LAURIENNY GONDIM SILVA

Equações Diferenciais Ordinárias Generalizadas: Existência, Unicidade e Prolongamento de Soluções

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

2024

LAURIENNY GONDIM SILVA

Equações Diferenciais Ordinárias Generalizadas: Existência, Unicidade e Prolongamento de Soluções

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Equações diferenciais.

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo Collegari.

UBERLÂNDIA - MG

2024

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

S586
2024

Silva, Laurienny Gondim, 2000-
Equações diferenciais ordinárias generalizadas: existência, unicidade e prolongamento de soluções [recurso eletrônico] / Laurienny Gondim Silva. - 2024.

Orientador: Rodolfo Collegari.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2024.490
Inclui bibliografia.

1. Matemática. I. Collegari, Rodolfo,1987-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 160 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3239-4209/4154 - www.ppmat.ime.ufu.br - pgmat@ime.ufu.br

ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Matemática				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, 117, PPGMAT				
Data:	23 de julho de 2024	Hora de início:	10:00	Hora de encerramento:	11:30
Matrícula do Discente:	12222MAT001				
Nome do Discente:	Laurienny Gondim Silva				
Título do Trabalho:	Equações diferenciais ordinárias generalizadas: existência, unicidade e prolongamento de soluções				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Análise funcional e equações diferenciais				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Atratores para sistemas dinâmicos com impulsos				

Reuniu-se na Sala 1F 119 (Sala Multiuso do Instituto de Matemática e Estatística) - Bloco 1F (Campus Santa Mônica) da Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática, assim composta: Professores Doutores: Márcia Cristina Anderson Braz Federson - ICMC/USP; Rosana Sueli da Motta Jafelice - IME/ UFU e Rodolfo Collegari - IME/UFU, orientador da candidata.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Rodolfo Collegari, apresentou a Comissão Examinadora e a candidata, agradeceu a presença do público, e concedeu à Discente a palavra para a exposição do seu trabalho.

A duração da apresentação da Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa. A seguir o senhor presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir a candidata. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando a candidata:

Aprovada.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

Documento assinado eletronicamente por **Marcia Cristina Anderson Braz Federson**, **Usuário Externo**, em 23/07/2024, às 11:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Rodolfo Collegari**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 23/07/2024, às 11:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Rosana Sueli da Motta Jafelice**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 23/07/2024, às 11:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5533667** e o código CRC **7C80753E**.

Referência: Processo nº 23117.044908/2024-07 SEI nº 5533667

Dedicatória

"Confia ao Senhor a tua sorte, espera nele, e ele agirá."

(Salmos 36, 5)

Dedico esta dissertação à minha família, especialmente aos meus pais, Nilson José da Silva e Simone Maria da Costa Gondim Silva, e à minha irmã, Lorenna Gondim Silva.

Agradecimentos

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos a todos que, de alguma forma, contribuíram para a conclusão de mais uma etapa acadêmica.

Primeiramente, agradeço a Deus por todas as bênçãos recebidas, por guiar meus passos, me fortalecendo e capacitando para enfrentar todos os desafios até aqui.

À minha família, pelo apoio incondicional, especialmente aos meus pais, que, mesmo à distância, estiveram presentes em cada momento desta trajetória por meio das ligações diárias, tornando meus dias mais alegres, e à minha irmã por toda ajuda e incentivo nos momentos em que duvidei da minha capacidade.

Ao meu orientador, Rodolfo Collegari, sou imensamente grata pelo tempo dedicado à orientação, pela disposição e ajuda em todos os momentos de incerteza, por conduzir esta pesquisa com muita sabedoria e paciência.

Às professoras Márcia Cristina Anderson Braz Federson e Rosana Sueli da Motta Jafelice, agradeço por integrarem a banca examinadora e pelas valiosas contribuições feitas neste trabalho. É um privilégio compartilhar este momento tão importante com vocês, que são exemplos de excelência profissional na área da matemática.

Agradeço a todos os professores do PPGMAT-UFU por compartilharem seus conhecimentos e experiências, proporcionando uma base sólida e ampliando meus horizontes acadêmicos.

Aos meus colegas e amigos do PPGMAT-UFU, meu sincero agradecimento pelo apoio nos momentos mais desafiadores e pelas conversas descontraídas, tornando essa jornada mais leve e prazerosa.

Por fim, agradeço à CAPES pelo suporte financeiro durante esses dois anos de mestrado, que foi crucial para a realização deste estudo.

Sou extremamente grata por todo o apoio e carinho recebidos durante a minha trajetória. Sinto-me feliz e realizada por finalizar esta etapa, com a certeza de que percorrerei muitas outras, com a bagagem ainda mais fortalecida.

SILVA , L.G. *Equações diferenciais.* 2024. x + 52 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Nesta dissertação, realizaremos um estudo teórico sobre alguns aspectos fundamentais das equações diferenciais ordinárias generalizadas (EDOs generalizadas). Nosso objetivo é apresentar conceitos e resultados importantes dessas equações, com ênfase no teorema da existência e unicidade de soluções das EDOs generalizadas para funções com valores no espaço de Banach. Para isso, fazemos um breve estudo sobre a integral de Kurzweil, que é fundamental para essa teoria. Além disso, apresentamos resultados sobre o prolongamento de soluções e soluções maximais das EDOs generalizadas, e descrevemos uma correspondência entre as equações diferenciais em medida (EDMs) e as EDOs generalizadas, mostrando que alguns resultados das EDOs generalizadas também são válidos no contexto das EDMs.

Palavras-chave: integral de Kurzweil; EDOs generalizadas; existência; unicidade; soluções.

SILVA , L.G. *Differential equations.* 2024. x + 52 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

In this dissertation, we will conduct a theoretical study of some fundamental aspects of generalized ordinary differential equations (generalized ODEs). Our objective is to present important concepts and results related to these equations, with an emphasis on the theorem of existence and uniqueness of solutions for generalized ODEs with values in a Banach space. To achieve this, we provide a brief study of the Kurzweil integral, which is fundamental to this theory. Additionally, we present results on the prolongation of solutions and maximal solutions of generalized ODEs, and we describe a correspondence between measured differential equations (MDEs) and generalized ODEs, demonstrating that some results for generalized ODEs are also valid in the context of MDEs.

Keywords: Kurzweil integral; generalized ODEs; existence; uniqueness; solutions.

Sumário

Introdução

As equações diferenciais ordinárias (EDOs) exercem um papel importante em diversas áreas, como nas ciências, principalmente na matemática aplicada, e nas engenharias. O estudo dessas equações nos permite obter ferramentas eficazes para modelar sistemas contínuos e bem comportados. No entanto, a necessidade de obter soluções de sistemas mais complexos, os quais possuem alguma irregularidade, levou ao desenvolvimento das equações diferenciais ordinárias generalizadas (EDOs generalizadas).

As EDOs generalizadas foram introduzidas em 1957 pelo matemático tcheco Jaroslav Kurzweil em seu artigo intitulado "Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter". Nesse artigo, Kurzweil ([10], 1957) descreve a teoria das integrais de Perron generalizadas e das EDOs generalizadas, incluindo a existência e a unicidade de soluções para funções com valores no espaço euclidiano. No ano seguinte, Kurzweil aprofundou seus estudos e publicou outro artigo [11] com novas contribuições para a teoria.

De modo geral, a integral de Perron generalizada, mencionadas neste trabalho como integral de Kurzweil, surge como uma generalização da integral de Riemann e de Lebesgue, possibilitando a integração de funções com irregularidades, isto é, funções que nem sempre satisfazem as hipóteses clássicas de continuidade e suavidade. Além disso, a integral de Kurzweil é a base para a teoria das EDOs generalizadas, em que as condições iniciais e as soluções podem não ser suaves.

Em 1992, no livro intitulado "Generalized Ordinary Differential Equations", Schwabik desenvolve resultados de grande relevância a respeito da teoria das EDOs generalizadas para funções com valores no espaço $\mathbb{R}^n$. Em síntese, Schwabik ([14], 1992) estuda as integrais de Kurzweil, apresentando sua definição e algumas propriedades fundamentais dessas integrais. Bem como, descreve sobre as EDOs generalizadas, estabelecendo fundamentos para suas soluções e apresentando resultados importantes, como o da existência e unicidade de soluções das EDOs generalizadas.

Recentemente, Bonotto, Federson e Mesquita ([2], 2021) fazem uma grande contribuição para essa área, trazendo em seu livro um compilado de diversos trabalhos desenvolvidos por um grupo de pesquisadores a respeito das EDOs generalizadas para funções com valores no espaço de Banach. Além dos conceitos clássicos, o livro expande sua teoria apresentando correspondências entre as EDOs generalizadas e outros tipos de equações diferenciais, dentre elas: as equações diferenciais em medida e as equações diferenciais funcionais em medida. Também, desenvolve teorias sobre prolongamentos de soluções, estabilidade, controle, dicotomias, dependência contínua em parâmetros, entre outros.

Diante do exposto, a teoria das EDOs generalizadas é muito utilizada para abordar outras classes de equações, principalmente equações em que as funções envolvidas possuem muitas descontinuidades e/ou são de variação ilimitada. Por exemplo, é possível utilizar resultados obtidos nas EDOs generalizadas para estudar teorias mais avançadas, como as equações diferenciais funcionais, equações dinâmicas em escalas temporais, equações diferenciais do tipo neutro, entre outras, que por vezes facilita muito o processo.

Nessa perspectiva, tendo como principais referências [2] e [14], este trabalho tem por objetivo estudar conceitos e propriedades das integrais de Kurzweil e mostrar resultados importantes para a teoria. Bem como, estudar conceitos e propriedades fundamentais das EDOs generalizadas, tendo como foco demonstrar um dos principais resultados, a saber: o teorema da existência e unicidade de soluções das EDOs generalizadas para funções com valores no espaço de Banach. Além disso, obter resultados de prolongamento de soluções e soluções maximais das EDOs generalizadas, assim como obter uma correspondência entre as equações diferenciais em medida (EDMs) e as EDOs generalizadas.

Desse modo, este trabalho estará dividido em cinco capítulos especificados a seguir.

No primeiro capítulo, dedicado a preliminares, apresentaremos conceitos de espaço de Banach, função escada e função regrada, juntamente com alguns exemplos, e um resultado fundamental para a teoria das funções regradas, que se destacam por ter algumas relações úteis com as funções escadas.

No segundo capítulo, faremos um estudo da teoria básica da integral de Kurzweil, apresentando os conceitos de divisão marcada, calibre, divisão marcada δ-fina e da integral em questão. Além disso, mostraremos resultados importantes para a teoria, dentre eles: o Lema de Cousin, o Critério de Cauchy para a integral de Kurzweil, o Lema de Saks-Henstock e a Extensão de Cauchy.

No terceiro capítulo, apresentaremos a teoria das EDOs generalizadas, demonstrando alguns resultados importantes a respeito das soluções dessas equações. Depois, utilizando o Teorema do Ponto Fixo de Banach e alguns resultados auxiliares, demonstraremos o Teorema da Existência e Unicidade de Soluções para funções com valores no espaço de Banach, um dos resultados mais importantes da teoria.

No quarto capítulo, dedicaremos ao estudo de prolongamento de soluções e soluções maximais das EDOs generalizadas, estabelecendo conceitos e resultados que agregam a teoria, dentre os quais se destaca o teorema que garante a existência e unicidade das soluções maximais. Em síntese, esse capítulo traz uma visão geral de que é possível estender soluções locais para intervalos maiores, sendo muito útil para entender a estabilidade e a evolução ao longo prazo dos sistemas modelados.

No quinto capítulo, mostraremos uma correspondência entre as EDMs e as EDOs generalizadas, apresentando uma teoria básica sobre as EDMs e, em seguida, alguns resultados relacionados a essa correspondência. Incluiremos, também, a teoria de prolongamento e solução maximal das EDMs, provando que os resultados obtidos para as EDOs generalizadas são válidos para as EDMs.

Laurienny Gondim Silva

Uberlândia-MG, 23 de julho de 2024.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos algumas definições básicas e um resultado, que serão úteis mais adiante. Assumiremos, no decorrer de todo o trabalho, que X é um espaço de Banach. Sendo assim, iniciamos apresentando o conceito de um espaço de Banach e para estudos mais avançados veja [3], [9] e [12].

Definição 1.1: Seja X um espaço vetorial. Uma *norma* em X é uma função $\|\cdot\|$ de valor real em X tal que, para quaisquer vetores $x, y \in X$ e qualquer escalar α, as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

O par ordenado $(X, \|\cdot\|)$ é denominado de *espaço normado*, isto é, um espaço vetorial munido de uma norma. E, ainda, um espaço normado é *completo* se toda sequência de Cauchy em X convergir para um elemento de X. Além disso, uma métrica d em X definida por $d(x,y) = \|x-y\|$ é denominada de *métrica induzida pela norma*. Finalmente, todo espaço normado que é completo na métrica induzida pela norma chamamos de *espaço de Banach*.

Agora, considere X um espaço de Banach e $[a,b]$ um intervalo compacto em $\mathbb{R}$, $a < b$. Denominaremos de *divisão de* $[a,b]$ todo conjunto finito $d = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ de pontos no intervalo fechado $[a,b]$ tal que $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$, o qual denotaremos por $d = (t_i)$. Os elementos da divisão de $[a,b]$ serão denotados por $t_0, t_1, \ldots, t_{|d|}$, em que $|d|$ é o número de intervalos no qual $[a,b]$ é dividido. Designaremos o conjunto das divisões de $[a,b]$ por $D_{[a,b]}$.

As definições a seguir estabelecem os conceitos de função escada e de função regrada, respectivamente, ambas fundamentadas em [2].

Definição 1.2 (Função escada): Uma função $f\colon [a,b] \to X$ será dita *função escada* se existirem uma divisão $d = (t_i) \in D_{[a,b]}$ e $c_i \in X$, $i = 1, \ldots, |d|$, tais que $f(t) = c_i$, para todo $t \in (t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, \ldots, |d|$, isto é, f é constante em cada intervalo (t_{i-1}, t_i).

Definição 1.3 (Função regrada): Uma função $f\colon [a,b] \to X$ será dita *regrada* se os limites laterais

$$\lim_{s\to t^-} f(s) = f(t^-),\ \ t \in (a,b], \quad \text{e} \quad \lim_{s\to t^+} f(s) = f(t^+),\ \ t \in [a,b),$$

existirem. Denotaremos o espaço das funções regradas de $[a,b]$ em X por $G([a,b],X)$.

É notório que qualquer função escada é regrada. As funções contínuas são outro exemplo visível de funções regradas. Cabe ressaltar, ainda, que as funções regradas apresentam relações importantes com as funções escadas, as quais serão destaque do próximo resultado. Em 1975, Hönig [8] mostrou a equivalência das três primeiras afirmações. Já em 2019, Franková [7] estabeleceu uma nova versão, provando uma quarta equivalência no resultado. A demonstração feita aqui segue como em [7, Theorem 2.3].

Teorema 1.4: *Seja uma função $f\colon [a,b] \to X$. As afirmações abaixo são equivalentes:*

(i) *$f\colon [a,b] \to X$ é regrada;*

(ii) *existe uma sequência finita de funções escadas, $g_n\colon [a,b] \to X$, tal que $g_n \to f$ uniformemente em $[a,b]$;*

(iii) *para cada $\varepsilon > 0$, existe uma função escada $g\colon [a,b] \to X$ tal que $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$.*

(iv) *para cada $\varepsilon > 0$, existe uma divisão $d = (t_i)$ de $[a,b]$ tal que $\|f(t'') - f(t')\|_X < \varepsilon$, para todo $t_{i-1} < t' < t'' < t_i$ e $i = 1,2,\ldots,|d|$.*

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (iv): Seja $\varepsilon > 0$ dado. Para cada $x \in (a,b]$, defina

$$r_x = \inf\left\{ r \in (a,x)\colon \text{ se } \tau',\tau'' \in (r,x), \text{ então } \|f(\tau'') - f(\tau')\|_X < \frac{\varepsilon}{2} \right\}, \tag{1.1}$$

e, para cada $x \in [a,b)$, defina

$$s_x = \sup\left\{ s \in (x,b)\colon \text{ se } \tau',\tau'' \in (x,s), \text{ então } \|f(\tau'') - f(\tau')\|_X < \frac{\varepsilon}{2} \right\}. \tag{1.2}$$

Como os limites $f(x^-)$ e $f(x^+)$ existem, então $r_x < x$ e $s_x > x$. Veja que,

$$[a,s_a) \cup \bigcup_{x\in(a,b)} (r_x,s_x) \cup (r_b,b] = [a,b]$$

e, como $[a,b]$ é compacto, existem $k \in \mathbb{N}$ e um conjunto finito $\{t_1,t_2,\ldots,t_{k-1}\}$ de pontos em (a,b) tal que $t_1 < t_2 < \ldots < t_{k-1}$, de modo que

$$[a,s_a) \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} (r_{t_i},s_{t_i}) \cup (r_b,b] = [a,b]. \tag{1.3}$$

Agora, verificaremos que $r_{t_i} < s_{t_{i-1}}$, para cada $i \in \{1,2,\ldots,k\}$. Suponha, por absurdo, que existe σ tal que $s_{t_{i-1}} \leq \sigma \leq r_{t_i}$. Pela equação (1.3), existe $j \notin \{i-1,i\}$ tal que $\sigma \in (r_{t_j},s_{t_j})$. Se $j < i-1$, então pela equação (1.2), $\|f(\tau'') - f(\tau')\|_X < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $\tau', \tau'' \in (t_j, s_{t_j})$, o que também vale para todo $\tau', \tau'' \in (t_{i-1}, s_{t_j})$. Logo, $s_{t_j} \leq s_{t_{i-1}} \leq \sigma \leq s_{t_j}$, o que é contradição. Da mesma forma, se $j > i$ chegaremos, também, em uma contradição.

Considere a divisão $d = (t_i)$ de $[a,b]$, com $t_0 = a$ e $t_k = b$. Note que, para qualquer $i \in \{1,2,\ldots,k\}$, a interseção $(r_{t_i}, s_{t_{i-1}}) \cap (t_{i-1}, t_i)$ é não vazia. Então, escolhemos $b_i \in (r_{t_i}, s_{t_{i-1}}) \cap (t_{i-1}, t_i)$. Assim, se $t_{i-1} < t' < t'' < t_i$, para algum $i \in \{1,2,\ldots,k\}$, teremos três possibilidades: $t_{i-1} < t' < t'' \leq b_i$ ou $b_i \leq t' < t'' < t_i$ ou $t_{i-1} < t' \leq b_i \leq t'' < t_i$.

Na primeira possibilidade, $t', t'' \in (t_{i-1}, s_{t_{i-1}})$ e, pela equação (1.2), $\|f(t'') - f(t')\|_X < \frac{\varepsilon}{2}$. Na segunda possibilidade, $t', t'' \in (r_{t_i}, t_i)$ e, pela equação (1.1), $\|f(t'') - f(t')\|_X < \frac{\varepsilon}{2}$. Na terceira possibilidade, $t', b_i \in (t_{i-1}, s_{t_{i-1}})$ e $b_i, t'' \in (r_{t_i}, t_i)$, o que implica

$$\|f(t'') - f(t')\|_X \leq \|f(t'') - f(b_i)\|_X + \|f(b_i) - f(t')\|_X < \varepsilon.$$

Daí, segue a veracidade de (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (iii): Dado $\varepsilon > 0$, seja $d = (t_i)$ uma divisão de $[a,b]$ tal que $\|f(t'') - f(t')\|_X < \varepsilon$, para todo $t_{i-1} < t' < t'' < t_i$ e $i = 1,2,\ldots,|d|$. Para cada $i = 1,\ldots,|d|$, escolha $\tau_i \in (t_{i-1}, t_i)$ e defina $g(\tau) = f(\tau_i)$ para $\tau \in (t_{i-1}, t_i)$, $g(t_i) = f(t_i)$, $i = 0,1,\ldots,|d|$. Então, $g\colon [a,b] \to X$ é uma função escada e $\|g(\tau) - f(\tau)\|_X < \varepsilon$, para cada $\tau \in [a,b]$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Para todo $n \in \mathbb{N}$, seja $g_n\colon [a,b] \to X$ uma função escada tal que $\|f - g_n\|_\infty < \frac{1}{n}$. É claro que $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções escadas que converge uniformemente para f, quando $n \to \infty$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Seja $t \in [a,b)$. Mostraremos que $\lim_{s \to t^+} f(s)$ existe. O caso em que $\lim_{s \to t^-} f(s)$ existe é provado de forma análoga. considere a sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $[a,b]$ tal que $t_n \geq t$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e t_n converge para t quando $n \to \infty$; e a sequência $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funções escadas de $[a,b]$ em X tal que g_n converge uniformemente para f quando $n \to \infty$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\|f(t) - g_k(t)\| < \frac{\varepsilon}{4}$, para todo $t \in [a,b]$. Além disso, como g_k é uma função escada, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|g_k(t_n) - g_k(t^+)\| < \frac{\varepsilon}{4}$, para todo $n \geq N_0$. Logo, se $n, m \geq N_0$,

$$\|f(t_n) - f(t_m)\| \leq \|f(t_n) - g_k(t_n)\| + \|g_k(t_n) - g_k(t^+)\| + \|g_k(t^+) - g_k(t_m)\| + \|g_k(t_m) - f(t_m)\| < \varepsilon.$$

Como X é um espaço de Banach, $\lim_{s \to t^+} f(s)$ existe. $\square$

Importante ressaltar que a composição de funções regradas nem sempre é regrada. Um exemplo disso pode ser encontrado em [2, Example 1.7] e [5, Problem 2, p. 140], o qual será reproduzido aqui com mais detalhes.

