

Universidade Federal de Uberlândia

Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal

Curso de Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso

Cônicas não degeneradas do ponto de vista da propriedade foco-diretriz

por

Laurinda Aparecida Ferreira de Morais

Bacharelado em Matemática - Ituiutaba - MG

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Tânia Maria Machado de Carvalho

Cônicas não degeneradas do ponto de vista da propriedade foco-diretriz

Este exemplar corresponde à redação final do Trabalho de Conclusão de Curso devidamente corrigido e defendido por **Laurinda Aparecida Ferreira de Moraes** e aprovado pela comissão julgadora.

Ituiutaba, 29 de junho de 2023.



Prof. Dra. Tânia Maria M. de Carvalho

Banca examinadora:

Prof^ª. Dr^ª. Tânia Maria Machado de
Carvalho

Prof^ª. Dr^ª. Evaneide Alves Carneiro

Prof. Dr. Wallisom da Silva Rosa

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal, UFU como requisito parcial para obtenção do título de **Bacharelado em Matemática**.

À minha orientadora

Tânia

RESUMO

O objetivo do presente trabalho é dar um enfoque geométrico às cônicas, abordando-as por meio da *propriedade foco-diretriz*. É apresentada uma definição geral e, posteriormente, definições específicas para cada uma das cônicas não degeneradas a partir da relação entre o foco e a respectiva diretriz. Além disso, são abordadas propriedades dessas curvas que permitem estabelecer conexões entre as definições aqui apresentadas e as definições convencionais encontradas em bibliografias e nos cursos de geometria analítica. Também é evidenciado o conceito de diretriz, apresentando uma definição de diretriz de uma cônica como lugar geométrico. A metodologia empregada na pesquisa é de caráter bibliográfico, tendo, como principal referência, um tratado geométrico sobre cônicas.

Palavras chaves: cônicas; propriedade foco-diretriz; diretriz; enfoque geométrico; corda-focal.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Representação geométrica da média harmônica.	7
1.2	Representação do teorema fundamental da semelhança de triângulos.	8
1.3	Os segmentos AD , BD e CD possuem a mesma medida.	10
1.4	A bissetriz externa do ângulo AOB é perpendicular à bissetriz interna desse ângulo.	11
1.5	Representação do teorema da bissetriz interna de um triângulo.	11
1.6	Representação do teorema da bissetriz externa de um triângulo.	13
1.7	O segmento $P\bar{P}$ é uma corda focal, o segmento $Q\bar{Q}$ é uma corda supra-focal e a corda $H\bar{H}$ é o <i>latus rectum</i> de uma hipérbole.	16
1.8	Construção de um ponto P da cônica.	18
1.9	Elipse, parábola e hipérbole, respectivamente, construídas por meio da propriedade foco-diretriz.	18
1.10	Ponto P' simétrico ao ponto P com relação ao eixo da cônica.	20
1.11	A reta s intersecta a cônica em P e P'	21
1.12	A reta $M'F$ intersecta a cônica em R e R'	22
1.13	Construção de um segundo ponto da cônica que pertence à reta KP	23
1.14	Construção do <i>latus rectum</i>	25
2.1	FH é a bissetriz externa do ângulo $PF P'$	27
2.2	FH é a bissetriz interna do ângulo $PF P'$	28
2.3	Interseção de uma cônica com uma reta.	29
2.4	O ângulo MFN é um ângulo reto (caso i).	30

2.5	O ângulo MFN é um ângulo reto (caso ii).	31
2.6	O ângulo MFN é um ângulo reto (caso iii).	31
2.7	O ângulo MFN é um ângulo reto (caso iv).	32
2.8	Interseção das retas que unem as extremidades de duas cordas supra-focais caso (i).	33
2.9	Interseção das retas que unem as extremidades de duas cordas supra-focais caso (ii).	34
2.10	Interseção das retas que unem as extremidades de duas cordas supra-focais caso (iii).	35
2.11	Quando P se aproxima de V , a distância de M a A "tende ao infinito" enquanto o ângulo entre a reta PM e o eixo "tende a 90° ".	36
2.12	Reta tangente à cônica no vértice, paralela à diretriz.	37
2.13	As retas tangentes nas extremidades de uma corda focal se intersectam na diretriz.	38
2.14	TQ e TQ' são tangentes à cônica nos pontos Q e Q' , respectivamente.	39
2.15	P não está no mesmo semiplano que a diretriz.	41
2.16	O ponto P e a reta diretriz estão no mesmo semiplano.	41
2.17	O segmento PF é um <i>semilatus rectum</i>	42
2.18	Os ângulos JFP e JFP' são congruentes.	43
2.19	O ponto J equidista das retas FP e FP'	44
2.20	FM está para JN assim como VF está para VA	45
2.21	$J\bar{M}$ está para JN assim como VF está para VA	46
2.22	As retas tangentes em P e P' se intersectam em J	47
2.23	FE está para FP assim como VF está para VA	48
2.24	O segmento PL possui a mesma medida do <i>semilatus rectum</i>	49
2.25	O ponto Q é o ponto médio do segmento BB'	51
2.26	A reta JQ intersecta a corda PP' em seu ponto médio.	52
2.27	A reta s intersecta a corda RR' em seu ponto médio.	53
2.28	O <i>semilatus rectum</i> é a média harmônica entre PF e $P'F$	55
2.29	O <i>latus rectum</i> é a corda focal de menor comprimento.	56
2.30	FS é a média harmônica entre PS e $P'S$	57
3.1	Construção da parábola usando a mediatriz do segmento FK	60
3.2	A reta tangente a uma cônica no ponto P bissecta o ângulo FPK	62
3.3	Construção de um segundo vértice sobre o eixo da elipse e da hipérbole.	64

3.4	As retas HF e $H'F$ são ortogonais	66
3.5	Caso i) F está entre V e V'	67
3.6	Caso ii) V está entre F e V'	68
3.7	A elipse é simétrica em relação ao eixo menor.	72
3.8	Os segmentos PF e QF' são congruentes.	73
3.9	A reta t é a bissetriz externa do ângulo FPF'	75
3.10	PN está para QN assim como BC está para VC	78
3.11	O centro da elipse é o ponto médio de seus diâmetros.	79
3.12	As retas tangentes nas extremidades de PCP' são paralelas.	81
3.13	O triângulo FBC é retângulo com hipotenusa BF	84
3.14	Hipérbole e seu elementos.	85
3.15	O triângulo VBC é retângulo com hipotenusa sendo o segmento VB	86
3.16	A hipérbole é simétrica em relação à reta suporte de seu eixo conjugado.	87
3.17	A reta t é a bissetriz do ângulo FPF'	88
3.18	A reta t é a bissetriz do ângulo FPF'	89
3.19	O centro da hiperbole é o ponto médio de seus diâmetros.	90
3.20	As retas tangentes nas extremidades da corda PCP' são paralelas.	92
3.21	Os diâmetros de $PRP'R'$ se intersectam em C	96
3.22	A corda $P'R'$ é simétrica à corda PR com relação ao centro C	97
3.23	A reta JM intersecta $P'R'$ em M'	98
3.24	A reta MT é paralela ao eixo da parábola.	99

CONTEÚDO

Lista de Figuras	ii
1 Seções cônicas	4
1.1 Pré-requisitos	5
1.2 Propriedade foco-diretriz	15
1.3 Construções	17
1.3.1 Construção geométrica de uma cônica por meio da propriedade foco-diretriz.	17
1.3.2 Construção geométrica de um segundo ponto da cônica sobre a perpendicular à diretriz pelo ponto P	22
1.3.3 Construção geométrica do <i>latus rectum</i> da cônica.	24
2 Algumas propriedades das cônicas não degeneradas	26
2.1 Tangentes às cônicas	35
2.2 Algumas propriedades envolvendo Média Harmônica	54
3 Cônicas centradas e não centradas	59
3.1 Parábola (cônicas não centradas)	59
3.1.1 Construção da parábola	60
3.1.2 Algumas definições e propriedades da parábola	61
3.2 Cônicas centradas	62
3.2.1 Construção de um segundo vértice de uma cônica centrada	63

3.2.2	Algumas definições e propriedades das cônicas centradas	65
3.2.3	Elipses	71
3.2.4	Hipérboles	84
3.3	Outros resultados e observações	95
	Considerações	101
	Referências Bibliográficas	102

INTRODUÇÃO

As curvas hoje conhecidas como *cônicas* (ou seções cônicas) começaram a ser estudadas na Grécia antiga. Acredita-se que esses estudos se iniciaram a partir das tentativas de Menaecmo (350 a. C.) em solucionar um dos três problemas clássicos da antiguidade: a duplicação do cubo (veja [3]). Atualmente, sabe-se que não é possível resolver esse problema por métodos estritamente euclidianos, como acreditavam os matemáticos da época. O problema atraiu a atenção de muitos matemáticos, dentre eles, Menaecmo, que se destacou pelas tentativas de solucionar o problema a partir de interseções de um plano com um cone, fato que justifica o nome *seções cônicas*, ou simplesmente *cônicas*. Por esse motivo, Menaecmo é considerado o descobridor das cônicas. Porém, os nomes de Euclides, Arquimedes e Apolônio também se destacam por contribuições nos estudos dessas curvas.

As interseções de um plano com um cone podem resultar em: uma elipse, uma hipérbole, uma parábola, um ponto, duas retas concorrentes, uma reta ou uma circunferência. As elipses, parábolas e hipérbolas são chamadas de *cônicas não degeneradas*, enquanto que as demais são ditas *cônicas degeneradas*.

As cônicas desempenham um papel fundamental em várias áreas da matemática e da física, possuindo aplicações em óptica, mecânica celeste, engenharia, dentre outras. Suas formas e propriedades têm sido exploradas e apreciadas ao longo dos séculos devido às suas aplicações práticas e riqueza intrínseca.

As cônicas, além de serem obtidas por meio de seções de um cone por um plano, podem ser construídas com régua e compasso, de forma totalmente independente do cone, a partir de suas respectivas propriedades.

Enquanto a definição da parábola exprime a relação das distâncias de seus pontos a um ponto fixo, chamado foco, e de uma reta fixa, denominada diretriz, as definições de elipse e hipérbole, comumente apresentadas nos cursos de geometria analítica, exprimem a relação das distâncias de seus pontos a dois pontos fixos, chamados de focos. Em outras palavras, o conceito de diretriz não aparece, explicitamente, nas definições usuais das elipses e hipérbolas.

Neste trabalho é evidenciado o conceito de diretriz de uma cônica, apresentando uma definição geral dessas curvas a partir da relação entre o foco e a respectiva diretriz, a qual ao longo do texto será chamada de *propriedade foco-diretriz*. A diretriz, do ponto de vista das cônicas como seções de um cone, é a reta de interseção do plano que contém a cônica com o plano que contém uma *seção paralela* (circunferência de interseção entre o cone e uma esfera interior ao cone) de uma esfera que passa pelo respectivo foco (mais detalhes sobre essa relação pode ser encontrada na referência [2]). É apresentado ainda um importante resultado que permite que a diretriz de uma cônica seja definida como um lugar geométrico. Este resultado foi apresentado na XIII Semana de Matemática do Pontal (XIII SEMAP) e publicado nos anais do evento. Foi realizada uma busca em diversas bibliografias e constatou-se que a *definição da diretriz como um lugar geométrico*, apresentada no capítulo 2, caso exista, não é comumente conhecida. Além disso, no decorrer do trabalho percebeu-se que era possível apresentar uma demonstração, geométrica, baseada no conceito de *média harmônica*, de que o *latus rectum* é a corda focal de menor comprimento. Buscando sobre tal propriedade percebeu-se a ausência de uma abordagem geométrica; geralmente ela é apresentada como uma definição ou é demonstrada por meios puramente algébricos.

São apresentadas diversas demonstrações de resultados que auxiliam na compreensão das propriedades das cônicas e também as demonstrações de propriedades utilizadas nas definições das cônicas. Como resultado, estabelece-se uma equivalência entre as definições geralmente estudadas nos cursos de geometria analítica e as definições aqui apresentadas, as quais envolvem a *propriedade foco-diretriz*.

A principal referência para o desenvolvimento desse trabalho foi o livro *Conic Sections Treated Geometrically*, do autor W. H. Besant([1]), disponibilizado pelo Projeto Gutenberg¹. Compreender o conteúdo do livro foi um desafio significativo devido a duas razões

¹O Projeto Gutenberg digitaliza e distribui livros em formatos digitais, de forma livre, proporcionando acessibilidade a uma ampla gama de obras

principais. Em primeiro lugar, trata-se de uma obra datada de 1895, que pode ser considerada antiga, o que implica em um estilo de escrita diferente dos padrões atuais, o que exigiu um esforço extra para a compreensão do material. Além disso, o livro está escrito em inglês, fato que representou um desafio adicional aos estudos da pesquisa. Reconhecendo a importância de fornecer uma abordagem clara e concisa, foram incluídas explicações adicionais e exemplos ilustrativos, buscando-se, no presente trabalho, suprir as lacunas de detalhes encontradas na fonte, visando tornar a abordagem mais acessível e compreensível para estudantes de graduação.

O presente trabalho, tem um enfoque primordialmente geométrico, evitando o uso de ferramentas puramente algébricas, sendo a geometria euclidiana, a principal ferramenta utilizada para explorar as propriedades das cônicas.

Todas as figuras aqui apresentadas foram criadas utilizando o software GeoGebra, com o objetivo de facilitar a visualização e compreensão do conteúdo abordado. Quanto aos procedimentos de estudo, a pesquisa é de caráter bibliográfico.

O presente trabalho está dividido da seguinte maneira:

- No capítulo 1, são apresentados alguns pré-requisitos, incluindo algumas definições e teoremas da geometria euclidiana que são extrínsecos à teoria das cônicas. Posteriormente, é apresentada uma definição geral das cônicas por meio da propriedade foco-diretriz, juntamente com algumas construções que exploram essa propriedade.
- No capítulo 2, são realizados estudos referentes às propriedades das cônicas, explorando suas características compartilhadas, incluindo propriedades envolvendo retas tangentes e média harmônica, e estabelecendo as bases para estudos de propriedades específicas para cada uma das curvas.
- No capítulo 3, as cônicas são divididas em *centradas*, que são as elipses e hipérbolas, e *não centradas*, que são as parábolas. Nesse capítulo é apresentada uma definição para cada uma das cônicas, por meio da propriedade foco-diretriz, explorando propriedades específicas de cada uma, além de estabelecer, para cada uma, a equivalência com as definições dessas curvas utilizadas nos cursos de geometria analítica.

CAPÍTULO 1

SEÇÕES CÔNICAS

Neste capítulo será apresentada uma construção das cônicas por meio da *propriedade foco-diretriz*. Tal propriedade permite estudar as cônicas sem a necessidade de conhecer seu traço e sem fazer distinção ao tipo da cônica (parábola, elipse ou hipérbole). Esta é a propriedade que permite estabelecer o que se conhece por *definição unificada das cônicas*.

No que se segue, ao longo do texto, todos os objetos geométricos considerados estarão em um mesmo plano. A palavra *curva*, eventualmente será usada como sinônimo de cônica.

Os pontos serão denotados por letras maiúsculas. As retas serão denotadas por uma letra minúscula, ou, no caso em que se tratar de reta determinada por dois pontos A e B , ela poderá ser expressa como *reta* AB , ou simplesmente \overleftrightarrow{AB} , enquanto que a semirreta de origem em A na direção de um ponto B é expressa por \overrightarrow{AB} . Um segmento de reta determinado por A e B poderá ser expresso como *segmento* AB ou simplesmente \overline{AB} , enquanto que a medida desse segmento será expressa por AB . Para um ângulo de vértice A , determinado por três pontos A , B e C , cujos lados são as semirretas AB e AC , serão utilizadas as notações \widehat{BAC} ou, simplesmente, *ângulo* BAC , e sua medida será denotada por $\angle BAC$. O símbolo $\triangle ABC$ denotará o triângulo de vértices A , B e C . As cordas de extremidades P e P' e passando por um ponto Q específico, serão expressas como $\overline{PQP'}$.

1.1 Pré-requisitos

Definição 1.1. (*Ângulo externo*) Os ângulos externos ao ângulo AOB são os ângulos AOC e BOD , tais que O está entre B e C , e O está entre A e D , respectivamente.

Definição 1.2. (*Bissetriz e bissetriz externa*) A bissetriz de um ângulo AOB é a reta que contém uma semirreta OC , com C no interior de \widehat{AOB} , tal que $\widehat{AOC} \equiv \widehat{BOC}$, isto é, $\angle AOC = \angle BOC$. A reta que divide cada um dos ângulos externos ao ângulo AOB em dois ângulos de mesma medida é denominada a bissetriz externa do ângulo AOB .

Definição 1.3. Sejam A , B e O três pontos distintos de uma circunferência c . Um ângulo AOB inscrito na circunferência c é um ângulo cujo vértice é o ponto O e cujos lados intersectam a circunferência em A e B . Quando A e B são as extremidades de um diâmetro, diz-se que \widehat{AOB} está inscrito em uma semicircunferência de c .

Dois pontos de uma circunferência determinam dois arcos em uma circunferência. O arco que não contém o ponto O é chamado de arco correspondente ao ângulo inscrito na circunferência. Diz-se, nesse caso, que o ângulo está inscrito no arco.

Lema 1.4. Todo ângulo inscrito em uma semicircunferência é um ângulo reto.

Observação 1.5. Segue do lema 1.4 e do fato de que três pontos distintos e não colineares determinam uma circunferência de forma única, que todo triângulo retângulo pode ser inscrito em uma semicircunferência, cuja medida do diâmetro é igual à medida da hipotenusa do triângulo.

Lema 1.6. Ângulos inscritos em um mesmo arco são congruentes.

Os lemas 1.4 e 1.6 são, na verdade, corolários de um teorema que afirma que a medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é a metade da medida do seu arco correspondente, cuja demonstração pode ser encontrada na referência [5].

Definição 1.7. (*Reta suporte de um segmento*) A reta que contém os extremos (e portanto todos os pontos) de um segmento AB é chamada de *reta suporte* de \overline{AB} .

Definição 1.8. (*Média geométrica*) Seja $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ um conjunto formado por n elementos não nulos e positivos (ou seja, $x_i \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall i = 1, \dots, n$), onde $n > 1$. A média geométrica entre os elementos de X é definida por

$$g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

A média geométrica também é conhecida como *média proporcional*.

Mais detalhes, incluindo uma interpretação geométrica da média proporcional entre a medida de dois segmentos, pode ser encontrada na referência [4].

A demonstração do teorema a seguir (teorema 1.9) pode ser encontrada na referência [5].

Teorema 1.9. Seja ABC um triângulo cujo ângulo BAC é reto. Seja ainda D um ponto sobre o lado BC tal que o segmento AD é a altura desse triângulo com relação à hipotenusa. Então AD é a média geométrica (ou média proporcional) entre BD e BC .

Definição 1.10. (Média harmônica) Seja $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ um conjunto formado por n elementos não nulos, onde $n > 1$. A média harmônica h entre os elementos de X é dada pela razão entre n , e a soma dos inversos de todos esses elementos. Ou seja,

$$h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

Observe que quando $n = 2$ a seguinte relação é equivalente à relação apresentada na definição 1.10:

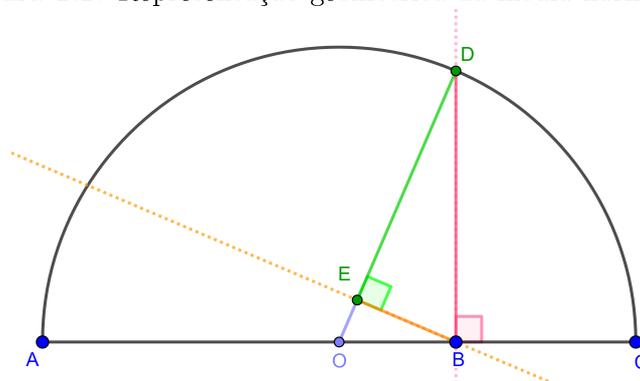
$$h = 2 \cdot \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2}.$$

A seguir, será feita a representação e interpretação geométrica da média harmônica:

Sejam AB e BC dois segmentos colineares, e O o ponto médio do segmento AC . Logo é possível construir uma semicircunferência de centro O e raio AC (veja a figura 1.1). Sejam r a reta perpendicular ao segmento AC , passando por B , D o ponto de interseção de r com a semicircunferência, e E o pé da perpendicular baixada de B ao segmento OD .

Afirmção 1.11. A medida do segmento DE é a média harmônica entre AB e BC .

Figura 1.1: Representação geométrica da média harmônica.



Fonte: Elaborada pela autora.

Demonstração. Os triângulos OBD e DEB são semelhantes pelo caso $A.A.A.$, pois $\widehat{OBD} \equiv \widehat{BED} \equiv 90^\circ$ (por construção), e o ângulo com vértice em D é um ângulo comum entre eles (veja a figura 1.1), o que implica que $\widehat{DOB} \equiv \widehat{DBE}$. Dessa semelhança, segue que

$$\frac{OD}{BD} = \frac{BD}{ED} \Rightarrow BD \cdot BD = OD \cdot DE, \quad (1.1)$$

onde BD é a média geométrica de AB e BC , enquanto OD (raio da semicircunferência c) é a média aritmética entre AB e BC , sendo assim,

$$BD = \sqrt{AB \cdot BC} \quad \text{e} \quad OD = \frac{AB + BC}{2}.$$

Logo, reescrevendo 1.1, tem-se

$$AB \cdot BC = \frac{AB + BC}{2} \cdot DE \Rightarrow DE = 2 \cdot \frac{AB \cdot BC}{AB + BC}.$$

Portanto, DE é a média harmônica entre AB e BC . □

Observação 1.12. Note que, considerando-se uma circunferência cujo diâmetro é a soma da medida de dois segmentos adjacentes, a média harmônica entre esses dois segmentos é sempre a medida de um segmento menor ou igual ao raio dessa circunferência, sendo que igualdade ocorre apenas quando os dois segmentos possuírem a mesma medida. Nesse caso, a média harmônica coincide com a média geométrica.

Teorema 1.13. (*Teorema fundamental da semelhança de triângulos*) Sejam $\triangle ABC$

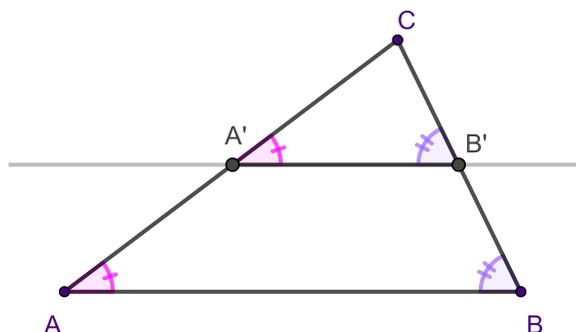
um triângulo e r uma reta paralela ao lado AB , tal que r corta os lados AC e BC em A' e B' , respectivamente. Então os triângulos ABC e $A'B'C$ são semelhantes. A seguinte nomenclatura será usada nesse trabalho:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C;$$

(onde lê-se: o triângulo ABC é semelhante ao triângulo $A'B'C$).

A demonstração do teorema 1.13 segue do caso *A.A.A.* (ângulo, ângulo, ângulo) de semelhança de triângulos (ver figura 1.2).

Figura 1.2: Representação do teorema fundamental da semelhança de triângulos.



Fonte: Elaborada pela autora.

Os teoremas 1.14, 1.15, 1.16 e 1.17, apresentados a seguir, serão úteis no entendimento de alguns resultados desse trabalho. Suas demonstrações podem ser encontradas na referência [5].

Teorema 1.14. (Teorema da desigualdade triangular) A soma das medidas de dois lados de um triângulo é sempre maior que a medida do outro lado.

Teorema 1.15. (Teorema fundamental da proporcionalidade) Sejam $\triangle ABC$ um triângulo e r uma reta paralela ao lado AB , tal que r intersecta os lados AC e BC em A' e B' , respectivamente. Então,

$$\frac{CA}{CA'} = \frac{CB}{CB'}.$$

O teorema 1.16 é o teorema recíproco do teorema fundamental da proporcionalidade (teorema 1.15).

Teorema 1.16. Sejam $\triangle ABC$ um triângulo e r uma reta que intersecta os lados AC e BC em A' e B' , respectivamente, tal que

$$\frac{CA}{CA'} = \frac{CB}{CB'}.$$

Então, r é paralela ao lado AB .

Teorema 1.17. (Teorema de Tales) Sejam r e s duas retas transversais a um conjunto de três ou mais retas paralelas. A razão entre os comprimentos de dois segmentos quaisquer determinados sobre r é igual à razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes determinados sobre s .

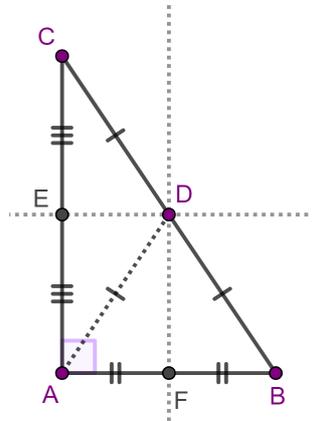
Observe que, em um triângulo onde uma reta intersecta dois de seus lados em pontos distintos dos vértices, de modo que essa reta é paralela ao outro lado (e conseqüentemente é paralela à reta suporte desse segmento), a existência de uma terceira reta pode estar omissa. Entretanto, no contexto da geometria euclidiana sempre é possível traçar uma reta s paralela a uma reta r por um ponto P que não está sobre r . Logo, se ABC for um triângulo, e r uma reta tal que r intersecta os lados AB e BC em pontos distintos dos vértices, de modo que r seja paralela à reta suporte do segmento AC , então existe ainda uma terceira reta, denominada por s , que é paralela às retas r e AC , e que incide sobre o vértice B . Portanto, em casos assim, o teorema de Tales ainda é aplicável.

A demonstração do teorema a seguir segue do recíproco do teorema fundamental da proporcionalidade.

Teorema 1.18. (Recíproco do teorema de Tales) Sejam r e s duas retas transversais a um conjunto de três ou mais retas, tais que a razão entre os comprimentos de dois segmentos quaisquer determinados sobre r é igual à razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes determinados sobre s . Então, o conjunto de retas é formado por retas paralelas.

Teorema 1.19. Seja ABC um triângulo retângulo em A . Se D é ponto médio do segmento BC , então $AD = BD = CD$.

Figura 1.3: Os segmentos AD , BD e CD possuem a mesma medida.



Fonte: Elaborada pela autora.

A demonstração segue do fato de que a mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à metade da hipotenusa. Observe que, como consequência disso, tem-se que a medida do segmento ED da figura 1.3 (altura do triângulo ACD) é a metade da medida do segmento AB .

Proposição 1.20. A bissetriz externa de um ângulo AOB é perpendicular à bissetriz interna desse ângulo.

Demonstração. Seja C um ponto tal que O esteja entre A e C , logo, \widehat{BOC} é um ângulo externo de \widehat{AOB} . Sejam M e N pontos tais que \overrightarrow{OM} e \overrightarrow{ON} bissectam \widehat{AOB} e \widehat{BOC} , respectivamente (ver figura 1.4).

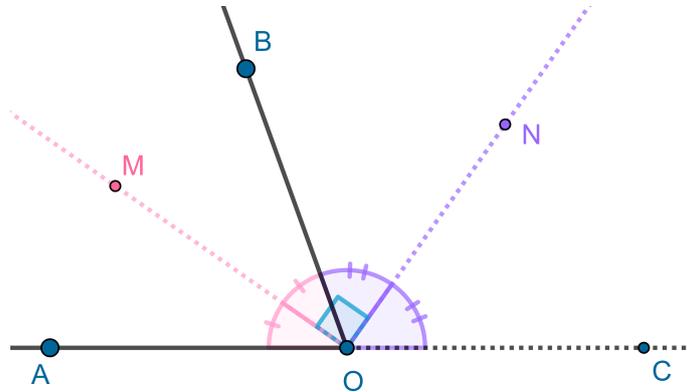
Então,

$$\angle AOM = \angle MOB \text{ e } \angle BON = \angle NOC. \quad (1.2)$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \angle AOB + \angle BOC &= (\angle AOM + \angle MOB) + (\angle BON + \angle NOC) = 180^\circ \\ &\stackrel{(1,2)}{\Rightarrow} (\angle MOB + \angle MOB) + (\angle BON + \angle BON) = 180^\circ \\ &\Rightarrow 2 \cdot (\angle MOB + \angle BON) = 180^\circ \\ &\Rightarrow \angle MOB + \angle BON = 90^\circ. \end{aligned}$$

Figura 1.4: A bissetriz externa do ângulo AOB é perpendicular à bissetriz interna desse ângulo.



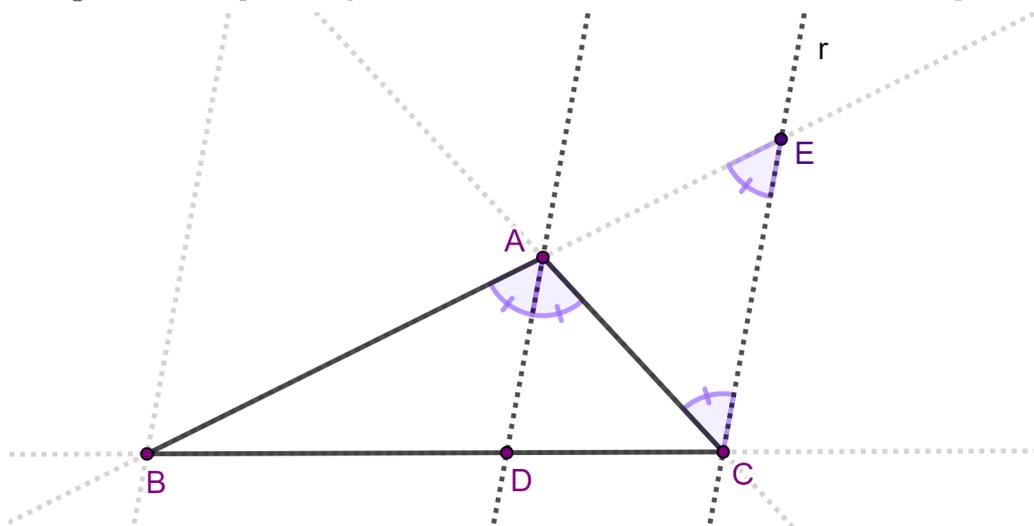
Fonte: Elaborada pela autora.

