

**THIAGO ASSIS DA SILVA**

**TEORIA DE FILME FINO APLICADA A MODELAGEM  
MATEMÁTICA DE MANCAIS FLUIDODINÂMICOS**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**2024**

**THIAGO ASSIS DA SILVA**

**TEORIA DE FILME FINO APLICADA A MODELAGEM  
MATEMÁTICA DE MANCAIS FLUIDODINÂMICOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Aeronáutica. *VERSÃO REVISADA*

Orientador: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto  
Coorientador: Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavallini Junior

**Uberlândia - MG  
2024**

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU  
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

S586 2024	<p>Silva, Thiago Assis da, 1999- Teoria de Filme Fino Aplicada a Modelagem Matemática de Mancais Fluidodinâmicos [recurso eletrônico] : Uma alternativa ao modelo de Reynolds / Thiago Assis da Silva. - 2024.</p> <p>Orientador: Aristeu da Silveira Neto. Coorientador: Aldemir Aparecido Cavallini Junior. Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Uberlândia, Graduação em Engenharia Aeronáutica. Modo de acesso: Internet. Inclui bibliografia.</p> <p>1. Aeronáutica. I. Silveira Neto, Aristeu da ,1955-, (Orient.). II. Cavallini Junior, Aldemir Aparecido , 1983-, (Coorient.). III. Universidade Federal de Uberlândia. Graduação em Engenharia Aeronáutica. IV. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU: 629.7</p>
--------------	--

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091  
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

**THIAGO ASSIS DA SILVA**

**THIN FILM THEORY APPLIED TO THE MATHEMATICAL  
MODELING OF FLUID DYNAMIC BEARINGS**

Final Paper submitted to the Faculty of Mechanical Engineering from Federal University of Uberlândia in partial fulfillment of the requirements for the degree of Aeronautical Engineer. *FINAL VERSION*

Advisor: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto

Co-advisor: Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavallini Junior

**Uberlândia - MG**

**2024**

*Este trabalho é dedicado a todas as crianças que,  
ao crescer, mantiveram viva a chama de seus sonhos científicos.  
Em especial a mim mesmo, que ao iniciar este curso,  
sonhei em contribuir com algo novo e impactante.  
Também, aos pesquisadores do Laboratório de Mecânica dos Fluidos Computacional (MFLab).*

# AGRADECIMENTOS

---

---

A realização deste trabalho de conclusão de curso não seria possível sem o apoio e a colaboração de diversas pessoas e instituições, às quais expresso minha mais profunda gratidão.

À minha família, especialmente aos meus pais, João Batista e Maria José, e à minha irmã Mirella por todo o amor, suporte emocional e financeiro, e por acreditarem em mim em todos os momentos. Sem vocês, nada disso seria possível.

Aos meus amigos, Adriano, Alejandro, Amanda, André, Daniel, João Pedro, Jorge, Linsei, Luis, Maélia, Meire, Nilton, Saulo e Vitor, que estiveram ao meu lado, oferecendo palavras de encorajamento e momentos de descontração que foram essenciais para aliviar o estresse e manter o ânimo durante o curso.

Aos meus orientadores, Professor Aristeu e Professor Aldemir, por sua paciência, dedicação e orientação precisa, que foram fundamentais para a realização deste trabalho. Sua experiência e conhecimento foram imprescindíveis para o desenvolvimento deste projeto.

Aos professores do curso de Engenharia Aeronáutica, por compartilharem seu conhecimento e por contribuírem para a minha formação acadêmica e profissional.

À Universidade Federal de Uberlândia e à Petrobras, por proporcionar os recursos e o ambiente necessários para a realização das pesquisas e experimentos.

À minha melhor amiga, Thaís, por sua paciência e apoio. Sua amizade verdadeira, apoio constante, compreensão nos momentos mais difíceis, palavras de encorajamento foram fundamentais para que eu pudesse seguir em frente e concluir este trabalho. Você foi um pilar de força e motivação, sempre pronta para ouvir e oferecer conselhos sábios. Sua presença fez toda a diferença e sou eternamente grato por tê-la em minha vida.

E, finalmente, a todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a concretização deste trabalho. Meu sincero agradecimento.

*“Eu não creio que exista algo mais emocionante  
para o coração humano do que a emoção  
sentida pelo inventor quando ele vê alguma  
criação da mente se tornando algo de sucesso.  
Essas emoções fazem o homem esquecer  
comida, sono, amigos, tudo.”  
(Nikola Tesla)*

# RESUMO

SILVA, T.A. **Teoria De Filme Fino Aplicada A Modelagem Matemática De Mancais Fluidodinâmicos**. 2024. 85 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Aero-náutica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia - MG, 2024.

A modelagem de mancais fluidodinâmicos tem sido amplamente baseada no modelo clássico de Reynolds, que possibilita o cálculo da carga sustentada e a posição do eixo em relação a uma carga específica. Esta abordagem é eficaz para simulações em regime permanente ou pseudotransiente, onde a carga fornecida é equilibrada pela posição determinada. No presente trabalho propõe-se uma nova abordagem para a modelagem desses sistemas dinâmicos, fundamentada na teoria de filmes finos. O modelo proposto é unidimensional para velocidade, pressão e temperatura, proporcionando uma visão média na direção radial, enquanto considera a dependência da coordenada tangencial e do tempo. A inovação deste modelo reside na forma como o movimento do eixo é integrado ao fluido, através da modelagem das tensões entre o fluido e o eixo, e entre o fluido e o mancal.

O desenvolvimento e a validação do modelo foram baseados na comparação com resultados de métodos estabelecidos, revelando que o modelo de filmes finos pode ser eficaz na simulação de escoamentos tangenciais e oferece uma aproximação precisa dos campos de pressão, velocidade e temperatura. Apesar das diferenças esperadas devido às adaptações necessárias para incorporar termos não lineares e inerciais nas equações diferenciais da quantidade de movimento linear, os resultados demonstram a viabilidade e o potencial do modelo. A proposta tem a promessa de permitir a modelagem e simulação da dinâmica de sistemas de eixo-mancal em regime transiente com um custo computacional reduzido, devido à sua natureza unidimensional. Os resultados apresentados são promissores e indicam um avanço significativo na modelagem de mancais fluidodinâmicos, com a expectativa de melhorar a precisão e a eficiência das simulações.

**Palavras-chave:** Filme fino, Simulação numérica, Teoria de lubrificação, Mancais fluidodinâmicos, Dinâmica de máquinas rotativas.

# ABSTRACT

SILVA, T.A. **Thin Film Theory Applied to the Mathematical Modeling of Fluid Dynamic Bearings**. 2024. 85 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Aeronáutica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia - MG, 2024.

Fluid dynamic bearing modeling has traditionally relied on the classical Reynolds model, which allows for the calculation of the load that can be sustained and the position of the shaft relative to a specific load. This approach is effective for simulations in steady-state or pseudotransient regimes, where the given load is balanced by the determined position. This work proposes a novel approach to modeling these dynamic systems, based on thin film theory. The proposed model is one-dimensional for velocity, pressure, and temperature, providing an average view in the radial direction while accounting for the tangential coordinate and time. The innovation of this model lies in how the shaft's movement is integrated with the fluid through the modeling of stresses between the fluid and the shaft, and between the fluid and the bearing.

The development and validation of the model were based on comparisons with established methods, revealing that the thin film model can effectively simulate tangential flows and provides a precise approximation of pressure, velocity, and temperature fields. Despite the expected differences due to the adaptations necessary to incorporate nonlinear and inertial terms into the linear momentum equations, the results demonstrate the feasibility and potential of the model. The proposal holds promise for enabling the modeling and simulation of shaft-bearing system dynamics in transient regimes with reduced computational cost, due to its one-dimensional nature. The presented results are promising and indicate a significant advancement in fluid dynamic bearing modeling, with expectations to improve the accuracy and efficiency of simulations.

**Keywords:** Thin Film, Numerical Simulation, Lubrication Theory, Hydrodynamics Bearings, Rotordynamics.

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

---

---

Figura 1 – Esquema de um mancal fluidodinâmico cilíndrico. . . . .	18
Figura 2 – Representação da idealização de um mancal em uma sapata deslizante. Escoramento de Couette em um canal de altura variável. . . . .	25
Figura 3 – Representação geométrica de um mancal cilíndrico rotativo. . . . .	28
Figura 4 – Diferença nas malhas utilizadas. . . . .	29
Figura 5 – Representação esquemática da malha adotada para o problema da sapata deslizante. . . . .	43
Figura 6 – Representação esquemática do conceito de malhas deslocadas. . . . .	47
Figura 7 – Representação do eixo $\zeta$ para determinação das tensões nas paredes. . . . .	55
Figura 8 – Comparação entre os resultados obtidos para os valores das tensões nas paredes da sapata deslizante. . . . .	58
Figura 9 – Comparação entre os resultados obtidos para os valores das pressões com a modelagem discretizada. . . . .	59
Figura 10 – Representação dos canais analisados em coordenadas retangulares. . . . .	64
Figura 11 – Comparação campos de pressão para as diferentes geometrias de sapatas. . . . .	65
Figura 12 – Comparação campos de velocidades médias para as diferentes geometrias de sapatas. . . . .	66
Figura 13 – Comparação campos de temperatura para as diferentes geometrias de sapatas. . . . .	67
Figura 14 – Evolução temporal da pressão no canal parabólico positivo. . . . .	68
Figura 15 – Comparação tempo de processamento para diferentes números de elementos na malha discreta. . . . .	68
Figura 16 – Comparação entre as modelagens para a função $h(\theta)$ . . . . .	69
Figura 17 – Comparação campos de pressão para diferentes configurações de mancais bi-dimensionais. . . . .	70
Figura 18 – Comparação campos de velocidade média para diferentes configurações de mancais bi-dimensionais. . . . .	71
Figura 19 – Comparação campos de temperatura média para diferentes configurações de mancais bi-dimensionais. . . . .	72
Figura 20 – Comparação campos de pressão para mancais tri-dimensionais. . . . .	74
Figura 21 – Comparação campos de pressão para diferentes excentricidades mancal figura 20a. . . . .	75
Figura 22 – Comparação resultados obtidos pela modelagem FSI. . . . .	77
Figura 23 – Comparação campo de tensão com $Re^* > 1$ . . . . .	78

# LISTA DE TABELAS

---

---

Tabela 1 – Propriedades fluidodinâmicas e de operação das sapatas. . . . .	63
Tabela 3 – Configurações geométricas dos canais cartesianos. . . . .	63
Tabela 5 – Configuração para os diferentes mancais. . . . .	70
Tabela 6 – Propriedades termodinâmicas mancais bi-dimensionais. . . . .	73
Tabela 7 – Propriedades termodinâmicas mancais bi-dimensionais. . . . .	74

# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

---

---

CFD	Dinâmica dos Fluidos Computacional - do inglês <i>Computational Fluid Dynamics</i>
CFL	Coefficiente de Courant–Friedrichs–Lewy
CONV	Termo convectivo da equação de balanço de quantidade de movimento linear
FSI	Interação Fluido-Estrutura - do inglês <i>Fluid-Structure Interaction</i>
MAC	Método de acoplamento pressão-velocidade <i>marker and cell</i>
SC	superfície de controle
VC	volume de controle elementar
VISC	Termo viscoso da equação de balanço de quantidade de movimento linear

# LISTA DE SÍMBOLOS

---

---

$Re$  — Número de Reynolds

$Re^*$  — Número de Reynolds modificado

$x$  — Componente horizontal do plano cartesiano

$y$  — Componente vertical do plano cartesiano

$z$  — Componente de profundidade no plano cartesiano e eixo axial em coordenadas cilíndricas

$r$  — Componente radial em coordenadas cilíndricas

$\theta$  — Componente angular em coordenadas cilíndricas

$u$  — Componente de velocidade em  $x$

$v$  — Componente de velocidade em  $y$

$p$  — Pressão do fluido

$\rho$  — Massa específica do fluido

$\nu$  — Viscosidade dinâmica do fluido

$\mu$  — Viscosidade cinemática do fluido

$\lambda$  — Forma compacta da escrita  $d^2u/dy^2$

$U$  — Velocidade horizontal imposta na parede da sapata

$V$  — Velocidade vertical imposta na parede da sapata

$\omega$  — Velocidade de rotação do eixo

$h$  — Folga no canal

$c_i$  — Constantes de equações

$L$  — Comprimento do canal

$R_i$  — Raio do eixo rotativo

$R_e$  — Raio do mancal fixo

$R_\theta$  — Posição de qualquer ponto do eixo rotativo em relação ao centro do mancal fixo

$e_x$  — Excentricidade do eixo rotativo em relação ao centro do mancal fixo

$\theta_0$  — Ângulo de atitude do eixo rotativo

$a$  — Deslocamento horizontal do eixo rotativo em relação ao centro do mancal fixo

$b$  — Deslocamento vertical do eixo rotativo em relação ao centro do mancal fixo

$v_\theta$  — Velocidade tangencial do fluido

$v_z$  — Velocidade axial do fluido

$G$  — Função de compactação para  $v_\theta$

$dV$  — Volume de controle elementar

$dx$  — Comprimento infinitesimal na direção de  $x$

$t$  — Variável temporal

$A$  — Área

$V$  — Velocidade

$dA_x$  — Infinitésimo de área ortogonal à direção  $x$

$\vec{\nabla}$  — Operador divergente

$F$  — Força

$\tau$  — Tensão viscosa

$dz$  — Comprimento infinitesimal na direção  $z$

$d\theta$  — Comprimento infinitesimal na direção  $\theta$

$H$  — Compactação do termo  $h - h^2/2R_e$

$dA_\theta$  — Infinitésimo de área ortogonal à direção  $\theta$

$dA_z$  — Infinitésimo de área ortogonal à direção  $z$

$C_v$  — Capacidade térmica a volume constante do fluido

$k$  — Condutividade térmica do fluido

$k_s$  — Condutividade térmica do sólido

$q$  — Fluxo de calor

$\phi$  — Termo de transformação viscosa

$\eta$  — Termo fonte condições de contorno térmica

$T$  — Temperatura

$R_{eq}$  — Resistência equivalente

$R_{conv}$  — Resistência convectiva

$R_{cond}$  — Resistência difusiva

$h_{conv}$  — Coeficiente de convecção

$\xi$  — Espessura da parede sólida  
 $T_f$  — Temperatura na fronteira sólido-fluido  
 $T_\infty$  — Temperatura do fluido de convecção  
 $m_e$  — Massa do eixo rotativo  
 $\vec{a}_e$  — Vetor aceleração de translação do eixo rotativo  
 $\vec{V}_e$  — Vetor velocidade de translação do eixo rotativo  
 $\vec{X}_e$  — Vetor posição do centro do eixo rotativo  
 $F_x$  — Força líquida na direção  $x$   
 $F_y$  — Força líquida na direção  $y$   
 $F_p$  — Força devido ao gradiente de pressão  
 $L_z$  — Comprimento axial do eixo rotativo  
 $\psi$  — Coordenada iniciada no ponto convergente da folga radial  
 $\Omega$  — Domínio da malha discreta  
 $\Pi$  — Pontos da malha discreta  $\Omega$   
 $\Delta$  — Incrementos de determinadas variáveis  
 $i, j, e, k$  — Coordenada discreta de um elemento genérico da malha  $\Pi$   
 $N$  — Número de elementos na malha discreta  $\Pi$   
 $f$  — Função genérica  
 $m, e, n$  — Índices de somatório  
 $\varepsilon$  — Modelagem de transformação viscosa normal à folga  
 $\Gamma$  — Compactação do termo do lado direito da equação de Poisson  
 $W_e$  — Peso do eixo  
 $\zeta$  — Pseudo eixo vertical  
 $\kappa$  — Autovalor da EDO  
 $\alpha$  — Variável auxiliar para transformada de Laplace  
 $\sigma$  — Variável de integração do teorema da convolução