Exemplo 1.5: Note que a função $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

é contínua e, portanto, regrada. Também, a função sinal $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

é regrada. Por outro lado, a função composta $g \circ f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ não é regrada, visto que o limite $\lim_{x\to 0^+} g \circ f(x)$ não existe. De fato, sejam as sequências $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tais que

$$t_n = \frac{2}{(4n+1)\pi} \quad \text{e} \quad s_n = \frac{2}{(4n-1)\pi}.$$

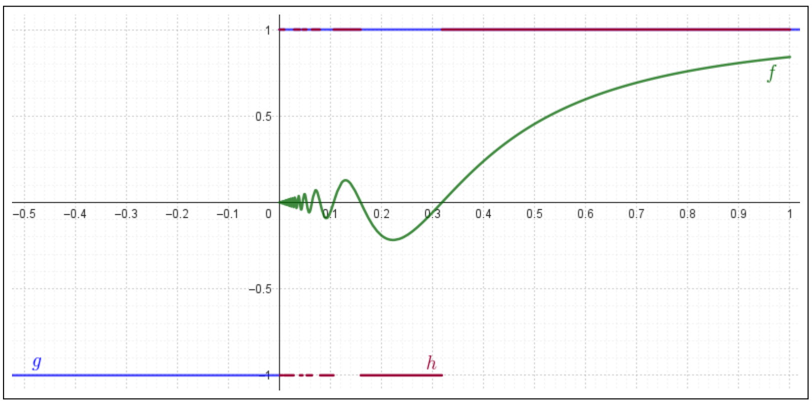
Note que, $t_n, s_n \to 0^+$ quando $n \to \infty$. Além disso, $f(t_n) > 0$ e $f(s_n) < 0$. No entanto,

$$\lim_{n\to\infty} g \circ f(t_n) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} g \circ f(s_n) = -1.$$

Isto prova que o limite $\lim_{x\to 0^+} g \circ f(x)$ não existe.

A Figura 1.1, a seguir, representa geometricamente a função composta $h = g \circ f$, além de apresentar os gráficos das funções f e g.

Figura 1.1: Gráfico das funções f, g e da função composta $h = g \circ f$.



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

De modo geral, as funções regradas desempenham um papel essencial no contexto das EDOs generalizadas, proporcionando a flexibilidade necessária para abordar soluções com características mais complexas do que aquelas contempladas pelas teorias tradicionais de integração. Para mais detalhes e informações sobre as funções regradas, consulte as referências [7] e [8].

Capítulo 2

Integral de Kurzweil

Neste capítulo, faremos uma breve descrição da teoria básica da integração de Kurzweil, também conhecida por integral de Perron generalizada. Os resultados que apresentaremos são baseados em [2] e [14], cujo objetivo é dar embasamento teórico para o estudo das equações diferenciais ordinárias generalizadas (EDOs generalizadas) que serão introduzidas no próximo capítulo. Iniciamos definindo uma divisão marcada.

Definição 2.1 (Divisão marcada): Sejam $[a,b]$ um intervalo compacto e $d=(t_i)$ uma divisão de $[a,b]$. Se para cada $i=1,\dots,|d|$, $\tau_i \in [t_{i-1},t_i]$, o conjunto de pontos

$$a=t_0 \leq \tau_1 \leq t_1 \leq \tau_2 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{|d|-1} \leq \tau_{|d|} \leq t_{|d|}=b$$

será dito uma *divisão marcada* de $[a,b]$. Neste caso, escreveremos $d^*=(\tau_i,t_i)\in D^*_{[a,b]}$, em que $D^*_{[a,b]}$ denota o conjunto de todas as divisões marcadas de $[a,b]$ e os pontos $\tau_i \in [t_{i-1},t_i]$, $i=1,\dots,|d|$, são chamados de marcas.

Denominaremos de *divisão marcada parcial* de $[a,b]$ qualquer subconjunto de uma divisão marcada de $[a,b]$. Além disso, qualquer função positiva $\delta\colon [a,b]\to(0,\infty)$ será chamada de *calibre* em $[a,b]$. Dessa maneira, uma divisão marcada $d^*=(\tau_i,t_i)\in D^*_{[a,b]}$ será *δ-fina* de $[a,b]$ se, dado um calibre δ em $[a,b]$, $[t_{i-1},t_i]\subset\{t\in[a,b]\colon |t-\tau_i|<\delta(\tau_i)\}$, sempre que $i=1,2,\dots,|d|$, isto quer dizer que, para $i=1,2,\dots,|d|$, teremos $\tau_i\in[t_{i-1},t_i]\subset(\tau_i-\delta(\tau_i),\tau_i+\delta(\tau_i))$.

A existência de uma divisão marcada δ-fina para um determinado calibre δ é garantida no resultado a seguir, o qual é conhecido por Lema de Cousin. A demonstração apresentada aqui foi extraída de [13, Lemma 6.2.3 (COUSIN)].

Lema 2.2 (Lema de Cousin): *Dado um calibre δ em $[a,b]$, existe uma divisão marcada δ-fina $d^*=(\tau_i,t_i)$ de $[a,b]$.*

Demonstração. Considere um calibre δ em $[a,b]$ e seja A o conjunto de todos $c\in(a,b]$ para os quais existe uma divisão marcada δ-fina de $[a,c]$. O conjunto A é não vazio, pois se $c\in(a,b]$ tal que $c<a+\delta(a)$, então a divisão marcada $d^*=(\tau_i,t_i)$, com $\tau_i=(a)$ e $t_i=\{a,c\}$, é δ-fina de $[a,c]$.

Seja $d = \sup A$ e note que $d > a$. Vejamos que $d \in A$. Por definição de supremo, existe $c \in (d - \delta(d), d] \cap A$. Se $c = d$, então $d \in A$. Se $c \neq d$, tome uma divisão marcada δ-fina (τ_i', t_i') de $[a,c]$. Como $[c,d] \subset (d - \delta(d), d + \delta(d))$, $((\tau_1', \ldots, \tau_{|d|}', d), t_i' \cup \{d\})$ é uma divisão marcada δ-fina de $[a,d]$. Provando, assim, que $d \in A$.

Agora, vejamos que $d = b$. Suponha, por absurdo, que $d < b$ e escolha uma divisão marcada (τ_i'', t_i'') de $(a,d]$. Além disso, tome $\gamma \in (d, d + \delta(d)) \cap (d,b]$. Como $[d,\gamma] \subset (d - \delta(d), d + \delta(d))$, $((\tau_1'', \ldots, \tau_{|d|}'', d), t_i'' \cup \{\gamma\})$ é uma divisão marcada do intervalo $[a,\gamma]$. Assim, $\gamma \in A$, contradizendo o fato de que $d = \sup A$. Portanto, $d = b$ e a prova está completa. $\square$

A próxima definição conceitua uma integral de Kurzweil. Assumiremos, no decorrer de todo o capítulo, que X é um espaço de Banach.

Definição 2.3: Uma função $U\colon [a,b] \times [a,b] \to X$ será Kurzweil integrável em $[a,b]$ se existir um elemento $I \in X$ tal que para cada $\varepsilon > 0$, existe um calibre δ em $[a,b]$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} [U(\tau_i, t_i) - U(\tau_i, t_{i-1})] - I \right\| < \varepsilon,$$

para cada divisão marcada δ-fina $d^* = (\tau_i, t_i) \in D^*_{[a,b]}$. Neste caso, I é denominado de *integral de Kurzweil* de U sobre $[a,b]$ e será denotado por $\int_a^b DU(\tau,t)$.

Observe na definição 2.3 que a integral de Kurzweil está bem definida, visto que o Lema de Cousin (Lema 2.2) garante que, para um determinado calibre, existe pelo menos uma divisão marcada δ-fina. Em particular, quando a integral de Kurzweil existir, definiremos $\int_b^a DU(\tau,t) = -\int_a^b DU(\tau,t)$ sempre que $b > a$, e se $a = b$, então $\int_a^b DU(\tau,t) = 0$.

Além disso, quando $f\colon [a,b] \to X$ e $U(\tau,t) = f(\tau)t$, teremos $\int_a^b DU(\tau,t) = \int_a^b f(s)ds$, a qual denominaremos de *integral de Perron*. E, quando $f\colon [a,b] \to X$, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e $U(\tau,t) = f(\tau)g(t)$, teremos $\int_a^b DU(\tau,t) = \int_a^b f(s)dg(s)$, a qual denominaremos de *integral de Perron-Stieltjes*.

Veja, ainda, que se $U(\tau,t) = f(\tau)t$, $\tau, t \in [a,b]$, então

$$S(U,d^*) = \sum_{i=1}^{|d|} [U(\tau_i, t_i) - U(\tau_i, t_{i-1})] = \sum_{i=1}^{|d|} f(\tau_i)(t_i - t_{i-1})$$

representará a soma de Riemann para a função $f\colon [a,b] \to X$ e a divisão marcada d^* de $[a,b]$. Assim como, se $U(\tau,t) = f(\tau)g(t)$, $\tau, t \in [a,b]$, então

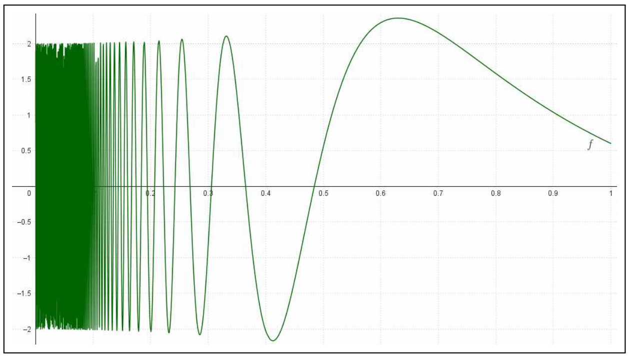
$$S(U,d^*) = \sum_{i=1}^{|d|} [U(\tau_i, t_i) - U(\tau_i, t_{i-1})] = \sum_{i=1}^{|d|} f(\tau_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}))$$

representará a soma de Riemann-Stieltjes para as funções $f\colon [a,b] \to X$, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e a divisão marcada d^* de $[a,b]$.

Esta soma de Riemann será utilizada nos próximos resultados, os quais tratam-se de algumas propriedades fundamentais das integrais de Kurzweil. Denotaremos por $K([a,b],X)$, ou simplesmente $K([a,b])$, o conjunto de todas as funções $U\colon [a,b]\times[a,b]\to X$ que são Kurzweil integráveis sobre $[a,b]$.

A função $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2x\,\mathrm{sen}\,(x^{-2})-2\cos(x^{-2})$, se $x\in(0,1]$, e $f(0)=0$ é um exemplo clássico de função Kurzweil integrável. Observe, na Figura 2.1, que essa função possui muita oscilação, no entanto, a integral de Kurzweil nos fornece ferramentas eficazes para garantir esse tipo de integração.

Figura 2.1: Gráfico da função f.



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

O resultado a seguir estabelece um critério de Cauchy para as funções Kurzweil integráveis. A demonstração deste foi adaptada de [14, Theorem 1.7] para o caso em que a função assume valores em um espaço de Banach. Também, pode-se encontrar um resultado semelhante em [4, Teorema 1.20].

Teorema 2.4 (Critério de Cauchy para a integral de Kurzweil): *A função $U\colon [a,b]\times[a,b]\to X$ será Kurzweil integrável sobre $[a,b]$ se, e somente se, para cada $\varepsilon>0$ existir um calibre δ em $[a,b]$ tal que $\|S(U,d_1^*)-S(U,d_2^*)\|<\varepsilon$, para quaisquer divisões marcadas δ-finas d_1^*,d_2^* de $[a,b]$.*

Demonstração. Se $U\colon [a,b]\times[a,b]\to X$ for Kurzweil integrável, então dado $\varepsilon>0$, existirá um calibre δ em $[a,b]$ tal que

$$\left\|S(U,d^*)-\int_a^b DU(\tau,t)\right\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

para cada divisão marcada δ-fina d^* de $[a,b]$.

Logo, para quaisquer divisões marcadas δ-finas d_1^*,d_2^* de $[a,b]$, obtemos

$$\begin{aligned}\|S(U,d_1^*)-S(U,d_2^*)\| &= \left\|S(U,d_1^*)-\int_a^b DU(\tau,t)-\left(S(U,d_2^*)-\int_a^b DU(\tau,t)\right)\right\|\\ &\leq \left\|S(U,d_1^*)-\int_a^b DU(\tau,t)\right\|+\left\|S(U,d_2^*)-\int_a^b DU(\tau,t)\right\|<\varepsilon.\end{aligned}$$

Por outro lado, suponha que, para cada $\varepsilon>0$, exista um calibre δ em $[a,b]$ tal que

$$\|S(U,d_1^*)-S(U,d_2^*)\|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.1}$$

para quaisquer divisões marcadas δ-finas d_1^*, d_2^* de $[a,b]$. Denotaremos por M o conjunto de todos os elementos $s \in X$ tal que existe um calibre ω em $[a,b]$ em que $s \leq S(U,d^*)$, para cada divisão marcada ω-fina d^* de $[a,b]$.

Pela desigualdade (2.1), para cada divisão marcada δ-fina de $[a,b]$, vale as desigualdades

$$S(U,d_0^*) - \frac{\varepsilon}{2} < S(U,d^*) < S(U,d_0^*) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.2}$$

Assim, $\left(-\infty, S(U,d_0^*) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset M$ e $M \subset \left(-\infty, S(U,d_0^*) + \frac{\varepsilon}{2}\right)$, isto é, o conjunto M é não vazio e limitado superiormente. Logo, o supremo $\sup M$ do conjunto M existe e pelas desigualdades (2.2),

$$S(U,d_0^*) - \frac{\varepsilon}{2} < \sup M < S(U,d_0^*) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Com isso, $\|S(U,d_0^*) - \sup M\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Então, para cada divisão marcada δ-fina d^* de $[a,b]$,

$$\|S(U,d^*) - \sup M\| \leq \|S(U,d^*) - S(U,d_0^*)\| + \|S(U,d_0^*) - \sup M\| < \varepsilon.$$

Portanto, pela Definição 2.3, a função $U\colon [a,b] \times [a,b] \to X$ será Kurzweil integrável sobre $[a,b]$ e $\int_a^b DU(\tau,t) = \sup M$. □

O próximo teorema diz respeito à linearidade das integrais de Kurzweil e sua demonstração segue como em [2, Theorem 2.3].

Teorema 2.5 (Linearidade): *Se $U, V \in K([a,b])$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, então $c_1U + c_2V$ também será Kurzweil integrável e*

$$\int_a^b D[c_1U(\tau,t) + c_2V(\tau,t)] = c_1 \int_a^b DU(\tau,t) + c_2 \int_a^b DV(\tau,t).$$

Demonstração. Sejam uma divisão marcada $d^* = (\tau_i, t_i) \in D^*_{[a,b]}$ e as constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Considere $S(U,d^*)$ e $S(V,d^*)$ as somas de Riemann correspondentes às funções $U, V\colon [a,b] \times [a,b] \to X$, respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned}
S(c_1U + c_2V, d^*) &= \sum_{i=1}^{|d|} [(c_1U + c_2V)(\tau_i,t_i) - (c_1U + c_2V)(\tau_i,t_{i-1})] \\
&= \sum_{i=1}^{|d|} [(c_1U)(\tau_i,t_i) + (c_2V)(\tau_i,t_i) - (c_1U)(\tau_i,t_{i-1}) - (c_2V)(\tau_i,t_{i-1})] \\
&= \sum_{i=1}^{|d|} [(c_1U)(\tau_i,t_i) - (c_1U)(\tau_i,t_{i-1})] + \sum_{i=1}^{|d|} [(c_2V)(\tau_i,t_i) - (c_2V)(\tau_i,t_{i-1})] \\
&= c_1 S(U,d^*) + c_2 S(V,d^*).
\end{aligned}$$

Como $U, V \in K([a,b])$, ao escolher os calibres apropriados, o resultado segue. □

Outra propriedade importante das integrais de Kurzweil, apresentada a seguir, refere-se a integrabilidade em subintervalos e sua demonstração se baseia em [2, Theorem 2.5] e [14, Theorem 1.10].

Teorema 2.6 (Integrabilidade em Subintervalos): *Suponha que $U \in K([a,b])$ e $[c,d] \subset [a,b]$, então $U \in K([c,d])$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Se $U \in K([a,b])$, então pelo Teorema 2.4, existe um calibre δ em $[a,b]$ tal que

$$\|S(U,d_1^*) - S(U,d_2^*)\| < \varepsilon$$

para quaisquer divisões marcadas δ-finas d_1^*, d_2^* de $[a,b]$. Sejam $\tilde{d}_1^*$ e $\tilde{d}_2^*$ divisões marcadas δ-finas arbitrárias de $[c,d]$ e suponha que $a < c < d < b$. Considere, também, d_L^* uma divisão marcada δ-fina de $[a,c]$ e d_R^* uma divisão marcada δ-fina de $[d,b]$, as quais são garantidas pelo Lema de Cousin (Lema 2.2).

Defina $d_1^* = d_L^* \cup \tilde{d}_1^* \cup d_R^*$ e $d_2^* = d_L^* \cup \tilde{d}_2^* \cup d_R^*$. É claro que tanto d_1^* quanto d_2^* são divisões marcadas δ-finas de $[a,b]$ e, ainda,

$$\|S(U,\tilde{d}_1^*) - S(U,\tilde{d}_2^*)\| = \|S(U,d_1^*) - S(U,d_2^*)\| < \varepsilon,$$

uma vez que os termos da soma $S(U,d_1^*) - S(U,d_2^*)$ que correspondem às partes comuns de d_L^* e d_R^* aparecem em cada uma das divisões marcadas d_1^* e d_2^* e, assim, se cancelam. Portanto, pelo Teorema 2.4, a integral $\int_c^d DU(\tau,t)$ existe, já que $\tilde{d}_1^*$, $\tilde{d}_2^*$ foram divisões marcadas arbitrárias de $[c,d]$. □

As integrais de Kurzweil também possuem a propriedade de aditividade em intervalos adjacentes, sendo esta nosso próximo resultado. A demonstração feita aqui foi emprestada de [14, Theorem 1.11]. Schwabik ([14], 1992) comenta em seu livro que a construção de um calibre $\delta\colon [a,b] \to (0,\infty)$ que satisfaz $\delta(t) < \min(\tilde{\delta}(\tau), |\tau - c|)$ para $\tau \neq c$, força uma divisão marcada δ-fina de $[a,b]$, com $c \in [a,b]$, a ter uma marca no próprio ponto c. Este fato pode ser útil em várias construções de somas de integrais e, especialmente, será utilizado na demonstração a seguir.

Teorema 2.7 (Aditividade em intervalos adjacentes): *Sejam $c \in (a,b)$ e $U\colon [a,b] \times [a,b] \to X$ uma função tal que $U \in K([a,c])$ e $U \in K([c,b])$. Então, $U \in K([a,b])$ e*

$$\int_a^b DU(\tau,t) = \int_a^c DU(\tau,t) + \int_c^b DU(\tau,t).$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Denotaremos por $I_L = \int_a^c DU(\tau,t)$ e $I_R = \int_c^b DU(\tau,t)$. Como $U \in K([a,c])$, existe um calibre δ_L em $[a,c]$ tal que

$$\|S(U,d^L) - I_L\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para cada divisão marcada δ-fina d^L de $[a,c]$. Assim como, se $U \in K([c,b])$, existe um calibre δ_R em

$[c,b]$ tal que

$$\|S(U,d^R)-I_R\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

para cada divisão marcada δ-fina d^R de $[c,b]$.

