  é uma solução da equação (1.1) em um intervalo  $J \subset \mathbb{R}$  se:

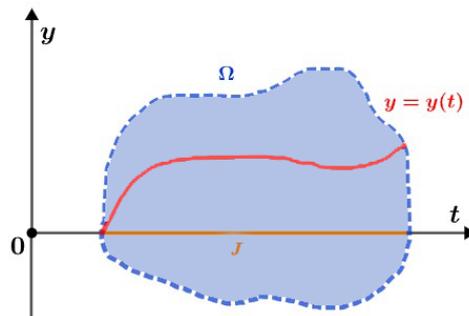
(i)  $(t, y(t)) \in \Omega, \quad \forall t \in J;$

(ii)  $y'(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in J,$

onde  $f$  é definida em (1.1).

A representação geométrica da definição 1.2 pode ser visualizada na figura 1.

Figura 1: Representação geométrica de uma solução de uma equação.



Fonte: Compilação do autor.

**Exemplo 1.1.** Considere a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{t}{y}. \quad (1.2)$$

Observe que a função  $y(t) = \sqrt{4-t^2}$ , com  $t \in (-2, 2)$  é uma solução da equação (1.2). De fato, se  $t \in (-2, 2)$ , então  $(t, \sqrt{4-t^2}) \in \Omega = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ , pois  $\sqrt{4-t^2} > 0$ . Além disso, temos que  $y'(t) = (\sqrt{4-t^2})' = -\frac{t}{y} = f(t, y)$  para todo  $t \in (-2, 2)$ .

Um problema de valor inicial associa a uma equação diferencial uma condição inicial, conforme a seguinte definição.

**Definição 1.3.** *A forma geral de um problema de valor inicial para a equação (1.1) é:*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

*A solução para tal problema, se existir, é uma curva que satisfaz a equação diferencial no intervalo  $J$  e passa pelo ponto  $(t_0, y_0)$ .*

Nem todo problema de valor inicial pode ser solucionado, e se houver uma solução, nem sempre podemos afirmar que é única. Observe os seguintes exemplos.

A equação

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0,$$

não tem solução em termos reais, logo, nenhum problema de valor inicial associado a tal equação pode ser solucionado.

O problema de valor inicial,

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ty^{\frac{1}{2}}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

apresenta duas soluções que passam pelo ponto  $(0, 0)$ , a saber  $y_1(t) = 0$  e  $y_2(t) = \frac{t^4}{16}$ . Logo, ambas as curvas satisfazem a equação e passam pelo ponto, não havendo uma solução única para o problema de valor inicial.

O próximo teorema estabelece condições para a existência e a unicidade de solução para um problema de valor inicial, sua demonstração será omitida mas pode ser encontrada em [4].

**Teorema 1.1.** *(O Teorema de Existência e Unicidade) Seja  $R$  uma região retangular no plano  $xy$  definida por  $a < x < b, c < y < d$ , que contém o ponto  $(x_0, y_0)$  em seu interior. Se  $f(x, y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  são contínuas em  $R$ , então existe um intervalo  $J$  contendo  $x_0$  e uma única função  $y(x)$  definida em  $J$  que satisfaz o problema de valor inicial (1.3).*

**Exemplo 1.2.** *Determine em qual intervalo está definida a solução do seguinte problema de valor inicial*

$$\begin{cases} ty' + 2y = 4t^2 \\ y(1) = 2. \end{cases} \quad (1.4)$$

**Solução:** Se em (1.4),  $t = 0$ , temos que  $y = 0$ , porém a função constante nula não é solução do problema de valor inicial. Assim, podemos assumir que  $t \neq 0$  e dividir ambos os lados da equação (1.4) por  $t$ , obtendo

$$y'(t) = \frac{4t^2 - 2y}{t}.$$

Logo,  $f(t, y) = \frac{4t^2 - 2y}{t}$  e  $f_y(t, y) = -\frac{2}{t}$ . Como a função só está definida para  $t > 0$  ou  $t < 0$  e é contínua, sendo  $t_0 = 1$ , temos  $J = (0, +\infty)$ . Portanto, o Teorema 1.1 garante a unicidade de solução no intervalo  $J$ .

**Exemplo 1.3.** *Determine se o seguinte problema de valor inicial tem solução única*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y^{\frac{1}{3}}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

**Solução:** A função  $f(t, y) = y^{\frac{1}{3}}$  é uma função contínua para todo  $(t, y)$  em seu domínio, porém  $f_y(t, y) = \frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}}$ , não está definida para  $y = 0$ . Logo, o teorema 1.1 não garante a unicidade de solução para o problema de valor inicial.

Não há um método geral para encontrar soluções para a equação (1.1). Por isso, na próxima seção, apresentaremos os principais tipos de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e seus respectivos métodos de resolução.

## 1.2 Equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem.

Nesta seção, apresentaremos as equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem e seu método de resolução.

**Definição 1.4.** *Uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem é uma equação da forma:*

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t), \tag{1.5}$$

onde  $p(t)$  e  $g(t)$  são funções contínuas em seu domínio. Se  $g(t) = 0$ , dizemos que a equação (1.5) é uma **equação diferencial ordinária linear homogênea de primeira ordem**, caso contrário, é uma **equação diferencial ordinária linear não homogênea de primeira ordem**.

Para resolver a equação (1.5), utilizaremos o método do fator integrante, o qual pode ser encontrado em [1] ou [2] e será apresentado a seguir.

### 1.2.1 Método de resolução

O **método do fator integrante** consiste em multiplicar ambos os lados da equação (1.5) por uma função  $\mu(t)$  adequada, resultando em um expressão que geralmente é facilmente

integrada, ou seja,

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)g(t). \quad (1.6)$$

O termo a esquerda na equação (1.6), pode ser tomado como a derivada de um produto desde que

$$\mu'(t) = p(t)\mu(t), \quad (1.7)$$

sendo  $\mu(t) \neq 0$ , dividimos ambos os lados da equação (1.7) e depois integramos de ambos os lados, obtendo

$$\frac{1}{\mu(t)}\mu'(t) = p(t) \Rightarrow \ln |\mu(t)| = \int p(t)dt + k.$$

Tomando  $k = 0$ , podemos aplicar a função exponencial de ambos os lados da equação, obtendo

$$|\mu(t)| = e^{\int p(t)dt}. \quad (1.8)$$

Voltando à expressão em (1.6), com a condição (1.7) satisfeita, o termo à esquerda é retornado como a derivada do produto entre as funções. Sendo assim, integramos ambos os lados de  $t_0$  até  $t$ , obtemos:

$$\mu(t)y(t) = \int_{t_0}^t \mu(s)g(s)ds + c,$$

onde  $c$  é a constante de integração. Portanto,

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \cdot \left[ \int_{t_0}^t \mu(s)g(s)ds + c \right],$$

ou seja,

$$y(t) = e^{-\int p(t)dt} \cdot \left[ \int_{t_0}^t e^{\int p(s)ds} g(s)ds + c \right]. \quad (1.9)$$

A expressão em (1.9) é a solução geral para a equação (1.5).

No caso particular em que a função  $g(t) = 0$ , ou seja, a equação é uma equação diferencial ordinária linear homogênea de primeira ordem, sua solução geral será dada por

$$y(t) = ce^{-\int p(t)dt}. \quad (1.10)$$

**Exemplo 1.4.** *Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:*

$$ty' + 2y = 4t^2. \quad (1.11)$$

**Solução:** Supondo  $t \neq 0$ , temos

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t.$$

Logo,  $p(t) = \frac{2}{t}$  e  $g(t) = 4t$ . Sendo assim, de (1.9), temos que a solução geral para a equação

(1.11) é

$$y(t) = t^2 + \frac{c}{t^2}. \quad (1.12)$$

**Exemplo 1.5.** *Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:*

$$ty' + 2y = 0. \quad (1.13)$$

**Solução:** Supondo  $t \neq 0$ , temos

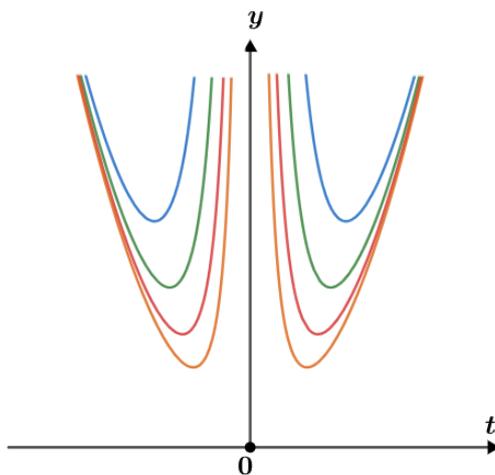
$$y' + \frac{2}{t}y = 0.$$

Sendo  $p(t) = \frac{2}{t}$ , de (1.10), a solução geral para a equação (1.13) é

$$y(t) = ct^{-2}. \quad (1.14)$$

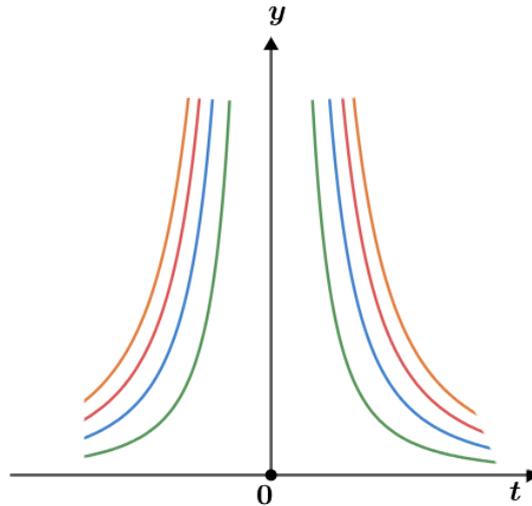
Note que as expressões em (1.12) e (1.14) representam uma família de curvas. Ao definir valores diferentes para a constante  $c$ , obtemos curvas diferentes para a solução da equação no intervalo  $J$ . Podemos observar isso nas figuras 2 e 3.

Figura 2: Soluções da equação (1.11).



Fonte: Compilação do autor.

Figura 3: Soluções da equação (1.13).



Fonte: Compilação do autor.

### 1.3 Equações de variáveis separáveis

Nesta seção apresentaremos as equações de variáveis separáveis e seu método de resolução.

**Definição 1.5.** Uma equação diferencial na forma

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{h(y)}, \quad h(y) \neq 0, \quad (1.15)$$

onde  $g(t)$ ,  $h(y)$  e  $h'(y)$  são funções contínuas num intervalo aberto de  $J$ , é chamada equação de variáveis separáveis.

As equações a seguir são equações na forma de (1.15),

$$\frac{dy}{dt} = t^2 y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{t}{y^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{e^t}{y}.$$

#### 1.3.1 Método de resolução

Seja  $y(t)$  é uma solução para a equação (1.15) no intervalo  $J$ , podemos escrever

$$h(y(t))y'(t) = g(t), \quad \forall t \in J. \quad (1.16)$$

Ao integramos de ambos os lados da equação (1.16) em relação a  $t$ , temos

$$\int h(y(t))y'(t)dt = \int g(t)dt + c.$$

Utilizando a definição de diferencial  $dy = y'(t)dt$ , obtemos

$$\int h(y)dy = \int g(t)dt + c,$$

que é a família de soluções dada implicitamente para a equação (1.15).

**Exemplo 1.6.** *Resolva a seguinte equação diferencial*

$$(1+t)\frac{dy}{dt} - y = 0.$$

**Solução:** Ao separar as variáveis, temos

$$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{1+t}dt,$$

que ao integrarmos de ambos os lados, obtemos

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{1+t}.$$

Resolvendo as integrais, obtemos

$$\ln|y| = \ln|1+t| + c_1 \Rightarrow y(t) = \pm e^{c_1}(1+t).$$

Logo a solução geral é  $y(t) = c(1+t)$ , sendo  $c = \pm e^{c_1}$ .

## 1.4 Equações diferenciais exatas

Nesta seção apresentaremos as equações diferenciais exatas e o seu método de resolução.

Seja  $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , uma função diferenciável, onde  $D$  é um subconjunto aberto, tal que a equação

$$\Phi(t, y) = c \tag{1.17}$$

define  $y = y(t)$  implicitamente no intervalo aberto  $J$ .

Derivando ambos os lados da equação (1.17) em relação a  $t$ , da regra da cadeia, obtemos

$$\nabla\Phi(t, y)\frac{d}{dt}(t, y) = 0,$$

ou seja,

$$(\Phi_t(t, y), \Phi_y(t, y)) \cdot \left(1, \frac{dy}{dt}\right) = 0.$$

Calculando o produto interno, obtemos

$$\Phi_t(t, y) + \Phi_y(t, y)\frac{dy}{dt} = 0. \tag{1.18}$$

A expressão (1.18) é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem e a função  $y(t)$  é uma solução de (1.18). Isso motiva a seguinte definição,

**Definição 1.6.** *Considere a equação*

$$P(t, y) + Q(t, y) \frac{dy}{dt} = 0. \quad (1.19)$$

*Se existir uma função  $\Phi(t, y)$  diferenciável em um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$  tal que*

$$\Phi_t(t, y) = P(t, y) \quad \text{e} \quad \Phi_y(t, y) = Q(t, y), \quad (1.20)$$

*então as soluções de (1.19) são dadas implicitamente pela equação  $\Phi(t, y) = c$  e a equação (1.19) é chamada de equação diferencial exata.*

**Exemplo 1.7.** *Mostre que a seguinte equação é exata:*

$$1 + \cos(t + y) + \cos(t + y) \frac{dy}{dt} = 0.$$

**Solução:** Seja  $\Phi(t, y) = t + \sin(t + y)$ , então,

$$\Phi_t(t, y) = 1 + \cos(t + y) = P(t, y) \quad \text{e} \quad \Phi_y(t, y) = \cos(t + y) = Q(t, y).$$

Logo, a equação é exata e sua solução geral é dada implicitamente por

$$t + \sin(t + y) = c.$$

O próximo teorema apresenta a condição que garante quando uma equação é exata,

**Teorema 1.2.** *Suponha que as funções  $P$  e  $Q$  tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas em uma região retangular  $R : \alpha < t < \beta, \gamma < y < \delta$ . Então a equação (1.19) é uma equação diferencial exata em  $R$  se, e somente se,*

$$P_y(t, y) = Q_t(t, y) \quad (1.21)$$

*em cada ponto de  $R$ . Isto é, existe uma função  $\Phi$  satisfazendo as equações (1.20) se, e somente se,  $P$  e  $Q$  satisfazem a equação (1.19).*

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Como a equação (1.19) é exata, então existe uma função  $\Phi(t, y)$  diferenciável satisfazendo as equações (1.20). Assim,

$$P_y(t, y) = \Phi_{ty}(t, y) \quad \text{e} \quad Q_t(t, y) = \Phi_{yt}(t, y).$$

Da hipótese,  $P$  e  $Q$  tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas, segue que  $\Phi(t, y)$  tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Logo, concluímos pelo Teorema de

Clairaut, que pode ser encontrado em [5], que

$$\Phi_{ty}(t, y) = \Phi_{yt}(t, y).$$

Portanto,

$$P_y(t, y) = Q_t(t, y).$$

( $\Leftarrow$ ) Se  $P(t, y)$  e  $Q(t, y)$  satisfazem a equação (1.21), então provaremos que a equação (1.19) é exata. A demonstração envolve a construção de uma função  $\Phi(t, y)$  satisfazendo as equações (1.20), ou seja

$$\Phi_t(t, y) = P(t, y) \quad \text{e} \quad \Phi_y(t, y) = Q(t, y).$$

Começamos integrando ambos os lados da equação a esquerda em relação a  $t$ , mantendo  $y$  constante, obtendo

$$\Phi(t, y) = \int P(t, y)dt + h(y), \tag{1.22}$$

onde  $h(y)$  é uma função arbitrária de  $y$ , fazendo o papel de um constante arbitrária em relação a  $t$ . Agora precisamos mostrar que é sempre possível escolher  $h(y)$  de modo que as equações (1.20) sejam satisfeitas. Derivando ambos os lados da equação (1.22) em relação a  $y$  e igualando o resultado a  $Q(t, y)$ , obtemos

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \int P(t, y)dt \right] + h'(y) = Q(t, y),$$

ou seja,

$$h'(y) = Q(t, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \int P(t, y)dt \right]. \tag{1.23}$$

Para que possamos determinar  $h(y)$  da equação (1.23), o membro da direita da igualdade tem que ser uma função que depende apenas da variável  $y$ . Para mostrar isso, basta derivar a expressão em relação a  $t$ , ou seja

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(t, y) - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \int P(t, y)dt \right] \right]. \tag{1.24}$$

Como a função  $P(t, y)$  e suas derivadas parciais de primeira ordem são contínuas, podemos mudar a ordem de integração em (1.24), obtendo

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(t, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(t, y) = 0,$$

por (1.21). Portanto, para determinar  $h(y)$ , integramos a equação (1.23), substituindo o resultado na equação (1.22). Assim, obtendo a função  $\Phi(t, y)$  desejada.

□

### 1.4.1 Método de resolução

Se sabemos que a equação é exata, como determinar a função  $\Phi(t, y)$ ?

(i) Como  $\Phi_t(t, y) = P(t, y)$ , temos

$$\Phi(t, y) = \int P(t, y)dt + h(y),$$

onde  $h(y)$  é determinada usando o fato de que

$$\Phi_y(t, y) = Q(t, y)$$

ou

(ii) Como  $\Phi_y(t, y) = Q(t, y)$ , temos

$$\Phi(t, y) = \int Q(t, y)dt + k(t),$$

onde  $k(t)$  é determinada usando o fato de que

$$\Phi_t(t, y) = P(t, y).$$

**Exemplo 1.8.** *Resolva a equação*

$$2ty + (t^2 - 1)\frac{dy}{dt} = 0.$$

**Solução:** Observe que as funções  $P(t, y) = 2ty$  e  $Q(t, y) = t^2 - 1$  são contínuas em todo o plano  $ty$ . Além disso, são funções cujo as derivadas parciais de primeira ordem também são contínuas. Temos também que  $P_y(t, y) = 2t = Q_t(t, y)$ , portanto, pelo Teorema 1.2, a equação é exata.

Seja  $\Phi_t(t, y) = 2ty$ , após integrarmos em relação a  $t$ , temos que  $\Phi(t, y) = t^2y + g(y)$ .

Ao derivar a última expressão com relação a  $y$  e igualando o resultado a  $Q(t, y)$ , temos

$$\Phi_y(t, y) = t^2 + g'(y) = t^2 - 1.$$

Portanto  $g'(y) = -1$  e  $g(y) = -y + k$ . Logo, a solução geral para a equação é dada implicitamente pela equação

$$t^2y - y = c.$$

## 1.5 Equações diferenciais homogêneas

Nesta seção, apresentaremos as equações diferenciais homogêneas e seu método de resolução. As equações recebem esse nome devido a presença de funções homogêneas na equação.

Portanto, antes de apresentarmos as equações em si, vamos relembrar a definição de funções homogêneas.

**Definição 1.7.** Uma função  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é dita homogênea de grau  $n$ , se

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y), \text{ com } t, x, y \in \mathbb{R}$$

para algum  $n \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 1.9.** Determine o grau de homogeneidade das funções abaixo:

a)  $f(x, y) = 6xy^3 - x^2y^2;$

b)  $g(x, y) = x^2 - y.$

**Solução:**

a) Observe que podemos escrever a função como  $f(tx, ty) = t^4 f(x, y)$ . Portanto, a função é homogênea de grau 4.

b) Observe que a função pode ser escrita como  $g(tx, ty) = t^2 x^2 - ty$ . Portanto, a função não é homogênea.

**Definição 1.8.** Uma equação diferencial da forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1.25}$$

é chamada de homogênea, se  $M$  e  $N$  são funções homogêneas do mesmo grau.

As seguintes equações são equações homogêneas,

$$2x^3ydx + (x^4 + y^4)dy = 0 \quad \text{e} \quad (x - y)dx + xdy = 0.$$

### 1.5.1 Método de resolução

Equações como a apresentada em (1.25) podem ser resolvidas por meio de uma substituição algébrica. Especificamente, ao substituirmos  $y = ux$  ou  $x = vy$ , onde  $u$  e  $v$  são as novas variáveis independentes, transformamos a equação em uma equação diferencial de primeira ordem separável. Para ver isso, ao considerarmos  $y = ux$ , temos  $dy = udx + xdu$ . Substituindo tais resultados em (1.25), obtemos:

$$M(x, ux)dx + N(x, ux)(udx + xdu) = 0. \tag{1.26}$$

Como  $M$  e  $N$  são funções homogêneas, podemos escrever a equação (1.26) como

$$x^n M(1, u)dx + x^n N(1, u)(udx + xdu) = 0.$$

Supondo  $x^n \neq 0$ , temos

$$(M(1, u) + uN(1, u))dx + xN(1, u)du = 0.$$

Desse modo,

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1, u)du}{M(1, u) + uN(1, u)} = 0.$$

Essa última expressão é uma equação de variáveis separáveis, que pode ser resolvida pelo método visto na seção 1.3. A demonstração para a substituição  $x = vy$  é análoga a apresentada.

**Exemplo 1.10.** *Resolva a equação*

$$(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0.$$

**Solução:** Observe que  $M(x, y)$  e  $N(x, y)$  são funções homogêneas de grau dois. Tomando  $y = ux$ , temos  $dy = udx + xdu$ . Logo,

$$(x^2 + u^2x^2)dx + (x^2 - ux^2)[udx + xdu] = 0,$$

ou seja,

$$x^2(1 + u)dx + x^3(1 - u)du = 0,$$

dividindo ambos os lados da equação por  $x^2 \neq 0$  e separando as variáveis, encontramos

$$\left[-1 + \frac{2}{1 + u}\right] du = -\frac{dx}{x}. \quad (1.27)$$

Integrando ambos os lados da equação (1.27), encontramos

$$-u + 2 \ln |1 + u| + \ln |x| = \ln |c|.$$

Sendo  $u = \frac{y}{x}$ , temos

$$-\frac{y}{x} + 2 \ln \left|1 + \frac{y}{x}\right| + \ln |x| = \ln |c|.$$

Podemos reescrever como,

$$\ln \left| \frac{(x + y)^2}{cx} \right| = \frac{y}{x}.$$

Obtendo a solução implícita

$$(x + y)^2 = cxe^{\frac{y}{x}}.$$

**Exemplo 1.11.** *Resolva a seguinte equação*

$$y' = \frac{2xye^{\left(\frac{x}{y}\right)^2}}{y^2 + y^2e^{\left(\frac{x}{y}\right)^2} + 2x^2e^{\left(\frac{x}{y}\right)^2}}.$$

**Solução:** Tal equação é homogênea de grau 2, utilizaremos a substituição  $x = vy$ . Sendo assim, ao realizar a substituição e separar as variáveis, obtemos

$$\frac{1}{y} dy = \frac{2ve^{v^2}}{1 + e^{v^2}} dv.$$

Ao integrar a equação de ambos os lados, temos

$$\ln |y| = \ln |1 + e^{v^2}| + c_1.$$

Logo, temos que a solução da equação será

$$y(t) = c(1 + e^{v^2}) \quad \Rightarrow \quad y(t) = c(1 + e^{(\frac{x}{y})^2}).$$

Assim, finalizamos a teoria básica de equações de primeira ordem. No próximo capítulo, veremos algumas aplicações das equações de primeira ordem.

# APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM

Neste capítulo, apresentaremos algumas das aplicações mais comuns das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e suas soluções.

## 2.1 Crescimento populacional

Nesta seção apresentaremos dois modelos clássicos para o problema de crescimento populacional.

### 2.1.1 O modelo de Malthus

Thomas Robert Malthus (1766- 1834), segundo [2], foi um economista britânico. Se formou na Universidade de Cambridge em matemática aos 22 anos e em filosofia aos 25. Seu primeiro livro, *An Essay on the Principle of Population* (1798), é considerado como o início dos estudos sobre demografia. Malthus defendia a ideia de que “**A variação da população é diretamente proporcional à população existente**”.