# SUMÁRIO

---

---

1	INTRODUÇÃO . . . . .	17
2	OBJETIVOS . . . . .	21
3	MODELO MATEMÁTICO-DIFERENCIAL . . . . .	23
3.1	Teoria de filme fino . . . . .	23
3.2	A hipótese do contínuo . . . . .	24
3.3	Modelo de Reynolds . . . . .	24
3.4	Equações de balanço seguindo teoria de filme fino . . . . .	28
3.4.1	<i>Coordenadas Cartesianas</i> . . . . .	29
3.4.2	<i>Coordenadas Cilíndricas</i> . . . . .	32
3.5	Modelagem térmica . . . . .	34
3.5.1	<i>Modelagem térmica aplicada ao modelo de Reynolds</i> . . . . .	34
3.5.2	<i>Teoria de Filme Fino</i> . . . . .	35
3.5.3	<i>Condições de contorno</i> . . . . .	36
3.6	Modelagem FSI . . . . .	38
3.7	Modelagem da função $h(\theta)$ . . . . .	39
4	MODELO NUMÉRICO-COMPUTACIONAL . . . . .	42
4.1	Discretização do modelo de Reynolds . . . . .	42
4.1.1	<i>Coordenadas Cartesianas</i> . . . . .	42
4.1.2	<i>Coordenadas Cilíndricas</i> . . . . .	44
4.2	Discretização equações filme fino . . . . .	45
4.2.1	<i>Discretização Temporal</i> . . . . .	45
4.2.2	<i>Aoplamento Pressão-Velocidade</i> . . . . .	47
4.2.3	<i>Discretização Espacial</i> . . . . .	48
4.2.3.1	<i>Coordenadas Retangulares</i> . . . . .	49
4.2.3.2	<i>Coordenadas Cilíndricas</i> . . . . .	50
4.3	Discretização modelagem FSI . . . . .	52
5	MODELAGEM DOS TERMOS-FONTE $(F_{ext}, \eta E \varepsilon)$ . . . . .	54
5.1	Coordenadas retangulares . . . . .	54
5.2	Coordenadas cilíndricas . . . . .	60

<b>6</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>62</b>
<b>6.1</b>	<b>Coordenadas Cartesianas</b>	<b>62</b>
<b>6.2</b>	<b>Coordenadas Cilíndricas</b>	<b>69</b>
<b>6.2.1</b>	<b><i>Modelagem bi-dimensional</i></b>	<b>69</b>
<b>6.2.2</b>	<b><i>Modelagem tri-dimensional</i></b>	<b>73</b>
<b>6.3</b>	<b>Interação Fluido-Estrutura</b>	<b>75</b>
<b>6.4</b>	<b>Violação da exigência <math>Re^* \ll 1</math></b>	<b>76</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>79</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>81</b>

---

## INTRODUÇÃO

---

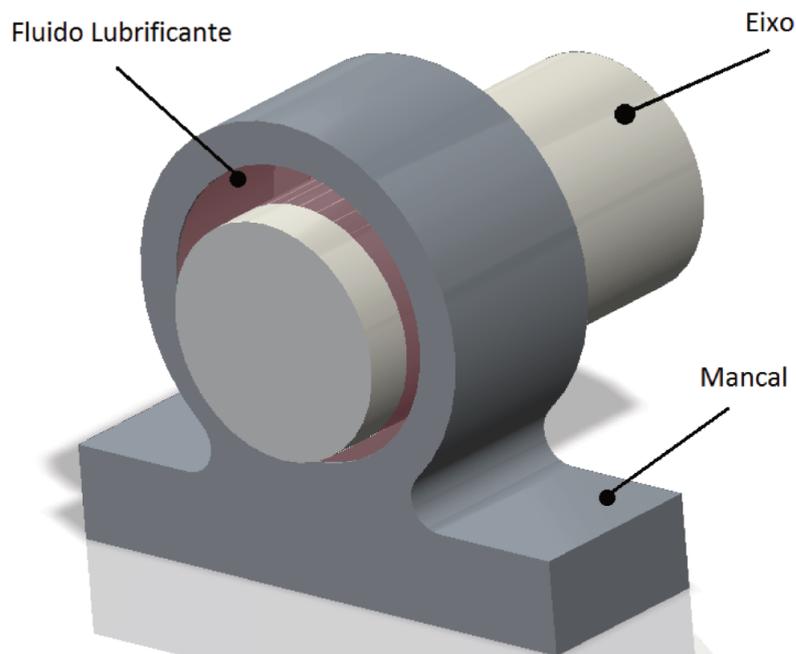
O estudo do escoamento de fluidos lubrificantes é essencial para o progresso em diversas áreas da tecnologia, principalmente quando envolve peças rotativas de máquinas. Isto se deve ao uso generalizado de tais dispositivos no mundo de hoje e à sua existência em contextos anteriormente inimagináveis. Um bom exemplo do cenário atual é a sua utilização na exploração do pré-sal para recuperação de petróleo, onde essas máquinas encontram condições adversas devido a grandes gradientes de pressão e flutuações de temperatura, além de diferentes tipos de formações perfuráveis. Quanto mais desfavoráveis forem as condições físicas, mais importante será a análise do escoamento do fluido, o que permite compreender o seu efeito no funcionamento da máquina.

Mancais são elementos de máquina que fazem uma conexão entre as partes fixas e móveis em um sistema rotativo (CASTRO, 2007). Para Norton (2013), duas superfícies que possuem movimento relativo entre si constituem um mancal. São diversos tipos de mancais existentes, como os de rolamento, planos e radiais, cada um destinado a um tipo de operação. A escolha do ideal para cada operação depende dos movimentos e esforços envolvidos na aplicação (RAMOS, 2019). De acordo com Alves (2011), um mancal fluidodinâmico possui um fluido lubrificante entre as peças rígidas cuja finalidade é substituir o atrito seco pelo atrito viscoso, a fim de reduzir a temperatura de operação, o atrito e o desgaste dos componentes do mancal. Não existindo contato entre as peças, esses elementos são amplamente empregados em turbomáquinas já que suportam altas cargas e altas velocidades, e possuem alta durabilidade operacional (MOTA, 2020).

O presente trabalho será focado em mancais fluidodinâmicos rotativos. Uma esquematização desse tipo de mancal é visto na figura 1.

Segundo White (2022), a lubrificação desempenha um papel crucial na redução do atrito entre corpos com movimento relativo muito próximos um do outro. O uso de um fluido em um espaço estreito entre esses corpos permite um deslizamento mais suave, minimizando o atrito e o

Figura 1 – Esquema de um mancal fluidodinâmico cilíndrico.



Fonte: Ramos (2019).

desgaste.

Newton formulou as leis do movimento e da gravidade, estabelecendo os fundamentos da física clássica. Mesmo não tendo abordado diretamente o campo dos fluidos, suas leis são aplicadas para o desenvolvimento das equações que descrevem o comportamento destes.

Contribuições relevantes foram feitas por Euler no campo da matemática e da física. Euler formulou a equação de balanço de massa e também utilizou de equações diferenciais para estudar o movimento dos fluidos.

Evoluindo o trabalho de Euler, Navier considerou também a viscosidade dos fluidos em suas equações, formulando, assim, uma equação que sofre efeitos da tensão viscosa entre as camadas de fluido. Indo além, Stokes reformulou as equações de Navier para escoamentos a baixos números de Reynolds. Ele desenvolveu simplificações para escoamentos incompressíveis e em regime laminar. A combinação dessas equações e simplificações ficaram conhecidas como equações de Navier-Stokes.

O surgimento da teoria de mancais fluidodinâmicos se deu por Reynolds (1886), que desenvolveu uma simplificação a partir das equações de Navier-Stokes para descrever o campo de pressão entre duas superfícies próximas e lubrificadas. Reynolds também estudou uma aproximação para mancais infinitamente longos. O trabalho foi a base para avanços no desenvolvimento da teoria de mancais, influenciando o desenvolvimento de técnicas de modelagem e de simulação. Contudo, o modelo apresenta uma forte limitação, tendo validade em regimes cujo o número de Reynolds modificado ( $Re^*$ ) (WHITE, 2022) são muito menores que a unidade ( $Re^* \ll 1$ ).

Sommerfeld (1904 apud MOTA *et al.*, 2022) obteve uma expressão analítica para mancais infinitamente longos. Contudo, suas condições de contorno não consideram a ruptura do filme, o que acabava por exibir uma distribuição de pressão negativa na região divergente do filme de fluido lubrificante. Swift (1932) e Stieber (1933) adicionaram novas condições de contorno a fim de modelar a saída do fluido lubrificante, essas condições ainda são usadas em estudos de mancais com carga constante no eixo. Também amplamente utilizada, Ocvirk (1952) realizou uma detalhada solução para mancais infinitamente curtos. O primeiro relato de uso de computadores para o cálculo do campo de pressão em mancais foi realizado por Pinkus (1956), que analisou mancais circulares, elípticos e lobulares.

Trabalhos como de Hamrock (1991), Frene D Nicolas (1997) e, de forma mais recente, Ishida e Yamamoto (2013) abordam os conceitos básicos de mancais fluidodinâmicos. Equações aproximadas tanto para mancais longos quanto para mancais curtos são utilizadas nesses trabalhos.

Uma modelagem mais precisa da geometria dos mancais é proposta por Mota *et al.* (2022). Contudo, sua modelagem é um tanto complexa e envolve uma condicional. O presente trabalho também descreverá uma modelagem alternativa e precisa.

O presente trabalho apresenta uma proposta nova e mais eficaz, já que utiliza também das forças inerciais em sua modelagem, para a resolução dos campos de pressão e de velocidade em mancais. Cauchy (1829)<sup>1</sup> propôs em seu trabalho o método das diferenças finitas, o qual será utilizado para a discretização das equações desenvolvidas. A solução obtida pelo proposto será comparada com o clássico modelo de Reynolds. Nessa fase do estudo, o modelo será analisado para mancais cilíndricos com ângulo de atitude e excentricidade do eixo predeterminados. Contudo, será apresentado uma modelagem inicial para o problema da interação fluido-estrutural do sistema.

Silva, Cavalini e Neto (2023) foram os primeiros a aplicarem o método aqui apresentado. Contudo, este estudo propõe melhorias significativas em relação a este primeiro estudo.

Problemas com interação fluido-estrutura envolve a troca de quantidade de movimento linear e forças entre o fluido e a estrutura (OLIVEIRA; HUEBNER; GRECO, 2017).

Os métodos convencionais para resolver problemas de lubrificação normalmente baseiam-se na equação clássica de Reynolds e dificilmente estuda-se a interação fluido-estrutura em rolamentos de deslizamento com água (WANG *et al.*, 2016).

Vários trabalhos são encontrados em diversas áreas da engenharia a respeito do fenômeno Interação Fluido-Estrutura - do inglês *Fluid-Structure Interaction* (FSI). Haase (2001) e Liu, Lu e Xue (2008) analisaram o comportamento da interação em aeronaves. Em turbinas, encontra-se Kim *et al.* (2012) em eólicas e Hübner, Seidel e Roth (2010) em hidráulicas. Au-Yang e Galford

<sup>1</sup> Embora seja creditado como o criador do método, trabalhos anteriores como Takakazu (1674) utilizaram métodos semelhantes.

(1982) estudou o comportamento em partes de reatores nucleares. Concli (2020) e (LIU *et al.*, 2009) estudaram o comportamento estrutural de mancais fluidodinâmicos. E, mais recentemente, Kamat, Kini e Shenoy (2022) apresentaram os efeitos térmicos e de cavitação em mancais utilizando de técnicas de Dinâmica dos Fluidos Computacional - do inglês *Computational Fluid Dynamics* (CFD) e FSI.

O FSI pode ser, segundo Zienkiewicz e Taylor (2000), agrupado em duas categorias: acoplamento forte e acoplamento fraco. De acordo com Jo (2011), o acoplamento forte é aquele em que as deformações e vibrações do sistema não podem ser negligenciadas, e acoplamento fraco possui mínimas variações e, com isso, podem ser negligenciadas.

O problema fluido-estrutural pode ser solucionado de forma monolítica ou particionada. Monolítica é quando o sistema estrutural é discretizado e solucionado de forma simultânea ao sistema fluido. O custo é elevado, pois a cada iteração do processo uma nova matriz é necessária (HEIL, 2004). Vierendeels, Dumont e Verdonck (2008) descrevem que métodos particionados tem como vantagem a possibilidade de utilizar métodos mais eficientes para cada problema analisado, resolver uma maior gama de problemas e são mais fáceis de implementar.

Nos últimos anos a crescente demanda por eficiência e economia levaram a um aumento das velocidades de operações de mancais. Ocasionalmente em uma distribuição de temperaturas mais elevadas (LI *et al.*, 2019).

Hughes e Osterle (1958) foram os primeiros a apresentarem os efeitos termodinâmicos na operação de mancais. Em seu trabalho encontrou uma relação da viscosidade sendo função da temperatura e da pressão no mancal para condições adiabáticas. Chauhan, Sehgal e Sharma (2011) apresentou um estudo comparativo dos efeitos térmicos em mancais não circulares. Uhkoetter *et al.* (2012) incluíram a equação da energia em suas análises CFD para mancais de grandes escalas.

Por vezes, como neste trabalho, temperatura constante é considerada ao longo da espessura do mancal, fazendo a temperatura variar apenas nas outras direções. Esse tipo de análise é chamada de bi-dimensional (LORENZ; OFFNER; KNAUS, 2015).

Ahmadkhah e Kakaee (2021) analisou os efeitos térmicos tri-dimensionais de mancais de eixos texturizados, avaliando os efeitos sobre a massa específica e a viscosidade do fluido lubrificante.

---

## OBJETIVOS

---

Os objetivos gerais do trabalho consistem em determinar uma nova metodologia ao clássico modelo de Reynolds. Apesar de o modelo de Reynolds apresentar até os dias de hoje um amplo uso no campo da análise de máquina rotativas, o modelo apresenta limitações tais como a exigência de  $Re^* \ll 1$  e não apresentar um modelo transiente.

A adição dos termos não-lineares (inerciais) é uma tentativa de fuga à exigência de  $Re^* \ll 1$ . A modelagem transiente abre caminhos para a modelagem da interação fluido-estrutura do sistema.

Atualmente, a forma de se analisar mancais fluidodinâmicos sem o uso da equação de Reynolds é a utilização de *softwares* CFD - comerciais ou não. Entretanto, o custo de análises CFD tendem a ser muito elevados, mesmo em problemas simples, o que torna inviável em determinados usos.

O presente trabalho também busca reduzir esses custos elevados de uma análise CFD, buscando resolver os campos de pressão, de velocidade e de temperatura de forma média ao longo da pequena espessura de fluido no mancal. Desta forma, se torna necessário apenas um elemento ao longo da espessura do fluido, tornando uma análise bi-dimensional ( $x, y$  ou  $r, \theta$ ) em uni-dimensional ( $x$  ou  $\theta$ ) e uma análise tri-dimensional ( $x, y, z$  ou  $r, \theta, z$ ) em bi-dimensional ( $x, z$  ou  $\theta, z$ ).

Além disso, a abordagem proposta pode melhorar a precisão e a robustez das análises realizadas, uma vez que permite a incorporação de efeitos não-lineares e transientes de forma mais eficiente. A metodologia desenvolvida será validada através de comparações com resultados oriundos do clássico modelo de Reynolds e também com análise CFD, garantindo que a nova abordagem mantenha um alto nível de precisão e confiabilidade.

Também é objetivo desse trabalho a dedução de uma nova modelagem mais precisa para função da espessura do filme de fluido lubrificante no sistema, visto que as modelagens amplamente divulgadas apesar de serem uma boa aproximação apresentam erros.

A implementação dessa metodologia inovadora pode melhorar significativamente a forma como os mancais fluidodinâmicos são analisados, proporcionando uma ferramenta útil para engenheiros e pesquisadores.

---

## MODELO MATEMÁTICO-DIFERENCIAL

---

O desenvolvimento do trabalho partiu desde a dedução do modelo de Reynolds para canais cartesianos e cilíndricos, a dedução do balanço de quantidade de movimento e massa utilizando a teoria de filme fino para canais cartesianos e cilíndricos, dedução do modelo térmico seguindo a teoria de filme fino, uma dedução precisa para a função da folga radial em mancais cilíndricos até a modelagem preliminar do problema FSI.

### 3.1 Teoria de filme fino

Em muitas aplicações de engenharia, é comum a utilização de fluidos lubrificantes para reduzir o atrito e o desgaste de peças móveis. Nesses casos, os fluidos geralmente apresentam espessuras muito pequenas.