Defina

$$\tilde{\delta}(\tau)=\begin{cases}\delta_L(\tau), & \tau\in[a,c),\\ \min(\delta_L(\tau),\delta_R(\tau)), & \tau=c,\\ \delta_R(\tau), & \tau\in(c,b],\end{cases}$$

e escolha $\delta\colon [a,b]\to(0,\infty)$ tal que $\delta(\tau)<\min(\tilde{\delta}(\tau),|\tau-c|)$ se $\tau\neq c$ e $\delta(c)=\tilde{\delta}(c)$. É claro que δ é um calibre em $[a,b]$. Suponha que $d^*=(\tau_i,t_i)$ é uma divisão marcada δ-fina de $[a,b]$. Seja m tal que $c\subset[t_{m-1},t_m]$. Afirmamos que $c=\tau_m$. De fato, se $\tau_m\neq c$, obtemos a seguinte desigualdade contraditória

$$|\tau_m-c|\leq\delta(\tau_m)<|\tau_m-c|,$$

que é válida, pois $[t_{m-1},t_m]\subset[\tau_m-\delta(\tau_m),\tau_m+\delta(\tau_m)]$ e $\delta(\tau)<|\tau_m-c|$ para $\tau\neq c$. Assim, necessariamente, $\tau_m=c$. E, ainda,

$$\begin{aligned}S(U,d^*)&=\sum_{i=1}^{m-1}[U(\tau_i,t_i)-U(\tau_i,t_{i-1})]+U(c,t_m)-U(c,t_{m-1})+\sum_{i=m+1}^{|d|}[U(\tau_i,t_i)-U(\tau_i,t_{i-1})]\\&=\sum_{i=1}^{m-1}[U(\tau_i,t_i)-U(\tau_i,t_{i-1})]+U(c,c)-U(c,t_{m-1})+U(c,t_m)-U(c,c)\\&\quad+\sum_{i=m+1}^{|d|}[U(\tau_i,t_i)-U(\tau_i,t_{i-1})]\\&=S(U,d_L^*)+S(U,d_R^*),\end{aligned}$$

em que $d_L^*=\{t_0,\tau_1,t_1,\dots,t_{m-1},\tau_m^L=c,t_m^L=c\}$ e $d_R^*=\{t_{m-1}^R=c,\tau_m^R=c,t_m,\dots,t_{|d|-1},\tau_{|d|},t_{|d|}\}$ são divisões marcadas de $[a,c]$ e $[c,b]$, respectivamente. Além disso, d_L^* e d_R^* são δ-finas em virtude do calibre δ. Portanto, para uma divisão marcada δ-fina d^* de $[a,b]$,

$$\|S(U,d^*)-(I_L+I_R)\|=\|S(U,d_L^*)+S(U,d_R^*)-I_L-I_R\|\leq\|S(U,d_L^*)-I_L\|+\|S(U,d_R^*)-I_R\|<\varepsilon,$$

o que resulta na existência da integral $\int_a^b DU(\tau,t)$ e $\int_a^b DU(\tau,t)=\int_a^c DU(\tau,t)+\int_c^b DU(\tau,t)$. □

O próximo resultado, conhecido por Lema de Saks-Henstock, é uma ferramenta indispensável para a teoria das integrais indefinidas de Kurzweil. Sua demonstração, incluída aqui, segue como em [2, Lemma 2.7].

Lema 2.8 (Saks-Henstock): *Seja $U\in K([a,b])$. Dado $\varepsilon>0$, considere um calibre δ em $[a,b]$ tal* *que*

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} [U(\tau_i,t_i) - U(\tau_i,t_{i-1})] - \int_a^b DU(\tau,t) \right\| < \varepsilon, \tag{2.3}$$

para cada divisão marcada δ-fina $d^* = (\tau_i,t_i) \in D^*_{[a,b]}$.

Se $a \leq \beta_1 \leq \xi_1 \leq \gamma_1 \leq \beta_2 \leq \xi_2 \leq \gamma_2 \leq \ldots \leq \beta_m \leq \xi_m \leq \gamma_m \leq b$ for uma divisão marcada parcial δ-fina $\tilde{d}^* = (\xi_j,[\beta_j,\gamma_j]) \in D^*_{[a,b]}$, isto é, $\xi_j \in [\beta_j,\gamma_j] \subset [\xi_j - \delta(\xi_j), \xi_j + \delta(\xi_j)]$, então

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \left[U(\xi_j,\gamma_j) - U(\xi_j,\beta_j) - \int_{\beta_j}^{\gamma_j} DU(\tau,t) \right] \right\| < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Demonstração. Por hipótese, $\beta_j \leq \gamma_j$ para qualquer $j = 1,2,\ldots,m$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\beta_j < \gamma_j$ para qualquer $j = 1,2,\ldots,m$ e que $\gamma_0 = a$ e $\beta_{m+1} = b$. Se $\gamma_j < \beta_{j+1}$ para algum $j = 0,1,\ldots,m$, então a existência da integral $\int_a^b DU(\tau,t)$ juntamente com o Teorema 2.6 implicarão na existência da integral $\int_{\gamma_j}^{\beta_{j+1}} DU(\tau,t)$. Assim, dado $\eta > 0$, existirá um calibre δ_j em $[\gamma_j,\beta_{j+1}]$ tal que

$$\left\| S(U,d_j^*) - \int_{\gamma_j}^{\beta_{j+1}} DU(\tau,t) \right\| < \frac{\eta}{m+1},$$

para cada divisão marcada δ_j-fina d_j^* de $[\gamma_j,\beta_{j+1}]$. Podemos considerar δ_j como um refinamento de δ, isto é, δ_j satisfaz $\delta_j(\tau) < \delta(\tau)$ para cada $\tau \in [\gamma_j,\beta_{j+1}]$. Por outro lado, se $\gamma_j = \beta_{j+1}$, então $S(U,d_j^*) = 0$.

Como a união de $\tilde{d}^* = (\xi_j,[\beta_j,\gamma_j])$ de $[a,b]$ e todo $d_j^*, j = 1,2,\ldots,m$, de $[\gamma_j,\beta_{j+1}]$ forma uma divisão marcada δ-fina d^* de $[a,b]$, cuja soma de Riemann correspondente é dada por

$$\sum_{j=1}^{m} [U(\xi_j,\gamma_j) - U(\xi_j,\beta_j)] + \sum_{j=1}^{m} S(U,d_j^*),$$

então, pela equação (2.3),

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} [U(\xi_j,\gamma_j) - U(\xi_j,\beta_j)] + \sum_{j=1}^{m} S(U,d_j^*) - \int_a^b DU(\tau,t) \right\| < \varepsilon.$$

Note que,

$$\int_a^b DU(\tau,t) = \sum_{j=1}^{m} \int_{\beta_j}^{\gamma_j} DU(\tau,t) + \sum_{j=0}^{m} \int_{\gamma_j}^{\beta_{j+1}} DU(\tau,t).$$

Logo,

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \left[U(\xi_j,\gamma_j) - U(\xi_j,\beta_j) - \int_{\beta_j}^{\gamma_j} DU(\tau,t) \right] \right\|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \sum_{j=1}^{m} [U(\xi_j,\gamma_j) - U(\xi_j,\beta_j)] + \sum_{j=0}^{m} \int_{\gamma_j}^{\beta_{j+1}} DU(\tau,t) - \int_a^b DU(\tau,t) \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{j=1}^{m} [U(\xi_j,\gamma_j) - U(\xi_j,\beta_j)] - \int_a^b DU(\tau,t) + \sum_{j=0}^{m} S(U,d_j^*) \right\| + \left\| \sum_{j=0}^{m} S(U,d_j^*) - \sum_{j=0}^{m} \int_{\gamma_j}^{\beta_{j+1}} DU(\tau,t) \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{j=1}^{m} [U(\xi_j,\gamma_j) - U(\xi_j,\beta_j)] - \int_a^b DU(\tau,t) + \sum_{j=0}^{m} S(U,d_j^*) \right\| + \sum_{j=0}^{m} \left\| S(U,d_j^*) - \int_{\gamma_j}^{\beta_{j+1}} DU(\tau,t) \right\| \\
&< \varepsilon + (m+1)\frac{\eta}{m+1} = \varepsilon + \eta,
\end{aligned}
$$

válido para todo $\eta > 0$. Portanto, a equação (2.4) é satisfeita, o que completa a demonstração. □

O resultado a seguir, emprestado de [2, Corollary 2.8], é uma consequência do Lema de Saks-Henstock.

Corolário 2.9: *Seja $U \in K([a,b])$. Dado $\varepsilon > 0$, existe um calibre δ em $[a,b]$ tal que, se $[\varphi,\upsilon] \subset [a,b]$, então*

(i) $(\upsilon - \varphi) < \delta(\varphi)$ *implica* $\|U(\varphi,\upsilon) - U(\varphi,\varphi) - \int_\varphi^\upsilon DU(\tau,t)\| < \varepsilon$;

(ii) $(\upsilon - \varphi) < \delta(\upsilon)$ *implica* $\|U(\upsilon,\upsilon) - U(\upsilon,\varphi) - \int_\varphi^\upsilon DU(\tau,t)\| < \varepsilon$.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como $U\colon [a,b] \times [a,b] \to X$ é Kurzweil integrável sobre $[a,b]$, existe um calibre δ em $[a,b]$ tal que a equação (2.3) vale para cada divisão marcada δ-fina $d^* = (\tau_i,t_i) \in D^*_{[a,b]}$. No item (i), se $[\varphi,\upsilon] \subset [a,b]$ tal que $(\upsilon - \varphi) < \delta(\varphi)$, então $(\varphi,[\varphi,\upsilon])$ será uma divisão marcada parcial de $[a,b]$. No item (ii), se $[\varphi,\upsilon] \subset [a,b]$ tal que $(\upsilon - \varphi) < \delta(\upsilon)$, então $(\upsilon,[\varphi,\upsilon])$ também será uma divisão marcada parcial de $[a,b]$. Portanto, pelo Lema de Saks-Henstock (Lema 2.8), o resultado segue. □

Em seguida mostraremos uma extensão de Cauchy para a integral de Kurzweil, a qual é muito útil para calcular o valor de integrais que envolvem funções escadas. A demonstração apresentada aqui segue as ideias de [14, Theorem 1.14].

Teorema 2.10 (Extensão de Cauchy): *Seja $U\colon [a,b] \times [a,b] \to X$ uma função.*

(i) *Se U for integrável em $[a,c]$ para cada $c \in [a,b)$ e o limite*

$$\lim_{c \to b^-} \left[\int_a^c DU(\tau,t) - U(b,c) + U(b,b) \right] = I$$

existe, então a função U será integrável em $[a,b]$ e $I = \int_a^b DU(\tau,t)$.

(ii) *Se U for integrável em $[c,b]$ para cada $c \in (a,b]$ e o limite*

$$\lim_{c \to a^+} \left[\int_c^b DU(\tau,t) + U(a,c) - U(a,a) \right] = I \tag{2.5}$$

existe, então a função U será integrável em $[a,b]$ e $I = \int_a^b DU(\tau,t)$.

Demonstração. Provaremos o item (ii) e de forma análoga prova-se o item (i), o qual está feito em [14]. Como (2.5) existe por hipótese então, dado $\varepsilon > 0$, existe um $\gamma \in (a,b]$ tal que, para cada $c \in (a,\gamma]$, vale a desigualdade

$$\left\| \int_c^b DU(\tau,t) + U(a,c) - U(a,a) - I \right\| < \varepsilon. \tag{2.6}$$

Seja $\{c_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ uma sequência decrescente de $(a,b]$ tal que $\lim_{p\to\infty} c_p = a$ e denote $c_0 = b$. Assim, $U \in K([c_p,b])$ para cada $p \in \mathbb{N}$, isto é, para cada $p \in \mathbb{N}$, existe um calibre δ_p em $[c_p,b]$ tal que

$$\left\| S(U,d_p^*) - \int_{c_p}^b DU(\tau,t) \right\| < \frac{\varepsilon}{2^p} \tag{2.7}$$

para cada divisão marcada δ_p-fina d_p^* de $[c_p,b]$.

Além disso, para qualquer $\tau \in (a,b]$, existe um único $p(\tau) \in \mathbb{N}$ tal que $\tau \in (c_{p(\tau)}, c_{p(\tau)-1}]$. Dado $\tau \in (a,b]$, escolha $\tilde{\delta}(\tau) > 0$ tal que $\tilde{\delta}(\tau) \le \delta_{p(\tau)}(\tau)$ e $[\tau - \tilde{\delta}(\tau), \tau + \tilde{\delta}(\tau)] \cap (a,b] \subset (c_{p(\tau)}, b]$. Suponha que $c \in (a,b]$ e seja $\tilde{d^*} = (\tau_j,\alpha_j), j = 2,3,\ldots,k$, uma divisão marcada $\tilde{\delta}$-fina de $[c,b]$. Se $p(\tau_j) = p$, então $[\alpha_{j-1},\alpha_j] \subset [\tau_j - \tilde{\delta}(\tau_j), \tau_j + \tilde{\delta}(\tau_j)] \subset [c_p,b]$ e $[\alpha_{j-1},\alpha_j] \subset [\tau_j - \delta_p(\tau_j), \tau_j + \delta_p(\tau_j)]$. Logo, levando em consideração (2.7) e aplicando o Lema 2.8, obtemos

$$\left\| \sum_{j=2, p(\tau_j)=p}^{k} \left[U(\tau_j,\alpha_j) - U(\tau_j,\alpha_{j-1}) - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} DU(\tau,t) \right] \right\| < \frac{\varepsilon}{2^p}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{j=2}^{k} [U(\tau_j,\alpha_j) - U(\tau_j,\alpha_{j-1})] - \int_c^b DU(\tau,t) \right\| \\
&= \left\| \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{j=2, p(\tau_j)=p}^{k} \left[U(\tau_j,\alpha_j) - U(\tau_j,\alpha_{j-1}) - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} DU(\tau,t) \right] \right\| \\
&\le \sum_{p=1}^{\infty} \left\| \sum_{j=2, p(\tau_j)=p}^{k} \left[U(\tau_j,\alpha_j) - U(\tau_j,\alpha_{j-1}) - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} DU(\tau,t) \right] \right\| < \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^p} = \varepsilon.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Considere um calibre δ em $[a,b]$ tal que $0 < \delta(\tau) < \min\{\tilde{\delta}(\tau), \tau - a\}$, $\tau \in (a,b]$, e $\delta(a) > \gamma - a$. Seja $d^* = (\tau_i,\alpha_i), i = 1,2,\ldots,k$, uma divisão marcada δ-fina de $[a,b]$. Veja que, pela escolha do calibre, $\tau_1 = a$. Portanto, usando (2.6) e (2.8),

$$\|S(U,d^*) - I\| = \left\| U(\tau_1,\alpha_1) - U(\tau_1,\alpha_0) + \sum_{j=2}^{k} [U(\tau_j,\alpha_j) - U(\tau_j,\alpha_{j-1})] - I \right\|$$

$$\leq \left\| \sum_{j=2}^{k} [U(\tau_j,\alpha_j) - U(\tau_j,\alpha_{j-1})] - \int_{\alpha_1}^{b} DU(\tau,t) \right\|$$
$$+ \left\| \int_{\alpha_1}^{b} DU(\tau,t) + U(a,\alpha_1) - U(a,a) - I \right\| < 2\varepsilon,$$

o que conclui a prova. $\square$

Em particular, a extensão de Cauchy também vale para as integrais de Perron-Stieltjes. Este resultado pode ser encontrado em [2, Corollary 2.10] e será repetido a seguir.

Corolário 2.11: *Considere as funções $f\colon [a,b] \to X$ e $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.*

(i) *Se, para cada $s \in [a,b)$, a integral de Perron-Stieltjes $\int_a^s f(t)dg(t)$ existe e*

$$\lim_{s\to b^-} \left[\int_a^s f(t)dg(t) + f(b)(g(b) - g(s)) \right] = I.$$

Então, $\int_a^b f(t)dg(t) = I$.

(ii) *Se, para cada $s \in (a,b]$, a integral de Perron-Stieltjes $\int_s^b f(t)dg(t)$ existe e*

$$\lim_{s\to a^+} \left[\int_s^b f(t)dg(t) + f(a)(g(s) - g(a)) \right] = I.$$

Então, $\int_a^b f(t)dg(t) = I$.

Demonstração. Provamos, apenas, a primeira afirmação e a segunda segue de forma análoga. Seja $U\colon [a,b]\times[a,b] \to X$ uma função dada por $U(\tau,t) = f(\tau)g(t)$. Note que, U é Kurzweil integrável sobre $[a,s]$ para todo $s \in [a,b)$, já que por hipótese, a integral de Perron-Stieltjes $\int_a^s f(t)dg(t)$ existe para cada $s \in [a,b)$. Assim, pelo Teorema 2.10, U é Kurzweil integrável sobre $[a,b]$. Além disso,

$$\lim_{s\to b^-} \left[\int_a^s DU(\tau,t) - U(b,s) + U(b,b) \right] = \lim_{s\to b^-} \left[\int_a^s f(t)dg(t) + f(b)(g(b) - g(s)) \right] = I.$$

Portanto, pelo Teorema 2.10 novamente, $\int_a^b f(t)dg(t) = \int_a^b DU(\tau,t) = I$. $\square$

O próximo resultado, decorrente do Teorema 2.10, nos mostra que a integral indefinida de uma função Kurzweil integrável $U\colon [a,b]\times[a,b] \to X$ nem sempre é contínua. No entanto, a integral indefinida será contínua em um ponto $c \in [a,b]$ se, e somente se, a função $U(c,\cdot)\colon [a,b] \to X$ for contínua no ponto c. Este resultado pode ser consultado em [2, Theorem 2.12] e [14, Theorem 1.16], porém, a demonstração que faremos aqui será diferente de ambos.

Teorema 2.12: *Sejam $U \in K([a,b])$ e $c \in [a,b]$. Então,*

$$\lim_{s\to c} \left[\int_a^s DU(\tau,t) - U(c,s) + U(c,c) \right] = \int_a^c DU(\tau,t), \tag{2.9}$$

$$\lim_{s \to c} \left[\int_s^b DU(\tau,t) + U(c,s) - U(c,c) \right] = \int_c^b DU(\tau,t). \tag{2.10}$$

Demonstração. Provaremos a igualdade (2.9) e analogamente prova-se a igualdade (2.10). Seja $s \in [a,b]$. Como $U \in K([a,b])$ e $[a,s] \subset [a,b]$ então, pelo Teorema 2.6, $U \in K([a,s])$. Assim, pelo item (i) do Teorema 2.10,

$$\lim_{s \to c^-} \left[\int_a^s DU(\tau,t) - U(c,s) + U(c,c) \right] = \int_a^c DU(\tau,t).$$

Por outro lado, pelo item (ii) do Teorema 2.10,

$$\begin{aligned}\lim_{s \to c^+} \left[\int_a^s DU(\tau,t) - U(c,s) + U(c,c) \right] &= - \lim_{s \to c^+} \left[\int_s^a DU(\tau,t) + U(c,s) - U(c,c) \right] \\ &= - \int_c^a DU(\tau,t) = \int_a^c DU(\tau,t).\end{aligned}$$

Como os limites laterais são iguais, o resultado segue. □

Um caso especial do teorema anterior trata das integrais indefinidas de Perron-Stieltjes, que podem não ser contínuas, como já visto. Mas, serão regradas sob certas condições. Esse resultado pode ser encontrado em [2, Corollary 2.14] e [13, Corollary 6.5.5], o qual será repetido a seguir.

Corolário 2.13: *Considere as funções $f\colon [a,b] \to X$ e $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, tais que g é regrada e a integral de Perron-Stieltjes $\int_a^b f(t)dg(t)$ existe. Então, as funções*

$$h(t) = \int_a^t f(s)dg(s) \quad e \quad k(t) = \int_t^b f(s)dg(s)$$

são regradas em $[a,b]$ e satisfazem

$$\begin{aligned} h(t^+) &= h(t) + f(t)\Delta^+ g(t) \quad e \quad k(t^+) = k(t) - f(t)\Delta^+ g(t), \;\; t \in [a,b), \\ h(t^-) &= h(t) - f(t)\Delta^- g(t) \quad e \quad k(t^-) = k(t) + f(t)\Delta^- g(t), \;\; t \in (a,b], \end{aligned}$$

em que $\Delta^+ g(t) = g(t^+) - g(t)$ e $\Delta^- g(t) = g(t) - g(t^-)$.

Demonstração. Provaremos a primeira igualdade e as demais seguem de forma análoga. Considere a função $U\colon [a,b] \times [a,b] \to X$ definida por $U(\tau,t) = f(\tau)g(t)$. Por hipótese, $\int_a^b DU(\tau,t) = \int_a^b f(t)dg(t)$ existe e U é Kurzweil integrável sobre $[a,b]$. Logo, pelo Teorema 2.12,

$$\lim_{s \to t^+} \left[\int_a^s DU(\tau,u) - U(t,s) + U(t,t) \right] = \int_a^t DU(\tau,u),$$

para $t \in [a,b)$, o que implica

$$\lim_{s \to t^+} \left[\int_a^s f(u)dg(u) - f(t)g(s) + f(t)g(t) \right] = \int_a^t f(u)dg(u),$$

isto é,

$$\lim_{s\to t^+}\left[\int_a^s f(u)dg(u)\right] = \int_a^t f(u)dg(u) + f(t)[g(t^+) - g(t)].$$

Portanto, $h(t^+) = h(t) + f(t)\Delta^+ g(t)$. □

O próximo resultado nos fornece uma estimativa da integral $\int_a^b DU(\tau,t)$ por uma outra integral de uma função de valor real. A demonstração deste teorema foi emprestada de [2, Theorem 2.15].

