

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Aline Isabel Latuf da Silveira

**Implementação de Controle Preditivo para
Supressão Ativa de *Flutter* em um Aerofólio na
Presença de Restrições**

Uberlândia, Brasil

2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Aline Isabel Latuf da Silveira

**Implementação de Controle Preditivo para Supressão
Ativa de *Flutter* em um Aerofólio na Presença de
Restrições**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, como requisito exigido parcial à obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Aeronáutica.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Augusto Queiroz de Assis

Universidade Federal de Uberlândia – UFU
Faculdade de Engenharia Mecânica
Bacharelado em Engenharia Aeronáutica

Uberlândia, Brasil

2024

Aline Isabel Latuf da Silveira

Implementação de Controle Preditivo para Supressão Ativa de *Flutter* em um Aerofólio na Presença de Restrições

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, como requisito exigido parcial à obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Aeronáutica.

Uberlândia, Brasil, 18 de abril de 2024

Prof. Dr. Pedro Augusto Queiroz de Assis
Orientador

Prof. Dr. Tobias Souza Morais

Prof. Dr. Higor Luis Silva

Uberlândia, Brasil
2024

Dedico este trabalho a todos que me ajudaram a trilhar meu caminho, deixando pedacinhos de retalhos em mim

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente à minha família por todo o apoio e carinho, especialmente: aos meus pais, Wagner e Teresinha, por todo o incentivo e suporte durante minha jornada, e ao meu irmão, Felipe, por ser sempre meu companheiro e conselheiro.

Agradeço imensamente ao meu professor orientador, Pedro Assis, por toda orientação, mais ainda, por ser exemplo de dedicação profissional e por incentivar a minha carreira acadêmica.

Agradeço também ao professor Tobias Morais e ao Filipe França por toda a ajuda e contribuição durante a escrita deste trabalho.

Por fim, mas não menos importante, agradeço a todos aqueles que me ajudaram a trilhar meu caminho durante a graduação. Obrigada a todos os professores, por contribuírem para minha formação, e obrigada a todos os amigos, que estiveram sempre dispostos a me ajudar. Especialmente, agradeço ao Gabriel Mendonça, por estar sempre comigo.

"Sou feita de retalhos. Pedacinhos coloridos de cada vida que passa pela minha e que vou costurando na alma. Nem sempre bonitos, nem sempre felizes, mas me acrescentam e me fazem ser quem eu sou. [...] E penso que é assim mesmo que a vida se faz: de pedaços de outras gentes que vão se tornando parte da gente também. [...]"(Cora Coralina)

Resumo

Este trabalho apresenta uma metodologia de AFS para a supressão de *flutter*, visto que a natureza instável do fenômeno pode causar falhas estruturais catastróficas. Em particular, adota-se o controle preditivo com dois modos para realização de tal tarefa na presença de restrições de excursão e de incremento de controle. O sistema é modelado com base em uma seção típica de aerofólio com superfície de controle *flap* no bordo de fuga. As forças aeroelásticas são modeladas e os carregamentos aerodinâmicos não estacionários são aproximados por meio de um somatório de funções racionais. Além disso, é obtido um modelo linear em espaço de estados com a introdução dos termos de atraso nas equações do movimento. Simulações do sistema sem a presença do AFS (i.e. em malha aberta) e na velocidade de *flutter* mostram que a resposta a uma condição inicial não nula é uma oscilação sustentada devido à existência de polos marginalmente estáveis. Nas simulações em malha fechada, a realimentação de estados convencional é capaz de suprimir o *flutter*. Contudo, na presença de restrições o LQR mostra-se insuficiente, uma vez que não é possível estabilizar o sistema na presença de saturação de entrada. Entretanto, os resultados mostram que a implementação do *dual mode* MPC é bem-sucedida, tendo em vista que é possível eliminar o *flutter* com o devido respeito às restrições de incremento e magnitude de controle. Mais ainda, o efeito aeroelástico do sistema é ampliado, sendo o controlador capaz de atuar em velocidades acima da velocidade de *flutter*. Ademais, verifica-se que, com o uso do AFS baseado em controle preditivo, é possível aumentar em 23 % a velocidade de oscilação em relação à velocidade de *flutter* em malha aberta.

Palavras-chave: *flutter*, controle, preditivo, restrições, aeroelasticidade.

Abstract

This work presents an AFS methodology for flutter suppression, given the fact that this phenomenon's unstable nature can lead to catastrophic structural failure. Particularly, it is adopted a model-based predictive control method with two modes in the presence of control and control increment constraints. The system is modeled based on a typical section airfoil with a flap control surface in the trailing edge. The aeroelastic forces are modeled and the unsteady aerodynamic loads are approximated via rational functions sum. Furthermore, with the addition of delay terms in the equations of motion, a state-space linear model is obtained. Simulations of the system without AFS (i.e. in open loop) and at flutter speed show that the output with a non-zero initial condition is a sustained oscillation, given the existence of marginally stable poles. In closed loop simulations, the conventional states feedback is capable of suppressing flutter. Nonetheless, in the presence of constraints, the LQR is insufficient, considering it is not possible to stabilize the system with input saturation. Even so, the results showed that the dual mode MPC was successful, since it is possible to eliminate flutter with control and control increment constraints. On top of that, the system's aeroelastic effect is amplified, with the controller being capable of actuating in above flutter speeds. It is verified that, with the predictive control based AFS usage, the oscillation speed can be raised by up to 23 % in relation to the flutter speed in open loop.

Key-Words: flutter, control, predictive, constrains, aeroelasticity.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Seção bidimensional com <i>flap</i> no bordo de fuga. Fonte: França (2022)	18
Figura 2 – Diagrama de blocos de um sistema de controle em malha fechada com realimentação de estados.	26
Figura 3 – Diagrama de blocos - <i>Dual Mode</i>	26
Figura 4 – Simulação em malha aberta na velocidade de <i>flutter</i>	36
Figura 5 – Simulação em malha fechada com LQR na velocidade de <i>flutter</i>	37
Figura 6 – Simulação em malha fechada com o LQR na presença de restrições de entrada.	38
Figura 7 – Simulação em malha fechada na presença de restrições sobre o controle total e sobre o incremento de controle utilizando o <i>dual mode</i> MPC.	39
Figura 8 – Simulação em malha fechada com o <i>dual mode</i> MPC projetado para $V_\infty = 27,8$ m/s, mas com o modelo gerado para a velocidade de escoamento 33,7 m/s.	40
Figura 9 – Simulação em malha fechada com controlador preditivo na velocidade 27,8 m/s com restrição de controle em $\pm 0,17$ rad (ou $\pm 10^\circ$) e incremento de controle em $\pm 0,05$ rad (ou $\pm 3^\circ$).	40
Figura 10 – Simulação em malha fechada com controlador preditivo na velocidade 27,8 m/s com $\theta(0) = 0,08$ rad (ou 5°).	41
Figura 11 – Simulação em malha fechada com controlador preditivo na velocidade 27,8 m/s com $\theta(0) = 0,17$ rad (ou 10°).	42
Figura 12 – Simulação em malha fechada com controlador preditivo na velocidade 27,8 m/s com $\theta(0) = 0,08$ rad (ou 5°) e $h(0) = 0,127$ m.	42

Lista de tabelas

Tabela 1 – Parâmetros considerados do perfil bidimensional. Fonte: Fung (1993)	35
Tabela 2 – Polos de malha aberta para $V_\infty = 27,8$ m/s.	36

Lista de abreviaturas e siglas

AFS	<i>Active Flutter Suppression</i>
GDL	Grau De Liberdade
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
MPC	<i>Model-based Predictive Control</i>

Lista de símbolos

a	Distância em percentual de semi-corda b do bordo de ataque até o eixo elástico
A	Matriz dinâmica contínua do modelo linear
A_{ac}	Matriz dinâmica do atuador em espaço de estados
A_{ae}	Matriz aeroelástica dinâmica em espaço de estados
AIC_A	Matriz de coeficientes aerodinâmicos referente à deformação estrutural
AIC_C	Matriz de coeficientes aerodinâmicos referente à deflexão da superfície de controle
b	Semi-corda do aerofólio
B	Matriz de entrada contínua
B_{ac}	Matriz de entrada do atuador em espaço de estados
B_{ae}	Matriz de entrada aeroelástica em espaço de estados
c	Corda do aerofólio
D	Matriz de amortecimento do sistema
e	Distância em porcentagem da semi-corda b do bordo de ataque até o eixo de rotação da superfície de controle
F	Forças externas
F_A	Força aerodinâmica devido à deformação estrutural
F_C	Força aerodinâmica devido à deflexão da superfície de controle
F_R	Força inercial devido à deformação estrutural
h	Deslocamento vertical
i	Variável complexa
I_θ	Momento de inércia do aerofólio em relação ao eixo elástico
J_{lqr}	Função de custo a ser minimizada no LQR
J_{mpc}	Função de custo a ser minimizada no MPC

k	Índice de tempo discreto
k_r	Frequência reduzida
\mathbf{K}	Matriz de rigidez estrutural
\mathbf{K}_{lqr}	Matriz de realimentação de estados
m	Massa do aerofólio
\mathbf{M}	Matriz de massa do sistema
\mathbf{M}_c	Matriz de acoplamento inercial entre os GDLs elásticos e superfície de controle
N	Horizonte de predição
N_{GDL}	Número de graus de liberdade
N_L	Número de termos de atraso
N_k	Número de termos de frequência de reduzida
n_u	Número de entradas
n_x	Número de estados
n_{xc}	Número de estados controlados
p_n	Polos do termo n de atraso
q_∞	Pressão dinâmica do escoamento
\mathbf{Q}_{lqr}	Matrizes de ajuste de estados para LQR
\mathbf{Q}_{mpc}	Matrizes de ajuste de estados para MPC
\mathbf{R}_{lqr}	Matrizes de ajuste de controle para LQR
\mathbf{R}_{mpc}	Matrizes de ajuste de controle para MPC
s	Variável de Laplace
\mathbf{S}_∞	Matriz solução da equação de Riccati
$S_{\delta,h}$	Parâmetros de acoplamento inercial do movimento da superfície de controle ao GDL h
$S_{\delta,\theta}$	Parâmetros de acoplamento inercial do movimento da superfície de controle ao GDL θ

S_θ	Momento de massa estática em relação ao eixo elástico
T_s	Período de amostragem
\mathbf{u}	Vetor de entrada
\mathbf{u}_{ae}	Vetor de entradas do modelo aeroelástico
\mathbf{u}_{lqr}	Vetor de entrada do LQR
u_{max}	Limitante superior para a entrada
u_{min}	Limitante inferior para a entrada
\mathbf{u}_{mpc}	Vetor de entrada do MPC
V_∞	Velocidade de escoamento
\mathbf{x}	Vetor de estados
\mathbf{x}_{ae}	Vetor de estados do modelo aeroelástico
\mathbf{x}_c	Vetor de estados controláveis
$X_{r,n}$	Termos de atraso
Z_0, Z_1, Z_2	Parâmetros do atuador
δ	Deflexão do <i>flap</i>
Δu_{max}	Limitante superior para o incremento de controle
Δu_{min}	Limitante inferior para o incremento de controle
$\mathbf{\Gamma}$	Matriz de entrada discreta em espaço de estados
ω_θ	Frequência natural desacoplada do GDL θ
ω_h	Frequência natural desacoplada do GDL h
ω_{ac}	Frequência natural desacoplada do atuador
$\mathbf{\Phi}$	Matriz dinâmica discreta em espaço de estados
ρ	Densidade do ar
θ	Rotação da seção em torno do eixo elástico,
ξ_h	Amortecimento adimensional do GDL h
ξ_θ	Amortecimento adimensional do GDL θ
Δu	Incremento de controle

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
2	MODELAGEM DO SISTEMA	17
2.1	Descrição do Modelo	17
2.2	Equações do Movimento	18
2.3	Aproximação dos carregamentos aerodinâmicos por funções racionais	19
2.4	Espaço de Estados	22
3	DESCRINIÃO DO SISTEMA DE CONTROLE	24
3.1	Discretização do Modelo	24
3.2	Regulador Quadrático Linear	24
3.3	Controle preditivo baseado em modelo	25
3.3.1	Equacionamento de previsão para estados e controle	27
3.3.2	Restrição sobre o controle total	30
3.3.3	Restrição de incremento de controle	31
3.3.4	Problema de programação quadrática	33
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	35
4.1	Simulações em Malha Aberta	35
4.2	Regulador Linear Quadrático	37
4.3	Controle preditivo baseado em modelo	38
4.3.1	Simulação para diferentes condições iniciais do sistema	39
5	CONCLUSÃO	43
	REFERÊNCIAS	44

1 Introdução

Aeroelasticidade é o estudo da interação entre as forças aerodinâmicas, elásticas e inerciais (FUNG, 1993). Dentre as formas de aeroelasticidade duas se destacam: estática e dinâmica. Na aeroelasticidade estática, a deformação da aeronave influencia a distribuição de sustentação e pode levar à condição estaticamente instável. Dentre os fenômenos dessa área, pode-se citar a divergência e a reversão de comando. De acordo com Wright e Cooper (2014), a divergência ocorre quando o momento resultante das forças aerodinâmicas supera o momento restaurador da rigidez estrutural, resultando em uma falha da estrutura. Já no fenômeno de reversão de comando, à medida que a velocidade do escoamento aumenta, a eficácia da superfície de comando diminui, até que, no ponto crítico (a velocidade de reversão), não há resposta à aplicação da superfície de controle. Em velocidades maiores que a velocidade de reversão, a ação dos controles inverte.