Devido à sua espessura reduzida, esses filmes exibem variações quase imperceptíveis em suas propriedades escalares, como pressão e temperatura. Ao aplicar a hipótese de não escorregamento (o fluido adota exatamente a velocidade da parede no ponto de contato), o fluido demonstra uma grande variação de velocidade ao longo de sua espessura. No entanto, esse gradiente de velocidade é irrelevante na maior parte dos estudos aplicados a mancais fluidodinâmicos, que é o foco deste trabalho.

Assim, as propriedades escalares e vetoriais podem ser calculadas de forma média ao longo da espessura do filme fino. Essa abordagem traz consigo algumas implicações na modelagem matemática do problema. Por exemplo, a espessura e sua variação ao longo do canal, passa a ser inserida em todos os termos dos balanços de quantidade de movimento linear e de massa. Outra implicação relevante é a desconsideração da variação das propriedades ao longo da espessura. Supondo que a espessura esteja ao longo da componente  $y$  e que  $\beta$  seja uma

propriedade qualquer, tem-se:

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} = 0. \quad (3.1)$$

A implicação da Equação 3.1 é a dificuldade na imposição das condições de contorno do problema. Pela Figura 1, é fácil perceber que as condições de contorno são mais relevantes nos limites do fino filme lubrificante do canal. A velocidade do fluido, por exemplo, é imposta nesses limites.

Portanto, modelagens especiais devem ser desenvolvidas para a imposição dessas condições de contorno. Este trabalho é pioneiro nessa temática, apresentando essas modelagens específicas de forma detalhada.

## 3.2 A hipótese do contínuo

De acordo com a física moderna, a matéria é composta de maneira descontínua, sendo formada por átomos, que por sua vez são constituídos por partículas subatômicas. No entanto, a maioria das aplicações da mecânica na engenharia não se preocupa com o movimento individual dessas partículas, mas sim com o comportamento médio de um grupo de matéria.

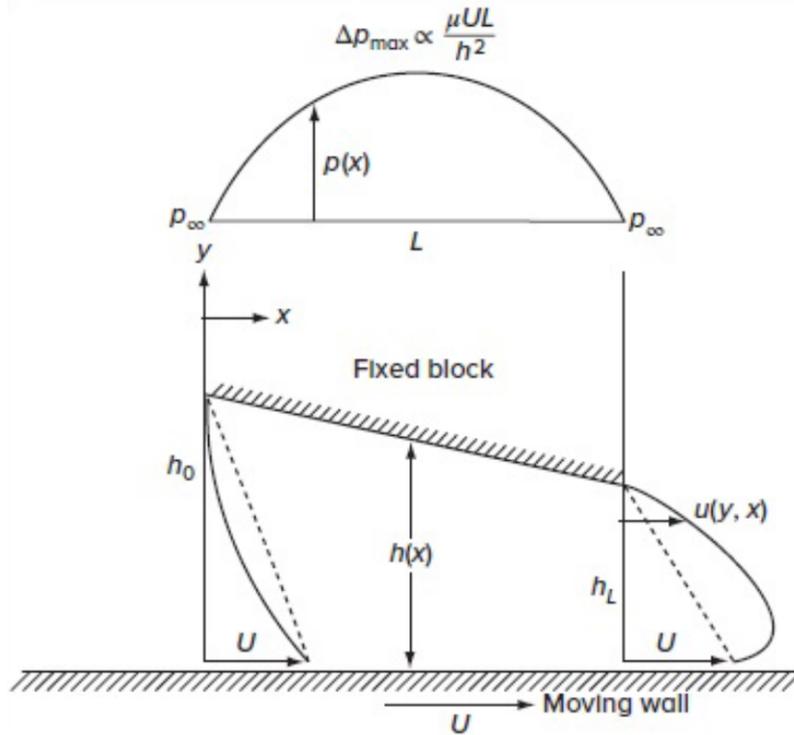
Ao estudar o comportamento mecânico dos meios fluidos, entra-se na área da mecânica do contínuo. Segundo Spencer (1980), a mecânica do contínuo modela a natureza microscópica da matéria e a trata como uniformemente distribuída ao longo de todas as regiões do espaço. Isso permite associar a ela grandezas físicas que são funções contínuas e variam com a posição e o tempo, o que significa que as variações das propriedades físicas da matéria ocorrem de forma suave, possibilitando o uso do cálculo diferencial.

Essa hipótese é válida apenas para problemas cujas dimensões características são superiores a um volume-limite, que é um parâmetro que define duas regiões de trabalho distintas: a primeira para aplicações com comprimento característico menor que o volume-limite, onde efeitos moleculares e atômicos são explicitamente modelados; e a segunda para aplicações com comprimentos característicos acima do volume-limite, onde os efeitos microscópicos são modelados em nível macroscópico. Para meios fluidos, o volume-limite geralmente é maior que o caminho livre médio molecular (SANTOS, 2022).

## 3.3 Modelo de Reynolds

Uma idealização do problema de lubrificação é o mancal de sapata deslizante, mostrado na figura 2. A parte de baixo se movimenta uma velocidade  $U$  e cria um escoamento Couette no canal. Para respeitar a continuidade, a pressão no canal para um máximo e superpõe um escoamento de Poiseuille ao longo do canal.

Figura 2 – Representação da idealização de um mancal em uma sapata deslizante. Escoamento de Couette em um canal de altura variável.



Fonte: White (2022).

Partindo da equação de Navier-Stokes cartesiana, equação 3.2, para a componente  $x$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (3.2)$$

e introduzindo as hipóteses de escoamento de Stokes (os efeitos não-lineares são desprezíveis em relação aos efeitos viscosos,  $\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \ll \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ), regime permanente ( $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ ) e que as sapatas não se movimentam verticalmente ( $v = 0$ ) a equação 3.2 se torna:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{d^2 u}{dy^2}. \quad (3.3)$$

As condições de contorno, considerando que a parede inferior do sistema possui velocidade constante, são:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} = \lambda(x) \\ u(0) = U \\ u(h(x)) = 0 \end{cases}$$

Integrando a equação 3.3 e aplicando as condições de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y) = \frac{\lambda(x)y}{2} + c_1(x)y + c_2(x) \\ u(x, 0) = c_2(x) = U \\ u(x, h(x)) = \frac{\lambda(x)y}{2} + c_1(x)y + U = 0 \implies c_1(x) = -\left(\frac{\lambda(x)h(x)}{2} + \frac{U}{h(x)}\right) \end{array} \right.$$

A solução contínua para o campo de velocidade do sistema é definido então pela Eq. 3.4.

$$u(x, y) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} - \left( \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{h(x)}{2} + \frac{U}{h(x)} \right) y + U \quad (3.4)$$

reescrevendo fica:

$$u(x, y) = U \left( 1 - \frac{y}{h(x)} \right) + \frac{h(x)^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left[ \left( \frac{y}{h(x)} \right)^2 - \frac{y}{h(x)} \right] \quad (3.5)$$

A correta distribuição de pressão  $p(x)$  é aquela que leva  $u(x, y)$  a satisfazer também à equação da continuidade.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial x} \partial y = -\partial v \implies \int_0^{h(x)} \frac{\partial u}{\partial x} \partial y = -v(h) + v(0) \quad (3.6)$$

Derivando  $u(x, y)$  na equação 3.5 em relação a componente  $x$  fica:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U \frac{y}{h^2} \frac{dh}{dx} + \frac{1}{2\mu} \left( y(y-h) \frac{d^2 p}{dx^2} - y \frac{dh}{dx} \frac{dp}{dx} \right) \quad (3.7)$$

Integrando a equação 3.7 em relação a componente  $y$ , conforme a equação 3.6 temos, já de forma simplificada:

$$\int_0^{h(x)} \frac{\partial u}{\partial x} \partial y = 6U\mu \frac{dh}{dx} - \frac{d}{dx} \left( h^3 \frac{dp}{dx} \right) = 0 \quad (3.8)$$

Ou, da forma como é encontrada na literatura, a conhecida Equação de Reynolds para filmes finos:

$$\frac{d}{dx} \left( h^3 \frac{dp}{dx} \right) = 6\mu U \frac{dh}{dx} \quad (3.9)$$

Ainda a partir da hipótese do escoamento de Stokes é possível determinar uma das limitações do modelo de Reynolds, um dos motivadores do desenvolvimento do novo modelo:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \ll \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \rho U \frac{U}{L} \ll \mu \frac{U}{h^2}; \quad (3.10)$$

ou, de forma mais usual

$$\frac{\rho UL}{\mu} \frac{h^2}{L^2} \ll 1. \quad (3.11)$$

É notável na equação 3.11 que a primeira fração é o conhecido número de Reynolds ( $Re$ ), essa equação recebe o nome de número de Reynolds modificado ( $Re^*$ ). Contudo,  $Re$  pode ser maior do que a unidade desde que a parcela modificadora seja pequena o suficiente para garantir que  $Re^* \ll 1$ .

O modelo de Reynolds apresenta solução contínua para canais cuja variação da espessura ao longo de  $x$  seja constante ( $\partial h / \partial x = \text{constante}$ ). Do contrário, a única forma de resolução com campo de pressão e de velocidade é de forma numérica.

Importante lembrar que o escoamento de Stokes, sendo linear, é reversível. Ao impor uma velocidade negativa na parede da figura 2, isto é, impor um movimento da direita para a esquerda, a pressão se tornará negativa. Ao considerarmos um fluido real sofrendo efeitos de compressibilidade, o fluido na verdade não desenvolverá uma grande pressão negativa, mas sim formará uma região de vapor na folga, efeito conhecido como cavitação. Assim, o fluxo em uma folga estreita em expansão geralmente não suporta muita carga nem proporciona uma boa lubrificação. Esse efeito é inevitável em um mancal de deslizamento rotativo, onde a folga se contrai e depois se expande, e a cavitação parcial frequentemente ocorre (WHITE, 2022).

Em um problema geral de lubrificação, ambas as paredes superior e inferior podem se mover tangencialmente e ortogonalmente, também existe uma certa componente de profundidade ao longo de  $z$ . É assumido que não existe movimento das paredes ao longo de  $z$ . A dedução modelo tri-dimensional para a equação de Reynolds para fluidos lubrificantes incompressíveis segue os passos citados anteriormente, desta vez considerando a variação da pressão ao longo da componente  $z$ . A dedução detalhada para este caso pode ser encontrada, por exemplo, no trabalho de Szeri (1980). A equação de Reynolds completa para este caso é descrita por:

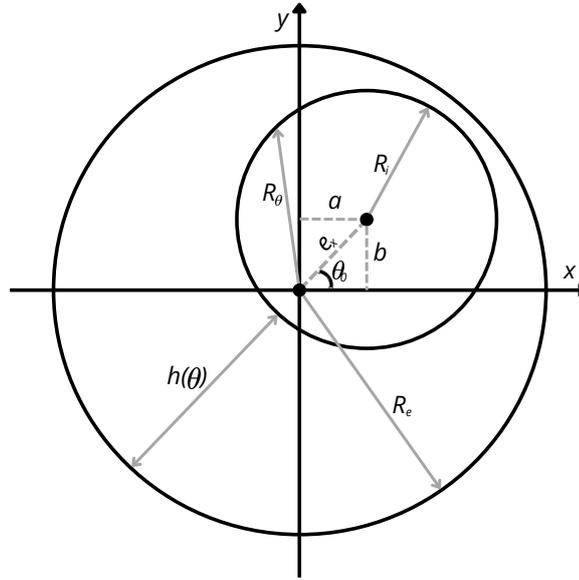
$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \frac{\partial}{\partial x} [h(U(0) + U(h))] + 12\mu [V(h) - V(0)]. \quad (3.12)$$

A pressão deve ser conhecida em todos os 4 lados abertos da sapata.

Mancais rotativos são a forma mais comum e mais realista de se tratar o problema de mancais. São compostos por um cilindro externo fixo e um eixo interno que rotaciona e promove movimento ao fluido, conforme visto na figura 3.

O processo para a dedução da equação de Reynolds em coordenadas cilíndricas apresenta o mesmo processo mostrado para a dedução em coordenadas cartesianas. A derivação detalhada para as equações que determinam os campos de pressão e de velocidade podem ser encontrados em trabalhos como os de Mota *et al.* (2022) e de Zirkelback e Andrés (1999).

Figura 3 – Representação geométrica de um mancal cilíndrico rotativo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A equação para a determinação do campo de pressão em um mancal cilíndrico é dado conforme a equação 3.13, enquanto as equações para a determinação das velocidades tangenciais e axiais são dadas pelas equações 3.14 e 3.16, respectivamente.

$$\frac{1}{R_i^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu\omega \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (3.13)$$

$$v_\theta(r, \theta, z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \left[ r \left( \ln r - \frac{1}{2} \right) + Gr - \frac{R_e^2}{r} \left( \ln R_e + G - \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{\omega R_i R_\theta}{(R_\theta^2 - R_e^2)} \left( r - \frac{R_e^2}{r} \right) \quad (3.14)$$

sendo:

$$G = \frac{1}{R_e^2 - R_\theta^2} \left[ R_\theta^2 \left( \ln R_\theta - \frac{1}{2} \right) - R_e^2 \left( \ln R_e - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (3.15)$$

$$v_z(r, \theta, z) = \frac{\partial p}{\partial z} \frac{R_\theta^2}{4\mu} \left[ \left( \frac{r}{R_\theta} \right)^2 - \frac{(R_e^2 - R_\theta^2)}{R_i^2 \ln(R_e/R_\theta)} \ln \left( \frac{r}{R_\theta} \right) - 1 \right] \quad (3.16)$$

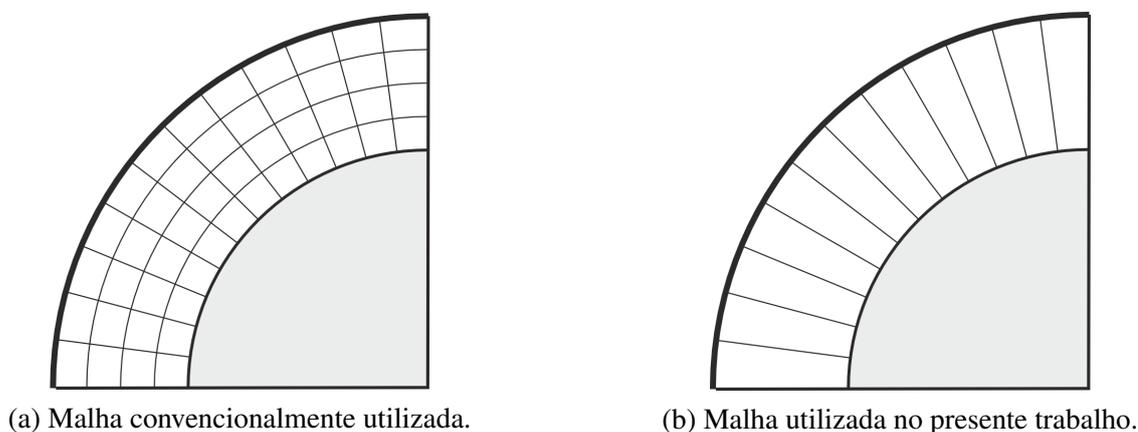
### 3.4 Equações de balanço seguindo teoria de filme fino

Formulações diferenciais representam balanços de alguma informação transportada pelo escoamento, podendo ser massa, quantidade de movimento linear, energia térmica e outras (NETO, 2020).

Um dos grandes diferenciais deste trabalho é a redução de um problema bi-dimensional para um problema uni-dimensional e tri-dimensional para bi-dimensional. Isso se dá devido as variações das propriedades (velocidade, pressão, e temperatura) serem muito pequenas ao longo da coordenada radial. Assim, a discretização se torna mais barata e rápida, tanto em termos de tempo de análise do problema como em custo computacional para o cálculo das variáveis do problema. A figura 4 mostra uma comparação entre as malhas convencionalmente utilizadas neste tipo de problema e a malha utilizada seguindo a metodologia apresentada neste trabalho.

Para os dois sistemas de coordenadas (cartesiano e cilíndrico) a resolução via CFD exige divisão de malha na direção da fenda  $h$ . Extinguindo essa divisão o problema se torna mais simples e seu custo é reduzido de forma proporcional ao número de elementos convencionalmente adicionados nessa direção.