Teorema 2.14: *Considere uma função Kurzweil integrável $U\colon [a,b]\times[a,b] \to X$ sobre $[a,b]$. Se $V\colon [a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ for uma função Kurzweil integrável e se existir um calibre θ em $[a,b]$ tal que*

$$|t-\tau|\|U(\tau,t) - U(\tau,\tau)\| \leq (t-\tau)[V(\tau,t) - V(\tau,\tau)]$$

para cada $t \in (\tau - \theta(\tau), \tau + \theta(\tau))$, então

$$\left\|\int_a^b DU(\tau,t)\right\| \leq \int_a^b DV(\tau,t).$$

Demonstração. Fixe $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como as integrais de Kurzweil $\int_a^b DU(\tau,t)$ e $\int_a^b DV(\tau,t)$ existem, podemos encontrar um calibre δ em $[a,b]$, com $\delta(s) \leq \theta(s)$ para todo $s \in [a,b]$, tal que

$$\left\|\sum_{j=1}^{|d|}[U(\tau_j,t_j) - U(\tau_j,t_{j-1})] - \int_a^b DU(\tau,t)\right\| < \varepsilon \tag{2.11}$$

e

$$\left|\sum_{j=1}^{|d|}[V(\tau_j,t_j) - V(\tau_j,t_{j-1})] - \int_a^b DV(\tau,t)\right| < \varepsilon, \tag{2.12}$$

para cada divisão marcada δ-fina $d^* = (\tau_j,t_j) \in D^*_{[a,b]}$.

Por hipótese, para cada $i = 1,2,\ldots,|d|$,

$$(t_i - \tau_i)\|U(\tau_i,t_i) - U(\tau_i,\tau_i)\| \leq (t_i-\tau_i)[V(\tau_i,t_i) - V(\tau_i,\tau_i)], \text{ com } t_i \geq \tau_i.$$

Assim, $\|U(\tau_i,t_i) - U(\tau_i,\tau_i)\| \leq V(\tau_i,t_i) - V(\tau_i,\tau_i)$, para $i = 1,2,\ldots,|d|$. Do mesmo modo, $\|U(\tau_i,t_{i-1}) - U(\tau_i,\tau_i)\| \leq V(\tau_i,\tau_i) - V(\tau_i,t_{i-1})$, para $i = 1,2,\ldots,|d|$. Daí,

$$\begin{aligned}\|U(\tau_i,t_i) - U(\tau_i,t_{i-1})\| &\leq \|U(\tau_i,t_i) - U(\tau_i,\tau_i)\| + \|U(\tau_i,\tau_i) - U(\tau_i,t_{i-1})\|\\ &\leq V(\tau_i,t_i) - V(\tau_i,\tau_i) + V(\tau_i,\tau_i) - V(\tau_i,t_{i-1})\\ &= V(\tau_i,t_i) - V(\tau_i,t_{i-1}),\end{aligned}$$

para cada $i = 1,2,\ldots,|d|$.

Então, pelas equações (2.11) e (2.12), obtemos

$$\begin{aligned}\left\|\int_a^b DU(\tau,t)\right\| &\leq \left\|\sum_{j=1}^{|d|}[U(\tau_j,t_j)-U(\tau_j,t_{j-1})]-\int_a^b DU(\tau,t)\right\|+\left\|\sum_{j=1}^{|d|}[U(\tau_j,t_j)-U(\tau_j,t_{j-1})]\right\| \\ &< \varepsilon+\sum_{j=1}^{|d|}[V(\tau_j,t_j)-V(\tau_j,t_{j-1})]-\int_a^b DV(\tau,t)+\int_a^b DV(\tau,t) \\ &< 2\varepsilon+\int_a^b DV(\tau,t).\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, o resultado segue. $\square$

Finalizamos este capítulo, apresentando dois resultados fundamentais para o segundo caso da demonstração do teorema da existência e unicidade de soluções das EDOs generalizadas (Teorema 3.14).

Lema 2.15: *Considere $V\colon [a,b]\times[a,b]\to X$ e $\alpha\colon [a,b]\to X$ tais que $V(\tau,t)=\alpha(\tau)$, para todo $(\tau,t)\in[a,b]\times[a,b]$. Então, V é Kurzweil integrável e $\int_a^b DV(\tau,t)=0$.*

Demonstração. Note que, para qualquer divisão marcada δ-fina $d^*=(\tau_i,t_i)\in D^*_{[a,b]}$, vale

$$V(\tau_i,t_i)-V(\tau_i,t_{i-1})=\alpha(\tau_i)-\alpha(\tau_i)=0.$$

Portanto, pela Definição 2.3, V é Kurzweil integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b DV(\tau,t)=0$. $\square$

O resultado a seguir é uma consequência imediata do lema anterior.

Corolário 2.16: *Seja $U\colon [a,b]\times[a,b]\to X$ Kurzweil integrável sobre $[a,b]$. Se $V\colon [a,b]\times[a,b]\to X$ for dada por $V(\tau,t)=\alpha(\tau)$ e $z\colon [a,b]\times[a,b]\to X$ for tal que $z(\tau,t)=U(\tau,t)+V(\tau,t)$. Então, $z\colon [a,b]\times[a,b]\to X$ será Kurzweil integrável sobre $[a,b]$ e*

$$\int_a^b Dz(\tau,t)=\int_a^b DU(\tau,t).$$

Capítulo 3

Equações Diferenciais Ordinárias Generalizadas

Neste capítulo, dedicaremo-nos ao estudo das equações diferenciais ordinárias generalizadas (EDOs generalizadas), tendo como principais referências [2] e [14]. A priori, apresentaremos algumas propriedades fundamentais dessas EDOs generalizadas, as quais serão úteis para a demonstração do principal resultado deste capítulo, a saber: o teorema da existência e unicidade de soluções das EDOs generalizadas para funções com valores no espaço de Banach.

Schwabik ([14], 1992) afirma que "uma equação diferencial ordinária generalizada é um objeto formal semelhante a uma equação para o qual definimos suas soluções". Deste ponto de vista, apresentaremos a seguir o conceito para uma solução da EDO generalizada. Para isso, considere X um espaço de Banach, $O \subset X$ um conjunto aberto, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $F\colon \Omega \to X$ uma função, em que $\Omega = O \times I$.

Definição 3.1: Uma função $x\colon J \to X$, $J \subset I$, será *solução da EDO generalizada*

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t) \tag{3.1}$$

no intervalo J, sempre que $(x(t),t) \in \Omega$ e

$$x(\beta) - x(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} DF(x(\tau),t), \tag{3.2}$$

para todo $\alpha, \beta \in I$, em que a integral $\int_{\alpha}^{\beta} DF(x(\tau),t)$ está no sentido da integral de Kurzweil (Definição 2.3), com $U(\tau,t) = F(x(\tau),t)$.

Importante ressaltar que Kurzweil ([10], 1957), o precursor da teoria, não define uma equação diferencial, isto é, $\frac{dx}{d\tau}$ é apenas uma notação, não significa que a solução x seja diferenciável em relação a τ. A equação (3.1) remete a equação integral (3.2), cuja solução é definida como a solução de (3.1). O primeiro resultado deste capítulo trata-se de uma consequência imediata da definição anterior e sua demonstração, repetida aqui, pode ser encontrada em [14, Proposition 3.5].

Teorema 3.2: *Se $x\colon I \to X$ for uma solução da EDO generalizada*

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t) \tag{3.3}$$

no intervalo I, então, para cada $\gamma \in I$ fixado,

$$x(s) = x(\gamma) + \int_{\gamma}^{s} DF(x(\tau),t), \quad s \in I. \tag{3.4}$$

Reciprocamente, se $x\colon I \to X$ satisfazer a equação (3.4) para algum $\gamma \in I$ e para cada $s \in I$, e $(x(t),t) \in \Omega$, então x será uma solução da EDO generalizada (3.3).

Demonstração. A primeira afirmação segue diretamente da Definição 3.1, para o caso em que $\alpha = \gamma$ e $\beta = s$. Agora, se $x\colon I \to X$ satisfazer a equação (3.4), então, pelo Teorema 2.7,

$$\begin{aligned} x(\beta) - x(\alpha) &= x(\gamma) + \int_{\gamma}^{\beta} DF(x(\tau),t) - \left[x(\gamma) + \int_{\gamma}^{\alpha} DF(x(\tau),t) \right] \\ &= \int_{\alpha}^{\gamma} DF(x(\tau),t) + \int_{\gamma}^{\beta} DF(x(\tau),t) = \int_{\alpha}^{\beta} DF(x(\tau),t), \end{aligned}$$

para cada $\alpha, \beta \in I$ e, portanto, x será solução de (3.3). □

Com o objetivo de apresentar um teorema que garanta a existência e unicidade de soluções para as equações diferenciais ordinárias generalizadas, vamos definir uma classe especial de funções, a qual tem inspiração nas hipóteses do teorema de existência e unicidade para EDOs clássicas (Teorema de Picard–Lindelöf).

Definição 3.3: Sejam $h\colon I \to \mathbb{R}$ uma função não decrescente e $\omega\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ uma função contínua e crescente tal que $\omega(0) = 0$. Diremos que uma função $F\colon \Omega \to X$ *pertence à classe* $\mathscr{F}(\Omega,h,\omega)$ sempre que

$$\|F(x,s_2) - F(x,s_1)\| \leq |h(s_2) - h(s_1)|, \tag{3.5}$$

$$\|F(x,s_2) - F(x,s_1) - F(y,s_2) + F(y,s_1)\| \leq \omega(\|x-y\|)|h(s_2) - h(s_1)|, \tag{3.6}$$

para todo $x,y \in O$ e todo $s_1,s_2 \in I$.

Quando ω for uma função identidade, denotaremos por $\mathscr{F}(\Omega,h)$ em vez de $\mathscr{F}(\Omega,h,\omega)$.

Observe que a condição (3.5) nos diz que, fixado um valor da primeira coordenada de F, na segunda coordenada a função F possui a mesma "regularidade" da função h. Por exemplo, a função F será contínua nos pontos em que h for contínua. Isto é, de um certo modo, uma extensão do conceito de ser Lipschitziana.

O próximo resultado pode ser deduzido a partir do Teorema 2.12 e sua demonstração segue como em [2, Theorem 4.4].

Teorema 3.4: *Sejam $O \subset X$ um conjunto aberto e $x\colon [a,b] \to X$ uma solução da EDO generalizada*

(3.1) *em* $[a,b] \subset I$. *Então, para cada* $\sigma \in [a,b]$,

$$\lim_{s \to \sigma} [x(s) - F(x(\sigma), s) + F(x(\sigma), \sigma)] = x(\sigma).$$

Demonstração. Como $x\colon [a,b] \to X$ é uma solução da EDO generalizada (3.1), então $x(t) \in O$ para cada $t \in [a,b]$. Seja $\sigma \in [a,b]$ fixado. Pelo Teorema 3.2,

$$x(s) - \int_{\sigma}^{s} DF(x(\tau), t) = x(\sigma)$$

o que implica

$$x(s) - F(x(\sigma), s) + F(x(\sigma), \sigma) - x(\sigma) = \int_{\sigma}^{s} DF(x(\tau), t) - F(x(\sigma), s) + F(x(\sigma), \sigma),$$

para cada $s \in [a,b]$.

Por outro lado, pelo Teorema 2.12, obtemos

$$\lim_{s \to \sigma} \left[\int_{\sigma}^{s} DF(x(\tau), t) - F(x(\sigma, s) + F(x(\sigma), \sigma) \right] = \int_{\sigma}^{\sigma} DU(\tau, t) = 0,$$

o que garante a existência da integral

$$\lim_{s \to \sigma} [x(s) - F(x(\sigma), s) + F(x(\sigma), \sigma) - x(\sigma)],$$

que, por sua vez,

$$\lim_{s \to \sigma} [x(s) - F(x(\sigma), s) + F(x(\sigma), \sigma) - x(\sigma)] = 0,$$

o que conclui o resultado. □

Veja, no Teorema 3.4, que se $x\colon [a,b] \to X$ for uma solução da EDO generalizada (3.1) então, para cada $\sigma \in [a,b]$, o valor de $x(s)$ poderá ser aproximado por $x(\sigma) + F(x(\sigma), s) - F(x(\sigma), \sigma)$, desde que $s \in [a,b]$ esteja suficientemente próximo de σ. Os lemas, a seguir, nos dão uma estimativa para as funções $F\colon \Omega \to X$ que pertencem à classe $\mathscr{F}(\Omega, h, \omega)$, cujas demonstrações foram emprestadas de [2, Lemma 4.5 e Lemma 4.6].

Lema 3.5: *Seja* $[a,b] \subset I$ *e suponha que* $F\colon \Omega \to X$ *satisfaça a condição* (3.5). *Se* $x\colon [a,b] \to X$ *for tal que* $x(t) \in O$ *para cada* $t \in [a,b]$ *e se a integral* $\int_a^b DF(x(\tau), t)$ *existir, então*

$$\left\| \int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau), t) \right\| \leq |h(s_2) - h(s_1)|$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [a,b]$.

Demonstração. Pela condição (3.5),

$$|t - \tau| \|F(x(\tau), t) - F(x(\tau), \tau)\| \leq |t - \tau| |h(t) - h(\tau)|$$

para quaisquer $t,\tau \in [a,b]$. Além disso, a integral $\int_a^b dh(t)$ existe e

$$\int_{s_1}^{s_2} dh(t) = h(s_2) - h(s_1)$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [a,b]$. Assim, pelo Teorema 2.14,

$$\left\| \int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau),t) \right\| \leq \left| \int_{s_1}^{s_2} dh(t) \right| = |h(s_2) - h(s_1)|$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [a,b]$. □

Lema 3.6: *Suponha que $F\colon \Omega \to X$ pertença à classe $\mathscr{F}(\Omega, h, \omega)$. Se as funções $x, y\colon [a,b] \subset I \to O$ forem regradas, então*

$$\left\| \int_a^b D[F(x(\tau),s) - F(y(\tau),s)] \right\| \leq \int_a^b \omega(\|x(s) - y(s)\|) dh(s). \tag{3.7}$$

Demonstração. Note que a função $\omega(\|x(\cdot) - y(\cdot)\|)$ é regrada, já que é composição de função contínua e de função regrada. Assim, usando este fato e o de que h é uma função não decrescente, a integral de Perron-Stieltjes do lado direito da desigualdade (3.7) existe. Então, escolhendo uma divisão marcada arbitrária $d^* = (\tau_i, s_i)$ de $[a,b]$, obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{i=1}^{|d|} [F(x(\tau_i),s_i) - F(x(\tau_i),s_{i-1}) - F(y(\tau_i),s_i) + F(y(\tau_i),s_{i-1})] \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{|d|} \|F(x(\tau_i),s_i) - F(x(\tau_i),s_{i-1}) - F(y(\tau_i),s_i) + F(y(\tau_i),s_{i-1})\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{|d|} \omega(\|x(\tau_i) - y(\tau_i)\|)|h(s_i) - h(s_{i-1})|,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

na qual usamos o fato de que $F \in \mathscr{F}(\Omega, h, \omega)$ na última desigualdade.

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, existe uma divisão marcada $d^* = (\tau_i, s_i) \in D^*_{[a,b]}$ tal que

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_a^b D[F(x(\tau),s) - F(y(\tau),s)] \right. \\
&\left. - \sum_{i=1}^{|d|} [F(x(\tau_i),s_i) - F(x(\tau_i),s_{i-1}) - F(y(\tau_i),s_i) + F(y(\tau_i),s_{i-1})] \right\| < \varepsilon
\end{aligned} \tag{3.9}$$

e

$$\left| \int_a^b \omega(\|x(s) - y(s)\|) dh(s) - \sum_{i=1}^{|d|} \omega(\|x(\tau_i) - y(\tau_i)\|)|h(s_i) - h(s_{i-1})| \right| < \varepsilon. \tag{3.10}$$

Em consequência das desigualdades (3.8), (3.9) e (3.10), obtemos

$$\left\| \int_a^b D[F(x(\tau),s) - F(y(\tau),s)] \right\|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [F(x(\tau_i),s_i) - F(x(\tau_i),s_{i-1}) - F(y(\tau_i),s_i) + F(y(\tau_i),s_{i-1})] \right\| \\
&\quad + \left\| \int_a^b D[F(x(\tau),s) - F(y(\tau),s)] - \sum_{i=1}^{|d|} [F(x(\tau_i),s_i) - F(x(\tau_i),s_{i-1}) - F(y(\tau_i),s_i) + F(y(\tau_i),s_{i-1})] \right\| \\
&< \sum_{i=1}^{|d|} \omega(\|x(\tau_i) - y(\tau_i)\|)|h(s_i) - h(s_{i-1})| + \varepsilon \\
&\leq \left| \sum_{i=1}^{|d|} \omega(\|x(\tau_i) - y(\tau_i)\|)|h(s_i) - h(s_{i-1})| - \int_a^b \omega(\|x(s) - y(s)\|)dh(s) \right| \\
&\quad + \int_a^b \omega(\|x(s) - y(s)\|)dh(s) + \varepsilon \\
&< 2\varepsilon + \int_a^b \omega(\|x(s) - y(s)\|)dh(s).
\end{aligned}
$$

Como ε é arbitrário, o resultado segue. □

Outro fato interessante sobre as soluções das EDOs generalizadas é que, se $F\colon \Omega \to X$ satisfazer a condição (3.5), as soluções serão funções de variação limitada. Essa afirmação pode ser garantida no lema a seguir, emprestado de [2, Lemma 4.9].

Lema 3.7: *Suponha que $F\colon \Omega \to X$ satisfaça a condição (3.5). Se $[a,b] \subset I$ e $x\colon [a,b] \to X$ for uma solução da EDO generalizada (3.1), então, para quaisquer $s_1, s_2 \in [a,b]$,*

$$\|x(s_2) - x(s_1)\| \leq |h(s_2) - h(s_1)| \tag{3.11}$$

e, consequentemente,

$$\operatorname{var}_a^b(x) \leq h(b) - h(a) < \infty, \tag{3.12}$$

isto é, x será de variação limitada em $[a,b]$. Além disso, se h for contínua em $t \in [a,b]$, então t será um ponto de continuidade da solução $x\colon [a,b] \to X$.

Demonstração. A desigualdade (3.11) segue diretamente do Lema 3.5, já que, pela definição de solução da EDO generalizada (Definição 3.1), $x(s_2) - x(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau),t)$ para todo $s_1, s_2 \in [a,b]$. Agora, seja $d = (s_i)$ uma divisão arbitrária no intervalo $[a,b]$. Por (3.11),

$$\sum_{i=1}^{|d|} \|x(s_i) - x(s_{i-1})\| \leq \sum_{i=1}^{|d|} |h(s_i) - h(s_{i-1})| = h(b) - h(a).$$

Considerando o supremo sobre todas as divisões de $[a,b]$, obtemos (3.12). E, a terceira afirmação é consequência imediata de (3.11). □

Vale acentuar que as soluções das EDOs generalizadas podem não ser contínuas em geral e isso é resultado do lema seguinte, o qual pode ser encontrado em [2, Lemma 4.10] para espaços de Banach e [14, Lemma 3.12] para o espaço $\mathbb{R}^n$.

Lema 3.8: *Suponha que $F\colon \Omega \to X$ satisfaça a condição (3.5). Se $[a,b] \subset I$ e $x\colon [a,b] \to X$ for uma solução da EDO generalizada (3.1), então*

$$x(s^+) - x(s) = \lim_{\sigma \to s^+} x(\sigma) - x(s) = F(x(s), s^+) - F(x(s), s), \quad s \in [a,b), \tag{3.13}$$

$$x(s) - x(s^-) = x(s) - \lim_{\sigma \to s^-} x(\sigma) = F(x(s), s) - F(x(s), s^-), \quad s \in (a,b], \tag{3.14}$$

em que $F(x,s^+) = \lim_{\sigma \to s^+} F(x,\sigma)$ para $s \in [a,b)$ e $F(x,s^-) = \lim_{\sigma \to s^-} F(x,\sigma)$ para $s \in (a,b]$.

Demonstração. Note que os limites $F(x(s),s^+)$ e $F(s(x),s^-)$ existem para cada $x \in O$, pois F satisfaz (3.5) e h possui limites laterais em cada ponto de $[a,b]$. Como x é solução da EDO generalizada (3.1) em $[a,b]$, então $(x(t),t) \in O \times [a,b]$ e $x(\sigma) - x(s) = \int_s^\sigma DF(x(\tau),t)$ para $a \leq s < \sigma \leq b$. Assim,

$$\lim_{\sigma \to s^+} x(\sigma) - x(s) = \lim_{\sigma \to s^+} \int_s^\sigma DF(x(\tau),t) = \lim_{\sigma \to s^+} [F(x(s),\sigma) - F(x(s),s)],$$

e, portanto, fica provado a igualdade (3.13). Analogamente, prova-se a igualdade (3.14). □

O próximo resultado (Teorema 3.10), encontrado em [1, Proposition 2.1] e [2, Theorem 4.7], garante a existência da integral $\int_a^b DF(x(\tau),s)$ envolvida na definição 3.1. Mas, antes disso, apresentaremos um lema que garante a existência da integral $\int_a^b DF(\varphi(\tau),s)$ para cada função escada finita $\varphi\colon [a,b] \to O$, o qual será muito útil para a demonstração do teorema seguinte. A demonstração desse lema segue como em [14, Corollary 3.15] e [2, Theorem 4.7].