Dentre os fenômenos de aeroelasticidade dinâmica, pode-se citar o *flutter*, em que a aeronave pode se tornar dinamicamente instável na condição em que a estrutura extrai energia do próprio escoamento (WRIGHT; COOPER, 2014). Na velocidade crítica, conhecida como velocidade de *flutter*, os polos do sistema são marginalmente estáveis (MARQUI, 2004). Abaixo desta velocidade as oscilações são amortecidas, enquanto acima dela, um dos modos torna-se amortecido negativamente e ocorrem oscilações instáveis. O *flutter* é um fenômeno aeroelástico difícil de prever, uma vez que se trata de uma vibração autoexcitada instável que ocorre após uma velocidade de escoamento e muitas vezes resulta em falha estrutural catastrófica (WRIGHT; COOPER, 2014).

Vários métodos para determinar a velocidade crítica de *flutter* podem ser encontrados na literatura. Em particular, a introdução de termos aerodinâmicos dependentes da frequência reduzida para uma velocidade de escoamento específica é uma abordagem clássica (WRIGHT; COOPER, 2014). Como resultado, é obtido um modelo contínuo linear, e a verificação do *flutter* pode ser feita a partir da determinação dos polos de malha aberta.

Este modelo linear também pode ser adotado para o desenvolvimento de um controlador ativo de supressão de *flutter* (*Active Flutter Suppression* - AFS). Dessa forma, a velocidade da *flutter* pode ser aumentada, evitando a potencial catástrofe estrutural devido à característica autoexcitada da vibração (SUN; BAI, 2014).

Diferentes técnicas de controle foram adotadas durante o desenvolvimento de sistemas para AFS. Por exemplo, em Borglund e Kuttentkeuler (2002) foi utilizada a realimentação de estados. No entanto, a utilização de técnicas convencionais podem ocasionar um desempenho inadequado (ou mesmo uma dinâmica instável) na presença de restri-

ções. Por exemplo, caso a entrada da planta deva permanecer dentro de um intervalo admissível, como é comum no cenário prático. Como alternativa, a estratégia de controle preditivo baseado em modelo (*Model-based Predictive Control* - MPC) pode ser empregada para supressão de *flutter* (SUN; BAI, 2014). Desse modo, as restrições de entrada são sistematicamente considerados durante o projeto do controlador (ROSSITER, 2004).

Nesse contexto, o presente trabalho propõe a utilização da técnica conhecida como controle preditivo com dois modos (*dual mode* MPC) para supressão de *flutter*. Diferente da estratégia MPC adotada em Sun e Bai (2014), no *dual mode* MPC, o sinal de controle total é composto por uma combinação de realimentação de estados e MPC. Dessa forma, as previsões são feitas com base em um sistema de malha fechada estável, o que possibilita a demonstração de estabilidade de malha fechada. Além disso, o *dual mode* MPC é computacionalmente tratável e relativamente simples de implementar (ROSSITER, 2004). Em particular, aqui o *dual mode* MPC é empregado para a supressão de *flutter* em uma típica seção bidimensional de aerofólio com *flap* no bordo de fuga, na presença de restrições de controle e incremento de controle. A modelagem foi feita conforme abordado em França (2022), no qual foi estudado o mesmo sistema sujeito aos efeitos aeroelásticos e utilizou-se realimentação de estados para suprimir o *flutter*. Os resultados provenientes da metodologia *dual mode* MPC serão comparados com aqueles obtidos pela abordagem clássica de realimentação de estados, no qual as restrições são aplicadas por meio de saturação.

O restante do trabalho encontra-se organizado da seguinte maneira: o Capítulo 2 envolve a modelagem do sistema, os Capítulos 3 e 4 apresentam o *dual mode* MPC e os resultados de simulação, respectivamente. Por fim, no Capítulo 5 são apontadas as considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.

2 Modelagem do Sistema

Com o objetivo de projetar um controlador para a supressão do fenômeno de flutter em uma seção bidimensional, é necessário primeiramente modelar as forças atuantes no sistema. Para tanto, considera-se que o aerofólio está sujeito a forças aeroelásticas, de forma que deve-se modelar a interação entre as forças inerciais, elásticas e aerodinâmicas. Ademais, para considerar os efeitos de condições iniciais não nulas, entradas forçadas e perturbações, é necessário considerar a dinâmica do sistema em regime transitório, assim, os esforços devem ser representados no domínio do tempo, considerando a aerodinâmica não-estacionária (WRIGHT; COOPER, 2014). Desse modo, a metodologia descrita em Roger (1977) consiste em aproximar os carregamentos aerodinâmicos não-estacionários por meio de um somatório de funções racionais, tal que as equações possam ser reescritas na forma de espaço de estados.

O presente capítulo abordará a modelagem de uma seção típica bidimensional de asa, sujeita a forças aeroservoelásticas, com *flap* no bordo de fuga atuando como superfície de controle. Assim, inicialmente serão desenvolvidas as equações do movimento do sistema e, posteriormente, os esforços generalizados são tratados por meio da aproximação por funções racionais. Por fim, as equações do movimento e a aproximação dos termos aerodinâmicos são integradas, obtendo a representação do modelo em espaço de estados, visando a modelagem no domínio do tempo e também maior praticidade para projeto de leis de controle.

2.1 Descrição do Modelo

O sistema estudado apresenta dois graus de liberdade (GDL): deslocamento linear vertical h e rotação da seção em torno do eixo elástico θ . Além disso, a superfície de controle no bordo de fuga rotaciona em torno do eixo de rotação da superfície δ . Considerou-se que a dinâmica dessa superfície é determinada exclusivamente pela ação do atuador sobre esta, o que implica na negligência dos efeitos aeroelásticos associados ao seu movimento.

A Figura 1 ilustra o sistema controlado. Na figura, b é o valor da semi-corda da seção típica, $c = 2b$ é corda total, a e e são as posições relativas do eixo elástico e do eixo de rotação da superfície de controle, respectivamente, a partir da posição de corda média e V_∞ é a velocidade do escoamento não perturbado. O referencial adotado contém a origem na posição de meia corda da seção.

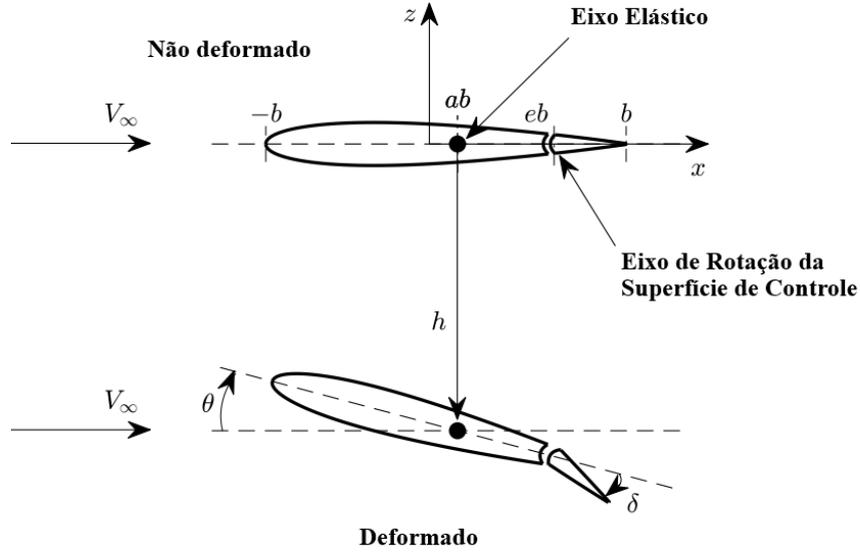


Figura 1 – Seção bidimensional com *flap* no bordo de fuga. Fonte: França (2022)

2.2 Equações do Movimento

De acordo com Wright e Cooper (2014), a equação do movimento para um sistema aeroelástico é

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.1)$$

em que $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N_{GDL} \times N_{GDL}}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{N_{GDL} \times N_{GDL}}$ e $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{N_{GDL} \times N_{GDL}}$ representam as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente. O vetor que representa os graus de liberdade é $\mathbf{r} = [h \ \theta]^T$. Então, $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}$ representa as forças inerciais, $\mathbf{D}\dot{\mathbf{r}}$ as forças de amortecimento, $\mathbf{K}\mathbf{r}$ as forças elásticas e \mathbf{F} as forças externas atuantes no sistema. Essas podem ser subdivididas na soma da força aerodinâmica induzida pelos esforços estruturais \mathbf{F}_A , da força aerodinâmica imposta pela superfície de controle \mathbf{F}_C e da reação inercial do movimento da superfície de controle \mathbf{F}_R .

Conforme Wright e Cooper (2014), o efeito não-estacionário deve ser considerado na modelagem do sistema. Com esse propósito, a frequência reduzida ik_r é definida por:

$$ik_r = \frac{sb}{V_\infty} \quad (2.2)$$

em que s é a variável de Laplace e $i = \sqrt{-1}$.

As forças externas podem ser definidas em função da frequência reduzida (MANUAL, 2017): $\mathbf{F}_A(t) = q_\infty \mathbf{AIC}_A(ik_r)\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{F}_C(t) = q_\infty \mathbf{AIC}_C(ik_r)\delta(t)$ e $\mathbf{F}_R(t) =$

$-\mathbf{M}_c\ddot{\delta}(t)$, em que $q_\infty = 0.5\rho V_\infty^2$ é a pressão dinâmica. Os termos \mathbf{AIC}_A e \mathbf{AIC}_C são matrizes aerodinâmicas responsáveis pela discretização da dinâmica não estacionária do sistema, sendo $\mathbf{AIC}_A \in \mathbb{C}^{N_{GDL} \times 1}$ referente à deformação estrutural e $\mathbf{AIC}_C \in \mathbb{C}^{N_{GDL} \times 1}$ ao termo relacionado a superfície de controle. O termo $\mathbf{M}_c \in \mathbb{R}^{N_{GDL} \times 1}$ é a matriz de acoplamento inercial entre os graus de liberdade e a superfície de controle. Assim, resolvendo-se as Equações de Lagrange para o sistema, conforme Wright e Cooper (2014), é possível reescrever (2.1) do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{M}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}(t) \\ \ddot{\delta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}(t) \\ \dot{\delta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix} = q_\infty \begin{bmatrix} \mathbf{AIC}_A(ik_r) & \mathbf{AIC}_C(ik_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

sendo

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & S_\theta \\ S_\theta & I_\theta \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \xi_h(2m\omega_h) & 0 \\ 0 & \xi_\theta(2I_\theta\omega_\theta) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2m\omega_h^2 & 0 \\ 0 & I_\theta\omega_\theta^2 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{M}_c \begin{bmatrix} S_{\delta,h} \\ S_{\delta,\theta} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

em que S_θ e I_θ representam o momento de massa estática e de inércia em relação ao eixo elástico (FUNG, 1993), $S_{\delta,h}$ e $S_{\delta,\theta}$ são os parâmetros de acoplamento inercial do movimento da superfície de controle aos GDLs. Ainda, ξ_h e ξ_θ representam o amortecimento e ω_h e ω_θ , a frequência de linearização do sistema, referentes a cada respectivo GDL.