Seja  $y = y(t)$ , uma função que descreve a população no instante  $t$ , então pelo modelo de Malthus, temos

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y, \quad (2.1)$$

onde  $\alpha$  é a constante de proporcionalidade.

Observe que a equação é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem linear homogênea, cujo método de solução foi visto na seção 1.2. Sendo assim, sua solução geral é dada por

$$y(t) = ce^{\alpha t}. \quad (2.2)$$

Sendo  $y(0) = P_0$ , temos que  $c = P_0$ . Logo, a solução do problema é

$$y(t) = P_0 e^{\alpha t}. \quad (2.3)$$

**Exemplo 2.1.** *O número de bactérias cresce numa razão proporcional à quantidade presente. Se a população triplica em uma hora e a população inicial é  $P_0$ , qual será a população após 1 h 30 min? Em quanto tempo a população dobra?*

**Solução:** Seja  $y = y(t)$  a população de bactérias no instante  $t$ , como o fenômeno é modelado pela equação (2.1), tendo que  $y(0) = P_0$ , sua solução será dada por (2.3). Para determinar

o valor de  $\alpha$ , sendo  $t$  medido em horas, utilizamos de que  $y(1) = 3P_0$ , logo

$$e^\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = \ln(3),$$

obtemos a função

$$y(t) = P_0 e^{\ln(3)t}. \quad (2.4)$$

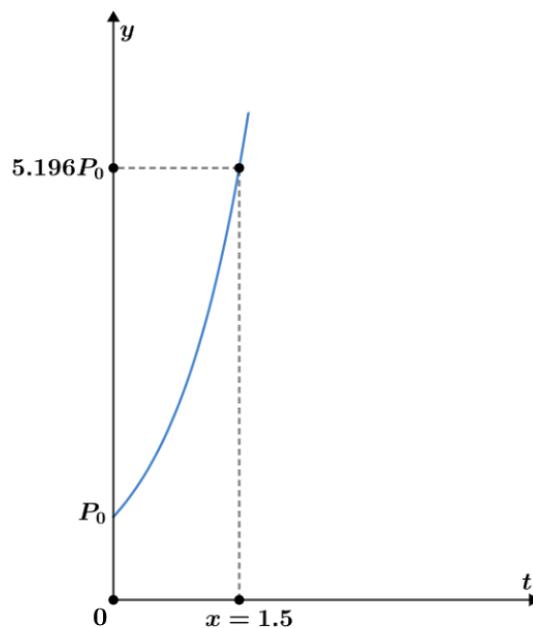
Para determinar a população após 1h 30 min, fazemos  $t = 1,5$  em (2.4), obtendo

$$y(1,5) = P_0 e^{\ln(3) \cdot 1,5} = 5,196P_0,$$

ou seja, após 1h 30min a população era de  $5,196P_0$ .

Na figura 4, podemos observar o gráfico da função (2.4).

Figura 4: Gráfico de (2.4).



Fonte: Compilação do autor.

Para determinar o valor de  $t$ , para quando  $y(t) = 2P_0$ , substituímos o valor na equação (2.4). Assim, obtemos

$$2P_0 = P_0 e^{\ln(3)t} \Rightarrow t = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} = 0,6509.$$

Logo, a população de bactérias dobra em 37,9 minutos.

### 2.1.2 O modelo de Verhulst

O modelo de Malthus fornece uma representação de crescimento populacional, segundo [1], apropriado quando a população é “pequena”. Na realidade, a quantidade e qualidade de recursos do ambiente associado a ação de predadores, limita o crescimento de uma população. Portanto, adicionamos um termo à equação (2.1) que estabeleça um limite para o crescimento populacional. Seja  $y = y(t)$  a população num instante  $t$ , o modelo, descrito em [2], conhecido como modelo logístico de Verhulst, é dado pela equação:

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y \left(1 - \frac{y}{\beta}\right), \quad (2.5)$$

onde  $\alpha > 0$  é a taxa de crescimento intrínseca da população e  $\beta > 0$  é a capacidade máxima de suporte do ambiente. O termo  $\left(1 - \frac{y}{\beta}\right)$  limita o crescimento da população à medida que ela se aproxima de  $\beta$ . Suponha que a população no instante  $t = 0$  seja  $y_0$ .

A equação (2.5) é conhecida como **equação logística**, e é uma equação diferencial de variáveis separáveis, cujo método de solução foi visto na seção (1.3). Tal equação em geral apresenta soluções dadas implicitamente, mas nesse caso queremos determinar uma solução explícita.

Observe primeiramente que

$$\alpha y \left(1 - \frac{y}{\beta}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \text{ ou } y = \beta,$$

ou seja,  $y(t) \equiv 0$  ou  $y(t) \equiv \beta$  são soluções triviais para a equação.

Supondo que  $y(t) \neq 0$  e  $y(t) \neq \beta$ , separando as variáveis em (2.5), obtemos

$$\frac{1}{y \left(1 - \frac{y}{\beta}\right)} dy = \alpha dt. \quad (2.6)$$

Utilizando frações parciais e integrando de ambos os lados de (2.6), obtemos

$$\int \left( \frac{1}{y} + \frac{\frac{1}{\beta}}{1 - \frac{y}{\beta}} \right) dy = \int \alpha dt,$$

ou seja,

$$\ln |y| - \ln \left| 1 - \frac{y}{\beta} \right| = \alpha t + c_1.$$

Utilizando a propriedade do logaritmo, reescrevemos essa última como

$$\ln \left| \frac{y}{1 - \frac{y}{\beta}} \right| = \alpha t + c_1.$$

Aplicando a função exponencial de ambos os lados da equação, temos

$$\frac{y}{1 - \frac{y}{\beta}} = ce^{\alpha t}, \quad \text{onde } c = e^{c_1}. \quad (2.7)$$

Impondo a condição inicial  $y(0) = y_0$ , obtemos  $c = \frac{y_0}{1 - \frac{y_0}{\beta}}$ . Portanto, temos a solução

$$y(t) = \frac{\beta y_0}{e^{-at}(\beta - y_0) + y_0}. \quad (2.8)$$

**Exemplo 2.2.** *Cinco protozoários foram colocados num tubo de ensaio com nutrientes. No segundo dia haviam 200 e a população cresceu até saturar o tubo, num total de 375 protozoários no tubo,  $t$  dias após o início do experimento. Determine a curva que descreve o crescimento da população.*

**Solução:** Sendo  $y_0 = 5$  e  $\beta = 375$ , temos da equação (2.8),

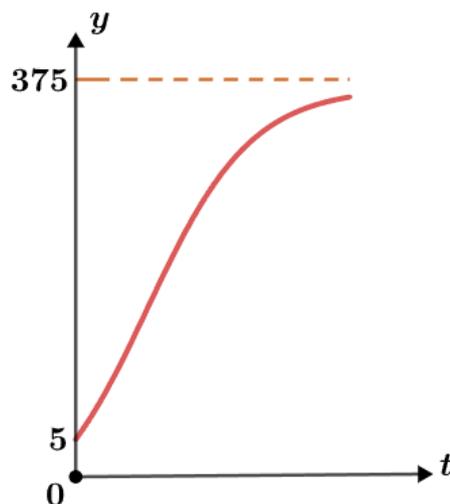
$$y(t) = \frac{375 \cdot 5}{e^{-at}(375 - 5) + 5}.$$

Sabendo que  $y(2) = 200$ , temos que  $\alpha = 2,2188$ . Portanto, a curva que descreve o crescimento de tal população é

$$y(t) = \frac{1875}{370e^{-2,2188t} + 5}. \quad (2.9)$$

Na figura 5, podemos observar que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 375$ .

Figura 5: Gráfico de (2.9).



Fonte: Compilação do autor.

## 2.2 Decaimento radioativo

O decaimento radioativo é um processo natural no qual núcleos atômicos instáveis perdem energia através da emissão de partículas subatômicas ou radiação e transformam-se em núcleos mais estáveis. “**Tal decaimento é proporcional a quantidade de átomos presentes no meio**”. Tal aplicação é descrita em [3].

Seja  $N = N(t)$  a quantidade de átomos presentes em uma amostra em um determinado instante  $t$ , então o decaimento é modelado pela seguinte equação:

$$\frac{dN}{dt} = kN, \quad (2.10)$$

onde  $k$  é a constante de decaimento.

Observe que tal modelo é análogo ao visto na seção 2.1.

A equação (2.10) é uma equação de primeira ordem linear homogênea, cuja solução geral foi vista na seção 1.2 e é dada por

$$N(t) = ce^{kt}. \quad (2.11)$$

Sabendo que  $N(0) = N_0$ , temos que  $c = N_0$ , sendo assim, a solução do problema é

$$N(t) = N_0e^{kt} \quad (2.12)$$

**Exemplo 2.3.** *Em uma determinada amostra, inicialmente existem 50 miligramas de material, se após duas horas, esse material perde 10% da sua massa original, determinar a expressão da massa remanescente em um instante  $t$ , a massa do material após quatro horas e o tempo para qual o material perde metade da sua massa original.*

**Solução:** Seja  $N = N(t)$  a quantidade de material presente na amostra, como o problema é modelado pela equação (2.10), sabendo que  $y(0) = 50$ , temos da equação (2.12), a função

$$N(t) = 50e^{kt}. \quad (2.13)$$

Supondo que  $t$  é medido em horas, temos que  $y(2) = 45$ , logo

$$45 = 50e^{2k} \Rightarrow k = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{45}{50} \right) \approx -0,053.$$

Portanto, a função solução para a equação é

$$N(t) = 50e^{-0,053t} \quad (2.14)$$

Para determinar a quantidade de material após 4 horas, fazemos  $t = 4$  em (2.14), logo

$$N(4) = 50e^{-0,053(4)} = 50(0,809) = 40,5 \text{mg.}$$

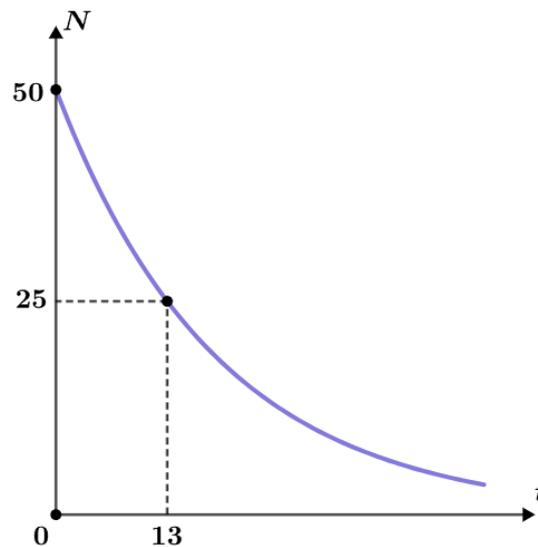
Portanto, após 4 horas, teremos 40,5 mg de material da amostra.

Para determinar em que instante a massa se reduz pela metade, fazemos  $N = 25$  em (2.14), obtendo

$$25 = 50e^{-0,053t} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow t = 13.$$

Portanto, o material será reduzido pela metade após 13 horas, como podemos observar no gráfico da função (2.14) presente na figura 6.

Figura 6: Gráfico de (2.14).



Fonte: Compilação do autor.

## 2.3 O resfriamento de um corpo

Nessa seção apresentaremos o fenômeno de resfriamento de um corpo e utilizaremos a lei de resfriamento de Newton para modelar tal fenômeno.

A lei de resfriamento de Newton que pode ser encontrada em [1] afirma que: **“A taxa de variação de temperatura de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura constante do ambiente”**.

Se  $T = T(t)$  é a temperatura de um corpo em um instante  $t$  qualquer e  $T_a$  é a temperatura do ambiente, pela lei do resfriamento, temos,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a), \quad (2.15)$$

onde  $k$  é a constante de proporcionalidade.

A equação (2.15) é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem linear não ho-

mogênea, cuja solução geral foi vista na seção 1.2 e é dada por

$$T(t) = T_a + ce^{kt}.$$

Seja  $T(0) = T_0$ , temos que  $c = T_0 - T_a$ , logo, a solução para o problema é

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{kt}. \quad (2.16)$$

A seguir, apresentaremos o exemplo que pode ser encontrado em [3].

**Exemplo 2.4.** *Em um quarto fechado, cuja temperatura ambiente permanece constante a  $28,7^\circ C$ , coloca-se certa quantidade de café numa xícara a uma temperatura inicial de  $84^\circ C$ . Após 5 minutos o café atinge  $76,2^\circ C$ . Determine, a temperatura do café após 10 minutos, e em quanto tempo o café chegará à temperatura de  $30^\circ C$ .*

**Solução:** Pelo enunciado, temos que  $T_a = 28,7^\circ C$ . Sabendo que  $T(0) = 84^\circ C$ , temos a equação

$$T(t) = 28,7 + 55,3e^{kt} \quad (2.17)$$

Supondo que  $t$  seja dado em minutos, temos pelo enunciado que  $t(5) = 76,2^\circ C$ , logo, de (2.17), obtemos

$$76,2 = 28,7 + 55,3e^{5k} \Rightarrow e^{5k} = 0,86 \Rightarrow k = -0,03.$$

Assim, a função que descreve a temperatura do café em relação ao tempo é

$$T(t) = 28,7 + 55,3e^{-0,03t}. \quad (2.18)$$

Para determinar a temperatura do café após 10 minutos, fazemos  $t = 10$  em (2.18), logo

$$T(10) = 28,7 + 55,3e^{-0,03(10)} = 69,9^\circ C.$$

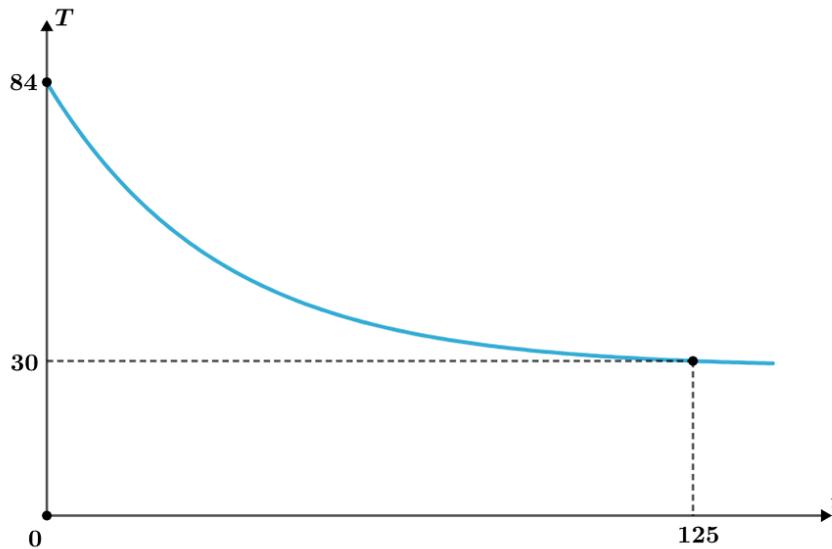
Portanto, após 10 minutos, a temperatura do café será de  $69,9^\circ C$ .

Para determinar em que instante a temperatura do café será de  $30^\circ C$ , fazemos  $T(t) = 30$  em (2.18), obtendo

$$30 = 28,7 + 55,3e^{-0,03t} \Rightarrow e^{-0,03t} = 0,023508 \Rightarrow t = 125,014.$$

Portanto, a temperatura do café será de  $30^\circ C$  em aproximadamente duas horas e cinco minutos, como podemos observar no gráfico de (2.18) presente na figura 7.

Figura 7: Gráfico de (2.18).



Fonte: Compilação do autor.

## 2.4 Queda de corpos

Nessa seção, estudaremos o fenômeno da queda de corpos, considerando ou não a resistência do ar. Tal fenômeno é estudado a partir da Segunda Lei de Newton, que diz que **“O produto entre a massa do objeto e sua aceleração é igual à força total atuando sobre o objeto”**, ou seja,

$$\vec{F}_r = m\vec{a}, \quad (2.19)$$

onde  $m$  é a massa do corpo,  $\vec{a}$  a sua aceleração e  $\vec{F}$  é a força total agindo sobre o corpo. Tal aplicação pode ser encontrada em [1] e [2].

### 2.4.1 Queda com resistência.

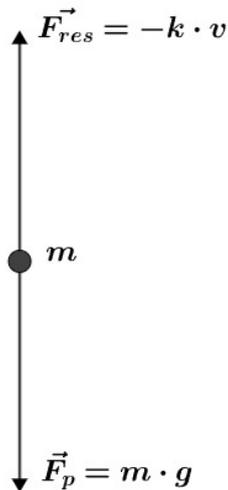
Nessa seção, estudaremos o fenômeno da queda de um corpo considerando a resistência do ar. Seja  $v = v(t)$  a velocidade do corpo em queda em um instante  $t$ , considerando para baixo como sentido positivo, temos as seguintes forças agindo sobre o corpo:

(i) Força peso: dada por  $\vec{F}_p = m \cdot \vec{g}$ , em que  $\vec{g}$  é a aceleração da gravidade.

(ii) Força de resistência do ar: varia de acordo com o corpo que está em queda, mas em geral é proporcional a velocidade em que o corpo se encontra. Logo, é dada por  $\vec{F}_{res} = -kv$ , onde  $k$  é a constante de resistência.

Podemos observar o fenômeno na figura 8.

Figura 8: Corpo em queda.



Fonte: Compilação do autor.

Logo, temos que a força resultante nesse sistema, será a soma entre a força peso e a força de resistência  $\vec{F}_r = \vec{F}_p + F_{res}$ .

Substituindo na equação (2.19), obtemos

$$mg - kv = ma.$$

Sendo  $a = \frac{dv}{dt}$ , temos

$$m \frac{dv}{dt} + kv = mg,$$

ou seja,

$$\frac{dv}{dt} + \frac{kv}{m} = g. \quad (2.20)$$

que é uma equação de primeira ordem linear não homogênea, cujo método de solução foi visto na seção 1.2. Sendo assim, sua solução geral é

$$v(t) = \frac{m \cdot g}{k} + ce^{-\frac{kt}{m}}. \quad (2.21)$$

**Exemplo 2.5.** Uma bola de aço de 1 kg cai de uma altura de 1000 m sem velocidade inicial. Na queda, a bola experimenta uma resistência do ar igual a 0,25N. Determine a velocidade limite da bola.

**Solução:** Seja  $v(t)$  a velocidade da bola em um instante  $t$ , sendo  $m = 1\text{kg}$ ,  $g = 9,8\text{ m/s}^2$  e  $k = 0,25\text{N}$ , temos

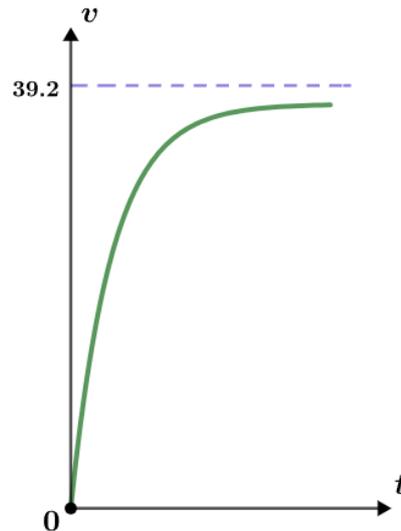
$$v(t) = 39,2 + ce^{-0,25t}. \quad (2.22)$$

Sabendo que  $v(0) = 0$ , temos  $c = -39,2$ . Assim, a função solução para o problema é

$$v(t) = 39,2 - 39,2e^{-0,25t}. \quad (2.23)$$

Observe que  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 39,2$ , logo a velocidade limite da bola é de 39,2 m/s, como pode ser visto na figura 9.

Figura 9: Gráfico de (2.23).



Fonte: Compilação do autor.

### 2.4.2 Queda livre.

Observe que se a resistência do ar for desprezada, a equação (2.20) se reduz a

$$\frac{dv}{dt} = g, \quad (2.24)$$

que é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem de variáveis separáveis cujo método de solução é apresentado na seção 1.3. Portanto, a sua solução geral é

$$v(t) = gt + c. \quad (2.25)$$

Sabendo que  $v(0) = v_0$ , temos que  $c = v_0$ , assim, a solução para o problema é

$$v(t) = gt + v_0. \quad (2.26)$$

Seja  $x = x(t)$  a posição do corpo em algum instante  $t$ , da equação (2.26), temos

$$\frac{dx}{dt} = gt + v_0.$$

Tal equação é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem linear não homogênea, cujo método de solução foi visto na seção 1.2. Portanto, sua solução geral é

$$x(t) = -\frac{v_0}{g} + ce^{-gt}. \quad (2.27)$$

**Exemplo 2.6.** *Um corpo de 75 kg cai de uma altura de 30 m com velocidade inicial nula. Admitindo que não haja resistência do ar, determine a expressão da velocidade do corpo no instante  $t$ , a expressão para a posição do corpo no instante  $t$  e o tempo necessário para o corpo atingir o solo.*

**Solução:** Seja  $v = v(t)$  a velocidade do corpo em um instante  $t$ , sendo  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  e  $v_0 = 0$ , como não há resistência de ar, de (2.26), temos que a função que descreve a velocidade do corpo é

$$v(t) = 9,8t. \quad (2.28)$$

Seja  $x = x(t)$ , a posição do corpo em um instante  $t$ , temos que  $v = \frac{dx}{dt}$ , logo de (2.28), a equação

$$\frac{dx}{dt} = 9,8t. \quad (2.29)$$

A solução de (2.29) é dada pela função

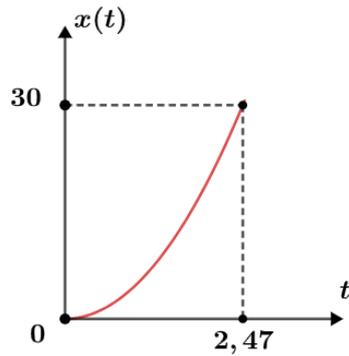
$$x(t) = 4,9t^2 + c.$$

Sabendo que  $x(0) = 0$ , temos que  $c = 0$ , logo, a solução para o problema é

$$x(t) = 4,9t^2. \quad (2.30)$$

Para determinar o tempo gasto para o corpo chegar ao solo, fazemos  $x(t) = 30$ . Sendo  $t$  medido em segundos, obtemos o tempo de 2,47s, como podemos observar na figura 10.

Figura 10: Gráfico de (2.30).

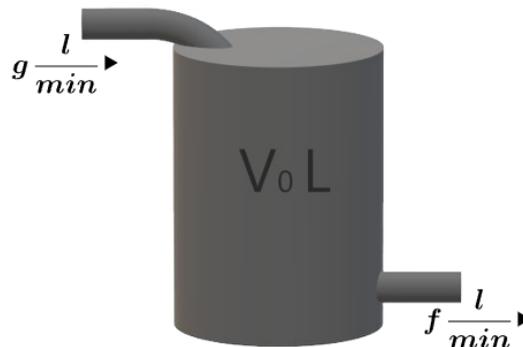


Fonte: Compilação do autor.

## 2.5 Diluição de soluções

O problema que envolve diluição de soluções tem uma aplicação especial na área da Química. Nesta seção estudaremos o modelo simplificado de diluição de soluções, o qual é apresentado em [3]. Vamos considerar um tanque contendo inicialmente  $V_0$  litros de salmoura com  $a$  kg de sal como mostrado na figura 11. Outra solução de salmoura, contendo  $b$  kg de sal por litro é despejada nesse tanque a uma taxa de  $g$  l/min, enquanto, simultaneamente, a mistura, bem agitada e uniforme, sai do tanque à taxa de  $f$  l/min. O problema consiste em determinar a quantidade de sal no tanque no instante de tempo  $t$ .

Figura 11: Tanque com  $V_0$  litros de salmoura.



Fonte: Compilação do autor.