Portanto, a reta OM é perpendicular à reta ON , o que significa que a bissetriz externa do ângulo AOB é perpendicular à bissetriz interna desse ângulo. \square

Teorema 1.21. (*Teorema da bissetriz interna de um triângulo*) Sejam ABC um triângulo e D um ponto tal que D esteja entre B e C ($B - D - C$) (ver figura 1.5). A reta AD é a bissetriz interna do ângulo BAC se, e somente se,

$$\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}.$$

Figura 1.5: Representação do teorema da bissetriz interna de um triângulo.



Fonte: Elaborada pela autora.

Demonstração. (\Rightarrow)

Como a reta AD é a bissetriz interna de BAC , segue que

$$\widehat{BAD} \equiv \widehat{DAC} \quad (1.3)$$

Sejam r uma reta que incide sobre C e paralela ao lado AD e E o ponto de interseção de r com a reta suporte do lado AB .

Observe que

$$\begin{aligned} \widehat{BAD} &\equiv \widehat{AEC}, & \text{pois são ângulos correspondentes;} \\ \widehat{DAC} &\equiv \widehat{ACE}, & \text{pois são alternos internos.} \end{aligned}$$

Logo, por (1.3), conclui-se que

$$\widehat{AEC} \equiv \widehat{ACE}, \quad (1.4)$$

e que o triângulo ACE é isósceles de base CE , ou seja

$$AE = AC. \quad (1.5)$$

Pelo teorema 1.17 segue que

$$\frac{BD}{BA} = \frac{CD}{AE} \stackrel{(1.5)}{=} \frac{CD}{AC}.$$

 (\Leftarrow)

Seja E um ponto sobre a reta suporte do lado AB , tal que a medida do segmento AE seja igual à medida do lado AC e A esteja entre os pontos B e E . Logo, o triângulo ACE é isósceles de base CE , o que implica que

$$\widehat{AEC} \equiv \widehat{ACE}.$$

E, como AC é igual a CE , segue que

$$\frac{BD}{BA} = \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{AE}.$$

Logo, as retas AD e CE são, pelo recíproco do teorema de Tales (teorema 1.18), paralelas. Então, os ângulos BAD e AEC são congruentes, pois são alternos internos.

$$\widehat{BAD} \equiv \widehat{AEC}, \text{ pois são ângulos correspondentes;}$$

$$\widehat{DAC} \equiv \widehat{ACE}, \text{ pois são ângulos alternos internos.}$$

E, como os ângulos AEC e ACE são congruentes, segue que

$$\widehat{BAD} \equiv \widehat{DAC}. \quad (1.6)$$

Portanto, a reta suporte do segmento AD é bissetriz do ângulo BAC . \square

Teorema 1.22. (Teorema da bissetriz externa de um triângulo) Sejam ABC um triângulo e D um ponto, tal que D está sobre a reta suporte do lado BC mas D não está entre B e C . A reta AD é a bissetriz externa do ângulo BAC se, e somente se,

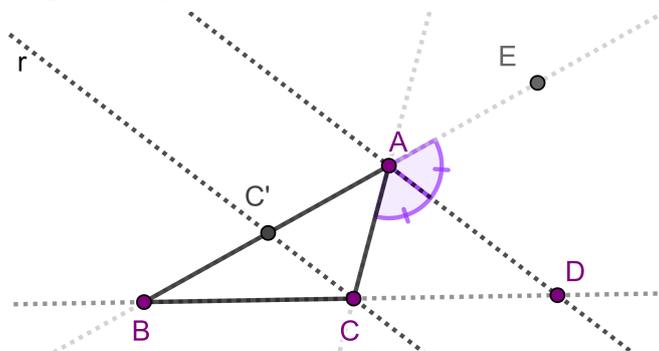
$$\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}.$$

Demonstração.

(\Rightarrow)

Suponha, sem perda de generalidade, que o lado AC seja menor que o lado AB . Seja r a reta paralela ao lado AB passando por C . Sejam ainda, C' o ponto de interseção da reta r com a reta suporte do segmento AB e E um ponto sobre a reta AB , tal que A esteja entre B e E (ver figura 1.6).

Figura 1.6: Representação do teorema da bissetriz externa de um triângulo.



Fonte: Elaborada pela autora.

Observe que, por construção, tem-se que

$$\begin{aligned}\widehat{CAD} &\equiv \widehat{ACC'}, & \text{pois são alternos internos;} \\ \widehat{DAE} &\equiv \widehat{AC'C}, & \text{pois são ângulos correspondentes.}\end{aligned}$$

E, por hipótese,

$$\widehat{CAD} \equiv \widehat{DAE}.$$

Logo, segue que

$$\widehat{ACC'} \equiv \widehat{AC'C}.$$

O que implica que o triângulo ACC' é isósceles de base CC' e que os lados AC e AC' possuem a mesma medida (ou seja, $AC = AC'$).

Como as retas r e AD são paralelas (por construção), segue, pelo teorema de Tales (teorema 1.17) que

$$\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC'} = \frac{CD}{AC}.$$

(\Leftarrow)

Suponha, sem perda de generalidade, que AC seja menor que AB . Seja C' um ponto sobre o segmento AB , tal que $AC = AC'$.

Por hipótese, tem-se que

$$\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{AC'}.$$

Logo, pelo teorema recíproco de Tales (teorema 1.18), segue que as retas AD e CC' são paralelas.

Seja E um ponto sobre a reta AB tal que A esteja entre B e E . Então

$$\begin{aligned}\widehat{CC'A} &\equiv \widehat{DAE}, & \text{pois são ângulos correspondentes;} & \text{e} \\ \widehat{C'CA} &\equiv \widehat{CAD}, & \text{pois são ângulos alternos internos.}\end{aligned}$$

O que implica que

$$\widehat{CAD} \equiv \widehat{DAE}.$$

Portanto, a reta AD é a bissetriz externa do ângulo BAC . □

A exclusão, na demonstração do teorema anterior (teorema 1.22), da possibilidade dos lados AB e AC possuírem a mesma medida se dá pelo fato de que, nesse caso em particular, o triângulo é isósceles com base BC e, portanto, a bissetriz do ângulo BAC é perpendicular ao segmento de extremidades B e C . Logo, se r é a bissetriz externa do ângulo BAC , tem-se, pela proposição 1.20 que r é perpendicular à bissetriz interna desse mesmo ângulo, o que implica que r é paralela ao lado BC . Portanto, a reta r não intersecta a reta BC e o teorema não se aplica.

1.2 Propriedade foco-diretriz

Nessa seção será apresentada uma definição geral para as cônicas não degeneradas por meio da propriedade foco-diretriz. Posteriormente, no terceiro capítulo, será apresentada uma definição semelhante para cada uma dessas cônicas, ainda envolvendo tal propriedade e, ao final, será demonstrada a equivalência dessas definições com as definições que geralmente são apresentadas nos cursos de geometria analítica.

Definição 1.23. (*Cônica*) Sejam d uma reta, e F um ponto, ambos fixos em um plano. Uma *cônica* é o lugar geométrico dos pontos P do plano, sujeitos à condição $\frac{D(P, F)}{D(P, d)} = e$, onde e é uma constante real estritamente maior que zero.

A propriedade satisfeita pelos pontos P na definição 1.23 é chamada de *propriedade foco-diretriz*.

Definição 1.24. (*Foco, diretriz e excentricidade*) O ponto F da definição 1.23 é chamado de *foco*, a reta d é chamada de *diretriz correspondente a F* , e a constante e é denominada de *excentricidade* da seção cônica.

- Quando $0 < e < 1$, a cônica é chamada de *elipse*.
- Quando $e = 1$, a cônica é chamada de *parábola*.

- Quando $1 < e < \infty$, a cônica é chamada de *hipérbole*.

A diretriz é um elemento pouco enfatizado nos cursos básicos de geometria. É comum, ao falar de diretriz, pensar na parábola. Entretanto, qualquer cônica, incluindo as elipses e hipérbolas, também podem ser definidas em função de suas diretrizes, de forma que as definições das cônicas como lugares geométricos dos pontos que satisfazem uma dada relação de distância entre o foco e a diretriz, comumente usada ao se definir a parábola, pode se estender também às elipses e hipérbolas.

Definição 1.25. (*Reta focal*) Uma *reta focal* é qualquer reta que passa pelo foco da cônica.

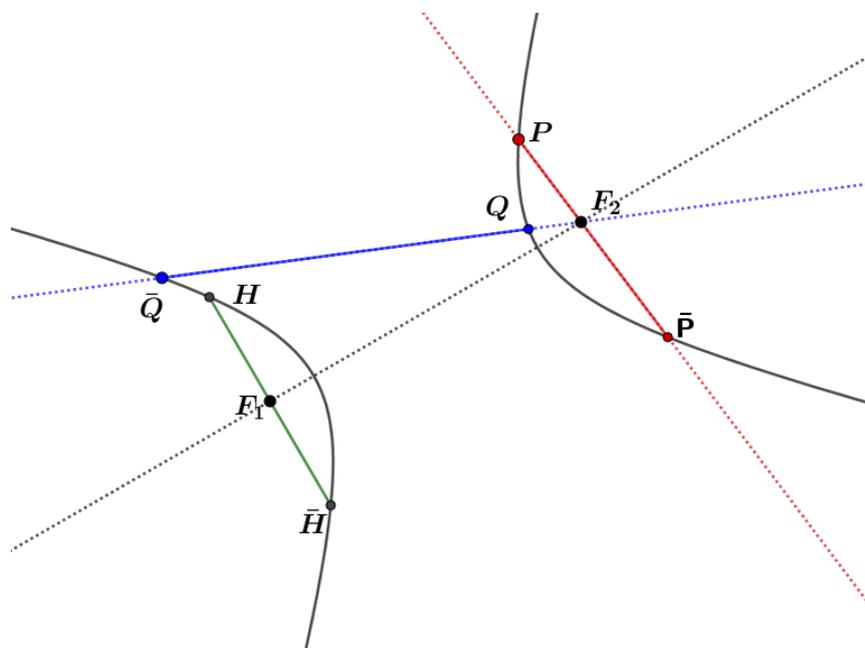
Definição 1.26. (*Corda*) Uma *corda* é qualquer segmento que une dois pontos distintos de uma cônica.

Definição 1.27. (*Corda supra-focal*) Uma *corda supra-focal* é uma corda cuja reta suporte é uma reta focal.

Definição 1.28. (*Corda focal*) Uma *corda focal* é uma corda supra-focal, tal que o foco está entre as extremidades. Ou seja, uma corda PP' é uma corda focal se P e P' forem pontos de uma cônica cujo foco F está entre P e P' ($P - F - P'$).

Definição 1.29. (*Latus rectum*) Uma corda focal paralela à diretriz é chamada de *latus rectum*.

Figura 1.7: O segmento $P\bar{P}$ é uma corda focal, o segmento $Q\bar{Q}$ é uma corda supra-focal e a corda $H\bar{H}$ é o latus rectum de uma hipérbole.



Fonte: Elaborada pela autora.

Observe que nem toda corda supra-focal é uma corda focal, entretanto, toda corda focal é uma corda supra-focal.

1.3 Construções

1.3.1 Construção geométrica de uma cônica por meio da propriedade foco-diretriz.

No que se segue serão apresentadas as construções das cônicas (não degeneradas) a partir de uma reta e um ponto, a saber: a diretriz d e o foco F , respectivamente.

Considere um ponto A sobre a diretriz d tal que A é o pé da perpendicular baixada do foco F até a diretriz.

Observação 1.30. A reta AF , a qual passa pelo foco de uma cônica e é perpendicular à sua diretriz é chamada de *eixo da cônica*, ou simplesmente *eixo*.

Seja V um ponto entre A e F ($A - V - F$), com A , V e F , colineares e distintos dois a dois.

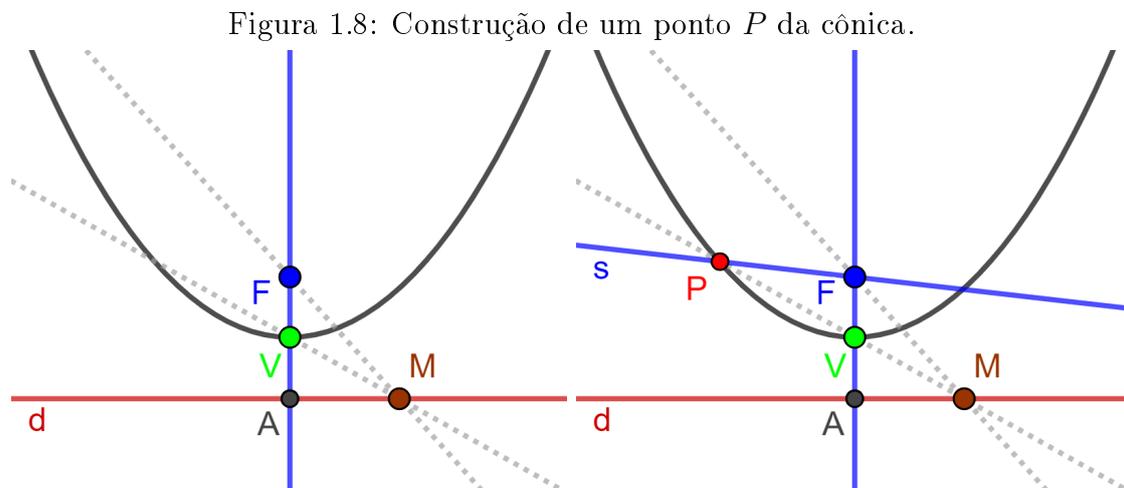
No que se segue, será mostrado que fixado o ponto V , sempre é possível encontrar outro ponto, digamos P , distinto de V , de forma que V seja um vértice e P um ponto arbitrário de uma cônica.

A veracidade disso será comprovada verificando que a relação

$$\frac{D(V, F)}{D(V, d)} = \frac{D(P, F)}{D(P, d)} = e$$

é satisfeita, onde e é a excentricidade da cônica (ver definição 1.24).

Tome um ponto M na diretriz d , distinto de A , e trace as retas MV e MF (ver figura 1.8, à esquerda). Trace por F a reta s simétrica ao eixo com relação à reta MF . Seja P o ponto de interseção entre a reta s e a reta MV (ver figura 1.8, à direita).

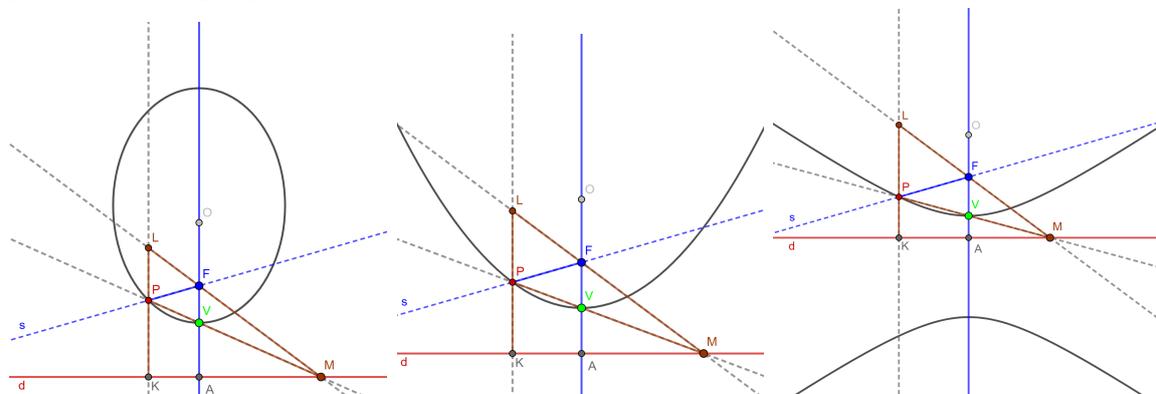


Fonte: Elaborada pela autora.

Afirmção 1.31. Os pontos V e P são, ambos, pontos da mesma cônica.

Demonstração. Sejam K o pé da perpendicular baixada de P até a diretriz e L o ponto de interseção da reta PK com a reta MF . Seja ainda O um ponto sobre o eixo, tal que F está entre os pontos A e O (ver figura 1.9).

Figura 1.9: Elipse, parábola e hipérbole, respectivamente, construídas por meio da propriedade foco-diretriz.



Fonte: Elaborada pela autora.

Observe que $\widehat{PLF} \equiv \widehat{LFO}$, pois ambos são ângulos alternos internos congruentes relativos às retas paralelas AF e PK . Além disso, $\widehat{LFO} \equiv \widehat{LFP}$, pois, por construção, a reta LF é bissetriz do ângulo PFO . Então, $\widehat{PLF} \equiv \widehat{LFP}$, e conseqüentemente, o triângulo FPL é isósceles de base \overline{FL} . Disso, é possível concluir que

$$PF = PL. \tag{1.7}$$

Por outro lado, pelo teorema fundamental da semelhança de triângulos (teorema 1.13), é possível observar que:

$$\triangle MPL \sim \triangle MVF \tag{1.8}$$

$$\triangle MKP \sim \triangle MAV \tag{1.9}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{PL}{VF} &\stackrel{(1.8)}{=} \frac{MP}{MV} \stackrel{(1.9)}{=} \frac{PK}{VA} \\ &\Rightarrow \frac{PL}{VF} = \frac{PK}{VA} \\ &\Rightarrow \frac{PL}{PK} = \frac{VF}{VA} \\ &\stackrel{(1.7)}{\Rightarrow} \frac{PF}{PK} = \frac{VF}{VA}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Como \overline{PF} está para \overline{PK} assim como \overline{VF} está para \overline{VA} , podemos dizer que $D(P, F)$ está para $D(K, P)$, assim como $D(V, F)$ está para $D(V, A)$. É possível observar que $D(K, P) = D(P, d)$ e $D(V, A) = D(V, d)$. Logo,

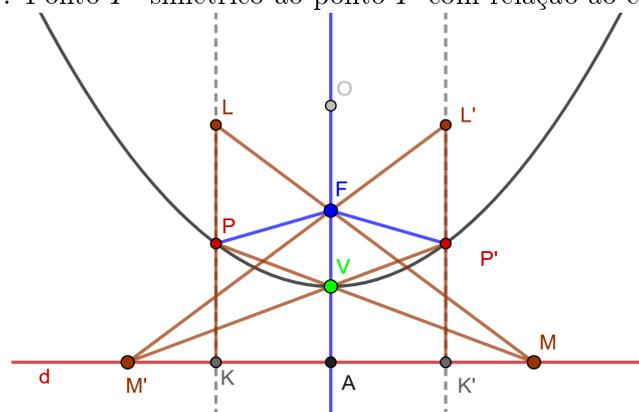
$$\frac{D(P, F)}{D(P, d)} = \frac{D(V, F)}{D(V, d)} = e. \tag{1.11}$$

Portanto, segue da definição 1.23 que tanto o ponto P , quanto o ponto V são pontos da cônica. □

O ponto V é chamado de *vértice* da cônica e, escolhendo sucessivos pontos M na diretriz, é possível encontrar sucessivos pontos da cônica.

É possível observar que ao escolher um ponto M' na diretriz d , simétrico ao ponto M com relação ao eixo, obtém-se um ponto P' , pertencente à cônica, tal que P' é simétrico ao ponto P , com relação ao eixo (veja a figura 1.10). Logo, como M é arbitrário então P também será um ponto arbitrário. Disso, conclui-se que uma cônica é simétrica em relação ao eixo.

Figura 1.10: Ponto P' simétrico ao ponto P com relação ao eixo da cônica.



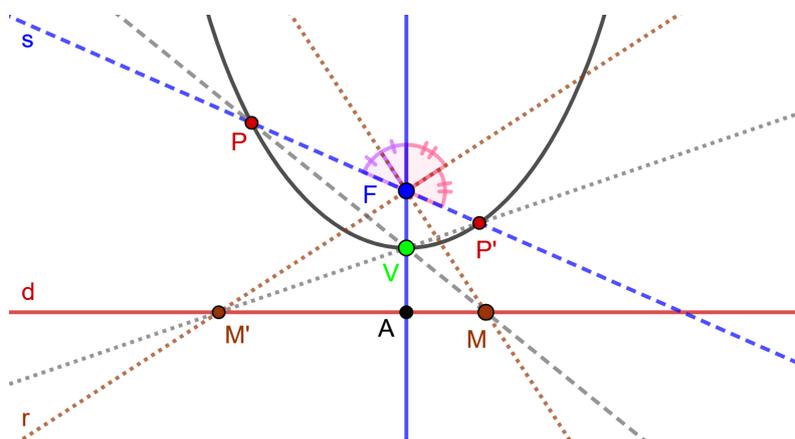
Fonte: Elaborada pela autora.

Ao longo de todo o texto os pontos F , V , K e A seguirão indicando o foco, o vértice, o pé da perpendicular baixada de P até a diretriz e o ponto de interseção do eixo com a diretriz, respectivamente.

Afirmção 1.32. A reta s , determinada pelos pontos P e F da construção anterior, intersecta a cônica em um ponto P' , distinto de P .

Demonstração. Sejam M , O e P os mesmos pontos da construção anterior e r a reta perpendicular à reta MF . Sejam ainda, M' o ponto de interseção da reta r com a diretriz e P' o ponto de interseção da reta $M'V$ com a reta s (ver figura 1.11). Como MF é a bissetriz interna de \widehat{PFO} , então r é a bissetriz externa desse ângulo. Assim, como a reta s é simétrica ao eixo com relação à reta MF , tem-se também que s é simétrica ao eixo com relação à reta r . Como P' é a interseção entre $M'V$ e s , segue, pelo método de construção da cônica apresentado anteriormente, que P' é um ponto da cônica distinto de P , tal que ambos estão sobre a reta supra-focal s . \square

Figura 1.11: A reta s intersecta a cônica em P e P' .



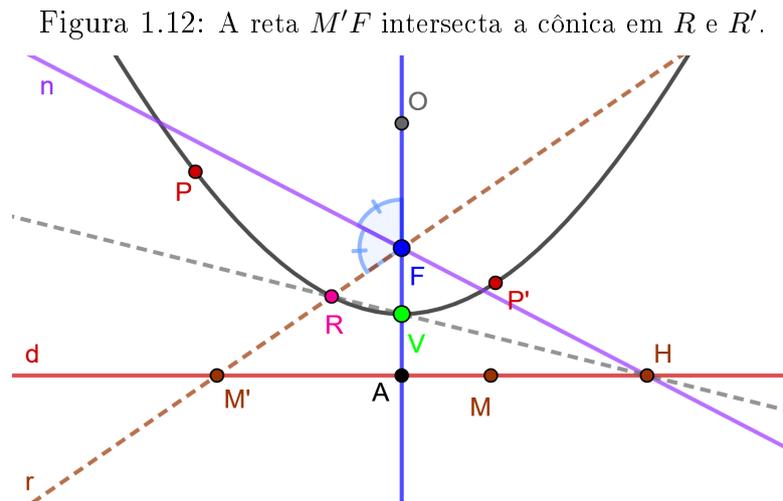
Fonte: Elaborada pela autora.

A afirmação 1.32 garante que a reta que une o foco F e um ponto P de uma cônica, distinto do vértice V , intersecta a cônica em um ponto P' distinto de P . Entretanto, o que se pode falar sobre a reta r , perpendicular à reta MF ? Essa reta intersecta a cônica? A resposta é dada pela afirmação a seguir (afirmação 1.33):

Afirmação 1.33. A reta r incidente ao foco (determinada pelos pontos F e M') e perpendicular a reta MF , intersecta a cônica em dois pontos distintos.

Demonstração. Sejam n a bissetriz interna do ângulo $M'FO$ (onde M' e O , definidos na afirmação 1.32, se mantêm os mesmos) e H o ponto de interseção entre as retas n e d . Note que a reta FM' é a reta simétrica ao eixo com relação a reta HF (ver figura 1.12). Seja R o ponto de interseção entre as retas HV e FM' . R , assim determinado, é um ponto da cônica obtido pela construção, apresentada no início dessa seção, tomando-se o

ponto H na diretriz (respectivo ao ponto M da construção). Pela afirmação 1.32, segue que existe R' , distinto de R , que também pertencente à cônica, tal que RR' é uma corda supra-focal. \square



Fonte: Elaborada pela autora.

Observação 1.34. Pela construção do início da seção fica evidente que por um ponto M na diretriz, distinto de A , é possível determinar um ponto P de uma cônica. Pelas afirmações 1.32 e 1.33, pode-se concluir que, tomando-se um ponto M na diretriz, distinto de A , é possível determinar uma corda supra-focal RR' ortogonal à reta MF .

Posteriormente, no capítulo 2, será provado que M é o ponto de interseção entre as retas tangentes à cônica nas extremidades de RR' .

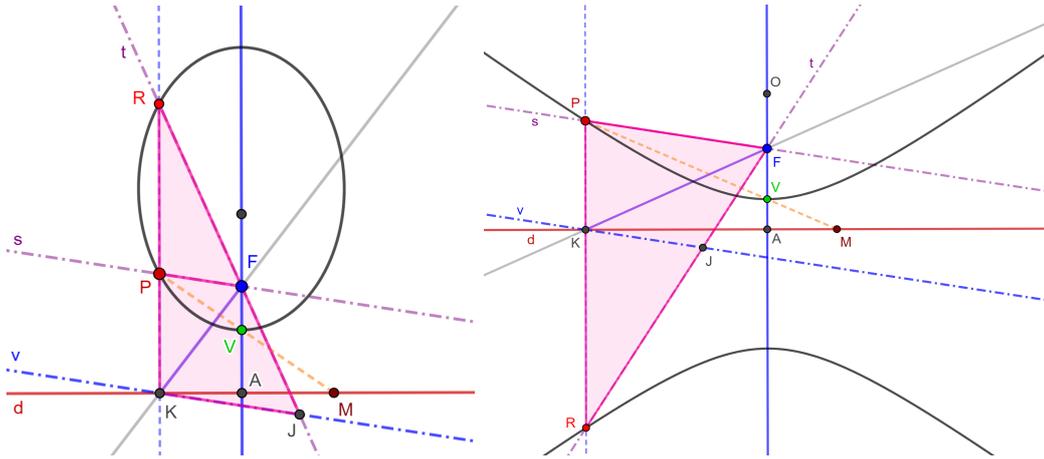
No que se segue, caso a cônica não seja uma parábola (ou seja, a razão $\frac{VF}{VA} = e \neq 1$), será mostrado que é possível descobrir um outro ponto da curva que está sobre a reta KP , perpendicular à diretriz pelo ponto P .

1.3.2 Construção geométrica de um segundo ponto da cônica sobre a perpendicular à diretriz pelo ponto P .

Afirmação 1.35. Sejam P um ponto de uma cônica c , distinto do vértice V e t a reta simétrica à reta FP com relação à reta FK . Seja R o ponto de interseção entre as retas t e PK . O ponto R é também um ponto da cônica construída anteriormente.

Demonstração. Seja v uma reta incidente a K e paralela à reta FP . Seja J o ponto de interseção entre as retas v e t (ver figura 1.13).

Figura 1.13: Construção de um segundo ponto da cônica que pertence à reta KP .



Fonte: Elaborada pela autora.

O triângulo KJF é isósceles de base \overline{KF} , pois, como \widehat{PFK} é congruente a \widehat{FKJ} (ângulos alternos internos), e \widehat{PFK} é congruente a \widehat{KFJ} (por construção), então \widehat{FKJ} é congruente a \widehat{KFJ} .

Pelo teorema fundamental da semelhança de triângulos (teorema 1.13) é possível concluir que os triângulos JKR e FPR são semelhantes. E, pelo teorema de Tales (teorema 1.17), segue que,

$$\frac{JF}{PK} = \frac{JR}{KR} \Rightarrow \frac{JR}{JF} = \frac{KR}{PK} \Rightarrow JR = \frac{KR \cdot JF}{KP}. \quad (1.12)$$

Segue ainda da semelhança dos referidos triângulos que,

$$\frac{FR}{FP} = \frac{JR}{JK} \stackrel{(1.12)}{=} \frac{KR \cdot JF}{JK} \Rightarrow \frac{FR}{FP} = \frac{KR}{PK} \cdot \frac{JF}{JK}. \quad (1.13)$$

Como o triângulo KJF é isósceles de base \overline{KF} , os lados \overline{JF} e \overline{JK} são congruentes. Assim,

$$\frac{JF}{JK} = 1,$$

logo, segue de (1.13) que,

$$\frac{FR}{FP} = \frac{KR}{KP},$$

então,

$$\frac{RF}{RK} = \frac{PF}{PK} \stackrel{(1.10)}{=} \frac{VF}{VA}. \quad (1.14)$$

Portanto, obtemos de (1.11) que R pertence à cônica, pois,

$$\frac{D(R, F)}{D(R, d)} = \frac{D(P, F)}{D(P, d)} = \frac{D(V, F)}{D(V, d)} = e.$$

□

A seguir será apresentada uma forma de se obter o *latus rectum* sem o conhecimento do traço da cônica.