2.3 Aproximação dos carregamentos aerodinâmicos por funções racionais

As matrizes aerodinâmicas \mathbf{AIC} 's podem ser aproximadas para uma soma de funções racionais, no domínio da frequência (ABEL, 1979). Com esse propósito, define-se:

$$\mathbf{Q}_{aero}(ik_r) = [\mathbf{AIC}_A(ik_r) \quad \mathbf{AIC}_C(ik_r)] \quad (2.8)$$

Então, é possível construir a seguinte aproximação (ABEL, 1979)

$$\mathbf{Q}_{aero}(ik_r) \approx \mathbf{A}_0^{RFA} + \mathbf{A}_1^{RFA}(ik_r) + \mathbf{A}_2^{RFA}(ik_r)^2 + \sum_{n=1}^{N_L} \frac{ik_r}{ik_r + p_n} \mathbf{A}_{n+2}^{RFA} \quad (2.9)$$

Os termos \mathbf{A}_i^{RFA} são dados por

$$\mathbf{A}_i^{RFA} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{r,i}^{RFA} & \mathbf{A}_{c,i}^{RFA} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_{GDL} \times N_{GDL} + 1}, \text{ com } i = 0, 1, 2, \dots, N_L + 2 \quad (2.10)$$

em que N_L e p_n são variáveis de projeto a serem ajustadas no processo de aproximação e representam os termos de atraso e polos desses termos, respectivamente (ABEL, 1979).

Conforme Roger (1977), o processo consiste em encontrar as matrizes \mathbf{A}_i^{RFA} de forma a minimizar o erro de aproximação em relação às matrizes aerodinâmicas. Assim, avalia-se a seguinte equação de erro quadrático para cada elemento ij :

$$\varepsilon_{i,j} = \sum_{m=1}^{N_k} \left(\mathbf{A}_0^{RFA} + \mathbf{A}_1^{RFA}(ik_{rm}) + \mathbf{A}_2^{RFA}(ik_{rm})^2 + \sum_{n=1}^{N_L} \frac{ik_{rm}}{ik_{rm} + p_n} \mathbf{A}_{n+2}^{RFA} - \mathbf{Q}_{aero}(k_{rm}) \right)_{i,j}^2$$

$$i = 1, 2, \dots, N_{GDL} \text{ e } j = 1, 2, \dots, N_{GDL} + 1 \quad (2.11)$$

em que N_k é o número de frequências reduzidas utilizadas na determinação das matrizes **AIC**.

A minimização por meio do método de mínimos quadrados entre os dados fornecidos e o modelo de aproximação de função racional para cada elemento é definido como (WRIGHT; COOPER, 2014):

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{A}_n} \right)_{i,j} = 0, \text{ com } n = 1, 2, \dots, N_L + 2 \quad (2.12)$$

Assim, a solução apresenta a seguinte forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & ik_{r1} & -k_{r1}^2 & \frac{ik_{r1}}{ik_{r1} + p1} & \dots & \frac{ik_{r1}}{ik_{r1} + p_{N_L}} \\ 1 & ik_{r2} & -k_{r2}^2 & \frac{ik_{r2}}{ik_{r2} + p1} & \dots & \frac{ik_{r2}}{ik_{r2} + p_{N_L}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & ik_{rN_{kr}} & -k_{rN_{kr}}^2 & \frac{ik_{rN_{kr}}}{ik_{rN_{kr}} + p1} & \dots & \frac{ik_{rN_{kr}}}{ik_{rN_{kr}} + p_{N_L}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{N_L+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{aero}(ik_{r1}) \\ \mathbf{Q}_{aero}(ik_{r2}) \\ \mathbf{Q}_{aero}(ik_{r3}) \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{aero}(ik_{rN_{kr}}) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Aplicando a transformada de Laplace em (2.3) para condições iniciais nulas, têm-se

$$\left[(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{D}s + \mathbf{K}) \quad \mathbf{M}_c \right] \begin{bmatrix} \mathbf{r}(s) \\ \delta(s) \end{bmatrix} = q_\infty \left[\mathbf{AIC}_A(ik_r) \quad \mathbf{AIC}_C(ik_r) \right] \begin{bmatrix} \mathbf{r}(s) \\ \delta(s) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

considerando (2.9), é possível reescrever (2.3) como

$$\begin{aligned} & \left[(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{D}s + \mathbf{K}) \quad \mathbf{M}_c \right] \begin{bmatrix} \mathbf{r}(s) \\ \delta(s) \end{bmatrix} \\ &= q_\infty \left(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1(ik_r) + \mathbf{A}_2(ik_r)^2 + \cdots + \sum_{n=1}^{N_L} \frac{ik_r}{ik_r + p_n} \mathbf{A}_{n+2} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{r}(s) \\ \delta(s) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Utilizando a definição de frequência reduzida, pode-se aplicar a transformada inversa de Laplace, obtendo-se

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{M} - q_\infty \frac{b^2}{V_\infty^2} \mathbf{A}_{r,2} \right) \ddot{\mathbf{r}}(t) + \left(\mathbf{D} - q_\infty \frac{b}{V_\infty} \mathbf{A}_{r,1} \right) \dot{\mathbf{r}}(t) + (\mathbf{K} - q_\infty \mathbf{A}_{r,0}) \mathbf{r}(t) \\ &= q_\infty \sum_{n=1}^{N_L} \mathbf{x}_{A,n} - \left(\mathbf{M}_c - q_\infty \frac{b^2}{V_\infty^2} \mathbf{A}_{c,2} \right) \ddot{\delta}(t) + q_\infty \frac{b}{V_\infty} \mathbf{A}_{c,1} \dot{\delta}(t) + q_\infty \mathbf{A}_{c,0} \delta(t) \end{aligned} \quad (2.16)$$

sendo que $\mathbf{x}_{A,n}(t) = [\mathbf{x}_{r,n}(t) \quad \mathbf{x}_{c,n}(t)]$ representa os estados aumentados devido ao atraso aerodinâmico. Conforme Tiffany e Jr (1988), a partir de $n + 2$, tem-se

$$\mathbf{x}_{A,n}(s) = \mathbf{A}_{n+2} \frac{s}{s + \frac{V_\infty}{b} p_n} \begin{bmatrix} \mathbf{r}(s) \\ \delta(s) \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots, N_L \quad (2.17)$$

A partir da integral de convolução entre as transformadas inversas de Laplace dos dois termos em (2.17), é possível encontrar a relação dos estados de atraso ao estados de movimento, no domínio do tempo, como:

$$\mathbf{x}_{A,n}(t) = \int_0^t \mathbf{A}_{n+2} \cdot \exp \left(\left(\frac{-V_\infty}{b} \right) p_n (t - \tau) \right) \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} d\tau, \quad n = 1, 2, \dots, N_L \quad (2.18)$$

em que sua derivada representa a equação dinâmica dos estados de atraso, dada por

$$\dot{\mathbf{x}}_{A,n}(t) = \mathbf{A}_{r,n+2} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{A}_{c,n+2} \cdot \dot{\delta} - \left(\frac{V_\infty}{b} \right) p_n \mathbf{x}_{A,n}(t), \quad n = 1, 2, \dots, N_L \quad (2.19)$$

2.4 Espaço de Estados

Para o modelo aeroelástico, consideram-se os vetores de estado e entrada, respectivamente, como

$$\mathbf{x}_{ae} = [h \ \theta \ \dot{h} \ \dot{\theta} \ x_{r,1} \ x_{c,1} \ x_{r,2} \ x_{c,2} \ x_{r,3} \ x_{c,3} \ x_{r,4} \ x_{c,4}]^T \quad (2.20)$$

$$\mathbf{u}_{ae} = [\delta \ \dot{\delta} \ \ddot{\delta}]^T \quad (2.21)$$

Dessa forma, com o devido procedimento algébrico, é possível representar (2.16) e (2.19) como:

$$\dot{\mathbf{x}}_{ae}(t) = \mathbf{A}_{ae}\mathbf{x}_{ae}(t) + \mathbf{B}_{ae}\mathbf{u}_{ae}(t) \quad (2.22)$$

em que

$$\mathbf{A}_{ae} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ -\bar{\mathbf{M}}^{-1}\bar{\mathbf{K}} & -\bar{\mathbf{M}}^{-1}\bar{\mathbf{D}} & q_\infty\bar{\mathbf{M}}^{-1} & q_\infty\bar{\mathbf{M}}^{-1} & \cdots & q_\infty\bar{\mathbf{M}}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{r,3} & \frac{-V_\infty}{b}p_1\mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{r,4} & \mathbf{0} & \frac{-V_\infty}{b}p_2\mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{r,N_L+2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \frac{-V_\infty}{b}p_{N_L}\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\mathbf{B}_{ae} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\bar{\mathbf{M}}^{-1}\bar{\mathbf{M}}_c & q_\infty\frac{b}{V_\infty}\bar{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{A}_{c,1} & q_\infty\bar{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{A}_{c,0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{c,3} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{c,N_L+2} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

sendo

$$\bar{\mathbf{M}} = \left(\mathbf{M} - q_\infty\frac{b^2}{V_\infty^2}\mathbf{A}_{r,2} \right) \quad (2.25)$$

$$\bar{\mathbf{D}} = \left(\mathbf{D} - q_\infty\frac{b}{V_\infty}\mathbf{A}_{r,1} \right) \quad (2.26)$$

$$\bar{\mathbf{K}} = (\mathbf{K} - q_\infty\mathbf{A}_{r,0}) \quad (2.27)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_c = \left(\mathbf{M}_c - q_\infty \frac{b^2}{V_\infty^2} \mathbf{A}_{c,2} \right) \quad (2.28)$$

em que $\mathbf{x}_{ae} \in \mathbb{R}^{n_x \times 1}$ é o vetor de estados e $\mathbf{u}_{ae} \in \mathbb{R}^{n_u \times 1}$ é o vetor de entrada. A matriz $\mathbf{A}_{ae} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ representa a dinâmica do sistema e $\mathbf{B}_{ae} \in \mathbb{R}^{n_x \times 1}$ relaciona a entrada à planta. Os termos n_u e n_x representam a dimensão dos vetores de entrada e estados, respectivamente.

Representou-se a dinâmica do atuador que controla o movimento da superfície de controle, considerando atrasos referente à resposta não instantânea da superfície (HUANG et al., 2015). Assim, conforme a metodologia proposta em Huang et al. (2015) e Manual (2017), a representação da dinâmica entre o ângulo real de deflexão δ e o ângulo comandado u é descrita por

$$\dot{\lambda}(t) = \mathbf{A}_{ac}\lambda(t) + \mathbf{B}_{ac}u(t) \quad (2.29)$$

em que

$$\lambda = \begin{bmatrix} \delta \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_{ac} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Z_0\omega_{ac}^3 & -Z_1\omega_{ac}^2 & -Z_2\omega_{ac} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_{ac} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Z_0\omega_{ac}^3 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

sendo Z_0 , Z_1 , Z_2 e ω_{ac} parâmetros do atuador.

Por fim, combinando as Equações (2.22) e (2.29), a dinâmica completa do sistema (aerofólio e atuador) pode ser representada como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.31)$$

com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ae} & \mathbf{B}_{ae} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{ac} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{ac} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

sendo o vetor de estados composto pelos deslocamentos e velocidades dos graus de liberdade, os estados de atraso e os estados internos do atuador (deflexão, velocidade e aceleração). Matematicamente:

$$\mathbf{x} = [h \quad \theta \quad \dot{h} \quad \dot{\theta} \quad x_{r,1} \quad x_{c,1} \quad x_{r,2} \quad x_{c,2} \quad x_{r,3} \quad x_{c,3} \quad x_{r,4} \quad x_{c,4} \quad \delta \quad \dot{\delta} \quad \ddot{\delta}]^T \quad (2.33)$$

3 Descrição do Sistema de Controle

Uma possibilidade para suprimir os efeitos do fenômeno de *flutter* é adotar o controle em malha fechada baseado em realimentação de estados. Por exemplo, pode-se utilizar um regulador linear quadrático para reduzir as oscilações indesejadas causadas pelo *flutter*. No entanto, tal lei de controle não considera a presença de restrições de entrada ou saída que tipicamente existem no cenário real. Como alternativa, optou-se por um controle preditivo com dois modos, no qual as restrições são consideradas de forma sistemática (i.e. durante o projeto do controlador).

Para o desenvolvimento de tal controlador, os estados de atraso aerodinâmico foram desconsiderados do vetor, pois são não controláveis e não observáveis. Dessa forma, o vetor de estados utilizado para o projeto foi

$$\mathbf{x}_c = [h \quad \theta \quad \dot{h} \quad \dot{\theta} \quad \delta \quad \dot{\delta} \quad \ddot{\delta}]^T \quad (3.1)$$

Cabe salientar que, para a simulação do sistema, foi utilizado o vetor de estados completo, para que o modelo se aproxime da dinâmica real. Ademais, considera-se que todos os estados em (3.1) são medidos.