Lema 3.9: *Sejam $F \in \mathscr{F}(\Omega,h)$ e $[a,b] \subset I$. Se $\varphi\colon [a,b] \to X$ for uma função escada finita, então existirá a integral*

$$\int_a^b DF(\varphi(\tau),s).$$

Demonstração. Se $\varphi\colon [a,b] \to X$ for uma função escada finita, então existirá uma divisão $d = (s_i)$ de $[a,b]$ tal que $\varphi(s) = c_i \in O$ para cada $s \in (s_{i-1}, s_i), i = 1,2,\ldots,|d|$, em que c_i é uma constante para todo $i = 1,2,\ldots,|d|$. Suponha que $(\varphi(s),s) \in \Omega$, para cada $s \in [a,b]$. Claramente, pela definição da integral de Kurzweil (Definição 2.3), se $s_{i-1} < \sigma_1 < \sigma_2 < s_i$, então a integral $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(\varphi(\tau),s)$ existirá e $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(\varphi(\tau),s) = F(c_i,\sigma_2) - F(c_i,\sigma_1)$.

Seja $\sigma_0 \in (s_{i-1}, s_i)$ dado. Assim,

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \to s_{i-1}^+} \left[\int_t^{\sigma_0} DF(\varphi(\tau),s) + F(\varphi(s_{i-1}),t) - F(\varphi(s_{i-1}),s_{i-1}) \right] \\
&= \lim_{t \to s_{i-1}^+} [F(c_i,\sigma_0) - F(c_i,t) + F(\varphi(s_{i-1}),t) - F(\varphi(s_{i-1}),s_{i-1})] \\
&= F(c_i,\sigma_0) - F(c_i,s_{i-1}^+) + F(\varphi(s_{i-1}),s_{i-1}^+) - F(\varphi(s_{i-1}),s_{i-1}).
\end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 2.10, a integral de Kurzweil $\int_{s_{i-1}}^{\sigma_0} DF(\varphi(\tau),s)$ existe e é igual ao limite calculado anteriormente. Da mesma forma, conclui-se que a integral $\int_{\sigma_0}^{s_i} DF(\varphi(\tau),s)$ existe e

$$\int_{\sigma_0}^{s_i} DF(\varphi(\tau),s) = F(c_i,s_i^-) - F(c_i,\sigma_0) - F(\varphi(s_i),s_i^-) + F(\varphi(s_i),s_i).$$

Com isso, pelo Teorema 2.7, a integral de Kurzweil $\int_{s_{i-1}}^{s_i} DF(\varphi(\tau),s)$ existe e

$$\begin{aligned}\int_{s_{i-1}}^{s_i} DF(\varphi(\tau),s) &= F(c_i,\sigma_0) - F(c_i,s_{i-1}^+) + F(\varphi(s_{i-1}),s_{i-1}^+) - F(\varphi(s_{i-1}),s_{i-1}) + F(c_i,s_i^-)\\ &\quad - F(c_i,\sigma_0) - F(\varphi(s_i),s_i^-) + F(\varphi(s_i),s_i)\\ &= F(c_i,s_i^-) - F(c_i,s_{i-1}^+) + F(\varphi(s_{i-1}),s_{i-1}^+) - F(\varphi(s_{i-1}),s_{i-1}) - F(\varphi(s_i),s_i^-)\\ &\quad + F(\varphi(s_i),s_i).\end{aligned}$$

Portanto, procedendo como antes, para todo intervalo $[s_{i-1},s_i], i = 1,\ldots,|d|$, a integral de Kurzweil $\int_a^b DF(\varphi(\tau),s)$ existe e

$$\begin{aligned}\int_a^b DF(\varphi(\tau),s) &= \sum_{i=1}^{|d|}[F(c_i,s_i^-) - F(c_i,s_{i-1}^+)]\\ &\quad + \sum_{i=1}^{|d|}[F(\varphi(s_{i-1}),s_{i-1}^+) - F(\varphi(s_{i-1}),s_{i-1}) - F(\varphi(s_i),s_i^-) + F(\varphi(s_i),s_i)],\end{aligned}$$

o que completa a prova. □

Teorema 3.10: *Sejam $F \in \mathscr{F}(\Omega,h)$ e $[a,b] \subset I$. Se $x\colon [a,b] \to X$ for o limite uniforme de uma sequência $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de funções escadas $x_k\colon [a,b] \to X$ tais que $(x(s),s) \in \Omega$ e $(x_k(s),s) \in \Omega$, para cada $k \in \mathbb{N}$ e cada $s \in [a,b]$, então a integral $\int_a^b DF(x(\tau),s)$ existirá e*

$$\int_a^b DF(x(\tau),s) = \lim_{k\to\infty} \int_a^b DF(x_k(\tau),s).$$

Demonstração. Pelo Lema 3.9, para cada $k \in \mathbb{N}$, a integral de Kurzweil $\int_a^b DF(x_k(\tau),s)$ existe. Como $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tende uniformemente para x, quando $k \to \infty$, então, dado $\varepsilon > 0$, seja $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $k \geq k_0$,

$$\|x_k(s) - x(s)\| < \frac{\varepsilon}{2[h(b)-h(a)]}, \quad s \in [a,b].$$

Pela existência de $\int_a^b DF(x_k(\tau),s)$, seja δ um calibre em $[a,b]$ tal que, para $k \geq k_0$,

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d'|}[F(x_k(\tau_i),t_i) - F(x_k(\tau_i),t_{i-1})] - \int_a^b DF(x_k(\tau),s) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para cada divisão marcada δ-fina $d' = (\tau_i,t_i) \in D_{[a,b]}^*$. Então, para cada $k \geq k_0$,

$$
\begin{aligned}
&\left\|\sum_{i=1}^{|d'|}[F(x(\tau_i),t_i)-F(x(\tau_i),t_{i-1})]-\int_a^b DF(x_k(\tau),s)\right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{|d'|}\|F(x(\tau_i),t_i)-F(x(\tau_i),t_{i-1})-[F(x_k(\tau_i),t_i)-F(x_k(\tau_i),t_{i-1})]\| \\
&\quad+\left\|\sum_{i=1}^{|d'|}[F(x_k(\tau_i),t_i)-F(x_k(\tau_i),t_{i-1})]-\int_a^b DF(x_k(\tau),s)\right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{|d'|}[h(t_i)-h(t_{i-1})]\max_{1\leq i\leq |d'|}\|x(\tau_i)-x_k(\tau_i)\|+\frac{\varepsilon}{2} \\
&= [h(b)-h(a)]\max_{1\leq i\leq |d'|}\|x(\tau_i)-x_k(\tau_i)\|+\frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
\end{aligned}
$$

o que conclui a demonstração. □

Sabemos que as funções regradas são limites uniformes das funções escadas (ver Teorema 1.4) e isso nos leva a seguinte consequência imediata do teorema anterior.

Corolário 3.11: *Sejam $F \in \mathscr{F}(\Omega,h)$, $x\colon [a,b]\to X$ uma função regrada em $[a,b]\subset I$ (em particular, uma função de variação limitada em $[a,b]$) e $(x(s),s)\in\Omega$ para cada $s\in[a,b]$. Então, a integral $\int_a^b DF(x(\tau),t)$ existe e a função $G\colon [a,b]\to X$ dada por $G(s)=\int_a^s DF(x(\tau),t)$, $s\in[a,b]$, é de variação limitada em $[a,b]$ e, portanto, também regrada.*

Demonstração. A existência da integral $\int_a^b DF(x(\tau),t)$ segue diretamente do Teorema 3.10, já que toda função regrada é limite uniforme de funções escadas. E, a função $G\colon [a,b]\to X$ é de variação limitada em $[a,b]$ por consequência do Lema 3.5. □

A seguir, apresentamos um lema e enunciamos o teorema do ponto fixo de Banach, cuja demonstração pode ser encontrada em [9, Banach Fixed Point Theorem 5.1-2]. Ambos serão fundamentais na demonstração do principal teorema deste capítulo.

Lema 3.12: *Seja $F:\Omega\to X$ uma função que pertence à classe $\mathscr{F}(\Omega,h)$, em que $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função não decrescente. Se $\tilde{h}\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ for uma função não decrescente, definida por*

$$
\tilde{h}(t)=\begin{cases} h(t)+[h(t_0)-h(t_0^-)], & t<t_0,\\ h(t), & t=t_0,\\ h(t)-[h(t_0^+)-h(t_0)], & t>t_0,\end{cases}
$$

e se $\tilde{F}: O\times[a,b]\to X$ *for tal que*

$$\tilde{F}(x,t)=\begin{cases}F(x,t)+[F(x,t_0)-F(x,t_0^-)], & t<t_0,\\ F(x,t), & t=t_0,\\ F(x,t)-[F(x,t_0^+)-F(x,t_0)], & t>t_0.\end{cases}$$

Então, $\tilde{F}$ *pertencerá à classe* $\mathscr{F}(O\times[a,b],\tilde{h})$.

Demonstração. Sejam $x,y\in O$ e $s_1,s_2\in[a,b]$. Mostraremos apenas para $s_1<t_0<s_2$, as demais possibilidades seguem de forma análoga. Para isso, devemos mostrar que $\tilde{F}(x,t)$ satisfaz as desigualdades (3.5) e (3.6) da Definição 3.3. Assim, para $s_1<t_0<s_2$,

$$\begin{aligned}\|\tilde{F}(x,s_2)-\tilde{F}(x,s_1)\| &= \|F(x,s_2)-F(x,t_0^+)+F(x,t_0)-[F(x,s_1)+F(x,t_0)-F(x,t_0^-)]\|\\ &= \|F(x,s_2)-F(x,t_0^+)-F(x,s_1)+F(x,t_0^-)\|\\ &\le \|F(x,s_2)-F(x,t_0^+)\|+\|F(x,t_0^-)-F(x,s_1)\|\\ &\le h(s_2)-h(t_0^+)+h(t_0^-)-h(s_1)\\ &= \tilde{h}(s_2)-\tilde{h}(s_1)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|\tilde{F}(x,s_2)-\tilde{F}(x,s_1)-\tilde{F}(y,s_2)+\tilde{F}(y,s_1)\| &= \|F(x,s_2)-F(x,t_0^+)+F(x,t_0)\\ &\quad -[F(x,s_1)+F(x,t_0)-F(x,t_0^-)]\\ &\quad -[F(y,s_2)-F(y,t_0^+)+F(y,t_0)]\\ &\quad +F(y,s_1)+F(y,t_0)-F(y,t_0^-)\|\\ &\le \|F(x,s_2)-F(x,t_0^+)-F(y,s_2)+F(y,t_0^+)\|\\ &\quad +\|F(x,t_0^-)-F(x,s_1)-F(y,t_0^-)+F(y,s_1)\|\\ &\le \|x-y\||h(s_2)-h(t_0^+)|+\|x-y\||h(t_0^-)-h(s_1)|\\ &= \|x-y\|[h(s_2)-h(t_0^+)+h(t_0^-)-h(s_1)]\\ &= \|x-y\|[\tilde{h}(s_2)-\tilde{h}(s_1)],\end{aligned}$$

o que completa a demonstração. □

Teorema 3.13 (Teorema do Ponto Fixo de Banach): *Seja X um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|$. Se uma aplicação $T: X\to X$ for uma contração em X, isto é, se existir um número positivo $\alpha<1$ tal que $\|T(y)-T(x)\|\le\alpha\|y-x\|$ para quaisquer $x,y\in X$, então existirá um único ponto $z\in X$ tal que $T(z)=z$.*

Finalizamos este capítulo com um dos principais teoremas do estudo das EDOS generalizadas. Em essência, este teorema garante a existência e a unicidade local de uma solução da EDO generalizada. É importante destacar que, na teoria estudada (ver [2] e [14]), o Teorema 3.14 assume que h é contínua à esquerda. Contudo, verificamos que também é possível garantir uma solução à esquerda de t_0 de forma análoga. Por esse motivo, decidimos remover essa hipótese, sendo necessário, em contrapartida, inserir a condição (3.15) e realizar os ajustes apropriados.

Teorema 3.14 (Teorema da Existência e Unicidade de Soluções das EDOs generalizadas): *Sejam X um espaço de Banach e $O \subset X$ um conjunto aberto. Considere $F\colon O\times[a,b]\to X$ uma função pertencente à classe $\mathscr{F}(O\times[a,b],h)$, em que $h\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função não decrescente. Se $(\tilde{x},t_0)\in O\times[a,b]$ for tal que*

$$\tilde{x}_- = \tilde{x}+F(\tilde{x},t_0^-)-F(\tilde{x},t_0)\in O, \tag{3.15}$$

$$\tilde{x}_+ = \tilde{x}+F(\tilde{x},t_0^+)-F(\tilde{x},t_0)\in O, \tag{3.16}$$

então existirão $\Delta^-,\Delta^+>0$ tais que, no intervalo $[t_0-\Delta^-,t_0+\Delta^+]$, existirá uma única solução $x\colon [t_0-\Delta^-,t_0+\Delta^+]\to X$ da EDO generalizada (3.1) para a qual $x(t_0)=\tilde{x}$.

Demonstração. 1° caso: quando t_0 for ponto de continuidade de h, ou seja, $h(t_0)=h(t_0^-)=h(t_0^+)$.

Suponha que $\Delta^-,\Delta^+>0$ tais que $[t_0-\Delta^-,t_0+\Delta^+]\subset(a,b)$, $h(t_0+\Delta^+)-h(t_0-\Delta^-)<\frac{1}{2}$ e, ainda, que $x\in O$ sempre que $\|x-\tilde{x}_-\|\le|h(t)-h(t_0^-)|$, $t\in[t_0-\Delta^-,t_0)$ e $\|x-\tilde{x}_+\|\le|h(t)-h(t_0^+)|$, $t\in(t_0,t_0+\Delta^+]$.

Seja A o conjunto de todas as funções $z\in G([t_0-\Delta^-,t_0+\Delta^+],O)$ tais que

- $\|z(t)-\tilde{x}_-\|\le|h(t)-h(t_0^-)|$, $t\in[t_0-\Delta^-,t_0)$,
- $\|z(t)-\tilde{x}_+\|\le|h(t)-h(t_0^+)|$, $t\in(t_0,t_0+\Delta^+]$,
- $z(t_0)=\tilde{x}$.

Note que, se $z\in A$, então $z(t_0)=\tilde{x}$, $z(t_0^-)=\tilde{x}_-$ e $z(t_0^+)=\tilde{x}_+$, já que t_0 é ponto de continuidade de h. Além disso, $A\subset G([t_0-\Delta^-,t_0+\Delta^+],O)$ é fechado. Com efeito, seja $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset A$ uma sequência que converge para a função $\tilde{z}$. Logo, dado $\varepsilon>0$, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $\|z_k(t)-\tilde{z}(t)\|<\varepsilon$, para todo $t\in[t_0-\Delta^-,t_0+\Delta^+]$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{z}(t)-\tilde{x}_-\| &\le \|z_k(t)-\tilde{z}(t)\|+\|z_k(t)-\tilde{x}_-\|\le\varepsilon+|h(t)-h(t_0^-)|,\ t\in[t_0-\Delta^-,t_0),\\
\|\tilde{z}(t)-\tilde{x}_+\| &\le \|z_k(t)-\tilde{z}(t)\|+\|z_k(t)-\tilde{x}_+\|\le\varepsilon+|h(t)-h(t_0^+)|,\ t\in(t_0,t_0+\Delta^+].
\end{aligned}$$

Além disso, como $z_k(t_0)=\tilde{x}$, para todo $k\in\mathbb{N}$, $\tilde{z}(t_0)=\tilde{x}$. Consequentemente, $\tilde{z}\in A$, o que implica que A é fechado.

Agora, para $s\in[t_0-\Delta^-,t_0+\Delta^+]$ e $z\in A$, defina uma aplicação $T: A\to G([t_0-\Delta^-,t_0+\Delta^+],X)$ por

$$(Tz)(s)=\tilde{x}+\int_{t_0}^{s}DF(z(\tau),t),$$

de modo que a integral do lado direito existe devido ao Corolário 3.11. Veja que $(Tz)(t_0)=\tilde{x}$. Além disso, pelo Teorema 2.10 e pelo Lema 3.5,

$$\|(Tz)(s)-\tilde{x}_-\|=\left\|\tilde{x}+\int_{t_0}^{s}DF(z(\tau),t)-\tilde{x}_-\right\|=\left\|\tilde{x}+\int_{t_0}^{s}DF(z(\tau),t)-[\tilde{x}+F(\tilde{x},t_0^-)-F(\tilde{x},t_0)]\right\|$$

$$= \left\| \int_{t_0}^{s} DF(z(\tau),t) - F(z(t_0),t_0^-) + F(z(t_0),t_0) \right\| = \lim_{r\to t_0^-} \left\| \int_{r}^{s} DF(z(\tau),t) \right\|$$
$$\leq \lim_{r\to t_0^-} |h(s)-h(r)| = h(s) - h(t_0^-),$$

para $s \in [t_0 - \Delta^-, t_0)$. Da mesma forma,

$$\|(Tz)(s) - \tilde{x}_+\| \leq h(s) - h(t_0^+),$$

para $s \in (t_0, t_0 + \Delta^+]$. Com isso, $T_z \in A$ e, consequentemente, $T(A) \subset A$. Resta mostrar que $T: A \to A$ é uma contração. Para isso, considere $t_0 - \Delta^- \leq s_1 \leq t_0 + \Delta^+$ e $z_1, z_2 \in A$. Pelo Lema 3.6,

$$\begin{aligned}
\|(Tz_2)(s_1) - (Tz_1)(s_1)\| &= \left\| \tilde{x} + \int_{t_0}^{s_1} DF(z_2(\tau),t) - \tilde{x} - \int_{t_0}^{s_1} DF(z_1(\tau),t) \right\| \\
&= \left\| \int_{t_0}^{s_1} D[F(z_2(\tau),t) - F(z_1(\tau),t)] \right\| \\
&\leq \int_{t_0}^{s_1} \|z_2(t) - z_1(t)\| dh(t) \\
&\leq \sup_{t\in[t_0-\Delta^-, t_0+\Delta^+]} \|z_2(t) - z_1(t)\| \cdot \int_{t_0}^{s_1} dh(t) \\
&= \|z_2 - z_1\| \cdot |h(s_1) - h(t_0)|.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\|(Tz_2) - (Tz_1)\| \leq \|z_2 - z_1\| \cdot [h(t_0 + \Delta^+) - h(t_0 - \Delta^-)] \leq \frac{1}{2}\|z_2 - z_1\|,$$

e, portanto, T é uma contração. Então, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach (Teorema 3.13), o resultado segue.

2° caso: quando t_0 for ponto de descontinuidade de h.

Defina uma função auxiliar $\tilde{h}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} h(t) + [h(t_0) - h(t_0^-)], & t < t_0, \\ h(t), & t = t_0, \\ h(t) - [h(t_0^+) - h(t_0)], & t > t_0. \end{cases}$$

Note que $\tilde{h}$ é uma função não decrescente e contínua em t_0. Defina, também, para todo $x \in O$,

$$\tilde{F}(x,t) = \begin{cases} F(x,t) + [F(x,t_0) - F(x,t_0^-)], & t < t_0, \\ F(x,t), & t = t_0, \\ F(x,t) - [F(x,t_0^+) - F(x,t_0)], & t > t_0. \end{cases}$$

Pelo Lema 3.12, $\tilde{F} \in \mathscr{F}(O \times [a,b], \tilde{h})$. Assim, pelo 1º caso desta demonstração, a EDO generalizada

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{d\tau} = D\tilde{F}(z,t) \\ z(t_0) = \tilde{z} \end{cases} \tag{3.17}$$

possui uma única solução, qualquer que seja $\tilde{z} \in O$. Assim, defina

$$x(t) = \begin{cases} z_1(t), & t < t_0, \\ \tilde{x}, & t = t_0, \\ z_2(t), & t > t_0, \end{cases}$$

tal que $z_1 \colon [t_0 - \Delta^-, t_0] \to X$ é solução de (3.17) com $\tilde{z} = \tilde{x} + F(\tilde{x}, t_0^-) - F(\tilde{x}, t_0)$ e $z_2 \colon [t_0, t_0 + \Delta^+] \to X$ é solução de (3.17) com $\tilde{z} = \tilde{x} + F(\tilde{x}, t_0^+) - F(\tilde{x}, t_0)$. Observe que, em ambos os casos, $\tilde{z} \in O$ por hipótese.