1.3.3 Construção geométrica do *latus rectum* da cônica.

Considere uma cônica construída pelo método apresentado na seção 1.3.1, com todos os seus elementos, porém tomando o ponto M sobre a diretriz d , tal que a distância de M ao ponto A é igual à distância entre os pontos A e F , ou seja $D(A, M) = D(A, F)$. Assim, o triângulo MAF é isósceles de base \overline{MF} . É importante observar também que esse é um triângulo retângulo, pois \widehat{MAF} é um ângulo reto. Logo, $\widehat{AMF} \equiv \widehat{AFM} \equiv 45^\circ$.

Segue da construção da cônica (ver figura 1.14) que a reta FP é simétrica ao eixo (reta FO), com relação à reta FL (por construção), então

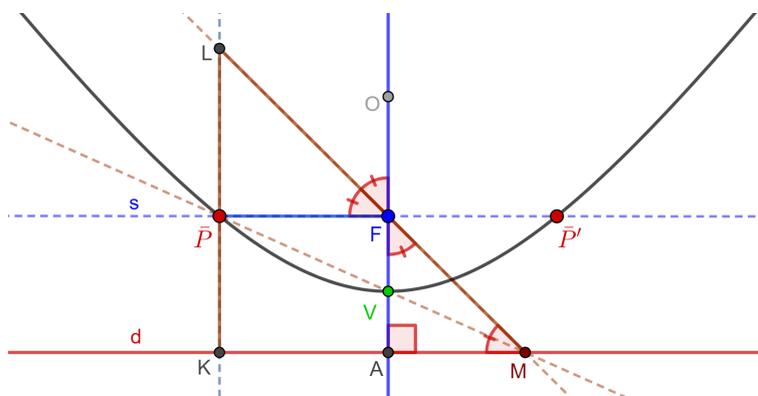
$$\angle PFO = 2\angle LFO.$$

Como $\widehat{LFO} \equiv \widehat{AFM} \equiv 45^\circ$, então $\widehat{PFO} \equiv 90^\circ$, ou seja, \widehat{PFO} é um ângulo reto, e conseqüentemente, o segmento FP é paralelo à diretriz.

Nesse caso em particular, o ponto P será chamado de \bar{P} . Tomando um ponto \bar{P}' sobre a reta $F\bar{P}$, simétrico de \bar{P} com relação ao eixo, obtém-se o segmento $\bar{P}F\bar{P}'$, o qual é o *latus rectum*. Os segmentos $F\bar{P}$ e $F\bar{P}'$ são chamados de *semilatus rectum*.

Observe que \bar{P}' também pertence à cônica e que

$$F\bar{P} = F\bar{P}'. \quad (1.15)$$

Figura 1.14: Construção do *latus rectum*.

Fonte: Elaborada pela autora.

Se o traço da cônica fosse conhecido, bastaria traçar pelo foco F a perpendicular ao eixo, determinando o *latus rectum* como sendo a corda focal $\bar{P}F\bar{P}'$.

Observação 1.36. O *latus rectum* é a única corda focal que possui o foco como ponto médio, visto que, caso existisse uma corda PP' , distinta do *latus rectum*, que satisfizesse tal propriedade, então P' seria o simétrico de P com relação a F , porém a reta suporte da corda PP' não seria paralela à diretriz, o que implicaria que $D(P, d) \neq D(P', d)$ e, conseqüentemente,

$$\frac{D(P, F)}{D(P, d)} \neq \frac{D(P', F)}{D(P', d)}.$$

CAPÍTULO 2

ALGUMAS PROPRIEDADES DAS CÔNICAS NÃO DEGENERADAS

Nas construções do capítulo anterior foi explorado um método geral para a construção das cônicas. A seguir serão abordadas algumas propriedades comuns a essas curvas.

Serão apresentados os resultados necessários para mostrar a equivalência entre a definição das cônicas por meio da *propriedade foco-diretriz* e a definição usual, geralmente adotada nos cursos de geometria analítica.

Proposição 2.1. Sejam P e P' dois pontos distintos de uma cônica, tal que a reta PP' não incide sobre o foco. Seja ainda H o ponto de interseção da reta PP' com a reta diretriz d . Se P e P' estão no mesmo semiplano determinado pela diretriz, então a reta HF é a bissetriz externa do ângulo FPF' . Caso contrário, ou seja, se P e P' estão em semiplanos distintos, então a reta HF é a bissetriz interna do ângulo FPF' .

Demonstração. Sejam K e K' os respectivos pés das perpendiculares baixados de P e P' até diretriz (ver figura 2.1).

Como P e P' pertencem à cônica, segue de (1.10) que,

$$\frac{PF}{PK} = \frac{VF}{VA}, \text{ e}$$

$$\frac{P'F}{P'K'} = \frac{VF}{VA},$$

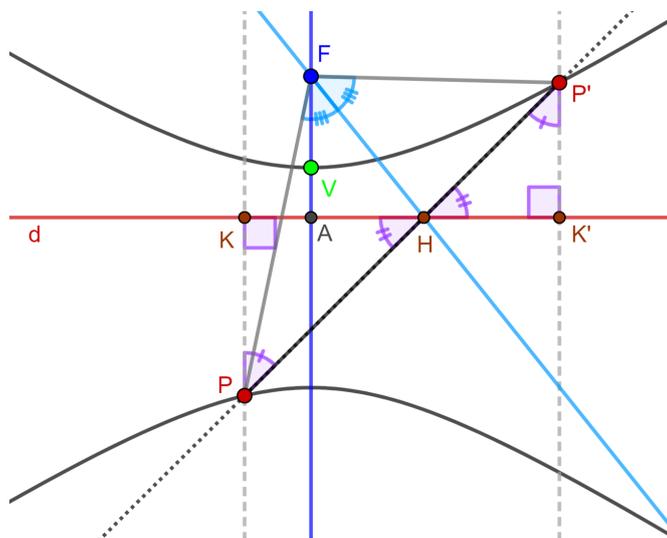
logo,

$$\frac{PF}{PK} = \frac{P'F}{P'K'},$$

e conseqüentemente,

$$\frac{PF}{P'F} = \frac{PK}{P'K'}. \quad (2.1)$$

Figura 2.1: FH é a bissetriz externa do ângulo $PP'F$.



Fonte: Elaborada pela autora.

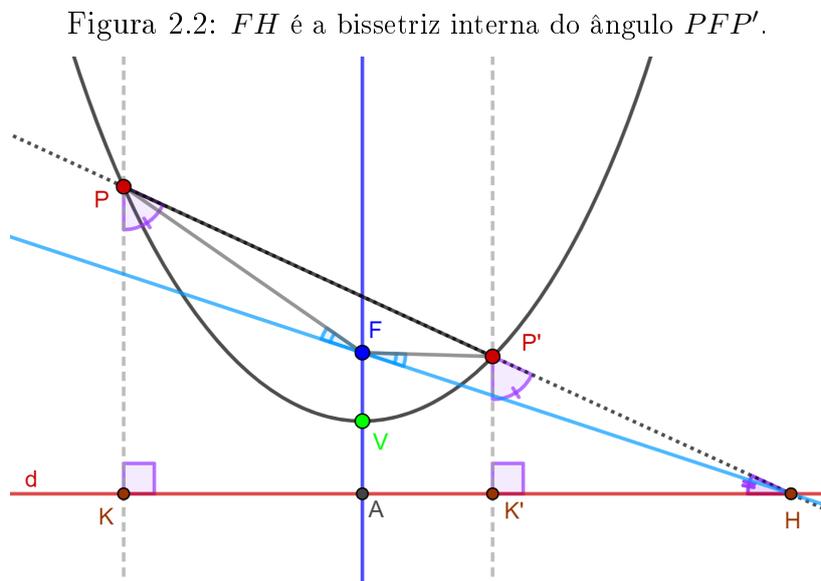
Observe agora que as retas PP' e d são transversais cortadas pelas retas paralelas PK e $P'K'$ e que os triângulos PHK e $P'H'K'$ são semelhantes pelo caso $A.A.A.$, logo, pelo teorema 1.15 segue que

$$\frac{PK}{P'K'} = \frac{PH}{P'H'}. \quad (2.2)$$

De (2.1) e (2.2), obtém-se que

$$\frac{PF}{P'F} = \frac{PH}{P'H} \Rightarrow \frac{PF}{PH} = \frac{P'F}{P'H}. \quad (2.3)$$

Observe que, caso P e P' estejam no mesmo semiplano determinado pela diretriz, o ponto H , que é um ponto sobre a diretriz, não está entre P e P' (ver figura 2.2), então, nesse caso, pelo teorema 1.22 (teorema da bissetriz externa), segue que a reta FH é bissetriz externa do ângulo $PF P'$. Caso P e P' estejam em semiplanos distintos, o ponto H está entre P e P' (ver figura 2.1), e, nesse caso, pelo teorema da bissetriz interna, segue que FH é a bissetriz interna do ângulo $PF P'$.



Fonte: Elaborada pela autora.

□

Proposição 2.2. Uma reta intersecta uma cônica em no máximo dois pontos.

Demonstração. Sejam c uma cônica e d sua diretriz. Sejam P um ponto de c e H um ponto de d (ver figura 2.3). Seja Q um ponto qualquer tal que \widehat{HFQ} seja um ângulo reto. Seja r a reta simétrica à reta PF com relação à reta QF , e seja P' o ponto de interseção da reta r com a reta HP . Então o ponto P' , caso exista, é um ponto pertencente à cônica.

Segue da proposição 2.2 que uma reta r , contida no mesmo plano de uma cônica c , a intersecta em um, dois ou em nenhum ponto.

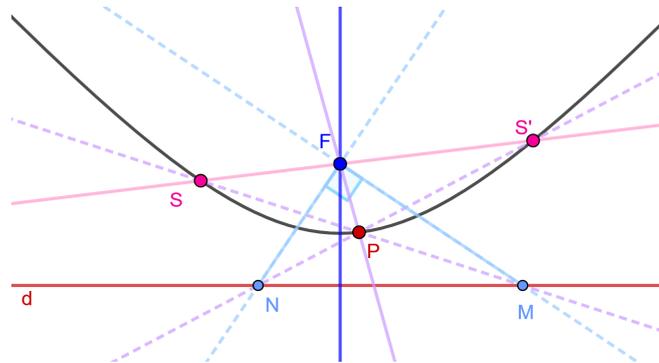
Proposição 2.3. Seja $\overline{SS'}$ uma corda supra-focal, e seja P um ponto qualquer da cônica. Sejam M e N os pontos de interseção de \overleftrightarrow{PS} e $\overleftrightarrow{PS'}$ com a diretriz, respectivamente. O ângulo MFN é um ângulo reto.

Demonstração. Quatro casos podem ocorrer:

- i) P, S e S' pertencem a um mesmo semiplano. Ou seja, $\overline{SS'}$ é uma corda focal e P é um ponto pertencente ao mesmo semiplano determinado pela diretriz que contém $\overline{SS'}$;

Pela proposição (2.1) \overleftrightarrow{FM} é a bissetriz externa de \widehat{PFS} , e \overleftrightarrow{FN} é a bissetriz externa de $\widehat{PFS'}$. Pode-se observar que $\widehat{PFS'}$ é bissectado por \overleftrightarrow{FM} , pois $\widehat{PFS'}$ é um ângulo externo de \widehat{PFS} . Analogamente, tem-se que \overleftrightarrow{FN} bissecta \widehat{PFS} . Logo, segue da proposição 1.20 que \overleftrightarrow{FM} é perpendicular a \overleftrightarrow{FN} , ou seja, \widehat{MFN} é um ângulo reto (ver figura 2.4).

Figura 2.4: O ângulo MFN é um ângulo reto (caso i).



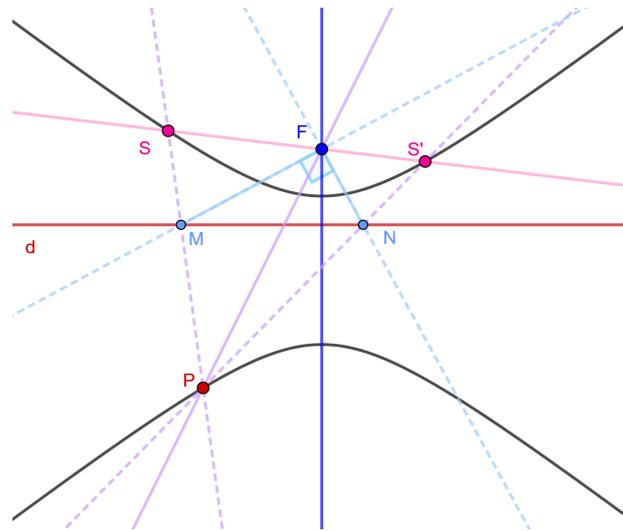
Fonte: Elaborada pela autora.

- ii) $\overline{SS'}$ é uma corda focal e P é um ponto que não pertence ao mesmo semiplano determinado pela diretriz que contém $\overline{SS'}$;

Pela proposição (2.1) \overleftrightarrow{FM} é a bissetriz interna de \widehat{PFS} , e \overleftrightarrow{FN} é a bissetriz interna de $\widehat{PFS'}$. Pode-se observar que o ângulo externo relativo ao ângulo $\widehat{PFS'}$ é bissectado por \overleftrightarrow{FM} , pois \widehat{PFS} é um ângulo externo de $\widehat{PFS'}$. Analogamente, tem-se

que \overleftrightarrow{FN} bissecta externamente \widehat{PFS} . Logo, segue da proposição 1.20 que \overleftrightarrow{FM} é perpendicular a \overleftrightarrow{FN} , ou seja, \widehat{MFN} é um ângulo reto (ver figura 2.5).

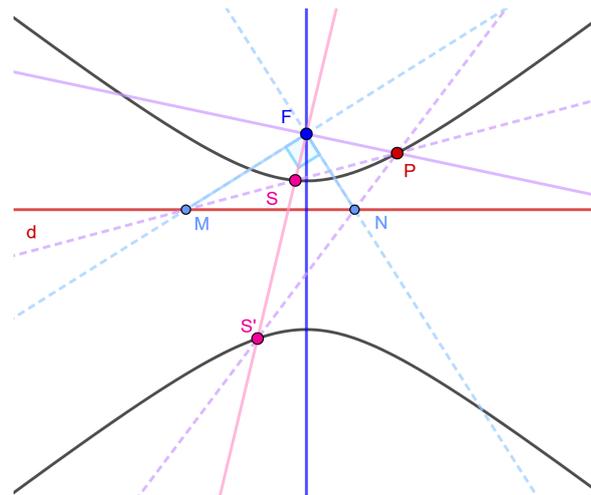
Figura 2.5: O ângulo MFN é um ângulo reto (caso *ii*).



Fonte: Elaborada pela autora.

- iii) Os ponto S e P pertencem ao mesmo semiplano (determinado pela diretriz) que contém F , enquanto S' pertence ao outro semiplano.

Figura 2.6: O ângulo MFN é um ângulo reto (caso *iii*).



Fonte: Elaborada pela autora.

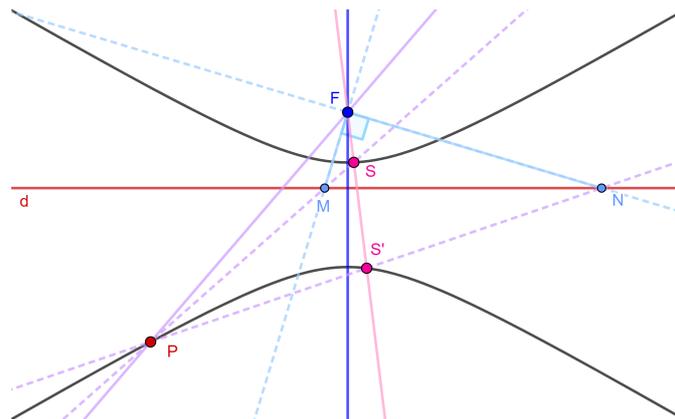
Observe que, nesse caso, F não é um ponto entre S e S' , logo, S' pertence a semi-

reta \overleftrightarrow{FS} , o que significa que $\widehat{PFS} = \widehat{PFS'}$. Pela proposição (2.1) \overleftrightarrow{FM} é a bissetriz externa de \widehat{PFS} , e \overleftrightarrow{FN} é a bissetriz interna de $\widehat{PFS'}$. Portanto, segue da proposição 1.20 que \overleftrightarrow{FM} é perpendicular a \overleftrightarrow{FN} , ou seja, \widehat{MFN} é um ângulo reto (ver figura 2.6).

- iv) O ponto S pertence ao mesmo semiplano (determinado pela diretriz) que contém o foco, e os pontos S' e P pertencem ao outro semiplano.

Assim como no *caso iii*, S' pertence a semi-reta \overleftrightarrow{FS} , o que significa que $\widehat{PFS} = \widehat{PFS'}$. Pela proposição 2.1 a reta FN é bissetriz externa de \widehat{PFS} e a reta FM é a bissetriz interna desse mesmo ângulo. Portanto, \widehat{MFN} é um ângulo reto (ver figura 2.7).

Figura 2.7: O ângulo MFN é um ângulo reto (caso *iv*).



Fonte: Elaborada pela autora.

□

Proposição 2.4. As retas que unem as extremidades de duas cordas supra-focais se intersectam na diretriz.

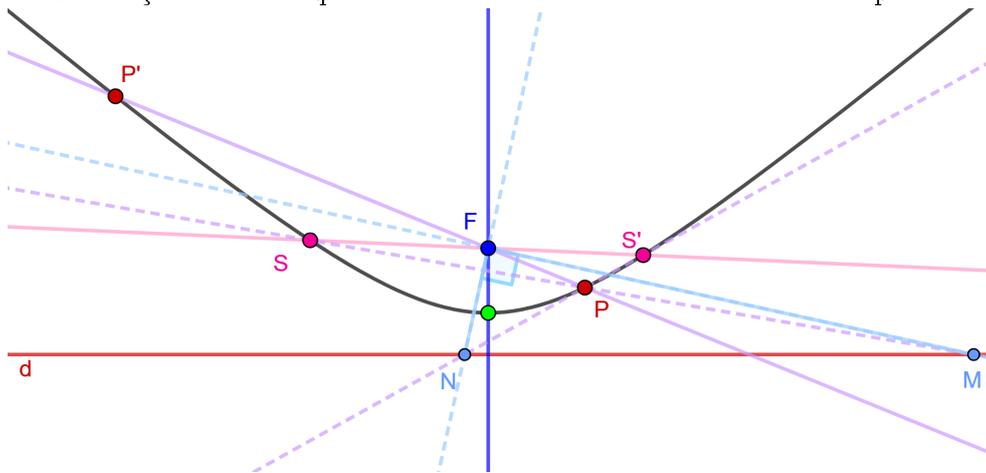
Demonstração. Sejam P, P', S e S' pontos da cônica, tais que $\overline{PP'}$ e $\overline{SS'}$ são duas cordas supra-focais.

A demonstração será dividida em casos, como segue:

- i) Os pontos P, P', S e S' estão no mesmo semiplano determinado pela diretriz que contém F ;

Observe que \widehat{PFS} e $\widehat{P'FS'}$ são ângulos alternos internos, logo possuem a mesma bissetriz. Seja r a bissetriz de \widehat{PFS} e $\widehat{P'FS'}$ e seja \bar{r} a reta perpendicular a r . Sejam M o ponto de interseção da reta \bar{r} com a diretriz e N o ponto de interseção de r com a diretriz. Pela proposição 2.1, a reta \bar{r} é a bissetriz externa de \widehat{PFS} e $\widehat{P'FS'}$ (ver figura 2.8).

Figura 2.8: Interseção das retas que unem as extremidades de duas cordas supra-focais caso (i).



Fonte: Elaborada pela autora.

Conclui-se da proposição 2.3, que \overleftrightarrow{PS} e $\overleftrightarrow{P'S'}$ se intersectam em M , e $\overleftrightarrow{P'S}$ e $\overleftrightarrow{P'S'}$ se intersectam em N

- ii) Os pontos P e S pertencem ao mesmo semiplano que F , enquanto P' e S' pertencem ao semiplano que não contem F ;

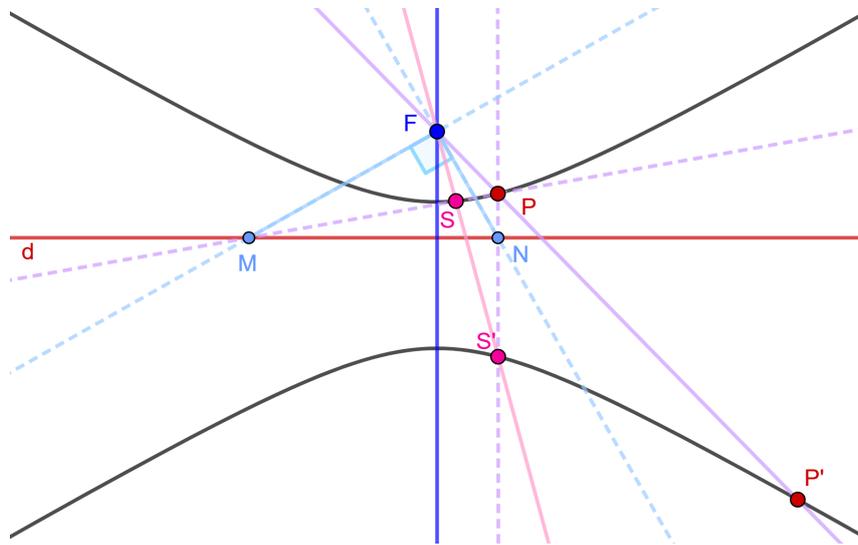
Observe que $\widehat{PFS} = \widehat{PFS'} = \widehat{P'FS} = \widehat{P'FS'}$.

Considere a corda supra-focal SS' e o ponto P . Seja N o ponto de interseção da reta PS' com a diretriz d e M o ponto de interseção da reta PS com d (ver figura 2.9). Pelo *caso (iii)* da proposição 2.3, segue que \overleftrightarrow{FN} é a bissetriz interna do ângulo PFS (consequentemente \overleftrightarrow{FN} também é a bissetriz interna de $\widehat{PFS'}$) e \overleftrightarrow{FM} é a bissetriz externa de \widehat{PFS} (consequentemente \overleftrightarrow{FM} é a bissetriz externa de $\widehat{PFS'}$).

Considere agora a corda supra-focal SS' e o ponto P' . Seja N' o ponto de interseção da reta $P'S$ com a diretriz d e M' o ponto de interseção da reta $P'S'$ com d . Pelo *caso (iii)* da proposição 2.3, segue que $\overleftrightarrow{FN'}$ é a bissetriz interna do ângulo

$P'FS$ (consequentemente $\overleftrightarrow{FN'}$ também é a bissetriz interna de $\widehat{P'FS'}$) e $\overleftrightarrow{FM'}$ é a bissetriz externa de $\widehat{P'FS'}$ (consequentemente $\overleftrightarrow{FM'}$ também é a bissetriz externa de $\widehat{P'FS}$). Entretanto, como $\widehat{PFS} = \widehat{PFS'} = \widehat{P'FS} = \widehat{P'FS'}$, segue da unicidade da bissetriz interna que $\overleftrightarrow{FN} = \overleftrightarrow{FN'}$ e como N e N' são pontos da diretriz, N e N' são coincidentes. Analogamente, pela unicidade da bissetriz externa, tem-se que M e M' também são coincidentes.

Figura 2.9: Interseção das retas que unem as extremidades de duas cordas supra-focais caso (ii).



Fonte: Elaborada pela autora.

- iii) Os pontos S , S' e P pertencem ao mesmo semiplano que F , enquanto o ponto P' pertence ao semiplano que não contém F ;

Observe que nesse caso

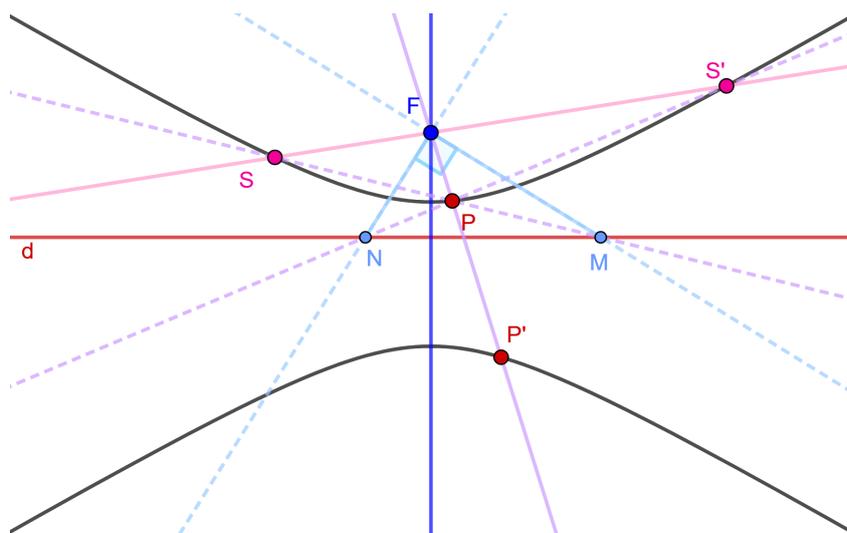
$$\widehat{PFS} = \widehat{P'FS} \quad \text{e} \quad \widehat{PFS'} = \widehat{P'FS'}$$

Sejam N e M os pontos de interseção das retas PS' e PS com a diretriz, respectivamente. Pela proposição 2.3, a reta FN é a bissetriz interna de \widehat{PFS} enquanto a reta FM é a bissetriz externa desse mesmo ângulo.

Sejam N' e M' os respectivos pontos de interseção das retas $P'S$ e $P'S'$ com a diretriz. Pela proposição 2.3, a reta FN' é a bissetriz interna de $\widehat{P'FS'}$ e FM' é a

bissetriz externa do referido ângulo. Como $\widehat{PFS} = \widehat{P'FS}$, segue pela unicidade da bissetriz interna um ângulo que $\overrightarrow{FN} = \overrightarrow{FN'}$ e como N e N' são pontos da diretriz, N e N' são coincidentes. Analogamente, pela unicidade da bissetriz externa, tem-se que M e M' também são coincidentes.

Figura 2.10: Interseção das retas que unem as extremidades de duas cordas supra-focais caso (iii).



Fonte: Elaborada pela autora.

Portanto, as retas que unem as extremidades das cordas supra-focais PP' e SS' se intersectam na diretriz. □

2.1 Tangentes às cônicas

Definição 2.5. (Tangente à cônica) Se uma reta, traçada por um ponto P de uma cônica, encontra a cônica novamente em P' , a *reta tangente à cônica* é a posição para onde a reta PP' tende à medida que P' se aproxima de P .

A reta tangente a uma cônica a intersecta em um único ponto.

Observação 2.6. A reta tangente no vértice de uma cônica é paralela à diretriz.

A seguir, será apresentada uma ideia da demonstração geométrica que remete à comprovação desta afirmação. Não será apresentada uma demonstração rigorosa pelo fato de

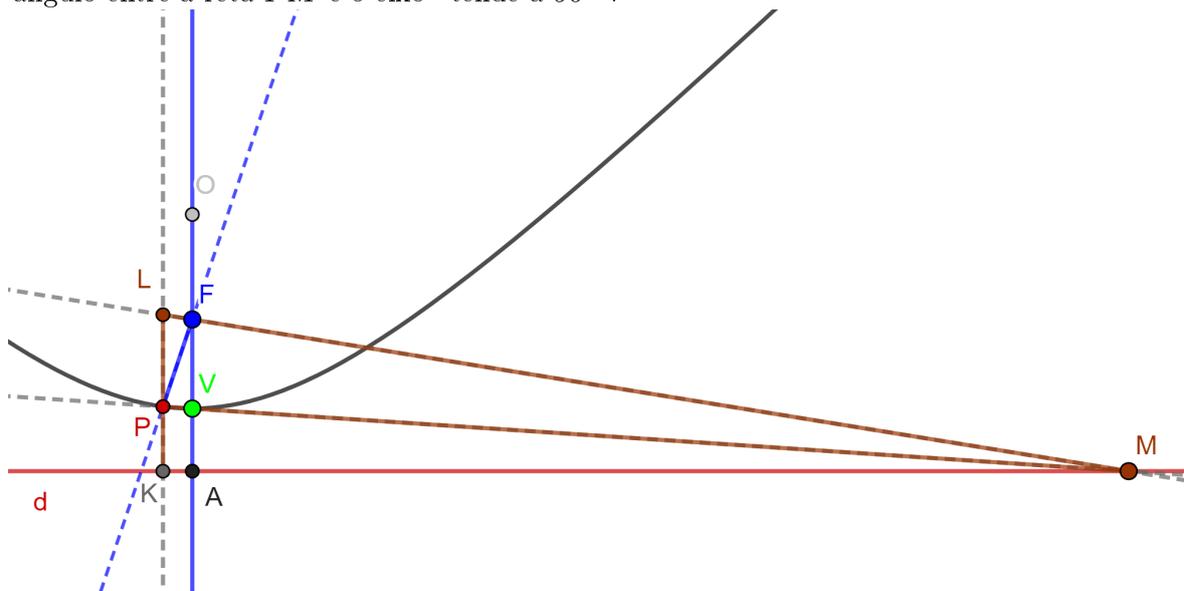
que, quando um ponto P da cônica se aproxima do vértice V , a distância do ponto M (de interseção da reta PV com a diretriz) ao ponto A , "tende ao infinito" enquanto o ângulo entre a reta PM e o eixo "tende a 90° ".

Sejam P , F , V , M , K , L e O os pontos utilizados na construção da cônica por meio da propriedade foco-diretriz (seção 1.3.1).

Segue da referida construção que toda reta determinada pelos pontos P e V intersecta a diretriz no ponto M . Como P é um ponto arbitrário da cônica, é possível tomar o ponto P tão próximo do vértice V quanto se queira.

Observe que F está entre A e O ; K é o pé da perpendicular baixada de P à diretriz e L é o ponto de interseção da reta que une M ao foco F com a reta PK (ver figura 2.11).