3.1 Discretização do Modelo

Uma vez que a estratégia de MPC adotada é baseada a tempo discreto, para a discretização do modelo, utilizou-se o método segurador de ordem zero, conforme descrito em Franklin, Powell e Worman (1997). Nesse método, considera-se que a ação de controle é mantida constante entre instantes de amostragem consecutivos. Como resultado, é possível demonstrar que um modelo a tempo contínuo da forma (2.31) pode ser representado a tempo discreto por (FRANKLIN; POWELL; WORMAN, 1997):

$$\mathbf{x}_c(k+1) = \mathbf{\Phi} \mathbf{x}_c(k) + \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}(k) \quad (3.2)$$

sendo $\mathbf{\Phi} = e^{AT_s}$, $\mathbf{\Gamma} = \int_0^{T_s} e^{A\eta} d\eta \mathbf{B}$, $\eta = kT + T - \tau$, T_s o período de amostragem e $k \in \mathbb{Z}$ o índice de tempo discreto.

3.2 Regulador Quadrático Linear

A partir de (3.2), é possível implementar uma realimentação de estados para manter o sistema em equilíbrio. Nessa técnica, a entrada do sistema é calculada da seguinte

forma:

$$\mathbf{u}_{lqr}(k) = -\mathbf{K}_{lqr}\mathbf{x}_c(k) \quad (3.3)$$

em que $\mathbf{K}_{lqr} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_{x_c}}$ é uma matriz de realimentação de estados escolhida pelo projetista de modo que o sistema seja estável em malha fechada. Os termos n_u e n_{x_c} representam a dimensão dos vetores de entrada e estados medidos, respectivamente.

Uma forma comumente empregada para se obter \mathbf{K}_{lqr} é resolver o problema do regulador quadrático linear (*Linear Quadratic Regulator* - LQR) (FRANKLIN; POWELL; WORMAN, 1997). Especificamente, a lei de controle é escolhida de modo a minimizar:

$$J_{lqr}(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_c(k)^T \mathbf{Q}_{lqr} \mathbf{x}_c(k) + \mathbf{u}(k)^T \mathbf{R}_{lqr} \mathbf{u}(k) \quad (3.4)$$

sendo $\mathbf{Q}_{lqr} \in \mathbb{R}^{n_{x_c} \times n_{x_c}}$ e $\mathbf{R}_{lqr} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ matrizes de ajuste.

Considerando a dinâmica linear do sistema e ignorando a presença de restrições, é possível demonstrar que a lei de controle ótima desse problema de otimização é da forma (3.3), em que \mathbf{K}_{lqr} é calculada a partir da equação de Riccati discreta (FRANKLIN; POWELL; WORMAN, 1997). Isto é, a matriz de realimentação de estados \mathbf{K}_{lqr} é obtida resolvendo-se

$$\mathbf{K}_{lqr} = (\mathbf{R}_{lqr} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{S}_{\infty} \mathbf{\Gamma})^{-1} \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{S}_{\infty} \mathbf{\Phi} \quad (3.5)$$

em que

$$\mathbf{S}_{\infty} - \mathbf{\Phi}^T [\mathbf{S}_{\infty} - \mathbf{S}_{\infty} \mathbf{\Gamma} (\mathbf{Q}_{lqr} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{S}_{\infty} \mathbf{\Gamma}) \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{S}_{\infty}] \mathbf{\Phi} - \mathbf{Q}_{lqr} = \mathbf{0}_{n_{x_c} \times n_{x_c}} \quad (3.6)$$

A Figura 2 ilustra o diagrama de blocos da planta com o LQR.

3.3 Controle preditivo baseado em modelo

Uma das principais vantagens do MPC é a consideração das restrições durante o projeto do controlador (ROSSITER, 2004). Ademais, as ações de controle são escolhidas de modo a minimizar um índice de desempenho, o que pode representar vantagens em termos de consumo energético. Em contrapartida, estratégias convencionais de controle preditivo apresentam horizonte finito de predição, o que dificulta a garantia de estabilidade de malha fechada. Então, neste trabalho, optou-se por uma técnica de controle preditivo conhecida como *Dual Mode Model-based Predictive Control*.

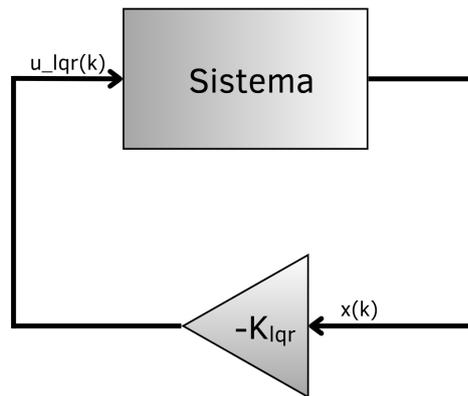


Figura 2 – Diagrama de blocos de um sistema de controle em malha fechada com realimentação de estados.

Conforme explicado em Rossiter (2004), o termo *dual mode* se refere a uma separação no modelo de predição em transitório (modo 1), usado quando o sistema está longe do estado estacionário ou longe do ponto de operação, e assintótico (modo 2), adotado quando próximo ao ponto de operação desejado. Assim, há uma mudança implícita entre um modo de operação e outro à medida que o processo converge. A separação gera um controle sobre as previsões ao longo de um horizonte infinito, sendo possível implementar uma realimentação de estados. Dessa forma, a modelagem utilizada para projetar o controlador foi baseada no paradigma da malha fechada, um método robusto de implementação do *dual mode* (ROSSITER, 2004). Ademais, foram implementadas restrições de controle e incremento de controle.

A Figura 3 ilustra o diagrama de blocos do sistema de controle composto por LQR e MPC.

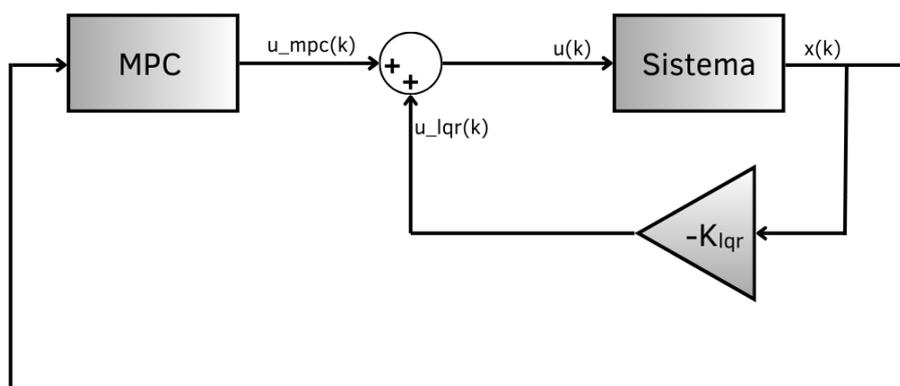


Figura 3 – Diagrama de blocos - *Dual Mode*.

Nessa estratégia de controle, a entrada da planta é calculada do seguinte modo:

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}_{mpc}(k) + \mathbf{u}_{lqr}(k) \quad (3.7)$$

em que \mathbf{u}_{lqr} e \mathbf{u}_{mpc} são a ação de controle estabilizante do LQR e um termo de controle preditivo, respectivamente, ambos com dimensões adequadas.

Neste trabalho, considerando restrições sobre a magnitude e o incremento do controle total, o termo \mathbf{u}_{mpc} é obtido resolvendo-se o seguinte problema de otimização (RO-SITER, 2004):

$$J_{mpc}(k) = \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{x}}_c^T(k+i|k) \mathbf{Q}_{mpc} \hat{\mathbf{x}}_c(k+i|k) + \hat{\mathbf{u}}_{mpc}^T(k+i-1|k) \mathbf{R}_{mpc} \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+i-1|k),$$

$$i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.8)$$

sujeito a

$$\mathbf{u}_{min} \leq \hat{\mathbf{u}}(k+i|k) \leq \mathbf{u}_{max}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.9)$$

$$\Delta \mathbf{u}_{min} \leq \Delta \hat{\mathbf{u}}(k+i|k) \leq \Delta \mathbf{u}_{max}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.10)$$

$$\hat{\mathbf{u}}(k+i|k) = \hat{\mathbf{u}}_{lqr}(k+i|k) + \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+i|k), \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.11)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}(k+i|k) = \hat{\mathbf{u}}(k+i|k) - \hat{\mathbf{u}}(k+i-1|k), \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.12)$$

em que N é o horizonte de predição, $\mathbf{Q}_{mpc} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ e $\mathbf{R}_{mpc} \in \mathbb{R}^{n_{xc} \times n_{xc}}$ são matrizes de ajuste e \mathbf{u}_{min} , \mathbf{u}_{max} , $\Delta \mathbf{u}_{min}$, $\Delta \mathbf{u}_{max}$ são os limites mínimos e máximos de magnitude e incremento de controle. O símbolo chapéu $\hat{\cdot}$ aponta variáveis preditas e a notação $\bullet(k+i|k)$ indica que a variável \bullet está sendo prevista i passos à frente com base nas informações disponíveis em k , respectivamente.

O problema de otimização composto por (3.8)–(3.12) pode ser escrito como um problema de programação quadrática. Para isso, deve-se obter equações de predição de estados, controle e restrições, em termos das ações de controle preditivo. Consequentemente, pode-se utilizar pacotes computacionais numéricos para resolver tal problema de otimização. Esse procedimento é demonstrado nas próximas seções.

3.3.1 Equacionamento de predição para estados e controle

Substituindo-se (3.7) em (3.3), é possível obter:

$$\mathbf{x}_c(k+1) = \bar{\Phi} \mathbf{x}_c(k) + \Gamma \mathbf{u}_{mpc}(k) \quad (3.13)$$

sendo $\bar{\Phi} = \Phi - \Gamma \mathbf{K}_{lqr}$.

Essa relação pode ser utilizada para descrever o estado previsto um instante à frente. Mais precisamente, tem-se que:

$$\hat{\mathbf{x}}_c(k+1|k) = \bar{\Phi} \hat{\mathbf{x}}_c(k|k) + \Gamma \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) \quad (3.14)$$

Sendo o estado atual conhecido, infere-se que $\hat{\mathbf{x}}_c(k|k) = \mathbf{x}_c(k)$.

De maneira análoga, é possível descrever o comportamento do sistema dois instantes à frente como:

$$\hat{\mathbf{x}}_c(k+2|k) = \bar{\Phi} \hat{\mathbf{x}}_c(k+1|k) + \Gamma \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) \quad (3.15)$$

Substituindo (3.14) em (3.15), tem-se:

$$\hat{\mathbf{x}}_c(k+2|k) = \bar{\Phi}^2 \mathbf{x}_c(k) + \bar{\Phi} \Gamma \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) + \Gamma \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) \quad (3.16)$$

Seguindo o mesmo procedimento para três instantes à frente e utilizando (3.16), é possível obter:

$$\hat{\mathbf{x}}_c(k+3|k) = \bar{\Phi} \hat{\mathbf{x}}_c(k+2|k) + \Gamma \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+2|k) \quad (3.17)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_c(k+3|k) = \bar{\Phi}^3 \mathbf{x}_c(k) + \bar{\Phi}^2 \Gamma \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) + \bar{\Phi} \Gamma \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) + \Gamma \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+2|k) \quad (3.18)$$

Então, é possível demonstrar a equação de predição para N passos à frente:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_c(k+N|k) = \\ \bar{\Phi}^N \mathbf{x}_c(k) + \bar{\Phi}^{N-1} \Gamma \hat{\mathbf{u}}_{mpc} + \bar{\Phi}^{N-2} \Gamma \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) + \dots + \Gamma \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+N-1|k) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Assim, empilhando as predições de 1 até N passos à frente, é possível escrever:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_c(k+1|k) \\ \hat{\mathbf{x}}_c(k+2|k) \\ \hat{\mathbf{x}}_c(k+3|k) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}_c(k+N|k) \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{X}}_c} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\Phi} \\ \bar{\Phi}^2 \\ \bar{\Phi}^3 \\ \vdots \\ \bar{\Phi}^N \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_x} \mathbf{x}_c(k) \\
 &+ \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma & \mathbf{0}_{n_{x_c} \times n_u} & \mathbf{0}_{n_{x_c} \times n_u} & \cdots & \mathbf{0}_{n_{x_c} \times n_u} \\ \bar{\Phi}\Gamma & \Gamma & \mathbf{0}_{n_{x_c} \times n_u} & \cdots & \mathbf{0}_{n_{x_c} \times n_u} \\ \bar{\Phi}^2\Gamma & \bar{\Phi}\Gamma & \Gamma & \cdots & \mathbf{0}_{n_{x_c} \times n_u} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\Phi}^{N-1}\Gamma & \bar{\Phi}^{N-2}\Gamma & \bar{\Phi}^{N-3}\Gamma & \cdots & \Gamma \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_x} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) \\ \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) \\ \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+N-1|k) \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{U}}_{mpc}}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\hat{\mathbf{X}}_c = \mathbf{F}_x \mathbf{x}_c(k) + \mathbf{H}_x \hat{\mathbf{U}}_{mpc} \tag{3.21}$$