Figura 4 – Diferença nas malhas utilizadas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

### 3.4.1 Coordenadas Cartesianas

Considerando um volume de controle elementar (VC), é possível deduzir todas as equações diferenciais básicas (WHITE, 1988). Escolhe-se um volume de controle pequeno fixo ( $dV$ ) 3.17, utiliza-se as relações básicas para um volume de controle. Para a modelagem do problema no plano cartesiano foi realizado apenas o estudo bi-dimensional, assim considera-se que não existe variação ao longo da componente de profundidade  $z$  e que sua dimensão é unitária, tornando  $dz = 1$ .

$$dv = h(x)dx \quad (3.17)$$

Supondo uma massa  $m$  contida num VC delimitada por uma superfície de controle (SC), e utilizando a definição de que um sistema deve ser estanque, isto é, não permitindo fluxo de

massa, a formulação correta para a conservação de massa é a dada por:

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_{SC} \rho (\vec{V} \cdot d\vec{A}) = 0. \quad (3.18)$$

O Teorema de Leibniz e o Teorema de Gauss (ÇENGEL; CIMBALA, 2015), também conhecido como Teorema da divergência, permitem reescrever a integral de superfície como um integral de volume, resultando em apenas um integrando:.

$$\int_{VC} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \right) dv = 0. \quad (3.19)$$

O balanço de massa também pode ser entendido como a taxa de variação de massa no volume igual ao negativo do fluxo líquido dentro do volume. Ou, de forma matemática, a equação 3.20. Essa equação utilizada da expansão de Taylor para determinar o fluxo de saída de massa no VC.

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho dv = - \left( \rho u dA_x + \frac{\partial(\rho u dA_x)}{\partial x} dx - \rho u dA_x \right) \quad (3.20)$$

sendo que  $dA_x = h(x)$ .

Considerando um fluido incompressível ( $\partial \rho / \partial t = \partial \rho / \partial x = 0$ ) e que não existe variação temporal de  $h$  ( $\partial h / \partial t = 0$ ), a equação da conservação de massa para o problema da sapata deslizando utilizando teoria de filme fino se reduz a:

$$\frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0. \quad (3.21)$$

A partir da equação da conservação de massa com todas as hipóteses e simplificações introduzidas determina-se também o operador divergente ( $\vec{\nabla}$ ). Para o caso em questão, é

$$\vec{\nabla} \cdot () = \frac{\partial h()}{\partial x}. \quad (3.22)$$

Usando o mesmo volume elementar mostrado na equação 3.17, a relação correta para a quantidade de movimento linear é dada pela equação 3.23.

$$\sum \vec{F} = \frac{\partial(\vec{V} \rho dv)}{\partial t} + \sum_i (\dot{m}_i \vec{V}_i)_{sai} - \sum_i (\dot{m}_i \vec{V}_i)_{ent} \quad (3.23)$$

Para o caso da sapata deslizando bi-dimensional os fluxos de quantidade de movimento ocorrem nas duas faces, uma entrada e uma saída.

Utilizando a hipótese de que só há escoamento na direção de  $x$  e da expansão de Taylor é possível reescrever a equação 3.23 para

$$\sum F = \rho \frac{\partial hu}{\partial t} + hu \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u \left\{ \frac{\partial hu}{\partial x} \right\} + hu \frac{\partial \rho u}{\partial x}. \quad (3.24)$$

O termo entre chaves na equação 3.24 é justamente a equação da conservação de massa (3.21) para o caso em questão, o que torna o termo nulo. Assim, aplicando os efeitos de incompressibilidade e assumindo mais uma vez que não há variação temporal de  $h$ , reduzimos a equação 3.24 simplesmente para

$$\sum F = \rho h \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx. \quad (3.25)$$

Essas forças assumem dois tipos, forças de campo e forças de superfícies. As forças de campo se devem a campos exteriores que atuam sobre a massa dentro do volume de controle, os mais conhecidos são o campo gravitacional, o campo magnético e o campo de potencial elétrico. Aqui não será considerado as forças de campo. As forças de superfície se dão às tensões sobre os lados da superfície de controle, são dadas pela soma das pressões hidrostáticas e das tensões viscosas  $\tau_{ij}$  que surgem do movimento provocado pelo gradiente de velocidades. Não são as tensões, mas suas diferenças que causam uma força líquida sobre a superfície de controle (WHITE, 1988).

Utilizando mais uma vez da expansão de Taylor, escreve-se essas forças de superfície como

$$F_{sup,x} = - \left( pdA_x + \frac{\partial(pdA_x)}{\partial x} dx - pdA_x \right) + \tau_{xx} dA_x + \frac{\partial(\tau_{xx} dA_x)}{\partial x} dx - \tau_{xx} dA_x + F_{ext,xy}. \quad (3.26)$$

Para um fluido newtoniano as tensões viscosas são proporcionais às taxas de deformação e ao coeficiente de viscosidade. O termo da tensão normal  $\tau_{xx}$  é então descrito como.

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.27)$$

O termo  $F_{ext,xy}$  na equação 3.26 é um termo fonte que substitui o termo  $\tau_{xy}$  numa modelagem convencional. Isso se dá devido a não existência de discretização ao longo da seção vertical do canal, conforme anteriormente explicado. Esse termo será modelado e discretizado em capítulos posteriores.

Igualando a equação 3.26 à equação 3.25 chegamos finalmente à equação 3.28, que é o balanço da quantidade de movimento linear cartesiana bi-dimensional utilizando teoria de filme

fino.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-1}{\rho h} \frac{\partial p h}{\partial x} + \frac{2\mu}{\rho h} \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{F_{ext,xy}}{\rho h} \quad (3.28)$$

### 3.4.2 Coordenadas Cilíndricas

A formulação em coordenadas cilíndricas é a que mais se aproxima de um sistema eixo-mancal real. Aqui será demonstrado os passos necessários para a modelagem completa, tri-dimensional e com variação temporal da posição do eixo, do sistema. Alguns procedimentos utilizados para a modelagem da equação da quantidade de movimento linear para a sapata deslizando serão aproveitados nessa seção.

O volume de controle é calculado utilizando a partir da diferença entre o volume ocupado pelo mancal e pelo volume ocupado pelo eixo,

$$dv = R_e^2 dz d\theta - (R_e - h)^2 dz d\theta, \quad (3.29)$$

a qual podemos simplificar e compactar, reescrevendo como

$$dv = R_e \left( h - \frac{h^2}{2R_e} \right) dz d\theta = R_e H dz d\theta. \quad (3.30)$$

o termo  $H$  é uma forma compacta de escrever o termo  $h - h^2/2R_e$ .

Para determinar a equação da conservação de massa em coordenadas cilíndricas utiliza-se os mesmos conceitos apresentados para a obtenção da equação 3.20, se tornando

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho dv) + \rho v_\theta dA_\theta + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta dA_\theta) d\theta - \rho v_\theta dA_\theta + \rho v_z dA_z + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z dA_z) dz - \rho v_z dA_z = 0. \quad (3.31)$$

os infinitesimais de áreas normais são dadas por  $dA_\theta = h dz$  e  $dA_z = R_e H d\theta$ .

Por conveniência aqui será considerado apenas os efeitos de incompressibilidade e que não há variação da folga radial ao longo da coordenada axial ( $\partial h / \partial z = 0$ ). Assim, a equação da continuidade em coordenadas cilíndricas para o problema se simplifica a

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{R_e} \frac{\partial v_\theta h}{\partial \theta} + H \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (3.32)$$

Mais uma vez pode-se determinar o divergente para o dado problema:

$$\vec{\nabla} \cdot () = \left( \frac{1}{R_e} \frac{\partial h}{\partial \theta}, H \frac{\partial ()}{\partial z} \right). \quad (3.33)$$

Para a determinação da equação de balanço da quantidade de movimento em coordenadas cilíndricas a equação 3.23 ainda é válida. Considerando o escoamento também na direção axial do sistema, a equação é reescrita de forma expandida conforme

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} = & \left[ R_e \left( \vec{V} \frac{\partial \rho H}{\partial t} + \rho H \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) + \left( h v_\theta \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial \theta} + \rho \vec{V} \left\{ \frac{\partial h v_\theta}{\partial \theta} \right\} \right) \right. \\ & \left. + R_e \left( \rho \vec{V} \left\{ H \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\} + H v_z \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial z} \right) \right] d\theta dz. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Novamente, os termos entre chaves na equação 3.34 é a equação da continuidade do problema em coordenadas cilíndricas e também são nulos. Aplicando os efeitos de incompressibilidade pode-se reescreve-la de forma simplificada como

$$\sum \vec{F} = \rho R_e \left( H \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + h v_\theta \frac{\partial \vec{V}}{\partial \theta} + H v_z \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right) d\theta dz. \quad (3.35)$$

As forças de superfície são encontradas de forma análoga à metodologia realizada para determinar essas forças em coordenadas cartesianas, com suas devidas correções para coordenadas cilíndricas. Essas forças são explicitadas nas equações 3.36 e 3.37 para as componentes angular e axial, respectivamente.

$$\begin{aligned} F_{sup,\theta} = & - \left( p dA_\theta + \frac{\partial(p dA_\theta)}{\partial \theta} d\theta - p dA_\theta \right) + \left( \tau_{\theta\theta} dA_\theta + \frac{\partial(\tau_{\theta\theta} dA_\theta)}{\partial \theta} d\theta - \tau_{\theta\theta} dA_\theta \right) \\ & + \left( \tau_{\theta z} dA_z + \frac{\partial(\tau_{\theta z} dA_z)}{\partial z} dz - \tau_{\theta z} dA_z \right) + F_{ext,\theta} \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} F_{sup,z} = & - \left( p dA_z + \frac{\partial(p dA_z)}{\partial z} dz - p dA_z \right) + \left( \tau_{zz} dA_z + \frac{\partial(\tau_{zz} dA_z)}{\partial z} dz - \tau_{zz} dA_z \right) \\ & + \left( \tau_{\theta z} dA_\theta + \frac{\partial(\tau_{\theta z} dA_\theta)}{\partial \theta} d\theta - \tau_{\theta z} dA_\theta \right) + F_{ext,z} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Os termos das tensões viscosas são expandidos conforme as equações 3.38, 3.39 e 3.40. Essas formas de escrita das tensões são adaptações às encontradas na literatura para adequação ao modelo proposto.

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{2\mu}{R_e - h/2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \quad (3.38)$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.39)$$

$$\tau_{\theta z} = \mu \left( \frac{1}{R_e - h/2} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \quad (3.40)$$

De forma análoga, os termos  $F_{ext,\theta}$  e  $F_{ext,z}$  são termos fontes que substituem os equivalente termos  $\tau_{r\theta}$  e  $\tau_{rz}$  numa modelagem convencional.

Finalmente, igualando a equação 3.35 às equações 3.36 e 3.37 encontra-se a forma simplificada do balanço da quantidade de movimento linear cilíndrica tri-dimensional utilizando teoria de filme fino para as componentes  $\theta$  e  $z$ . São, respectivamente, as equações 3.41 e 3.42.

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{v_\theta h}{R_e H} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = -\frac{1}{\rho R_e H} \frac{\partial p h}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{R_e H} \frac{\partial \tau_{\theta\theta} h}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{F_{ext,\theta}}{R_e H} \right) \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{v_\theta h}{R_e H} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{R_e H} \frac{\partial \tau_{\theta z} h}{\partial \theta} + \frac{F_{ext,z}}{R_e H} \right) \quad (3.42)$$

## 3.5 Modelagem térmica

A condição de não escorregamento nas paredes do mancal (ou da sapata) geram um gradiente de velocidade na direção da fenda ( $\partial \vec{V} / \partial r \neq 0$  e  $\partial \vec{V} / \partial y \neq 0$ ). Esse gradiente de velocidade gera uma tensão cisalhante entre as camadas do fluido lubrificante. Esse atrito, por sua vez, produz uma transformação de energia cinética em energia térmica.

Aqui será disposta ambas as modelagens térmicas, para a equação clássica de Reynolds e para o novo modelo proposto.

### 3.5.1 Modelagem térmica aplicada ao modelo de Reynolds

Para a modelagem térmica aplicada à equação de Reynolds é possível a utilização de forma eficaz da modelagem convencional encontrada na literatura. Essa modelagem não apresenta novidades, portanto, não será aqui apresentada o passo-a-passo. O processo de modelagem é encontrado com facilidade em trabalhos como os de Çengel e Cimbala (2015) e de Incropera (2008).

As equações 3.43 e 3.44 apresentam as equações da energia para coordenadas retangulares e cilíndricas, respectivamente, para fluidos incompressíveis, com propriedades constantes e em regime permanente. Como comentado anteriormente, em coordenadas retangulares foram estudados apenas casos bi-dimensionais sem movimentação das paredes ao longo da direção

vertical  $y$ , para casos em coordenadas cilíndricas foi considerado também casos tri-dimensionais sem movimentação do eixo na direção da coordenada radial  $r$ .

$$\rho C_v u \frac{\partial T}{\partial x} = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \rho C_v \left[ \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] &= k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \\ + \mu \left[ 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.44)$$

O aparecimento das derivadas das velocidades em relação às coordenadas verticais e radiais ( $\partial \vec{V} / \partial y$  e  $\partial \vec{V} / \partial r$ ) nas equações da energia são possíveis para o modelo de Reynolds pois este possui equações analíticas para as velocidades em relação à essas coordenadas, conforme demonstrado na seção 3.3.

### 3.5.2 Teoria de Filme Fino

Em um fluido em movimento pode-se considerar sem grandes perdas duas formas de transporte de energia térmica, difusão e advecção. A forma mais simples de entender a difusão é pensar que essa energia, aqui se tratando da térmica, está sendo transportada pelo contato intermolecular do próprio fluido. A advecção pode ser entendida como o transporte dessa energia pelo movimento do fluido, um partícula com dada temperatura  $T_1$  em um ponto qualquer  $x_1$  é transportada para um ponto qualquer  $x_2$  com uma dada velocidade. Durante o percurso de  $x_1$  para  $x_2$  essa partícula provoca efeitos em sua vizinhança, bem como a vizinhança causa efeitos nessa partícula.

O desenvolvimento de uma equação para a energia térmica em filme fino é melhor realizada utilizando um processo mais intuitivo da relação entre a difusão, a advecção e a transformação viscosa. Esse processo envolve o cálculo da energia que sai do VC subtraída da energia que entra no mesmo. Uma dedução intuitiva utiliza-se da expansão de Taylor a fim de encontrar o fluxo líquido de energia em um VC:

$$\rho C_v \left( \frac{\partial T dv}{\partial t} + \vec{V} T dA_i + \frac{\partial \vec{V} T}{\partial x_i} dx_i - \vec{V} T dA_i \right) = - \left( q_i'' dA_i + \frac{\partial q_i'' dA_i}{\partial x_i} dx_i - q_i'' dA_i \right) + \phi dv. \quad (3.45)$$

Em coordenadas retangulares, essa dedução resulta em.

$$\rho C_v \left( \frac{\partial T dv}{\partial t} + \frac{\partial u T dA_x}{\partial x} \right) = - \frac{\partial q_x'' dA_x}{\partial x} dx + \eta_y h dx + \phi h dx. \quad (3.46)$$

Realizando as devidas simplificações na equação 3.46 é possível reescreve-la como a equação 3.47.