Figura 2.11: Quando P se aproxima de V , a distância de M a A "tende ao infinito" enquanto o ângulo entre a reta PM e o eixo "tende a 90° ".



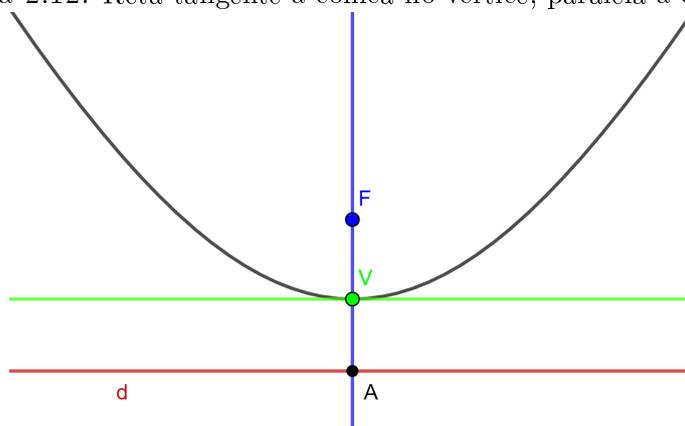
Fonte: Elaborada pela autora.

Como P é um ponto muito próximo de V , segue que o ângulo PFV tende a zero e, conseqüentemente, o ângulo PFO tende a um ângulo de 180° .

Segue ainda da construção apresentada, que o ângulo LFO é metade do ângulo PFO (pois, por construção, a reta FL é a bissetriz do ângulo PFO). Logo, o ângulo LFO é um ângulo reto.

Portanto, a reta tangente, no ponto V , é perpendicular ao eixo (ver figura 2.12).

Figura 2.12: Retas tangente à cônica no vértice, paralela à diretriz.



Fonte: Elaborada pela autora.

A proposição a seguir é válida para as retas que são tangentes a uma cônica, em qualquer ponto distinto do vértice.

Proposição 2.7. A reta traçada do foco ao ponto em que a tangente encontra a diretriz, é perpendicular à reta traçada do foco ao ponto de tangência.

Demonstração. Pela proposição 2.1, se P e P' forem dois pontos de uma cônica, e T for o ponto de interseção da diretriz da cônica com a reta PP' , então FT é a bissetriz externa do ângulo PPF' .

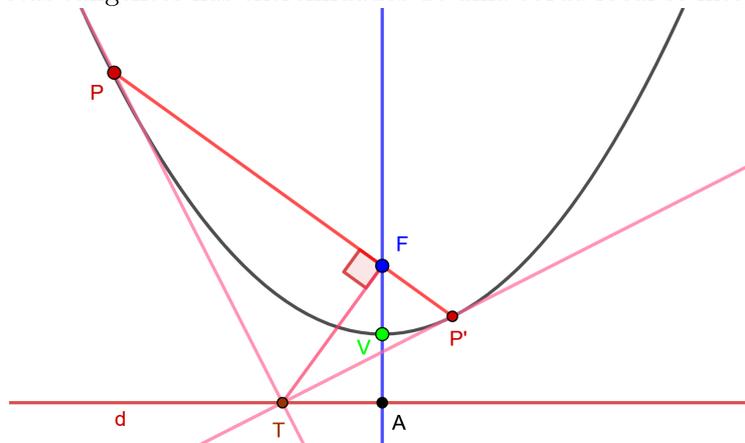
Sejam r a bissetriz interna do ângulo PPF' e R um ponto de r . Pela proposição 1.20, temos que a reta FR é ortogonal à reta FT . Ou seja, o ângulo TFR é um ângulo reto.

Quando o ponto P' se move ao longo da curva e se aproxima da coincidência com P , a reta TPP' (onde, $\overleftarrow{TPP'} = \overleftarrow{TP} = \overleftarrow{TP'}$) se aproxima, e finalmente se torna, a tangente da cônica em P . Quando P coincide com P' a reta FR coincide com a reta FP . Logo, os ângulos TFP e TFR são congruentes, o que implica que \widehat{TFP} é um ângulo reto. \square

Observação 2.8. Segue da proposição 2.7 que se P é um ponto arbitrário da cônica e T um ponto da diretriz tal que o ângulo PFT é um ângulo reto, então, pela unicidade de uma reta definida por dois pontos, tem-se que a reta PT é tangente à cônica em P .

Teorema 2.9. Seja c uma cônica e $\overline{PP'}$ uma corda supra-focal de c . As retas tangentes à cônica nos pontos P e P' se intersectam na diretriz (ver figura 2.13).

Figura 2.13: As retas tangentes nas extremidades de uma corda focal se intersectam na diretriz.



Fonte: Elaborada pela autora.

Demonstração. Seja T o ponto de interseção da tangente à cônica, no ponto P com a diretriz. Segue da proposição 2.7 que a reta TF é ortogonal ao segmento PF , e consequentemente, é ortogonal à corda supra-focal PP' . Isso nos diz que a reta TF também é ortogonal ao segmento FP' . Logo, pela proposição 2.7, tem-se que a tangente em P' também intersecta a diretriz no mesmo ponto T . \square

Corolário 2.10. As retas tangentes nas extremidades do *latus rectum* se intersectam no pé da perpendicular baixada do foco à diretriz.

Demonstração. Sejam $\bar{P}F\bar{P}'$ o *latus rectum* de uma cônica, t e t' as retas tangentes à cônica nos pontos \bar{P} e \bar{P}' , respectivamente. Seja T o ponto de interseção de t e t' . Pelo teorema 2.9, tem-se que T é um ponto da diretriz.

Pela proposição 2.7, tem-se que a reta que une o ponto T ao foco, é perpendicular ao *latus rectum*, e por definição, o *latus rectum* é uma corda focal paralela à diretriz e, consequentemente, ortogonal ao eixo. Portanto, a reta que une T ao foco, coincide com o eixo. E como T é um ponto da diretriz, T coincide com o ponto de interseção do eixo com a diretriz. \square

Observação 2.11. Segue, como consequência do teorema 2.9 que, dado um ponto qualquer sobre a diretriz de uma cônica é sempre possível construir por esse ponto duas tangentes à cônica.

De fato, pelo teorema 2.9 e pela observação 1.34, segue que, dado um ponto M na diretriz, distinto de A , é possível determinar uma corda supra-focal RR' , tal que as retas

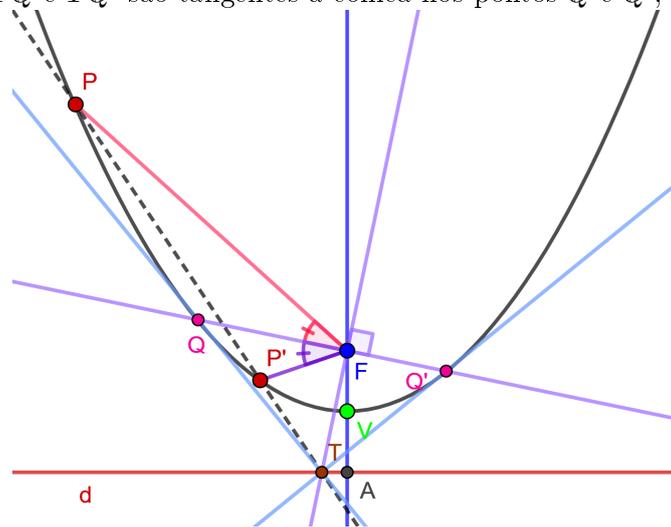
tangentes nas extremidades dessa corda, se intersectam em M . Quando M coincide com A , tem-se, pelo corolário 2.10, que M é o ponto de interseção entre as retas tangentes nas extremidades do *latus rectum*. Sendo assim, a diretriz pode ser definida como um lugar geométrico, como segue:

Definição 2.12. A *diretriz* é o lugar geométrico dos pontos de interseção entre as retas tangentes nas extremidades das cordas supra-focais de uma cônica.

Proposição 2.13. Se a corda PP' encontra a diretriz em T , e a reta que bissecta o ângulo $PP'F$ intersecta a cônica em Q e Q' , então TQ e TQ' são as respectivas retas tangentes a essa cônica nos pontos Q e Q' .

Demonstração. Pela proposição 2.1, tem-se que a reta FT é a bissetriz externa de $\widehat{PP'F}$. E, como a reta que incide sobre a corda focal QFQ' é a bissetriz de $\widehat{PFP'}$, segue da afirmação 1.20, que a reta QQ' é perpendicular à reta FT . Logo, $\widehat{QFT} \equiv \widehat{Q'FT} \equiv 90^\circ$. Portanto, pela proposição 2.7, conclui-se que as retas TQ e TQ' são tangentes à cônica nos pontos Q , e Q' , respectivamente (ver figura 2.14). \square

Figura 2.14: TQ e TQ' são tangentes à cônica nos pontos Q e Q' , respectivamente.



Fonte: Elaborada pela autora.

Corolário 2.14. Sejam c uma cônica, QFQ' uma corda focal de c , t e t' as retas tangentes à cônica em Q e Q' , respectivamente, e T o ponto de interseção entre t e t' . Seja ainda r uma reta que incide sobre T e intersecta a cônica em P e P' , distintos. A corda focal QFQ' bissecta o ângulo $PP'F$.

Demonstração. Segue direto da proposição 2.13, visto que as retas TF e QF são perpendiculares (satisfazendo a proposição 1.20) e do fato que, fixado Q , essas retas são únicas. \square

Teorema 2.15. Se a reta tangente em um ponto P qualquer de uma cônica intersecta a diretriz em um ponto T , e essa reta intersecta ainda a reta l , que contém o *latus rectum*, em um ponto D , então

$$\frac{FD}{FT} = \frac{FV}{VA}.$$

Demonstração. Seja K o pé da perpendicular baixada do ponto P até a diretriz. O ângulo TKP , assim determinado, é um ângulo reto.

Segue da proposição 2.7 que \widehat{TFP} também é um ângulo reto. Logo, os triângulos TKP e TFP são triângulos retângulos, com hipotenusa comum TP . Segue, portanto, da observação 1.5, que os pontos T, P, F e K são todos pontos de uma mesma circunferência, cujo diâmetro coincide com a hipotenusa dos triângulos.

Seja \overline{KF} o segmento de reta que une K ao foco F . Pelo lema 1.6, os ângulos PKF e PTF são congruentes ($\widehat{PKF} \equiv \widehat{PTF}$, ver figura 2.15). Observe ainda que $\widehat{PTF} \equiv \widehat{DTF}$, pois são ângulos comuns aos triângulos PTF e DTF . Logo, por transitividade,

$$\angle PKF = \angle DTF. \quad (2.5)$$

Seja P'' o simétrico de P em relação ao eixo. Seja m uma reta paralela a l passando pelo ponto P , então,

$$\angle FPP'' = \angle DFP, \quad (2.6)$$

pois são ângulos alternos internos.

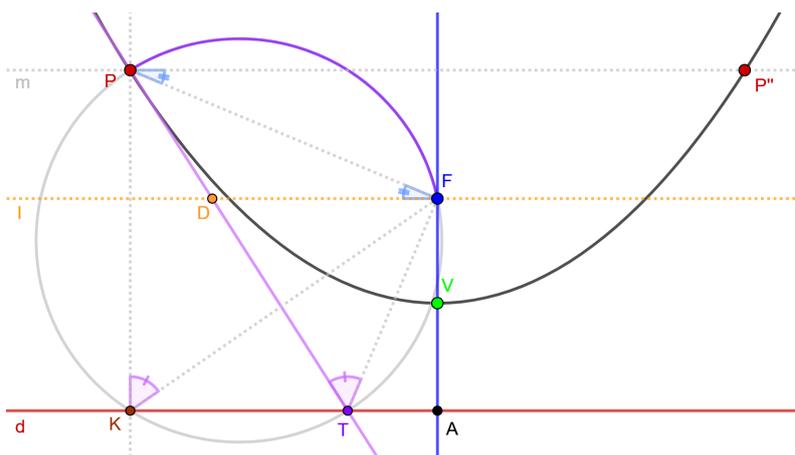
Pela proposição 2.7, tem-se que \widehat{TFP} é um ângulo reto. Além disso, o ângulo KPP'' é um ângulo reto, por construção.

Observe que a reta l divide o plano em dois semiplanos. Queremos demonstrar que os ângulos KPF e DFT são congruentes, e para isso serão considerados os três casos possíveis:

- i) O ponto P está no semiplano determinado pela reta l , que não contém a diretriz (ver figura 2.15);

observe que o ângulo FPP'' é o complementar de \widehat{KPF} e o ângulo DFP é o complementar de \widehat{TFD} . Logo, por 2.6 segue que $\widehat{KPF} \equiv \widehat{TFD}$.

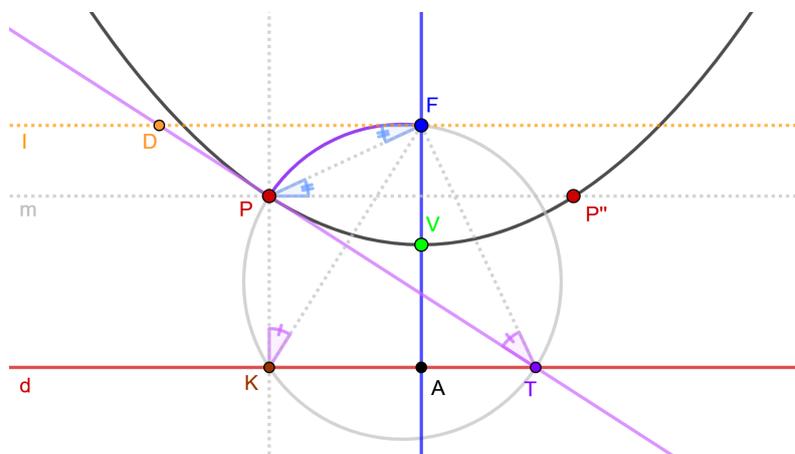
Figura 2.15: P não está no mesmo semiplano que a diretriz.



Fonte: Elaborada pela autora.

- ii) O ponto P está no semiplano, determinado pela reta l , que contém a diretriz (ver figura 2.16);

Figura 2.16: O ponto P e a reta diretriz estão no mesmo semiplano.



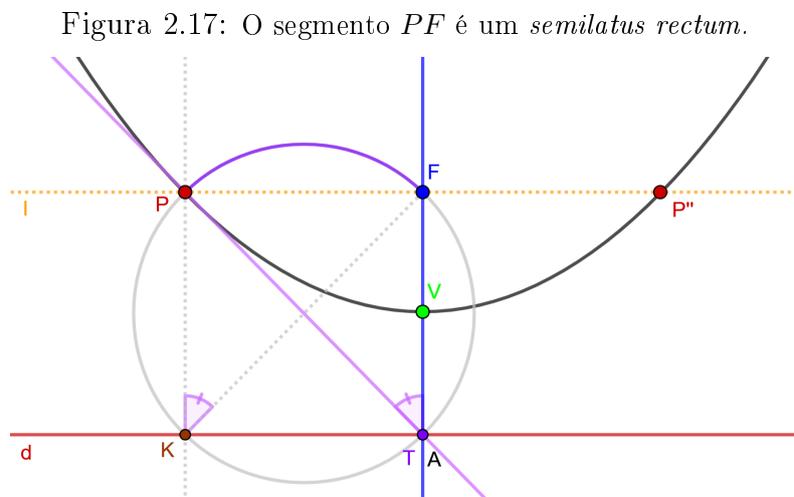
Fonte: Elaborada pela autora.

observe que,

$$\begin{aligned} \angle KPF &= 90^\circ + \angle FPP'', \text{ e} \\ \angle TFD &= 90^\circ + \angle PFD. \end{aligned}$$

Logo, por 2.6, segue que $\widehat{KPF} \equiv \widehat{TFD}$.

iii) O ponto P é uma das extremidades do *latus rectum* (ver figura 2.17);



Fonte: Elaborada pela autora.

Nesse caso, \widehat{KPF} é um ângulo reto, pois \overrightarrow{PK} é perpendicular a \overrightarrow{PF} . Observe ainda que \widehat{TFD} também é um ângulo reto, pois pela proposição 2.7, \overrightarrow{TF} é ortogonal a \overrightarrow{DF} (veja que o ponto D coincide com o ponto P). Portanto, $\widehat{KPF} \equiv \widehat{TFD}$.

De (i), (ii) e (iii), segue que

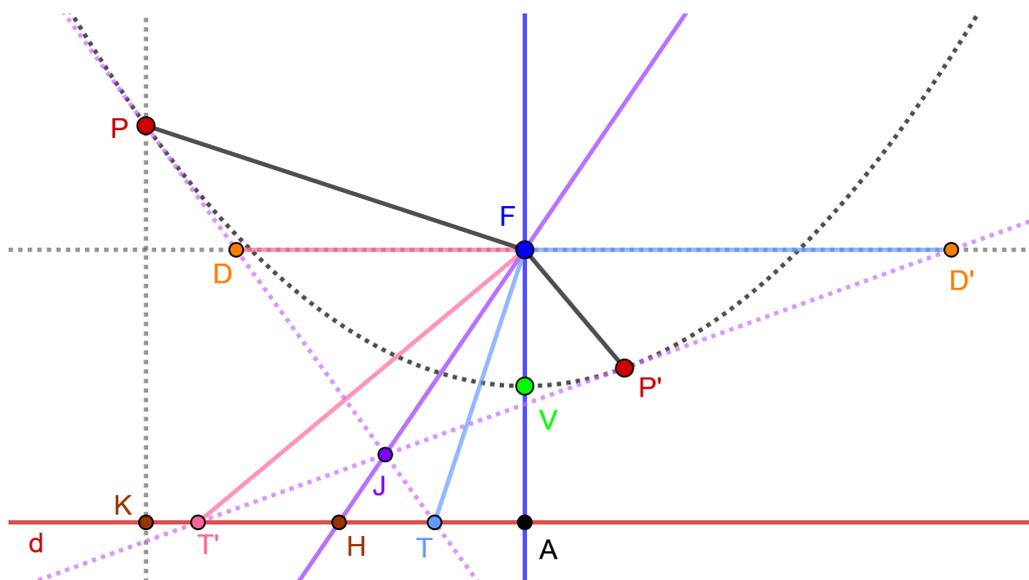
$$\begin{aligned} \frac{FD}{FT} &= \frac{FP}{PK} \\ &= \frac{FV}{VA}. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.16. Sejam c uma cônica, e P e P' dois pontos arbitrários de c . Seja J o ponto de interseção das retas tangentes à cônica em P e P' . Então, $\widehat{JFP} \equiv \widehat{JFP'}$.

Demonstração. Sejam T e T' os pontos de interseção das retas tangentes à cônica em P e P' com a diretriz, respectivamente. Sejam D e D' os pontos de interseção das retas TP e $T'P'$ com a reta suporte do *latus rectum*, respectivamente (ver figura 2.18).

Figura 2.18: Os ângulos JFP e JFP' são congruentes.



Fonte: Elaborada pela autora.

Seja H o ponto de interseção da diretriz com a reta que passa pelos pontos F e J . Observe que

$$\triangle THJ \sim \triangle FDJ \text{ e } \triangle T'HJ \sim \triangle FD'J.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \frac{HT}{FD} &= \frac{HJ}{FJ} \\ &= \frac{HT'}{FD'}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{HT}{HT'} &= \frac{FD}{FD'} \\ &= \frac{FT}{FT'}, \end{aligned}$$

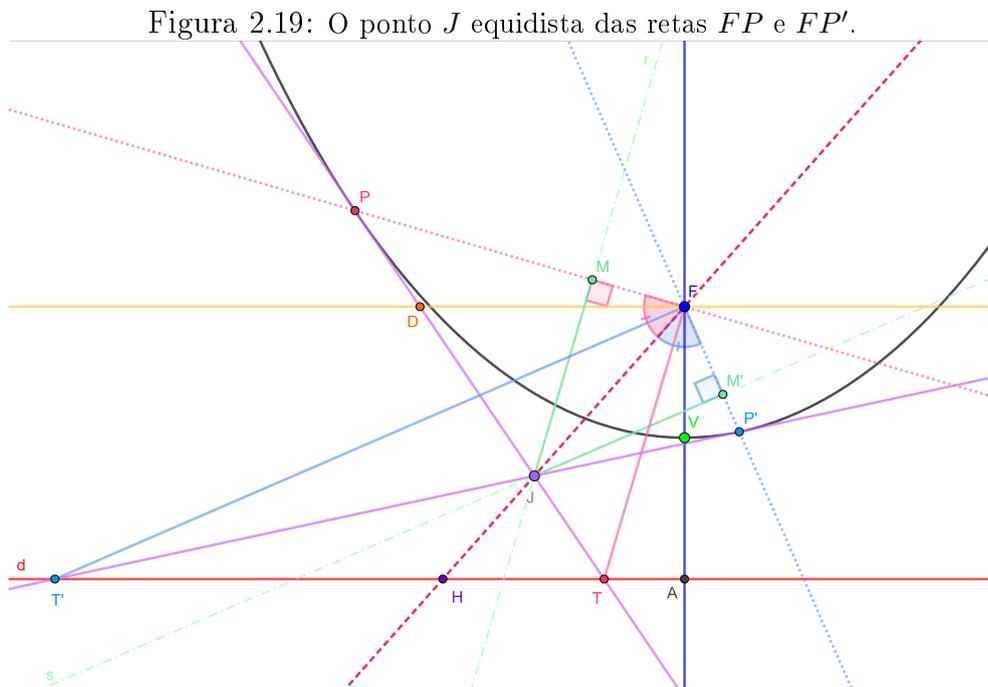
pois, pelo teorema 2.15, tem-se

$$\frac{FD}{FT} = \frac{FV}{VA} = \frac{FD'}{FT'} \Rightarrow \frac{FD}{FT} = \frac{FD'}{FT'}.$$

Logo, pelo teorema da bissetriz interna (1.21), segue que $\widehat{JFT} \equiv \widehat{JFT'}$. □

Corolário 2.17. O ponto J equidista das retas FP e FP' .

Demonstração. Sejam M e M' os pés das perpendiculares baixadas de J até as retas FP e FP' , respectivamente. Logo, como \widehat{FMJ} e $\widehat{FM'J}$ são ambos ângulos retos, tem-se que $\widehat{FMJ} \equiv \widehat{FM'J}$ (ver figura 2.19).



Fonte: Elaborada pela autora.

Da proposição anterior (2.16), segue que $\widehat{JFT} \equiv \widehat{JFT'}$. Observe ainda que o segmento JF é um lado comum aos triângulos JFM e JFM' . Logo, pelo caso *L.A.A.*, tem-se que

$$\triangle JFM \equiv \triangle JFM'.$$

Portanto

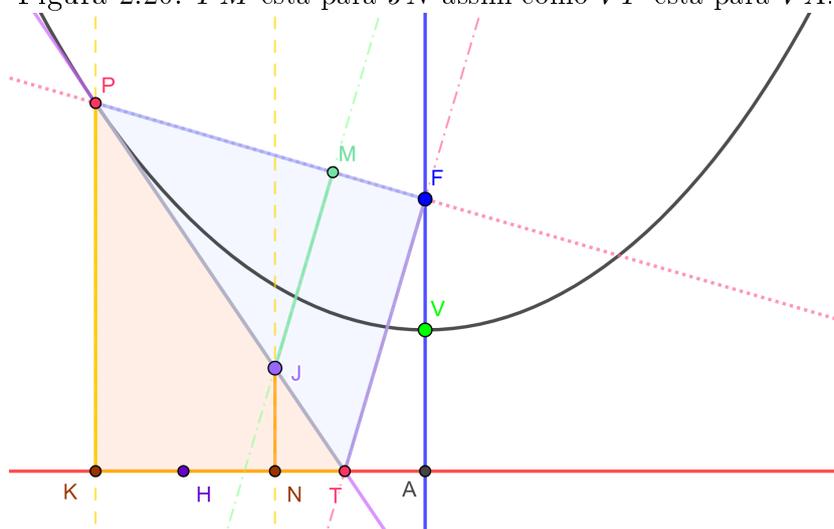
$$JM = JM'.$$

□

Proposição 2.18. Sejam c uma cônica, e P um ponto de c . Seja ainda J um ponto qualquer da reta tangente a essa cônica no ponto P . Seja N o pé da perpendicular baixada de J até a diretriz de c , e M o pé da perpendicular baixada de J até a reta focal PF . Então,

$$\frac{FM}{JN} = \frac{VF}{VA}.$$

Figura 2.20: FM está para JN assim como VF está para VA .



Fonte: Elaborada pela autora.

Demonstração. Pelo teorema fundamental da proporcionalidade (teorema 1.15), obtém-se que

$$\frac{FM}{FP} = \frac{JT}{TP} \text{ e } \frac{JT}{TP} = \frac{JN}{PK},$$

isso implica que

$$\begin{aligned} \frac{FM}{FP} &= \frac{JN}{PK} \\ \Rightarrow \frac{FM}{JN} &= \frac{FP}{PK} = \frac{VF}{VA}. \end{aligned}$$

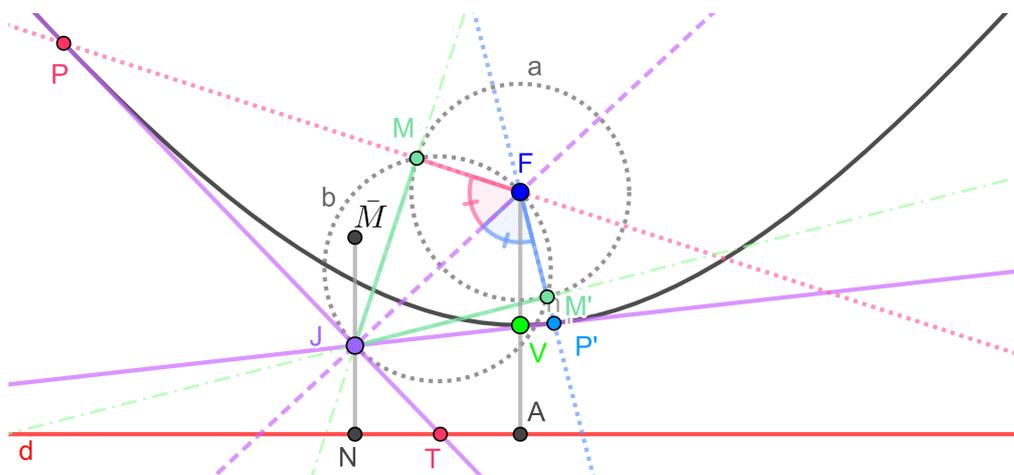
□

Além disso,

$$\frac{FM}{JN} \stackrel{\text{prop.2.18}}{=} \frac{VF}{VA}.$$

Logo, a interseção das retas FM e FM' com a cônica são os pontos cujas retas tangentes se intersectam em J (ver figura 2.22).

Figura 2.22: As retas tangentes em P e P' se intersectam em J



Fonte: Elaborada pela autora.

Observação 2.19. Caso não se conheça o traço da curva, mas se conheça a diretriz, basta traçar as perpendiculares às retas FM e FM' passando por F e determinar os pontos T e T' como sendo as respectivas interseções dessas retas com a diretriz. As retas TJ e $T'J$ serão tangentes à cônica. Os pontos P e P' , determinados pela interseção das retas FM com TJ e FM' com $T'J$, respectivamente, são os pontos de tangência.

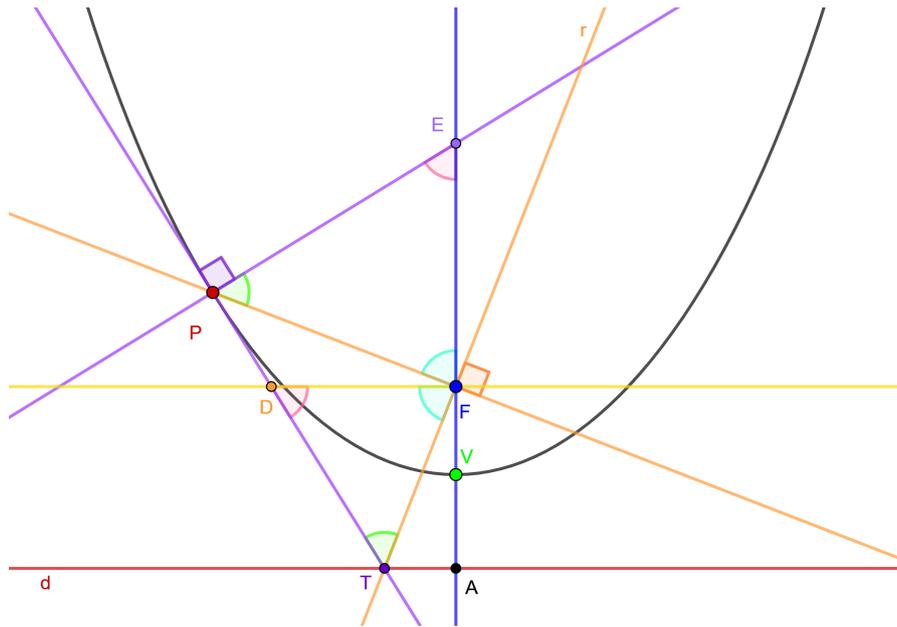
Proposição 2.20. Sejam c uma cônica, P um ponto de c e t a reta tangente à cônica no ponto P . Sejam ainda, r a reta perpendicular a t passando por P , e E o ponto de interseção da reta r com o eixo da cônica. Então,

$$\frac{FE}{FP} = \frac{VF}{VA}.$$

Demonstração. Sejam T o ponto de interseção da reta t com a diretriz, e D o ponto de interseção da reta t com a reta que contém o *latus rectum* (ver figura 2.23). Observe que

os ângulos FPE e DTF são, ambos, complementares ao ângulo FPD , o que implica que $\widehat{FPE} \equiv \widehat{DTF}$. Note ainda que os ângulos EFP e DFT são complementares ao ângulo TFA , logo $\widehat{EFP} \equiv \widehat{DFT}$. Portanto, segue que $\widehat{PEF} \equiv \widehat{TDF}$, e que $\triangle PEF \sim \triangle TDF$, pelo caso A.A.A.