Resta provar que $x \colon [t_0 - \Delta^-, t_0 + \Delta^+] \to X$ é solução da EDO generalizada $\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t)$, na qual $x(t_0) = \tilde{x}$, isto é, vamos mostrar que

$$x(s) = \tilde{x} + \int_{t_0}^{s} DF(x(\tau),t),\, s \in [t_0 - \Delta^-, t_0 + \Delta^+].$$

É claro que $x(t_0) = \tilde{x}$. Agora, seja $s \in (t_0, t_0 + \Delta^+]$. Como $z_2 \colon [t_0, t_0 + \Delta^+] \to X$ é solução da EDO generalizada $\frac{dz}{d\tau} = D\tilde{F}(z,t)$, então $z_2(s) = z_2(t_0) + \int_{t_0}^{s} D\tilde{F}(z(\tau),t)$. Assim,

$$x(s) = z_2(s) = z_2(t_0) + \int_{t_0}^{s} D\tilde{F}(z(\tau),t).$$

Pelo Teorema 2.10 e usando a definição de $\tilde{F}(x,t)$ para $r > t_0$,

$$\begin{aligned}
x(s) &= z_2(t_0) + \lim_{r \to t_0^+} \left[\int_r^s D\tilde{F}(z(\tau),t) + \tilde{F}(z(t_0),r) - \tilde{F}(z(t_0),t_0) \right] \\
&= z_2(t_0) + \lim_{r \to t_0^+} \int_r^s D\tilde{F}(z(\tau),t) + \lim_{r \to t_0^+} [\tilde{F}(z(t_0),r) - \tilde{F}(z(t_0),t_0)] \\
&= z_2(t_0) + \lim_{r \to t_0^+} \int_r^s D\tilde{F}(z(\tau),t) + \lim_{r \to t_0^+} [F(z(t_0),r) - F(z(t_0),t_0^+) + F(z(t_0),t_0) - \tilde{F}(z(t_0),t_0)] \\
&= z_2(t_0) + \lim_{r \to t_0^+} \int_r^s D\tilde{F}(z(\tau),t) + F(z(t_0),t_0^+) - F(z(t_0),t_0^+) + F(z(t_0),t_0) - F(z(t_0),t_0) \\
&= z_2(t_0) + \lim_{r \to t_0^+} \int_r^s D\tilde{F}(z(\tau),t) \\
&= z_2(t_0) + \lim_{r \to t_0^+} \int_r^s D[F(z(\tau),t) + F(z(\tau),t_0) - F(z(\tau),t_0^+)].
\end{aligned}$$

Logo, tomando $\alpha(\tau) = F(z(\tau),t_0) - F(z(\tau),t_0^+)$ e usando o Corolário 2.16, obtemos

$$x(s) = z_2(t_0) + \lim_{r \to t_0^+} \int_r^s DF(z(\tau),t) = z_2(t_0) + \lim_{r \to t_0^+} \int_r^s DF(x(\tau),t).$$

Pelo Teorema 2.10, novamente, e considerando as condições iniciais $z_2(t_0)$ e $x(t_0)$,

$$x(s) = \tilde{x} + F(\tilde{x}, t_0^+) - F(\tilde{x}, t_0) + \int_{t_0}^{s} DF(x(\tau), t) - F(\tilde{x}, t_0^+) + F(\tilde{x}, t_0) = \tilde{x} + \int_{t_0}^{s} DF(x(\tau), t),$$

provando, assim, que $x\colon [t_0, t_0 + \Delta^+] \to X$ é solução da EDO generalizada $\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t)$, na qual $x(t_0) = \tilde{x}$.

Analogamente, se considerarmos $z_1\colon [t_0 - \Delta^-, t_0] \to X$ como solução da EDO generalizada $\frac{dz}{d\tau} = D\tilde{F}(z,t)$, $x\colon [t_0 - \Delta^-, t_0] \to X$ será solução da EDO generalizada $\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t)$, na qual $x(t_0) = \tilde{x}$. Portanto, existe uma única solução $x\colon [t_0 - \Delta^-, t_0 + \Delta^+] \to X$ da EDO generalizada (3.1) para a qual $x(t_0) = \tilde{x}$. $\square$

Capítulo 4

Prolongamento de Soluções e Soluções Maximais das EDOs generalizadas

Neste capítulo, veremos que as soluções das EDOs generalizadas, definidas em intervalos compactos, podem ser prolongadas para intervalos maiores. A teoria apresentada aqui será baseada em [2] e [6].

Sejam $O \subset X$ um conjunto aberto, $\Omega = O \times \mathbb{R}$ e considere a EDO generalizada

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t), \tag{4.1}$$

em que $F \in \mathscr{F}(\Omega, h)$ e $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é não decrescente.

Para o estudo de soluções maximais e, do mesmo modo que no teorema de existência e unicidade de soluções, vamos assumir que para todo $(x,t) \in \Omega$

$$x + F(x,t^-) - F(x,t) \in O \quad \text{e} \quad x + F(x,t^+) - F(x,t) \in O. \tag{4.2}$$

Observação 4.1: A condição (4.2) garante que se $x(t)$ está na trajetória de uma solução da EDO generalizada (4.1), os pontos $x + F(x,t^-) - F(x,t) \in O$ e $x + F(x,t^+) - F(x,t) \in O$ também estão na mesma trajetória e podem coincidir com $x(t)$, caso a trajetória seja contínua (à direita ou à esquerda) em t. Também é importante mencionar que assumindo a hipótese $x + F(x,t^-) - F(x,t) \in O$, podemos enfraquecer a hipótese $h\colon [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ contínua à esquerda, assumindo, apenas, que $h\colon [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ é não decrescente.

Para facilitar a notação, vamos denotar o conjunto dos pares $(x,t) \in \Omega$ que satisfazem (4.2) por Ω_F, isto é,

$$\Omega_F = \{(x,t) \in \Omega\colon x + F(x,t^-) - F(x,t) \in O \text{ e } x + F(x,t^+) - F(x,t) \in O\}. \tag{4.3}$$

Iniciamos apresentando um resultado que nos garante que a "colagem" de duas soluções da EDO generalizada (4.1) também é solução dessa mesma EDO generalizada. Esse resultado é baseado em [6, Theorem 3.1]. No entanto, a hipótese de h ser contínua à esquerda é substituída por uma condição conforme a seguir.

Teorema 4.2: *Sejam J_1, J_2 intervalos, com $\beta = \sup J_1 = \inf J_2$, $F \in \mathscr{F}(\Omega, h)$, $x\colon J_1 \to X$ e $y\colon J_2 \to X$ soluções da EDO generalizada (4.1). Além disso, defina $z\colon J_1 \cup J_2 \to X$ por*

$$z(t) = \begin{cases} x(t), & t \in J_1, \\ y(t), & t \in J_2. \end{cases} \tag{4.4}$$

(i) *Se $\beta \in J_2 \setminus J_1$ e*

$$x(\beta^-) = y(\beta) + F(y(\beta), \beta^-) - F(y(\beta), \beta) \in O \tag{4.5}$$

então a z será uma solução da EDO generalizada (4.1).

(ii) *Se $\beta \in J_1 \setminus J_2$ e*

$$y(\beta^+) = x(\beta) + F(x(\beta), \beta^+) - F(x(\beta), \beta) \in O \tag{4.6}$$

então a z será uma solução da EDO generalizada (4.1).

(iii) *Se $\beta \in J_1 \cap J_2$ e $x(\beta) = y(\beta)$, então a função $z\colon J_1 \cup J_2 \to X$ definida em (4.4) será uma solução da EDO generalizada (4.1).*

Demonstração. (i) Seja $z\colon J_1 \cup J_2 \to X$ como em (4.4). Note que z está bem definida e é uma função regrada, já que x e y são funções regradas pelo Lema 3.7. Agora, mostraremos que z é uma solução da EDO generalizada (4.1) em $J_1 \cup J_2$. Para isso, vamos mostrar que

$$\int_{s_1}^{s_2} DF(z(\tau), t) = z(s_2) - z(s_1),\ s_1, s_2 \in J_1 \cup J_2. \tag{4.7}$$

Sejam $s_1, s_2 \in J_1 \cup J_2$. Se $s_1, s_2 \in J_1$ ou $s_1, s_2 \in J_2$, então é claro que (4.7) está satisfeita. Suponha que $s_1 \in J_1$ e $s_2 \in J_2$. Pelo Teorema 2.10 e pela definição de z,

$$\begin{aligned}
\int_{s_1}^{s_2} DF(z(\tau), t) &= \int_{s_1}^{\beta} DF(z(\tau), t) + \int_{\beta}^{s_2} DF(z(\tau), t) \\
&= \lim_{c \to \beta^-} \left[\int_{s_1}^{c} DF(z(\tau), t) - F(z(\beta), c) + F(z(\beta), \beta) \right] + \int_{\beta}^{s_2} DF(z(\tau), t) \\
&= \lim_{c \to \beta^-} \left[\int_{s_1}^{c} DF(x(\tau), t) - F(y(\beta), c) + F(y(\beta), \beta) \right] + \int_{\beta}^{s_2} DF(y(\tau), t) \\
&= \lim_{c \to \beta^-} [x(c) - x(s_1) - F(y(\beta), c) + F(y(\beta), \beta)] + y(s_2) - y(\beta) \\
&= x(\beta^-) - x(s_1) - F(y(\beta), \beta^-) + F(y(\beta), \beta) + y(s_2) - y(\beta) \\
&= y(s_2) - x(s_1) + x(\beta^-) - [y(\beta) + F(y(\beta), \beta^-) - F(y(\beta), \beta)] \\
&= z(s_2) - z(s_1),
\end{aligned}$$

já que, por hipótese, $x(\beta^-) - [y(\beta) + F(y(\beta), \beta^-) - F(y(\beta), \beta)] = 0$ e, assim, conclui a demonstração deste item.

(ii) Análogo ao primeiro item.

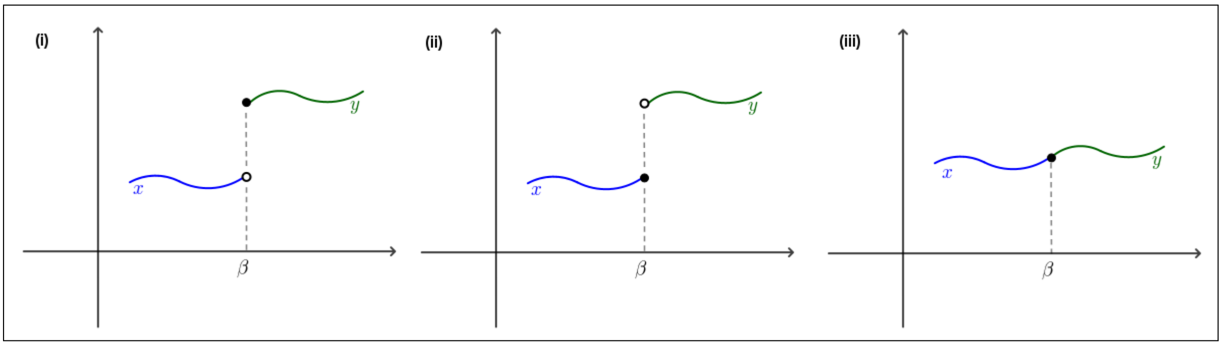
(iii) Repetindo os passos do primeiro item, basta mostrar que (4.7) vale para $s_1 \in J_1$ e $s_2 \in J_2$. Novamente, usando o Teorema 2.10 e a definição de z,

$$\begin{aligned}
\int_{s_1}^{s_2} DF(z(\tau),t) &= \int_{s_1}^{\beta} DF(z(\tau),t) + \int_{\beta}^{s_2} DF(z(\tau),t) \\
&= \int_{s_1}^{\beta} DF(x(\tau),t) + \int_{\beta}^{s_2} DF(y(\tau),t) \\
&= x(\beta) - x(s_1) + y(s_2) - y(\beta) \\
&= y(s_2) - x(s_1) \\
&= z(s_2) - z(s_1),
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

A Figura 4.1[1], a seguir, ilustra geometricamente os itens do Teorema 4.2.

Figura 4.1: Esboço do Teorema 4.2.



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Diante disso, podemos definir prolongamento de solução e solução maximal para EDOs generalizadas.

Definição 4.3 (Prolongamento de Solução): Seja $x\colon I \to X$ uma solução da EDO generalizada (4.1) no intervalo I. A solução $y\colon J \to X$ da EDO generalizada (4.1) será um *prolongamento de* x se $I \subsetneq J$ e $y|_I = x$. Se $\sup I < \sup J$, diremos que y é um prolongamento à direita de x e, de modo análogo, se $\inf J < \inf I$, diremos que y é um prolongamento à esquerda de x.

Definição 4.4 (Solução Maximal): Uma solução $x\colon J \to X$, no intervalo J, da EDO generalizada (4.1) será *maximal à direita*, se não existir prolongamento à direita de x e, de modo análogo, será *maximal à esquerda*, se não existir prolongamento à esquerda de x. Além disso, se $x\colon J \to X$ for solução maximal à direita e à esquerda, então diremos, simplesmente, que x é maximal.

Observação 4.5: Note que, quando $x\colon J \to X$ é solução da EDO generalizada (4.1), o Lema 3.8 nos diz que

$$x(s) - x(s^-) = F(x(s),s) - F(x(s),s^-), \quad s < \sup J, \tag{4.8}$$

[1]O gráfico foi feito apenas para esboçar a solução z em cada um dos casos apresentados no Teorema 4.2.

$$x(s^+) - x(s) = F(x(s), s^+) - F(x(s), s), \quad s > \inf J, \tag{4.9}$$

isto é, se s for um ponto de descontinuidade à esquerda de x, então o "salto" em s será igual a $F(x(s), s) - F(x(s), s^-)$ e se s for um ponto de descontinuidade à direita de x, então o "salto" em s será igual a $F(x(s), s^+) - F(x(s), s)$.

Deste modo, podemos ter $x_1 : J \to X$, $x_2 : J \to X$ soluções da EDO generalizada (4.1) e $s \in J$, tais que $x_1(t) = x_2(t)$, para todo $t \in J \cap (-\infty, s)$, e $x_1(s) \neq x_2(s)$. Para isso, basta que $F(x_1(s), s) - F(x_1(s), s^-) \neq F(x_2(s), s) - F(x_2(s), s^-)$, pois

$$\begin{aligned} x_1(s) - x_2(s) &= x_1(s^-) + F(x_1(s), s) - F(x_1(s), s^-) - \left[x_2(s^-) + F(x_2(s), s) - F(x_2(s), s^-)\right] \\ &= F(x_1(s), s) - F(x_1(s), s^-) - \left[F(x_2(s), s) - F(x_2(s), s^-)\right] \neq 0. \end{aligned}$$

Em outras palavras, x_1 e x_2 são soluções que coincidem para valores menores que s, mas, cada uma "salta" para um valor diferente em s.

Como estamos em busca de garantir a existência e unicidade de solução maximal, o fenômeno descrito na observação anterior não pode ocorrer. Para isso, assumiremos, ao longo deste texto, uma condição adicional, a qual descremos a seguir.

Dadas duas soluções $x : J_1 \to X$, $y : J_2 \to X$ da EDO generalizada (4.1) e $\beta \in J_1 \cap J_2$, assumiremos que:

$$\lim_{t \to \beta^-} x(t) = \lim_{t \to \beta^-} y(t) \implies y(\beta) - y(\beta^-) = F(x(\beta), \beta) - F(x(\beta), \beta^-) \tag{4.10}$$

e

$$\lim_{t \to \beta^+} x(t) = \lim_{t \to \beta^+} y(t) \implies y(\beta^+) - y(\beta) = F(x(\beta), \beta^+) - F(x(\beta), \beta). \tag{4.11}$$

Observe que tais condições garantem que quaisquer duas soluções que "saltam" de um mesmo ponto devem chegar num mesmo ponto, isto é, não podem saltar para lugares diferentes.

Vale ressaltar também que, no caso de a função h ser contínua à esquerda em β, a condição (4.10) é trivialmente satisfeita, uma vez que as soluções serão contínuas à esquerda em β. De modo análogo, se a função h for contínua à direita em β, então a condição (4.11) é trivialmente satisfeita.

As condições descritas acima nos levam a um importante resultado que nos garante que duas soluções que passam por um mesmo ponto devem coincidir na interseção de seus domínios. Esse resultado será utilizado para garantir a existência e unicidade de solução maximal mais adiante. O lema apresentado a seguir é adaptado de [6, Lemma 3.8].

Lema 4.6: *Sejam $F \in \mathscr{F}(\Omega_F, h)$, $x : I \to X$ e $y : J \to X$ soluções da EDO generalizada (4.1), na qual $x(\tau_0) = y(\tau_0) = x_0$, I, J são intervalos com $\tau_0 \in I \cap J$. Então $x(t) = y(t)$ para todo $t \in I \cap J$.*

Demonstração. Vamos mostrar que $x(t) = y(t)$ para todo $t \in I \cap J \cap [\tau_0, \infty)$. O caso $t \in (-\infty, \tau_0] \cap I \cap J$ é análogo. Seja $d = \sup I \cap J$. Se $d = \tau_0$ o resultado é trivial. Suponha $d > \tau_0$ e considere $\Lambda = \{t \in [\tau_0, d) : x(s) = y(s), s \in [\tau_0, t]\}$ e $\lambda = \sup \Lambda$. Primeiro, observe que se $\lambda \in I \cap J$ então $x(\lambda) = y(\lambda)$.

De fato, do Lema 3.8,

$$x(\lambda) = x(\lambda^-) + F(x(\lambda),\lambda) - F(x(\lambda),\lambda^-). \tag{4.12}$$

Como $x(s) = y(s)$, para todo $s \in [\tau_0, \lambda)$, então $x(\lambda^-) = \lim_{s\to\lambda^-} x(s) = \lim_{s\to\lambda^-} y(s) = y(\lambda^-)$ e, da condição (4.10), o lado direito de (4.12) é igual a $y(\lambda)$ isto é, $x(\lambda) = y(\lambda)$. Afirmamos que $\lambda = d$. De fato, se $\lambda < d$ então, pela definição de solução, $(x(\lambda),\lambda) = (y(\lambda),\lambda) \in \Omega_F$ e, pelo Teorema 3.14, existe uma única solução $z\colon [\lambda, \lambda+\delta] \to X$ da EDO generalizada (4.1) tal que $z(\lambda) = x(\lambda) = y(\lambda)$, com $\delta < d - \lambda$. Por outro lado, observe que $x|_{[\lambda,\lambda+\delta]}$ e $y|_{[\lambda,\lambda+\delta]}$ são soluções de (4.1) e, pela unicidade de soluções,

$$x(s) = y(s) = z(s),\, s \in [\lambda, \lambda+\delta].$$

Logo, $\lambda + \delta \in \Lambda$, o que é uma contradição, concluindo a demonstração. $\square$

Teorema 4.7: *Sejam $F \in \mathscr{F}(\Omega_F, h)$ e $(x_0, \tau_0) \in \Omega$. Então, existe uma única solução maximal $x\colon J \to X$ da EDO generalizada (4.1), na qual $x(\tau_0) = x_0$, J é um intervalo com $\tau_0 \in J$.*

Demonstração. Considere S o conjunto de todas as soluções $x\colon J_x \to X$ da EDO generalizada (4.1), tal que $x(\tau_0) = x_0$, J_x é um intervalo com $\tau_0 \in J_x$. Note que S é não vazio, visto que o Teorema 3.14 garante a existência e unicidade das soluções. Sejam $J = \bigcup_{y\in S} J_y$ e note que, se y e z pertencerem a S, então, pelo Lema 4.6, $y(s) = z(s)$, para todo $s \in J_y \cap J_z$. Assim, $x\colon J \to X$ dada por $x(t) = y(t)$, com $y \in S$ e $t \in J_y$, é uma solução maximal da EDO generalizada (4.1), na qual $x(\tau_0) = x_0$ com $\tau_0 \in J$.

Agora, suponha que $x_1 : J_1 \to X$ e $x_2 : J_2 \to X$ são soluções maximais da EDO generalizada (4.1), com $x_1(\tau_0) = x_2(\tau_0) = x_0$ e J_1, J_2 são intervalos tais que $\tau_0 \in J_1 \cap J_2$. Seja $z\colon J_1 \cup J_2 \to X$, dada por

$$z(t) = \begin{cases} x_1(t), & t \in J_1, \\ x_2(t), & t \in J_2. \end{cases}$$

Observe que, pelo Lema 4.6, z está bem definida e $z(\tau_0) = x_0$. Além disso, é claro que z é solução da EDO generalizada (4.1), com $z|_{J_1} = x_1$ e $z|_{J_2} = x_2$. Como x_1 e x_2 são soluções maximais, z não é um prologamento de x_1 nem de x_2, isto é, $J_1 = J_1 \cup J_2 = J_2$. Portanto, $x_1 = x_2$, o que conclui o resultado. $\square$

O resultado a seguir nos mostra que, se x for uma solução maximal à direita, então o intervalo de existência da solução x será aberto à direita. A demonstração deste foi emprestada de [2, Theorem 5.12].