O termo  $q_x''$  é relativo à lei de Fourier (1822). Enquanto  $\eta_y$  é a modelagem ao longo da coordenada  $y$  - sua modelagem será apresentada em seções posteriores - e o termo  $\phi$  é o termo de transformação viscosa. O termo  $\phi$  é apresentado em detalhes em White (2022) e aqui será feita uma adaptação para o modelo de filme fino.

$$\rho C_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{k}{h} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \eta_y \right] + \phi \quad (3.47)$$

Utilizando desse mesmo processo em coordenadas cilíndricas encontra-se com eficácia também uma equação diferencial para a energia nessas coordenadas. A equação 3.48 mostra a dedução para a modelagem térmica em coordenadas cilíndricas.

$$\rho C_v \left( \frac{\partial T dv}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} v_\theta T dA_\theta d\theta + \frac{\partial}{\partial z} v_z T dA_z dz \right) = - \frac{\partial}{\partial \theta} q_\theta'' dA_\theta d\theta - \frac{\partial}{\partial z} q_z'' dA_z dz + \eta_r + \phi dv \quad (3.48)$$

Fazendo todas as simplificações e aplicando a equação da continuidade para o modelo em coordenadas cilíndricas (equação 3.32) é possível reescrever para

$$\rho C_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{v_\theta h}{R_e H} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{k}{R_e H} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{2h}{2R_e - h} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\eta_r}{R_e H} + \phi. \quad (3.49)$$

### 3.5.3 Condições de contorno

Tanto para o modelo clássico de Reynolds quanto para o novo modelo proposto as condições de contorno térmica foram as mesmas. No plano cartesiano considerou-se a parede fixa superior adiabática e a parede móvel inferior com uma certa espessura  $\xi$  de um material com condutividade térmica  $k_s$  com um determinado coeficiente de convecção  $h_{conv}$ . De forma análoga, em coordenadas cilíndricas foi considerado o eixo rotativo adiabático e o mancal fixo com uma certa espessura de um material cujas propriedades podem ser quaisquer e com um determinado coeficiente de convecção.

Utilizando o conceito de resistências térmicas, é possível determinar a temperatura nas paredes fixas sem a necessidade da resolução do meio sólido.

A taxa (e o fluxo) pode ser descrita sendo a diferença de temperaturas ( $\Delta T$ ) entre os meios divididos por uma resistência equivalente ( $R_{eq}$ )

$$q = \frac{\Delta T}{R_{eq}}, \quad (3.50)$$

onde  $R_{eq}$  para este caso é uma associação em série (soma) da resistência térmica à convecção e da resistência térmica à condução.

Em coordenadas retangulares essas resistências são descritas como:

- resistência convectiva

$$R_{conv} = \frac{1}{h_{conv}dA} \quad (3.51)$$

e

- resistência condutiva

$$R_{cond} = \frac{\xi}{k_s dA}. \quad (3.52)$$

A fronteira entre o fluido lubrificante e a parede fixa assumem a mesma temperatura  $T_f$  neste ponto. Reescrevendo a equação 3.50 encontra-se uma expressão para o fluxo (e para a taxa) de energia térmica na fronteira fluido-sólido:

$$q = \frac{T_f - T_\infty}{\frac{\xi}{k_s dA} + \frac{1}{h_{conv}dA}} \implies q'' = \frac{T_f - T_\infty}{\frac{\xi}{k_s} + \frac{1}{h_{conv}}}. \quad (3.53)$$

Pela lei da conservação de energia, a energia entregue pelo fluido lubrificante à parede é igual a energia entregue ao restante do sistema por convecção e por condução. Assim, o balanço de energia térmica na fronteira é:

$$q''|_{y=h} = -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=h} = \frac{T_f - T_\infty}{\frac{\xi}{k_s} + \frac{1}{h_{conv}}} \quad (3.54)$$

Em coordenadas cilíndricas o mesmo processo pode ser aplicado, reescrevendo os termos das resistências para a forma correta para o tipo de coordenada:

- resistência convectiva

$$R_{conv} = \frac{1}{h_{conv}dA} \quad (3.55)$$

e

- resistência condutiva

$$R_{cond} = \frac{\ln\left(\frac{R_e + \xi}{R_e}\right)}{d\theta L k_s}. \quad (3.56)$$

Então, reescrevendo a equação 3.50 encontra-se o fluxo e a taxa de energia térmica na fronteira avaliada:

$$q|_{r=R_e} = \frac{T_f - T_\infty}{\frac{1}{h_{conv}d\theta(R_e + \xi)L} + \frac{\ln\left(\frac{R_e + \xi}{R_e}\right)}{k_s d\theta L}} \implies q'|_{r=R_e} = \frac{(T_f - T_\infty)d\theta}{\frac{1}{h_{conv}(R_e + \xi)} + \frac{\ln\left(\frac{R_e + \xi}{R_e}\right)}{k_s}}. \quad (3.57)$$

a lei da conservação de energia ainda é válida, tornando o balanço de energia térmica nessa fronteira:

$$q'|_{r=R_e} = -kR_e \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_e} = \frac{(T_f - T_\infty)}{\frac{1}{h_{conv}(R_e + \xi)} + \frac{\ln\left(\frac{R_e + \xi}{R_e}\right)}{k_s}}. \quad (3.58)$$

Tanto para coordenadas cilíndricas como em coordenadas cartesianas é considerado fluxo nulo na parede móvel (seja a sapata deslizante ou o eixo rotativo). Fluxo nulo implica que a variação de energia térmica é inexistente, tornando então:

$$q'|_{y=0} = q'|_{r=R_\theta} = \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_\theta} = 0. \quad (3.59)$$

## 3.6 Modelagem FSI

O gradiente de pressão ao longo da coordenada angular do mancal produz uma força líquida de sustentação do eixo. Essa força é responsável por manter o eixo rotativo a uma certa distância do mancal fixo, garantindo que não haja contato entre essas duas partes, reduzindo o desgaste das mesmas.

O eixo com uma certa carga aplicada partindo do repouso se movimenta dentro do mancal fixo até atingir o equilíbrio entre o próprio peso e as forças fluidodinâmicas. Esse equilíbrio é atingido quando a força fluidodinâmica vertical é igual à carga aplicada ao eixo rotativo e quando a força horizontal é nula (considerando que não exista uma carga lateral aplicada ao eixo).

Pela segunda lei de Newton é sabido que:

$$\sum \vec{F} = m_e \vec{a}_e = m_e \frac{\partial \vec{V}_e}{\partial t} = m_e \frac{\partial^2 \vec{X}_e}{\partial t^2}. \quad (3.60)$$

Os subíndices  $e$  representam que as variáveis se tratam do eixo rotativo.

As forças atuantes no eixo são duas: a força peso ( $W_e$ ) e a força exercida pelo gradiente de pressão do fluido ( $F_p$ ). Assim, pode-se reescrever a equação 3.60 em suas respectivas coordenadas:

$$F_x = F_{p,x} = m_e a_{e,x} \quad (3.61)$$

e

$$F_y = F_{p,y} - W_e = m_e a_{e,y}. \quad (3.62)$$

As forças exercidas pelo campo de pressão são descritas por Mota *et al.* (2022) como:

$$F_{p,x} = R_i \int_0^\pi \int_0^{L_z} p(\psi, z) \cos(\psi) \sin(\theta_0) d\psi dz - R_i \int_0^\pi \int_0^{L_z} p(\psi, z) \sin(\psi) \cos(\theta_0) d\psi dz \quad (3.63)$$

e

$$F_{p,y} = R_i \int_0^\pi \int_0^{L_z} p(\psi, z) \sin(\psi) \sin(\theta_0) d\psi dz + R_i \int_0^\pi \int_0^{L_z} p(\psi, z) \cos(\psi) \cos(\theta_0) d\psi dz, \quad (3.64)$$

em que  $\psi$  é a posição angular iniciada no ponto convergente da folga radial e  $L_z$  é o comprimento axial do eixo.

Conhecidas as forças exercidas pela pressão, o peso do mancal e a massa do mancal é possível determinar a aceleração  $\vec{a}_e$  do eixo em cada componente.

Concli (2020) em seu trabalho determina a posição do eixo sendo:

$$\vec{X}(t + \Delta t) = \vec{X}(t) + \frac{\vec{F}(p, t + \Delta t) \Delta t^2}{m_e}. \quad (3.65)$$

O proposto trabalho apresenta um proposta alternativa em relação a determinação da trajetória do mancal, realizando integrações numéricas de segunda ordem que serão melhor apresentadas em seções futuras deste trabalho.

### 3.7 Modelagem da função $h(\theta)$

A folga radial de um mancal cilíndrico é o espaço que há entre o mancal fixo e o eixo rotativo ( $h = R_e - R_\theta$ ). Portanto, é necessário determinar a posição geométrica de qualquer ponto na superfície do eixo rotativo e então subtrair esse valor da medida do mancal fixo.

É amplamente encontrada na literatura uma função para a determinação da folga radial em um mancal hidrodinâmico. Trabalhos como os de Riul (1988), Cavalini (2013) e Barbosa

(2018) trazem a mesma modelagem para a função  $h(\theta)$  largamente utilizada em trabalhos que envolvem análises de mancais fluidodinâmicos. Uma adaptação dessa modelagem utilizando como referência a geometria e os ângulos da figura 3 é a demonstrada na equação 3.66.

$$h(\theta) = (R_e - R_i) - e_x \cos(\theta_0) \cos(\theta) + e_x \sin(\theta_0) \sin(\theta) \quad (3.66)$$

Essa modelagem é uma boa aproximação para a determinação da folga. Contudo, sendo aproximação essa função possui um erro que está diretamente ligado à excentricidade e folga radial do sistema.

Além das inovações propostas pelo presente trabalho, também é objetivo encontrar uma modelagem exata para a folga radial do mancal. Seguindo a como referencia o sistema mostrado na figura 3, a equação geral para a circunferência do eixo rotativo é

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R_i^2, \quad (3.67)$$

que pode ser expandida para a equação para

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2yb + b^2 = R_i^2. \quad (3.68)$$

Das leis de mudanças de coordenadas, equação de Pitágoras e regras de senos e cossenos:

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ e_x^2 = a^2 + b^2 \\ \cos(\theta_0) = a/e_x \\ \sin(\theta_0) = b/e_x \end{cases}$$

é possível reescrever a equação 3.68 em coordenadas cilíndricas, da seguinte forma:

$$r^2 \{ \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \} - 2e_x r \{ \cos \theta_0 \cos \theta + \sin \theta_0 \sin \theta \} + e_x^2 = R_i^2. \quad (3.69)$$

O primeiro termo da equação 3.69 é exatamente igual a unidade, enquanto o segundo equivale a  $\cos(\theta_0 - \theta)$ . Então, aplicando essas propriedades e isolando o termo  $r$  encontra-se:

$$r = e_x \cos(\theta_0 - \theta) \pm \sqrt{e_x^2 \cos^2(\theta_0 - \theta) + R_i^2 - e_x^2}. \quad (3.70)$$

O valor do raio  $r$  diz respeito exatamente a distância de qualquer ponto do eixo deslocado de raio  $R_i$  em relação a origem do centro do mancal fixo. Portanto,  $r = R_\theta$ , assim, finalmente, é

possível encontrar um função exata para a folga radial  $h(\theta)$ :

$$h(\theta) = R_e - R_\theta = R_e - \left( e_x \cos(\theta_0 - \theta) + \sqrt{e_x^2 \cos^2(\theta_0 - \theta) + R_i^2 - e_x^2} \right). \quad (3.71)$$

---

# MODELO NUMÉRICO-COMPUTACIONAL

---

A matemática atual se mostra um tanto limitada para buscar soluções contínuas de problemas fluidodinâmicos completos. Dada essas limitações, utiliza-se de modelos numérico-computacionais a fim de obter soluções aproximadas, através de métodos numéricos bem estabelecidos, para as equações obtidas através dos modelos matemáticos diferenciais.

O capítulo que se segue tem como objetivo a abordagem da metodologia numérico computacional utilizada no desenvolvimento do presente trabalho, para solução de problemas bi e tri-dimensionais da modelagem de fluidodinâmica utilizado teoria de filme fino aplicada à mancais fluidodinâmicos, utilizando das hipóteses de escoamento incompressível e fluidos newtonianos.

## 4.1 Discretização do modelo de Reynolds

O modelo de Reynolds é composto por uma única equação diferencial para a determinação do campo de pressão e outras duas equações contínuas para os campos de velocidade. Muitos são os métodos numéricos conhecidos para a solução de equações diferenciais parciais. Para o trabalho proposto utilizou-se do método das diferenças finitas para a discretização e solução das equações diferenciais parciais.

O modelo de Reynolds sendo permanente exige apenas a discretização espacial das equações. Primeiro, então, é necessário transformar o conjunto contínuo e infinito de informações em um sistema discreto e finito.

### 4.1.1 Coordenadas Cartesianas

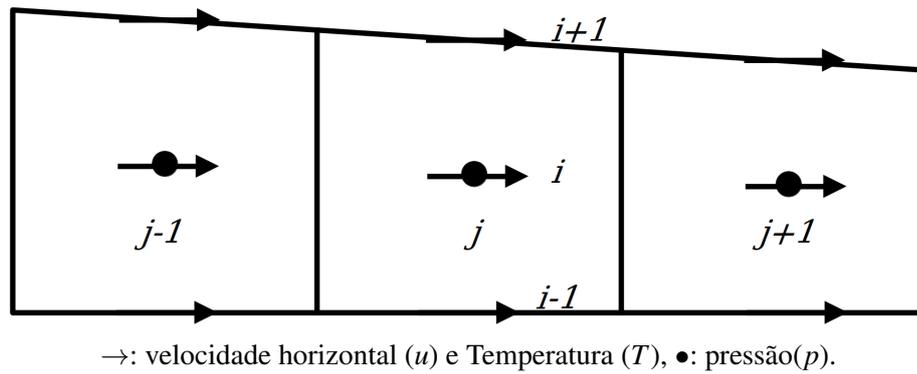
Para o caso da sapata deslizante será considerado uma malha retangular  $\Omega = [0, L_x] \times [0, h(x)]$ , o qual será dividido em  $N_x$  partes iguais na direção da componente  $x$  e em  $N_y$  na direção

da componente  $y$ , conforme visto na figura 5. Assim, gera-se a malha  $\Pi$  sendo um conjunto de pontos discretos no domínio  $\Omega$ :

$$\Pi = \{(x_j, y_i); x_j = j\Delta x, y_i = i\Delta y_j; j = 1, \dots, N_x; i = 0, \dots, N_y\},$$

onde  $\Delta x$  e  $\Delta y_j$  são incrementos espaciais nas direções de  $x$  e de  $y$  respectivamente, definidos por  $\Delta x = L_x/N_x$  e  $\Delta y_j = h_j/(N_y + 1)$ .

Figura 5 – Representação esquemática da malha adotada para o problema da sapata deslizante.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na figura 5 a temperatura não representa um vetor, mas ela é calculada nos mesmos pontos onde são calculados os valores do vetor velocidade.

Aplicando o método das diferenças finitas na equação 3.9 e utilizando de algum método para resolução de sistemas lineares é possível determinar o campo de pressão na sapata deslizante utilizando o modelo de Reynolds. A equação 4.1 explicita a discretização utilizando esse método.

$$\left( h_{j+1/2}^3 \frac{p_{j+1} - p_j}{\Delta x} - h_{j-1/2}^3 \frac{p_j - p_{j-1}}{\Delta x} \right) \frac{1}{\Delta x} = 6\mu U \frac{h_{j+1/2} - h_{j+1/2}}{\Delta x} \quad (4.1)$$

Determinado o campo de pressão, é possível então determinar o campo de velocidade dentro da sapata. Aplicando o método das diferenças finitas na equação 3.5 encontramos a discretização apresentada na equação 4.2, tornando possível determinar também o campo de velocidade do fluido dentro da sapata.

$$u_{j,i} = U \left( 1 - \frac{i\Delta y_j}{h_j} \right) + \frac{h_j^2}{2\mu} \frac{p_{j+1} - p_{j-1}}{2\Delta x} \left[ \left( \frac{i\Delta y_j}{h_j} \right)^2 - \frac{i\Delta y_j}{h_j} \right] \quad (4.2)$$

Para o campo de temperatura o mesmo método pode ser aplicado. Tendo também o campo de velocidade definido fica fácil a determinação do campo de temperatura. A equação 4.3

mostra como é forma final dessa discretização utilizando o método das diferenças finitas.

$$\rho C_v u_{j,i} \frac{T_{j+1,i} - T_{j-1,i}}{2\Delta x} = k \left( \frac{T_{j+1,i} - 2T_{j,i} + T_{j-1,i}}{\Delta x^2} + \frac{T_{j,i+1} - 2T_{j,i} + T_{j,i-1}}{\Delta y_j^2} \right) + \mu \left[ 2 \left( \frac{u_{j+1,i} - u_{j-1,i}}{2\Delta x} \right)^2 + \left( \frac{u_{j,i+1} - u_{j,i-1}}{2\Delta y_j} \right)^2 \right] \quad (4.3)$$

### 4.1.2 Coordenadas Cilíndricas

Para o caso do mancal cilíndrico será considerado uma malha cilíndrica  $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, h(\theta)] \times [0, L_z]$ , o qual será dividido em  $N_\theta$  partes iguais na componente angular,  $N_r$  partes na direção radial e  $N_z$  partes na direção axial. Assim, a malha  $\Pi$  se torna:

$$\Pi = \{(\theta_j, r_i, z_k); \theta_j = (j - 1/2)\Delta\theta, r_i = i\Delta r, z_k = (k - 1/2)\Delta z; j = 1, \dots, N_\theta, i = 0, \dots, N_r, k = 1, \dots, N_z\},$$

onde  $\Delta\theta = 2\pi/N_\theta$ ,  $\Delta r = h(\theta)/(N_r + 1)$  e  $\Delta z = L_z/N_z$ .