Figura 2.23: FE está para FP assim como VF está para VA .



Fonte: Elaborada pela autora.

Da semelhança dos referidos triângulos, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{FE}{FP} &= \frac{FD}{FT} \\ &= \frac{VF}{VA} \quad (\text{pelo teorema 2.15}). \end{aligned}$$

□

Proposição 2.21. Sejam c uma cônica, P um ponto de c e t a reta tangente à cônica no ponto P . Sejam ainda r a reta perpendicular a t passando por P , E o ponto de interseção da reta r com o eixo da cônica. E L o pé da perpendicular baixada de E até a reta que contém a corda focal PF . Então o segmento PL possui a mesma medida do *semilatus rectum*.

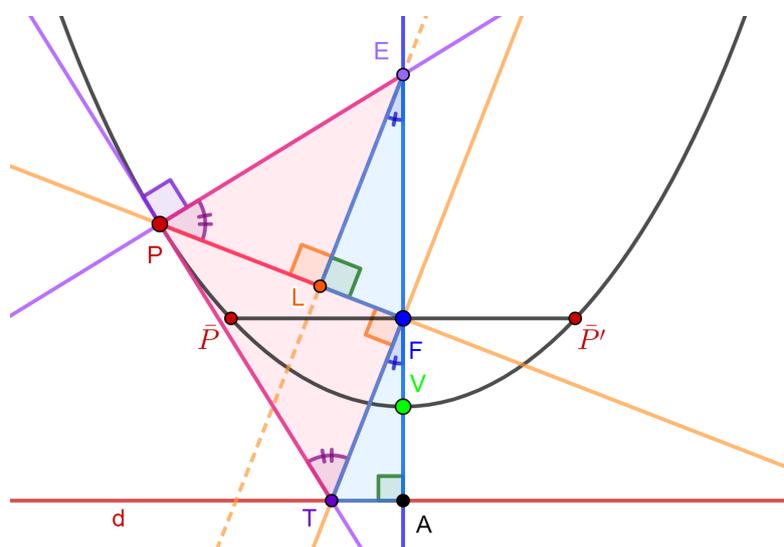
Demonstração. Seja T o ponto de interseção da reta t com a diretriz. Na proposição 2.20 foi observado que $\widehat{FPE} \equiv \widehat{PTF}$, pois ambos são complementares de \widehat{FPT} . Por

construção, $\widehat{PLE} \equiv \widehat{TFP}$, logo $\widehat{PEL} \equiv \widehat{FPT}$, e $\triangle PEL \sim \triangle FPT$, pelo caso A.A.A. (ver figura 2.24).

Dessa semelhança, obtém-se que

$$\frac{PL}{LE} = \frac{FT}{FP} \Rightarrow FT \cdot LE = PL \cdot FP \quad (2.9)$$

Figura 2.24: O segmento PL possui a mesma medida do *semilatus rectum*.



Fonte: Elaborada pela autora.

Observe ainda que os triângulos FLE e TAF são semelhantes (caso A.A.A.), visto que

$\widehat{FLE} \equiv \widehat{TAF}$, pois ambos são ângulos retos e

$\widehat{LEF} \equiv \widehat{TFA}$, pois LE e FT são retas paralelas cortadas pela reta AF (que é o eixo),

e, conseqüentemente $\widehat{LFE} \equiv \widehat{ATF}$.

Daí, segue que

$$\frac{LE}{FA} = \frac{FE}{FT} \Rightarrow FT \cdot LE = FA \cdot FE. \quad (2.10)$$

De (2.9) e (2.10), segue que

$$PL \cdot FP = FA \cdot FE \Rightarrow \frac{PL}{FA} = \frac{FE}{FP} \stackrel{\text{prop.2.15}}{=} \frac{VF}{VA}. \quad (2.11)$$

Sejam \bar{P} uma extremidade do *latus rectum*, e \bar{K} o pé da perpendicular baixada de \bar{P} até a diretriz de c .

Observe que $\bar{P}\bar{K} = FA$. Disso, e do fato de que \bar{P} é um ponto da cônica, segue que

$$\frac{\bar{P}F}{FA} = \frac{VF}{VA}. \quad (2.12)$$

Logo, das relações 2.11 e 2.12, segue que

$$\frac{PL}{FA} = \frac{\bar{P}F}{FA},$$

o que implica que $PL = \bar{P}F$. Ou seja, o segmento PL possui a mesma medida do *semilatus rectum*. \square

Teorema 2.22. Sejam r uma reta tangente a uma cônica c em um ponto Q e PP' uma corda de c , paralela à reta r , com P e P' distintos de Q . Sejam t e t' as retas tangentes a c nos pontos P e P' , respectivamente, tais que t e t' se intersectam em um ponto J . Sejam ainda B e B' os respectivos pontos de interseção de t e t' com a reta r . Sob essas condições tem-se que $QB = QB'$ (ou seja, o ponto Q é o ponto médio do segmento BB').

Demonstração. Sejam M o pé da perpendicular baixada de J até a reta FP , e M' o pé da perpendicular baixada de J até a reta FP' .

Sejam ainda, N e L os pés das perpendiculares baixadas de B até FP e FQ , respectivamente. De maneira análoga, defina N' e L' como os pés das perpendiculares baixadas de B' até as retas FP' e FQ (ver figura 2.25).

Do fato de que as retas BB' e PP' são paralelas, e considerando a hipótese de que r é paralela à reta $\overleftrightarrow{PP'}$, segue que

$$\frac{JP}{BP} = \frac{JP'}{B'P'},$$

mas,

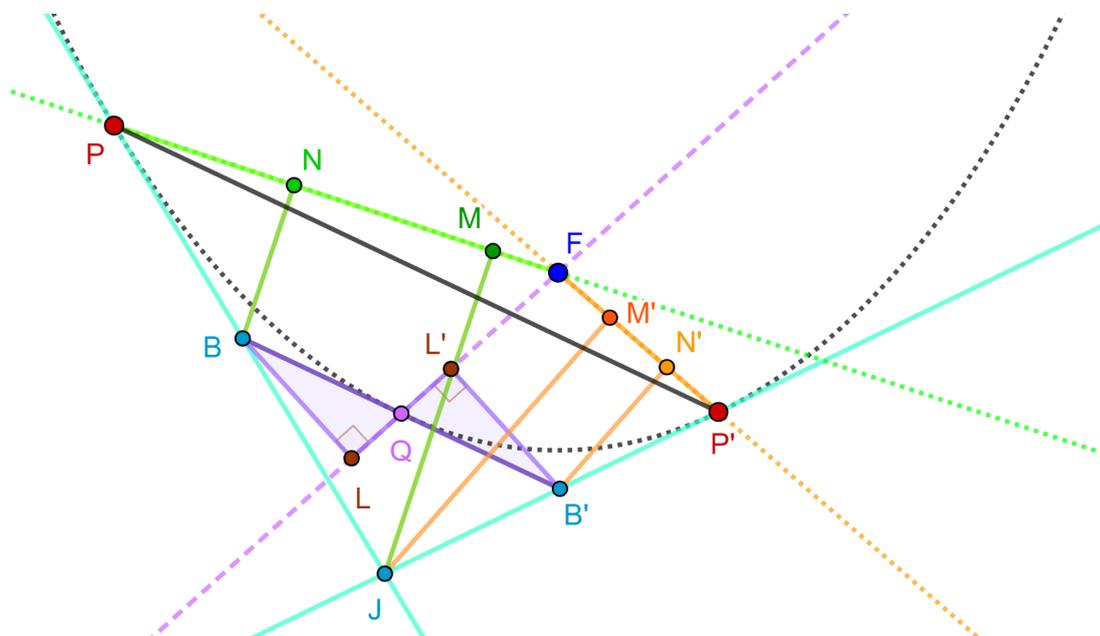
$$\frac{JP}{BP} = \frac{JM}{BN} \text{ e } \frac{JP'}{B'P'} = \frac{JM'}{B'N'},$$

o que implica que

$$\frac{JM}{BN} = \frac{JM'}{B'N'}.$$

Porém, pelo corolário 2.17, tem-se que $JM = JM'$. Segue-se disso que $BN = B'N'$.

Figura 2.25: O ponto Q é o ponto médio do segmento BB' .



Fonte: Elaborada pela autora.

Observe que B é o ponto de interseção das retas tangentes à cônica em P e Q . E, como L e M foram definidos como os respectivos pés das perpendiculares baixadas de B até FP e FQ , segue, pelo mesmo corolário, que $BN = BL$.

Analogamente, tem-se que $B'N' = B'L'$. Logo, como $BN = B'N'$, tem-se $BL = B'L'$. Como BL e $B'L'$ são ambos perpendiculares a QF , tem-se que $\widehat{BLQ} \equiv \widehat{B'L'Q}$. Logo os triângulos BLQ e $B'L'Q$ são congruentes pelo caso LLA , e portanto,

$$BQ = B'Q.$$

□

Corolário 2.23. Nas condições do teorema 2.22, a reta JQ , caso o ponto J exista, intersecta a corda PP' em seu ponto médio.

Demonstração. Seja X o ponto de interseção entre as retas JQ e PP' .

Do fato das retas PP' e BB' serem paralelas cortadas pela transversal definida por J e Q , segue que

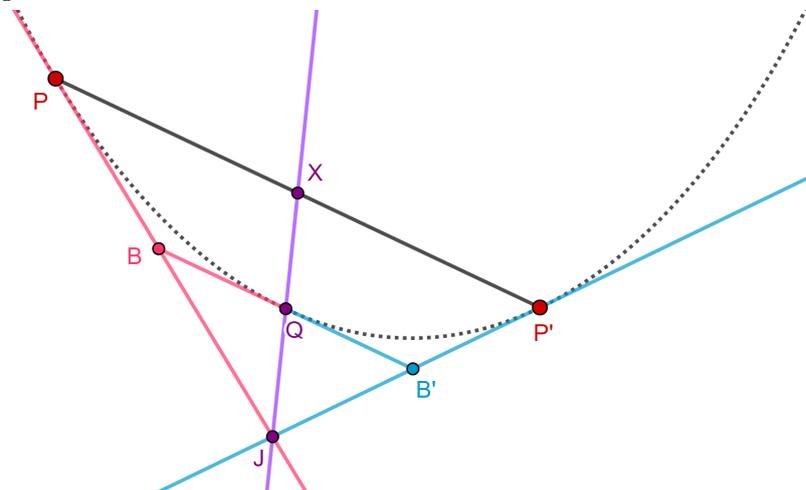
$$\frac{PX}{BQ} = \frac{JX}{JQ} \text{ e } \frac{P'X}{B'Q} = \frac{JX}{JQ}. \quad (2.13)$$

O que implica que

$$\frac{PX}{BQ} = \frac{P'X}{B'Q}. \quad (2.14)$$

E como, pelo teorema 2.22, $BQ = B'Q$, obtém-se que $PX = P'X$. Portanto, X é o ponto médio do segmento PP' (ver figura 2.26). □

Figura 2.26: A reta JQ intersecta a corda PP' em seu ponto médio.



Fonte: Elaborada pela autora.

É fácil ver que, pelas propriedades de paralelogramos, quando as tangentes são paralelas, então a reta QM (M ponto médio da corda PP') é paralela a ambas.

O corolário 2.23 garante, na verdade, que toda corda paralela a uma reta tangente a uma cônica é bissectada pela reta definida pelo ponto de interseção (caso exista) entre as tangentes em suas extremidades e o ponto de tangência (ver figura 2.27).

Corolário 2.24. Sejam l e l' as tangentes à cônica em P e P' , respectivamente, e seja M o ponto médio de PP' . Suponha que exista o ponto J de interseção entre essas duas retas. A reta JM intersecta a cônica c em um ponto Q , tal que a reta tangente à cônica nesse ponto é paralela ao segmento PP' .

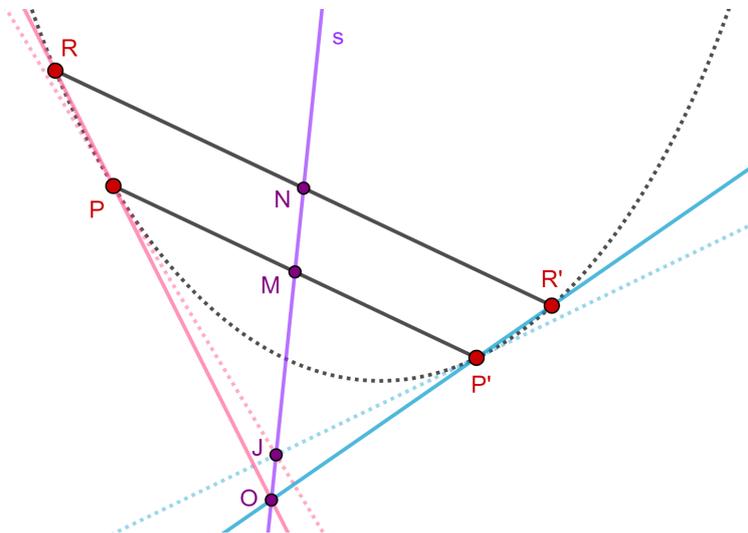
Demonstração. Segue direto do corolário anterior (2.23) e do fato que dois pontos determinam uma reta de forma única. □

Teorema 2.25. Qualquer corda paralela a uma corda arbitrária PP' de uma cônica c é bissectada pela reta determinada pelo ponto de interseção, caso exista, das tangentes nas extremidades P e P' e pelo ponto médio da corda PP' .

Demonstração. Sejam M o ponto médio do segmento PP' e sejam R e R' pontos da cônica tais que RR' é outra corda de c , paralela à corda PP' .

Sejam O o ponto de interseção das retas PR e $P'R'$ e J o ponto de interseção das tangentes à cônica nos pontos P e P' . Seja s a reta determinada pelo ponto J e pelo ponto médio M da corda PP' (ver figura 2.27).

Figura 2.27: A reta s intersecta a corda RR' em seu ponto médio.



Fonte: Elaborada pela autora.

Segue do teorema 1.15 (teorema fundamental da proporcionalidade) que:

$$\triangle PMO \sim \triangle RNO \quad \text{e} \tag{2.15}$$

$$\triangle P'MO \sim \triangle R'NO. \tag{2.16}$$

Dessas relações de semelhanças segue que

$$\frac{ON}{OM} \stackrel{(2.15)}{=} \frac{RN}{PM} \quad \text{e} \quad \frac{ON}{OM} \stackrel{(2.16)}{=} \frac{R'N}{P'M},$$

o que implica que

$$\frac{RN}{PM} = \frac{R'N}{P'M}.$$

Como $PM = P'M$, segue que $RN = R'N$. Ou seja, N é o ponto médio da corda RR' . \square

2.2 Algumas propriedades envolvendo Média Harmônica

Proposição 2.26. O *semilatus rectum* é a média harmônica entre os dois segmentos de qualquer corda focal de uma cônica.

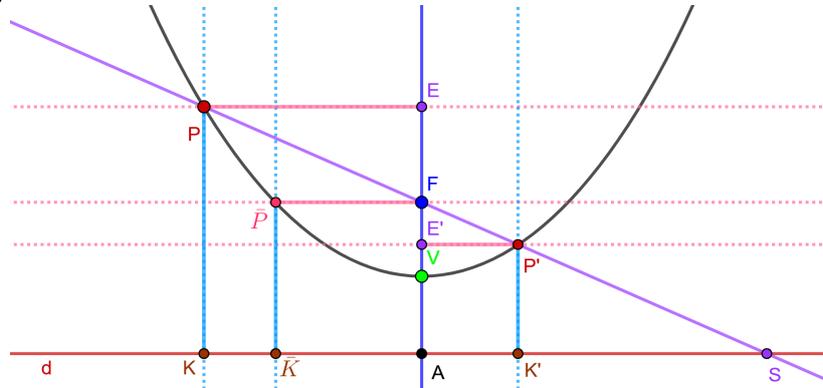
Demonstração. Sejam c uma cônica, $\overline{PP'}$ uma corda focal distinta do *latus rectum*, \bar{P} uma extremidade do *latus rectum* de forma que $F\bar{P}$ é um *semilatus rectum*.

Queremos mostrar que

$$F\bar{P} = \frac{2}{\frac{1}{FP} + \frac{1}{FP'}} = 2 \cdot \frac{FP \cdot FP'}{FP + FP'}.$$

Seja \bar{K} o pé da perpendicular baixada de \bar{P} até a diretriz. Sejam ainda E e E' os pés das perpendiculares baixadas de P e P' ao eixo da cônica, respectivamente (ver figura 2.28).

Figura 2.28: O *semilatus rectum* é a média harmônica entre PF e $P'F$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Observe que os ângulos PFE' e $P'FE'$ são alternos internos, logo, são congruentes. Os ângulos FEP e $FE'P'$ também são congruentes, pois ambos são ângulos retos. Observando os triângulos FPE e $FP'E'$ e conhecendo a propriedade de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° , conclui-se que os ângulos FPE e $FP'E'$ também são congruentes. Disso, concluímos que os triângulos PFE' e $P'FE'$ são semelhantes pelo caso $A.A.A.$

Dessa semelhança, segue que

$$\frac{FP}{FP'} = \frac{FE}{FE'} = \frac{EA - FA}{FA - E'A} \quad (2.17)$$

Do fato de que P , P' , \bar{P} e V são pontos da cônica, tem-se que as seguintes relações são satisfeitas:

$$\frac{FP}{PK} = \frac{FP'}{P'K'} = \frac{F\bar{P}}{\bar{P}\bar{K}} = \frac{FV}{VA}. \quad (2.18)$$

Porém, como P e E pertencem a uma reta paralela à reta diretriz d , tem-se que ambos equidistam de d . Logo, $PK = EA$. De modo análogo, conclui-se que $P'K = E'A$ e $\bar{P}\bar{K} = FA$.

Então,

$$\frac{FP}{EA} = \frac{FP'}{E'A} = \frac{F\bar{P}}{FA} = \frac{FV}{VA}.$$

Ou seja, FP , FP' e $F\bar{P}$ são respectivamente proporcionais a EA , $E'A$ e FA .

Logo, da relação (2.17) tem-se que

$$\frac{FP}{FP'} = \frac{FP - F\bar{P}}{F\bar{P} - FP'}.$$

O que implica que

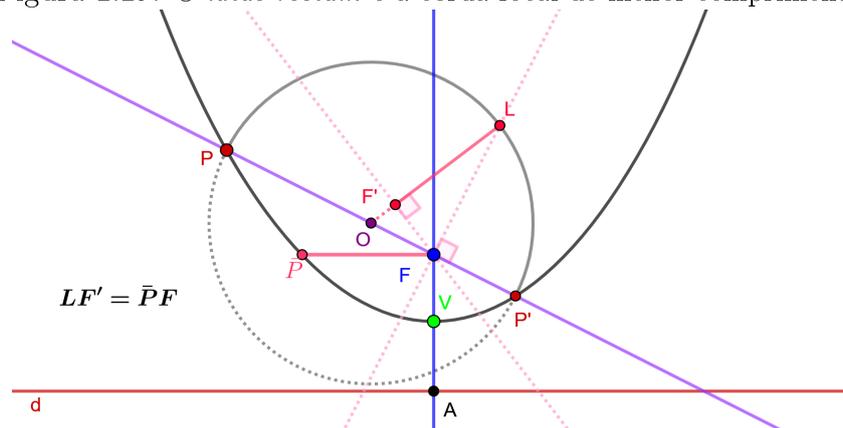
$$\begin{aligned} FP \cdot (F\bar{P} - FP') &= FP' \cdot (FP - F\bar{P}) \\ \Rightarrow F\bar{P} \cdot (FP + FP') &= 2 \cdot (FP \cdot FP') \\ \Rightarrow F\bar{P} &= 2 \cdot \frac{FP \cdot FP'}{FP + FP'}. \end{aligned}$$

Portanto, o *semilatus rectum* é a média harmônica entre os segmentos FP e FP' da corda focal FPF' . □

Teorema 2.27. O *latus rectum* é a corda focal de menor comprimento.

Demonstração. Sejam c uma cônica e $\bar{P}F\bar{P}'$ o *latus rectum* de c e seja r a medida do *semilatus rectum*. Segue de (1.15) que $F\bar{P} = F\bar{P}' = r$. Seja a uma semicircunferência de raio r . Pela definição de média harmônica tem-se que r é a média harmônica entre $\bar{P}F$ e $F\bar{P}'$.

Figura 2.29: O *latus rectum* é a corda focal de menor comprimento.



Fonte: Elaborada pela autora.

Por outro lado, pela proposição 2.26, tem-se que a medida do *semilatus rectum* é a média harmônica entre os dois segmentos de qualquer corda focal (ver a representação geométrica na figura 2.29). Ou seja, se o segmento FPF' for uma corda focal qualquer,

distinta do *latus rectum* $\bar{P}\bar{F}\bar{P}'$, então PPF' é o diâmetro de uma circunferência de raio R , de forma que $\bar{P}F = r \leq R$, sendo que a igualdade ocorre, se, e somente se $r = R$, o que implica, pela observação 1.12, que F é o ponto médio da corda focal. Veja que, segue da observação 1.36, que o *latus rectum* é a única corda focal que satisfaz essa propriedade. Logo, $\bar{P}F + \bar{P}'F = 2r \leq 2R = PF + P'F$. Portanto, o *latus rectum* é a corda focal de menor comprimento. \square

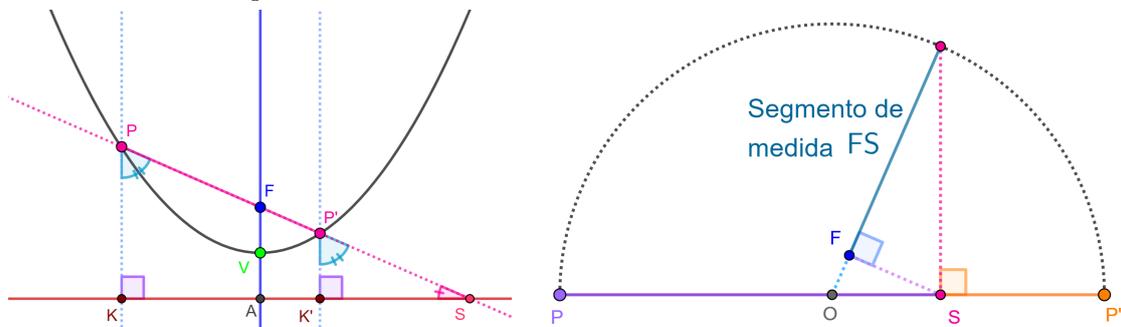
Teorema 2.28. Seja PPF' uma corda focal de uma cônica e seja S o ponto de interseção da reta suporte da corda PPF' (corda focal definida por P e P') com a diretriz. Então FS é a média harmônica entre PS e $P'S$.

Demonstração. Sejam c uma cônica, PPF' uma corda focal de c e S o ponto de interseção da reta PF com a diretriz da cônica. Sejam ainda K e K' os pés das perpendiculares baixadas de P e P' à diretriz da cônica, respectivamente (veja figura 2.30, à esquerda). Por construção, tem-se que

$$\widehat{PKS} \equiv \widehat{P'K'S},$$

pois ambos são ângulos retos.

Figura 2.30: FS é a média harmônica entre PS e $P'S$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Como as retas PK e $P'K'$ são paralelas cortadas pela transversal PP' , segue que os ângulos KPS e $K'P'S$ são correspondentes, o que implica que também são congruentes. Então os triângulos SKP e $SK'P'$ são semelhantes, pelo caso *A.A.A.*

Daí, segue que

$$\frac{PS}{P'S} = \frac{PK}{P'K'} \stackrel{2.1}{=} \frac{FP}{FP'} = \frac{PS - FS}{FS - P'S},$$

o que significa que PP' está dividido harmonicamente em F e S , ou seja, se S é o ponto de interseção da reta PP' com a diretriz, então FS é a média harmônica entre PS e $P'S$ (ver figura 2.30, à direita), visto que

$$\begin{aligned}\frac{PS}{P'S} &= \frac{PS - FS}{FS - P'S} \Rightarrow PS \cdot (FS - P'S) = P'S \cdot (PS - FS) \\ &\Rightarrow (PS \cdot FS) - (PS \cdot P'S) = (P'S \cdot PS) - (P'S \cdot FS) \\ &\Rightarrow (PS \cdot FS) + (P'S \cdot FS) = (P'S \cdot PS) + (PS \cdot P'S) \\ &\Rightarrow FS \cdot (PS + P'S) = 2 \cdot (PS \cdot P'S) \\ &\Rightarrow FS = 2 \cdot \frac{PS \cdot P'S}{PS + P'S}.\end{aligned}$$

□

CAPÍTULO 3

CÔNICAS CENTRADAS E NÃO CENTRADAS

Até aqui foi utilizada uma definição unificada para as cônicas não degeneradas. No que se segue o estudo das cônicas será dividido em dois casos particulares: *cônicas não centradas* (parábolas) e *cônicas centradas* (elipses e hipérbolas).

É importante ressaltar que, no caso das cônicas centradas, existem dois focos e duas diretrizes, e cada foco está relacionado a uma diretriz.

Nesse capítulo, sempre que forem mencionados diretriz e foco é importante ter ciência de que se trata de um foco e sua respectiva diretriz, independentemente da cônica em questão ser uma elipse, parábola ou uma hipérbole.

3.1 Parábola (cônicas não centradas)

Foi visto na seção 1.3.1 que, fixados uma reta d e um ponto F em um plano, o lugar geométrico dos pontos P desse plano, sujeitos à condição $\frac{D(P, F)}{D(P, d)} = 1$, é uma parábola.

Como $\frac{D(P, F)}{D(P, d)}$ é igual a 1 se, e somente se, $D(P, F)$ é igual a $D(P, d)$, podemos então enunciar a seguinte definição:

Definição 3.1 (Parábola). A parábola é o lugar geométrico dos pontos P de um plano que equidistam de um ponto fixo, chamado foco, e de uma reta fixa, chamada diretriz.

Sejam F o foco, d a reta diretriz e K o pé da perpendicular baixada de P a d . A definição 3.1 afirma que a parábola é formada por todos os pontos P tais que $D(P, F) = D(P, K)$.

No capítulo 1 foi apresentado um método geral de construção das cônicas. Veja que, se denotando por A o pé da perpendicular baixada de F à diretriz d , a definição 3.1 afirma que o vértice V de uma parábola é o ponto médio do segmento FA . Ou seja, para que a cônica, construída pelo método geral, seja uma parábola, basta escolher o ponto V (vértice), sobre o eixo, como sendo o ponto médio entre o foco e o ponto A .

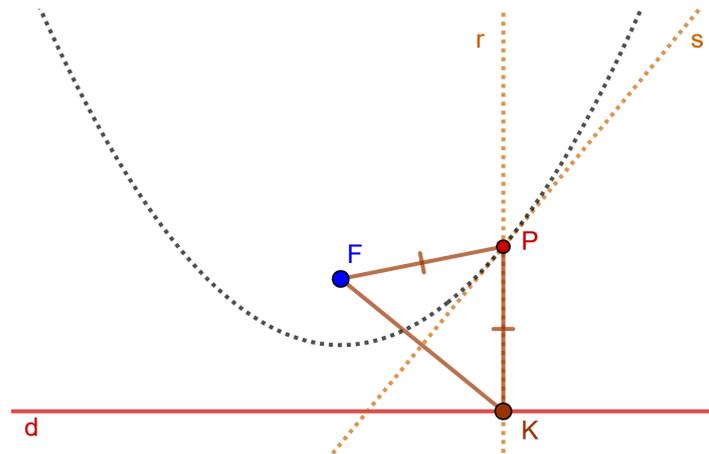
3.1.1 Construção da parábola

A seguir será apresentado um método para construção da parábola.

Seja d uma reta e F um ponto. Escolhendo-se um ponto K , arbitrário, sobre a reta d é possível encontrar um ponto P , tal que

$$\frac{D(P, F)}{D(P, d)} = 1. \quad (3.1)$$

Figura 3.1: Construção da parábola usando a mediatriz do segmento FK .



Fonte: Elaborada pela autora.

De fato, sejam K um ponto arbitrário sobre a diretriz d e r uma reta que incide sobre K , perpendicular a d . Sejam ainda s a mediatriz do segmento FK e P o ponto de interseção entre r e s (ver figura 3.1). Como P é um ponto da mediatriz de \overline{FK} , então P equidista de F e K (ou seja, $D(P, F) = D(P, K)$). Observe que K é o pé da

perpendicular baixada de P até a reta d . Logo, $D(P, K) = D(P, d)$. E, por transitividade, $D(F, P) = D(P, d)$, o que implica que a relação (3.1) é satisfeita.

Será visto mais adiante que a reta s , assim definida, é a tangente à cônica no ponto P .

3.1.2 Algumas definições e propriedades da parábola

Proposição 3.2. Uma reta paralela ao eixo intersecta a parábola em um único ponto.

Demonstração. Suponha que exista P' , distinto de P , outro ponto sobre a reta KP , tal que P' é um ponto da parábola. Então,

$$FP = PK \quad \text{e} \quad (3.2)$$

$$FP' = P'K. \quad (3.3)$$

Subtraindo FP' de ambos os lados de (3.2), tem-se

$$\begin{aligned} FP - FP' &= PK - FP' \stackrel{(3.3)}{\Rightarrow} FP - FP' = PK - P'K \\ &\Rightarrow FP - FP' = PP' \\ &\Rightarrow FP = FP' + PP', \end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois, os segmentos FP , FP' e PP' determinam um triângulo e a soma da medida de dois lados de um triângulo é sempre maior que o terceiro lado (teorema 1.14).