Similarmente, a partir de (3.3), é possível descrever o equacionamento de predição para o controle um passo à frente:

$$\hat{\mathbf{u}}(k|k) = -\mathbf{K}_{lqr} \mathbf{x}_c(k) + \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) \tag{3.22}$$

Utilizando (3.14), para dois passos tem-se

$$\hat{\mathbf{u}}(k+1|k) = -\mathbf{K}_{lqr} \hat{\mathbf{x}}_c(k+1) + \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) \tag{3.23}$$

$$\hat{\mathbf{u}}(k+1|k) = \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) - \mathbf{K}_{lqr} [\bar{\Phi} \mathbf{x}_c(k) + \Gamma \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k)] \tag{3.24}$$

$$\hat{\mathbf{u}}(k+1|k) = \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) - \mathbf{K}_{lqr} \Gamma \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) - \mathbf{K}_{lqr} \bar{\Phi} \mathbf{x}_c(k) \tag{3.25}$$

De forma semelhante, utilizando-se (3.16), para o instante seguinte tem-se

$$\hat{\mathbf{u}}(k+2|k) = \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+2|k) - \mathbf{K}_{lqr} \hat{\mathbf{x}}_c(k+2|k) \tag{3.26}$$

$$\hat{\mathbf{u}}(k+2|k) = \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+2|k) - \mathbf{K}_{lqr} \Gamma \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) - \mathbf{K}_{lqr} \bar{\Phi} \Gamma \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) - \mathbf{K}_{lqr} \bar{\Phi}^2 \mathbf{x}_c(k) \tag{3.27}$$

Finalmente, obtém-se a equação de controle total na forma matricial:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}(k|k) \\ \hat{\mathbf{u}}(k+1|k) \\ \hat{\mathbf{u}}(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}(k+N-1|k) \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{U}}} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{lqr} \\ \mathbf{K}_{lqr}\bar{\Phi} \\ \mathbf{K}_{lqr}\bar{\Phi}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{K}_{lqr}\bar{\Phi}^{N-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_u} \mathbf{x}_c(k) \\
 & + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_u \times n_u} & \mathbf{0}_{n_u \times n_u} & \mathbf{0}_{n_u \times n_u} & \cdots & \mathbf{0}_{n_u \times n_u} \\ -\mathbf{K}_{lqr}\Gamma & \mathbf{I}_{n_u \times n_u} & \mathbf{0}_{n_u \times n_u} & \cdots & \mathbf{0}_{n_u \times n_u} \\ -\mathbf{K}_{lqr}\bar{\Phi}\Gamma & -\mathbf{K}_{lqr}\Gamma & \mathbf{I}_{n_u \times n_u} & \cdots & \mathbf{0}_{n_u \times n_u} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{K}_{lqr}\bar{\Phi}^{N-2}\Gamma & -\mathbf{K}_{lqr}\bar{\Phi}^{N-3}\Gamma & -\mathbf{K}_{lqr}\bar{\Phi}^{N-4}\Gamma & \cdots & \mathbf{I}_{n_u \times n_u} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_u} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) \\ \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) \\ \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+N-1|k) \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{U}}_{mpc}}
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

3.3.2 Restrição sobre o controle total

A restrição de controle total pode ser representada por

$$\mathbf{u}_{min} \leq \hat{\mathbf{U}} \leq \mathbf{u}_{max} \tag{3.29}$$

Assim, a partir de (3.28), tem-se a restrição de controle total em função de $\hat{\mathbf{U}}_{mpc}$

$$\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{P}_u \mathbf{x}_c(k) + \mathbf{H}_u \hat{\mathbf{U}}_{mpc} \leq \mathbf{u}_{max} \tag{3.30}$$

$$\mathbf{u}_{min} - \mathbf{P}_u \mathbf{x}_c(k) \leq \mathbf{H}_u \hat{\mathbf{U}}_{mpc} \leq \mathbf{u}_{max} - \mathbf{P}_u \mathbf{x}_c(k) \tag{3.31}$$

Por fim, é possível escrever matricialmente a restrição de controle total máxima para N passos do seguinte modo:

$$\mathbf{A}_{u_{max}} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) \\ \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) \\ \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+N-1|k) \end{bmatrix} \leq \mathbf{b}_{u_{max}} \tag{3.32}$$

Analogamente, a restrição para o controle mínimo pode ser escrita como:

$$\mathbf{A}_{u_{min}} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) \\ \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) \\ \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+N-1|k) \end{bmatrix} \leq \mathbf{b}_{u_{min}} \quad (3.33)$$

em que $\mathbf{A}_{u_{max}}$, $\mathbf{A}_{u_{min}}$, $\mathbf{b}_{u_{max}}$ e $\mathbf{b}_{u_{min}}$ são dados por:

$$\mathbf{A}_{u_{max}} = -\mathbf{A}_{u_{min}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_u \times n_u} & \mathbf{0}_{n_u \times n_u} & \mathbf{0}_{n_u \times n_u} & \cdots & \mathbf{0}_{n_u \times n_u} \\ -\mathbf{K}_{lqr}\mathbf{\Gamma} & \mathbf{I}_{n_u \times n_u} & \mathbf{0}_{n_u \times n_u} & \cdots & \mathbf{0}_{n_u \times n_u} \\ -\mathbf{K}_{lqr}\bar{\mathbf{\Phi}}\mathbf{\Gamma} & -\mathbf{K}_{lqr}\mathbf{\Gamma} & \mathbf{I}_{n_u \times n_u} & \cdots & \mathbf{0}_{n_u \times n_u} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{K}_{lqr}\bar{\mathbf{\Phi}}^{N-2}\mathbf{\Gamma} & -\mathbf{K}_{lqr}\bar{\mathbf{\Phi}}^{N-3}\mathbf{\Gamma} & -\mathbf{K}_{lqr}\bar{\mathbf{\Phi}}^{N-4}\mathbf{\Gamma} & \cdots & \mathbf{I}_{n_u \times n_u} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{b}_{u_{max}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{max} \\ \mathbf{u}_{max} \\ \mathbf{u}_{max} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{max} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{lqr} \\ \mathbf{K}_{lqr}\bar{\mathbf{\Phi}} \\ \mathbf{K}_{lqr}\bar{\mathbf{\Phi}}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{K}_{lqr}\bar{\mathbf{\Phi}}^{N-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}_c(k) \quad (3.35)$$

$$\mathbf{b}_{u_{min}} = - \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{min} \\ \mathbf{u}_{min} \\ \mathbf{u}_{min} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{min} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{lqr} \\ \mathbf{K}_{lqr}\bar{\mathbf{\Phi}} \\ \mathbf{K}_{lqr}\bar{\mathbf{\Phi}}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{K}_{lqr}\bar{\mathbf{\Phi}}^{N-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}_c(k) \quad (3.36)$$

3.3.3 Restrição de incremento de controle

De forma análoga, a restrição de incremento de controle no instante k é dada por:

$$\Delta \mathbf{u}_{min} \leq \Delta \hat{\mathbf{u}}(k|k) \leq \Delta \mathbf{u}_{max} \quad (3.37)$$

Utilizando (3.7), para o instante atual, tem-se:

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}(k|k) = \hat{\mathbf{u}}(k|k) - \mathbf{u}(k-1) \quad (3.38)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}(k|k) = -\mathbf{K}_{lqr}\mathbf{x}_c(k) + \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) - \mathbf{u}(k-1) \quad (3.39)$$

Considerando inicialmente apenas o limitante superior sobre o incremento de controle total, segue que:

$$\hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) \leq \Delta \mathbf{u}_{max} + \mathbf{K}_{lqr} \mathbf{x}_c(k) + \mathbf{u}(k-1) \quad (3.40)$$

Com (3.25) e (3.14) é possível demonstrar o incremento de controle para o instante seguinte:

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}(k+1|k) = \hat{\mathbf{u}}(k+1|k) - \hat{\mathbf{u}}(k) \quad (3.41)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}(k+1|k) = \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) - \mathbf{K}_{lqr} \hat{\mathbf{x}}_c(k+1|k) - \hat{\mathbf{u}}(k) \quad (3.42)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}(k+1|k) = \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) - \mathbf{K}_{lqr} \bar{\Phi} \mathbf{x}_c(k) - \mathbf{K}_{lqr} \Gamma \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) + \mathbf{K}_{lqr} \mathbf{x}_c(k) - \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) \quad (3.43)$$

Assim, a restrição de incremento de controle máximo para um instante à frente é dada por

$$\hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) - \mathbf{K}_{lqr} \Gamma \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) - \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) \leq \Delta \mathbf{u}_{max} + \mathbf{K}_{lqr} \bar{\Phi} \mathbf{x}_c(k) - \mathbf{K}_{lqr} \mathbf{x}_c(k) \quad (3.44)$$

Similarmente, com (3.16) e (3.27), a predição para dois passos à frente é:

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}(k+2|k) = \hat{\mathbf{u}}(k+2|k) - \hat{\mathbf{u}}(k+1|k) \quad (3.45)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}(k+2|k) = \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+2|k) - \mathbf{K}_{lqr} \hat{\mathbf{x}}_c(k+2|k) - \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) + \mathbf{K}_{lqr} \hat{\mathbf{x}}_c(k+1|k) \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\mathbf{u}}(k+2|k) = & \\ & - \mathbf{K}_{lqr} \bar{\Phi}^2 \mathbf{x}_c(k) - \mathbf{K}_{lqr} \bar{\Phi} \Gamma \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) - \mathbf{K}_{lqr} \Gamma \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) + \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+2|k) + \mathbf{K}_{lqr} \bar{\Phi} \mathbf{x}_c(k) \\ & + \mathbf{K}_{lqr} \Gamma \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) - \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Nesse sentido, é possível demonstrar que a restrição de incremento de controle para N instantes futuros é dada matricialmente por:

$$\mathbf{A}_{du_{max}} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) \\ \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+N-1|k) \end{bmatrix} \leq \mathbf{b}_{du_{max}} \quad (3.48)$$

$$\mathbf{A}_{du_{min}} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) \\ \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+N-1|k) \end{bmatrix} \leq \mathbf{b}_{du_{min}} \quad (3.49)$$

em que $\mathbf{A}_{du_{max}}$, $\mathbf{A}_{du_{min}}$, $\mathbf{b}_{du_{max}}$ e $\mathbf{b}_{du_{min}}$ são dados por:

$$\mathbf{A}_{du_{max}} = -\mathbf{A}_{du_{min}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_u \times n_u} & \mathbf{0}_{n_u \times n_u} & \cdots & \mathbf{0}_{n_u \times n_u} \\ -\mathbf{K}_{lqr} \bar{\Phi} - \mathbf{I}_{n_u \times n_u} & \mathbf{I}_{n_u \times n_u} & \cdots & \mathbf{0}_{n_u \times n_u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{K}_{lqr} \bar{\Phi}^{N-2} \Gamma + \mathbf{K}_{lqr} \bar{\Phi}^{N-3} \Gamma & -\mathbf{K}_{lqr} \bar{\Phi}^{N-3} \Gamma + \mathbf{K}_{lqr} \bar{\Phi}^{N-4} \Gamma & \cdots & \mathbf{I}_{n_u \times n_u} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$\mathbf{b}_{du_{max}} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{max} \\ \Delta \mathbf{u}_{max} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{u}_{max} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{lqr} \\ \mathbf{K}_{lqr} \bar{\Phi} - \mathbf{K}_{lqr} \\ \vdots \\ \mathbf{K}_{lqr} \bar{\Phi}^{N-1} - \mathbf{K}_{lqr} \bar{\Phi}^{N-2} \end{bmatrix} \mathbf{x}_c(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_u \times n_u} \\ \mathbf{0}_{n_u \times n_u} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{n_u \times n_u} \end{bmatrix} \mathbf{u}(k-1) \quad (3.51)$$

$$\mathbf{b}_{du_{min}} = - \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{min} \\ \Delta \mathbf{u}_{min} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{u}_{min} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{lqr} \\ \mathbf{K}_{lqr} \bar{\Phi} - \mathbf{K}_{lqr} \\ \vdots \\ \mathbf{K}_{lqr} \bar{\Phi}^{N-1} - \mathbf{K}_{lqr} \bar{\Phi}^{N-2} \end{bmatrix} \mathbf{x}_c(k) - \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_u \times n_u} \\ \mathbf{0}_{n_u \times n_u} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{n_u \times n_u} \end{bmatrix} \mathbf{u}(k-1) \quad (3.52)$$

3.3.4 Problema de programação quadrática

A função de custo definida em (3.8) pode ser reescrita como

$$J_{mpc}(k) = \hat{\mathbf{X}}_c^T \bar{\mathbf{Q}}_{mpc} \hat{\mathbf{X}}_c + \hat{\mathbf{U}}_{mpc}^T \bar{\mathbf{R}}_{mpc} \hat{\mathbf{U}}_{mpc} \quad (3.53)$$

sendo $\bar{\mathbf{Q}}_{mpc}$ e $\bar{\mathbf{R}}_{mpc}$ matrizes bloco diagonais cuja diagonal é composta pelas matrizes de ajuste \mathbf{Q}_{mpc} e \mathbf{R}_{mpc} , respectivamente.