A equação 3.12 é o modelo de Reynolds completo tri-dimensional. O presente trabalho não considerou variação da folga radial ao longo da componente axial, bem como não foi considerado velocidade radial do eixo. Assim, a equação 4.4 mostra a discretização do modelo de Reynolds em coordenadas cilíndricas tri-dimensional.

$$\frac{1}{R_i} \left( h_{j+1/2}^3 \frac{p_{j+1,k} - p_{j,k}}{\Delta\theta} - h_{j-1/2}^3 \frac{p_{j,k} - p_{j-1,k}}{\Delta\theta} \right) \frac{1}{\Delta\theta} + h_j^3 \frac{p_{j,k+1} - 2p_{j,k} + p_{j,k-1}}{\Delta z^2} = 6\mu\omega \frac{h_{j+1/2} - h_{j-1/2}}{\Delta\theta} \quad (4.4)$$

O mesmo processo utilizado em coordenadas retangulares será aqui aplicado. Primeiro a discretização das equações de velocidade uma vez que o campo de pressão está determinado e então a determinação do campo de temperatura. A equação 4.5 diz respeito da discretização da velocidade angular, a equação 4.7 mostra a discretização da velocidade axial e a equação 4.8 a discretização do campo de temperatura.

$$v_{\theta_{i,j,k}} \approx \frac{1}{2\mu} \frac{p_{j+1,k} - p_{j-1,k}}{2\Delta\theta} \left[ i\Delta r \left( \ln(i\Delta r) - \frac{1}{2} \right) + G_{i,j,k} i\Delta r - \frac{R_e^2}{i\Delta r} \left( \ln R_e + G_{i,j,k} - \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{\omega R_i R_{\theta_j}}{R_{\theta_j}^2 - R_e^2} \left( i\Delta r - \frac{R_e^2}{i\Delta r} \right) \quad (4.5)$$

onde:

$$G_{i,j,k} \approx \frac{1}{R_e^2 - R_{\theta_j}^2} \left[ R_{\theta_j}^2 \left( \ln R_{\theta_j} - \frac{1}{2} \right) - R_e^2 \left( \ln R_e - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (4.6)$$

$$v_{z_{i,j,k}} \approx \frac{R_{\theta_j}^2}{4\mu} \frac{p_{j,k+1} - p_{j,k-1}}{2\Delta z} \left[ \left( \frac{i\Delta r}{R_{\theta_j}} \right)^2 - \frac{R_e^2 - R_{\theta_j}^2}{R_i \ln(R_e/R_{\theta_j})} \ln \frac{i\Delta r}{R_{\theta_j}} - 1 \right] \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} & \rho C_v \left[ \frac{v_{\theta_{i,j,k}}}{i\Delta r} \frac{T_{i,j+1,k} - T_{i,j-1,k}}{2\Delta\theta} + v_{z_{i,j,k}} \frac{T_{i,j,k+1} - T_{i,j,k-1}}{2\Delta z} \right] \\ &= k \left[ \frac{T_{i+1,j,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i-1,j,k}}{\Delta r^2} + \frac{1}{i\Delta r} \frac{T_{i+1,j,k} - T_{i-1,j,k}}{2\Delta r} + \frac{1}{(i\Delta r)^2} \frac{T_{i,j+1,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i,j-1,k}}{\Delta\theta^2} \right. \\ &+ \left. \frac{T_{i,j,k+1} - 2T_{i,j,k} + T_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} \right] + \mu \left[ 2 \left( \frac{1}{i\Delta r} \frac{v_{\theta_{i,j+1,k}} - v_{\theta_{i,j-1,k}}}{2\Delta\theta} \right)^2 + \left( \frac{v_{z_{i,j,k+1}} - v_{z_{i,j,k-1}}}{2\Delta z} \right)^2 \right. \\ &+ \left. \left( \frac{1}{i\Delta r} \frac{v_{z_{i,j+1,k}} - v_{z_{i,j-1,k}}}{2\Delta\theta} + \frac{v_{\theta_{i,j,k+1}} - v_{\theta_{i,j,k-1}}}{2\Delta z} \right)^2 + \left( \frac{v_{z_{i,j,k+1}} - v_{z_{i,j,k-1}}}{2\Delta r} \right)^2 + \right. \\ &\left. \left( \frac{v_{\theta_{i+1,j,k}} - v_{\theta_{i-1,j,k}}}{2\Delta r} - \frac{v_{\theta_{i,j,k}}}{i\Delta r} \right)^2 \right] \quad (4.8) \end{aligned}$$

## 4.2 Discretização equações filme fino

Os modelos diferenciais modelados utilizando a teoria de filme fino são compostos por uma equação diferencial parcial para cada componente de velocidade e mais uma equação para a temperatura. As limitações presentes no modelo ainda são maiores dado sua natureza não linear e a necessidade da resolução do campo de pressão e de velocidade na mesma equação, de forma interdependentes. A discretização para essas equações exigem, além de uma discretização espacial, uma discretização temporal e algum método de acoplamento pressão-velocidade.

### 4.2.1 Discretização Temporal

São três formulações existentes para a discretização temporal de equações diferenciais: explícita, implícita e semi-implícita (LEVEQUE, 1955). Utilizou-se da formulação explícita para o desenvolvimento deste trabalho, isto é, o conjunto de equações diferenciais é discretizado de forma que os valores de velocidade e de pressão do próximo passo de tempo são calculados a partir de termos previamente conhecidos.

O presente trabalho utilizou de uma discretização temporal de segunda ordem, permitindo a utilização de um maior passo tempo, e, com isso, menor custo computacional.

Considera-se uma função qualquer  $f(t)$ , de modo que sua discretização temporal possa ser realizada efetuando a expansão de Taylor da função  $f$  em torno do ponto  $(t + \Delta t)$ , com o objetivo de se obter uma formulação explícita para o ponto em questão. Para se obter uma discretização de segunda ordem é necessário conhecer dois valores da função  $f$  precedentes ao passo  $t + \Delta t$ . As equações 4.9 e 4.10 são as expansões utilizando como referência os tempos  $t$  e  $t - \Delta t$  respectivamente.

$$f(t) = f(t + \Delta t) - f'(t + \Delta t)\Delta t + \frac{f''(t + \Delta t)\Delta t^2}{2!} + \sum_{m=3}^{\infty} (-1)^m \frac{f^{(m)}(t + \Delta t)\Delta t^m}{m!} \quad (4.9)$$

$$f(t - \Delta t) = f(t + \Delta t) - f'(t + \Delta t)2\Delta t + \frac{f''(t + \Delta t)(2\Delta t)^2}{2!} + \sum_{m=3}^{\infty} (-1)^m \frac{f^{(m)}(t + \Delta t)(2\Delta t)^m}{m!} \quad (4.10)$$

Os somatórios representam os erros numéricos associados ao processo de discretização, que para este caso é de ordem 2 ( $O(\Delta t^2)$ ). Os termos dentro dos somatório tendem a ser muito pequenos, possibilitando negligenciar esses termos. Ao se realizar uma manipulação matemática com as duas expansões é possível determinar uma discretização para a função  $f(t)$ . Para o caso em específico, multiplica-se a equação 4.9 por 4 e subtrai-se o resultado da equação 4.10, obtendo finalmente:

$$f'(t + \Delta t) = \frac{3f(t + \Delta t) - 4f(t) + f(t - \Delta t)}{2\Delta t} + O(\Delta t^2). \quad (4.11)$$

A função  $f$  pode representar qualquer uma das componentes de velocidade e também o campo de temperatura.

O passo de tempo é calculado através dos métodos propostos por Strikwerda (1989). Para as coordenadas cilíndricas, um adaptação no método foi necessária para a compatibilidade das unidades, ficando:

$$\Delta t_d \leq \frac{\rho}{2\mu} \frac{\left(\Delta\theta \frac{R_e + R_i}{2} \Delta z\right)^2}{\left(\Delta\theta \frac{R_e + R_i}{2}\right)^2 + \Delta z^2} \quad (4.12)$$

e

$$\Delta t_a \leq \frac{\Delta\theta}{\omega}, \quad (4.13)$$

onde os subíndices  $a$  e  $d$  representam o passo temporal da discretização da equação da advecção e da difusão, respectivamente.

Nas equações de balanço da quantidade de movimento linear aparecem simultaneamente os termos difusivos e advectivos. Para estes casos, Villar (2007) propõe que o passo de tempo possa ser calculado por:

$$\Delta t = CFL \min(\Delta t_d, \Delta t_a), \quad (4.14)$$

onde  $CFL$  é a constante definida por Courant, Friedrichs e Lewy (1967) e admite valores entre 0 e 1. O presente trabalho adotou o valor de 0,01 para a constante.

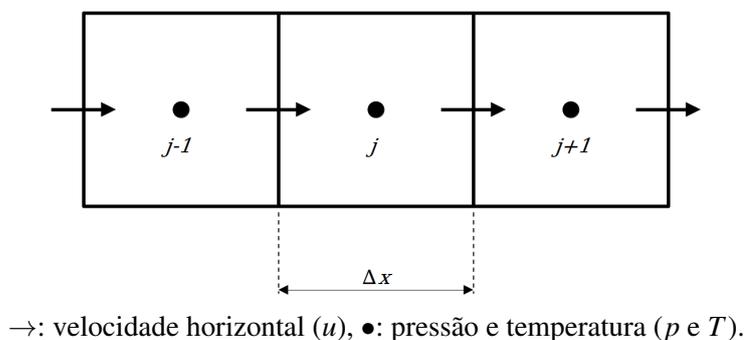
### 4.2.2 Acoplamento Pressão-Velocidade

As equações diferenciais parciais de filme fino apresentam ao menos duas equações diferenciais (equação do balanço de quantidade de movimento linear e equação da continuidade) para as incógnitas de velocidades e de pressão. A partir de um campo inicial de velocidades e da pressão, utiliza-se as equações do balanço de quantidade de movimento linear para obter a evolução temporal da velocidade. Contudo, a equação da continuidade não possui um termo que possibilite o cálculo da variação temporal da pressão. Sendo um escoamento incompressível, a pressão não é uma função da massa específica, assim  $p$  não é função das propriedades termodinâmicas do modelo.

O método utilizado para a resolução das equações de balanço da quantidade de movimento linear foi o Método de acoplamento pressão-velocidade *marker and cell* (MAC) desenvolvido por Harlow e Welch (1965). Este método foi implementado em uma malha seguindo o esquema de malha deslocada, figura 6.

Originalmente o método foi desenvolvido para escoamentos com superfícies livres, onde particular marcadoras definem a localização da superfície livre. Para o presente trabalho, onde não há a presença de superfícies livres, as particular marcadoras são desnecessárias, visto que o fluido preenche todo o domínio computacional.

Figura 6 – Representação esquemática do conceito de malhas deslocadas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Aqui será descrito o passo-a-passo do método para a equação diferencial que descreve o movimento do fluido para o caso da sapata deslizante, mas o mesmo pode ser aplicado sem dificuldades para as equações em coordenadas cilíndricas.

Aplicando a discretização temporal definida na equação 4.11 na equação 3.28 reescreve-se a para a equação 4.15. Por comodidade, chama-se o termo advectivo dessa equação de  $CONV$  e o termo viscoso e o termo  $F_{ext,xy}$  de  $VISC$ .

$$\frac{3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}}{2\Delta t} + CONV^n = \frac{-1}{\rho h} \frac{\partial p^{n+1} h}{\partial x} + VISC^n \quad (4.15)$$

Os sobre-índices  $n + 1$ ,  $n$  e  $n - 1$  representam, respectivamente, o passo de tempo em que se deseja conhecer o valor de  $u$  no passo de tempo posterior (análogo ao valor de  $f(t + \Delta t)$ ), o passo de tempo atual (análogo a  $f(t)$ ) e o passo de tempo precedente (análogo a  $f(t - \Delta t)$ ). Isolando o termo  $u^{n+1}$  fica:

$$u^{n+1} = \frac{-2\Delta t}{3\rho h} \frac{\partial p^{n+1} h}{\partial x} + \frac{2\Delta t}{3} [-CONV^n + VISC^n] + 4u^n - u^{n-1}. \quad (4.16)$$

A equação 4.16 deve também respeitar a equação da conservação de massa mostrado na equação 3.21. Aplicando o  $\vec{\nabla} \cdot (\cdot)$  na equação 4.16 tem-se que:

$$\frac{\partial hu^{n+1}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-2\Delta t}{3\rho} \frac{\partial p^{n+1} h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{2\Delta t}{3} (-CONV^n + VISC^n) \right]. \quad (4.17)$$

O termo a esquerda da equação 4.17 é exatamente a equação da continuidade, devendo ser igual a zero. Aplicando as propriedades de derivada e realizando algumas manipulações encontra-se a chamada equação de Poisson (4.18). Utilizando de métodos computacionais para resolução de sistemas lineares é possível determinar o campo de pressão  $p^{n+1}$  uma vez que os termos  $CONV^n$  e  $VISC^n$  são conhecidos.

$$\frac{\partial^2 p^{n+1} h}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial}{\partial x} [-CONV^n + VISC^n] \quad (4.18)$$

Determinado o campo de pressão, resta determinar o campo de velocidade. Isso é feito substituindo os valores obtidos para a pressão, utilizando a equação 4.18, na equação 4.15.

### 4.2.3 Discretização Espacial

Assim como para o modelo de Reynolds, as equações definidas utilizando teoria de filme fino também foram discretizadas espacialmente utilizando o método das diferenças finitas centradas, a fim de obter um discretização também de segunda ordem.

## 4.2.3.1 Coordenadas Retangulares

As equações que definem os campos de pressão e de velocidade em coordenadas cartesianas foram discretizadas como se segue:

- termo convectivo

$$CONV_{j+1/2}^n = u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} \approx u_{j+1/2}^n \frac{u_{j+3/2}^n - u_{j-1/2}^n}{2\Delta x}; \quad (4.19)$$

- termo viscoso

$$\begin{aligned} VISC_{j+1/2}^n &= \frac{2\mu}{\rho h} \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial u^n}{\partial x} \right) + \frac{F_{ext,xy}}{\rho h} \\ &\approx \frac{2\mu}{\rho h_{j+1/2}} \left( h_{j+1} \frac{u_{j+3/2}^n - u_{j+1/2}^n}{\Delta x} - h_j \frac{u_{j+1/2}^n - u_{j-1/2}^n}{\Delta x} \right) \frac{1}{\Delta x} + \frac{F_{ext,xy_{j+1/2}}^n}{\rho h_{j+1/2}}; \end{aligned} \quad (4.20)$$

- equação de Poisson (equação 4.18)

$$\begin{aligned} &\frac{p_{j+1}^n h_{j+1} - 2p_j^n h_j + p_{j-1}^n h_{j-1}}{\Delta x^2} \\ &\approx \rho \left( \frac{-CONV_{j+1/2}^n + VISC_{j+1/2}^n + CONV_{j-1/2}^n - VISC_{j-1/2}^n}{\Delta x} \right); \end{aligned} \quad (4.21)$$

- equação campo de velocidade (equação 4.16)

$$\begin{aligned} u_{j+1/2}^{n+1} &\approx \frac{-2\Delta t}{3\rho h_{j+1/2}} \frac{p_{j+1}^{n+1} h_{j+1} - p_j^{n+1} h_j}{\Delta x} + \frac{2\Delta t}{3} \left[ -CONV_{j+1/2}^n + VISC_{j+1/2}^n \right] \\ &\quad + 4u_{j+1/2}^n - u_{j+1/2}^n. \end{aligned} \quad (4.22)$$

A modelagem térmica também foi discretizada espacialmente utilizando diferenças finitas. Ficando:

- termo advectivo

$$\rho C_v u \frac{\partial T}{\partial x} \approx \rho C_v \frac{u_{j+1/2}^{n+1} + u_{j-1/2}^{n+1}}{2} \frac{T_{j+1}^n - T_{j-1}^n}{2\Delta x}; \quad (4.23)$$

- termo difusivo

$$\frac{k}{h} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \eta_y \right] \approx \frac{k}{h_j} \left[ h_{j+1/2} \frac{T_{j+1}^n - T_j^n}{\Delta x^2} - h_{j-1/2} \frac{T_j^n - T_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \eta_{y_j} \right]; \quad (4.24)$$

- termo de transformação viscosa

$$\phi = \mu \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon_y^2 \right] \approx \mu \left[ 2 \left( \frac{u_{j+1/2}^{n+1} - u_{j-1/2}^{n+1}}{\Delta x} \right)^2 + \varepsilon_{y_j}^2 \right]. \quad (4.25)$$

Os termos  $F_{ext,xy}$ ,  $\eta_y$  e  $\varepsilon_y$  apresentam uma modelagem especial como termos fontes dependendo fortemente das condições de contorno do problema. Esses termos serão apresentados com todos os detalhes em uma seção especial neste trabalho.