Seja  $Q = Q(t)$  a quantidade de sal, em quilos, no tanque em um instante de tempo  $t$ . A taxa de variação de sal no tanque, será dada pela diferença entre a taxa de sal que é

adicionado ao tanque pela taxa de sal que sai do tanque. Temos dois casos a considerar:

(i) Se  $f \neq g$ , então,

a taxa de entrada de sal é dada por

$$b \frac{\text{kg}}{\text{l}} \cdot g \frac{\text{l}}{\text{min}} = bg \frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

e a taxa de saída de sal é dada por

$$\frac{Q}{V_0 + gt - ft} \frac{\text{kg}}{\text{l}} \cdot f \frac{\text{l}}{\text{min}} = f \left( \frac{Q}{V_0 + gt - ft} \right) \frac{\text{kg}}{\text{min}}.$$

Portanto, a variação de sal no tanque será dada por

$$\frac{dQ}{dt} + f \left( \frac{Q}{V_0 + gt - ft} \right) = bg, \quad (2.31)$$

que é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem linear não homogênea, que pode ser resolvida utilizando o método visto na seção 1.2. Sua solução é

$$Q(t) = b(V_0 + gt - ft) + c(V_0 + gt - ft)^{\frac{f}{f-g}},$$

onde  $c$  é constante. Sabendo em  $Q(0) = a$ , temos que  $c = aV_0^{\frac{f}{g-f}} - bV_0^{\frac{g}{g-f}}$ , sendo assim, a solução para o problema é

$$Q(t) = b(V_0 + gt - ft) + (aV_0^{\frac{f}{g-f}} - bV_0^{\frac{g}{g-f}})(V_0 + gt - ft)^{\frac{f}{f-g}}. \quad (2.32)$$

**Exemplo 2.7.** *Um tanque de 50 litros contém inicialmente 10 litros de água pura. Uma solução de salmoura contendo 0,1 kg de sal por litro, é adicionada ao tanque à razão de 4 l/min, enquanto a mistura sai do tanque à razão de 2 l/min. Determine o instante em que ocorre o transbordamento e a quantidade de sal no tanque neste instante  $t$ .*

**Solução:** O volume da mistura da salmoura no instante  $t$  é dada por

$$V_0 + gt - ft.$$

Sabendo que  $V_0 = 10$ ,  $g = 4$  e  $f = 2$ , temos que o volume da mistura no instante  $t$  é dado por

$$10 + 2t.$$

Para determinar o instante do transbordamento, fazemos

$$2t + 10 = 50,$$

obtendo  $t = 20$ . Portanto, o transbordamento ocorre após 20 minutos.

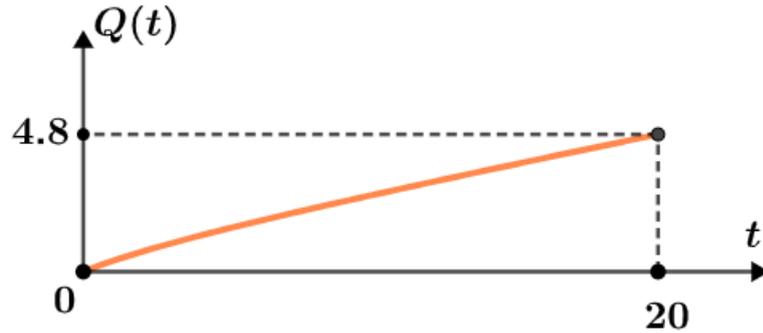
Seja  $Q(t)$  a quantidade de sal no tanque em um instante  $t$ , sendo  $a = 0$ ,  $b = 0,1$ ,  $V_0 = 10$ ,

$g = 4$  e  $f = 2$ , substituímos tais valores em (2.32), obtendo a solução

$$Q(t) = \frac{0,4t^2 + 4t}{2t + 10}. \quad (2.33)$$

Para determinar a quantidade de sal no momento do transbordamento, fazemos  $t = 20$  na função (2.33), obtendo 4,8 kg de sal. O gráfico da função (2.33) pode ser observado na figura 12.

Figura 12: Gráfico de (2.33).



Fonte: Compilação do autor.

(ii) Se  $f = g$ , então, a taxa de entrada de sal é dada por

$$b \frac{\text{kg}}{\text{l}} \cdot g \frac{\text{l}}{\text{min}} = bg \frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

e a taxa de saída de sal é dada por

$$\frac{Q}{V_0} \frac{\text{kg}}{\text{l}} \cdot f \frac{\text{l}}{\text{min}} = f \left( \frac{Q}{V_0} \right) \frac{\text{kg}}{\text{min}}.$$

Portanto, a variação de sal no tanque será dada por

$$\frac{dQ}{dt} + f \left( \frac{Q}{V_0} \right) = bg, \quad (2.34)$$

que é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem linear não homogênea, que pode ser resolvida utilizando o método visto na seção 1.2, sua solução é

$$Q(t) = \frac{bgV_0}{f} + ce^{-\frac{ft}{V_0}}.$$

Sabendo que  $Q(0) = a$ , temos que  $c = \frac{fa - bgV_0}{f}$ , logo, a solução para o problema é

$$Q(t) = \frac{bgV_0}{f} + \left( \frac{fa - bgV_0}{f} \right) e^{-\frac{ft}{V_0}}. \quad (2.35)$$

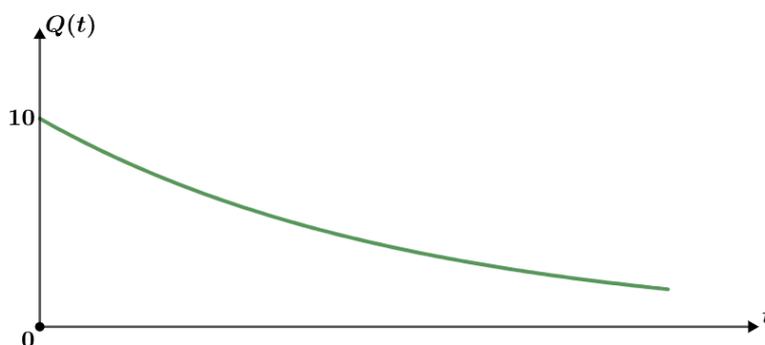
**Exemplo 2.8.** Um tanque contém inicialmente 350 litros de salmoura com 10 kg de sal. Água pura começa a ser adicionada ao tanque a uma taxa de 20 l/min, enquanto a mistura sai do tanque à mesma taxa. Determine a quantidade de sal no tanque no instante  $t$ .

**Solução:** Seja  $Q(t)$  a quantidade de sal no tanque no instante  $t$ , sabendo que  $V_0 = 350$ ,  $a = 10$ ,  $b = 0$  e  $f = g = 20$ , temos que a solução é dada por

$$Q(t) = 10e^{\frac{-2t}{35}}, \quad (2.36)$$

cujo gráfico pode ser visualizado na figura 13.

Figura 13: Gráfico de (2.36).



Fonte: Compilação do autor.

Pela figura 13, podemos observar que a quantidade de sal no tanque, com o passar do tempo, se aproxima de  $b$ , que nesse caso é 0.

## 2.6 Circuitos elétricos

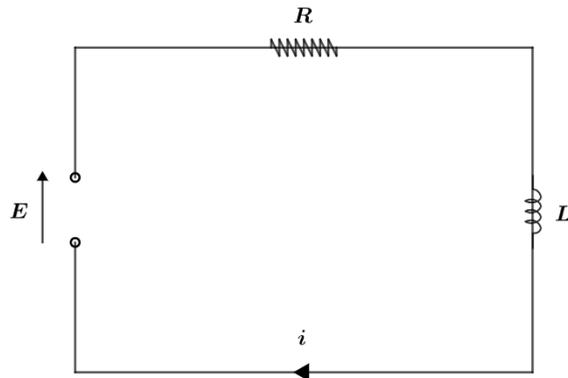
Nessa seção, estudaremos os sistemas de circuitos elétricos conectados em série, que é uma das formas básicas de se conectar componentes elétricos ou eletrônicos. Nos dedicaremos aos circuitos de primeira ordem, que são quaisquer circuitos que possam ser reduzidos a um circuito equivalente formado por um resistor e um único elemento de armazenamento de energia (indutor ou capacitor), tais circuitos são de primeira ordem, pois seu comportamento é descrito por uma equação diferencial de primeira ordem, conforme [6].

### 2.6.1 Circuito RL

Para um sistema de circuito elétrico do tipo RL, como na figura 14, caracterizado pela presença de uma resistência  $R$ , que é medida em ohms e um indutor  $L$ , medido em henrys,

consequimos determinar a corrente elétrica  $i(t)$ , medida em amperes em determinado instante  $t$ .

Figura 14: Sistema RL em série.



Fonte: Compilação do autor.

Supondo que esse sistema seja fechado, temos pela Segunda Lei de Kirchhoff que a tensão total fornecida pela fonte  $E(t)$ , medido em volts, é igual à soma das quedas de tensão nos componentes do circuito

$$E(t) = E_L + E_R.$$

A queda de tensão no resistor é dada pela Lei de Ohm,  $E_R = R \cdot i$ , sendo  $R$  a constante de resistência.

A queda de tensão no indutor é dada pela Lei de Faraday para indutores,  $E_L = L \frac{di}{dt}$ , sendo  $L$  a constante de indutância, Portanto, temos a seguinte equação

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E(t),$$

ou seja,

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E(t)}{L}, \quad (2.37)$$

uma equação diferencial de primeira ordem linear não homogênea, cuja solução é vista na seção 1.2. Portanto, sua solução geral é

$$i(t) = \frac{E(t)}{R} + ce^{-\frac{Rt}{L}}. \quad (2.38)$$

Sabendo que  $i(0) = i_0$ , temos que  $c = i_0 - \frac{E(0)}{R}$ , logo, a solução para o problema é

$$i(t) = \frac{E(t)}{R} + \left( i_0 - \frac{E(t)}{R} \right) e^{-\frac{Rt}{L}}. \quad (2.39)$$

**Exemplo 2.9.** Um circuito RL tem uma tensão gerada na fonte de 5 volts, uma resistência

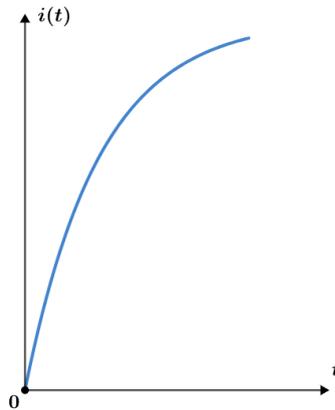
de 50 ohms, uma indutância de 1 henry e não apresenta corrente inicial. Determine a corrente no circuito em um instante  $t$ .

**Solução:** Sejam,  $E = 5$ ,  $R = 50$ ,  $L = 1$  e  $i_0 = 0$ , temos de (2.39) que a solução é dada pela função

$$i(t) = \frac{1}{10} - \frac{1}{10}e^{-50t}, \quad (2.40)$$

cujos gráfico dessa solução é apresentada na figura 15.

Figura 15: Gráfico de (2.40).



Fonte: Compilação do autor.

**Exemplo 2.10.** Um circuito  $RL$  tem uma tensão gerada na fonte de  $3\text{sen}(2t)$ , uma resistência de 10 ohms, uma indutância de 0.5 henry e uma corrente inicial de 6 ampères. Determine a corrente no circuito no instante de tempo arbitrário  $t$ .

**Solução:** Neste caso, temos que  $E(t) = 3\text{sen}(2t)$ ,  $R = 10$  e  $L = 0.5$ , logo a equação se resume a

$$\frac{di}{dt} + 20i = 6\text{sen}(2t),$$

cujas solução é

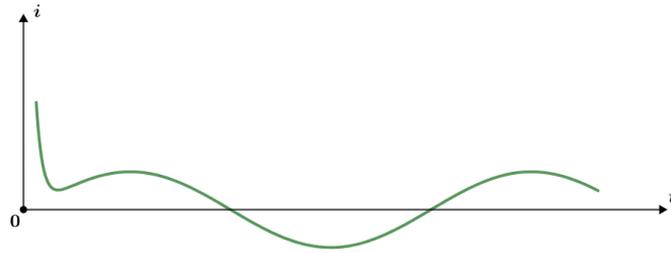
$$i(t) = ce^{-20t} + \frac{30}{101}\text{sen}(2t) - \frac{3}{101}\text{cos}(2t).$$

Sabendo que  $i(0) = 6$ , temos  $c = \frac{609}{101}$ . Logo a solução da equação é

$$i(t) = \frac{609}{101}e^{-20t} + \frac{30}{101}\text{sen}(2t) - \frac{3}{101}\text{cos}(2t). \quad (2.41)$$

Na figura 16, podemos visualizar o gráfico de (2.41).

Figura 16: Gráfico de (2.41).

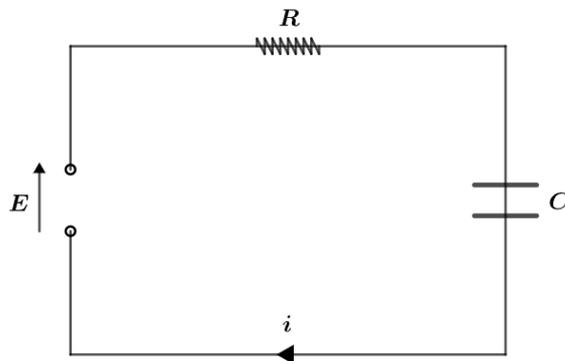


Fonte: Compilação do autor.

### 2.6.2 Circuito RC

Para um sistema de circuito elétrico do tipo RC, como na figura 17, caracterizado pela presença de uma resistência  $R$ , que é medida em ohms e um capacitor  $C$ , medido em farads, conseguimos determinar carga elétrica  $q(t)$ , medida em coulombs em determinado instante  $t$ .

Figura 17: Sistema RC em série.



Fonte: Compilação do autor.

Supondo que esse sistema seja fechado, temos pela Segunda Lei de Kirchoff que a tensão total fornecida pela fonte  $E(t)$ , medido em volts, é igual à soma das quedas de tensão nos componentes do circuito

$$E(t) = E_C + E_R.$$

A queda de tensão no resistor é dada pela Lei de Ohm,  $E_R = R \frac{dq}{dt}$ , sendo  $R$  a constante de resistência.

Para um capacitor, a queda de tensão é proporcional à carga armazenada no capacitor e inversamente proporcional à capacitância, logo,  $E_C = \frac{1}{C}q$ , sendo  $C$  a constante de

capacitância. Portanto, temos a seguinte equação

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t),$$

ou seja,

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{E(t)}{R}, \quad (2.42)$$

uma equação diferencial de primeira ordem linear não homogênea, cuja solução é vista na seção 1.2. Portanto, sua solução é

$$q(t) = CE(t) + ce^{-\frac{t}{RC}}.$$

Sabendo que  $q(0) = q_0$ , temos que  $c = q_0 - CE(0)$ , logo, a solução para o problema é

$$q(t) = CE(t) + (q_0 - CE(0)) e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (2.43)$$

**Exemplo 2.11.** Um circuito RC recebe da fonte, uma tensão de 4 volts, tem uma resistência de 100 ohms, e uma capacitância de  $10^{-2}$  farad. Inicialmente, não existe carga no capacitor. Determine a corrente no circuito no instante de tempo  $t$ .

**Solução:** Seja  $q = q(t)$  a carga em coulombs em um instante  $t$  qualquer, segundo a equação (2.42), temos

$$\frac{dq}{dt} + q = 4$$

. De (2.43), temos a solução

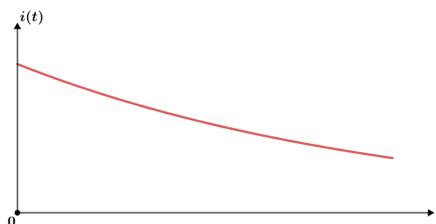
$$q(t) = \frac{4}{100} - \frac{4}{100}e^{-t}. \quad (2.44)$$

Para determinar a corrente no circuito, utilizamos de que  $i(t) = \frac{dq}{dt}$ . Logo, derivando ambos os lados de (2.44), obtemos

$$i(t) = \frac{4}{100}e^{-t}. \quad (2.45)$$

Na figura 18, conseguimos observar o gráfico da equação (2.45).

Figura 18: Gráfico de (2.45).



Fonte: Compilação do autor.

## 2.7 Trajetórias ortogonais

Nessa seção estudaremos a aplicação conhecida como trajetórias ortogonais, uma aplicação geométrica que pode ser encontrada em [2] e [3]. Inicialmente, consideraremos a família de curvas

$$F(x, y, c) = 0, \quad (2.46)$$

descrita no plano  $xy$ , onde  $c$  é o parâmetro e  $F(x, y, c)$  é diferenciável. O problema consiste em determinar outra família de curvas tal que em toda interseção com a família (2.46) forme ângulos de  $90^\circ$ , ou seja, que toda interseção da curva forme segmentos ortogonais.

**Solução:** Inicialmente, derivamos implicitamente (2.46) em relação a  $x$ , obtendo

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}. \quad (2.47)$$

Como a derivada de uma função no ponto, indica a inclinação da reta tangente à curva naquele ponto, e na interseção, os pontos pertencem a ambas as curvas, e observando que o produto entre a inclinação de retas ortogonais é igual a -1, para obtermos a expressão para as trajetórias ortogonais, basta calcular o inverso do oposto de (2.47), assim, as trajetórias ortogonais de (2.46) são as soluções de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x}. \quad (2.48)$$

**Exemplo 2.12.** *Determine as trajetórias ortogonais da família de curvas  $x^2 + y^2 = c$ .*

**Solução:** Seja  $F(x, y, c) = x^2 + y^2 - c^2$ , derivamos implicitamente a equação dada em relação a  $x$ , obtendo

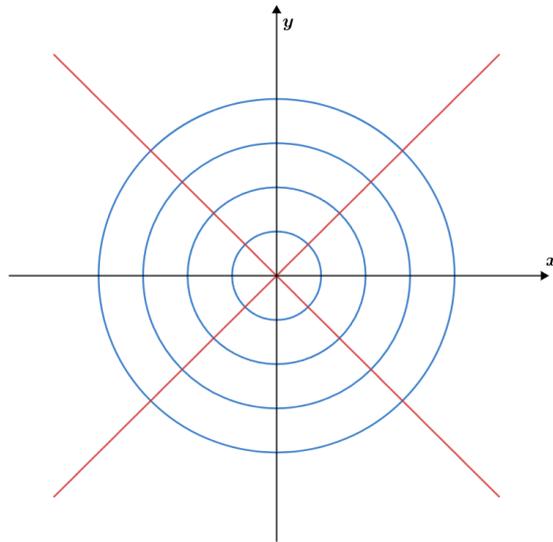
$$2x + 2yy' = 0 \quad \iff \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Como,  $f(x, y) = -\frac{x}{y}$ , a partir de (2.48), temos que as trajetórias ortogonais serão dadas pela solução de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Por se tratar de uma equação diferencial de variáveis separáveis, a solução geral da equação é a família  $y(x) = kx$ . Podemos observar a interseção das famílias de curvas  $y(x)$  em vermelho e  $F(x, y, c)$  em azul na figura 19.

Figura 19: Trajetórias ortogonais.



Fonte: Compilação do autor.

# EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

Neste capítulo estudaremos as equações de segunda ordem lineares, começemos com o estudo da teoria preliminar.

## 3.1 Teoria preliminar

Nesta seção estudaremos as equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem.

**Definição 3.1.** *Uma equação diferencial ordinária de segunda ordem tem a seguinte forma:*

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right), \quad (3.1)$$

onde  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua definida em um conjunto aberto  $\Omega$ . Uma solução para tal equação diferencial é uma função  $y = y(t)$ , onde  $t \in J$ ,  $J$  é um intervalo tal que

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t)), \quad \forall t \in J.$$

A equação (3.1) é dita linear se a função  $f$  tem a forma

$$f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) = g(t) - p(t)\frac{dy}{dt} - q(t)y,$$

sendo  $g$ ,  $p$  e  $q$  funções contínuas em um intervalo  $J$ . Reescrevemos tal equação como

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t). \quad (3.2)$$

**Definição 3.2.** *Um problema de valor inicial para uma equação diferencial de segunda ordem linear é*

$$\begin{cases} y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y = g(t), \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y'_0. \end{cases}$$

onde  $t_0$  pertence ao intervalo  $I$  e  $y_0$  e  $y'_0$  pertencem a  $\mathbb{R}$ . Uma solução para o problema de valor inicial é uma função  $y(t)$  que satisfaz tanto a equação diferencial quanto as condições iniciais fornecidas.

Como no caso do problema de valor inicial de primeira ordem, o seguinte teorema garante a existência e unicidade de solução para o problema de valor inicial sob certas hipóteses.

**Teorema 3.1** (Existência e unicidade de solução). *Sejam  $p(t)$  e  $q(t)$  funções contínuas em um intervalo  $J$ . Se  $x = x_0$  é algum ponto deste intervalo, então existe uma única solução  $y(t)$  para o problema de valor inicial (3.2) neste intervalo.*

Demonstração: Ver [4].

Veremos nessa seção que para determinar uma família de soluções para equações lineares de segunda ordem, é necessário encontrar uma combinação linear entre duas soluções cujo conjunto formado entre elas seja linearmente independente. Nesse contexto, é importante revisar alguns conceitos sobre dependência linear de funções.

**Definição 3.3.** *Dizemos que um conjunto de funções  $\{f_1(t), \dots, f_n(t)\}$ , onde  $f_i : J \rightarrow \mathbb{R}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , é **linearmente dependente** sobre  $\mathbb{R}$  em um intervalo  $J$ , se existem constantes reais  $c_1, c_2, \dots, c_n$  não todas nulas, tais que*

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \dots + c_n f_n(t) = 0 \quad \forall t \in J.$$

*Caso contrário, dizemos que o conjunto é **linearmente independente** no intervalo.*

**Definição 3.4.** *O determinante*

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n)(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \dots & f_n(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & \dots & f_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \dots & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix},$$

*onde  $f_i : J \rightarrow \mathbb{R}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , é chamado de **Wronskiano** das funções no ponto  $t$ .*

Para saber se um conjunto de  $n$  funções é linearmente independente sobre  $\mathbb{R}$ , utilizaremos o seguinte teorema.

**Teorema 3.2.** *Sejam  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$  funções diferenciáveis pelo menos  $n - 1$  vezes, onde  $f_i : J \rightarrow \mathbb{R}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Se*

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n)(t_0) \neq 0,$$

*então o conjunto formado pelas funções  $\{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\}$  será linearmente independente no intervalo.*

**Demonstração:** Faremos a prova para o caso  $n = 2$ , suponha que  $W(f_1, f_2)(t_0) \neq 0$  para algum  $t_0$  no intervalo  $J$ . Além disso, suponha que  $\{f_1(t), f_2(t)\}$  seja linearmente dependente sobre  $\mathbb{R}$  no intervalo, então existem constantes reais  $c_1$  e  $c_2$  não todas nulas tais que

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) = 0 \quad \forall t \in J. \tag{3.3}$$

Derivando ambos os lados da equação (3.3), temos

$$c_1 f_1'(t) + c_2 f_2'(t) = 0.$$

Em particular, obtemos

$$\begin{cases} c_1 f_1(t_0) + c_2 f_2(t_0) = 0, \\ c_1 f_1'(t_0) + c_2 f_2'(t_0) = 0, \end{cases}$$

um sistema linear homogêneo nas incógnitas  $c_1$  e  $c_2$ . Como  $c_1$  e  $c_2$  não são todas nulas, segue que

$$\begin{vmatrix} f_1(t_0) & f_2(t_0) \\ f_1'(t_0) & f_2'(t_0) \end{vmatrix} = 0,$$

ou seja,  $W[f_1(t_0), f_2(t_0)] = 0$  o que contradiz a hipótese. Portanto  $\{f_1(t), f_2(t)\}$  é linearmente independente sobre  $\mathbb{R}$ .

A demonstração no caso geral é análoga ao caso  $n = 2$ . □

## 3.2 Equações lineares homogêneas de segunda ordem

Nesta seção definiremos as equações lineares homogêneas de segunda ordem e veremos as propriedades das soluções.