Substituindo (3.20) em (3.53), segue que

$$J_{mpc}(k) = (\mathbf{F}_x \mathbf{x}_c(k) + \mathbf{H}_x \hat{\mathbf{U}}_{mpc})^T \bar{\mathbf{Q}}_{mpc} (\mathbf{F}_x \mathbf{x}_c(k) + \mathbf{H}_x \hat{\mathbf{U}}_{mpc}) + \hat{\mathbf{U}}_{mpc}^T \bar{\mathbf{R}}_{mpc} \hat{\mathbf{U}}_{mpc} \quad (3.54)$$

$$J_{mpc}(k) = \underbrace{2\mathbf{x}_c(k)^T \mathbf{F}_x^T \bar{\mathbf{Q}}_{mpc} \mathbf{H}_x}_{\mathbf{P}^T} \hat{\mathbf{U}}_{mpc} + \hat{\mathbf{U}}_{mpc}^T \underbrace{(\mathbf{H}_x^T \bar{\mathbf{Q}}_{mpc} \mathbf{H}_x + \bar{\mathbf{R}}_{mpc} \mathbf{I}_{n_u})}_{\frac{1}{2}\mathbf{H}} \hat{\mathbf{U}}_{mpc} + Cte \quad (3.55)$$

$$J_{mpc}(k) = \mathbf{P}^T \hat{\mathbf{U}}_{mpc} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{U}}_{mpc}^T \mathbf{H} \hat{\mathbf{U}}_{mpc} + Cte \quad (3.56)$$

sendo Cte elementos que independem de $\hat{\mathbf{U}}_{mpc}$ e, portanto, não afetam a solução do problema de otimização.

As restrições de controle e incremento de controle podem ser empilhadas formando matrizes de restrição total utilizadas na otimização. Logo, tem-se o seguinte problema de programação quadrática:

$$\min(\hat{\mathbf{U}}_{mpc}) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{U}}_{mpc}^T \mathbf{H} \hat{\mathbf{U}}_{mpc} + \mathbf{P}^T \hat{\mathbf{U}}_{mpc} \quad (3.57)$$

sujeito a:

$$\mathbf{A}_{mpc} \hat{\mathbf{U}}_{mpc} \leq \mathbf{b}_{mpc} \quad (3.58)$$

em que

$$\mathbf{A}_{mpc} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{u_{max}} \\ \mathbf{A}_{u_{min}} \\ \mathbf{A}_{du_{max}} \\ \mathbf{A}_{du_{min}} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

$$\mathbf{b}_{mpc} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{u_{max}} \\ \mathbf{b}_{u_{min}} \\ \mathbf{b}_{du_{max}} \\ \mathbf{b}_{du_{min}} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Seguindo a estratégia de horizonte retrocedente (ROSSITER, 2004), no instante de tempo k , o primeiro elemento da matriz $\hat{\mathbf{U}}_{mpc}$ é aplicado ao processo. No instante de tempo seguinte, $k + 1$, o processo de otimização é repetido. Isso garante robustez à malha de controle.

4 Resultados e Discussões

Para verificar o sistema de supressão de *flutter* baseado em controle preditivo descrito no Capítulo 3, simulações foram realizadas considerando o modelo apresentado no Capítulo 2. Essas foram desenvolvidas em Matlab[®], considerando $V_\infty = 27,8$ m/s. Especificamente, para uma dada velocidade, as matrizes do sistema \mathbf{A} e \mathbf{B} são calculadas. Os parâmetros do sistema foram retirados de Fung (1993) e são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros considerados do perfil bidimensional. Fonte: Fung (1993)

Parâmetro	Valor	Unidade
m	0,120	kg
b	0,127	m
a	-0,150	-
e	0,300	-
I_θ	$7,500 \times 10^{-4}$	kg.m ²
S_θ	$3,804 \times 10^{-3}$	kg.m
$S_{\delta,h}$	$3,804 \times 10^{-3}$	kg.m
$S_{\delta,\theta}$	$5,891 \times 10^{-5}$	kg.m
ω_h	55,920	rad/s
ω_θ	64,100	rad/s
ξ_h	0,050	-
ξ_θ	0,050	-

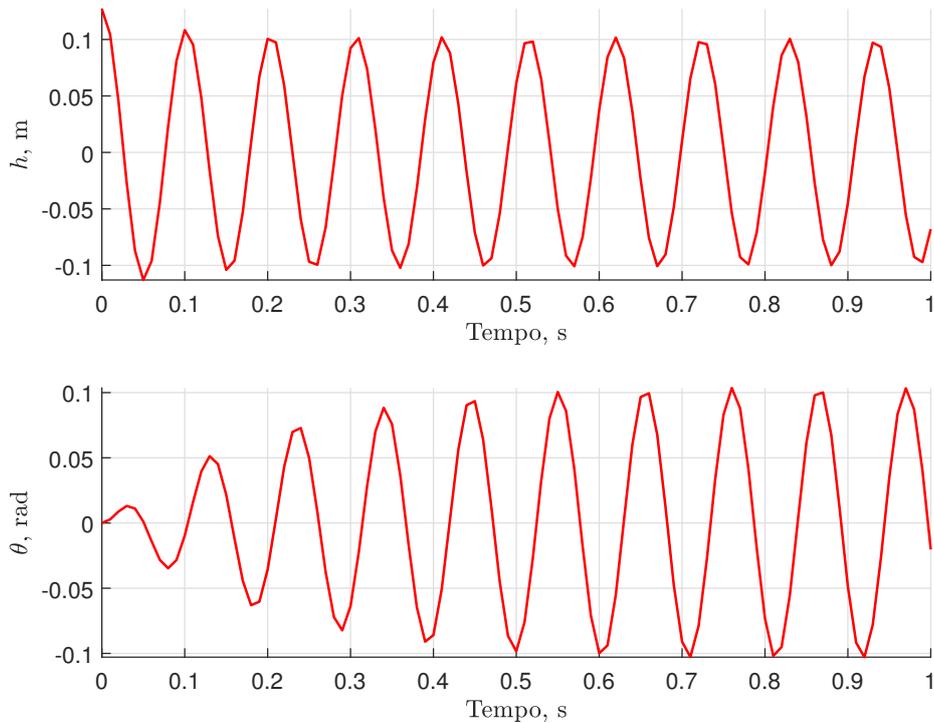
As simulações foram feitas considerando $h(0) = 0,127$ m e os outros iniciais iguais a zero. Mais ainda, a ferramenta *quadprog* do MatLab[®] foi implementada pra resolver o problema de programação quadrática descrito no capítulo anterior.

4.1 Simulações em Malha Aberta

Os autovalores da matriz dinâmica \mathbf{A} (i.e. os polos de malha aberta para a velocidade de escoamento de 27,8 m/s) encontram-se na Tabela 2. Pode-se constatar que há polos sobre o eixo imaginário, indicando a condição de *flutter*. Cabe salientar que esse valor é condizente com o apresentado em Fung (1993) (onde a velocidade de *flutter* calculada é de 28,35 m/s). A pequena diferença observada é relativa à aproximação aerodinâmica feita por funções racionais. Nesse cenário, devido à condição inicial não nula, a resposta dinâmica do sistema oscila sem amortecimento, como mostrado na Figura 4. Com isso, pode-se utilizar um controle ativo de supressão de *flutter*. Tal controle pode ser realizado por meio de realimentação de estados, como descrito na próxima seção.

Tabela 2 – Polos de malha aberta para $V_\infty = 27,8$ m/s.

Polo	Modo
$0,000 + 0,006i$	1º GDL - h
$0,000 - 0,006i$	2º GDL - θ
$-0,005 + 0,006i$	1º GDL - \dot{h}
$-0,005 - 0,006i$	2º GDL - $\dot{\theta}$
$-0,018 + 0,000i$	atraso aerodinâmico
$-0,011 + 0,001i$	atraso aerodinâmico
$-0,011 - 0,001i$	atraso aerodinâmico
$-0,004 + 0,000i$	atraso aerodinâmico
$-0,0185 + 0,000i$	atraso aerodinâmico
$-0,013 + 0,000i$	atraso aerodinâmico
$-0,009 + 0,000i$	atraso aerodinâmico
$-0,004 + 0,000i$	atraso aerodinâmico
$-0,012 + 0,000i$	3º GDL - δ
$-0,003 + 0,012i$	3º GDL - $\dot{\delta}$
$-0,003 - 0,012i$	3º GDL - $\ddot{\delta}$

Figura 4 – Simulação em malha aberta na velocidade de *flutter*.

4.2 Regulador Linear Quadrático

Inicialmente, implementou-se uma realimentação de estados para eliminação do *flutter*. Em particular, a matriz de realimentação de estados foi projetada utilizando o regulador linear quadrático discreto, com base em Franklin, Powell e Worman (1997). Vale lembrar que, para calcular a ação de controle, consideraram-se os estados presentes em (3.1). Mais ainda, tem-se apenas uma entrada de controle (ângulo comandado pela superfície de comando no bordo de fuga). Assim, $n_{x_c} = 7$ e $n_u = 1$. Ademais, definiu-se o período de amostragem T_s como 0,01 s e adotou-se $\mathbf{Q}_{lqr} = 10^3 \mathbf{I}_{7 \times 7}$ e $\mathbf{R}_{lqr} = 1$, resultando em

$$\mathbf{K}_{lqr} = [0,02 \quad 0,04 \quad -1,41 \times 10^{-4} \quad -9,49 \times 10^{-4} \quad -1,00 \quad -0,01 \quad 0,00] \quad (4.1)$$

Os resultados de simulação utilizando o LQR para supressão do *flutter* são mostrados na Figura 5. É possível verificar que, como esperado, a oscilação foi eliminada, a despeito da condição inicial não nula, com aproximadamente 0,5 segundos. Ademais, verifica-se que o *flap* não retorna a condição nula depois da estabilização da planta, visto que um novo ponto de equilíbrio foi atingido após o amortecimento do fenômeno.

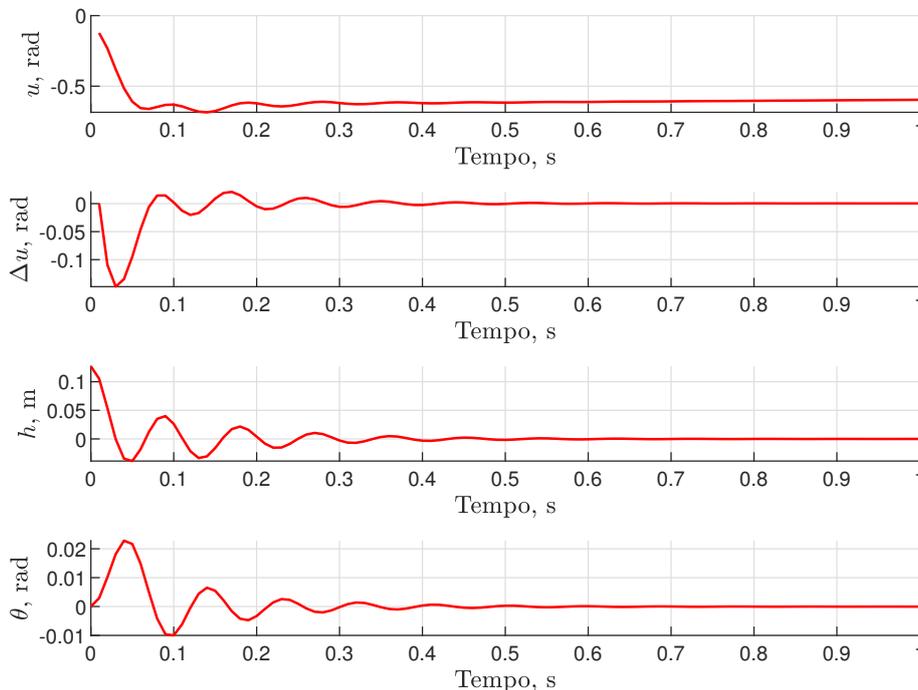


Figura 5 – Simulação em malha fechada com LQR na velocidade de *flutter*.