## 4.2.3.2 Coordenadas Cilíndricas

As equações de balanço da quantidade de movimento linear em coordenadas cilíndricas foram discretizadas da seguinte forma:

- termo convectivo

- componente  $\theta$  ( $CONV_{\theta}^n$ )

$$\begin{aligned} \frac{v_{\theta} h}{R_e H} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_{\theta}}{\partial z} &\approx \frac{v_{\theta_{k,j+1/2}} h_{j+1/2}}{R_e H_{j+1/2}} \frac{v_{\theta_{k,j+3/2}}^n - v_{\theta_{k,j-1/2}}^n}{2\Delta x} \\ &+ \frac{v_{z_{k-1/2,j}}^n + v_{z_{k+1/2,j}}^n + v_{z_{k-1/2,j+1}}^n + v_{z_{k+1/2,j+1}}^n}{4} \frac{v_{\theta_{k+1,j+1/2}}^n - v_{\theta_{k-1,j+1/2}}^n}{2\Delta z}; \end{aligned} \quad (4.26)$$

e

- componente  $z$  ( $CONV_z^n$ )

$$\begin{aligned} v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_{\theta} h}{R_e H} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} &\approx v_{z_{k+1/2,j}}^n \frac{v_{z_{k+3/2,j}}^n - v_{z_{k-1/2,j}}^n}{2\Delta z} \\ &+ \frac{v_{\theta_{k,j-1/2}}^n + v_{\theta_{k,j+1/2}}^n + v_{\theta_{k+1,j-1/2}}^n + v_{\theta_{k+1,j+1/2}}^n}{4} \frac{h_j}{R_e H_j} \frac{v_{z_{k+1/2,j+1}}^n - v_{z_{k+1/2,j-1}}^n}{2\Delta \theta}; \end{aligned} \quad (4.27)$$

- termo viscoso

- componente  $\theta$  ( $VISC_{\theta}^n$ )

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{R_e H} \frac{\partial \tau_{\theta\theta} h}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{F_{ext,\theta}}{R_e H} \right) &\approx \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{v_{\theta_{k+1,j+1/2}}^n - 2v_{\theta_{k,j+1/2}}^n + v_{\theta_{k-1,j+1/2}}^n}{\Delta z^2} + \right. \\ &\frac{2}{R_e H_{j+1/2}} \left( \frac{2h_{j+1}}{2R_e - h_{j+1}} \frac{v_{\theta_{k,j+3/2}}^n - v_{\theta_{k,j+1/2}}^n}{\Delta \theta^2} - \frac{2h_j}{2R_e - h_j} \frac{v_{\theta_{k,j+1/2}}^n - v_{\theta_{k,j-1/2}}^n}{\Delta \theta^2} \right) + \\ &\left. \frac{2}{2R_e - h_{j+1/2}} \left( \frac{v_{z_{k+1/2,j+1}}^n - v_{z_{k+1/2,j}}^n - v_{z_{k-1/2,j+1}}^n + v_{z_{k-1/2,j}}^n}{\Delta z \Delta \theta} \right) \right] + \frac{F_{ext,\theta_{j+1/2}}}{\rho R_e H_{j+1/2}} \end{aligned} \quad (4.28)$$

e

- componente  $z$  ( $VISC_z^n$ )

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{R_e H} \frac{\partial \tau_{\theta z} h}{\partial \theta} + \frac{F_{ext,z}}{R_e H} \right) &\approx \frac{\mu}{\rho} \left[ 2 \frac{v_{z_{k+3/2,j}}^n - 2v_{z_{k+1/2,j}}^n + v_{z_{k-1/2,j}}^n}{\Delta z^2} \right. \\ &+ \frac{1}{R_e H_j} \left( \frac{2h_{j+1/2}}{R_e h_{j+1/2}} \frac{v_{z_{k+1/2,j+1}}^n - v_{z_{k+1/2,j}}^n}{\Delta \theta^2} - \frac{2h_{j-1/2}}{R_e h_{j-1/2}} \frac{v_{z_{k+1/2,j}}^n - v_{z_{k+1/2,j-1}}^n}{\Delta \theta^2} \right. \\ &\left. \left. + h_{j+1/2} \frac{v_{\theta_{k+1,j+1/2}}^n - v_{\theta_{k,j+1/2}}^n}{\Delta z \Delta \theta} - h_{j-1/2} \frac{v_{\theta_{k+1,j-1/2}}^n - v_{\theta_{k,j-1/2}}^n}{\Delta z \Delta \theta} \right) \right] + \frac{F_{ext,z_{k+1/2,j}}}{\rho R_e H_j}; \end{aligned} \quad (4.29)$$

- equação de Poisson

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{R_e} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{2}{2R_e - h} \frac{\partial p h}{\partial \theta} \right) + H \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\rho}{2\Delta t} \left( \frac{1}{R_e} \frac{\partial h \Gamma_\theta}{\partial \theta} + H \frac{\partial \Gamma_z}{\partial z} \right) \\
& \approx \frac{1}{R_e} \left[ \frac{2}{2R_e - j_{j+1/2}} \frac{p_{k,j+1}^{n+1} h_{j+1} - p_{k,j}^{n+1} h_j}{\Delta \theta^2} - \frac{2}{2R_e - j_{j-1/2}} \frac{p_{k,j}^{n+1} h_j - p_{k,j-1}^{n+1} h_{j-1}}{\Delta \theta^2} \right] \\
& + H_j \left[ \frac{p_{k+1,j}^{n+1} - 2p_{k,j}^{n+1} + p_{k-1,j}^{n+1}}{\Delta z^2} \right] = \frac{\rho}{2\Delta t} \left[ \frac{1}{R_e} \frac{h_{j+1/2} \Gamma_{\theta,k,j+1/2}^n - h_{j-1/2} \Gamma_{\theta,k,j-1/2}^n}{\Delta \theta} \right. \\
& \left. + H_j \frac{\Gamma_{z,k+1/2,j}^n - \Gamma_{z,k-1/2,j}^n}{\Delta z} \right] \quad (4.30)
\end{aligned}$$

onde

$$\Gamma_\theta^n = 2\Delta t [-CONV_\theta^n + VISC_\theta^n] + 4v_\theta^n - v_\theta^n \quad (4.31)$$

e

$$\Gamma_z^n = 2\Delta t [-CONV_z^n + VISC_z^n] + 4v_z^n - v_z^n; \quad (4.32)$$

- equações campos de velocidades

– componente  $\theta$

$$\begin{aligned}
v_{\theta,k,j+1/2}^{n+1} &= -\frac{2\Delta t}{\rho R_e H} \frac{\partial p^{n+1} h}{\partial \theta} + \Gamma_{\theta,k,j+1/2}^n \\
&\approx -\frac{2\Delta t}{\rho R_e H_{j+1/2}} \frac{p_{k,j+1}^{n+1} h_{j+1} - p_j^{k,n+1} h_j}{\Delta \theta} + \Gamma_{\theta,k,j+1/2}^n \quad (4.33)
\end{aligned}$$

e

– componente  $z$

$$v_{z,k+1/2,j}^{n+1} = -\frac{2\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial z} + \Gamma_{z,k+1/2,j}^n \approx -\frac{2\Delta t}{\rho} \frac{p_{k+1,j}^{n+1} - p_{k,j}^{n+1}}{\Delta z} + \Gamma_{z,k+1/2,j}^n. \quad (4.34)$$

Também realizando a discretização espacial na equação diferencial da energia, fica:

- termo advectivo

$$\begin{aligned}
\rho C_v \left( \frac{uh}{R_e H} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial T}{\partial z} \right) &\approx \rho C_v \left( \frac{v_{\theta,k,j+1/2}^{n+1} + v_{\theta,k,j+1/2}^{n+1}}{2} \frac{h_j}{R_e H_j} \frac{T_{k,j+1} - T_{k,j-1}}{2\Delta \theta} \right. \\
&\left. + \frac{T_{k+1,j} - T_{k-1,j}}{2\Delta z} \right); \quad (4.35)
\end{aligned}$$

- termo difusivo

$$\begin{aligned}
 & \frac{k}{R_e H} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{2h}{2R_e - h} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right) + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\eta_r}{R_e H} \\
 & \approx \frac{k}{R_e H_j} \left( \frac{2h_{j+1/2}}{2R_e - h_{j+1/2}} \frac{T_{k,j+1} - T_{k,j}}{\Delta \theta^2} - \frac{2h_{j-1/2}}{2R_e - h_{j-1/2}} \frac{T_{k,j} - T_{k,j-1}}{\Delta \theta^2} \right) \\
 & \quad + k \left( \frac{T_{k+1,j} - 2T_{k,j} + T_{k-1,j}}{\Delta z^2} \right) + \frac{\eta_r}{R_e H_j};
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

- termo de transformação viscosa

$$\begin{aligned}
 \phi &= \mu \left[ 2 \left( \left( \frac{2}{2R_e - h} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right) + \left( \frac{2}{2R_e - h} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)^2 + \varepsilon_r^2 \right] \\
 &\approx \mu \left[ 2 \left( \left( \frac{2}{2R_e - h_j} \frac{v_{\theta_{k,j+1/2}}^{n+1} - v_{\theta_{k,j-1/2}}^{n+1}}{\Delta \theta} \right)^2 + \left( \frac{v_{z_{k+1/2,j}}^{n+1} - v_{z_{k-1/2,j}}^{n+1}}{\Delta z} \right)^2 \right) \right. \\
 &\quad + \left( \frac{1}{2R_e - h_j} \frac{v_{z_{k+1/2,j+1}}^{n+1} - v_{z_{k+1/2,j-1}}^{n+1} + v_{z_{k-1/2,j+1}}^{n+1} - v_{z_{k-1/2,j-1}}^{n+1}}{2\Delta \theta} \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{v_{\theta_{k+1,j+1/2}}^{n+1} - v_{\theta_{k-1,j+1/2}}^{n+1} + v_{\theta_{k+1,j-1/2}}^{n+1} - v_{\theta_{k-1,j-1/2}}^{n+1}}{4\Delta z} \right)^2 + \varepsilon_{r_{k,j}}^2 \right].
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Assim como para as coordenadas cartesianas, os termos  $F_{ext,\theta}$ ,  $F_{ext,z}$ ,  $\eta_r$  e  $\varepsilon_r$  serão demonstrados e discretizados numa seção especial.

### 4.3 Discretização modelagem FSI

Determinadas as acelerações do eixo utilizando as equações 3.61 e 3.62 permite-se isolar a variável aceleração

$$a_{e,x} = \frac{F_{p,x}}{m_e} \tag{4.38}$$

e

$$a_{e,y} = \frac{F_{p,y} - W_e}{m_e}. \tag{4.39}$$

Utilizou-se de uma integração numérica de segunda ordem (equação 4.11) para a determinação da velocidade e, por conseguinte, a posição do eixo, será mostrada apenas para

a componente vertical (y) mas a metodologia é aplicada sem dificuldades para componente horizontal (x):

$$a_{e,y} = \frac{\partial v_{e,y}}{\partial t} = \frac{F_{p,y} - W_e}{m_e} \approx \frac{3v_{e,y}^{n+1} - 4v_{e,y}^n + v_{e,y}^{n-1}}{2\Delta t} \implies v_{e,y}^{n+1} \approx \frac{2\Delta t}{3} \frac{F_{p,y} - W_e}{m_e} + 4v_{e,y}^n - v_{e,y}^{n-1} \quad (4.40)$$

e

$$v_{e,y} = \frac{\partial x_{e,y}}{\partial t} \approx \frac{3x_{e,y}^{n+1} - 4x_{e,y}^n + x_{e,y}^{n-1}}{2\Delta t} \implies x_{e,y}^{n+1} \approx \frac{2\Delta t v_{e,y}}{3} + 4x_{e,y}^n - x_{e,y}^{n-1}. \quad (4.41)$$

## MODELAGEM DOS TERMOS-FONTE

$(F_{ext}, \eta, E, \varepsilon)$

Esta seção é, provavelmente, o maior diferencial deste trabalho. O proposto modelo busca calcular os campos de pressão, de velocidade e de temperatura de forma média ao longo da coordenada ortogonal a parede deslizante. Dessa forma, não existe variação dessas propriedades na célula discreta da malha computacional.

Esta seção é dedicada a demonstrar o desenvolvimento da modelagem dos termos fontes responsáveis por promover movimento e gradiente de temperatura no fluido lubrificante.

### 5.1 Coordenadas retangulares

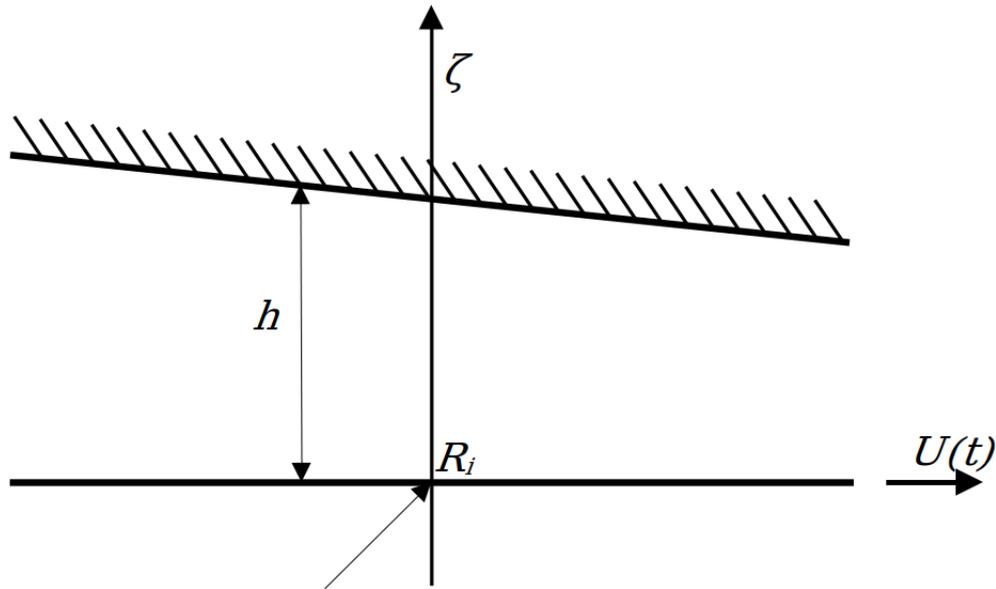
Conforme dito na seção 3.4.1, não são as tensões que promovem uma força líquida no fluido, mas sim suas diferenças. É fácil perceber que tendo uma superfície com movimento relativo a uma outra superfície cria-se uma diferença de tensões entre essas paredes. Assim, o termo das forças externas se torna a diferença entre as tensões aplicadas na parede superior subtraída da tensão aplicada na parede inferior:

$$F_{ext} = A_{sup}\tau_{sup} - A_{inf}\tau_{inf}. \quad (5.1)$$

Portanto, o objetivo é determinar os valores dessas tensões. O problema da sapata deslizante é uma aproximação do problema real do mancal cilíndrico. Uma primeira tentativa foi encontrar uma modelagem contínua para o campo de velocidade e assim determinar as tensões. Um pseudo-eixo de raio  $R_i$  foi utilizado para a criação de uma coordenada  $\zeta$  centrada na origem desse eixo, visto na figura 7.