**Definição 3.5.** *Se na equação (3.2) a função  $g(t) = 0$ , então a equação é denominada equação diferencial ordinária linear homogênea de segunda ordem. Logo, podemos reescrever a equação como*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \tag{3.4}$$

**Teorema 3.3** (Princípio da Superposição). *Sejam  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  soluções da equação (3.4) em um intervalo  $J$ . Então, a combinação linear*

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t),$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias, também é uma solução de (3.4) no intervalo.

**Demonstração:** Sejam  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  soluções de (3.4) no intervalo  $J$ . Seja  $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ . Então,  $y'(t) = c_1 y_1'(t) + c_2 y_2'(t)$  e  $y''(t) = c_1 y_1''(t) + c_2 y_2''(t)$ . Logo,

$$\begin{aligned} & [c_1 y_1'' + c_2 y_2''] + p(t)[c_1 y_1' + c_2 y_2'] + q(t)[c_1 y_1 + c_2 y_2] \\ &= c_1 [y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1] + c_2 [y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2] \\ &= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0, \quad \forall t \in J, \end{aligned} \tag{3.5}$$

pois  $y_1$  e  $y_2$  são soluções por hipótese, logo  $y(t)$  é solução de (3.4). □

Estamos interessados em determinar quando a dupla de soluções  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  para a equação (3.4) tal que  $\{y_1(t), y_2(t)\}$  é linearmente independente.

**Teorema 3.4** (Critério para Independência Linear de Soluções). *Sejam  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  soluções para a equação (3.4) em um intervalo  $J$ . Então,  $\{y_1(t), y_2(t)\}$  é linearmente independente em  $J$  se, e somente se,  $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$  para todo  $t$  em  $J$ .*

**Demonstração:** Primeiramente, se  $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$  para todo  $t$  em  $J$ , segue imediatamente do teorema 3.2 que o conjunto  $\{y_1(t), y_2(t)\}$  é linearmente independente.

Agora, suponha que  $\{y_1(t), y_2(t)\}$  seja linearmente independente, como  $y_1 = y_1(t)$  e  $y_2 = y_2(t)$  são soluções de (3.4), segue pelo teorema 3.3 que

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

também é solução para  $c_1$  e  $c_2$  constantes.

Supondo que  $W[y_1, y_2](t_0) = 0$  para algum  $t_0 \in J$ , temos que o sistema linear homogêneo

$$\begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

possui solução não trivial, ou seja, existem constantes não nulas  $c_1$  e  $c_2$  que o tornam verdadeiro.

De (3.6) segue que  $y(t)$  satisfaz o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0 \\ y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0. \end{cases}$$

Por outro lado, a função identicamente nula também é solução do problema de valor inicial. Logo, pelo Teorema (3.1) devemos ter  $y(t) = 0, \forall t \in J$ , ou seja

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = 0, \quad \forall t \in J$$

com constantes reais não todas nulas, donde segue que  $\{y_1(t), y_2(t)\}$  é linearmente dependente, mas isso contraria a hipótese inicial. Portanto  $\{y_1(t), y_2(t)\}$  é linearmente independente sobre  $\mathbb{R}$  no intervalo.  $\square$

**Definição 3.6.** *Sejam  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  soluções de (3.4) no intervalo  $J$  tais que  $\{y_1(t), y_2(t)\}$  é linearmente independente sobre  $\mathbb{R}$ . O conjunto  $\{y_1(t), y_2(t)\}$  é chamado de **conjunto fundamental de soluções no intervalo  $J$** .*

**Teorema 3.5.** *Sejam  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  soluções de (3.4) tais que  $\{y_1(t), y_2(t)\}$  é linearmente independente sobre  $\mathbb{R}$  para a equação (3.4) no intervalo  $J$ . Então toda solução  $y(t)$  para a equação (3.4) é uma combinação linear entre  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$ , ou seja, podemos encontrar constantes  $c_1$  e  $c_2$  reais tais que*

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

**Demonstração:** Seja  $y = y(t)$  uma solução de (3.4) no intervalo  $J$ . Fixado  $t_0 \in J$ , suponha que

$$y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(t_0) = y'_0.$$

Como  $y_1 = y_1(t)$  e  $y_2 = y_2(t)$  são soluções de (3.4) no intervalo  $J$ , segue do teorema 3.3 que

$$\phi(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

também é solução de (3.4) no intervalo  $J$ , do teorema 3.1, devemos ter  $\phi(t_0) = y_0$  e  $\phi'(t_0) = y'_0$ , ou seja

$$\begin{cases} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = y_0; \\ c_1 y'_1(t_0) + c_2 y'_2(t_0) = y'_0, \end{cases} \quad (3.7)$$

desde que seja possível obter as constantes reais  $c_1$  e  $c_2$  que tornem (3.7) verdadeira.

Da hipótese temos que  $\{y_1(t), y_2(t)\}$  é linearmente independente sobre  $\mathbb{R}$  no intervalo  $J$ , donde segue pelo Teorema 3.5 que  $W[y_1(t), y_2(t)] \neq 0, \forall t \in J$ . Em particular

$$W[y_1(t_0), y_2(t_0)] \neq 0,$$

donde segue que o sistema linear não homogêneo tem uma única solução.

Assim,  $\phi(t)$  é uma solução de (3.4) que satisfaz as condições  $y(t_0) = y_0$  e  $y'(t_0) = y'_0$ , portanto, do teorema 3.1 segue que  $\phi(t) = y(t), \forall t \in J$ , ou seja,

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \quad \forall t \in J.$$

□

### 3.2.1 Redução de ordem

Seja  $y_1(t)$  uma solução para equação (3.4) no intervalo  $J$ , buscamos uma segunda solução na forma

$$y_2(t) = y_1(t)v(t),$$

tal que  $\{y_1(t), y_2(t)\}$  seja linearmente independente sobre  $\mathbb{R}$  em  $J$ .

Portanto, substituindo  $y_2(t)$  e suas derivadas em (3.4), obtemos

$$\begin{aligned} [y_1''(t)v(t) + 2y_1'(t)v'(t) + y_1(t)v''(t)] + p(t)[y_1'(t)v(t) + y_1(t)v'(t)] + q(t)[y_1(t)v(t)] &= 0, \\ v''(t)y_1(t) + v'(t)[2y_1'(t) + p(t)y_1(t)] + v(t)[y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t)] &= 0, \\ \iff v''(t)y_1(t) + v'(t)[2y_1'(t) + p(t)y_1(t)] &= 0, \end{aligned}$$

pois  $y_1(t)$  é solução de (3.11).

Seja  $w(t) = v'(t)$ , temos

$$w'(t)[y_1(t)] + w(t)[2y_1'(t) + p(t)y_1(t)] = 0. \quad (3.8)$$

A equação (3.8) é uma equação linear homogênea de primeira ordem cujo método de solução foi visto na seção 1.2. Sendo  $p(t) = 2y_1'(t) + p(t)y_1(t)$ , obtemos

$$v(t) = \int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1(t)^2} dt.$$

Assim,

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{e^{-\int P(t)dt}}{y_1(t)^2} dt. \quad (3.9)$$

### 3.2.2 Equação diferencial linear homogênea com coeficientes constantes

A equação (3.4) pode ser escrita na forma

$$P(t)y'' + Q(t)y(t)' + R(t)y(t) = 0, \quad (3.10)$$

desde que  $P(t) \neq 0$ , pois dividindo ambos os lados de (3.10), por  $P(t)$ , obtemos a forma da equação (3.4).

Nesta seção, abordaremos exclusivamente as equações em que as funções  $P(t)$ ,  $Q(t)$  e  $R(t)$  são constantes.

**Definição 3.7.** A equação (3.10) escrita como

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (3.11)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes, sendo  $a \neq 0$ , é chamada de **equação diferencial ordinária de segunda ordem linear homogênea com coeficientes constantes**.

### 3.2.3 Método de resolução

Foi mostrado o caso particular onde a equação (1.5) é homogênea e tem coeficiente constante que sua solução geral é da forma  $y(t) = ce^{-at}$ .

Agora, tratando-se de uma equação de segunda ordem, inspirando-se no caso de primeira ordem, supomos que  $y(t) = e^{rt}$  seja uma solução de (3.11). Calculamos suas derivadas e as substituímos na equação, obtendo

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0, \Rightarrow e^{rt}[ar^2 + br + c] = 0.$$

Como  $e^{rt} \neq 0, \forall t \in J$ , podemos concluir que

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (3.12)$$

A equação (3.12) é chamada de **equação característica** associada a equação diferencial (3.11). Portanto, se  $r$  for a raiz da equação quadrática (3.12) então  $y(t) = e^{rt}$  é uma solução da equação diferencial (3.11). Temos três possibilidades de solução a partir da natureza das raízes  $r$ .

**(i) Raízes reais e distintas**

Se  $r_1$  e  $r_2$  são raízes distintas de (3.12) temos as soluções

$$y_1(t) = e^{r_1 t} \text{ e } y_2(t) = e^{r_2 t}.$$

Assim,

$$W[y_1(t), y_2(t)] = \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} = r_2 e^{(r_1+r_2)t} - r_1 e^{(r_1+r_2)t} \neq 0, \quad \forall t \in J$$

pois  $r_1 \neq r_2$ .

Logo,  $\{y_1(t), y_2(t)\}$  é um conjunto fundamental de soluções para a equação. A solução geral para (3.11) nesse caso é

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}.$$

**Exemplo 3.1.** *Encontre a solução geral para equação*

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0.$$

**Solução:** Neste caso, a equação característica é  $r^2 - 3r + 2 = 0$ . As raízes da equação são  $r_1 = 1$  e  $r_2 = 2$ . Portanto, a solução geral da equação diferencial é dada por

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t},$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes.

**(ii) Raízes reais iguais**

Se  $r = -\frac{b}{2a}$  é a única raiz para equação (3.12), temos que

$$y_1(t) = e^{\frac{-bt}{2a}}$$

é uma solução para (3.4).

Podemos definir uma segunda solução para a equação a partir de (3.9). Assim,

$$y_2(t) = e^{\frac{-bt}{2a}} \cdot \int \frac{e^{-\int \frac{b}{a} dt}}{(e^{\frac{-bt}{2a}})^2} dt = t e^{\frac{-bt}{2a}},$$

e a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}, \quad (3.13)$$

onde  $r = \frac{-bt}{2a}$ . Como a segunda solução foi obtida pelo método de redução de ordem, temos que  $\{y_1(t), y_2(t)\}$  é linearmente independente.

**Exemplo 3.2.** *Encontre a solução geral para a seguinte equação*

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0.$$

**Solução:** Neste caso, a equação característica é  $r^2 - 4r + 4 = 0$ , onde  $r_1 = r_2 = 2$ . Portanto, uma solução para a equação é  $y_1(t) = e^{2t}$ . Assim, de (3.13) temos que a solução geral da equação nesse caso é

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}.$$

### (iii) Raízes complexas

Se  $r_1 = \alpha + i\beta$  e  $r_2 = \alpha - i\beta$ , sendo  $\alpha$  e  $\beta$  números reais positivos, e  $\beta \neq 0$  são raízes complexas para equação (3.12). Logo,

$$\tilde{y}_1(t) = e^{\alpha+i\beta t} \quad \text{e} \quad \tilde{y}_2(t) = e^{\alpha-i\beta t},$$

são soluções complexas.

Como queremos soluções em termos reais, utilizaremos a fórmula de Euler,

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta), \quad (3.14)$$

para deduzir uma solução real a partir da complexa encontrada.

A partir de (3.14), temos que

$$y(t) = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \operatorname{sen}(\beta t)), \quad (3.15)$$

**Lema 1.** *Se  $y(t) = y_1(t) + iy_2(t)$  é solução complexa da equação (3.11), então  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são soluções reais.*

**Demonstração:** Como  $y = y(t)$  é solução de (3.11) no intervalo  $J$ , segue que

$$\begin{aligned} a(y_1''(t) + iy_2''(t)) + b(y_1'(t) + iy_2'(t)) + c(y_1(t) + iy_2(t)) &= 0 + 0i, \quad \forall t \in J, \\ \iff [ay_1''(t) + by_1'(t) + cy_1(t)] + i[ay_2''(t) + by_2'(t) + cy_2(t)] &= 0 + 0i, \quad \forall t \in J. \end{aligned}$$

Logo,

$$ay_1''(t) + by_1'(t) + cy_1(t) = 0 \quad \text{e} \quad ay_2''(t) + by_2'(t) + cy_2(t) = 0, \quad \forall t \in J.$$

Portanto,  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são soluções de (3.11). □

Do lema 1 e de (3.14), podemos afirmar que  $y_1(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$  e  $y_2(t) = e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t)$  são soluções reais de (3.11). Observamos que ao calcular o Wronskiano entre  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$ ,

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha t} \cos(\beta t) & e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t) \\ \alpha e^{\alpha t} \cos(\beta t) - \beta e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t) & \alpha e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t) + \beta e^{\alpha t} \cos(\beta t) \end{vmatrix} = \beta(e^{2\alpha t}) \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

que  $\{y_1(t), y_2(t)\}$  é conjunto linearmente independente. A solução geral da equação nesse caso é

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 3.3.** *Encontre a solução geral para a seguinte equação*

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0.$$

**Solução:** Neste caso, a equação característica é  $r^2 + 2r + 5 = 0$  e as suas raízes são  $r_1 = -1 + 2i$  e  $r_2 = -1 - 2i$ . Assim,

$$y(t) = e^{-1+2i} = c_1 e^{-t} (\cos(2t)) + c_2 e^{-t} (\operatorname{sen}(2t)) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

é a solução geral da equação.

### 3.3 Equações lineares não homogêneas de segunda ordem

Nessa seção estudaremos as equações lineares não homogêneas de segunda ordem e seus métodos de resolução.

Assim como na seção 3.2.2, inicialmente faremos uma discussão a respeito da solução geral da equação (3.2).

**Teorema 3.6.** *Sejam  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  soluções para a equação (3.4) em um intervalo  $J$  e seja  $y_p(t)$  uma solução particular para a equação (3.2) no mesmo intervalo, onde  $g(t)$  é uma função contínua em  $J$ . Então,*

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t) \tag{3.16}$$

é uma solução para a equação não homogênea em  $J$  para quaisquer constantes  $c_1$  e  $c_2$ .

**Demonstração:** Seja  $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t)$ , então  $y'(t) = c_1 y_1'(t) + c_2 y_2'(t) + y_p'(t)$  e  $y''(t) = c_1 y_1''(t) + c_2 y_2''(t) + y_p''(t)$ . Assim, temos

$$\begin{aligned} & (c_1 y_1''(t) + c_2 y_2''(t) + y_p''(t)) + p(t) (c_1 y_1'(t) + c_2 y_2'(t) + y_p'(t)) \\ & \quad + q(t) (c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t)) \\ & = (c_1 (y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t)) + c_2 (y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t)) \\ & \quad + y_p''(t) + p(t)y_p'(t) + q(t)y_p(t)) = g(t), \end{aligned}$$

pois,  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são soluções de (3.4) e  $y_p(t)$  é solução de (3.2).

Portanto, a função  $y(t)$  é uma solução de (3.2) para quaisquer constantes  $c_1$  e  $c_2$ .  $\square$

**Teorema 3.7.** *Seja  $y_p(t)$  uma solução particular da equação (3.2) em um intervalo  $J$  e sejam  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  soluções de (3.4) tais que  $\{y_1(t), y_2(t)\}$  é linearmente independente sobre  $\mathbb{R}$  no intervalo  $J$ . Então, para qualquer solução  $y(t)$  da equação em  $J$ , podemos encontrar constantes  $c_1$  e  $c_2$  tais que*

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t).$$

**Demonstração:** Sejam  $y(t)$  e  $y_p(t)$  soluções para a equação (3.2). Definindo a função  $u(t) = y(t) - y_p(t)$ , obtemos

$$\begin{aligned} [y''(t) - y_p''(t)] + p(t)[y'(t) - y_p'(t)] + q(t)[y(t) - y_p(t)] \\ = y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) - [y_p''(t) + p(t)y_p'(t) + q(t)y_p(t)] = g(t) - g(t) = 0 \end{aligned}$$

pois,  $y(t)$  e  $y_p(t)$  são soluções de (3.2).

Portanto,  $y(t) - y_p(t)$  é uma solução para a equação (3.4), e como  $\{y_1(t), y_2(t)\}$  é um conjunto linearmente independente sobre  $\mathbb{R}$  em  $J$ , segue do teorema 3.5 que

$$u(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t),$$

para quaisquer valores das constantes  $c_1$  e  $c_2$ , assim,

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t).$$

$\square$

**Definição 3.8.** *Seja  $y_p(t)$  uma solução para a equação (3.2) em um intervalo  $J$  e seja  $y_c(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$  a solução para a equação homogênea associada no intervalo. A **solução geral** para a equação não homogênea no intervalo é definida por*

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t)$$

a função  $y_c(t)$  é chamada de função complementar.

Conhecendo a solução geral para a equação (3.2), veremos agora dois métodos utilizados para encontrar uma solução particular presente em tal solução. Estudaremos o método de coeficientes a determinar e o método de variação de parâmetros.

### 3.3.1 Coeficientes a determinar

O método de coeficientes a determinar é utilizado para encontrar uma solução particular para a equação (3.2) quando seus coeficientes são constantes.

Para aplicar o método, é necessário primeiramente verificar se a função  $g(t)$  pode ser escrita como  $e^{\alpha t} P_n(t) \cos(\beta t) + e^{\alpha t} P_m(t) \operatorname{sen}(\beta t)$ , ou seja se  $g(t)$  é uma função polinomial, exponencial, seno, cosseno, bem como a soma e produto destas funções;

Encontramos a solução geral da equação homogênea associada, e assumimos uma solução particular para a equação na mesma família que  $g(t)$ , com coeficientes a determinar. Em [2], podemos encontrar uma tabela de supostas soluções particulares;

Calculamos as derivadas dessa função e substituímos na equação diferencial, o que nos leva a resolver um sistema linear para determinar seus coeficientes;

Se a solução particular encontrada já está na solução homogênea, multiplicamos a solução suposta por  $t^n$ , onde  $n$  é o menor inteiro que remove a duplicação. Nos próximos exemplos, apresentaremos algumas situações que podem ocorrer durante a aplicação do método.

**Exemplo 3.4.** *Encontre uma solução particular de*

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}. \quad (3.17)$$

**Solução:** Neste caso, supomos  $y_p(t) = Ae^{2t}$ , pois  $g(t) = 3e^{2t}$ . Assim,  $y'_p(t) = 2Ae^{2t}$  e  $y''_p(t) = 4Ae^{2t}$ . De (3.17), obtemos  $(-6A)e^{2t} = 3e^{2t}$ , sendo  $A = -\frac{1}{2}$ . Portanto, uma solução particular para (3.17) é  $y_p(t) = -\frac{1}{2}e^{2t}$ .

**Exemplo 3.5.** *Encontre uma solução particular de*

$$y'' - 3y' - 4y = 2\operatorname{sen}(t). \quad (3.18)$$

**Solução:** Ao supor uma solução particular na forma  $y_p(t) = A\operatorname{sen}(t)$  nos deparamos com uma indeterminação. Ao considerar a presença de termos cosseno e seno durante os cálculos, é razoável concluir que nossa suposição deve incluir ambos os termos. Portanto, a escolha adequada para a suposição inicial é  $y_p(t) = A\operatorname{sen}(t) + B\cos(t)$ .

Ao substituir a função e suas derivadas em (3.18), obtemos  $(-5A + 3B)\operatorname{sen}(t) + (-3A - 5B)\cos(t) = 2\operatorname{sen}(t)$ .

Que é equivalente ao problema de resolver o sistema linear

$$\begin{cases} -5A + 3B = 2 \\ -3A - 5B = 0, \end{cases}$$

cuja solução é  $A = -\frac{5}{17}$  e  $B = \frac{3}{17}$ . Portanto, uma solução particular para a equação (3.18) é  $y_p(t) = -\frac{5}{17}\operatorname{sen}(t) + \frac{3}{17}\cos(t)$ .

**Exemplo 3.6.** *Encontre uma solução particular para a equação diferencial*

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t} \quad (3.19)$$

**Solução:** Como a solução  $y_1(t) = e^{-t}$  já está compreendida na solução da homogênea associada, supomos a solução particular  $y_p(t) = Ate^{-t}$ . Ao substituir essa função e suas

derivadas em (3.19), obtemos  $-5Ate^{-t} = 2e^{-t}$ , o que nos leva a  $A = -\frac{2}{5}$ . Assim, a solução particular é  $y_p(t) = -\frac{2}{5}te^{-t}$ .

### 3.3.2 Variação de parâmetros

O método de variação de parâmetros é utilizado para determinar a solução particular da equação (3.2) quando seus coeficientes são funções contínuas em  $J$ .

Sejam  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  soluções para equação homogênea associada a (3.2) tais que  $\{y_1(t), y_2(t)\}$  é linearmente independente sobre  $\mathbb{R}$ , buscaremos uma solução particular para equação do tipo

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t), \quad (3.20)$$

onde  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  são os parâmetros variáveis.

Para definirmos quem são esses parâmetros, vamos impor condições aos mesmos. Ao calcular a derivada de ambos os lados da equação (3.20), obtemos

$$y_p'(t) = u_1'(t)y_1(t) + u_1(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2(t) + u_2(t)y_2'(t).$$

Nossa primeira condição, é que

$$u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t) = 0, \quad (3.21)$$

deste modo a derivada se resume a

$$y_p'(t) = u_1(t)y_1'(t) + u_2(t)y_2'(t). \quad (3.22)$$

Ao derivar a equação (3.22) de ambos os lados, encontramos

$$y_p''(t) = u_1'(t)y_1'(t) + u_1(t)y_1''(t) + u_2'(t)y_2'(t) + u_2(t)y_2''(t).$$

Agora, substituindo  $y_p(t)$  e suas derivadas na equação (3.2), encontramos

$$u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) = g(t), \quad (3.23)$$

que vamos fixar como nossa segunda condição.

Das condições (3.21) e (3.23), obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t) = 0, \\ u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) = g(t). \end{cases}$$

cuja forma matricial é

$$\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Observe que o determinante da primeira matriz é o Wronskiano das funções  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  e como  $\{y_1(t), y_2(t)\}$  é linearmente independente sobre  $\mathbb{R}$ , temos que  $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ .

Desse modo, o sistema possui uma única solução que pela regra de Cramer é dada por

$$u_1(t) = \int \frac{-g(t)y_2(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt \text{ e } u_2(t) = \int \frac{g(t)y_1(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt. \quad (3.25)$$

Sendo assim, pelo método de variação de parâmetros, uma solução particular para a equação (3.2) é

$$y_p(t) = \int \frac{-g(t)y_2(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt y_1(t) + \int \frac{g(t)y_1(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt y_2(t). \quad (3.26)$$

**Exemplo 3.7.** *Encontre a solução geral para equação*

$$4y'' + 36y + \operatorname{cosec}(3t) \quad (3.27)$$

**Solução:** Primeiramente, colocamos a equação na forma padrão,

$$y'' + 9y = \frac{\operatorname{cosec}(3t)}{4}.$$

Assim, a equação característica associada é  $r^2 + 9 = 0$ , tendo como raízes,  $r_1 = 3i$  e  $r_2 = -3i$ . Portanto, como vimos na seção 3.2.3, a solução da equação homogênea associada é

$$y_c = c_1 \cos(3t) + c_2 \operatorname{sen}(3t).$$

Sendo  $y_1(t) = \cos(3t)$  e  $y_2(t) = \operatorname{sen}(3t)$ , temos que  $W[y_1, y_2](t) = 3$ . Logo,

$$u_1(t) = -\frac{t}{12}, \quad u_2(t) = \frac{\ln|\operatorname{sen}(3t)|}{36}.$$

Uma solução particular é dada por

$$y_p(t) = -\frac{t \cos(3t)}{12} + \frac{\operatorname{sen}(3t) \ln|\operatorname{sen}(3t)|}{36}.$$

Portanto, sua solução geral é

$$y(t) = c_1 \cos(3t) + c_2 \operatorname{sen}(3t) - \frac{t \cos(3t)}{12} + \frac{\operatorname{sen}(3t) \ln|\operatorname{sen}(3t)|}{36}.$$

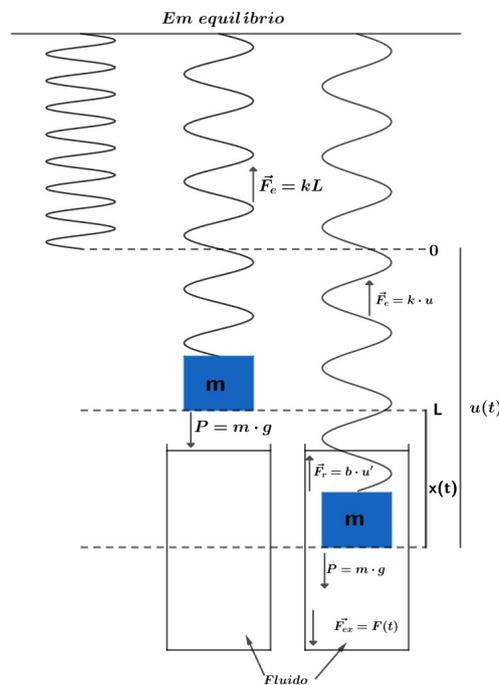
# APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE SEGUNDA ORDEM.