É possível perceber que o controle necessário para atenuar o fenômeno aeroelástico foi de aproximadamente 0,66 rad (ou 37,8°). Essa deflexão de *flap* elevada no *flutter* pode ser inviável fisicamente.

Mais ainda, nota-se que o incremento de controle entre instantes de amostragem consecutivos foi significativo. Para verificar o desempenho do LQR na presença de sa-

turação do canal de entrada, as simulações foram repetidas limitando-se a deflexão em $\pm 0,35$ rad (ou $\pm 20^\circ$). Como pode ser verificado na Figura 6, nesse cenário, o sistema é instável em malha fechada. Para considerar explicitamente as restrições no projeto do sistema de controle, adotou-se o *dual mode* MPC (ROSSITER, 2004). Os resultados com essa técnica de controle são apresentados na próxima seção.

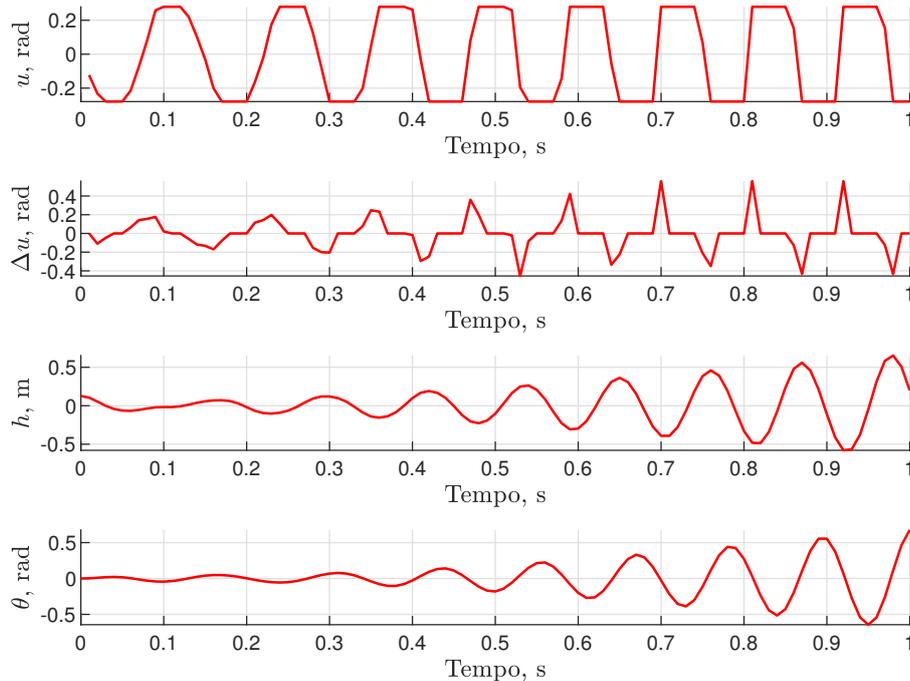


Figura 6 – Simulação em malha fechada com o LQR na presença de restrições de entrada.

4.3 Controle preditivo baseado em modelo

O controlador preditivo foi implementado considerando $\mathbf{Q}_{lqr} = 10^3 \mathbf{I}_{7 \times 7}$, $\mathbf{R}_{lqr} = 1$, $N = 40$, $\mathbf{Q}_{mpc} = 10^3 \mathbf{I}_{7 \times 7}$ e $\mathbf{R}_{mpc} = 1$. Além disso, no projeto do controlador, limitou-se a magnitude do *flap* em $\pm 0,26$ rad (ou $\pm 15^\circ$) e o incremento de controle em $\pm 0,09$ rad (ou $\pm 5^\circ$). A Figura 7 mostra os resultados de simulação nas mesmas condições anteriores (velocidade de escoamento de 27,8 m/s e $h(0) = 0,127$ m). Pode-se verificar que o *dual mode* MPC foi capaz de estabilizar o sistema, em aproximadamente 0,35 segundos, a despeito da presença das restrições.

A fim de analisar a atuação da lei de controle em velocidades maiores que as de projeto, aumentou-se a velocidade de escoamento do modelo de simulação mantendo-se o controlador projetado. Dessa forma, aumentando-se gradativamente a velocidade de simulação, verificou-se que o controlador é capaz de suprimir o fenômeno aeroelástico para velocidades de escoamento até 33,7 m/s, indicando um aumento de 23 % na velocidade

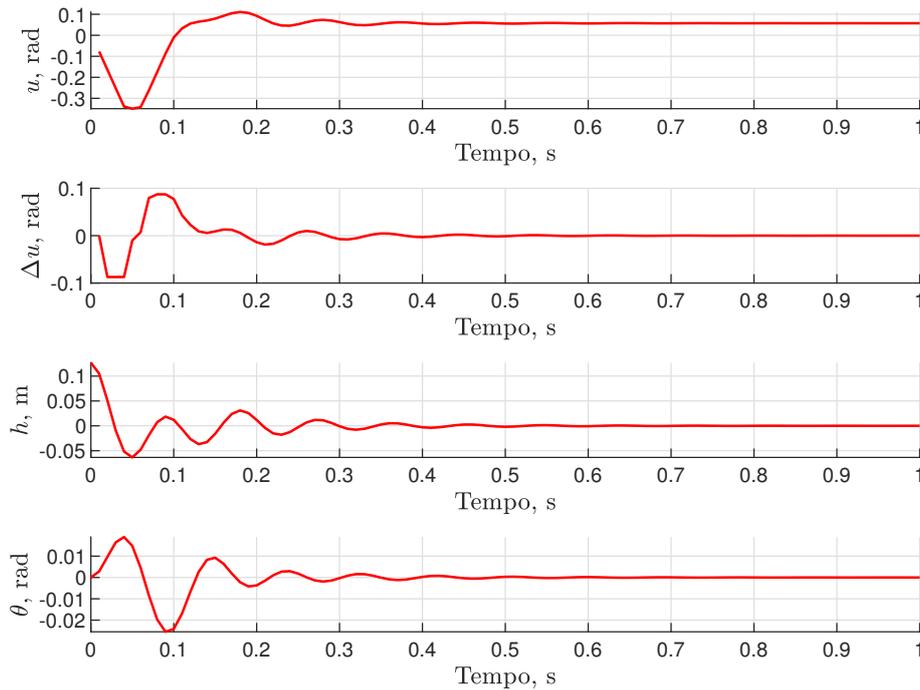


Figura 7 – Simulação em malha fechada na presença de restrições sobre o controle total e sobre o incremento de controle utilizando o *dual mode* MPC.

de *flutter*. Os resultados de simulação nessa velocidade com o *dual mode* MPC são apresentados na Figura 8. É possível observar que, nesse caso, a resposta do sistema divergiu.

Ademais, verificou-se o comportamento do sistema para outros valores de restrição. A Figura 9 ilustra uma simulação feita com limitação de controle total em $\pm 0,17$ rad (ou $\pm 10^\circ$) e incremento de controle em $\pm 0,05$ rad (ou $\pm 3^\circ$). Para esse cenário, verificou-se que o controlador é capaz de suprimir o *flutter* apenas até a velocidade 31,7 m/s. Ainda, constatou-se que o tempo de convergência da simulação é maior para restrições mais limitantes. Além disso, o sistema é mais oscilatório e converge mais lentamente, em aproximadamente 0,45 segundos.

4.3.1 Simulação para diferentes condições iniciais do sistema

Com o objetivo de verificar a resposta da planta ao controlador *dual mode* em diferentes cenários, realizaram-se simulações para outras condições iniciais. Nesse contexto, as restrições impostas foram de $\pm 0,26$ rad (ou $\pm 15^\circ$) para magnitude do *flap* e $\pm 0,09$ rad (ou $\pm 5^\circ$) para o incremento de controle.

A Figura 10 apresenta os resultados para uma simulação considerando $\theta(0) = 0,08$ rad (ou 5°) e as outras condições iniciais nulas. Similarmente, a Figura 11 apresenta os resultados para uma simulação considerando $\theta(0) = 0,17$ rad (ou 10°) e as outras condições iniciais nulas. Dessa forma, nota-se que o MPC foi capaz de eliminar as oscilações que ocorreriam em malha aberta, Ademais, o sistema é mais oscilatório e converge mais

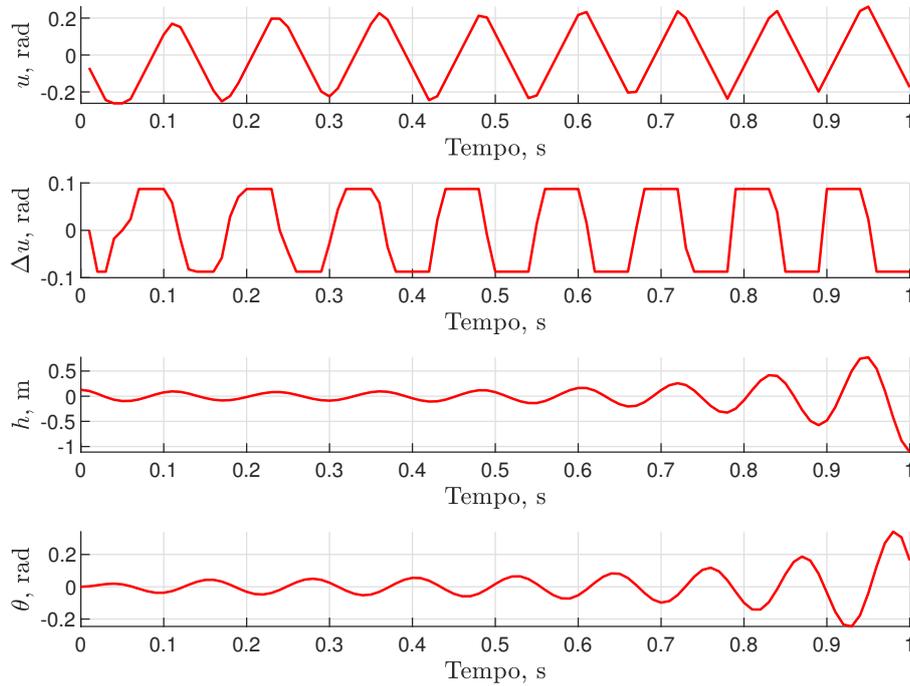


Figura 8 – Simulação em malha fechada com o *dual mode* MPC projetado para $V_\infty = 27,8$ m/s, mas com o modelo gerado para a velocidade de escoamento 33,7 m/s.