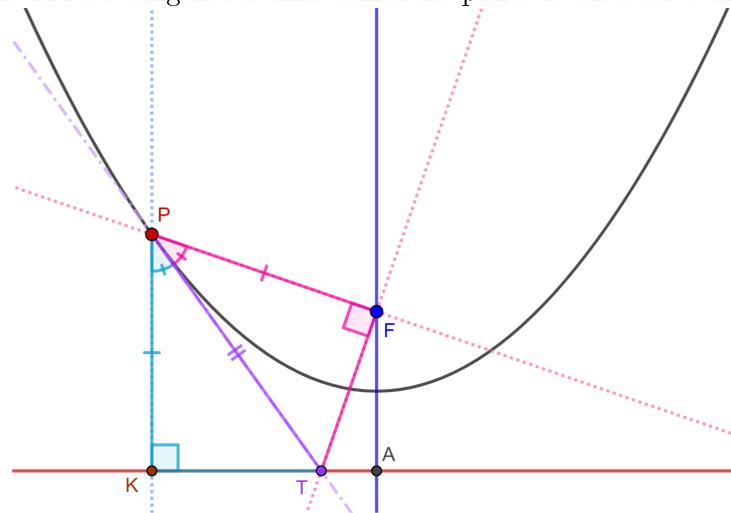
Portanto, qualquer reta paralela ao eixo (incluindo o próprio eixo) intersecta a parábola em um único ponto. \square

Segue desse resultado que não é possível definir um segundo ponto V' sobre o eixo de uma parábola que também pertença a ela. Devido a isso, parábolas são ditas *cônicas não centradas*.

Definição 3.3. (Diâmetro da parábola) Uma reta paralela ao eixo da parábola é chamada de *diâmetro da parábola*.

Proposição 3.4. Sejam c uma parábola, F o seu foco, P um ponto arbitrário de c e K o pé da perpendicular baixada de P até a diretriz. A reta tangente a c no ponto P bissecta o ângulo FPK .

Figura 3.2: A reta tangente a uma cônica no ponto P bissecta o ângulo FPK .



Fonte: Elaborada pela autora.

Demonstração. Sejam r a reta tangente à parábola no ponto P e T o ponto de interseção da reta r com a diretriz. Pela proposição 2.7, tem-se que o ângulo PFT é um ângulo reto.

Pela definição de parábola, tem-se que

$$D(P, F) = D(P, d) \Rightarrow D(P, F) = D(P, K)$$

e, conseqüentemente, os segmentos PF e PK são congruentes.

Então analisando os triângulos PFT e PKT , conclui-se que são congruentes pelo caso *L.L.A.*, pois os lados PF e PK são congruentes, o lado PT é lado comum e os ângulos PKT e PFT são congruentes, pois ambos são ângulos retos. Logo, os ângulos TPK e TPF são congruentes e, portanto, a reta PT bissecta o ângulo FPK . \square

Observação 3.5. Pela proposição 3.4, pode-se observar que os segmentos KT e TF também são congruentes.

A informação apresentada na observação anterior será útil na demonstração do teorema 3.40, presente no final do capítulo 3.

3.2 Cônicas centradas

Foi visto na seção 1.3.1 que, fixados uma reta d e um ponto F em um plano, o lugar geométrico dos pontos P desse plano, sujeitos à condição $\frac{D(P, F)}{D(P, d)} = e$, e constante, é uma

cônica, sendo: uma parábola se $e = 1$; uma hipérbole se $e > 1$; uma elipse se $0 < e < 1$; e, quando $e = 0$ tem-se uma circunferência, que é uma elipse degenerada.

Foi visto também, na proposição 3.2 que, quando $e = 1$, a cônica é uma parábola, que é uma cônica não centrada. No que se segue será mostrado que elipses e hipérbolles possuem um segundo vértice V' e um segundo foco F' , o que permite determinar um ponto C denominado *centro*, tal que, V' e F' são simétricos de V e F , em relação a C , respectivamente. Por este motivo, elipses e hipérbolles são ditas *cônicas centradas*.

A seguir, será apresentado um método para encontrar V' , um ponto sobre o eixo e distinto de V , que pertença à cônica quando essa não se tratar de uma parábola.

3.2.1 Construção de um segundo vértice de uma cônica centrada

Seja A o pé da perpendicular baixada do foco F até a diretriz. No que se segue, V denotará um ponto sobre o segmento AF , tal que $D(V, F) < D(V, A)$ ou $D(V, F) > D(V, A)$, ou seja $\frac{D(V, F)}{D(V, A)} \neq 1$, nesses dois casos, será mostrado que construindo-se uma cônica pelo método apresentado no capítulo 1, obtém-se uma cônica centrada (elipse ou uma hipérbole, respectivamente), tendo V como um de seus vértices.

Agora, será apresentado um método para encontrar um segundo vértice de uma *cônica centrada*. Ou seja, busca-se encontrar um ponto V' , também sobre o eixo da cônica, tal que

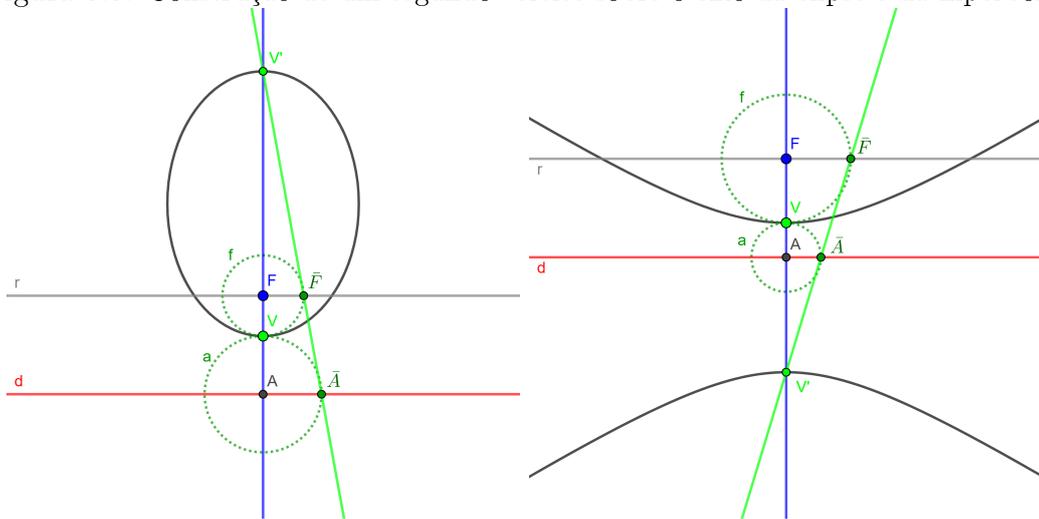
$$\frac{D(V', F)}{D(V', d)} = \frac{D(V', F)}{D(V', A)} = \frac{D(V, F)}{D(V, d)} = \frac{D(V, F)}{D(V, A)} = \frac{D(P, F)}{D(P, d)} = e \neq 1.$$

Sejam r uma reta paralela à diretriz passando por F , a uma circunferência de centro A e raio AV e f outra circunferência de centro F e raio FV .

Sejam \bar{A} e \bar{F} as interseções de a com a diretriz e de f com a reta r , respectivamente. Seja ainda V' a interseção da reta $\bar{A}\bar{F}$ com o eixo.

Afirmção 3.6. O ponto V' é um ponto da cônica.

Figura 3.3: Construção de um segundo vértice sobre o eixo da elipse e da hipérbole.



Fonte: Elaborada pela autora.

Demonstração. Observe que, por construção

$$r_f = VF = F\bar{F} \quad \text{e} \quad r_a = VA = A\bar{A}. \quad (3.4)$$

Pelo teorema fundamental da semelhança de triângulos (teorema 1.13), tem-se que

$$\triangle F\bar{F}V' \sim \triangle A\bar{A}V'.$$

Dessa semelhança, segue que

$$\frac{V'F}{V'A} = \frac{F\bar{F}}{A\bar{A}} \stackrel{(3.4)}{=} \frac{VF}{VA} = e.$$

Escrevendo em termos de distância, segue que

$$\frac{D(V', F)}{D(V', A)} = \frac{D(V, F)}{D(V, A)} \Rightarrow \frac{D(V', F)}{D(V', d)} = \frac{D(V, F)}{D(V, A)} = e.$$

Portanto, V' é um ponto da cônica. □

Repare que, se a distância do vértice V ao foco for menor que a distância de V ao

ponto A , então $F\bar{F}$ é menor que $A\bar{A}$. Ou seja,

$$D(V, F) < D(V, A) \Rightarrow F\bar{F} < A\bar{A}.$$

Como os triângulos $F\bar{F}V'$ e $A\bar{A}V'$ tem V' como vértice comum, com lados $F\bar{F}$ e $A\bar{A}$ correspondentes e ambos opostos ao vértice V' , então, pelo teorema fundamental da semelhança de triângulos (teorema 1.2) eles são semelhantes. Como $F\bar{F}$ é menor que $A\bar{A}$ segue que cada lado do triângulo $F\bar{F}V'$ é menor que o lado correspondente do triângulo $A\bar{A}V'$ (ver figura 3.3). E, portanto, $FV' < AV'$, e conseqüentemente, o ponto F está entre A e V' . Porém, como V está entre F e A , segue que V está entre A e V' . Nesse caso a cônica em questão será uma elipse.

De maneira análoga, é possível concluir que, caso a distância do vértice V ao foco seja maior que a distância de V ao ponto A , o ponto A está entre V e V' . Nesse caso, a cônica será uma hipérbole.

Estas observações serão importantes para a justificativa da existência de um foco F' , correspondente à uma diretriz d' , ambos simétricos à F e d com relação ao ponto médio do segmento VV' .

3.2.2 Algumas definições e propriedades das cônicas centradas

Nesta seção serão apresentados alguns resultados que são válidos para as cônicas centradas (elipses e hipérbóles).

Definição 3.7. Se c é uma cônica e existe um ponto V' , distinto de V , tal que V e V' são ambos pontos da cônica que estão sobre o eixo, então o ponto médio do segmento VV' é denominado *centro da cônica*. Nesse caso, diz-se que a cônica é uma *cônica centrada*.

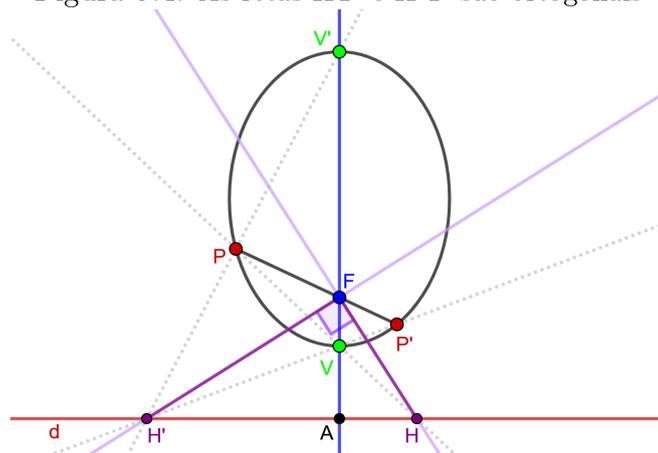
Definição 3.8. (Diâmetro de uma cônica centrada) As cordas que incidem sobre o centro de uma cônica são chamadas de *diâmetro*.

Proposição 3.9. Sejam c uma cônica centrada, V e V' os vértices e P um ponto qualquer de c , com P distinto de V e V' . Sejam ainda H e H' os pontos de interseção das retas PV e PV' com a diretriz, respectivamente. O ângulo HFH' é um ângulo reto.

Demonstração. Seja PP' uma corda focal. Pela proposição 2.4, as retas VP' e $V'P$ intersectam a diretriz no mesmo ponto. Pela proposição 2.1, a reta $H'F$ é a bissetriz

externa do ângulo $V'FP$ e, conseqüentemente, é a bissetriz do ângulo VFP . Ainda pela proposição 2.1, tem-se que a reta HF é bissetriz externa de VFP' (ver figura 3.4). Portanto, segue da proposição 1.20 que as retas HF e $H'F$ são ortogonais, o que implica que o ângulo HFH' é um ângulo reto. \square

Figura 3.4: As retas HF e $H'F$ são ortogonais



Fonte: Elaborada pela autora.

A proposição 3.9 permite provar a existência de outro foco e diretriz de uma cônica centrada, ambos correspondentes ao vértice V' .

Afirmção 3.10. Quando a cônica é centrada, a definição por meio da propriedade foco-diretriz pode ser estendida a um segundo foco F' e a uma segunda diretriz d' , simétricos a F e d , respectivamente, com relação ao centro C .

Demonstração. Sejam C o centro de uma cônica centrada, P um ponto, e F' , A' e d' , os simétricos de F , A e d , respectivamente, com relação ao ponto C . Sejam ainda G e G' os pontos de interseção das retas PV e PV' , respectivamente, com a reta d' .

Por construção, tem-se que

$$FA = F'A', \tag{3.5}$$

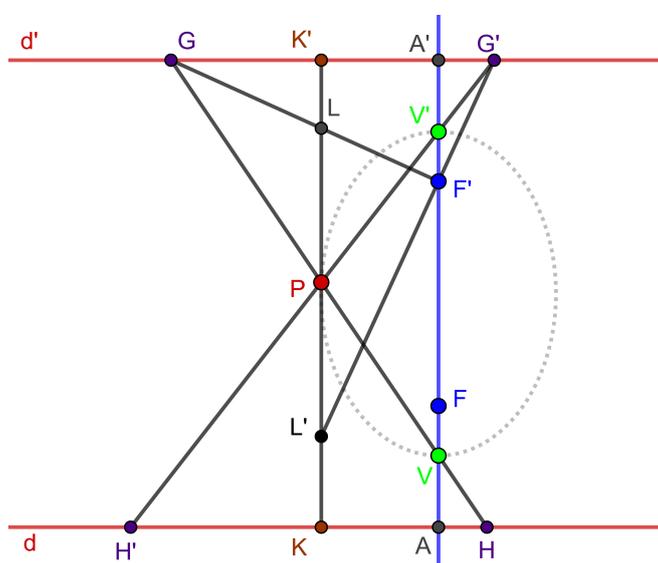
$$VA = V'A' \tag{3.6}$$

A seguir, tem-se dois casos: no caso (i) a cônica é uma elipse e no caso (ii) a cônica é uma hipérbole.

i) F está entre V e V' (ver figura 3.5);

$$\begin{aligned} VA' &= VV' + V'A' \\ \stackrel{(3.6)}{\Rightarrow} VA' &= VV' + VA \\ \Rightarrow VA' &= V'A. \end{aligned}$$

Figura 3.5: Caso i) F está entre V e V' .



Fonte: Elaborada pela autora.

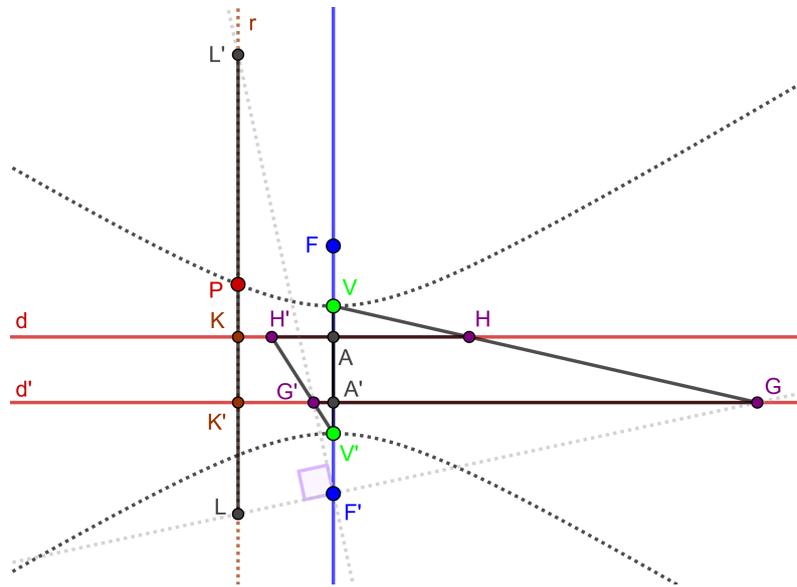
Observe que os triângulos HAV e $GA'V$ são semelhantes, visto que

$$\begin{aligned} \widehat{AVH} &\equiv \widehat{A'VG}, \text{ pois são ângulos opostos pelo vértice definido pelas retas } PV \text{ e pelo eixo;} \\ \widehat{HAV} &\equiv \widehat{GA'V}, \text{ pois ambos são ângulos retos e} \\ \widehat{AHV} &\equiv \widehat{A'GV}, \text{ pois são ângulos alternos internos.} \end{aligned}$$

De modo análogo, os triângulos $H'AV'$ e $G'A'V'$ também são semelhantes.

ii) V está entre F e V' (ver figura 3.6);

Figura 3.6: Caso ii) V está entre F e V'



Fonte: Elaborada pela autora.

$$\begin{aligned}
 VA' &= VA + AA' \stackrel{(3.6)}{\Rightarrow} VA' = V'A' + AA' \\
 &\Rightarrow VA' = V'A.
 \end{aligned}$$

Observe que nesse caso tem-se, pelo teorema 1.13, que os triângulos HAV e $GA'V$ são semelhantes. Pelo mesmo teorema, conclui-se também a semelhança entre os triângulos $H'AV'$ e $G'A'V'$.

Em ambos os casos (casos (i) e (ii)), tem-se que

$$\begin{aligned}
 VA' &= V'A, & (3.7) \\
 \triangle HAV &\sim \triangle GA'V, \\
 \triangle H'AV' &\sim \triangle G'A'V'.
 \end{aligned}$$

Das semelhanças entres esses triângulos, segue que

$$\frac{GA'}{HA} = \frac{VA'}{VA} \text{ e } \frac{H'A}{G'A'} = \frac{V'A}{V'A'}.$$

Entretanto, pelas relações (3.6) e (3.7) conclui-se que

$$\frac{VA'}{VA} = \frac{V'A}{V'A'}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{GA'}{HA} = \frac{H'A}{G'A'} &\Rightarrow GA' \cdot G'A' = HA \cdot H'A \\ &\Rightarrow GA' \cdot G'A' = (FA)^2 \\ &\stackrel{(3.5)}{\Rightarrow} GA' \cdot G'A' = (F'A')^2. \end{aligned}$$

Então o ângulo $GF'G'$ é um ângulo reto, onde $F'A'$ é a média proporcional entre os segmentos GA' e $G'A'$.

Sejam r a reta perpendicular à diretriz passando por P , K e K' os respectivos pontos de interseção da reta r com as retas d e d' . Sejam ainda L e L' os respectivos pontos de interseção das retas GF' e $G'F'$ com a reta r . Então,

$$\begin{aligned} \frac{PL}{PK'} = \frac{F'V}{VA'} = \frac{FV'}{V'A'} = e, \\ \frac{PL'}{PK'} = \frac{F'V'}{V'A'} = \frac{FV}{VA} = e. \end{aligned}$$

Logo,

$$PL = PL'.$$

Além disso, $\widehat{LF'L'}$ é um ângulo reto, pois ele é o suplementar de $\widehat{GF'G'}$, que é um ângulo reto, então, pelo teorema 1.19, segue que

$$F'P = PL' = PL,$$

logo,

$$\frac{F'P}{PK'} = \frac{F'V'}{V'A'} = e.$$

Portanto, uma cônica centrada também pode ser definida a partir da propriedade foco-diretriz por meio do foco F' e da diretriz d' . \square

Proposição 3.11. Seja P um ponto de uma cônica centrada, distinto de V e V' e seja ainda N o pé da perpendicular baixada de P até o eixo. Então,

$$\frac{(PN)^2}{VN \cdot V'N} = \frac{(FA)^2}{VA \cdot V'A}.$$

Demonstração. Sejam H e H' os pontos de interseção das retas PV e PV' com a diretriz, respectivamente. Observe que, pelo teorema fundamental da semelhança de triângulos (teorema 1.13), tem-se que

$$\triangle H'AV' \sim \triangle PNV'.$$

Dessa semelhança, segue que

$$\frac{PN}{V'N} = \frac{H'A}{V'A}. \quad (3.8)$$

Observe ainda que os triângulos HVA e PVN também são semelhantes, pelo caso *A.A.A.*, visto que

$$\begin{aligned} \widehat{PVN} &\equiv \widehat{HVA}, \text{ pois são opostos pelo vértice;} \\ \widehat{VNP} &\equiv \widehat{VAH}, \text{ pois ambos são ângulos retos e} \\ \widehat{NPV} &\equiv \widehat{AHV}, \text{ pois são ângulos alternos internos.} \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{PN}{VN} = \frac{HA}{VA}. \quad (3.9)$$

Note ainda que, do fato de que o ângulo HFH' é um ângulo reto (proposição 3.9), o triângulo HFH' é retângulo e, pela proposição 1.9, segue que

$$HA \cdot H'A = (FA)^2. \quad (3.10)$$

Multiplicando ambos os lados da relação (3.9) por $\frac{PN}{V'N}$, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{PN}{VN} \cdot \frac{PN}{V'N} &= \frac{HA}{VA} \cdot \frac{PN}{V'N} \stackrel{(3.8)}{\Rightarrow} \frac{(PN)^2}{VN \cdot V'N} = \frac{HA \cdot H'A}{VA \cdot V'A} \\ &\stackrel{(3.10)}{\Rightarrow} \frac{(PN)^2}{VN \cdot V'N} = \frac{(FA)^2}{VA \cdot V'A}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Observe que, como F , A , V e V' são pontos fixos de uma cônica, a relação (3.11) resulta em uma constante, independente da escolha do ponto P . \square

No que se segue, serão apresentadas algumas definições referentes a elipses e hipérbolles, separadamente.

3.2.3 Elipses

Definição 3.12. Sejam d uma reta e F um ponto, ambos fixos em um plano. O lugar geométrico dos pontos P desse plano, sujeitos à condição $\frac{D(P, F)}{D(P, d)} = e$, onde e é uma constante real, estritamente maior que zero e menor que um ($0 < e < 1$), é chamado de *elipse*.

Observe que, na construção da cônica (ver seção 1.3.1), ao escolher o ponto V entre os pontos A e F , tal que $D(V, F) < D(V, d)$, tem-se que

$$\frac{D(V, F)}{D(V, d)} = e < 1,$$

o que satisfaz a relação da definição 3.12.

Definição 3.13. (*Eixo maior*) Sejam V e V' os vértices de uma elipse que estão sobre o eixo. O segmento VV' é chamado de *eixo maior*. Os pontos V e V' são chamados de *vértices do eixo maior*.

Definição 3.14. (*Eixo menor*) Seja BB' a corda perpendicular ao eixo e que incide sobre o centro da elipse. O segmento BB' é chamado de *eixo menor* da elipse. Os pontos B e B' são chamados de *vértices do eixo menor* da elipse.

Definição 3.15. (*Círculo maior*) O círculo que tem o eixo maior da elipse como diâmetro é chamado de *círculo maior*.

Definição 3.16. (*Círculo menor*) O círculo que tem o eixo menor da elipse como diâmetro é chamado de *círculo menor*.

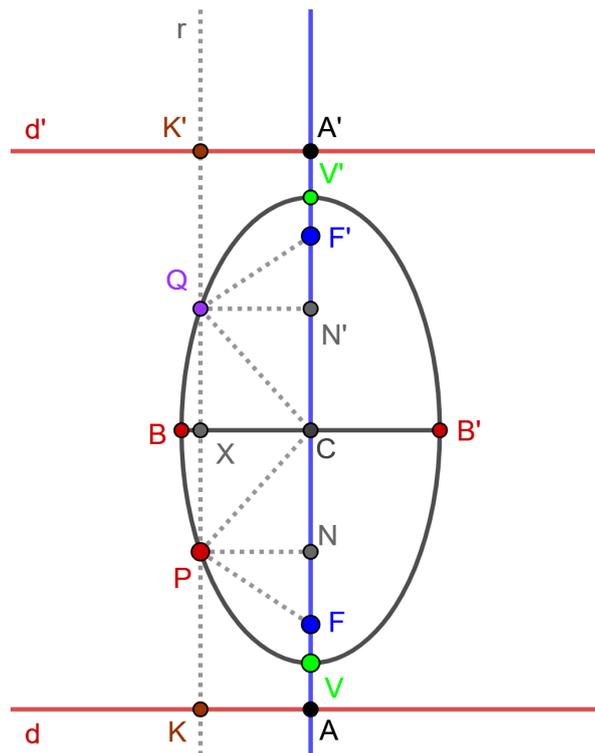
Foi visto anteriormente que as cônicas são simétricas em relação ao eixo. A proposição a seguir mostra que as elipses são, também, simétricas em relação ao eixo menor.

Proposição 3.17. A elipse é simétrica em relação ao eixo menor.

Demonstração. Os pontos V e V' são simétricos em relação ao eixo menor, por construção, visto que o eixo menor incide sobre C que é o ponto médio do segmento VV' .

Sejam P um ponto arbitrário de uma elipse, distinto de V e V' , r a reta perpendicular à diretriz passando por P e sejam K e K' os pontos de interseção da reta r com as retas d e d' , respectivamente. Seja ainda X o ponto de interseção de r com o eixo menor (ver figura 3.7).

Figura 3.7: A elipse é simétrica em relação ao eixo menor.



Fonte: Elaborada pela autora.

Seja Q um ponto da reta r , distinto de P tal que a distância de Q a X seja igual à distância de P a X , ou seja, Q é simétrico de P em relação à reta BB' . Sejam N e N' as projeções de P e Q , respectivamente, sobre o eixo. Então, por construção $CN = CN'$.

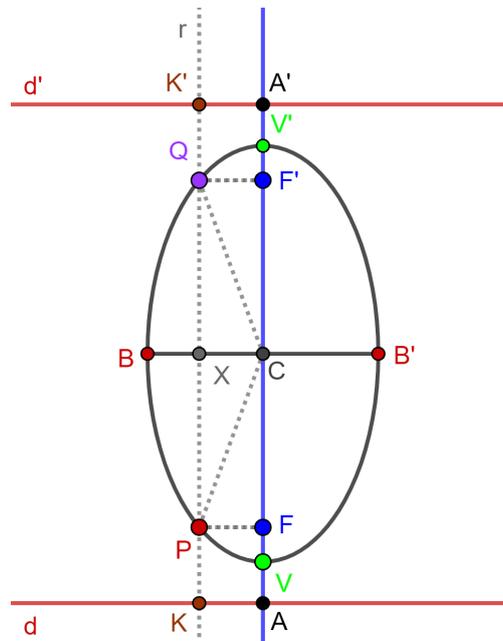
Observe que os pontos P , N , N' e Q determinam um retângulo, onde C é o ponto médio do lado NN' . Caso P seja extremidade de um *latus rectum*, N coincide com F e N' coincide com F' e, como

$$PN = QN',$$

então, nesse caso,

$$PF = QF' \quad (\text{ver figura 3.8}). \quad (3.12)$$

Figura 3.8: Os segmentos PF e QF' são congruentes.



Fonte: Elaborada pela autora.

Agora, se P não é a extremidade de um *latus rectum*, então

i) caso N esteja entre os pontos C e F , tem-se que

$$\begin{aligned} FN &= CV - (CN + FA) \\ &= CV' - (CN' + F'A') \\ &= F'N'; \end{aligned}$$

ii) caso N esteja entre os pontos F e V , tem-se que

$$\begin{aligned} FN &= CV - (VN + CF) \\ &= CV' - (VN' + CF') \\ &= F'N'; \end{aligned}$$

iii) caso N esteja entre os pontos C e v' , tem-se que

$$\begin{aligned} FN &= CF + CN \\ &= CF' + CN' \\ &= F'N'. \end{aligned}$$

De (i), (ii) e (iii) vemos que os segmentos FN e $F'N'$ são congruentes, logo os triângulos PNF e $QN'F'$ são congruentes pelo caso *L.A.L.*, visto que PN é côngruo com QN' e os ângulos PNC e $QN'C$ são, ambos, ângulos retos. Da congruência dos referidos triângulos segue que os lados PF e QF' possuem a mesma medida.

Portanto, independente da posição de P , tem-se que $PF = QF'$. Daí, e do fato de que $PK = Q'K'$ (por construção), segue que

$$\frac{PF}{PK} = \frac{QF'}{QK'} = \frac{VF}{VA} = \frac{V'F'}{V'A'} = e.$$

Logo Q , simétrico ao ponto P com relação ao eixo menor, é um ponto da cônica. Portanto, a elipse é simétrica em relação ao eixo menor. \square

Teorema 3.18. Sejam F e F' os focos e P um ponto de uma elipse. A reta tangente à elipse em P é a bissetriz externa do ângulo FPF' .

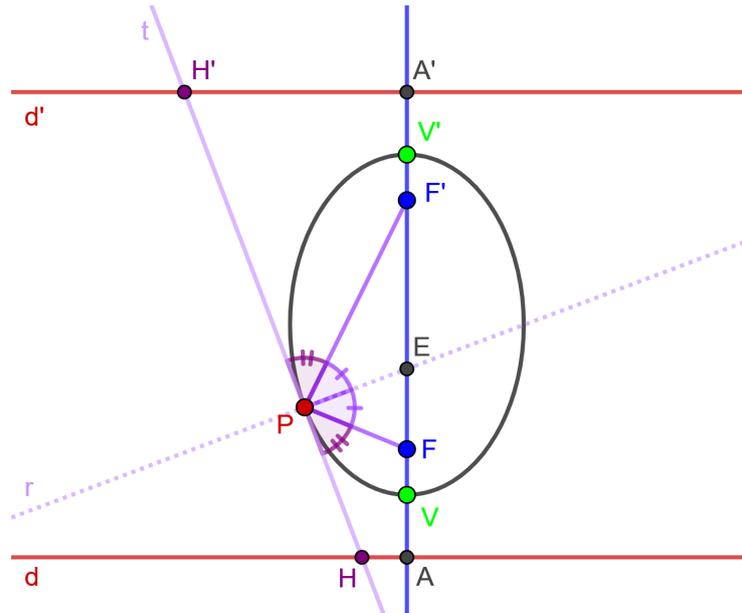
Demonstração. Sejam t a reta tangente à elipse no ponto P , r a reta perpendicular à t passando por P , e E o ponto de interseção da reta r com o eixo dessa cônica (ver figura 3.9). Então, pela proposição 2.20, tem-se

$$\frac{FE}{FP} = \frac{VF}{VA} \quad \text{e} \quad \frac{F'E}{F'P} = \frac{VF}{VA}.$$

Então,

$$\frac{FE}{FP} = \frac{F'E}{F'P}.$$

Figura 3.9: A reta t é a bissetriz externa do ângulo FPF' .