## 4.1 Vibrações mecânicas

O estudo de vibrações mecânicas está presente principalmente em áreas como Engenharia Elétrica, Engenharia Mecânica, Física, etc. Nessa seção, estudaremos as vibrações mecânicas, considerando ou não a presença de um amortecimento ou força externa.

Suponha a seguinte situação: Em um instante inicial, uma mola de constante elástica  $k$ , como presente na figura 20, com massa desprezível está presa verticalmente a uma superfície de apoio em uma das suas extremidades. Em um segundo instante, um objeto de massa  $m$  é ligado a outra extremidade da mola, a mola então começa a oscilar e após algum período de tempo volta a ficar estática, o que provoca um alongamento  $L$  comparando-a com o estágio inicial. Vamos considerar aqui apenas os casos onde ocorre uma deformação elástica na mola, ou seja, se retirássemos o peso, a mola retornaria a sua forma original.

Figura 20: Mola comprimida/esticada.



Fonte: Compilação do autor.

Com o sistema em equilíbrio, temos que

$$m \cdot g = kL.$$

Agora, seja  $u = u(t)$  o alongamento da mola em um instante  $t$ , definimos a função  $x = x(t)$  que descreve o alongamento da mola a partir do ponto de equilíbrio  $L$ ,  $x(t) = u(t) - L$ . Ao analisar as forças que agem sobre o objeto e considerando o sentido “para cima” como positivo, temos a ação da força peso,  $\vec{F}_p = m \cdot g$ , positiva ao movimento; a força elástica da mola, contrária ao sentido positivo, que segundo a lei de Hooke, é determinada por  $F_e = -ku(t) = -k(x(t) + L)$ . Além disso, há também a presença de outra força no sistema, que está diretamente ligada à viscosidade do meio ou à constante de resistência do ar, que será tomada por  $F_r = -bu'(t) = -bx'(t)$ , onde  $b$  é a constante de resistência.

Da segunda lei de Newton, temos

$$F_{res} = m \cdot a \Rightarrow mu''(t) = mg - ku(t) - bu'(t)$$

Como  $u(t) = x(t) + L$ , obtemos

$$mx''(t) = m \cdot g - k(x(t) + L) - bx'(t). \quad (4.1)$$

Sendo  $m \cdot g = kL$ , obtemos a equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

onde  $\gamma = \frac{b}{m}$  é o coeficiente de atrito ou coeficiente de viscosidade e  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  é o coeficiente relacionado à frequência angular natural de oscilação do sistema.

Se em um terceiro instante, concomitante ao início do movimento do objeto, uma força externa começa a agir sobre o mesmo, temos a equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F(t). \quad (4.2)$$

A partir da equação (4.2), conseguiremos identificar o regime de amortecimento do sistema, assim como isolar os casos sem amortecimento ou sem força externa.

#### 4.1.1 Vibrações livres sem amortecimento.

Se  $b = 0$  e  $F(t) = 0$ , temos

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0.$$

A equação característica associada a essa equação tem raízes  $r_1 = +i\omega_0$  e  $r_2 = -i\omega_0$ .

Portanto, a solução geral nesse caso é

$$x(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t).$$

#### 4.1.2 Vibrações livres com amortecimento.

Se  $b > 0$  e  $F(t) = 0$ , temos a equação

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

que tem as raízes da equação característica associada iguais a  $r_1 = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$  e  $r_2 = -\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$ , o que nos leva a três possíveis casos para a solução geral.

**Amortecimento supercrítico:** Se  $\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 > \omega_0^2$ , as raízes da equação característica associada à equação serão reais e distintas, dadas por  $r_1 = -\frac{\gamma}{2} + \omega$  e  $r_2 = -\frac{\gamma}{2} - \omega$ , onde  $\omega = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$ . Quando a metade do valor do coeficiente de arrasto é maior que a frequência natural do sistema, estamos em um regime de amortecimento supercrítico, o que geralmente indica a presença de um meio com uma taxa significativa de viscosidade.

A solução geral para esse tipo de equação será, portanto,

$$x(t) = c_1 e^{(-\frac{\gamma}{2} + \omega)t} + c_2 e^{(-\frac{\gamma}{2} - \omega)t}.$$

**Amortecimento crítico:** Se  $\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 = \omega_0^2$ , temos que  $r_1 = -\frac{\gamma}{2} = r_2$ . Neste caso, obtemos apenas uma solução a partir da equação característica. Devemos, portanto, encontrar uma segunda solução a partir da primeira utilizando o método de redução de ordem, visto em (3.9). Sendo  $x_1(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}}$ , temos que  $x_2(t) = t e^{-\frac{\gamma t}{2}}$ .

Dessa forma, a solução geral para a equação será

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{\gamma t}{2}} + c_2 t e^{-\frac{\gamma t}{2}}.$$

Quando o valor da frequência natural do sistema, coincide com o coeficiente de amortecimento, dizemos que ocorreu um amortecimento crítico.

**Amortecimento subcrítico:** Se  $\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 < \omega_0^2$ , temos  $r_1 = -\frac{\gamma}{2} + i\omega$  e  $r_2 = -\frac{\gamma}{2} - i\omega$ , onde  $-\frac{\gamma}{2}$  e  $\omega$  são números reais. Assim, a solução complexa para equação é

$$x(t) = c_1 e^{(-\frac{\gamma}{2} - i\omega)t} + c_2 e^{(-\frac{\gamma}{2} + i\omega)t}. \quad (4.3)$$

A partir de (4.3), obtemos a solução geral

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}} (c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t)).$$

Nesse caso, quando o valor da metade do coeficiente de amortecimento é menor do que o da

frequência natural do sistema, dizemos que ocorreu um amortecimento subcrítico.

### 4.1.3 Vibrações forçadas amortecidas.

Nessa subseção, ao considerar a presença de uma força externa na equação (4.2), vamos assumir que  $F(t) = F_0 \cos(t)$ . Prosseguindo, temos que a equação (4.2), se torna,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F_0 \cos(\theta t), \quad (4.4)$$

onde a solução complementar, obtida da equação homogênea associada, já é conhecida, resta agora conhecer uma solução particular para determinarmos a solução geral da equação. Assumimos uma solução particular da forma:

$$x_p(t) = A \cos(\theta t) + B \sin(\theta t),$$

onde  $A$  e  $B$  são coeficientes a serem determinados, e  $\theta$  é a frequência angular da força externa. Calculamos as derivadas da solução e substituímos na equação diferencial obtendo o sistema

$$\begin{cases} A(\omega_0^2 - \theta^2) + \gamma B\theta = F_0, \\ B(\omega_0^2 - \theta^2) - \gamma A\theta = 0. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos os valores de

$$A = \frac{F_0}{(\omega_0^2 - \theta^2) \left(1 + \frac{\theta}{\gamma}\right)} \text{ e } B = \frac{\gamma \theta F_0}{\omega_0^2 - \theta^2}.$$

Dessa forma, uma solução particular para a equação será

$$x_p(t) = \frac{F_0}{(\omega_0^2 - \theta^2) \left(1 + \frac{\theta}{\gamma}\right)} \cos(\theta t) + \frac{\gamma \theta F_0}{\omega_0^2 - \theta^2} \sin(\theta t).$$

Considerando  $x_c(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t)$  como solução geral da equação homogênea associada, temos que a solução geral será

$$x(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{(\omega_0^2 - \theta^2) \left(1 + \frac{\theta}{\gamma}\right)} \cos(\theta t) + \frac{\gamma \theta F_0}{\omega_0^2 - \theta^2} \sin(\theta t).$$

### 4.1.4 Vibrações forçadas sem amortecimento.

Se  $b = 0$  e  $F(t) \neq 0$ , temos a seguinte equação,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = F_0 \cos(\theta t). \quad (4.5)$$

Se  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  uma solução particular para a equação (4.5), temos dois casos a considerar  
 (i) Se  $\omega_0 \neq \theta$ , uma solução particular para equação (4.5) será dada por

$$x_p(t) = A\cos(\theta t) + B\sen(\theta t),$$

pois  $A\cos(\theta t)$  e  $B\sen(\theta t)$  não serão soluções da equação homogênea associada. Pelo método dos coeficientes a determinar, visto na subseção 3.3.1, temos que uma solução particular para equação (4.5) é

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\omega_0^2 - \theta^2} \cos(\theta t).$$

Portanto a solução geral nesse caso é

$$x(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sen(\omega_0 t) + \frac{F_0}{\omega_0^2 - \theta^2} \cos(\theta t).$$

(ii) Se  $\omega_0 = \theta$ , como visto na subseção 3.3.1, uma solução particular para a equação (4.5) será da forma

$$x_p(t) = t[A\cos(\theta t) + B\sen(\theta t)].$$

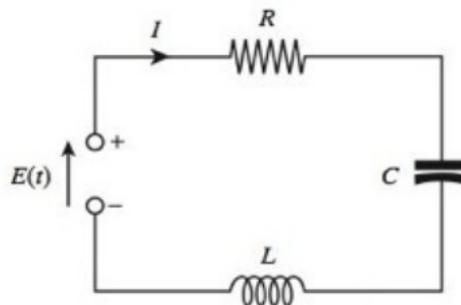
Portanto, a solução geral nesse caso é

$$x(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sen(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2\theta} t \sen(\theta t).$$

## 4.2 Circuitos elétricos

Num sistema de circuito elétrico conectado em série a uma fonte de tensão  $E$ , com uma resistência ( $R$ ) medida em ohms, um indutor ( $L$ ) medido em henrys e um capacitor ( $C$ ) medido em farads, o circuito é classificado como do tipo RLC.

Figura 21: Sistema RLC em série.



Fonte: [3]

De acordo com a Lei das Tensões de Kirchhoff, em um sistema elétrico ideal, a soma das quedas de tensão em cada componente do circuito é igual ao valor da tensão fornecida pela fonte.

Considerando inicialmente que a fonte não fornece tensão para o circuito, temos que a queda de tensão no resistor é dada pela Lei de Ohm ( $E_R = Ri$ ), onde  $R$  é o coeficiente de resistência e  $i$  é a corrente elétrica, a queda de tensão no indutor é dada por ( $E_L = L \frac{di}{dt}$ ), onde  $L$  é o coeficiente de indutância e a queda de tensão no capacitor é dada por ( $E_c = \frac{q}{C}$ ), onde,  $q$  é a carga elétrica e  $C$  é o coeficiente de capacitância. A partir disso, temos a equação

$$E_R + E_L + E_c = 0 \Rightarrow Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Seja  $i = \frac{dq}{dt}$ , a equação acima se torna

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0, \quad (4.6)$$

que é uma equação de segunda ordem linear homogênea com coeficientes constantes. A equação que modela o circuito elétrico RLC tem uma forte ligação com a equação que modela o sistema vibratório. Se na equação (4.6), dividimos ambos os lados da equação por  $L$ , obtemos

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \gamma \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0, \quad (4.7)$$

onde nesse caso,  $\gamma = \frac{R}{L}$ , onde o coeficiente  $\gamma$  está diretamente relacionado ao comportamento dinâmico do circuito, especialmente em resposta a mudanças na corrente elétrica ao longo do tempo e  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ , onde  $\omega_0$  implica diretamente na frequência angular natural do sistema.

Se em determinado instante, a fonte começa a fornecer tensão ao circuito, ou uma fonte externa intervém no circuito, a equação (4.7) se torna

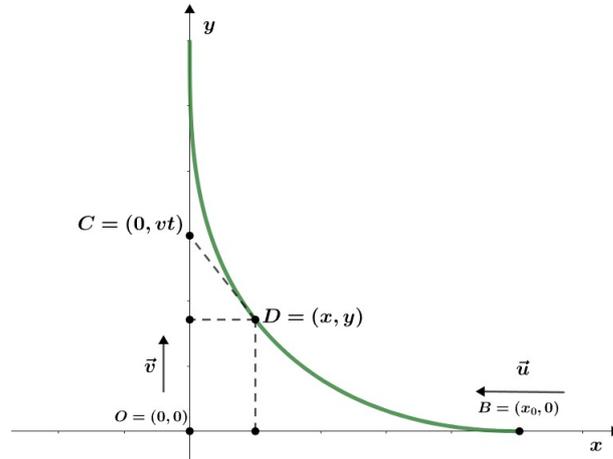
$$\frac{d^2q}{dt^2} + \gamma \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = E. \quad (4.8)$$

Observe que a equação (4.2) e a equação (4.8) são idênticas, sendo assim, suas soluções tanto homogêneas quanto não homogêneas são obtidas e analisadas da mesma forma.

### 4.3 Curvas de perseguição

O estudo dos problemas de curvas de perseguição abordam conceitos presentes em diversas áreas da ciência e engenharia, onde um objeto móvel segue uma trajetória predefinida em relação a outro objeto. Segundo [7], essa abordagem é comumente utilizada em robótica, controle de sistemas dinâmicos, design de jogos e animação, etc.

Figura 22: Curva de perseguição.



Fonte: Compilação do autor.

Como visto na figura 22, em um dado instante  $t_0$ , predador e presa se encontram sobre eixo  $x$  do plano  $xy$ . A presa está posicionada na origem e o predador está posicionado em um ponto  $B$  qualquer de coordenadas  $(x_0, 0)$ . Com o início da perseguição, a presa corre ao longo do eixo  $y$  com uma velocidade constante igual a  $v$ , enquanto o predador a persegue com uma velocidade constante  $u$ , mantendo sempre o olhar fixado na presa. Em um segundo instante  $t_1$ , a presa se encontra sobre o ponto  $C$  de coordenadas  $(0, vt)$  e o predador em um ponto  $D$  de coordenadas  $(x, y)$ . A reta que contempla os pontos  $C$  e  $D$ , é uma reta que é tangente a curva formada pelo movimento do predador,  $y(x)$ . O coeficiente angular da reta tangente será a derivada da curva naquele ponto, logo com o auxílio da equação da reta, teremos a informação sobre quem é a curva.

Desse modo, a equação da reta que contempla os pontos  $C$  e  $D$  é

$$y - vt = y'(x)x, \quad (4.9)$$

onde  $y'(x)$  é coeficiente angular da reta.

Quando isolamos  $t$  na equação (4.9), determinamos a expressão que descreve o tempo que foi gasto pela presa no intervalo de tempo entre  $t_0$  e  $t_1$  para sair da origem e chegar no ponto  $C$ . Portanto, da equação (4.9), temos

$$t = \frac{y - y'(x)x}{v}. \quad (4.10)$$

Para determinarmos uma expressão para o tempo gasto pelo predador no intervalo de tempo entre  $t_0$  e  $t_1$  para sair do ponto  $B$  e chegar no ponto  $D$ , observamos que a velocidade  $u$  do predador pode ser obtida por meio de

$$u = \frac{s}{t}, \quad (4.11)$$

onde  $s$  é o deslocamento do predador. Isolando  $t$  na expressão (4.11) e levando em consideração que o deslocamento realizado pelo predador descreve um pedaço de arco de curva, obtemos

$$t = -\frac{1}{u} \int_{x_0}^x \sqrt{1 + (y'(s))^2} ds. \quad (4.12)$$

Diferente da definição habitual de comprimento de arco de curva, a expressão apresenta um sinal negativo e os limites de integração invertidos, tal alteração é para manter a integração coerente com o sentido seguido pelo predador.

Como o tempo descrito pelas expressões em (4.9) e (4.12) é o mesmo, igualamos as expressões, obtendo

$$\frac{y - y'(x)x}{v} = -\frac{1}{u} \int_{x_0}^x \sqrt{1 + (y'(s))^2} ds. \quad (4.13)$$

Ao multiplicar ambos os lados da equação por  $v$  e derivá-la em relação a  $x$  de ambos os lados, obtemos

$$xy''(x) = \frac{v}{u} \sqrt{1 + (y'(x))^2}, \quad (4.14)$$

uma equação de segunda ordem não linear. Para solucioná-la, utilizaremos o método de redução de ordem visto na seção 3.9. Fazendo  $y'(x) = w(x)$ , na equação (4.14), obtemos

$$xw'(x) = \frac{v}{u} \sqrt{1 + (w(x))^2},$$

que é uma equação de variáveis separáveis que pode ser resolvida pelo método visto na seção 1.3. Escrevendo  $w'(x)$  na linguagem de Leibniz e separando as variáveis temos

$$\frac{dw}{\sqrt{1 + (w(x))^2}} = \frac{v}{ux} dx. \quad (4.15)$$

Integramos ambos os lados de (4.15), observe que a expressão a esquerda é uma integral que é resolvida por uma substituição trigonométrica resultando em

$$\ln |\sqrt{1 + w(x)^2} + w(x)| = \frac{v}{u} \ln |x| + c_1, \quad (4.16)$$

onde utilizamos a propriedade do logaritmo natural, no lado direito de (4.16). Agora, aplicando a função exponencial de ambos os lados da equação, obtemos

$$\sqrt{1 + w(x)^2} + w(x) = c|x|^{\frac{v}{u}}, \quad (4.17)$$

onde  $c = e^{c_1}$ .

Sabendo que no primeiro instante, o predador se encontra sobre o eixo  $x$  olhando fixamente para a presa que está na origem, temos a informação que  $y'(x_0) = 0$ , logo  $w(x_0) = 0$ .

Impondo essa condição em (4.17), temos

$$0 = cx_0^{\frac{v}{u}} \Rightarrow c = x_0^{-\frac{v}{u}}$$

e

$$\sqrt{1 + w(x)^2} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{v}{u}} - w(x). \quad (4.18)$$

Ao elevar ambos os lados da equação (4.18) ao quadrado, temos

$$1 + w(x)^2 = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{2v}{u}} - 2\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{v}{u}} w(x) + w(x)^2.$$

Ao subtrair  $w(x)^2$  de ambos os lados e isolar  $w(x)$ , obtemos

$$w(x) = \frac{1}{2} \left( \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{v}{u}} - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{v}{u}} \right).$$

Sendo  $w(x) = y'(x)$ , temos

$$y'(x) = \frac{1}{2} \left( \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{v}{u}} - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{v}{u}} \right). \quad (4.19)$$

Para determinar a expressão para  $y(x)$ , integramos (4.19) em relação a  $x$ , obtendo

$$y(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{x_0}{\frac{v}{u} + 1} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{v}{u} + 1} - \frac{x_0}{-\frac{v}{u} + 1} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{v}{u} + 1} \right] + c_2.$$

Sabendo que  $y(x_0) = 0$  pela posição inicial do predador, obtemos

$$c_2 = \frac{x_0 uv}{u^2 - v^2}.$$

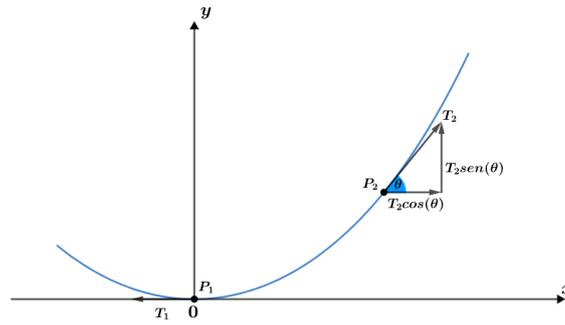
Portanto, a expressão que descreve a curva  $y(x)$  é

$$y(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{x_0}{\frac{v}{u} + 1} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{v}{u} + 1} - \frac{x_0}{-\frac{v}{u} + 1} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{v}{u} + 1} \right] + \frac{x_0 uv}{u^2 - v^2}.$$

#### 4.4 A catenária

O problema da curva catenária, segundo [8], foi proposto inicialmente por Jakob Bernoulli. Jakob procurava a curva formada por um cabo suspenso em ambas as extremidades e sob a ação da força do seu próprio peso. Ao tentar solucionar o problema, pensou que a curva em questão se tratava de uma parábola. O problema foi solucionado posteriormente por Johann Bernoulli, que evidenciou o erro do irmão.

Figura 23: A curva catenária.



Fonte: Compilação do autor.

Nosso objetivo é determinar a forma tomada por uma cabo flexível e inextensível, como apresentado na figura 23, suspenso, preso em dois pontos A e B, e que está sob a ação do seu próprio peso.

Analisando a porção do cabo compreendido entre o ponto mais baixo  $P_1$  e um ponto arbitrário  $P_2$ . Tomamos um sistema de coordenadas onde a origem do plano coincide com o ponto  $P_1$ , sendo o eixo  $x$  tangente à curva neste ponto.

Suponha que o comprimento entre  $P_1$  e  $P_2$  seja  $s$  e a densidade linear do cabo seja correspondente a  $w = \left(\frac{N}{m}\right)$ . Então o peso deste comprimento de cabo será  $w \cdot s$ .

Analisando as forças presentes no sistema, temos, o peso  $w \cdot s$  e as tensões  $T_1$  e  $T_2$  que agem sobre os pontos  $P_1$  e  $P_2$  respectivamente. Como o sistema está em equilíbrio, temos

$$T_2 \text{sen}(\theta) = w \cdot s \quad \text{e} \quad T_2 \text{cos}(\theta) = T_1.$$

Dividindo as equações, obtemos

$$\text{tg}(\theta) = \frac{w \cdot s}{T_1},$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w \cdot s}{T_1}. \quad (4.20)$$

Sabemos que o comprimento da curva entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$  é expresso por

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Portanto, segue do Teorema fundamental do cálculo que

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (4.21)$$

Derivando ambos os lados de (4.20) com relação a  $x$  e utilizando (4.21), obtemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{T_1} \frac{ds}{dx},$$

ou seja,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (4.22)$$

onde  $k = \frac{w}{T_1}$ , essa é uma equação diferencial ordinária não linear de segunda ordem, para encontrarmos sua solução geral, utilizamos o método de redução de ordem. Seja,  $y' = u$  a equação (4.22) se torna

$$\frac{du}{dx} = k \sqrt{1 + u^2},$$

que é uma equação diferencial ordinária não linear de primeira ordem que podemos solucionar pelo método visto na seção 1.3. Logo, separando as variáveis e integrando ambos os lados da equação, obtemos

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \int k dx.$$

Ao solucionar a as integrais, obtemos

$$\ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = kx + A,$$

onde  $A$  é a constante de integração.

Aplicando o exponencial de ambos os lados, temos

$$\sqrt{1 + u^2} = e^{kx+A} - u,$$

ao elevar ambos os lados da equação ao quadrado, obtemos

$$1 + u^2 = e^{2(kx+A)} - 2ue^{kx+A} + u^2. \quad (4.23)$$

Isolando  $u$  em (4.23), obtemos

$$u(x) = \frac{e^{kx+A} - e^{-(kx+A)}}{2} = \operatorname{senh}(kx + A).$$

Retornando para  $y$ , integramos  $u$ , obtendo a solução

$$y(x) = \frac{1}{k} \operatorname{cosh}(kx + A) + B,$$

onde  $B$  é a constante de integração. Como  $k = \frac{w}{T_1}$ , a expressão se torna,

$$y(x) = \frac{T_1}{w} \cosh\left(\frac{w}{T_1}x + A\right) + B.$$

# EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS COM COEFICIENTES VARIÁVEIS.

Neste capítulo estudaremos as equações diferenciais ordinárias com coeficientes variáveis e seu método de resolução.