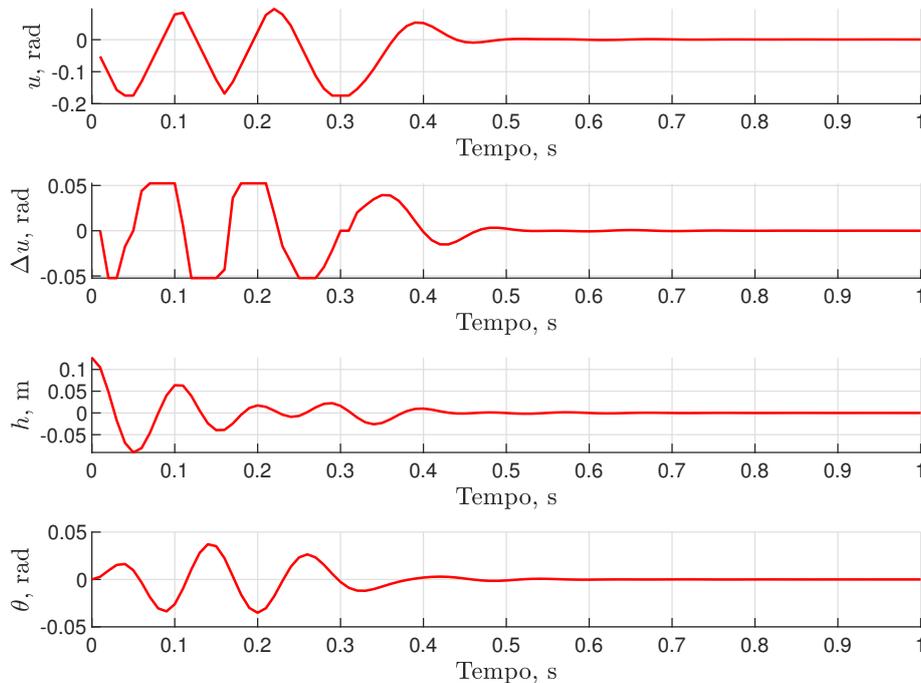


Figura 9 – Simulação em malha fechada com controlador preditivo na velocidade 27,8 m/s com restrição de controle em $\pm 0,17$ rad (ou $\pm 10^\circ$) e incremento de controle em $\pm 0,05$ rad (ou $\pm 3^\circ$).

lentamente na presença de maiores valores para as condições iniciais de $\theta(0)$, visto que demora aproximadamente 0,4 segundos para condição de $\theta(0) = 5^\circ$ e 0,7 segundos para $\theta(0) = 10^\circ$.

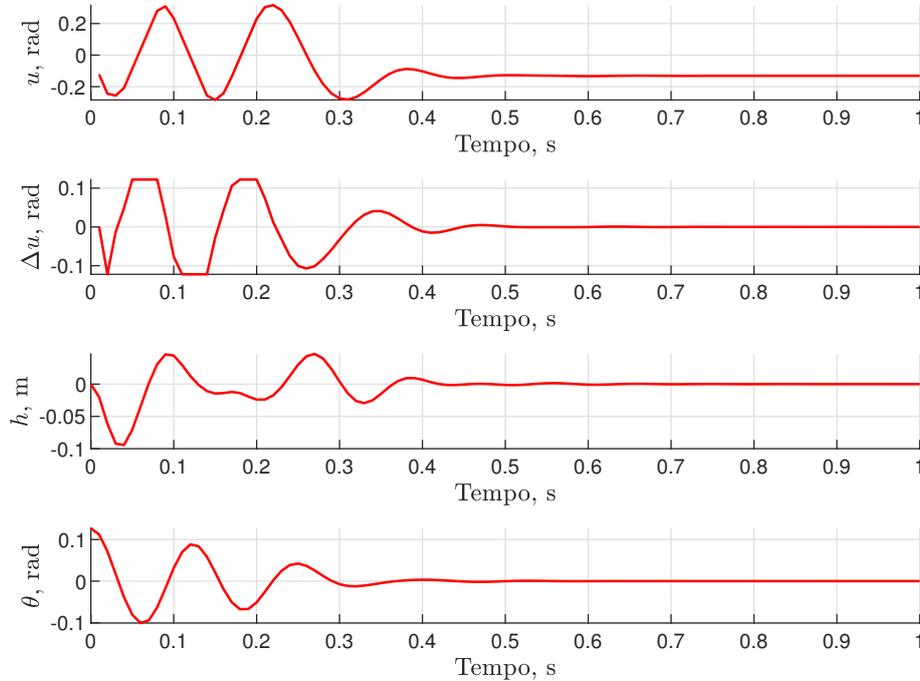


Figura 10 – Simulação em malha fechada com controlador preditivo na velocidade 27,8 m/s com $\theta(0) = 0,08$ rad (ou 5°).

Por fim, realizou-se uma simulação com condição inicial não nula em ambos os graus de liberdade, sendo $\theta(0) = 0,08$ rad (ou 5°) e $h(0) = 0,127$ m. O resultado é apresentado na Figura 12. Comparando-se com as Figuras 10 e 3, é possível perceber que a planta fica mais oscilatória quando sujeita às duas condições iniciais não nulas, demorando aproximadamente 0,55 segundos para convergir.

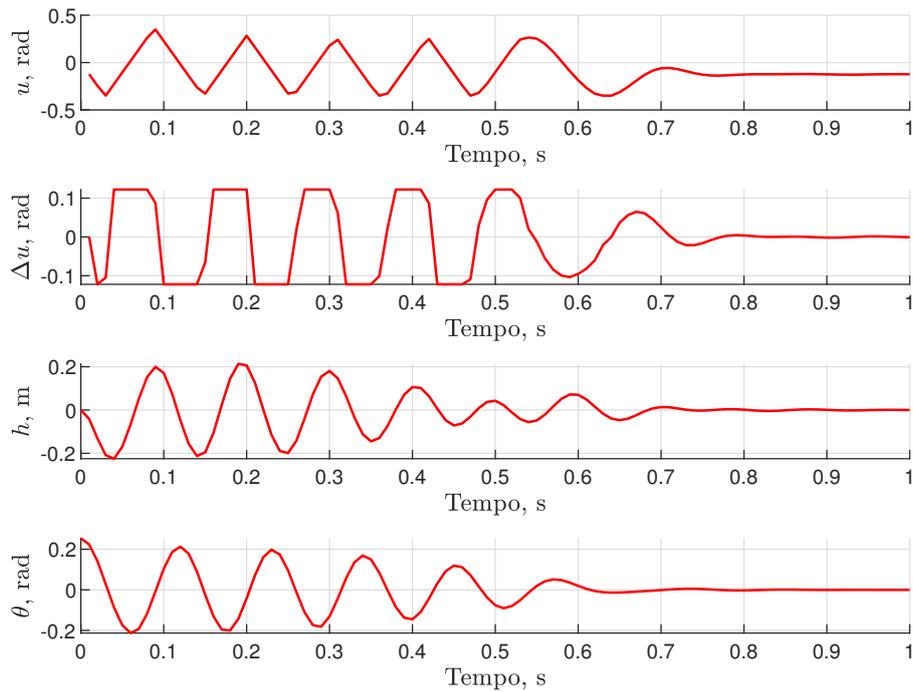


Figura 11 – Simulação em malha fechada com controlador preditivo na velocidade 27,8 m/s com $\theta(0) = 0,17$ rad (ou 10°).

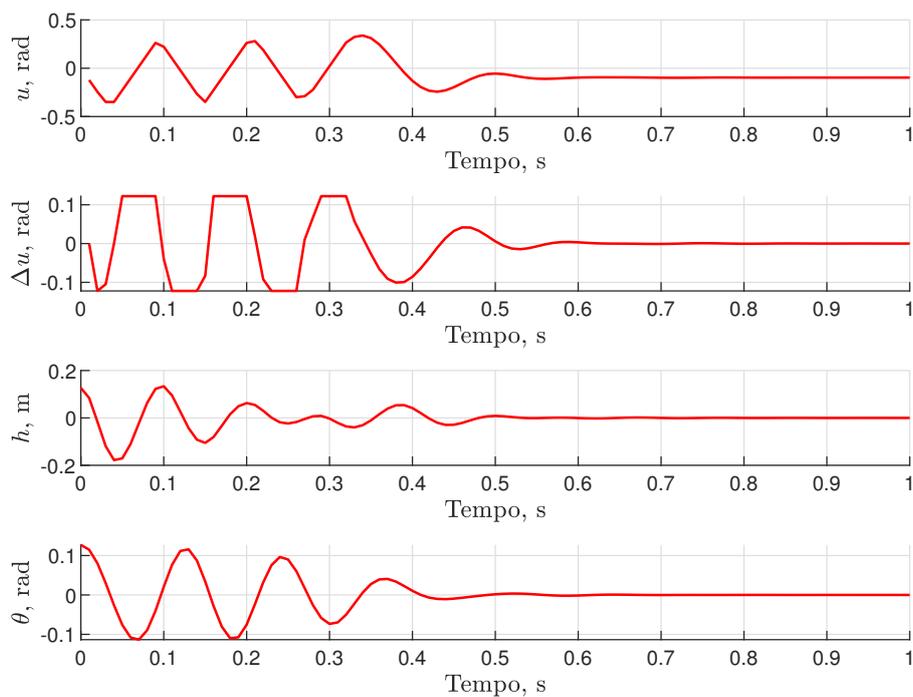


Figura 12 – Simulação em malha fechada com controlador preditivo na velocidade 27,8 m/s com $\theta(0) = 0,08$ rad (ou 5°) e $h(0) = 0,127$ m.

5 Conclusão

Este trabalho apresentou uma metodologia de AFS para a supressão de *flutter*, visto que a natureza instável do fenômeno pode causar falhas estruturais catastróficas. Em particular, adotou-se o controle preditivo com dois modos para realização de tal tarefa na presença de restrições de excursão e de incremento de controle.

O sistema foi modelado com base em uma seção típica de aerofólio com superfície de controle *flap* no bordo de fuga. As forças aeroelásticas foram modeladas e os carregamentos aerodinâmicos não estacionários foram aproximados por meio de um somatório de funções racionais. Ademais, com a introdução dos termos de atraso nas equações do movimento, foi obtido um modelo linear em espaço de estados. Simulações do sistema sem a presença do AFS (i.e. em malha aberta) e na velocidade de *flutter* mostraram que, como esperado, a resposta a uma condição inicial não nula é uma oscilação sustentada devido à existência de polos marginalmente estáveis.

Nas simulações em malha fechada, a realimentação de estados convencional foi capaz de suprimir o *flutter*. Contudo, na presença de restrições o LQR mostrou-se insuficiente, uma vez que não foi possível estabilizar o sistema na presença de saturação de entrada. Entretanto, os resultados mostraram que a implementação do *dual mode* MPC foi bem-sucedida, tendo em vista que foi possível eliminar o *flutter* com o devido respeito às restrições de incremento e magnitude de controle. Mais ainda, o efeito aeroelástico do sistema foi ampliado, sendo que o controlador foi capaz de atuar em velocidades acima da velocidade de *flutter*. Verificou-se que, com o uso do AFS baseado em controle preditivo, é possível aumentar em 23 % a velocidade de oscilação em relação à velocidade de *flutter* em malha aberta.

Para trabalhos futuros, propõe-se uma implementação da técnica de escalonamento de ganhos para contornar a limitação de funcionamento do controlador em torno de uma velocidade de escalonamento específica. Além disso, propõe-se o estudo da metodologia apresentada aplicada para modelos de asa 3D.

Referências

- ABEL, I. An analytical technique for predicting the characteristics of a flexible wing equipped with an active flutter-suppression system and comparison with wind-tunnel. *NASA Langley Research Center*, Hampton, VA, 1979.
- BORGLUND, D.; KUTTENKEULER, J. Active wing flutter suppression using a trailing edge flap. *Journal of Fluids and Structures*, v. 16, n. 3, p. 271–294, 2002.
- FRANÇA, F. F. *Implementação de controle ativo para supressão de flutter de uma seção típica bidimensional*. Monografia (TCC) — Universidade Federal de Uberlândia - UFU, Uberlândia, MG, 2022.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; WORMAN, M. L. *Digital Control of Dynamic Systems*. 2. ed. Reading: Addison-Wesley Publishing Company, 1997.
- FUNG, Y. C. *An Introduction to the theory of aeroelasticity*. Dover edition. Mineola, New York: Dover Publications, Inc, 1993.
- HUANG, R.; QUIAN, W.; HU, H.; ZHAO, Y. Design of active flutter suppression and wind-tunnel tests of a wing model involving a control delay. *Journal of Fluids and Structures*, v. 55, p. 409–427, 2015.
- MANUAL, Z. T. *Zona Technology*. 4. ed. Scottsdale: INC, 2017.
- MARQUI, C. *Estudo teórico e experimental de um controlador para supressão de flutter*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo - USP, 2004.
- ROGER, K. L. Airplane math modelling and active aeroelastic control design. *Brussels: NATO (North Atlantic Treaty Organization)*, 1977.
- ROSSITER, J. A. *Model-Based Predictive Control: A Practical Approach*. 1. ed. Boca Raton: CRC PRESS Control Series, 2004.
- SUN, Z.; BAI, J. Time-domain aeroservoelastic modeling and active flutter suppression by model predictive control. *Journal Advanced Materials Research*, v. 898, p. 688–695, 2014.
- TIFFANY, S. H.; JR, W. M. A. Nonlinear programming extensions to rational function approximation methods for unsteady aerodynamic forces. *NASA Langley Research Center*, Hampton, 1988.
- WRIGHT, J. R.; COOPER, J. E. *Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads*. 2. ed. Chichester: John Wiley Sons, 2014.