Fonte: Elaborada pela autora.

Logo, pelo teorema da bissetriz interna (teorema 1.21), segue que o ângulo FPF' é bissectado pela reta determinada pelos pontos P e E (observe que essa reta é a reta r). Portanto, como r é a bissetriz de FPF' e as retas r e t são perpendiculares (por construção), segue do teorema 1.20, que a reta t é a bissetriz externa desse ângulo. \square

O teorema 3.18 implica que a reta ortonormal à reta tangente em um ponto P de uma cônica é a bissetriz do ângulo determinado pelas semirretas PF e PF' .

Proposição 3.19. Sejam P um ponto arbitrário de uma elipse, N o pé da perpendicular baixada de P até o eixo e C o centro dessa elipse. Sejam ainda $\overline{VV'}$ o eixo maior e $\overline{BB'}$ o eixo menor. Então,

$$\frac{(PN)^2}{VN \cdot V'N} = \frac{(BC)^2}{(VC)^2}. \tag{3.13}$$

Demonstração. Pela proposição 3.11, tem-se que

$$\frac{(PN)^2}{VN \cdot V'N} = \frac{(FA)^2}{VA \cdot V'A}. \quad (3.14)$$

Observe que, como F , A , V e V' são pontos fixos de uma cônica, a relação (3.14) resulta em uma constante, independente a escolha do ponto P . Logo, pode-se escolher qualquer ponto P da elipse para efetuar a análise da equação (3.14).

Note que, quando o ponto P coincide com B , N coincide com C e, nesse caso em particular,

$$PN = BC \Rightarrow (PN)^2 = (BC)^2 \quad (3.15)$$

Além, disso, nesse caso,

$$VN = V'N = VC \Rightarrow VN \cdot V'N = (VC)^2 \quad (3.16)$$

Então, substituindo (3.15) e (3.16) em (3.14), obtém-se

$$\frac{(BC)^2}{(VC)^2} = \frac{(FA)^2}{VA \cdot V'A} \quad (3.17)$$

Logo, de (3.14) e (3.17), segue que

$$\frac{(PN)^2}{VN \cdot V'N} = \frac{(BC)^2}{(VC)^2}.$$

□

Afirmção 3.20. Quando a cônica é uma elipse, a expressão (3.13) pode ser escrita da seguinte forma

$$\frac{(PN)^2}{(VC)^2 - (CN)^2} = \frac{(BC)^2}{(VC)^2}.$$

Demonstração. Observe que

$$VN = VC - CN \quad \text{e} \quad V'N = VC + CN,$$

caso o ponto N esteja entre os pontos V e C ; ou

$$VN = VC + CN \text{ e } V'N = VC - CN,$$

caso o ponto N esteja entre os pontos V' e C . Em ambos os casos, tem-se que

$$VN \cdot V'N = (VC - CN) \cdot (VC + CN) = (VC)^2 - (CN)^2$$

Portanto, a expressão (3.13) pode ser escrita como

$$\frac{(PN)^2}{(VC)^2 - (CN)^2} = \frac{(BC)^2}{(VC)^2} \quad (3.18)$$

□

Teorema 3.21. Se X é o pé da perpendicular baixada de P até o eixo menor, então

$$\frac{(VC)^2}{(PX)^2} = \frac{(BC)^2}{(BC)^2 - (CX)^2};$$

ou ainda,

$$\frac{(VC)^2}{(BC)^2} = \frac{(PX)^2}{BX \cdot B'X}.$$

Demonstração. Observe que $CX = PN$ e $PX = CN$. Então, reescrevendo a expressão (3.18), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{(CX)^2}{(VC)^2 - (PX)^2} &= \frac{(BC)^2}{(VC)^2} \Rightarrow \frac{(VC)^2}{(VC)^2 - (PX)^2} = \frac{(BC)^2}{(CX)^2} \\ &\Rightarrow (VC)^2 \cdot (CX)^2 = (BC)^2 \cdot ((VC)^2 - (PX)^2) \\ &\Rightarrow (VC)^2 \cdot (CX)^2 = (BC)^2 \cdot (VC)^2 - (BC)^2 \cdot (PX)^2 \\ &\Rightarrow (BC)^2 \cdot (VC)^2 - (VC)^2 \cdot (CX)^2 = (BC)^2 \cdot (PX)^2 \\ &\Rightarrow (VC)^2 \cdot ((BC)^2 - (CX)^2) = (BC)^2 \cdot (PX)^2 \\ &\Rightarrow \frac{(VC)^2}{(PX)^2} = \frac{(BC)^2}{(BC)^2 - (CX)^2} \\ &\Rightarrow \frac{(VC)^2}{(BC)^2} = \frac{(PX)^2}{(BC)^2 - (CX)^2}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Observe que

$$(BC)^2 - (CX)^2 = \overbrace{(BC + CX)}^{BX} \cdot \overbrace{(BC - CX)}^{B'X} = BX \cdot B'X. \quad (3.20)$$

Logo, substituindo (3.20) em (3.19), tem-se

$$\frac{(VC)^2}{(BC)^2} = \frac{(PX)^2}{BX \cdot B'X}$$

□

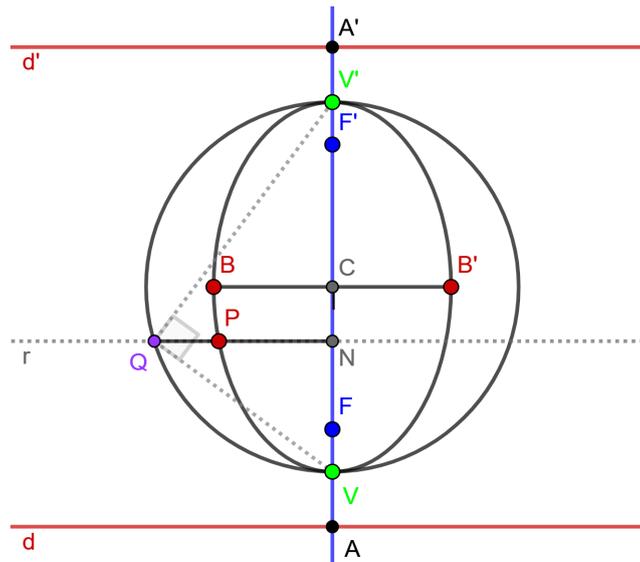
Proposição 3.22. Sejam r a reta perpendicular ao eixo de uma elipse passando por P , N o ponto de interseção de r com o eixo e Q o ponto de interseção de r com o círculo maior dessa elipse (ver figura 3.10). Então,

$$\frac{PN}{QN} = \frac{BC}{VC}.$$

Demonstração. Pela proposição 3.11, tem-se que

$$\frac{(PN)^2}{VN \cdot V'N} = \frac{(BC)^2}{(VC)^2}. \quad (3.21)$$

Figura 3.10: PN está para QN assim como BC está para VC .



Fonte: Elaborada pela autora.

Pela propriedade de média proporcional, tem-se que

$$(QN)^2 = VN \cdot V'N,$$

pois o triângulo VQV' é retângulo em Q .

Portanto, segue que

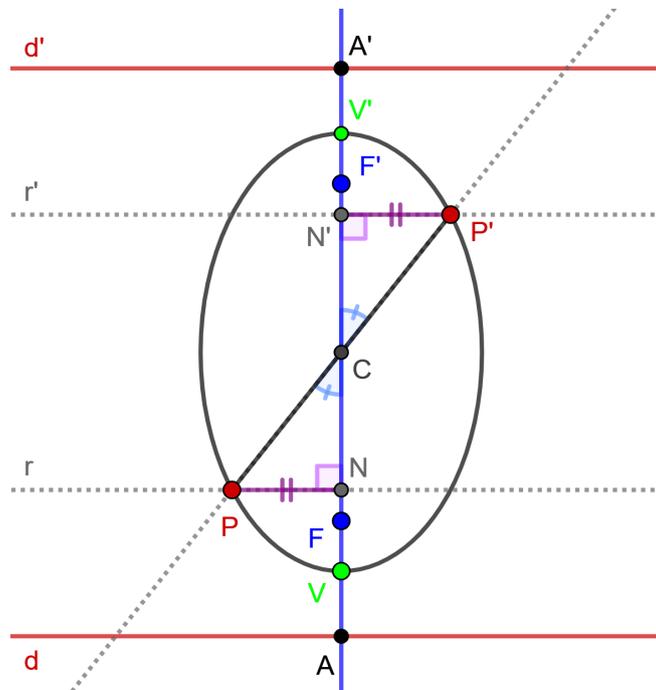
$$\frac{(PN)^2}{(QN)^2} = \frac{(BC)^2}{(VC)^2} \Rightarrow \frac{PN}{QN} = \frac{BC}{VC}.$$

□

Teorema 3.23. O centro da elipse bissecciona qualquer diâmetro.

Demonstração. Sejam PCP' um diâmetro qualquer, r e r' retas perpendiculares ao eixo passando por P e P' , respectivamente e N e N' os respectivos pontos de interseção de r e r' com o eixo (ver figura 3.11).

Figura 3.11: O centro da elipse é o ponto médio de seus diâmetros.



Fonte: Elaborada pela autora.

Pela proposição 3.11 e pela afirmação 3.20, segue

$$\begin{aligned}
\frac{(PN)^2}{(VC)^2 - (CN)^2} &= \frac{(BC)^2}{(VC)^2} = \frac{(P'N')^2}{(VC)^2 - (CN')^2} \\
\Rightarrow \frac{(PN)^2}{(VC)^2 - (CN)^2} &= \frac{(P'N')^2}{(VC)^2 - (CN')^2} \\
\Rightarrow (PN)^2 \cdot ((VC)^2 - (CN')^2) &= (P'N')^2 \cdot ((VC)^2 - (CN)^2) \\
\Rightarrow (CN)^2 \cdot (VC)^2 - (CN)^2 \cdot (CN')^2 &= (CN')^2 \cdot (VC)^2 - (CN)^2 \cdot (CN')^2 \\
\Rightarrow (CN)^2 \cdot (VC)^2 &= (CN')^2 \cdot (VC)^2 \\
\Rightarrow CN &= CN'
\end{aligned}$$

Tem-se ainda que

$$\begin{aligned}
\widehat{PCN} &\equiv \widehat{P'CN'}, \text{ pois são ângulos opostos pelo vértice; e} \\
\widehat{CNP} &\equiv \widehat{CN'P'}, \text{ pois ambos são ângulos retos;}
\end{aligned}$$

conclui-se que os triângulos PCN e $P'CN'$ são congruentes pelo caso *L.A.A.* Então, $PN = P'N'$ e $PC = P'C$. Portanto, C bissecciona qualquer diâmetro de uma cônica. \square

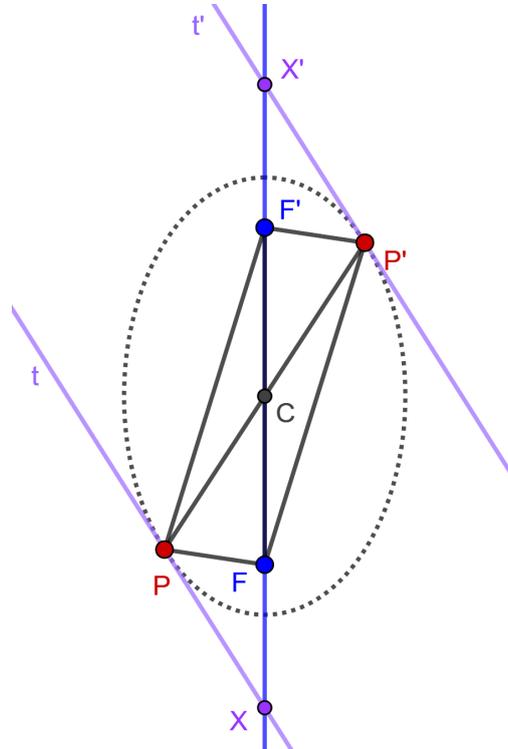
Teorema 3.24. As retas tangentes nas extremidades de um diâmetro de uma elipse são paralelas.

Demonstração. Sejam PCP' um diâmetro qualquer, t e t' as retas tangentes à cônica em P e P' , respectivamente. Sejam ainda X e X' os respectivos pontos de interseção das retas t e t' com o eixo.

Sabe-se que C é o ponto médio entre os focos (F e F') e, segue do teorema 3.23, que C também é o ponto médio de PP' . Logo, conclui-se que os segmentos PF , $P'F'$, PF' e $P'F$ determinam um paralelogramo cuja interseção de seus diâmetros é o ponto C (ver figura 3.12). Daí, segue que

$$\begin{aligned}
\widehat{FPF'} &\equiv \widehat{F'P'C'} \quad \text{e} \\
\widehat{FPC} &\equiv \widehat{FP'F'}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Figura 3.12: As retas tangentes nas extremidades de PCP' são paralelas.



Fonte: Elaborada pela autora.

Pelo teorema 3.18, sabemos que a reta t é a bissetriz externa do ângulo FPF' e que a reta t' é a bissetriz externa do ângulo $F'P'F$, e como esses ângulos são congruentes, segue que

$$\widehat{XPF} \equiv \widehat{X'P'F'}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \widehat{XPC} &\equiv \widehat{XPF} + \widehat{FPC} \quad \text{e} \\ \widehat{X'P'C} &\equiv \widehat{X'P'F'} + \widehat{F'P'C}. \end{aligned}$$

Daí, e por (3.22), conclui-se que

$$\widehat{XPC} \equiv \widehat{X'P'C},$$

o que implica que as retas t e t' são paralelas cortadas pela reta suporte do diâmetro

PCP' . □

O teorema a seguir mostra que a definição 3.12 de uma elipse (em relação à propriedade foco-diretriz) é equivalente à definição usual de elipse adotada nos cursos de Geometria Analítica, a qual relaciona a soma das distâncias de um ponto aos focos com a medida do eixo maior.

Teorema 3.25. Sejam F e F' os focos e P um ponto arbitrário de uma elipse. Então,

$$FP + F'P = VV'.$$

Em outras palavras, a soma das distâncias de um ponto de uma elipse aos seus focos é igual a distância entre as extremidades do eixo maior.

Demonstração. Como V e V' são pontos da cônica, tem-se que

$$\frac{FV}{VA} = \frac{FV'}{V'A} = e.$$

Observe também, que

$$\begin{aligned} \frac{VV'}{AA'} &= \frac{FV + FV'}{AA'} \Rightarrow \frac{VV'}{AA'} = \frac{FV}{AA'} \cdot \frac{VA}{VA} + \frac{FV'}{AA'} \cdot \frac{V'A}{V'A} \\ &\Rightarrow \frac{VV'}{AA'} = e \cdot \frac{VA}{AA'} + e \cdot \frac{V'A}{AA'} \\ &\Rightarrow \frac{VV'}{AA'} = e \cdot \frac{VA + V'A}{VA + V'A} \\ &\Rightarrow \frac{VV'}{AA'} = e \cdot \frac{VA + V'A}{VA + V'A} \\ &\Rightarrow \frac{VV'}{AA'} = e. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Seja N o pé da perpendicular baixada de P até o eixo, assim,

$$\begin{aligned}
\frac{F'P}{FP} = \frac{NA'}{NA} = \frac{PK'}{PK} &\Rightarrow \frac{F'P}{FP} + 1 = \frac{NA'}{NA} + 1 \\
&\Rightarrow \frac{F'P}{FP} + \frac{FP}{FP} = \frac{NA'}{NA} + \frac{NA}{NA} \\
&\Rightarrow \frac{F'P + FP}{FP} = \frac{AA'}{NA} \\
&\Rightarrow \frac{F'P + FP}{AA'} = \frac{FP}{NA} \\
&\Rightarrow \frac{F'P + FP}{AA'} = \frac{FP}{PK} \\
&\stackrel{(3.23)}{\Rightarrow} \frac{F'P + FP}{AA'} = \frac{FV}{VA} \\
&\Rightarrow F'P + FP = VV',
\end{aligned}$$

ou seja, a soma das distâncias de um ponto de uma elipse aos seus focos é igual a distância entre as extremidades do eixo maior. \square

O resultado anterior, além de ser a propriedade usada na definição das elipses em geometria analítica, permite mostrar a seguinte relação:

$$(CV)^2 = (CF)^2 + (BC)^2. \quad (3.24)$$

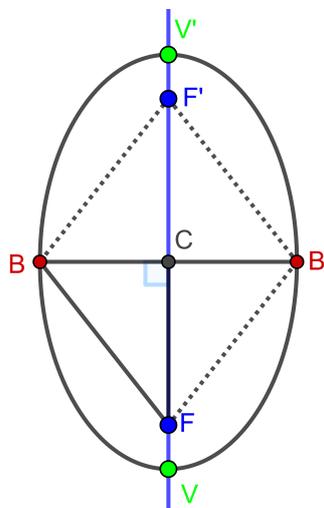
Observe que quando o ponto P coincide com uma das extremidades do eixo menor, segue do teorema 3.25 que,

$$BF + BF' = VV'.$$

Note ainda, que FBF' é um triângulo isósceles de base FF' , o que implica que $BF = BF'$. Logo,

$$2 \cdot BF = VV' = 2 \cdot CV \Rightarrow BF = CV. \quad (3.25)$$

Figura 3.13: O triângulo FBC é retângulo com hipotenusa BF .



Fonte: Elaborada pela autora.

Do fato dos segmentos BC e CF serem ortogonais, segue que o triângulo definido pelos pontos B , C e F é um triângulo retângulo cuja hipotenusa é o segmento BF (ver figura 3.13).

Logo, pelo teorema de Pitágoras, segue que:

$$(BF)^2 = (BC)^2 + (CF)^2 \stackrel{(3.25)}{\Rightarrow} (CV)^2 = (BC)^2 + (CF)^2. \quad (3.26)$$

Determinando

$$\begin{aligned} CV &= a, \\ BC &= b, e \\ CF &= c, \end{aligned}$$

Obtém-se de (3.26), que

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

3.2.4 Hipérboles

Definição 3.26. (Hipérbole) Sejam d uma reta e F um ponto, ambos fixos em um plano. O lugar geométrico dos pontos P desse plano, sujeitos à condição $\frac{D(P, F)}{D(P, d)} = e$,

onde $e > 1$ e e é uma constante real, é chamado de *hipérbole*.

Seja A o pé da perpendicular baixada do foco F até a diretriz d . A escolha de V , na construção apresentada no capítulo 1, determina o tipo da cônica (elipse, parábola, ou hipérbole).

Na construção da cônica (ver 1.3.1), ao escolher o ponto V entre os pontos A e F , tal que $D(V, F) > D(V, d)$, obtém-se que

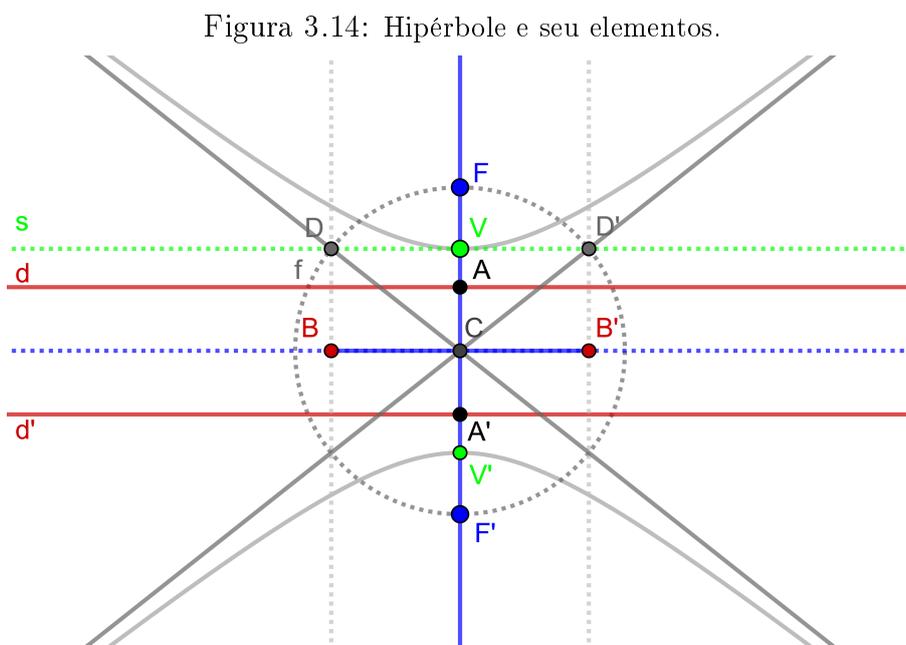
$$\frac{D(V, F)}{D(V, d)} = e > 1,$$

o que satisfaz a relação da definição 3.26.

Definição 3.27. (*Eixo transversal*) O segmento VV' é chamado de *eixo transversal* da hipérbole.

Definição 3.28. (*Eixo conjugado*) Sejam f uma circunferência de centro C e raio CF e s a reta perpendicular ao eixo passando por V . Sejam ainda D e D' os pontos de interseção da reta s com o círculo f , e B e B' as respectivas projeções ortogonais desses pontos sobre a mediatriz do eixo transversal (ver figura 3.14). O segmento BB' é chamado de *eixo conjugado* da hipérbole.

A hipérbole e seus elementos podem ser visualizados na figura 3.14.

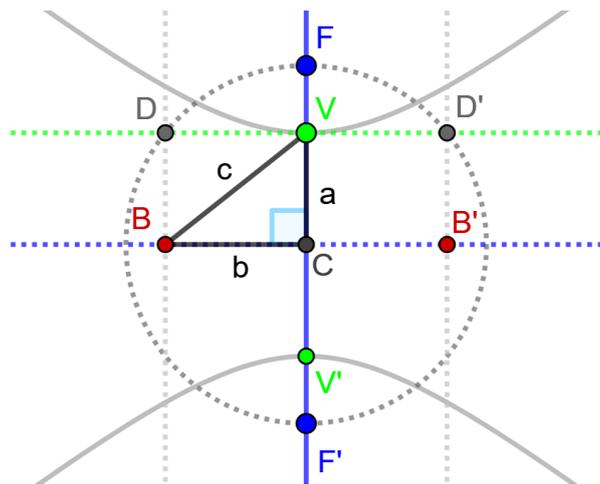


Fonte: Elaborada pela autora.

As retas CD e CD' , são chamadas *assíntotas da hipérbole*.

Em algumas bibliografias o *eixo transversal* é chamado de *eixo real*, enquanto o *eixo conjugado* é chamado de *eixo imaginário*.

Figura 3.15: O triângulo VBC é retângulo com hipotenusa sendo o segmento VB .



Fonte: Elaborada pela autora.

Observe que o segmento VB possui a mesma medida que CF , visto que

$$VB = CD = CF.$$

Logo, definindo

$$CV = a,$$

$$BC = b,$$

$$VC = c,$$

tem-se, pelo teorema de Pitágoras, que

$$a^2 = c^2 - b^2,$$

visto que os pontos V , B e C determinam um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é o segmento VB (ver figura 3.15).

Proposição 3.29. A hipérbole é simétrica com relação à reta suporte do eixo conjugado.

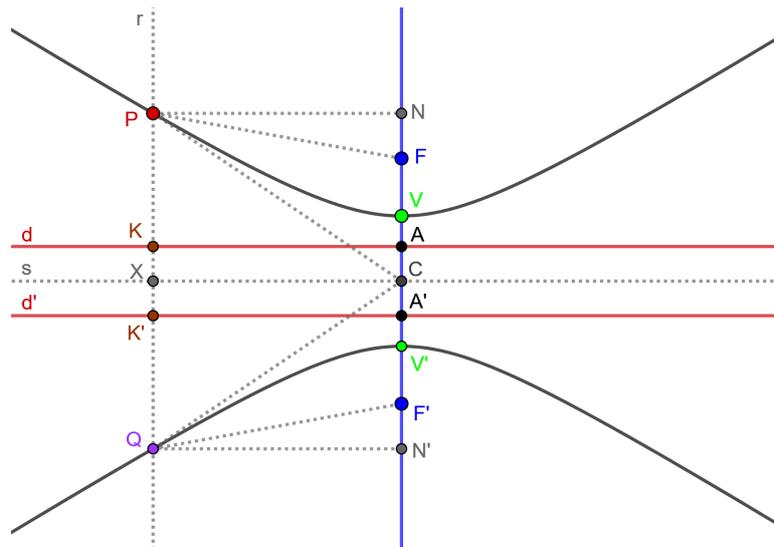
Demonstração. Seja s a reta suporte do eixo conjugado. Os pontos V e V' são simétricos em relação ao eixo conjugado, visto que s é perpendicular ao eixo e incidente ao centro, e C é o ponto médio do segmento VV' , por construção.

Sejam P um ponto arbitrário de uma hipérbole, distinto de V e V' , e r a reta perpendicular à diretriz passando por P . Sejam ainda, K e K' os pontos de interseção da reta r com as retas d e d' , respectivamente, e X o ponto de interseção entre as retas r e s (ver figura 3.16).

Seja Q um ponto da reta r , distinto de P tal que a distância de Q à X seja igual à distância de P a X , ou seja, Q é o simétrico de P em relação à reta s . Logo, por construção, tem-se que os segmentos PK e QK' são congruentes (ver figura 3.16).

Sejam ainda, N e N' as projeções de P e Q , respectivamente, sobre o eixo.

Figura 3.16: A hipérbole é simétrica em relação à reta suporte de seu eixo conjugado.



Fonte: Elaborada pela autora.

De modo análogo ao que foi feito para a elipse na proposição 3.17, prova-se que os segmentos PF e QF' são congruentes, o que implica que

$$\frac{PF}{PK} = \frac{QF'}{QK'} = \frac{VF}{VA} = \frac{V'F'}{V'A'}$$

Logo Q , simétrico ao ponto P com relação à reta s , é um ponto da cônica. Portanto, a hipérbole é simétrica em relação à reta suporte do eixo conjugado. \square

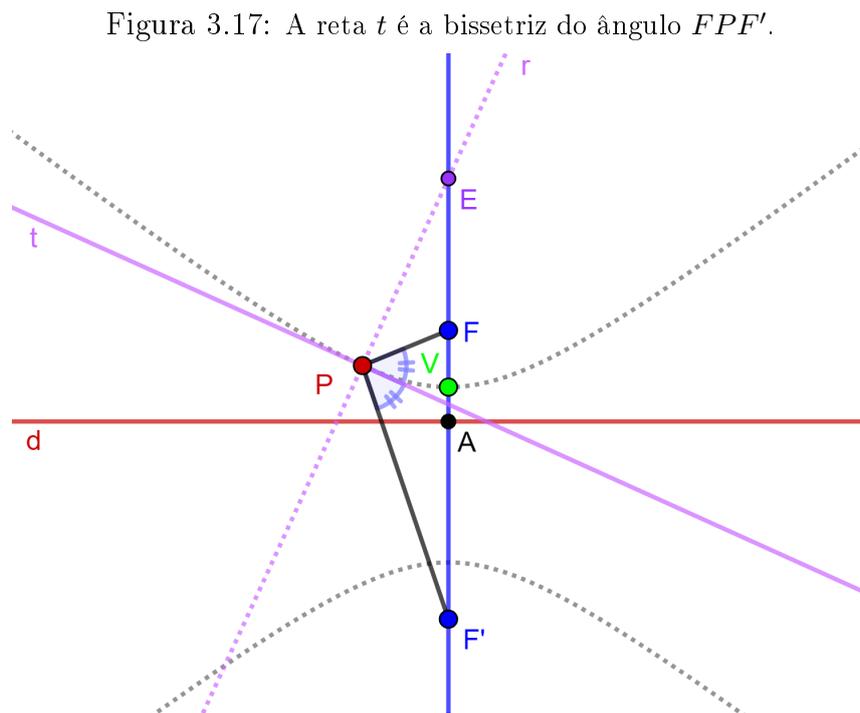
Teorema 3.30. Sejam F e F' os focos e P um ponto de uma hipérbole. A reta tangente a essa cônica no ponto P é a bissetriz interna do ângulo FPF' .

Demonstração. Seja r a reta ortogonal à reta t passando pelo ponto P e E o ponto de interseção de r com o eixo da hipérbole (ver figura 3.17). Pela proposição 2.20, tem-se que

$$\frac{FE}{FP} = \frac{VF}{VA} \quad \text{e} \quad \frac{F'E}{F'P} = \frac{VF}{VA}.$$

O que implica que,

$$\frac{FE}{FP} = \frac{F'E}{F'P}.$$



Fonte: Elaborada pela autora.