## 5.1 Teoria preliminar

Quando o problema requer a resolução de uma equação de segunda ordem com coeficientes variáveis, uma estratégia é tentar encontrar uma solução na forma de uma série de potências, tal estratégia, nesse caso, é similar ao método de coeficientes a determinar, visto na subseção 3.3.1, onde previamente assumimos um formato geral de solução.

Seja

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \quad (5.1)$$

uma equação diferencial ordinária linear homogênea de segunda ordem com coeficientes variáveis, nessa seção veremos quando será possível encontrar uma solução em formato de séries de potências para tal equação e apresentar algumas equações especiais. No caso onde a equação (5.1) é não homogênea, se existirem soluções para a equação homogênea associada, podemos encontrar uma solução particular pelo método de variação de parâmetros.

Uma série de potências é sempre centrada em algum ponto  $x_0$ . A natureza desse ponto para a equação é o que vai determinar o método a ser utilizado para sua solução. Supomos que o ponto onde a série está centrada é o ponto  $x_0 = 0$ , caso contrário, a substituição  $t = x - x_0$  provocará a translação para soluções na vizinhança de  $t = 0$ .

A depender da equação, o ponto  $x_0 = 0$  pode ser um ponto ordinário da equação ou um ponto singular.

**Definição 5.1.** Dizemos que um ponto  $x_0$  é um ponto ordinário ou não-singular da equação diferencial (5.1) se  $P(x)$  e  $Q(x)$  são analíticas em  $x_0$ . Um ponto que não é ordinário é considerado como um ponto singular da equação.

**Definição 5.2.** Uma função  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $J$  é um intervalo, é analítica em  $x_0$  se a função pode ser escrita como uma série de potências e essa série converge em alguma vizinhança de  $x_0$ .

Observe que as funções  $f(x) = e^x$  e  $g(x) = \text{sen}(x)$  podem ser escritas como uma série de potências,

A série de Taylor para  $f(x) = e^x$  em torno de  $x = 0$  é

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

A série de Taylor para  $g(x) = \text{sen}(x)$  em torno de  $x = 0$  é

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Portanto, ambas as funções são analíticas. Em geral, as funções elementares, assim como as somas e produtos entre elas são funções analíticas.

## 5.2 Soluções na vizinhança de pontos ordinários

Se  $x_0 = 0$  é um ponto ordinário na equação (5.1), a solução em forma de séries de potências será dado pelo seguinte teorema.

**Teorema 5.1.** *Se  $x_0 = 0$  for um ponto ordinário da equação diferencial (5.1), podemos sempre encontrar duas soluções linearmente independentes na forma de série de potências centrada em  $x_0 = 0$ .*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \quad (5.2)$$

A série converge para uma solução em  $|x - x_0| < R$ , em que  $R$  é a distância do ponto  $x_0$  ao ponto singular mais próximo.

**Demonstração:** Ver [9]. □

Para obter a solução geral de (5.1), supomos que  $y(t)$  dada em (5.2) seja solução, substituindo-a e suas derivadas na equação, no processo, encontraremos a chamada equação de recorrência, que de forma iterativa gera os coeficientes da solução. Os coeficientes se formam em termos de  $c_0$  e  $c_1$ , definindo duas soluções cujo conjunto formado por elas é linearmente independentes sobre  $\mathbb{R}$ , conforme o Teorema 5.1.

**Exemplo 5.1.** *Encontre a solução em forma de séries de potência da equação*

$$y'' - xy' + 2y = 0. \quad (5.3)$$

**Solução:** Observe que nesta equação,  $P(x) = -x$  e  $Q(x) = 2$  são ambas funções elementares que serão analíticas para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Logo,  $x_0 = 0$  é um ponto ordinário para a equação. Supondo a solução geral (5.2), calculamos suas derivadas e substituímos na equação (5.3), obtendo

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^n = 0.$$

Observe que no segundo somatório, consideramos o somatório iniciando em  $n = 0$ , isto é possível devido o primeiro termo da série ser igual a 0. Na primeira série, fazemos a mudança  $k = n - 2$  nas demais faremos  $k = n$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k x^k = 0.$$

Com os somatórios iniciando em  $k = 0$ , podemos uni-los, colocando o termo  $x^k$  em evidência. Logo,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k [(k+2)(k+1)c_{k+2} - (k-2)c_k] = 0.$$

Como  $x^k \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , temos

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} - (k-2)c_k = 0,$$

ou seja,

$$c_{k+2} = \frac{(k-2)}{(k+2)(k+1)} c_k. \quad (5.4)$$

A equação (5.4) é a relação de recorrência para os coeficientes da solução, portanto, seguimos com as iterações.

Para  $k = 0, k = 1$  e  $k = 2$ , temos respectivamente

$$c_2 = -c_0,$$

$$c_3 = -\frac{1}{6}c_1.$$

$$c_4 = 0 \cdot c_2 = 0.$$

Como os próximos valores pares de  $k$  dependem de  $c_4$ , todos serão nulos. Continuaremos com os valores ímpares.

Para  $k = 3$  e  $k = 5$ , temos respectivamente

$$c_5 = \frac{1}{20}c_3 = -\frac{1}{120}c_1.$$

$$c_7 = \frac{1}{14}c_5 = -\frac{1}{1680}c_1$$

Muitas vezes, determinar uma forma geral para os termos gerados por uma relação de recorrência é uma tarefa complexa. Portanto, a solução será dada na forma da série expandida. Com os resultados obtidos pela relação de recorrência, temos que a solução geral para o problema será

$$y(t) = c_0(1 - x^2) + c_1 \left( x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{1680}x^7 - \dots \right).$$

### 5.3 Soluções na vizinhança de pontos singulares regulares

Se  $x_0 = 0$  é um ponto singular para a equação (5.1), nem sempre será possível obtermos uma solução em forma de série de potências. Porém, se  $x_0 = 0$  é um ponto singular regular, podemos utilizar o Método de Frobenius que pode ser encontrado em [1], para encontrar pelo menos uma solução para a equação (5.1). Antes de apresentar o método, necessitamos da seguinte definição.

**Definição 5.3.** *Se o ponto  $x_0 = 0$  é um ponto singular da equação (5.1) ele será um ponto singular regular se,  $xP(x)$  e  $x^2Q(x)$  são funções analíticas em  $x_0 = 0$ . Se  $x_0 = 0$  não é regular é chamado de ponto singular irregular da equação.*

O próximo teorema é conhecido como teorema de Frobenius.

**Teorema 5.2.** *Se  $x_0 = 0$  for um ponto singular regular da equação (5.1), então existe pelo menos uma solução em série na forma*

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \quad (5.5)$$

em que o número  $r$  é uma constante a ser determinada.

Um possível questionamento nesse ponto é sobre o motivo de buscar soluções na vizinhança de pontos singulares, a explicação pode ser encontrada em [1], e é motivada por problemas físicos, pois na vizinhança de pontos singulares, obtemos informações específicas sobre o problema, como quinas, descontinuidades, etc.

Para resolver a equação (5.1), seguimos um padrão semelhante ao caso onde  $x_0 = 0$  é um ponto ordinário para a equação, dessa vez tomamos a função (5.5) como solução, substituindo-a e suas derivadas em (5.1). Diferente do caso onde  $x_0 = 0$  é um ponto ordinário para a equação, ao proceder com os cálculos, encontraremos uma equação conhecida como equação indicial.

Se  $x_0 = 0$  é um ponto singular regular para a equação (5.1), como visto anteriormente, as funções  $xP(x)$  e  $x^2Q(x)$  serão funções analíticas em  $x_0 = 0$ . Disto, temos que os desenvolvimentos

$$\begin{aligned} xP(x) &= p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots \\ x^2Q(x) &= q_0 + q_1x + q_2x^2 + \dots \end{aligned}$$

são válidos em intervalos que têm raios de convergência positivos. Ao substituir a função (5.5) em (5.1) e simplificar, temos que a equação indicial é uma equação quadrática em  $r$

obtida igualando a 0 o coeficiente da menor potência de  $x$ . A forma geral para a equação indicial é

$$r(r-1) + p_0r + q_0 = 0.$$

Com a solução da equação indicial, podemos encontrar três casos distintos,

### Raízes indiciais

A natureza das soluções apresentadas pelo método de Frobenius pode ser previsto pelo comportamento de suas raízes indiciais. Conseguimos definir três casos distintos:

**Caso I:** Seja  $r_1$  e  $r_2$  raízes da equação indicial sendo  $r_1 > r_2$ , se  $r_1 - r_2 < 1$ , então o método de Frobenius irá apresentar duas soluções  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  tais que  $\{y_1(x), y_2(x)\}$  é linearmente independente sobre  $\mathbb{R}$ . As soluções serão:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1}, c_0 \neq 0 \quad \text{e} \quad y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}, b_0 \neq 0.$$

**Exemplo 5.2.** Determine a solução

$$2xy'' + (1+x)y' + y = 0$$

**Solução:** Supondo a solução (5.5), substituímos a expressão e suas derivadas na equação, obtendo

$$x^r \left[ r(2r-1)c_0x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} [(k+r+1)(2k+2r+1)c_{k+1} + (k+r+1)c_k]x^k \right] = 0.$$

Logo, nossa equação indicial é  $r(2r-1) = 0$ , com as raízes  $r_1 = \frac{1}{2}$  e  $r_2 = 0$ . Além disso, temos a relação de recorrência  $(k+r+1)(2k+2r+1)c_{k+1} + (k+r+1)c_k = 0$ .

Sendo  $r = r_1 = \frac{1}{2}$ , a relação de recorrência se resume a

$$c_{k+1} = \frac{-c_k}{2(k+1)},$$

que gera

$$c_1 = \frac{-c_0}{2 \cdot 1}; \quad c_2 = \frac{-c_1}{2 \cdot 2} = \frac{c_0}{2^2 \cdot 2!}; \quad c_3 = \frac{-c_2}{2 \cdot 3} = \frac{-c_0}{2^3 \cdot 3!}; \quad \dots; \quad c_n = \frac{(-1)^n c_0}{2^n n!}.$$

Logo, temos a solução,

$$y_1(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{n+\frac{1}{2}}.$$

Para  $r = r_2 = 0$ , temos a relação de recorrência

$$c_{k+1} = \frac{-c_k}{(2k+1)},$$

que gera

$$c_1 = \frac{-c_0}{1}; \quad c_2 = \frac{-c_1}{3} = \frac{c_0}{1 \cdot 3}; \quad c_3 = \frac{-c_2}{5} = \frac{-c_0}{1 \cdot 3 \cdot 5}; \quad \dots; \quad c_n = \frac{(-1)^n c_0}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)}.$$

Portanto, a segunda solução é

$$y_2(x) = c_0 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)} x^n \right].$$

Como as raízes da equação indicial não diferem por um inteiro, temos que o conjunto  $\{y_1(x), y_2(x)\}$  é linearmente independente. Sendo assim, a solução geral será dada por  $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ .

**Caso II:** Se  $r_1$  e  $r_2$  são raízes da equação indicial. Se  $r_1 - r_2 = n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , então as soluções para equação serão dadas por

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1}, c_0 \neq 0 \quad \text{e} \quad y_2(x) = c y_1(x) \ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}, b_0 \neq 0, \quad (5.6)$$

onde  $c$  é uma constante que pode ser nula.

**Exemplo 5.3.** *Encontre uma solução para a seguinte equação*

$$xy'' + 3y' - y = 0. \quad (5.7)$$

**Solução:** Observe que  $x_0 = 0$  é uma singularidade regular para a equação. Supondo a solução (5.2), substituimos tal solução e suas derivadas na equação (5.7), obtendo

$$x^r \left[ r(r+2)c_0 x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} x^k [(k+r+1)(k+r+3)c_{k+1} - c_k] \right] = 0.$$

Sendo  $r(r+2) = 0$  a equação indicial, temos as raízes  $r_1 = 0$  e  $r_2 = -2$ .

Seja  $r = 0$ , temos a relação de recorrência

$$c_{k+1} = \frac{c_k}{(k+1)(k+3)}.$$

Para  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ , temos respectivamente

$$c_1 = \frac{c_0}{3}; \quad c_2 = \frac{2c_0}{2!4!}; \quad c_3 = \frac{2c_0}{3!5!}; \quad c_4 = \frac{2c_0}{4!6!},$$

ou seja,

$$c_n = \frac{2c_0}{n!(n+2)!}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Assim, uma solução para (5.7) em forma de série de potências é

$$y_1(x) = c_0 x^0 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!(n+2)!} x^n \right] = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!(n+2)!} x^n. \quad (5.8)$$

Observe que  $r_1 - r_2 = 2$ , logo, um número inteiro positivo. Desse modo, vamos definir uma segunda solução a partir de  $y_1(x)$  da forma de (5.6). Ao calcular as derivadas de  $y_2(x)$  e substituir em (5.7), obtemos

$$\begin{aligned} \ln(x) [xy_1''(x) + 3y_1'(x) - y_1(x)] + 2y_1'(x) + \frac{2y_1(x)}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} (n-2)(n-3)b_n x^{n-3} \\ + 3 \sum_{n=0}^{\infty} (n-2)b_n x^{n-3} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-2} = 2y_1'(x) + \frac{2y_1(x)}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} (n-2)nb_n x^{n-3} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-2} = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Derivando (5.8), e substituindo em (5.9), obtemos

$$-(b_0 + b_1)x^{-2} + \sum_{k=0}^{\infty} x^{k-1} \left[ \frac{4(k+1)}{k!(k+2)!} + k(k+2)b_{k+2} - b_{k+1} \right] = 0. \quad (5.10)$$

De (5.10), obtemos  $b_1 = -b_0$ , e

$$\frac{4(k+1)}{k!(k+2)!} + k(k+2)b_{k+2} - b_{k+1} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

Para  $k = 0$ , temos que  $b_2$  é arbitrário, e que  $b_1 = 2$ , logo  $b_0 = -2$ . Escrevendo no formato de relação de recorrência, temos

$$b_{k+2} = \frac{b_{k+1}}{k(k+2)} - \frac{4(k+1)}{k!(k+2)!k(k+2)},$$

que para  $k = 1, 2$  temos respectivamente

$$b_3 = \frac{b_2}{3} - \frac{4}{9}; \quad b_4 = \frac{1}{24}b_2 - \frac{25}{288}.$$

Portanto, uma segunda solução para (5.7) é dada por

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \ln(x) + b_0 x^{-2} + b_1 x^{-1} + b_2 + b_3 x + \dots \\ &= y_1(x) \ln(x) - 2x^{-2} + 2x^{-1} + b_2 + \left[ \frac{b_2}{3} - \frac{4}{9} \right] x + \dots, \end{aligned}$$

em que  $b_2$  é arbitrário.

**Caso III:** Raízes indiciais iguais. Seja  $r_1$  e  $r_2$  soluções da equação indicial, se  $r_1 = r_2$ , as

soluções  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  tais que  $\{y_1(x), y_2(x)\}$  é linearmente independente, serão dadas por

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1}, c_0 \neq 0 \quad \text{e}$$

$$y_2(x) = y_1(x) \ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r}, b_0 \neq 0. \quad (5.11)$$

**Exemplo 5.4.** *Encontre a solução geral para*

$$xy'' + y' - 4y = 0. \quad (5.12)$$

**Solução:** Sendo  $x_0 = 0$  um ponto singular regular para a (5.12), temos sua solução em série de potências dada por (5.5), substituímos a expressão e suas derivadas na equação, obtemos

$$x^r \left[ r^2 c_0 x^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} [(k+r+1)^2 c_{k+1} - 4c_k] x^k \right] = 0,$$

onde a equação indicial,  $r^2 = 0$ , possui a raiz  $r_1 = 0$ . Portanto, seja  $r = 0$ , temos a seguinte relação de recorrência

$$c_{k+1} = \frac{4c_k}{(k+1)^2},$$

onde conseguimos a solução

$$y_1(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(n!)^2} x^n. \quad (5.13)$$

Uma segunda solução para equação (5.12), será dada por (5.11). Portanto, sendo  $r = 0$ , calculando suas derivadas e substituindo em (5.12), temos

$$\ln(x)[xy_1''(x) + y_1'(x) - 4y_1(x)] + 2y_1'(x) + \sum_{n=0}^{\infty} n^2 b_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 4b_n x^n = 0.$$

O termo entre colchetes certamente é nulo, prosseguindo, calculamos a derivada de (5.13), fazemos a mudança de índice no somatório e agrupando os termos, obtemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \left[ \frac{2^{2k+3}(k+1)}{((k+1)!)^2} + (k+1)^2 b_{k+1} - 4b_k \right] = 0.$$

Como o conjunto  $\{1, x, x^2, \dots\}$  é linearmente independente sobre  $\mathbb{R}$ , a expressão entre colchetes será nossa relação de recorrência, ou seja,

$$b_{k+1} = \frac{4b_k}{(k+1)^2} - \frac{2^{2k+3}(k+1)}{(k+1)^2((k+1)!)^2}.$$

Para  $k = 0, 1, 2$ , temos respectivamente,

$$b_1 = 4b_0 - 8; \quad b_2 = 4b_0 - 12; \quad b_3 = \frac{16b_0 - 144}{9}.$$

Logo, uma segunda solução para a equação é

$$y_2(x) = b_0 + (4b_0 - 8)x + (4b_0 - 12)x^2 + \left(\frac{16b_0 - 144}{9}\right)x^3 + \dots$$

## 5.4 Equações especiais

Nessa seção vamos ver algumas equações especiais que são solucionadas pelos métodos de séries de potência

### 5.4.1 A equação de Bessel

**Definição 5.4** (Equação de Bessel). *Uma equação da forma*

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0, \quad (5.14)$$

onde  $v \geq 0$  é chamada de *Equação de Bessel*.

**Solução:** Sendo  $x_0 = 0$  um ponto singular regular para a equação (5.14), supomos a solução (5.5), substituindo a expressão e suas derivadas na equação, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} - v^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0,$$

ou seja,

$$c_0(r^2 - v^2)x^r + x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n [(n+r)^2 - v^2] x^n + x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2},$$

onde temos que a equação indicial é  $r^2 - v^2 = 0$ , obtendo as raízes  $r_1 = v$  e  $r_2 = -v$ . Sendo  $r = r_1 = v$ , temos

$$x^v \left[ (1 + 2v)c_1 x + \sum_{n=0}^{\infty} [(k+2)(k+2+2v)c_{k+2} + c_k] x^{k+2} \right] = 0,$$

onde obtemos as expressões

$$(1 + 2v)c_1 = 0 \quad \text{e} \quad c_{k+2} = \frac{-ck}{(k+2)(k+2+2v)}.$$

A primeira expressão nos informa que  $c_1 = 0$  e isto implica que se  $k+2 = 2k+1$  temos

que  $c_{2n+1} = 0$ . Portando, sendo  $k + 2 = 2n$ , temos

$$c_{2n} = -\frac{c_{2n-2}}{2^{2n}(n+v)}.$$

Com as iterações, obtemos

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2 \cdot 1 \cdot (1+v)}.$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{2^2 \cdot 2 \cdot (2+v)} = \frac{c_0}{2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (1+v)(2+v)}.$$

$$c_6 = -\frac{c_4}{2^2 \cdot 3 \cdot (3+v)} = -\frac{c_0}{2^6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (1+v)(2+v)(3+v)}.$$

⋮

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n} n! (1+v)(2+v) \dots (n+v)}.$$

O valor de  $c_0$  é comumente tomado como

$$c_0 = \frac{1}{2^v \Gamma(1+v)},$$

onde  $\Gamma(1+v)$  é a função Gama, que está definida nos apêndices de [1]. Sendo assim, o termo geral da relação de recorrência se torna

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+v} n! \Gamma(1+v+n)}.$$

Sendo assim, a solução para a equação (5.14) é

$$J_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1+v+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v}. \quad (5.15)$$

Se tomarmos  $r = -v$ , obtemos a solução

$$J_{-v}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1-v+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-v}. \quad (5.16)$$

As funções (5.15) e (5.16) são conhecidas como Funções de Bessel de Primeira Espécie, a primeira de ordem  $v$  e a segunda de ordem  $-v$ .

Algumas considerações tem que ser feitas antes de definirmos uma solução geral para a equação (5.14). Se  $v = 0$  as equações (5.15) e (5.16) são iguais e portanto definiremos uma segunda solução utilizando o Caso III do método de Frobenius. Agora, se  $v > 0$  e a diferença

entre  $v$  e  $-v$  não é um inteiro, segue do Caso I do método de Frobenius que a solução geral para a equação (5.14) é  $y(x) = c_1 J_v(x) + J_{-v}(x)$ . Quando  $v > 0$  e a diferença entre  $v$  e  $-v$  for um inteiro positivo, definimos uma segunda solução utilizando o Caso II do Método de Frobenius.

Em geral, definimos a solução geral para a equação (5.14) como

$$y(x) = c_1 J_v(x) + J_{-v}(x), \quad v \notin \mathbb{Z}.$$

**Exemplo 5.5.** *Encontre a solução geral para a equação*

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0.$$

**Solução:** Como  $v = \frac{1}{2}$ , a solução geral da equação será

$$y(x) = c_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + J_{-\frac{1}{2}}(x).$$

#### 5.4.2 Equação de Bessel de segunda espécie.

Seja  $v$  é um número não inteiro, a função

$$Y_v(x) = \frac{\cos(v\pi)J_v(x) - J_{-v}(x)}{\sin(v\pi)}$$

e a função  $J_v(x)$  são soluções da equação (5.14) e  $\{Y_v(x), J_v(x)\}$  é linearmente independente sobre  $\mathbb{R}$ . Sendo assim, se  $v$  é um número não inteiro, uma outra forma para a solução solução geral para a equação (5.14) é

$$y(x) = c_1 J_v(x) + c_2 Y_v(x). \tag{5.17}$$

Se  $v \rightarrow m$ , sendo  $m$  um número inteiro, a equação (5.17) se torna uma indeterminação. Porém pela regra de L'Hôpital, sabemos que  $\lim_{v \rightarrow m} Y_v(x)$  existe.

Sendo assim, a função

$$Y_m(x) = \lim_{v \rightarrow m} Y_v(x)$$

e  $J_m(x)$  são soluções da equação  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0$ , tal que  $\{Y_m(x), J_m(x)\}$  é linearmente independente sobre  $\mathbb{R}$ . Logo, para qualquer valor de  $v$ , a solução de (5.14) pode ser escrita como

$$y(x) = c_1 J_v(x) + c_2 Y_v(x).$$

Tal função é conhecida como função de Neumann, mas segundo [1], é comumente chamada de Função de Bessel de Segunda Espécie de ordem  $v$ .

**Exemplo 5.6.** *Encontre a solução geral para a equação*

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 9)y = 0.$$

**Solução:** Segue da equação que  $v = 3$ , sendo assim, sua solução geral será

$$y(x) = c_1 J_3(x) + c_2 Y_3(x).$$

### 5.4.3 A equação paramétrica de Bessel.

Se na equação (5.14), fazemos a mudança de  $x$  por  $\lambda x$ , com o uso da regra da cadeia, obtemos a Equação Paramétrica de Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - v^2)y = 0. \quad (5.18)$$

A solução geral para a equação (5.18) é

$$y(x) = c_1 J_v(\lambda x) + c_2 Y_v(\lambda x).$$

### 5.4.4 A equação de Legendre

**Definição 5.5.** *A equação*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0, \quad (5.19)$$

onde  $n$  é um número inteiro não negativo, é conhecida como *Equação de Legendre*.