Teorema 4.8: *Sejam $F \in \mathscr{F}(\Omega_F, h)$ e $x\colon J \to X$ uma solução maximal à direita da EDO generalizada (4.1). Então $\sup J \notin J$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que $\omega = \sup J \in J$. Logo, pela definição de solução, $(x(\omega), \omega) \in \Omega_F$ e, pelo Teorema 3.14, existe uma única solução $y\colon [\omega, \omega+\Delta] \to X$ da EDO generalizada (4.1) tal que $y(\omega) = x(\omega)$. Pelo Teorema 4.2,

$$z(t) = \begin{cases} x(t), & t \in J \\ y(t), & t \in [\omega, \omega + \Delta] \end{cases}$$

é uma solução da EDO generalizada (4.1), com $z(\tau_0) = x_0$. Note que, z é um prolongamento de x, que por sua vez é assumido como solução maximal, chegando a uma contradição. Portanto, $\omega \notin J$. □

Observação 4.9: De modo análogo, se $x\colon J \to X$ for uma solução maximal à esquerda da EDO generalizada (4.1) então $\inf J \notin J$. Logo, se $x\colon J \to X$ for uma solução maximal da EDO generalizada (4.1), então J é um intervalo aberto. Note que J pode ser limitado ou ilimitado.

O próximo resultado, extraído de [6, Theorem 3.11], nos garante que se uma solução for maximal à direita, então para qualquer conjunto compacto dentro do domínio da função F, a partir de um determinado ponto do intervalo, o gráfico de x não pertencerá mais a esse conjunto. Esse resultado é uma propriedade importante que nos ajuda a entender o comportamento de soluções das EDOs generalizadas a longo prazo.

Teorema 4.10: *Sejam $F \in \mathscr{F}(\Omega_F, h)$ e $x\colon J \to X$ uma solução maximal à direita da EDO generalizada* (4.1)*. Então, para cada conjunto compacto $K \subset \Omega_F$, existe $t_K \in J$ tal que $(x(t), t) \notin K$, para todo $t \in J \cap (t_K, \infty)$.*

Demonstração. Seja $\omega = \sup J$. Suponha, por contradição, que existam um conjunto compacto $K \subset \Omega_F$ e uma sequência $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset J$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = \omega$ e $(x(t_n), t_n) \in K$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como K é compacto, a sequência $\{(x(t_n), t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente, que denotaremos novamente por $\{(x(t_n), t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Assim, existe $(y, \tau) \in K$ tal que $\lim_{n\to\infty}(x(t_n), t_n) = (y, \tau)$. Em particular, $\lim_{n\to\infty} t_n = \tau$ e, portanto, $\omega = \tau < \infty$. Como $(y, \omega) = (y, \tau) \in \Omega_F$, então $y + F(y, \omega^+) - F(y, \omega) \in O$. Logo, pelo Teorema 3.14, existe $\Delta > 0$ tal que, no intervalo $[\omega, \omega + \Delta]$, existe uma única solução $z\colon [\omega, \omega + \Delta] \to X$ da EDO generalizada (4.1), com $z(\omega) = y$. Defina a função $u\colon J \cup [\omega, \omega + \Delta] \to X$ por

$$u(t) = \begin{cases} x(t), & t \in J, \\ z(t), & t \in [\omega, \omega + \Delta]. \end{cases}$$

Pelo Teorema 4.2, $u\colon J \cup [\omega, \omega + \Delta] \to X$ é uma solução da EDO generalizada (4.1) e, portanto, u é um prolongamento de x, o que nos leva a uma contradição, e conclui a demonstração. □

Observação 4.11: Vale o resultado análogo para solução maximal à esquerda, isto é, se $x\colon J \to X$ é uma solução maximal à esquerda da EDO generalizada (4.1), então para cada conjunto compacto $K \subset \Omega_F$, existe $s_K \in J$ tal que $(x(t), t) \notin K$, para todo $t \in J \cap (-\infty, s_K)$.

A seguir apresentaremos duas consequências do teorema anterior, as quais foram provadas pela primeira vez em [6]. O resultado seguinte nos diz que se a solução maximal à direita pertencer a um conjunto compacto em todo o intervalo, então esse intervalo deve ser ilimitado à direita.

Corolário 4.12: *Sejam $F \in \mathscr{F}(\Omega_F, h)$ e $x\colon J \to X$ uma solução maximal à direita da EDO generalizada* (4.1). *Se $N \subset O$ é um conjunto compacto tal que $x(t) \in N$, para todo $t \in J$, então* $\sup J = \infty$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que $\omega = \sup J < \infty$ e seja $\tau_0 \in J$ fixado. Desse modo, $K = N \times [\tau_0, \omega]$ é um subconjunto compacto de Ω_F e

$$(x(t), t) \in K, \quad t \in [\tau_0, \omega). \tag{4.13}$$

No entanto, como as hipóteses do Teorema 4.10 são satisfeitas, existe $t_K \in [\tau_0, \omega)$ tal que $(x(t), t) \notin K$, para todo $t \in (t_K, \omega)$, o que contradiz (4.13). Portanto, $\omega = \infty$. □

Observação 4.13: De modo análogo, se $x\colon J \to X$ for solução maximal à esquerda da EDO generalizada (4.1) e $N \subset O$ for um conjunto compacto tal que $x(t) \in N$, para todo $t \in J$, então $\inf J = -\infty$.

O próximo resultado nos afirma que, se uma solução maximal à direita for definida em um intervalo finito, então o gráfico de x tenderá à fronteira do conjunto Ω_F.

Corolário 4.14: *Sejam $F \in \mathscr{F}(\Omega_F, h)$ e $x\colon J \to X$ uma solução maximal à direita da EDO generalizada* (4.1). *Se $\omega = \sup J < \infty$, então existirá o limite $y = \lim_{t\to\omega^-} x(t)$ e $(y, \omega) \in \partial\Omega_F$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como h é não decrescente, o limite $\lim_{t\to\omega^-} h(t)$ existe. Assim, pela condição de Cauchy, existe $\delta > 0$ tal que $|h(t) - h(s)| < \varepsilon$, para quaisquer $t, s \in (\omega - \delta, \omega)$. Mas, pelo Lema 3.7,

$$\|x(t) - x(s)\| \leq |h(t) - h(s)| < \varepsilon,$$

para quaisquer $t, s \in (\omega - \delta, \omega)$. Logo, usando novamente a condição de Cauchy, $y = \lim_{t\to\omega^-} x(t)$ existe. Note que $(y, \omega) \in \overline{\Omega_F}$, restando apenas mostrar que $(y, \omega) \notin \Omega_F$. Suponha, por contradição, que $(y, \omega) \in \Omega_F$. Pelo Teorema 3.14, existe $\Delta > 0$ tal que, no intervalo $[\omega, \omega + \Delta]$, existe uma única solução $z\colon [\omega, \omega + \Delta] \to X$ da EDO generalizada (4.1), com $z(\omega) = y$. Defina a função $u\colon J \cup [\omega, \omega + \Delta] \to X$ por

$$u(t) = \begin{cases} x(t), & t \in J, \\ z(t), & t \in [\omega, \omega + \Delta]. \end{cases}$$

Pelo Teorema 4.2, $u\colon J \cup [\omega, \omega + \Delta] \to X$ é uma solução da EDO generalizada (4.1) e, portanto, u é um prolongamento de x, o que nos leva a uma contradição, e conclui a demonstração. □

Observação 4.15: De modo análogo, se $x\colon J \to X$ for uma solução maximal à esquerda da EDO generalizada (4.1) e $-\infty < \inf J = \alpha$, então existe o limite $y = \lim_{t\to\alpha^+} x(t)$ e $(y, \alpha) \in \partial\Omega_F$.

Finalizamos este capítulo apresentando um resultado que garante a existência de soluções maximais globais, isto é, quando o intervalo maximal de solução é ilimitado. Veja [2, Corollary 5.27] e [6, Corollary 3.14].

Corolário 4.16: *Sejam $F \in \mathscr{F}(\Omega, h)$ e $(x_0, \tau_0) \in \Omega$. Se $O = X$, então existe uma única solução $x\colon \mathbb{R} \to X$ da EDO generalizada (4.1), na qual $x(\tau_0) = x_0$.*

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que $\Omega = \Omega_F$. Para isso, basta mostrar que $\Omega \subset \Omega_F$. Seja $(z_0, s_0) \in \Omega$ arbitrário. Como h é não decrescente, então o limite $\lim_{s \to s_0^+} h(s)$ existe. Assim, pela condição de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $s, t \in (s_0, s_0 + \delta)$, então $|h(t) - h(s)| < \varepsilon$. Além disso, como $F \in \mathscr{F}(\Omega, h)$, então

$$\|F(z_0, t) - F(z_0, s)\| \leq |h(t) - h(s)| < \varepsilon,$$

para cada $t, s \in (s_0, s_0 + \delta)$. Logo, o limite $\lim_{s \to s_0^+} F(z_0, s)$ existe e denotaremos por $F(z_0, s_0^+)$. Daí, $z_0 + F(z_0, s_0^+) - F(z_0, s_0) \in X$. De modo análogo, $z_0 + F(z_0, s_0^-) - F(z_0, s_0) \in X$, isto é, $(z_0, s_0) \in \Omega_F$. Portanto, $\Omega \subset \Omega_F$.

Agora, sejam $(x_0, \tau_0) \in \Omega$. Pelo Teorema 4.7, existe uma única solução maximal $x\colon J \to X$ da EDO generalizada (4.1), para a qual $x(\tau_0) = x_0$, com $\tau_0 \in J$. Mostremos que $\omega = \sup J = \infty$. Suponha, por contradição, que $\omega < \infty$. Assim, pelo Corolário 4.14, o limite $y = \lim_{t \to \omega^-} x(t)$ existe. Sejam $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset J$ tal que $\lim_{n \to \infty} t_n = \omega$, $N = \{x(t_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{y\}$ e $K = N \times [\tau_0, \omega]$, o qual é compacto. Assim, pelo Teorema 4.10, existe $t_K \in [\tau_0, \omega)$ tal que $(x(t), t) \notin N \times [\tau_0, \omega)$, para todo $t \in (t_K, \omega)$, o que contradiz o fato de que $x(t_n) \in N$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \to \infty} t_n = \omega$. Portanto, $\omega = \infty$. De modo análogo, $-\infty = \inf J$, o que completa a prova. $\square$

Capítulo 5

Equações Diferenciais em Medida e sua correspondência com as EDOs Generalizadas

Neste capítulo, fazemos um breve estudo das equações diferenciais em medida (EDMs) e apresentaremos uma correspondência entre essas equações e as EDOs generalizadas, baseados em [2] e [6]. Para isso, considere X um espaço de Banach, $O \subset X$ um conjunto aberto, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $f\colon \Omega \to X$ uma função, em que $\Omega = O \times I$, e $g\colon I \to \mathbb{R}$ uma função não decrescente. Além disso, seja uma EDM, na forma integral, definida por

$$x(\beta) = x(\alpha) + \int_{\alpha}^{\beta} f(x(s),s)dg(s),\ \alpha,\beta \in I, \tag{5.1}$$

em que a integral $\int_{\alpha}^{\beta} f(x(s),s)dg(s)$ está no sentido da integral de Perron-Stieltjes. Iniciaremos apresentando a definição de uma solução da EDM.

Definição 5.1: Seja $O \subset X$ aberto. Uma função $x\colon J \subset I \to X$ será *solução da EDM* (5.1), se satisfazer as seguintes condições:

(i) $x \in G(J,O)$ e $(x(t),t) \in \Omega$;

(ii) a integral de Perron-Stieltjes $\int_{\alpha}^{\beta} f(x(s),s)dg(s)$ existe, para quaisquer $\alpha,\beta \in J$;

(iii) a equação (5.1) vale para quaisquer $\alpha,\beta \in J$.

Além disso, se $t_0 \in I$ e $x_0 \in O$ então dizemos que $x\colon J \subset I \to X$ é solução de (5.1) com $x(t_0) = x_0$ se $t_0 \in J$ e satisfaz a equação

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)dg(s),\ t \in J \tag{5.2}$$

A partir deste momento, dadas as funções $f\colon \Omega \to X$ e $g\colon I \to \mathbb{R}$, para quaisquer $x,y \in G(I,O)$ e $s_1,s_2 \in I$, assumiremos as seguintes condições:

(I) A função $g\colon I \to \mathbb{R}$ é não decrescente;

(II) A integral de Perron-Stieltjes $\int_{s_1}^{s_2} f(x(s),s)dg(s)$ existe;

(III) Existe uma função integrável Perron-Stieltjes $M\colon I \to \mathbb{R}$ com respeito a g tal que

$$\left\| \int_{s_1}^{s_2} f(x(s),s)dg(s) \right\| \leq \int_{s_1}^{s_2} M(s)dg(s);$$

(IV) Existe uma função integrável Perron-Stieltjes $L\colon I \to \mathbb{R}$ com respeito a g tal que

$$\left\| \int_{s_1}^{s_2} [f(x(s),s) - f(y(s),s)]dg(s) \right\| \leq \|x-y\| \int_{s_1}^{s_2} L(s)dg(s).$$

Assim como feito no contexto das EDOs generalizadas, e para facilitar a notação, diremos que $f\colon \Omega \to X$ pertence à classe $\mathscr{G}(\Omega, g)$ se as condições (I)-(IV) estão satisfeitas.

O resultado a seguir nos garante que, sob certas condições, a integral de Perron-Stieltjes $\int_{\tau_0}^{t} f(x,s)dg(s)$ pertence à classe $\mathscr{F}(\Omega,h)$. A demonstração apresentada aqui é baseada em [2, Theorem 4.11] e [6, Theorem 4.2].

Teorema 5.2: *Sejam $f \in \mathscr{G}(\Omega, g)$. Escolha um $\tau_0 \in I$ arbitrário e defina $F\colon \Omega \to X$ por*

$$F(x,t) = \int_{\tau_0}^{t} f(x,s)dg(s), \quad (x,t) \in \Omega. \tag{5.3}$$

Então, $F \in \mathscr{F}(\Omega,h)$, em que $h\colon I \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(t) = \int_{\tau_0}^{t} [M(s) + L(s)]dg(s), \quad t \in I \tag{5.4}$$

é uma função não decrescente.

Demonstração. Note que a função h está bem definida, já que, pelas condições (III) e (IV), M e L são funções Perron-Stieltjes integráveis. Além disso, h é uma função não decrescente. De fato, sejam $s_1, s_2 \in I$, $s_1 \leq s_2$, e $x \in G(I,O)$. Logo, pela condição (III),

$$0 \leq \left\| \int_{s_1}^{s_2} f(x(s),s)dg(s) \right\| \leq \int_{s_1}^{s_2} M(s)dg(s) = \int_{\tau_0}^{s_2} M(s)dg(s) - \int_{\tau_0}^{s_1} M(s)dg(s),$$

$\tau_0 \in I$, o que implica

$$\int_{\tau_0}^{s_1} M(s)dg(s) \leq \int_{\tau_0}^{s_2} M(s)dg(s),$$

isto é, para todo $t \in I$, a função $t \mapsto \int_{\tau_0}^{t} M(s)dg(s)$ é não decrescente. Assim como, pela condição (IV), para todo $t \in I$, a função $t \mapsto \int_{\tau_0}^{t} L(s)dg(s)$ também é não decrescente. Portanto, h é uma função não decrescente.

Veja também, que F está bem definida. Com efeito, dados $t \in I$ e $x \in O$, defina a função auxiliar $\alpha_x\colon I \to O$ tal que $\alpha_x(s) = x$. Primeiramente, note que $\alpha_x \in G(I,O)$. Usando a condição (II), garantimos a existência da integral $\int_{\tau_0}^{t} f(x,s)dg(s)$ e $\int_{\tau_0}^{t} f(\alpha_x(s),s)dg(s) = \int_{\tau_0}^{t} f(x,s)dg(s)$, concluindo que F está bem definida.

Agora, verificaremos que $F \in \mathscr{F}(\Omega,h)$. Dados $x \in O$ arbitrário, $s_1 \leq s_2$ e usando a condição (III), obtemos

$$\begin{aligned}
\|F(x,s_2) - F(x,s_1)\| &= \left\| \int_{\tau_0}^{s_2} f(x,s)dg(s) - \int_{\tau_0}^{s_1} f(x,s)dg(s) \right\| \\
&= \left\| \int_{s_1}^{s_2} f(x,s)dg(s) \right\| \\
&= \left\| \int_{s_1}^{s_2} f(\alpha_x(s),s)dg(s) \right\| \\
&\leq \int_{s_1}^{s_2} M(s)dg(s) \\
&\leq \int_{s_1}^{s_2} [M(s)+L(s)]dg(s) \\
&= \int_{\tau_0}^{s_2} [M(s)+L(s)]dg(s) - \int_{\tau_0}^{s_1} [M(s)+L(s)]dg(s) = h(s_2) - h(s_1).
\end{aligned}$$

Além disso, dados $x,y \in O$, $s_1 \leq s_2$ e usando a condição (IV), obtemos

$$\begin{aligned}
\|F(x,s_2) - F(x,s_1) - F(y,s_2) + F(y,s_1)\| &= \left\| \int_{\tau_0}^{s_2} f(x,s)dg(s) - \int_{\tau_0}^{s_1} f(x,s)dg(s) \right. \\
&\qquad \left. - \int_{\tau_0}^{s_2} f(y,s)dg(s) + \int_{\tau_0}^{s_1} f(y,s)dg(s) \right\| \\
&= \left\| \int_{s_1}^{s_2} [f(x,s) - f(y,s)]dg(s) \right\| \\
&= \left\| \int_{s_1}^{s_2} [f(\alpha_x(s),s) - f(\alpha_y(s),s)]dg(s) \right\| \\
&\leq \|\alpha_x - \alpha_y\| \int_{s_1}^{s_2} L(s)dg(s) \\
&\leq \|x-y\| \int_{s_1}^{s_2} [M(s)+L(s)]dg(s) \\
&= \|x-y\| [h(s_2) - h(s_1)],
\end{aligned}$$

concluindo a demonstração. □

O próximo resultado (Teorema 5.4) descreve uma relação entre a integral de Kurzweil e a integral de Perron-Stieltjes. Mas, antes, apresentaremos um lema que será fundamental para a demonstração deste resultado. Ambos podem ser encontrados em [6, Theorem 4.7].

Lema 5.3: *Sejam $f\colon \Omega \to X$ uma função integrável Perron-Stieltjes, $\tau_0 \in I$ e $F\colon \Omega \to X$ uma função definida por $F(x,t) = \int_{\tau_0}^{t} f(x,s)dg(s)$, em que $(x,t) \in \Omega$. Além disso, sejam $a,b \in I$, com $a < b$ e $\varphi\colon [a,b] \to O$ uma função escada finita. Então*

$$\int_a^b f(\varphi(s),s)dg(s) = \int_a^b DF(\varphi(\tau),t).$$

Demonstração. Suponha que $\varphi\colon [a,b] \to O$ seja uma função escada finita, então φ é uma função regrada em $[a,b]$ e, assim, a integral de Kurzweil $\int_a^b DF(\varphi(\tau),t)$ e a integral de Perron-Stieltjes $\int_a^b f(\varphi(s),s)dg(s)$ existem. Além disso, como φ é uma função escada, existem uma divisão $d = (t_i)$ e $c_i \in O$, $i = 1,...,n$, tais que $\varphi(s) = c_i$, para cada $s \in (s_{i-1}, s_i),\ i = 1,2,\dots,n$.