Logo, pelo teorema da bissetriz externa (teorema 1.22), segue que a reta r é bissetriz externa do ângulo $F'PF$ e, como a reta t é ortogonal à reta r , por construção, segue da proposição 1.20 que a reta t é a bissetriz interna do ângulo FPF' . \square

Proposição 3.31. Se a cônica é uma hipérbole, então

$$\frac{(FA)^2}{VA \cdot V'A} = \frac{(PN)^2}{(CN)^2 - (VC)^2}.$$

Demonstração. Pela proposição 3.11, tem-se que

$$\frac{(FA)^2}{VA \cdot V'A} = \frac{(PN)^2}{VN \cdot V'N}.$$

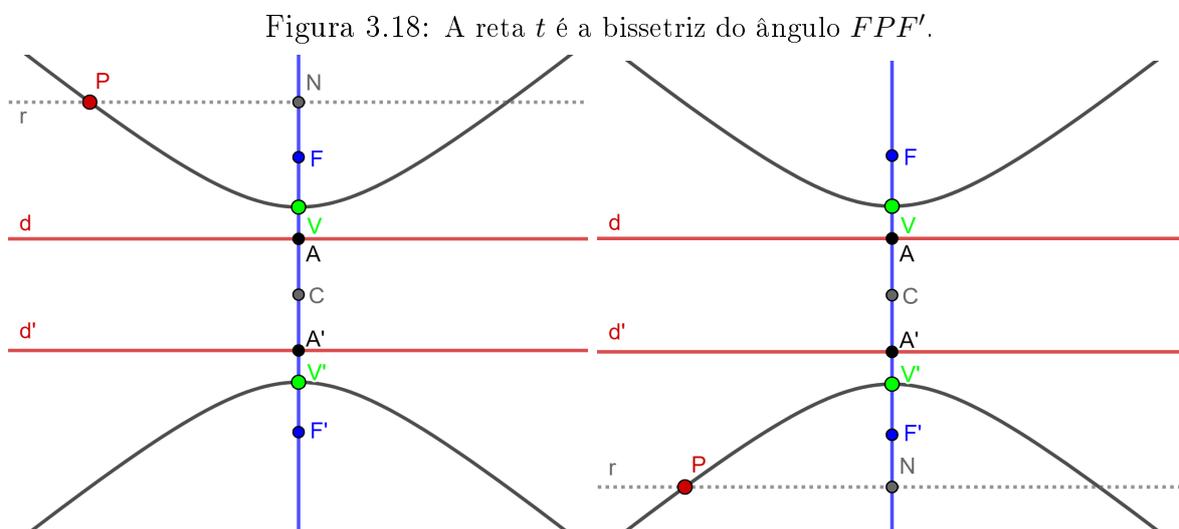
Observe que

$$VN = CN - VC \text{ e } V'N = CN - V'C = CN + VC,$$

caso o ponto V esteja entre os pontos N e C (ver figura 3.18, à esquerda); ou

$$VN = CN + VC \text{ e } V'N = CN - V'C = CN - VC$$

caso o ponto V' esteja entre os pontos N e C (ver figura 3.18, a direita).



Fonte: Elaborada pela autora.

Independente dos casos, tem-se que

$$VN \cdot V'N = (CN - VC) \cdot (CN + VC) = (CN)^2 - (VC)^2$$

Portanto, segue que

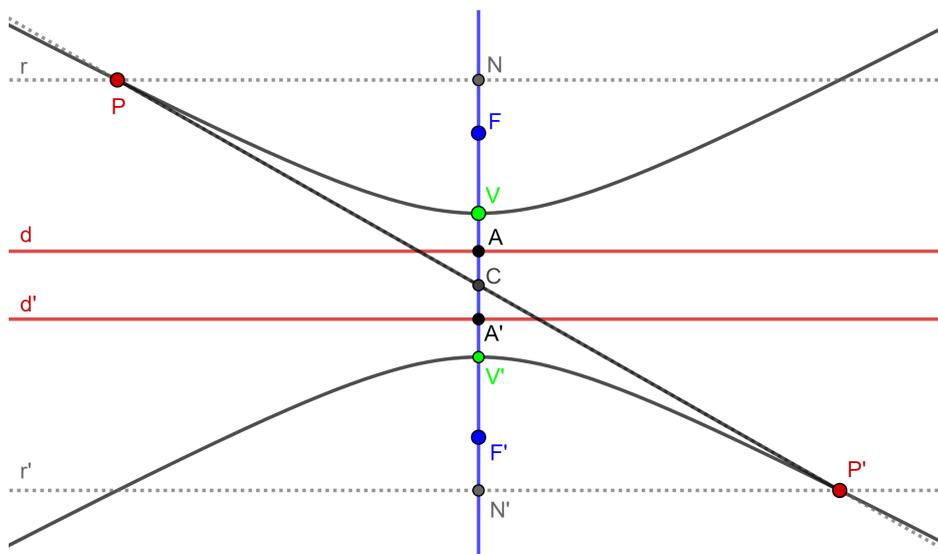
$$\frac{(FA)^2}{VA \cdot V'A} = \frac{(PN)^2}{VN \cdot V'N} = \frac{(PN)^2}{(CN)^2 - (VC)^2}. \quad (3.27)$$

□

Teorema 3.32. O centro da hipérbole é o ponto médio de seus diâmetros.

Demonstração. Caso o diâmetro seja VCV' , segue, por construção, que C é o ponto médio da corda VV' . Caso contrário, sejam PCP' um diâmetro qualquer, distinto de VCV' , r e r' retas perpendiculares ao eixo, passando por P e P' , respectivamente, e N e N' os respectivos pontos de interseção de r e r' com o eixo (ver figura 3.19).

Figura 3.19: O centro da hipérbole é o ponto médio de seus diâmetros.



Fonte: Elaborada pela autora.

Observe que os triângulos PNC e $P'N'C$ são semelhantes, visto que

$$\begin{aligned} \widehat{PCN} &\equiv \widehat{P'CN'}, \text{ pois são opostos pelo vértice;} \\ \widehat{CNP} &\equiv \widehat{CN'P'}, \text{ pois ambos são ângulos retos;} \text{ e} \\ \widehat{NPC} &\equiv \widehat{N'P'C}, \text{ pois são alternos internos.} \end{aligned}$$

Dessa semelhança, segue que

$$\frac{CN}{CN'} = \frac{PN}{PN'} \Rightarrow \frac{(CN)^2}{(CN')^2} = \frac{(PN)^2}{(PN')^2}. \quad (3.28)$$

Pela proposição 3.31, tem-se que

$$\frac{(PN)^2}{(CN)^2 - (VC)^2} = \frac{(FA)^2}{VA \cdot V'A} = \frac{(P'N')^2}{(CN')^2 - (VC)^2},$$

o que implica que

$$\frac{(PN)^2}{(PN')^2} = \frac{(CN)^2 - (VC)^2}{(CN')^2 - (VC)^2}. \quad (3.29)$$

De (3.28) e (3.29) segue que

$$\begin{aligned} \frac{(CN)^2}{(CN')^2} &= \frac{(CN)^2 - (VC)^2}{(CN')^2 - (VC)^2} \Rightarrow (CN)^2 \cdot ((CN')^2 - (VC)^2) = (CN')^2 \cdot ((CN)^2 - (VC)^2) \\ &\Rightarrow (CN)^2 \cdot (VC)^2 = (CN')^2 \cdot (VC)^2 \\ &\Rightarrow (CN)^2 = (CN')^2 \\ &\Rightarrow CN = CN'. \end{aligned}$$

Logo, os triângulos PCN e $P'CN'$ são congruentes pelo caso *L.A.A.* Consequentemente, $PC = P'C$. Portanto, conclui-se que C bissecciona qualquer diâmetro de uma hipérbole. \square

Teorema 3.33. As retas tangentes nas extremidades de um diâmetro de uma hipérbole são paralelas.

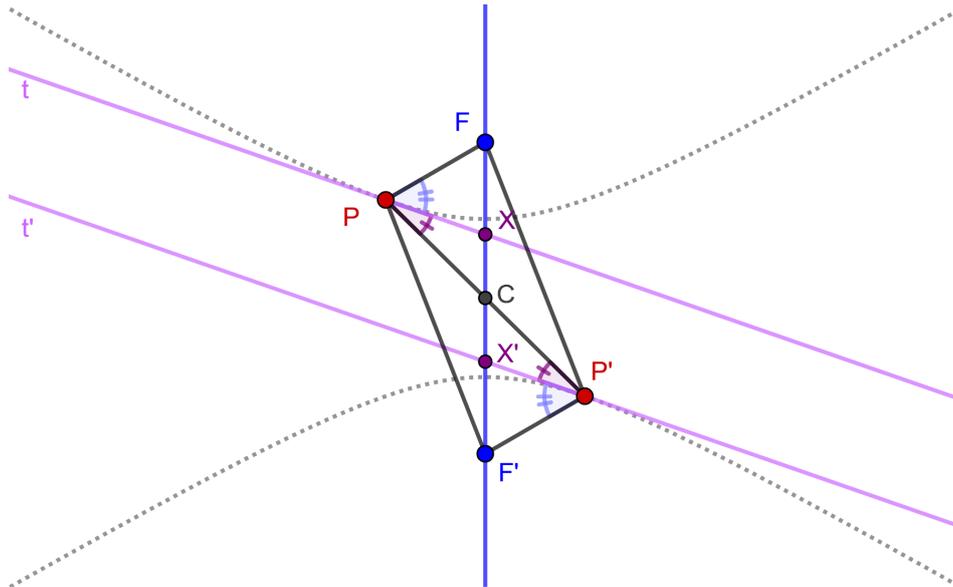
Demonstração. Caso o diâmetro seja VCV' , tem-se pela observação 2.6 que as retas tangentes à cônica em V e V' são paralelas à diretriz, e portanto, o resultado segue. Caso contrário, seja PCP' um diâmetro qualquer de uma hipérbole h , e sejam t e t' as retas tangentes a h em P e P' , respectivamente.

Sabe-se que C é o ponto médio entre os focos (F e F') e, pelo teorema 3.32, tem-se que C também é o ponto médio de PP' . Logo, conclui-se que os segmentos PF , $P'F'$, PF' e $P'F$ determinam um paralelogramo cuja interseção de seus diâmetros é o ponto C

(ver figura 3.20). Daí, segue que

$$\widehat{FPF'} \equiv \widehat{F'P'F}. \tag{3.30}$$

Figura 3.20: As retas tangentes nas extremidades da corda PCP' são paralelas.



Fonte: Elaborada pela autora.

Sejam ainda X e X' os respectivos pontos de interseção das retas t e t' com o eixo. Pelo teorema 3.30, segue que a reta t , tangente em P , é a bissetriz interna do ângulo FPF' , ou seja,

$$\widehat{FPX} \equiv \widehat{F'PX}.$$

Da mesma forma, como r é a tangente em P' , segue que

$$\widehat{F'P'X'} \equiv \widehat{F'P'X'}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \angle FPF' &= \angle FPX + \angle F'PX \\ &= 2 \cdot \angle FPX, \end{aligned} \tag{3.31}$$

e

$$\begin{aligned}\angle FP'F' &= \angle F'P'X' + \angle F'P'X' \\ &= 2 \cdot \angle F'P'X'.\end{aligned}\tag{3.32}$$

Segue de (3.30) que os ângulos FPF' e $FP'F'$ são congruentes, logo, por (3.31) e (3.32), obtém-se que

$$\widehat{FPX} \equiv \widehat{F'P'X'}.\tag{3.33}$$

Do fato de que $PP'F'$ é um paralelogramo, cujas diagonais se intersectam em C , tem-se que os ângulos FPC e $F'P'C$ são congruentes, ou seja

$$\widehat{FPC} \equiv \widehat{F'P'C}.\tag{3.34}$$

Note ainda que,

$$\angle FPC = \angle FPX + \angle CPX \quad \text{e} \quad \angle F'P'C = \angle F'P'X' + \angle CP'X'.\tag{3.35}$$

De (3.33), (3.34) e (3.35), conclui-se que

$$\widehat{CPX} \equiv \widehat{CP'X'},\tag{3.36}$$

o que implica que os ângulos CPX e $CP'X'$ são alternos internos com relação às retas paralelas PX e $P'X'$ (que são as tangentes nas extremidade de PCP') cortadas pela reta transversal PP' . Portanto, as retas tangentes à hipérbole nas extremidade de um diâmetro, são paralelas, visto que os ângulos alternos internos são congruentes. \square

O teorema a seguir mostra que a definição 3.26 de uma hipérbole (em relação à propriedade foco-diretriz) é equivalente à definição usual de hipérbole adotada nos cursos de Gemetria Analítica, a qual relaciona a diferença, em módulo, das distâncias de um ponto aos focos, com a medida do eixo transversal.

Teorema 3.34. Sejam P um ponto arbitrário de uma hipérbole e F e F' os seus focos.

Então,

$$|PF - PF'| = VV'.$$

Demonstração. Lembre que, como V e V' são pontos da cônica, tem-se que

$$\frac{FV}{VA} = \frac{FV'}{V'A} = e.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{VV'}{AA'} &= \frac{FV' - FV}{AA'} \Rightarrow \frac{VV'}{AA'} = \frac{FV'}{AA'} - \frac{FV}{AA'} \\ &\Rightarrow \frac{VV'}{AA'} = \frac{FV'}{AA'} \cdot \frac{V'A}{V'A} - \frac{FV}{AA'} \cdot \frac{VA}{VA} \\ &\Rightarrow \frac{VV'}{AA'} = e \cdot \frac{V'A - VA}{AA'} \\ &\Rightarrow \frac{VV'}{AA'} = e \cdot \frac{V'A - V'A'}{AA'} \\ &\Rightarrow \frac{VV'}{AA'} = e \cdot \frac{AA'}{AA'} \\ &\Rightarrow \frac{VV'}{AA'} = e \end{aligned}$$

Seja r uma reta incidente ao ponto P . Sejam ainda K e K' os respectivos pontos de interseção da reta r com as retas d e d' .

$$\begin{aligned} \frac{PF'}{PK'} &= \frac{VF}{VA} \Rightarrow PF' = \frac{PK' \cdot VF}{VA}, \\ \frac{PF}{PK} &= \frac{VF}{VA} \Rightarrow PF = \frac{PK \cdot VF}{VA}. \end{aligned}$$

Note que o caso $PF = PF'$ ocorre se, e somente se, P é um ponto da reta suporte do eixo conjugado (que é a mediatriz do segmento FF'), e isso não pode ocorrer. Logo, suponha, sem perda de generalidade, que $PF < PF'$, o que implica que $PK < PK'$.

Observe que

$$PK' = PK + KK'. \quad (3.37)$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 PF' - PF &= \frac{PK' \cdot VF - PK \cdot VF}{VA} \\
 &\stackrel{(3.37)}{=} \frac{(PK + KK') \cdot VF - PK \cdot VF}{VA} \\
 &= \frac{PK \cdot VF}{VA} + \frac{KK' \cdot VF}{VA} - \frac{PK \cdot VF}{VA} \\
 &\Rightarrow \frac{PF' - PF}{KK'} = \frac{VF}{VA}.
 \end{aligned}$$

O que implica que

$$\frac{PF' - PF}{KK'} = \frac{VF}{VA} = \frac{VV'}{AA'} = \frac{VV'}{KK'} \Rightarrow PF' - PF = VV'.$$

A necessidade de escolher $PF' < PF$, se dá pelo fato de que VV' é positivo. Entretanto, conhecendo a propriedade apresentada no teorema 3.34, para generalizá-la, basta calcular a diferença entre PF e PF' em módulo. Logo,

$$|PF - PF'| = VV'.$$

□

3.3 Outros resultados e observações

Visto que os resultados apresentados nos teoremas 3.23 e 3.32, assim como 3.24 e 3.33, garantem as mesmas propriedades tanto para a elipse quanto para a hipérbole, seus enunciados podem ser feitos de forma unificada para as cônicas centradas, como segue:

Teorema 3.35. O centro de uma cônica centrada bissecciona qualquer um de seus diâmetros.

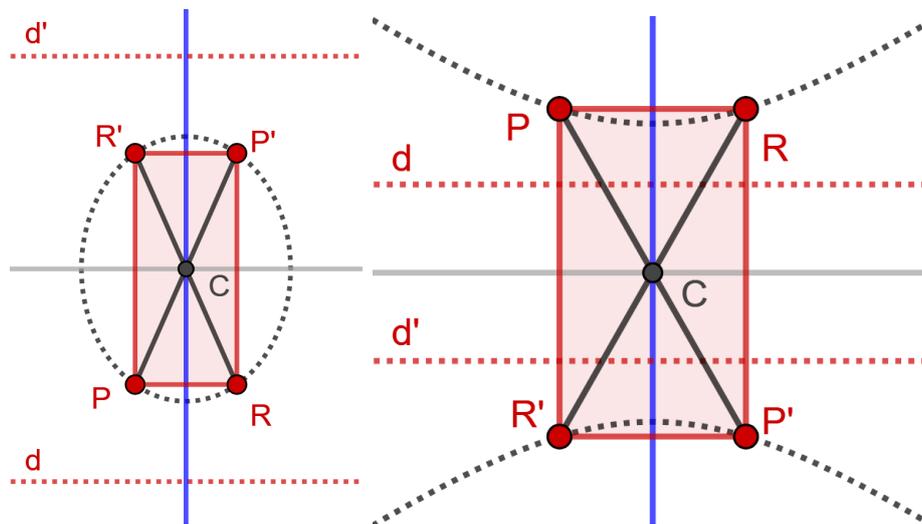
Teorema 3.36. As retas tangentes nas extremidades de um diâmetro de uma cônica centrada são paralelas.

Neste trabalho optou-se por enunciá-los, inicialmente, de forma separada devido às suas demonstrações possuírem especificidades.

Proposição 3.37. Se P é um ponto de uma cônica centrada, então o ponto P' , simétrico a P com relação ao centro, também é um ponto da mesma cônica.

Demonstração. Como foi observado na seção 1.3.1, uma cônica é simétrica com relação ao eixo. Além disso, pelas proposições 3.17 e 3.29 segue que uma cônica centrada é simétrica com relação a reta paralela à diretriz e incidente a C . Com isso, conclui-se que, se P é um ponto de uma cônica centrada c , distinto dos vértices de c , então existem R , P' e R' , todos pertencentes a essa cônica, tais que $PRP'R'$ é um retângulo cujas diagonais se intersectam no centro C (ver figura 3.21). Portanto, se P é um ponto de uma cônica centrada, então o ponto R , simétrico do ponto P com relação ao centro, também é um ponto da referida cônica. \square

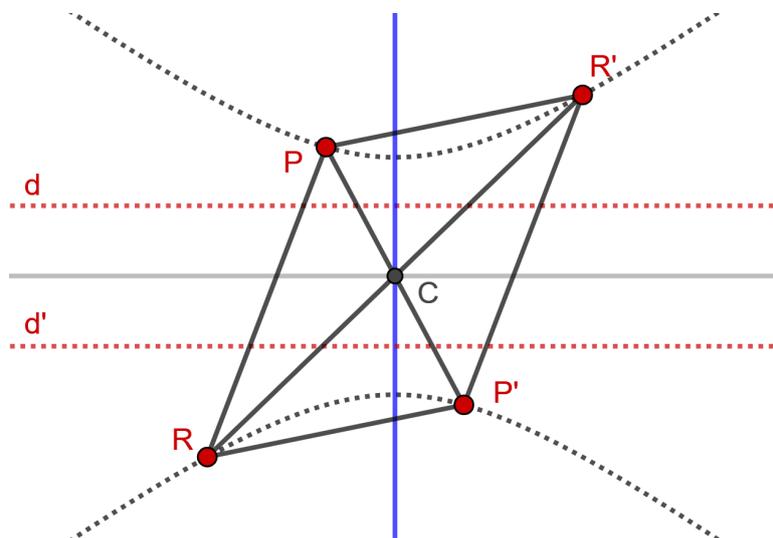
Figura 3.21: Os diâmetros de $PRP'R'$ se intersectam em C .



Fonte: Elaborada pela autora.

Observação 3.38. Seja PR uma corda de uma cônica centrada que não incide sobre o centro. Então, o segmento $P'R'$, simétrico a PR com relação ao centro é também uma corda da mesma cônica, visto que, pela proposição 3.37, existem P' e R' , simétricos a P e R , respectivamente, com relação ao centro. Assim, os segmentos PP' e RR' são os diâmetros do paralelogramo $PRP'R'$ (ver figura 3.22).

Figura 3.22: A corda $P'R'$ é simétrica à corda PR com relação ao centro C .



Fonte: Elaborada pela autora.

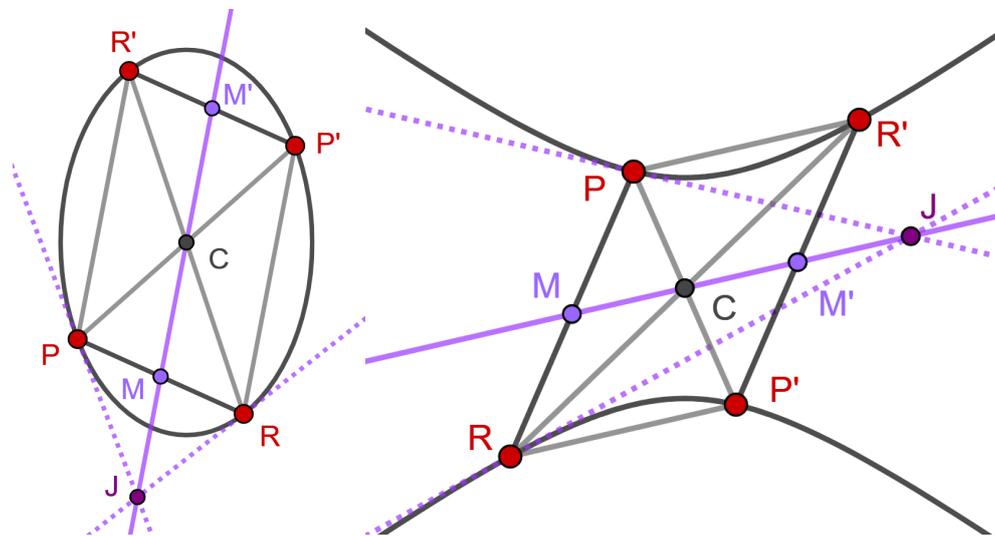
A seguir serão apresentados dois teoremas, um para cônicas centradas e outro para cônicas não centradas. O teorema 3.39 é válido para cordas que não incidem sobre o centro, visto que, nesse caso em particular, a corda é um diâmetro e as retas tangentes em suas extremidades não se intersectam.

Teorema 3.39. Sejam c uma cônica centrada, PR uma corda de c , M o ponto médio do segmento PR e J o ponto de interseção das retas tangentes a c em P e R . O centro C pertence à reta JM .

Demonstração. Pela observação 3.38, existe uma corda $P'R'$, simétrica à corda PR com relação ao centro, paralela a PR . Seja M' o ponto médio da corda $P'R'$. Pelo teorema 2.25, a reta JM intersecta a corda $P'R'$ em M' (ver figura 3.23) ou seja, a reta MM' é, na verdade, a reta JM .

Seja D o ponto de interseção entre os segmentos PP' e MM' . Será mostrado que o ponto D é, na verdade, o centro C .

Figura 3.23: A reta JM intersecta $P'R'$ em M' .



Fonte: Elaborada pela autora.

De fato, note que

$$\widehat{PMD} \equiv \widehat{P'M'D}, \text{ pois são alternos internos com relação às retas paralelas } PR \text{ e } P'R';$$

$$\widehat{PDM} \equiv \widehat{P'D'M}, \text{ pois ambos são ângulos opostos pelo vértice; e}$$

$$PM = P'M'.$$

Logo, os triângulos PMD e $P'M'D$ são congruentes pelo caso $A.A.L$, o que implica que os lados PD e $P'D$ possuem a mesma medida. Ou seja D é o ponto médio de PP' . Entretanto, do fato de que, PP' é um diâmetro da cônica, e o ponto médio de um diâmetro é o centro, então, necessariamente, D coincide com C . Portanto, a reta que une M e M' incide sobre o centro. Mas, como foi observado anteriormente, a reta MM' é a reta JM , assim, a reta JM incide sobre C . \square

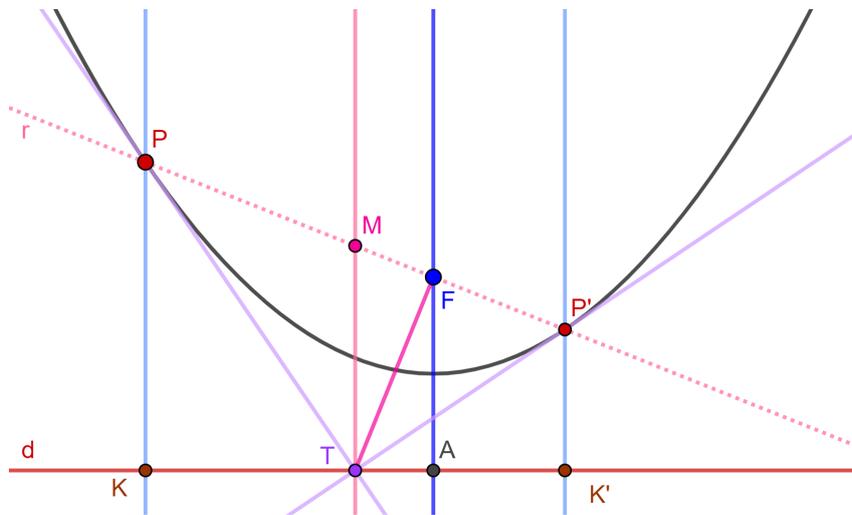
Teorema 3.40. Quando a cônica não é centrada, a reta determinada pelo ponto de interseção das retas tangentes nas extremidades de uma corda PP' e pelo ponto médio M de PP' , é um diâmetro. Ou seja, essa reta é paralela ao eixo.

Demonstração. Sejam FPF' uma corda focal da parábola, M o ponto médio do segmento PP' , r a reta suporte da corda PP' , K e K' as respectivas projeções de P e P' sobre a diretriz d e T o ponto de interseção das tangentes nas extremidades da corda focal FPF' (ver figura 3.24).

Pelo teorema 2.9 sabe-se que T é um ponto da diretriz. Têm-se ainda, pela proposição 3.4 que os triângulos PFT e PKT são congruentes, enquanto que o triângulo $P'FT$ é congruente ao triângulo $P'K'T$. Dessas congruências, segue que

$$KT = FT = K'T.$$

Figura 3.24: A reta MT é paralela ao eixo da parábola.



Fonte: Elaborada pela autora.

Observe que as retas PK e $P'K'$ são paralelas cortadas pelas transversais r e d , onde d é a diretriz da parábola.

Como $PM = P'M$ (por construção) e $KT = K'T$, segue que

$$\frac{PM}{P'M} = \frac{KT}{K'T} = 1,$$

logo,

$$\frac{PM}{KT} = \frac{P'M}{K'T}.$$

Pelo teorema recíproco de Tales (teorema 1.18), segue que a reta determinada pelos pontos T e M , necessariamente, é paralela às retas PK e $P'K'$ e, conseqüentemente, é paralela ao eixo.

Como já foi provado na proposição 2.25, a reta determinada pelo ponto de interseção

das retas tangentes nas extremidades de uma corda PP' e pelo ponto médio de PP' bissecta qualquer corda paralela a PP' , logo, a reta TM bissecta qualquer corda paralela à corda focal PP' . \square

O teorema 3.39, válido para cônicas centradas, garante que qualquer reta, determinada pelo ponto de interseção entre duas retas tangentes a uma cônica e pelo ponto médio do segmento que une os pontos de tangência, contém o centro da cônica. Já o teorema 3.40 garante que, quando a cônica é uma parábola, essa reta é um diâmetro, ou seja, é paralela ao eixo.

CONSIDERAÇÕES

A propriedade foco-diretriz é uma abordagem que se concentra na relação fundamental entre o foco, a diretriz e os pontos da curva. Essa propriedade, permite estabelecer uma definição geral das cônicas não degeneradas, o que possibilita um estudo abrangente dessas curvas, sem a necessidade de distinguir seu traço.

No presente trabalho foram apresentadas propriedades interessantes que, em geral, são pouco exploradas na literatura matemática atual. O principal objetivo foi estabelecer as conexões entre as definições das cônicas, geralmente encontradas em livros de Geometria Analítica, e as definições decorrentes da propriedade foco-diretriz.

A abordagem da diretriz, em relação às elipses e hipérbolas, é frequentemente omitida nas discussões sobre essas cônicas. Ao longo do desenvolvimento do presente trabalho, notou-se que na maioria dos trabalhos acadêmicos consultados, o conceito de diretriz era abordado apenas para a parábola. A definição tradicional de elipses e hipérbolas se concentra apenas nas relações entre focos e propriedades de distância. Entretanto, a diretriz desempenha um papel significativo na caracterização e construção de todas as cônicas não degeneradas.

O *software* GeoGebra desempenhou um importante papel no desenvolvimento do trabalho, pois possibilitou visualizar e explorar, de forma interativa, as propriedades das cônicas, bem como a geração das figuras que, além de ilustrar, auxiliam na compreensão dos resultados apresentados e das relações geométricas envolvidas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BESANT, W. H. **Conic sections treated geometrically**. 9^a ed. London: George Bell and Sons, 1895. Disponível em: <https://www.gutenberg.org/files/29913/29913-pdf.pdf>. Acesso em: 28 set. 2022.
- [2] CARVALHO, T. M. M. de. The Dandelin spheres and the method of the conic sections of the greeks. **NEXUS Mathematicæ**, Goiânia, v. 1, p. 30–48, 2018. Disponível em: <https://revistas.ufg.br/nexus/article/view/51354>. Acesso em: 28 set. 2022.
- [3] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5^a ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.
- [4] IRALA, G. C. **Relação de grandezas geométricas entre diferentes médias**. 2021. 64p. TCC (Graduação) – Curso de Licenciatura em Matemática. Universidade Federal do Pampa, Itaqui, 2021.
- [5] QUEIROZ, M. L. B.; REZENDE, E. Q. F., **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. 2^a ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2008.