Observe que o ponto  $x_0 = 0$  é um ponto ordinário para a equação (5.19), portanto, supomos uma solução da forma (5.2). Substituindo a expressão e suas derivadas na equação (5.19), temos

$$(1 - x^2) \sum_{k=0}^{\infty} c_k k(k-1)x^{k-2} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k k x^k + n(n+1) \sum_{k=0}^{\infty} c^k x^k.$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} [n(n+1)c_0 + 2c_2] + [(n-1)(n+2)c_1 + 6c_3]x \\ + \sum_{j=2}^{\infty} [(j+2)(j+1)c_{j+2} + (n-j)(n+j+1)c_j] x^j = 0, \end{aligned}$$

onde temos

$$n(n+1)c_0 + 2c_2 = 0, \quad (n-1)(n+2)c_1 + 6c_3 = 0$$

e a relação de recorrência

$$(j+2)(j+1)c_{j+2} + (n-j)(n+j+1)c_j = 0.$$

Dessas expressões obtemos

$$c_2 = -\frac{n(n+1)}{2!}c_0 \quad \text{e} \quad c_3 = -\frac{(n-1)(n+2)}{3!}c_1.$$

Além da relação

$$c_{j+2} = -\frac{(n-j)(n+j+1)}{(j+2)(j+1)}c_j,$$

que gera

$$c_4 = -\frac{(n-2)(n+3)}{4 \cdot 3}c_2 = \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}c_0,$$

$$c_5 = -\frac{(n-3)(n+4)}{5 \cdot 4}c_3 = \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}c_1,$$

$$c_6 = -\frac{(n-4)(n+5)}{6 \cdot 5}c_4 = \frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}c_0,$$

$$c_7 = -\frac{(n-5)(n+6)}{7 \cdot 6}c_5 = -\frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}c_1, \dots$$

Sendo assim, temos as soluções

$$y_1(x) = c_0 \left[ 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}x^6 + \dots \right]$$

e

$$y_2(x) = c_1 \left[ x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}x^7 + \dots \right].$$

Observe que quando  $n$  é um inteiro não negativo, obtemos uma solução polinomial de grau  $n$ , visto que se  $n$  for um inteiro par, a primeira série é finita e se  $n$  for um inteiro ímpar, a segunda série se torna finita.

Como múltiplos das soluções obtidas também são soluções, é comum definirmos valores

específicos para  $c_0$  e  $c_1$ , dependendo se  $n$  for um inteiro par ou ímpar. Para  $n = 0$ , escolhemos  $c_0 = 1$  e para  $n = 2, 4, 6, \dots$ , temos

$$c_0 = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1 \cdot 3 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdots n}.$$

Para  $n = 1$ , escolhemos  $c_1 = 1$  e para  $n = 3, 5, 7, \dots$ , temos

$$c_1 = (-1)^{\frac{(n-1)}{2}} \frac{1 \cdot 3 \cdots (n)}{2 \cdot 4 \cdots (n-1)}.$$

**Exemplo 5.7.** Defina a solução para a equação de Legendre quando  $n = 4$ .

**Solução:** Como  $n$  é um número par, a solução  $y_1(x)$  se torna finita,

$$y_1(x) = c_0 \left[ 1 - \frac{4 \cdot 5}{2!} x^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7}{4!} x^4 \right] = c_0 \left[ 1 - 10x^2 + \frac{35}{3} x^4 \right].$$

Sendo  $n = 4$ , definimos  $c_0 = 3/8$ , logo,

$$y_1(x) = \frac{1}{8} [3 - 30x^2 + 35x^4].$$

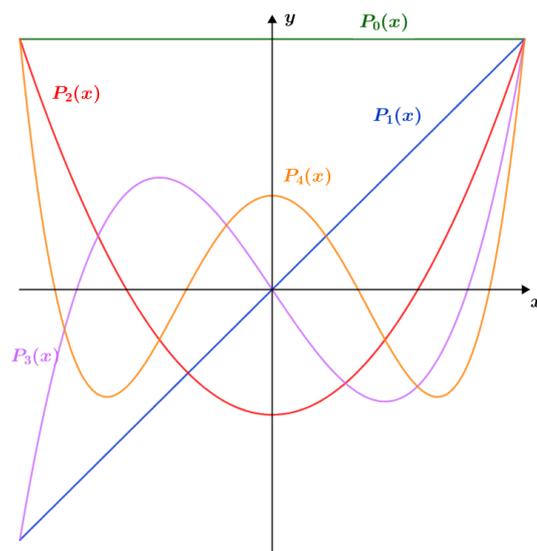
#### 5.4.5 Polinômios de Legendre

Denotamos por  $P_n(x)$  os polinômios formados através das séries  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  e pelas escolhas de  $c_0$  e  $c_1$ . Alguns polinômios de Legendre:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\ P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15), \\ P_6(x) &= \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5), \end{aligned}$$

onde  $P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x), \dots$ , são soluções particulares para a equação (5.19) quando  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Figura 24: Alguns polinômios de Legendre.



Fonte: Compilação do autor.

## A TRANSFORMADA DE LAPLACE

O uso de transformadas de Laplace na resolução de equações diferenciais é útil pois transforma o problema de resolver uma equação diferencial ordinária no problema de resolver uma equação algébrica.

### 6.1 Teoria preliminar

Antes de falarmos sobre o método em si, vamos apresentar a teoria básica sobre as transformadas de Laplace.

**Definição 6.1.** *Seja  $f(t)$  uma função definida para  $t \geq 0$ , sua Transformada de Laplace, representada por  $F(s)$  é dada por*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (6.1)$$

Como a integral presente em (6.1) é uma integral imprópria, podemos resolvê-la utilizando o seguinte limite:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt.$$

Se o resultado dessa integral for  $\pm\infty$ , dizemos que a integral diverge. Se o resultado for uma constante finita  $c$ , a integral converge. Nosso objetivo é identificar para qual intervalo de  $s$ , a integral convergirá.

**Exemplo 6.1.** *Calcule  $\mathcal{L}\{1\}$ , para  $t \geq 0$ .*

**Solução:** Pela definição, temos

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot 1 dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \cdot 1 dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-e^{-sb} + 1}{s} = \frac{1}{s},$$

desde que  $s > 0$ .

**Exemplo 6.2.** *Calcule  $\mathcal{L}\{e^{3t}\}$ , para  $t \geq 0$ .*

**Solução:** Pela definição, temos

$$\mathcal{L}\{e^{3t}\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{3t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} e^{3t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{(3-s)b} - 1}{(3-s)} = \frac{1}{s-3},$$

desde que  $s > 3$ .

**Teorema 6.1.** *A transformada de Laplace é um operador linear, ou seja,*

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s).$$

**Demonstração:** De definição de transformada, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}(\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt + \beta \int_0^{\infty} e^{-st} g(t)dt \\ &= \alpha F(s) + \beta G(s). \end{aligned}$$

□

Para o próximo teorema, precisamos da seguinte definição.

**Definição 6.2.** *Dizemos que uma função é de ordem exponencial, se existem  $c, M > 0$  e  $T > 0$ , tal que*

$$|f(t)| < Me^{ct}, \quad \forall t > T. \quad (6.2)$$

**Exemplo 6.3.** *Verifique se a função  $f(t) = t$  é de ordem exponencial.*

**Solução:** Observe que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|f(t)|}{e^{ct}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|t|}{e^{ct}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{ce^{ct}} = 0,$$

para  $c > 0$ . Da definição de limite segue que podemos obter  $M > 0, T > 0$  para algum  $c > 0$  satisfazendo (6.2). Portanto,  $f(t) = t$ , é de ordem exponencial.

**Exemplo 6.4.** *Verifique se a função  $f(t) = e^{t^2}$  é de ordem exponencial.*

**Solução:** Observe que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|f(t)|}{e^{ct}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|e^{t^2}|}{e^{ct}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t^2 - ct} = +\infty.$$

Da definição de limite segue que não podemos obter  $M > 0$  satisfazendo (6.2). Portanto,  $f(t) = e^{t^2}$  não é de ordem exponencial.

Uma questão que deve ser levantada é se toda função tem uma transformada de Laplace. O próximo teorema, que pode ser encontrado em [1], define as condições de suficiência para a existência da transformada.

**Teorema 6.2.** *As condições de suficiência para a existência de  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  são:*

(i)  *$f(t)$  é uma função contínua por partes no intervalo  $[0, +\infty)$ , ou seja, em todo intervalo  $[a, b]$ , com  $a > 0$ , a função tem um número finito de discontinuidades e toda discontinuidade é de primeira espécie, ou seja, para todos os pontos nesse intervalo, existem os limites laterais.*

(ii) *A função  $f(t)$  é de ordem exponencial para  $t > T$ .*

**Exemplo 6.5.** A função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

é uma função contínua por partes, pois embora a função não seja contínua em todos os naturais, os limites laterais nos naturais existem.

**Teorema 6.3.** Seja  $f(t)$  uma função contínua por partes no intervalo  $[0, +\infty)$  e de ordem exponencial para  $t > T$  então, sua transformada de Laplace existe para todo  $s > c$ .

**Demonstração:** Da hipótese que  $f(t)$  é contínua por partes, temos

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = I_1 + I_2.$$

Para  $I_1$ , temos que certamente a integral converge, pois no integrando temos o produto de duas funções que são contínuas no intervalo  $[0, T]$ , logo o produto entre elas é integrável.

Para  $I_2$ , vamos usar a hipótese inicial que diz que  $f(t)$  é de ordem exponencial, portando

$$|f(t)| \leq M e^{ct}, \quad \forall t > T.$$

Isso nos diz que

$$|I_2| \leq \int_T^{+\infty} |e^{-st} f(t)| dt \leq M \int_T^{+\infty} e^{-st} e^{ct} dt.$$

A integral a direita pode ser resolvida como

$$\lim_{b \rightarrow \infty} M \int_T^b e^{-(s-c)t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-M(e^{-(s-c)b} - e^{-(s-c)T})}{(s-c)}.$$

Se  $s > c$ , o limite existe e converge para  $\frac{M e^{-(s-c)T}}{(s-c)}$ . Isso implica que a integral  $I_2$  existe e converge para todo  $s > c$ . Logo sua transformada de Laplace também irá existir para todo  $s > c$ .  $\square$

A partir de agora, vamos assumir que  $s$  sempre pertence a um intervalo que garante a convergência da integral.

**Teorema 6.4** (Transformada de algumas funções básicas).

- $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ ;
- $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$ ;
- $\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{s - \alpha}$ ;

- $\mathcal{L}\{\sin(kt)\} = \frac{k}{s^2 + k^2}$ ;
- $\mathcal{L}\{\cos(kt)\} = \frac{s}{s^2 + k^2}$ ;
- $\mathcal{L}\{\sinh(kt)\} = \frac{k}{s^2 - k^2}$ ;
- $\mathcal{L}\{\cosh(kt)\} = \frac{s}{s^2 - k^2}$ .

**Demonstração:** Ver [10]. □

A seguir, veremos o primeiro teorema de translação para transformadas de Laplace.

**Teorema 6.5.** *Se  $a$  é um número real, então*

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a).$$

**Demonstração:** Pela definição, temos

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}e^{at}f(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}f(t)dt = F(s - a).$$

□

O teorema 6.5 é classificado por [1] como o Primeiro Teorema de Translação, pois, como o nome sugere, o gráfico de  $F(s - a)$  é simplesmente o gráfico de  $F(s)$  transladado  $a$  unidades para a direita.

**Exemplo 6.6.** *Calcule a seguinte transformada*

$$\mathcal{L}\{e^{5t}t^3\}.$$

**Solução:**  $\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{3!}{s^4}$ , logo, com a translação, temos  $\mathcal{L}\{e^{5t}t^3\} = \frac{6}{(s - 5)^4}$ .

**Exemplo 6.7.** *Calcule a seguinte transformada*

$$\mathcal{L}\{e^{-2t}\cos(4t)\}$$

**Solução:**  $\mathcal{L}\{\cos(4t)\} = \frac{s}{s^2 + 16}$ , logo, com a translação, temos  $\mathcal{L}\{e^{-2t}\cos(4t)\} = \frac{(s + 2)}{(s + 2)^2 + 16}$ .

## 6.2 A transformada inversa de Laplace

A existência da operação inversa da transformada de Laplace segue diretamente da injetividade da operação transformada de Laplace, isso pode ser verificado pelo seguinte teorema,

**Teorema 6.6.** *Sejam  $f(t)$  e  $g(t)$  funções contínuas por partes e de ordem exponencial, suponha que exista um número real  $s_0$  tal que  $\mathcal{L}\{f(s)\} = \mathcal{L}\{g(s)\}, \forall s > s_0$ . Então, com a possível exceção de pontos de descontinuidade,  $f(t) = g(t), \forall t > 0$ .*

**Demonstração:** Ver [1]. □

**Definição 6.3.** *Denotamos a transformada inversa de Laplace como*

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t).$$

A transformada inversa de Laplace também é um operador linear, ou seja, podemos escrever

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha f(t) + \beta g(t).$$

**Exemplo 6.8.** *Calcule  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\}$ .*

**Solução:** Ao conferir o Teorema ??, notamos a semelhança com a transformada do caso polinomial, quando  $n = 4$ . Portanto, para obter o termo  $4!$ , multiplicamos a expressão por  $\frac{24}{24}$ , logo

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} = \frac{1}{24}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} = \frac{t^4}{24}.$$

**Exemplo 6.9.** *Calcule  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{s^2+7}\right\}$ .*

**Solução:** Escrevemos,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2+7}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+7}\right\}.$$

Observe que os casos se assemelham à transformada inversa da função cosseno e seno, respectivamente. Portanto, fazemos as multiplicações:

$$3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+7}\right\} + \frac{5}{\sqrt{7}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{7}}{s^2+7}\right\} = 3\cos(\sqrt{7}t) + \frac{5}{\sqrt{7}}\text{sen}(\sqrt{7}t).$$

### 6.2.1 Frações parciais.

Nem sempre a função  $F(s)$  será fácil de ser identificada no Teorema ??, deste modo é necessário e conveniente o uso de frações parciais. No que segue, veremos três exemplos que ilustram a utilização das frações parciais.

**Caso (i)** Denominador com fatores lineares distintos.

Calculemos  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right\}$ .

Observe que

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} = \frac{A(s+2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s+2)}{(s-1)(s+2)(s+4)}.$$

Assim, obtemos o sistema

$$\begin{cases} A + B + C = 0, \\ 6A + 3B + C = 0, \\ 8A - 4B - 2C = 1. \end{cases}$$

A solução do sistema é,  $A = \frac{1}{15}$ ,  $B = -\frac{1}{6}$  e  $C = \frac{1}{10}$ .

Deste modo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} \right\} &= \frac{1}{15} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-1} \right\} - \frac{1}{6} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\} + \frac{1}{10} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+4} \right\} \\ &= \frac{1}{15} e^t - \frac{1}{6} e^{-2t} + \frac{1}{10} e^{-4t}. \end{aligned}$$

**Caso (ii)** Denominadores com fatores lineares repetidos.

Calculemos  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+1}{s^2(s+2)^3} \right\}$ .

Utilizando frações parciais, temos

$$\frac{s+1}{s^2(s+2)^3} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{(s+2)^2} + \frac{E}{(s+2)^3}. \quad (6.3)$$

Multiplicando ambos os lados de (6.3) por  $s^2(s+2)^3$ , obtemos

$$s+1 = As(s+2)^3 + B(s+2)^3 + Cs^2(s+2)^2 + Ds^2(s+2) + Es^2.$$

Assim, obtemos o sistema

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ 6A + B + 4C + D = 0, \\ 12A + 6B + 4C + 2D + E = 0, \\ 8A + 12B = 1, \\ 8B = 1, \end{cases}$$

cuja solução é,  $A = -\frac{1}{16}$ ,  $B = \frac{1}{8}$ ,  $C = \frac{1}{16}$ ,  $D = 0$ ,  $E = -\frac{1}{4}$ .

Deste modo,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right\} &= \frac{1}{16}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \frac{1}{16}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+2)^3}\right\} \\ &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{8}t + \frac{1}{16}e^{-2t} - \frac{1}{8}t^2e^{-2t}.\end{aligned}$$

**Caso (iii)** Denominador com fator quadrático irreduzível.

Calculemos  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)}\right\}$ .

Utilizando frações parciais, temos

$$\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds+F}{s^2+4}. \quad (6.4)$$

Multiplicando ambos os lados de (6.4) por  $s^3(s^2+4)$ , obtemos

$$3s-2 = As^2(s^2+4) + Bs(s^2+4) + C(s^2+4) + (Ds+E)(s^3).$$

Assim, obtemos o sistema,

$$\begin{cases} A + D = 0, \\ B + E = 0, \\ 4A + C = 0, \\ 4B = 3, \\ 4C = -2, \end{cases}$$

cuja solução é,  $A = \frac{1}{8}$ ,  $B = \frac{3}{4}$  e  $C = -\frac{1}{2}$ ,  $D = -\frac{1}{8}$  e  $E = -\frac{3}{4}$ .

Deste modo,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)}\right\} &= \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} - \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} \\ &\quad - \frac{3}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{3}{4}t - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}\cos(2t) - \frac{3}{8}\sin(2t).\end{aligned}$$

Nem toda função de  $s$  é transformada de Laplace de alguma função contínua por partes de ordem exponencial.

**Teorema 6.7.** *Seja  $f(t)$  contínua por partes no intervalo  $[0, +\infty)$ , e de ordem exponencial para  $t > T$ , então*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0.$$

**Demonstração:** Ver [1]. □

Sejam  $F(s) = s^2$  e  $G(s) = \frac{s}{s+1}$  repare que  $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = +\infty$  e  $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 1$ , logo de acordo com o teorema 6.7,  $F(s)$  e  $G(s)$  não podem ser transformadas de funções contínuas por partes no intervalo  $[0, +\infty[$  e de ordem exponencial. Portanto, tais funções não tem transformada inversa.

Em casos onde o sistema estudado pode apresentar uma mudança quase que instantânea de valores, como o simples ato de acender e apagar luzes, é conveniente o uso da função degrau unitário.

**Definição 6.4.** A função  $\mathcal{U}(t - a)$  é definida por

$$\mathcal{U}(t - a) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < a, \\ 1, & \text{se } t \geq a. \end{cases}$$

Quando multiplicada por uma outra função definida para  $t > 0$ , a função degrau unitário cancela uma porção do gráfico da função. Devido a isso, a função degrau unitário é usada para escrever funções definidas por partes em uma forma compacta.

Observe que a função definida por partes

$$f(t) = \begin{cases} g(t), & \text{se } 0 \leq t < a \\ h(t), & \text{se } t \geq a, \end{cases}$$

pode ser escrita como

$$f(t) = g(t) - g(t)\mathcal{U}(t - a) + h(t)\mathcal{U}(t - a). \tag{6.5}$$

A demonstração de (6.5) vem diretamente da definição 6.4, ou seja,

$$f(t) = \begin{cases} g(t) - g(t) \cdot 0 + h(t) \cdot 0, & \text{se } 0 \leq t < a, \\ g(t) - g(t) \cdot 1 + h(t) \cdot 1, & \text{se } t \geq a. \end{cases}$$

Tal propriedade é ilustrada pelo próximo exemplo, que pode ser encontrado em [1].

**Exemplo 6.10.** A voltagem em um circuito é dada por

$$E(t) = \begin{cases} 20t, & \text{se } 0 \leq t < 5 \\ 0, & \text{se } t \geq 5. \end{cases}$$

Expresse  $E(t)$  em termos de funções degrau unitário.

**Solução:** Se  $g(t) = 20t$  e  $h(t) = 0$ , temos de (6.5) que

$$E(t) = 20t - 20t\mathcal{U}(t - 5).$$

**Teorema 6.8.** Se  $a$  for uma constante positiva, então

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s),$$

em que  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ .

**Demonstração:** Pela definição 6.1, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}f(t-a)\mathcal{U}(t-a)dt \\ &= \int_0^a e^{-st}f(t-a)\mathcal{U}(t-a)dt + \int_a^{\infty} e^{-st}f(t-a)\mathcal{U}(t-a)dt \\ &= \int_a^{\infty} e^{-st}f(t-a)dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s(v+a)}f(v)dv = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}, \end{aligned}$$

pois  $\mathcal{U}(t-a) = 0, \forall t \in [0, a], \mathcal{U}(t-a) = 1, \forall t \in [a, +\infty[$  e utilizamos a mudança de variável  $v = t - a$ .

□

O teorema (6.8) é denominado por [1], como o Segundo Teorema de Translação.

**Exemplo 6.11.** Calcule a seguinte transformada:

$$\mathcal{L}\{(t-2)^3\mathcal{U}(t-2)\}.$$

**Solução:** Como  $a = 2$ , do Teorema 6.8 temos que

$$\mathcal{L}\{(t-2)^3\mathcal{U}(t-2)\} = e^{-2s}\frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}e^{-2s}.$$

**Exemplo 6.12.** Calcule a seguinte transformada:

$$\mathcal{L}\{\text{sen}(t)\mathcal{U}(t-2\pi)\}.$$

**Solução:** Como  $a = 2\pi$ , pelo Teorema 6.8, temos

$$\mathcal{L}\{(t-2\pi)\mathcal{U}(t-2\pi)\} = e^{-2\pi s}\mathcal{L}\{\text{sen}(t)\} = \frac{e^{-2\pi s}}{s^2 + 1}.$$

O teorema 6.8 tem a forma inversa.

**Definição 6.5.** A forma inversa do Teorema 6.8 é

$$f(t-a)\mathcal{U}(t-a) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}, \quad (6.6)$$

em que  $a > 0$  e  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ .

**Exemplo 6.13.** Calcule a seguinte transformada inversa:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-\frac{\pi s}{2}}}{s^2 + 9} \right\}.$$

**Solução:** Como  $a = \frac{\pi}{2}$  e sabendo que  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 9} \right\} = \frac{1}{3} \text{sen}(3t)$ . Temos pela definição 6.6 que

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-\frac{\pi s}{2}}}{s^2 + 9} \right\} = \frac{1}{3} \text{sen} \left( 3t - \frac{3\pi}{2} \right) \mathcal{U} \left( t - \frac{\pi}{2} \right).$$

**Teorema 6.9.** Seja  $n \in \mathbb{N}$ , então

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s), \quad (6.7)$$

em que  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ .

**Demonstração:** A demonstração é feita por indução sobre  $n$ . Para  $n = 1$ , temos

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

ao derivar a equação em ambos os lados em relação a  $s$ , temos

$$\frac{d}{ds} F(s) = \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} [e^{-st} f(t)] dt = \int_0^{\infty} -e^{-st} t f(t) dt = -\mathcal{L}\{t f(t)\},$$

ou seja,

$$\mathcal{L}\{t f(t)\} = (-1) \frac{d}{ds} F(s).$$

Agora, assumimos que a afirmação (6.7) é verdadeira para algum  $n = k \in \mathbb{N}$ , ou seja,

$$\mathcal{L}\{t^k f(t)\} = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} F(s). \quad (\text{HI})$$

Temos que provar que a afirmação é verdadeira para  $n = k + 1$ , ou seja,

$$\mathcal{L}\{t^{k+1} f(t)\} = (-1)^{k+1} \frac{d^{(k+1)}}{ds^{(k+1)}} F(s).$$

A transformada de Laplace de  $t^{k+1} f(t)$  é dada por:

$$\mathcal{L}\{t^{k+1} f(t)\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{t^k f(t)\} \stackrel{(\text{HI})}{=} -1 \frac{d}{ds} \left[ (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} F(s) \right] = (-1)^{k+1} \frac{d^{k+1}}{ds^{k+1}} F(s).$$

Portanto, (6.7) é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ . □

**Exemplo 6.14.** Calcule a seguinte transformada

$$\mathcal{L}\{te^{3t}\}.$$

**Solução:**  $\mathcal{L}\{te^{3t}\} = -\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s-3} \right) = \frac{1}{(s-3)^2}.$

**Exemplo 6.15.** Calcule a seguinte transformada

$$\mathcal{L}\{t \operatorname{sen}(kt)\}.$$

**Solução:**  $\mathcal{L}\{t \operatorname{sen}(kt)\} = -\frac{d}{ds} \left( \frac{k}{s^2 + k^2} \right) = \frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}.$

Para o uso das transformadas de Laplace no cálculo de equações diferenciais, será necessário definir a transformada de uma derivada.