Se $s_{k-1} < \sigma_1 < \sigma_2 < s_k,\ k \in \{1,2,\dots,n\}$, então

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(\varphi(\tau),t) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(c_k,t) = F(c_k,\sigma_2) - F(c_k,\sigma_1).$$

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} f(\varphi(s),s)dg(s) &= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} f(c_k,s)dg(s)\\ &= \int_{t_0}^{\sigma_2} f(c_k,s)dg(s) - \int_{t_0}^{\sigma_1} f(c_k,s)dg(s)\\ &= F(c_k,\sigma_2) - F(c_k,\sigma_1).\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(\varphi(\tau),t) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} f(\varphi(s),s)dg(s).$$

Agora, seja $\sigma \in (s_{k-1}, s_k)$, $k \in \{1,2,\dots,n\}$. Pelo Teorema 2.10,

$$\begin{aligned}\int_{s_{k-1}}^{\sigma} DF(\varphi(\tau),t) &= \lim_{\xi \to s_{k-1}^+} \left[\int_{\xi}^{\sigma} DF(\varphi(\tau),t) + F(\varphi(s_{k-1}),\xi) - F(\varphi(s_{k-1}),s_{k-1})\right]\\ &= \lim_{\xi \to s_{k-1}^+} \left[\int_{\xi}^{\sigma} DF(\varphi(\tau),t) + \int_{t_0}^{\xi} f(\varphi(s_{k-1}),s)dg(s) - \int_{t_0}^{s_{k-1}} f(\varphi(s_{k-1}),s)dg(s)\right]\\ &= \lim_{\xi \to s_{k-1}^+} \left[F(c_k,\sigma) - F(c_k,\xi) + \int_{s_{k-1}}^{\xi} f(\varphi(s_{k-1}),s)dg(s)\right]\\ &= F(c_k,\sigma) - F(c_k,s_{k-1}^+)\\ &\quad + \lim_{\xi \to s_{k-1}^+} \left[\int_{t_0}^{\xi} f(\varphi(s_{k-1}),s)dg(s) - \int_{t_0}^{s_{k-1}} f(\varphi(s_{k-1}),s)dg(s)\right]\\ &= F(c_k,\sigma) - F(c_k,s_{k-1}^+) + f(\varphi(s_{k-1}),s_{k-1})\Delta^+ g(s_{k-1}),\end{aligned} \tag{5.5}$$

onde a última igualdade segue do Corolário 2.13. Por outro lado, pelo Corolário 2.13,

$$\begin{aligned}\int_{s_{k-1}}^{\sigma} f(\varphi(s),s)dg(s) - f(\varphi(s_{k-1}),s_{k-1})\Delta^+ g(s_{k-1}) &= \lim_{\xi \to s_{k-1}^+} \int_{\xi}^{\sigma} f(\varphi(s),s)dg(s)\\ &= \lim_{\xi \to s_{k-1}^+} \left[\int_{t_0}^{\sigma} f(c_k,s)dg(s) - \int_{t_0}^{\xi} f(c_k,s)dg(s)\right]\\ &= \lim_{\xi \to s_{k-1}^+} [F(c_k,\sigma) - F(c_k,\xi)]\\ &= F(c_k,\sigma) - F(c_k,s_{k-1}^+),\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_{s_{k-1}}^{\sigma} f(\varphi(s),s)dg(s) = F(c_k,\sigma) - F(c_k,s_{k-1}^{+}) + f(\varphi(s_{k-1}),s_{k-1})\Delta^{+}g(s_{k-1}). \tag{5.6}$$

Assim, pelas equações (5.5) e (5.6), obtemos

$$\int_{s_{k-1}}^{\sigma} DF(\varphi(\tau),t) = \int_{s_{k-1}}^{\sigma} f(\varphi(s),s)dg(s),$$

para todo $\sigma \in (s_{k-1},s_k)$ e $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. Analogamente, mostra-se que

$$\int_{\sigma}^{s_k} DF(\varphi(\tau),t) = \int_{\sigma}^{s_k} f(\varphi(s),s)dg(s),$$

para todo $\sigma \in (s_{k-1},s_k)$ e $k \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Daí,

$$\int_a^b DF(\varphi(\tau),t) = \sum_{k=1}^{n}\int_{s_{k-1}}^{s_k} DF(\varphi(\tau),t) = \sum_{k=1}^{n}\int_{s_{k-1}}^{s_k} f(\varphi(s),s)dg(s) = \int_a^b f(\varphi(s),s)dg(s),$$

o que conclui o resultado. □

Teorema 5.4: *Sejam $f \in \mathscr{G}(\Omega,g)$, $\tau_0 \in I$ e $F\colon \Omega \to X$ definida por $F(x,t) = \int_{\tau_0}^{t} f(x,s)dg(s)$, em que $(x,t) \in \Omega$. Se $J \subset I$ e $x\colon J \to O$ for função regrada então, dados quaisquer $a,b \in J$, tanto a integral de Kurzweil $\int_a^b DF(x(\tau),t)$ quanto a integral de Perron-Stieltjes $\int_a^b f(x(s),s)dg(s)$ existirão e serão iguais.*

Demonstração. Se $x\colon [a,b] \to O$ é uma função regrada, então existe uma sequência de funções escadas finitas $\varphi_k\colon [a,b] \to O$, $k \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|\varphi_k - x\|_\infty = \sup_{s\in[a,b]} |\varphi_k(s) - x(s)| \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} \|\varphi_k - x\|_\infty = 0.$$

Pelo Lema 5.3,

$$\int_a^b f(\varphi_k(s),s)dg(s) = \int_a^b DF(\varphi_k(\tau),t) \tag{5.7}$$

e, pelo Teorema 3.10,

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b DF(\varphi_k(\tau),t) = \int_a^b DF(x(\tau),t). \tag{5.8}$$

Assim, pelas equações (5.7) e (5.8),

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f(\varphi_k(s),s)dg(s) = \lim_{k\to\infty}\int_a^b DF(\varphi_k(\tau),t) = \int_a^b DF(x(\tau),t). \tag{5.9}$$

Por outro lado, a condição (IV) implica

$$\left\| \int_a^b [f(\varphi_k(s),s) - f(x(s),s)]dg(s) \right\| \le \|\varphi_k - x\|_\infty \int_a^b L(s)dg(s).$$

Mas, como $\lim_{k\to\infty} \|\varphi_k - x\|_\infty = 0$, segue que

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f(\varphi_k(s),s)dg(s) = \int_a^b f(x(s),s)dg(s). \tag{5.10}$$

Por (5.9) e (5.10),

$$\int_a^b DF(x(\tau),t) = \int_a^b f(x(s),s)dg(s),$$

concluindo a demonstração. □

Finalmente, apresentaremos uma correspondência entre uma solução da EDM e uma solução da EDO generalizada, cuja demonstração segue como em [2, Theorem 4.14].

Teorema 5.5: *Seja $f \in \mathscr{G}(\Omega, g)$. Então, a função $x\colon J \to X$ será uma solução da EDM (5.1) em $J \subset I$ se, e somente se, for uma solução da EDO generalizada*

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t) \tag{5.11}$$

em J, em que a função F é definida por $F(x,t) = \int_{\tau_0}^t f(x,s)dg(s)$, $(x,t) \in \Omega$, para algum $\tau_0 \in I$.

Demonstração. Suponha que $x\colon J \to X$ é uma solução da EDM (5.1). Logo, $(x(t),t) \in \Omega$. Pelo Teorema 5.4, para quaisquer $s_1, s_2 \in J$, a integral de Kurzweil $\int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau),t)$ existe e

$$x(s_2) - x(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} f(x(s),s)dg(s) = \int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau),t),$$

isto é, x é uma solução da EDO generalizada (5.11).

Agora, suponha que $x\colon J \to X$ é uma solução da EDO generalizada (5.11). Pelo Lema 3.7, $x\colon J \to X$ é uma função localmente de variação limitada e, portanto, uma função regrada. Novamente pelo Teorema 5.4,

$$x(s_2) - x(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau),t) = \int_{s_1}^{s_2} f(x(s),s)dg(s),$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in J$, isto é, x é uma solução da EDM (5.1). □

5.1 Prolongamento de Solução e Solução Maximal das EDMs

Nesta seção, dedicamo-nos ao estudo de prolongamento de soluções e soluções maximais no contexto das EDMs, tendo como principais referências [2] e [6]. Mais precisamente, veremos que os resultados obtidos no capítulo anterior a respeito das soluções maximais das EDOs generalizadas também são válidos para as EDMs, já que existe uma correspondência entre elas.

Para o estudo de soluções maximais e, assim como no contexto das EDOs generalizadas, vamos assumir que, para todo $(z,s) \in \Omega$,

$$z + f(z,s)\Delta^- g(s) \in O \quad \text{e} \quad z + f(z,s)\Delta^+ g(s) \in O. \tag{5.12}$$

Observação 5.6: Note que a condição (5.12) é igual a condição (4.2) assumida no capítulo anterior e, portanto, $\Omega = \Omega_F$. Com efeito, seja $F\colon \Omega \to X$ definida como no Teorema 5.2. Assim, para cada $(z_0, s_0) \in \Omega$,

$$\begin{aligned} z_0 + F(z_0, s_0^+) - F(z_0, s_0) &= z_0 + \lim_{s \to s_0^+} \int_{\tau_0}^{s} f(z_0, r)dg(r) - \int_{\tau_0}^{s_0} f(z_0, r)dg(r) \\ &= z_0 + f(z_0, s_0)\Delta^+ g(s_0) \in O, \end{aligned}$$

essa última igualdade vem do Corolário 2.13. Então $z_0 + F(z_0, s_0^+) - F(z_0, s_0) \in O$. De modo análogo, verifica-se que $z_0 + F(z_0, s_0^+) - F(z_0, s_0) = z_0 + f(z_0, s_0)\Delta^- g(s_0)$, concluindo que $\Omega = \Omega_F$.

Desse modo, podemos denotar o conjunto dos pares $(z,s) \in \Omega$ que satisfazem (5.12) por Ω_F, isto é,

$$\Omega_F = \{(z,s) \in \Omega \colon z + f(z,s)\Delta^- g(s) \in O \text{ e } z + f(z,s)\Delta^+ g(s) \in O\}. \tag{5.13}$$

Iniciamos apresentando os conceitos de prolongamento de solução e de solução maximal no contexto das EDMs.

Definição 5.7 (Prolongamento de Solução): Seja $x\colon I \to X$ uma solução da EDM (5.1) no intervalo I. A solução $y\colon J \to X$ da EDM (5.1) será um *prolongamento de* x se $I \subsetneq J$ e $y|_I = x$. Se $\sup I < \sup J$ dizemos que y é um prolongamento à direita de x e, de modo análogo, se $\inf J < \inf I$ dizemos que y é um prolongamento à esquerda de x.

Definição 5.8 (Solução Maximal): Uma solução $x\colon J \to X$, no intevalo J, da EDM (5.1) será *maximal à direita* se não existir prolongamento à direita de x e, de modo análogo, será *maximal à esquerda* se não existir prolongamento à esquerda de x. Além disso, se $x\colon J \to X$ for solução maximal à direita e à esquerda então diremos, simplesmente, que x é maximal.

Vejamos, a seguir, um resultado que garante uma correspondência entre soluções maximais entre EDMs e EDOs generalizadas.

Lema 5.9: *Seja $f \in \mathcal{G}(\Omega, g)$. Então, a função $x\colon J \to X$ será uma solução maximal à direita (à esquerda) da EDM (5.1) em $J \subset I$ se, e somente se, for uma solução maximal à direita (à esquerda) da EDO generalizada (5.11).*

Demonstração. Primeiramente, suponha que $x\colon J \to X$ seja solução maximal à direita da EDM (5.1). Então, pelo Teorema 5.5, $x\colon J \to X$ é uma solução da EDO generalizada (5.11). Suponha, por absurdo, que a solução $y\colon \tilde{J} \to X$ da EDO generalizada (5.11) seja um prolongamento à direita da solução $x\colon J \to X$. Mas, pelo Teorema 5.5, y é uma solução da EDM (5.1), o que contradiz a maximalidade à direita da solução x na EDM (5.1). De modo análogo mostra-se o outro lado da equivalência. □

O próximo resultado, emprestado de [2, Theorem 5.21], garante a existência e unicidade de solução maximal da EDM (5.1).

Teorema 5.10: *Sejam $f \in \mathscr{G}(\Omega_F, g)$ e seja $(x_0, \tau_0) \in \Omega$. Então, existe uma única solução maximal $x\colon J \to X$ da EDM (5.1), na qual $x(\tau_0) = x_0$, J é um intervalo com $\tau_0 \in J$.*

Demonstração. Considere a EDO generalizada

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = DF(x,t), \\ x(\tau_0) = x_0, \end{cases} \tag{5.14}$$

em que $F\colon \Omega \to X$ é dada por $F(x,t) = \int_{\tau_0}^{t} f(x,s)dg(s)$, para todo $(x,t) \in \Omega$. Pelo Teorema 5.2, $F \in \mathscr{F}(\Omega, h)$, em que h é uma função não decrescente, e, pela Observação 5.6, $\Omega = \Omega_F$. Como as hipóteses do Teorema 4.7 são satisfeitas, então existe uma única solução maximal $x\colon J \to X$ da EDO generalizada (5.14), em que J é um intervalo com $\tau_0 \in J$. O resultado segue do Lema 5.9. □

O próximo resultado, similar ao Teorema 4.8, afirma que o intervalo da existência da solução maximal à direita é aberto à direita. A demonstração deste segue as ideias de [2, Theorem 5.23] e [6, Theorem 4.13]

Teorema 5.11: *Sejam $f \in \mathscr{G}(\Omega_F, g)$ e $x\colon J \to X$ uma solução maximal à direita da EDM (5.1). Então $\sup J \notin J$.*

Demonstração. Se $x\colon J \to X$ é uma solução maximal à direita da EDM (5.1), então, pelo Lema 5.9, $x\colon J \to X$ é uma solução maximal à direita da EDO generalizada (5.14), em que $F\colon \Omega \to X$ é dada por $F(x,t) = \int_{\tau_0}^{t} f(x,s)dg(s)$, para todo $(x,t) \in \Omega$. Pelo Teorema 5.2, $F \in \mathscr{F}(\Omega, h)$, em que $h\colon I \to \mathbb{R}$ é uma função não decrescente. Além disso, pela Observação 5.6, $\Omega = \Omega_F$. Como as hipóteses do Teorema 4.8 são satisfeitas, então $\sup J \notin J$. □

Observação 5.12: De modo análogo, se $x\colon J \to X$ for uma solução maximal à esquerda da EDM (5.1), então $\inf J \notin J$. Logo, se $x\colon J \to X$ for uma solução maximal da EDM (5.1), então J é um intervalo aberto. Note que J pode ser limitado ou ilimitado.

No contexto das EDMs, o gráfico das soluções maximais também "escapa" do conjunto compacto depois de um certo tempo. Isso é o que garante o resultado a seguir e pode ser encontrado em [2, Theorem 5.24] e [6, Theorem 4.14].

Teorema 5.13: *Sejam $f \in \mathscr{G}(\Omega_F, g)$ e $x\colon J \to X$ uma solução maximal à direita da EDM (5.1). Então, para cada conjunto compacto $K \subset \Omega_F$, existe $t_K \in J$ tal que $(x(t),t) \notin K$, para todo $t \in J \cap (t_K, \infty)$.*

Demonstração. Sejam K um subconjunto compacto de Ω_F e $F\colon \Omega \to X$ uma função definida por $F(x,t) = \int_{\tau_0}^{t} f(x,s)dg(s)$, para todo $(x,t) \in \Omega$. Pelo Teorema 5.2, $F \in \mathscr{F}(\Omega,h)$, em que $h\colon I \to \mathbb{R}$ é uma função não decrescente, e pela Observação 5.6, $\Omega = \Omega_F$. Além disso, como $x\colon J \to X$ é solução maximal à direita da EDM (5.1), então, pelo Lema 5.9, $x\colon J \to X$ é uma solução maximal à direita da EDO generalizada (5.14). Portanto, como as hipóteses do Teorema 4.10 são satisfeitas, existe $t_K \in J$ tal que $(x(t),t) \notin K$, para todo $t \in J \cap (t_K, \infty)$. □

Observação 5.14: Vale o resultado análogo para solução maximal à esquerda, isto é, se $x\colon J \to X$ é uma solução maximal à esquerda da EDM (5.1), então para cada conjunto compacto $K \subset \Omega_F$, existe $s_K \in J$ tal que $(x(t),t) \notin K$, para todo $t \in J \cap (-\infty, s_K)$.

Como consequência do teorema anterior, temos os seguintes resultados.

Corolário 5.15: *Sejam $f \in \mathscr{G}(\Omega_F, g)$ e $x\colon J \to X$ uma solução maximal à direita da EDM* (5.1). *Se $N \subset O$ é um conjunto compacto tal que $x(t) \in N$, para todo $t \in J$, então $\sup J = \infty$.*

Demonstração. Sejam $x(t) \in N$, para todo $t \in J$, em que N é um conjunto compacto de O, e $F\colon \Omega \to X$ uma função dada por $F(x,t) = \int_{\tau_0}^{t} f(x,s)dg(s)$, para todo $(x,t) \in \Omega$. Pelo Teorema 5.2, $F \in \mathscr{F}(\Omega,h)$, em que $h\colon I \to \mathbb{R}$ é uma função não decrescente, e pela Observação 5.6, $\Omega = \Omega_F$. Além disso, como $x\colon J \to X$ é solução maximal à direita da EDM (5.1), então, pelo Lema 5.9, $x\colon J \to X$ é uma solução maximal à direita da EDO generalizada (5.14). Portanto, pelo Corolário 4.12, $\sup J = \infty$. □

Observação 5.16: De modo análogo, se $x\colon J \to X$ for solução maximal à esquerda da EDM (5.1) e $N \subset O$ for um conjunto compacto tal que $x(t) \in N$, para todo $t \in J$, então $\inf J = -\infty$.

Corolário 5.17: *Sejam $f \in \mathscr{G}(\Omega_F, g)$ e $x\colon J \to X$ uma solução maximal à direita da EDM* (5.1). *Se $\omega = \sup J < \infty$, então existe o limite $y = \lim_{t\to\omega^-} x(t)$ e $(y,\omega) \in \partial\Omega_F$.*

Demonstração. Sejam $\omega < \infty$ e $x\colon J \to X$ uma solução maximal à direita da EDM (5.1). Pelo Lema 5.9, $x\colon J \to X$ é uma solução maximal à direita da EDO generalizada (5.14), em que $F\colon \Omega \to X$ é dada por $F(x,t) = \int_{\tau_0}^{t} f(x,s)dg(s)$, para todo $(x,t) \in \Omega$. Pelo Teorema 5.2, $F \in \mathscr{F}(\Omega,h)$, em que $h\colon I \to \mathbb{R}$ é uma função não decrescente. Além disso, pela Observação 5.6, $\Omega = \Omega_F$. Como as hipóteses do Corolário 4.14 são satisfeitas, o resultado segue. □

Observação 5.18: De modo análogo, se $x\colon J \to X$ for uma solução maximal à esquerda da EDM (5.1) e $-\infty < \inf J = \alpha$, então existe o limite $y = \lim_{t\to\alpha^+} x(t)$ e $(y,\alpha) \in \partial\Omega_F$.

Finalizamos este capítulo mostrando que o resultado que nos garante a existência de soluções maximais globais das EDOs generalizadas também é válido para as EDMs. Veja [2, Corollary 5.27] e [6, Corollary 4.17].

Corolário 5.19: *Sejam $f \in \mathscr{G}(\Omega, g)$ e $(x_0, \tau_0) \in \Omega$. Se $O = X$, então existirá uma única solução $x\colon \mathbb{R} \to X$ da EDM* (5.1), *na qual $x(\tau_0) = x_0$.*

Demonstração. Sejam $(x_0, \tau_0) \in \Omega$ e $F\colon O \times \Omega \to X$ dada por $F(x,t) = \int_{\tau_0}^{t} f(x,s)dg(s)$, para todo $(x,t) \in \Omega$. Pelo Teorema 5.2, $F \in \mathscr{F}(\Omega, h)$, em que $h\colon I \to \mathbb{R}$ é uma função não decrescente, e pela Observação 5.6, $\Omega = \Omega_F$. Assim, pelo Corolário 4.16, existe uma única solução $x\colon \mathbb{R} \to X$ da EDO generalizada (5.14). Portanto, pelo Lema 5.9, o resultado segue. $\square$

Concluímos, por meio deste estudo teórico, que as EDOs generalizadas desempenham um papel fundamental na pesquisa matemática, especialmente em sua correspondência com outras classes de equações, permitindo a ampliação das técnicas de análise e solução. Para mais aplicações de equações relacionadas às EDOs generalizadas, sugere-se ao leitor consultar as referências bibliográficas aqui apresentadas, com destaque em [2].

Referências Bibliográficas

[1] AFONSO, S. M., BONOTTO, E. M., FEDERSON, M. e SCHWABIK, Š.: *Discontinuous local semiflows for Kurzweil equations leading to LaSalle's invariance principle for differential systems with impulses at variable times*. Journal of Differential Equations, 250(7):2969–3001, 2011.

[2] BONOTTO, E. M., FEDERSON, M. e MESQUITA, J. G.: *Generalized Ordinary Differential Equations in Abstract Spaces and Applications*. John Wiley & Sons, Hoboken, 2021.

[3] BOTELHO, G., PELLEGRINO, D. e TEIXEIRA, E.: *Fundamentos de Análise Funcional*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2012.

[4] COLLEGARI, R.: *Equações diferenciais ordinárias generalizadas lineares e aplicações às equações diferenciais funcionais lineares*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 2014.

[5] DIEUDONNÉ, J.: *Foundations of Modern Analysis*, volume 10 of Pure and Applied Mathematics. Academic Press, Nova York, Londres, 1960.

[6] FEDERSON, M., GRAU, R. e MESQUITA, J. G.: *Prolongation of solutions of measure differential equations and dynamic equations on time scales*. Mathematische Nachrichten, 292(1):22–55, 2019.

[7] FRAŇKOVÁ, D.: *Regulated Functions with Values in Banach Space*. Mathematica Bohemica, 144(4):437–456, 2019.

[8] HÖNIG, C. S.: *Volterra Stieltjes-Integral Equations: Functional Analytic Methods; Linear Constraints*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1975.

[9] KREYSZIG, E.: *Introductory Functional Analysis with Applications*, volume 17. John Wiley & Sons, Nova York, 1991.

[10] KURZWEIL, J.: *Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter*. Czechoslovak Mathematical Journal, 7(3):418–449, 1957.

[11] KURZWEIL, J.: *Generalized ordinary differential equations*. Czechoslovak Mathematical Journal, 8(3):360–388, 1958.

[12] MEGGINSON, R. E.: *An Introduction to Banach Space Theory*, volume 183 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, Nova York, 1998.

[13] MONTEIRO, G. A., SLAVÍK, A. e TVRDÝ, M.: *Kurzweil-Stieltjes Integral: Theory and Applications*. World Scientific, Hackensack, 2019.

[14] SCHWABIK, Š.: *Generalized Ordinary Differential Equations*, volume 5 of Series in Real Analysis. World Scientific, River Edge, 1992.