**Teorema 6.10.** Se  $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$  forem contínuas em  $[0, +\infty)$ , e de ordem exponencial, e se  $f^{(n)}(t)$  for contínua por partes em  $[0, +\infty)$ , então

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), \quad (6.8)$$

em que  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}.$

**Demonstração:** A demonstração é feita por indução sobre  $n$ . Para  $n = 1$ , temos

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = sF(s) - f(0).$$

Portanto, a afirmação é verdadeira para  $n = 1$ . Agora, assumimos que a afirmação é verdadeira para algum  $n = k \in \mathbb{N}$ , ou seja,

$$\mathcal{L}\{f^{(k)}(t)\} = s^k F(s) - s^{k-1} f(0) - s^{k-2} f'(0) - \dots - f^{(k-1)}(0). \quad (\text{HI})$$

Temos que provar que a afirmação é verdadeira para  $n = k + 1$ , ou seja,

$$\mathcal{L}\{f^{(k+1)}(t)\} = s^{k+1} F(s) - s^k f(0) - s^{k-1} f'(0) - \dots - f^{(k)}(0).$$

A transformada de Laplace de  $f^{(k+1)}(t)$  é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f^{(k+1)}(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} f^{(k+1)}(t) dt \\ &= [e^{-st} f^{(k)}(t)]_0^{+\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f^{(k)}(t) dt \\ &\stackrel{(\text{HI})}{=} s^{k+1} F(s) - s^k f(0) - s^{k-1} f'(0) - \dots - s f^{(k-1)}(0) - f^{(k)}(0). \end{aligned}$$

Portanto, a igualdade (6.8) é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ . □

### 6.3 Convolução

**Definição 6.6.** Se  $f$  e  $g$  são funções contínuas por partes em  $[0, +\infty)$ , então a convolução de  $f$  e  $g$ , denotada por  $f * g$ , é dada pela integral

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau. \quad (6.9)$$

**Teorema 6.11.** Sejam  $f(t)$  e  $g(t)$  funções contínuas por partes em  $[0, +\infty)$  e de ordem exponencial, então

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s).$$

**Demonstração:** Das definições de transformada de Laplace e convolução, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{(f * g)(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} \left[ \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau \right] dt \\ &= \int_0^\infty e^{-sv} \left[ \int_0^v f(v - u)g(u) | -1 | du \right] dv \\ &= \int_0^\infty g(u) \left[ \int_u^\infty e^{-sv} f(v - u) dv \right] du \\ &= \int_0^\infty g(z) \left[ \int_0^\infty e^{-s(w+z)} f(w) |1| dw \right] dz \\ &= \left[ \int_0^\infty e^{-sw} f(w) dw \right] \int_0^\infty g(z) e^{-sz} dz = F(s)G(s), \end{aligned}$$

onde utilizamos as mudanças de variáveis

$$\begin{cases} u = t - \tau \\ v = t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} v = w + u \\ u = z \end{cases}$$

e observamos que os jacobianos das mudanças de variáveis são respectivamente  $J(u, v) = -1$  e  $J(w, z) = 1$ . Além disso, fizemos uma mudança na ordem de integração. □

**Corolário: 1.** A forma inversa do teorema 6.11 é

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f * g)(t).$$

Se a função  $f(t)$  for uma função periódica, com o período  $T, T > 0$ , então sua transfor-

mada de Laplace é descrita no seguinte teorema

**Teorema 6.12.** *Seja  $f(t)$  uma função contínua por partes em  $[0, +\infty)$  e de ordem exponencial. Se  $f(t)$  for periódica de período  $T$ , então*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

**Demonstração:** Seja  $f(t)$  contínua por partes, então

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{+\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (6.10)$$

Fazendo  $t = u + T$ , a integral à direita se torna

$$\begin{aligned} \int_T^{+\infty} e^{-st} f(t) dt &= \int_0^{+\infty} e^{-s(u+T)} f(u+T) du \\ &= e^{-sT} \int_0^{+\infty} e^{-su} f(u) du \\ &= e^{-sT} \mathcal{L}\{f(t)\}. \end{aligned}$$

Portanto, de (6.10), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^T e^{-st} f(t) dt + e^{-sT} \mathcal{L}\{f(t)\} \\ &= \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt. \end{aligned}$$

□

Finalizamos essa seção com o teorema que descreve a transformada de Laplace de uma integral.

**Teorema 6.13.** *Seja  $f(t)$  uma função contínua por partes e de ordem exponencial. Se  $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ , então,*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

**Demonstração:** Pelo teorema fundamental do cálculo, temos que  $g'(\tau) = f(\tau)$ . Observe que

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \Rightarrow s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) = F(s).$$

Sabendo que  $g(0) = 0$ , temos que

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{F(s)}{s}.$$

□

## 6.4 Aplicações

Como visto no teorema 6.10,  $\mathcal{L}\{y^{(n)}(t)\}$ , com  $n > 1$ , depende de  $y(t)$  e de suas  $n - 1$  derivadas no ponto  $t = 0$ . Portanto, é conveniente o uso das transformadas de Laplace na resolução de problemas de valor inicial cuja equação é uma equação diferencial ordinária linear com coeficientes constantes. Tal equação pode ser reduzida a uma equação algébrica na função da transformada  $Y(s)$ , que ao ser calculada a transformada inversa de Laplace, resulta em  $y(t)$ . Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = g(t), \\ y(0) = y_0, y'(0) = y', \dots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases}$$

em que  $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  e  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  são constantes. Pela propriedade de linearidade da transformada de Laplace, temos

$$a_n \mathcal{L} \left\{ \frac{d^n y(t)}{dt^n} \right\} + a_{n-1} \mathcal{L} \left\{ \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \right\} + \dots + a_0 \mathcal{L} \{y(t)\} = \mathcal{L} \{g(t)\}.$$

Assim, pelo teorema (6.10), obtemos

$$\begin{aligned} a_n [s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)] \\ + a_{n-1} [s^{n-1} Y(s) - s^{n-2} y(0) - \dots + y^{(n-2)}(0)] \\ + \dots + a_0 Y(s) = G(s). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} [a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0] Y(s) = a_n [s^{n-1} y_0 + \dots + y_0^{(n-1)}] \\ + a_{n-1} [s^{n-2} y_0 + \dots + y_0^{(n-2)}] + \dots + G(s). \end{aligned}$$

Ao explicitar  $Y(s)$ , encontramos  $y(t)$  através da sua transformada inversa.

**Definição 6.7.** *A equação*

$$f(t) = g(t) + \int_0^t f(\tau) h(t - \tau) d\tau,$$

onde as funções  $g(t)$  e  $h(t)$  são conhecidas, é conhecida como equação integral de Volterra para  $f(t)$ .

### 6.4.1 Circuitos elétricos

Se na equação (4.8), a queda de tensão no capacitor for dado por  $\frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$ , temos a equação

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = E(t). \quad (6.11)$$

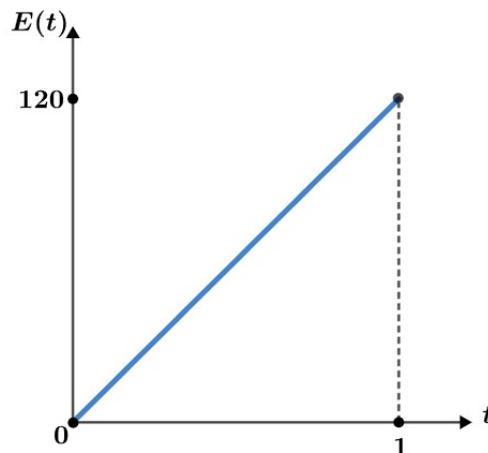
Em [1], é apresentado o seguinte exemplo:

**Exemplo 6.16.** *Determine a corrente  $i(t)$  em um circuito em série RCL, quando  $L = 0,1$  henry,  $R = 20$  ohms,  $C = 10^{-3}$  farad,  $i(0) = 0$  e a voltagem impressa por  $E(t)$  é dada por*

$$E(t) = \begin{cases} 120t, & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{se } t > 1. \end{cases} \quad (6.12)$$

O gráfico de (6.12) pode ser visualizado na figura 25.

Figura 25: Gráfico de  $E(t)$  em função de  $t$ .



Fonte: Compilação do autor.

**Solução:** Observe que para  $t > 1$ , a voltagem está desligada. Utilizando a definição 6.4, de (6.12), obtemos

$$E(t) = 120t - 120t\mathcal{U}(t - 1).$$

Como para o termo à direita é conveniente o uso do teorema 6.8, fazemos a mudança

$$E(t) = 120t - 120(t - 1)\mathcal{U}(t - 1) - 120\mathcal{U}(t - 1).$$

Portanto, da equação (6.11), temos

$$0,1 \frac{di}{dt} + 20i + 10^3 \int_0^t i(\tau) d\tau = 120t - 120(t-1)\mathcal{U}(t-1) - 120\mathcal{U}(t-1).$$

Calculando a transformada da equação, utilizando o teorema 6.13 no terceiro termo, obtemos

$$0,1sI(s) + 20I(s) + 10^3 \frac{I(s)}{s} = 120 \left[ \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} e^{-s} - \frac{1}{s} e^{-s} \right].$$

Agora, multiplicando a equação por  $10s$ , obtemos

$$I(s) = 1200 \left[ \frac{1}{s(s+100)^2} - \frac{1}{s(s+100)^2} e^{-s} - \frac{1}{(s+100)^2} e^{-s} \right],$$

que, com o uso de frações parciais, temos

$$\begin{aligned} I(s) = & \left[ \frac{1}{10^4} \frac{1}{s} - \frac{1}{10^4} \frac{1}{s+100} - \frac{1}{10^2} \frac{1}{(s+100)^2} \right. \\ & \left. - \frac{1}{10^4} \frac{1}{s} e^{-s} + \frac{1}{10^4} \frac{1}{s+100} e^{-s} + \frac{1}{10^2} \frac{1}{(s+100)^2} e^{-s} \right] \end{aligned}$$

Utilizando a definição descrita em (6.6), temos

$$i(t) = \frac{3}{25} [1 - \mathcal{U}(t-1)] - \frac{3}{25} [e^{100t} - e^{100(t-1)} \mathcal{U}(t-1)] - 12te^{-100t} - 1188(t-1)e^{-100(t-1)} \mathcal{U}(t-1).$$

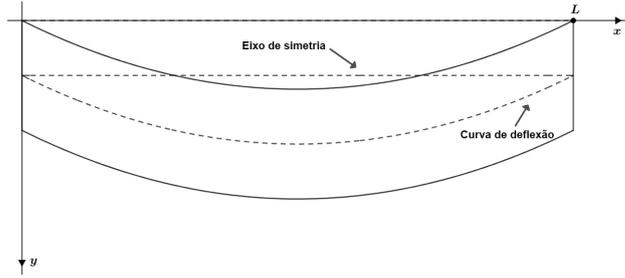
## 6.4.2 Deflexão de vigas

Nessa seção vamos apresentar o fenômeno conhecido como deflexão de vigas, a equação que modela tal fenômeno, assim como sua solução e um exemplo de aplicação.

O problema de deflexão de vigas é estudado principalmente pelas ciências envolvidas em construção civil, como arquitetura, engenharia civil, etc. Tal aplicação é descrita por [1] e será apresentada a seguir.

Primeiramente, supomos que a viga, como a presente na figura 26, é homogênea e tem seções transversais uniformes ao longo de seu comprimento. Seja  $L$  o comprimento da viga. Na ausência de carga na viga (incluindo seu peso), a curva ligando os centroides de todas as seções transversais é uma linha reta chamada de eixo de simetria.

Figura 26: Eixo de simetria em (a), curva de deflexão em (b).



Fonte: Compilação do autor.

Se uma carga for aplicada à viga em um plano vertical contendo o eixo de simetria, então, como mostrado na figura 26, em (b) a viga sofre uma distorção e a curva ligando os centroides de todas as seções transversais é chamada de curva de deflexão ou curva elástica.

Consideramos inicialmente uma viga fixa em sua extremidade esquerda e solta em sua extremidade direita.

Utilizando o sistema de coordenadas do plano  $xy$ , temos que a extremidade esquerda da viga coincide com o ponto  $x = 0$  e o extremo direito com o ponto  $x = L$ . O eixo  $x$  coincide com o eixo de simetria e a deflexão  $y(x)$ , medida a partir desse eixo é considerada positiva se estiver para baixo.

Na Teoria da elasticidade, mostra-se que o momento defletor  $M(x)$  em um ponto  $x$  ao longo da viga está relacionado com a carga por unidade de comprimento  $w(x)$  através da equação

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = w(x). \quad (6.13)$$

O momento defletor também é proporcional à curvatura  $k$  da curva elástica

$$M(x) = Elk, \quad (6.14)$$

em que  $E$  e  $I$  são constantes.  $E$  é o módulo de elasticidade de Young relacionado com o material da viga, e  $I$  é o momento de inércia de uma seção transversal da viga. O produto  $El$  é chamado de rigidez defletora da viga. Temos que a equação

$$k = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad (6.15)$$

descreve a curvatura  $k$  em um ponto de uma curva plana.

Quando a deflexão  $y(x)$  é pequena, a inclinação  $y'(x) = 0$  resulta que o denominador de (6.15) é igual a 1. Sendo  $y'' = k$ , a equação (6.14) se torna

$$M = Ely''. \quad (6.16)$$

De (6.16), temos

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = El \frac{d^4 y}{dx^4}.$$

Sendo assim, de (6.13), temos que a deflexão  $y(x)$  satisfaz a equação diferencial de quarta ordem:

$$El \frac{d^4 y}{dx^4} = w(x). \quad (6.17)$$

Além disso, temos as seguintes condições de fronteira associadas:

- $y(0) = 0$ , pois não há deflexão no extremo esquerdo;
- $y'(0) = 0$ , pois a curva de deflexão é tangente ao eixo  $x$  na extremidade esquerda;
- $y''(L) = 0$ , pois o momento defletor é nulo no extremo livre (direito);
- $y'''(L) = 0$ , pois a força de cisalhamento é zero na extremidade livre (direita).

**Solução:** Observe que por se tratar de uma viga homogênea,  $w(x)$  é constante, logo, aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da equação (6.17), temos

$$El \mathcal{L} \left\{ \frac{d^{(4)}y}{dx^{(4)}} \right\} = w(x) \mathcal{L}\{1\}.$$

$$= El[s^4 Y(s) - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - s y''(0) - y'''(0)] = \frac{w(x)}{s}.$$

Aplicando as condições de fronteira,

$$El s^4 Y(s) = \frac{w(x)}{s} = Y(s) = \frac{w(x)}{El s^5}.$$

Logo, temos

$$y(x) = \frac{w(x)t^4}{24El}.$$

No caso onde a viga está apoiada em ambas as extremidades, a equação (6.17) é associada as seguintes condições de fronteira:

- $y(0) = 0$ , pois não há deflexão no extremo esquerdo;
- $y'(0) = 0$ , pois a curva de deflexão é tangente ao eixo  $x$  na extremidade esquerda;
- $y(L) = 0$ , pois não há deflexão no extremo direito;
- $y'(L) = 0$ , pois a curva de deflexão é tangente ao eixo  $x$  na extremidade direita.

**Solução:** Ao aplicar a transformada na equação (6.17), temos

$$El[s^4 Y(s) - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - s y''(0) - y'''(0)] = \frac{w(x)}{s}.$$

Logo, ao aplicar as condições de fronteira em  $x = 0$ , obtemos,

$$Y(s) = \frac{c_1}{s^3} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{w(x)}{El s^5},$$

onde  $c_1 = y''(0)$  e  $c_2 = y'''(0)$ . Sua transformada inversa é

$$y(x) = \frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_2}{6}x^3 + \frac{w(x)}{24El}x^4. \quad (6.18)$$

Ao aplicar as condições de fronteira em  $x = L$ , de (6.18) e de sua derivada, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{c_1}{2}L^2 + \frac{c_2}{6}L^3 + \frac{w_0}{24El}L^4 = 0, \\ c_1L + \frac{c_2}{2}L^2 + \frac{w_0}{6El}L^3 = 0, \end{cases}$$

onde determinamos  $c_1 = \frac{w_0L^2}{12El}$  e  $c_2 = -\frac{w_0L}{2El}$ . Sendo assim, a deflexão é dada por

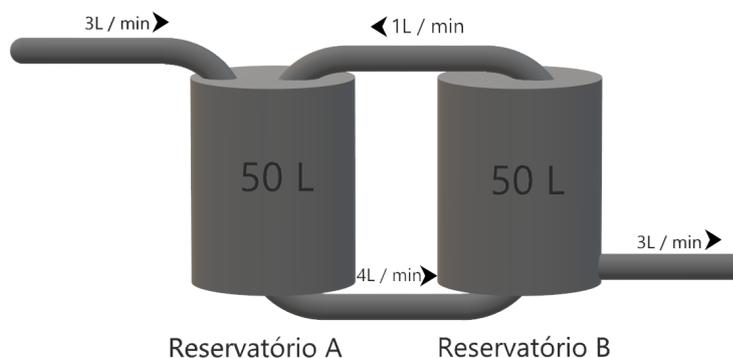
$$y(x) = \frac{w_0L^2}{24El}x^2 - \frac{w_0L}{12El}x^3 + \frac{w_0}{24El}x^4.$$

A transformada de Laplace também pode ser utilizada para resolver sistemas lineares de equações diferenciais.

### 6.4.3 Diluição de Soluções

Nesta subseção apresentaremos o problema da diluição de soluções envolvendo dois reservatórios que será resolvido utilizando a transformada de Laplace. O problema pode ser encontrado em [11] e é ilustrado pela figura 27.

Figura 27: Problema da diluição de soluções.



Fonte: [11].

Um reservatório A, contém 50 litros de água em que foram dissolvidas 25 gramas de sal. Um reservatório B, contém 50 litros de água pura. Bombeia-se água pura a uma taxa de 3 litros/minuto no reservatório A, a mistura suposta uniforme resultante é bombeada para o reservatório B a uma taxa de 4 litros/minuto. No reservatório B uma parte da mistura é bombeada para o reservatório A a uma taxa de 1 litro/minuto e a outra parte é descartada a uma taxa de 3 litros/minuto.

Admitindo as seguintes hipóteses simplificadoras para o problema:

(H1) supõe-se que exista um mecanismo de agitação no fundo dos reservatórios A e B que mantém homogêneas as soluções que vão sendo formadas;

(H2) O processo de bombeamento dos líquidos para dentro e fora dos reservatórios A e B são simultâneos;

Determine a quantidade de sal nos reservatórios A e B num instante  $t$ .

**Solução:** Sejam  $x_1 = x_1(t)$  e  $x_2 = x_2(t)$  as quantidades de sal respectivamente nos reservatórios A e B. Lembrando do significado da derivada podemos escrever o seguinte modelo para o reservatório A:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \left(\frac{3l}{min}\right) \cdot \left(\frac{0g}{l}\right) + \left(\frac{1l}{min}\right) \cdot \left(\frac{x_2g}{50l}\right) - \left(\frac{4l}{min}\right) \cdot \left(\frac{x_1g}{50l}\right) \\ &= -\frac{2}{25}x_1 + \frac{1}{50}x_2, \end{aligned}$$

onde a primeira parcela do lado direito da última equação representa a taxa de saída de sal no reservatório A e a segunda parcela do lado direito da última equação representa a taxa de entrada do sal no reservatório A. Analogamente no reservatório B, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dt} &= \left(\frac{4l}{min}\right) \cdot \left(\frac{x_1g}{50l}\right) - \left(\frac{1l}{min}\right) \cdot \left(\frac{x_2g}{50l}\right) - \left(\frac{3l}{min}\right) \cdot \left(\frac{x_2g}{50l}\right) \\ &= \frac{2}{25}x_1 - \frac{2}{25}x_2. \end{aligned}$$

Assim, obtemos o seguinte problema de valor inicial associado ao sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem lineares com coeficientes constantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{2}{25}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = +\frac{2}{25}x_1 - \frac{2}{25}x_2 \\ x_1(0) = 25 \\ x_2(0) = 0. \end{array} \right. \quad (6.19)$$

Agora, aplicamos a transformada de Laplace em ambos os lados das duas equações, obtendo

$$\left\{ \begin{array}{l} sX_1(s) - x_1(0) = -\frac{2}{25}X_1(s) + \frac{1}{50}X_2(s), \\ sX_2(s) - x_2(0) = +\frac{2}{25}X_1(s) - \frac{2}{25}X_2(s), \\ x_1(0) = 25, \\ x_2(0) = 0. \end{array} \right. \quad (6.20)$$

Aplicando as condições iniciais e resolvendo o sistema, obtemos

$$X_1(s) = \frac{15625s + 1250}{625s^2 + 100s + 3}, \quad X_2(s) = \frac{1250}{625s^2 + 100s + 3}.$$

Utilizar frações parciais, e aplicando a transformada inversa de Laplace, obtemos

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{25}{2}e^{-\frac{3t}{25}} \left( e^{\frac{2t}{25}} + 1 \right), \\ x_2(t) &= 25e^{-\frac{3t}{25}} \left( e^{\frac{2t}{25}} - 1 \right). \end{aligned}$$

## REFERÊNCIAS

- [1] ZILL, D. G.; CULLEN, Michael R.. **Equações diferenciais**. Tradução: Antonio Zumpano. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001. 374 p.
- [2] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Tradução: Valéria de Magalhães Iório. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010. 604 p.
- [3] BRONSON, R.; COSTA, G. B. **Equações diferenciais**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2006. 397 p.
- [4] SANTOS, R. J. **Introdução às equações diferenciais ordinárias**. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2011. 734 p.
- [5] STEWART, J. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006. 707 p.
- [6] CORREA, F. N. **Aplicações de equações diferenciais ordinárias em circuitos elétricos RL e RLC**. 2022. 39 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, 2022.
- [7] OLIVEIRA JUNIOR, R. L. **Problemas e curvas de perseguição no ensino médio**. 2011. 51 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Física) - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.
- [8] LIMA, L. A. M.; MIRANDA, S. R. F. Problema da catenária: história, solução e aplicações. **Matemática e Ciência: construção, conhecimento e criatividade**, Belo Horizonte, v. 4, n. 1, p. 37-51, jul. 2021. DOI 10.5752/p.2674-9416. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.5752/p.2674-9416.2021v4n1p37-51>. Acesso em: 25 abr. 2023.
- [9] MORAES, W. X. **Soluções em série de potências para equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem**. 2016. 71p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Departamento de Ciências Exatas, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Três Lagoas, 2016.
- [10] SOUZA, F. M. S. **Transformadas de Laplace em circuitos elétricos RLC**. 2017. 52 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Ciências Exatas e Tecnológicas) - Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Cruz das Almas, 2017. Disponível em: [https://www2.ufrb.edu.br/bcet/components/com\\_chronoforms5/chronoforms/uploads/tcc/20190604222258\\_2017.2\\_TCC\\_Fellipe\\_Souza\\_-\\_Transformadas\\_de\\_Laplace\\_em\\_Circuitos\\_Eltricos\\_Rlc.pdf](https://www2.ufrb.edu.br/bcet/components/com_chronoforms5/chronoforms/uploads/tcc/20190604222258_2017.2_TCC_Fellipe_Souza_-_Transformadas_de_Laplace_em_Circuitos_Eltricos_Rlc.pdf). Acesso em 20 abr. 2024

- [11] ALVES, F. F.; ARAÚJO, E. L. Sistemas de equações diferenciais e o problema de diluição de soluções. *In*: Semana de Matemática do Pontal, 14., 2023, Ituiutaba. **Anais** [...]. Ituiutaba: Ed. dos Autores, 2024. 29-37.