O método utilizado para a determinação das tensões foi a transformada de Laplace. Reescrevendo o modelo diferencial nessa nova coordenada tem-se:

Figura 7 – Representação do eixo  $\zeta$  para determinação das tensões nas paredes.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \end{array} \right.$$

Cujas condições de contorno e inicial são:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0,t) = U(t) \\ u(h,t) = 0 \\ u(\zeta,0) = 0. \end{array} \right.$$

O que torna o modelo contínuo no plano laplaciano da seguinte forma:

$$u_L(\zeta, s) = c_1 e^{\kappa \zeta} + c_2 e^{-\kappa \zeta}. \quad (5.2)$$

O sub-índice  $L$  indica que a função está sendo avaliada no plano laplaciano. Aplicando as condições de contorno tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0,t) = U(t) \implies u_L(0,s) = U_L(s) = c_1 + c_2 \\ u(h,t) = 0 \implies u_L(h,s) = 0 = c_1 e^{\kappa h} + c_2 e^{-\kappa h}. \end{array} \right.$$

Determinadas as constantes, determina-se então uma função para o campo de velocidade no plano laplaciano, onde sua inversa retorna a função contínua do campo de velocidade temporal:

$$u_L(\zeta, s) = \frac{sU_L(s) \operatorname{sen}(h\sqrt{s/\alpha}(h-\zeta))}{s \operatorname{sen}(h^2\sqrt{s/\alpha})} \implies u(\zeta, t) = L^{-1} \left\{ \frac{L[U'(t)] \operatorname{sen}(h\sqrt{s/\alpha}(h-\zeta))}{s \operatorname{sen}(h^2\sqrt{s/\alpha})} \right\}. \quad (5.3)$$

Pelo teorema da convolução é sabido que

$$L^{-1} [U'_L(s)A_L(\zeta, s)] = \int_0^t A(\zeta, \sigma) \frac{dU}{dt}(t - \sigma) d\sigma, \quad (5.4)$$

onde

$$A(\zeta, t) = L^{-1} \left[ \frac{\text{sen}(h\sqrt{s/\alpha}(h - \zeta))}{s \text{sen}(h^2\sqrt{s/\alpha})} \right] = \left(1 - \frac{\zeta}{h}\right) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen}(n\pi\zeta/h) e^{-(n\pi)^2 \frac{\alpha t}{h^2}}, \quad (5.5)$$

substituindo na equação 5.4 tem-se:

$$u(\zeta, t) = \int_0^t \left\{ \left(1 - \frac{\zeta}{h}\right) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen}(n\pi\zeta/h) e^{-(n\pi)^2 \frac{\alpha \sigma}{h^2}} \right\} \frac{dU}{dt}(t - \sigma) d\sigma. \quad (5.6)$$

Especificou-se a velocidade do eixo sendo um função do tempo da forma:

$$U(t) = U_T(1 - e^{-at}) \implies \frac{dU}{dt} = U_T a e^{-at} \quad (5.7)$$

sendo que  $U_T$  é a velocidade terminal do pseudo-eixo e  $a$  é uma constante de tempo que diz respeito a aceleração do eixo desde o repouso até atingir  $U_T$ .

Substituindo a equação 5.7 na equação 5.6 chega-se a

$$u(\zeta, t) = \int_0^t \left(1 - \frac{\zeta}{h}\right) U_T a e^{-a(t-\sigma)} d\sigma - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen}\left(n\pi \frac{\zeta}{h}\right) \int_0^t e^{-(n\pi)^2 \frac{\alpha \sigma}{h^2}} U_T a e^{-a(t-\sigma)} d\sigma, \quad (5.8)$$

resolvendo a integral, mudando a coordenada  $\zeta$  para  $y$ , com a origem de coordenadas no centro do pseudo-eixo de raio  $R_i$  ( $0 \leq y \leq R_i + h \implies \zeta = y - R_i$ ), e substituindo  $\alpha$  por  $\mu/\rho$  chega-se finalmente a:

$$u(y, t) = U_T \left[ \left(1 - \frac{y - R_i}{h}\right) (1 - e^{-at}) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{\left(1 - \frac{\mu(n\pi)^2}{\rho h^2}\right)} \text{sen}\left(n\pi \frac{y - R_i}{h}\right) \left(e^{-(n\pi)^2 \frac{\mu t}{\rho h^2}} - e^{-at}\right) \right]. \quad (5.9)$$

Determinado então uma solução contínua para o campo de velocidade  $u$ , é possível determinar as tensões nas paredes, uma vez que:

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (5.10)$$

Substituindo então a equação 5.9 na equação 5.10 nas respectivas paredes determina-se as tensões nas paredes superior e inferior. Ficando então:

$$\tau_{sup} = -\mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=R_i+h} = -\mu \left[ \frac{U_T}{h} (1 - e^{-at}) + \frac{2U_T}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 - \frac{(n\pi)^2 \mu}{\rho a h^2}} (e^{-(n\pi)^2 \frac{\mu t}{\rho h^2}} - e^{-at}) \right] \quad (5.11)$$

e

$$\tau_{inf} = -\mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=R_i+h} = -\mu \left[ \frac{U_T}{h} (1 - e^{-at}) + \frac{2U_T}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{(n\pi)^2 \mu}{\rho a h^2}} (e^{-(n\pi)^2 \frac{\mu t}{\rho h^2}} - e^{-at}) \right]. \quad (5.12)$$

É então possível determinar finalmente o termo  $F_{ext,xy}$  conhecido as áreas de atuação dessas tensões. Aproximando a área superior da área inferior, uma vez que a inclinação da parede superior tende a ser muito pequena, assim:  $A_{sup} = A_{inf} = \Delta x$ , supondo que a componente de profundidade é unitária ( $\Delta z = 1$ ). Substituindo as equações 5.12 e 5.11 na equação 5.1 tem-se finalmente:

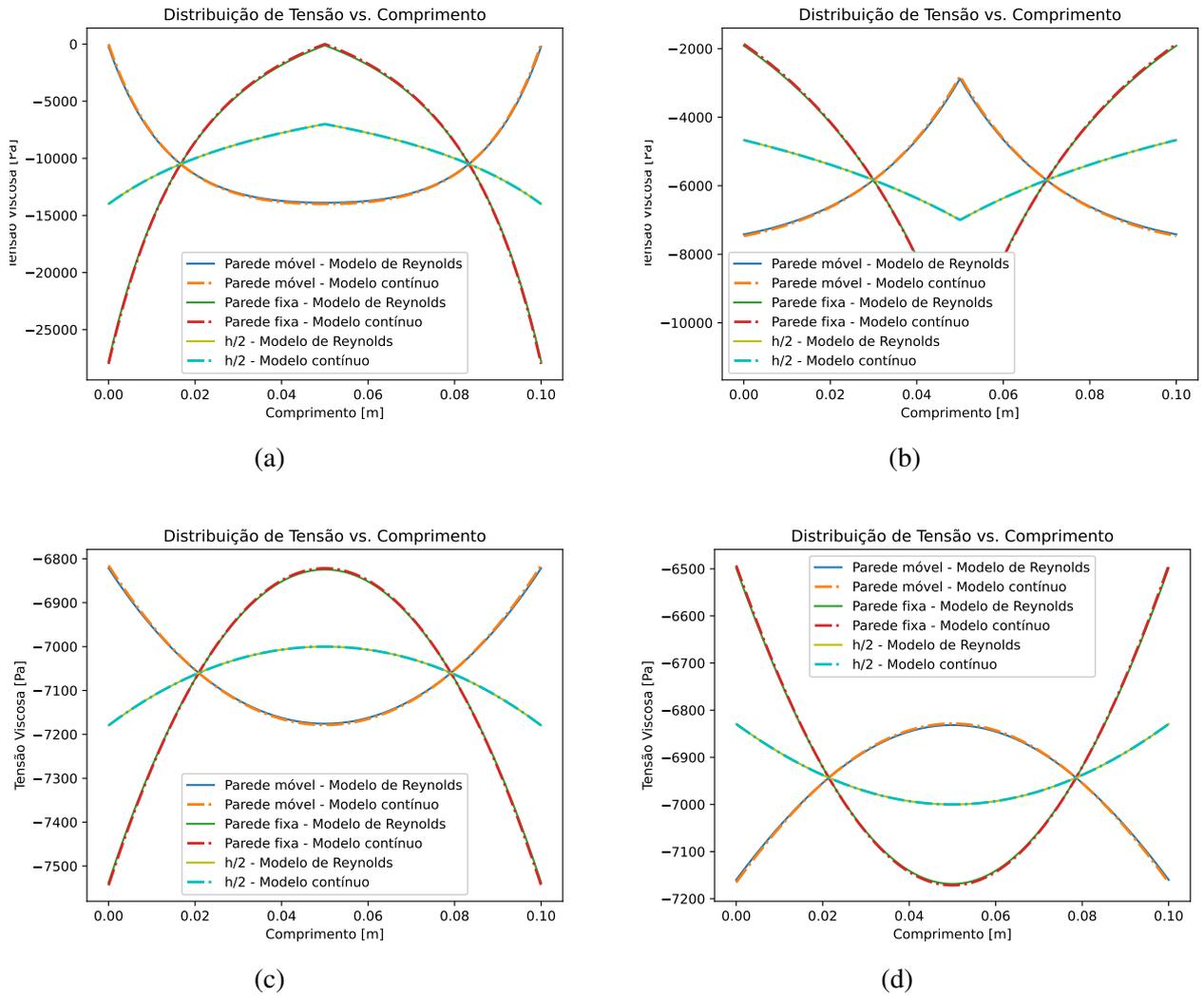
$$F_{ext,xy} = \left[ \frac{2\mu U_T}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{1 - \frac{(n\pi)^2 \mu}{\rho a h^2}} (e^{-at} - e^{-\frac{(n\pi)^2 \mu t}{\rho h^2}}) \right] \Delta x. \quad (5.13)$$

Comparando os resultados das tensões obtidos por esse método com as tensões obtidas pelo modelo de Reynolds (substituindo a equação 3.5 na equação 5.10) obteve-se resultados muito satisfatórios para os valores da tensão, validando assim sua formulação. Um dos vários resultados obtidos para a tensão é mostrado na figura 8. As sub figuras 8a, 8b, 8c e 8d apresentam diferentes valores entre si pois representam as tensões em diferentes geometrias de canais. Os perfis exatos dos canais serão melhor descritos em seções futuras deste trabalho.

Apesar da formulação ser elegante e obter exatamente o mesmo resultado apresentado pelo modelo de Reynolds, quando aplicada diretamente ao modelo numérico-computacional obtido pelo balanço da quantidade de movimento linear utilizando teoria de filme fino, a mesma não apresentou convergência computacional. Assim, foi necessário o desenvolvimento de uma nova formulação para a obtenção do termo  $F_{ext,xy}$ .

A formulação correta deveria conter as condições do contorno do problema mas que também dependesse na própria velocidade média na célula a ser calculada. Isso se deve às pequenas variações numéricas computacionais. Embora sejam pequenas, essas flutuações numéricas são altamente relevantes, pois em sistemas fechados, como no caso da sapata deslizando ou do mancal cilíndrico, essas flutuações ocorrem em todas as células e o sistema deve se adaptar a elas.

Figura 8 – Comparação entre os resultados obtidos para os valores das tensões nas paredes da sapata deslizante.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma primeira tentativa de impor as condições de contorno foi a adaptação da discretização da equação 5.10 utilizando apenas a velocidade média conhecida no centro da célula e as condições de contorno. De forma matemática, aproximando a derivada pelo método das diferenças finitas de segunda ordem, isso se torna:

$$\tau_{xy}|_{inf} \approx \mu \frac{-3U + 4u_{j+1/2}}{h_{j+1/2}} \quad (5.14)$$

e

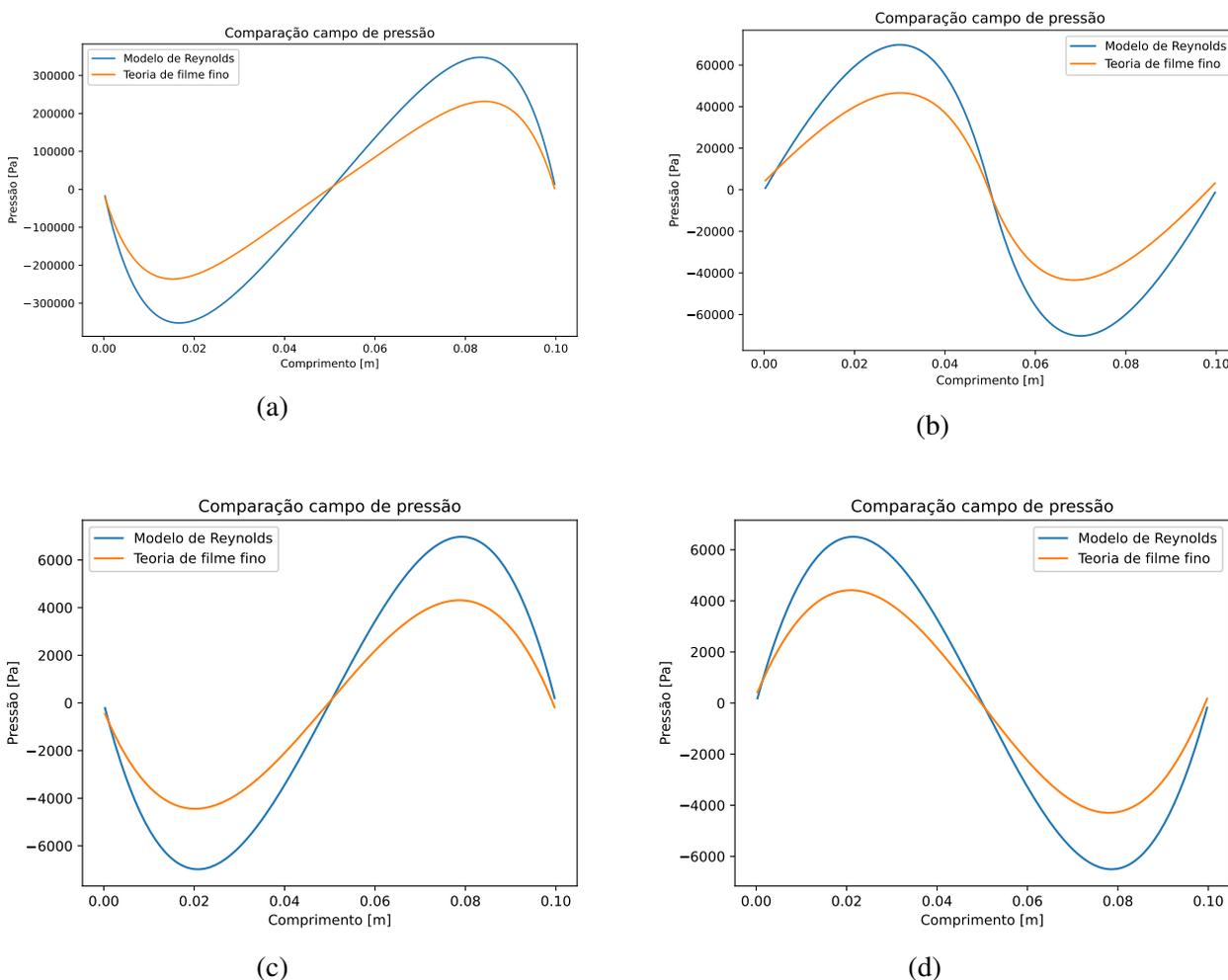
$$\tau_{xy}|_{sup} \approx \mu \frac{U - 4u_{j+1/2}}{h_{j+1/2}}. \quad (5.15)$$

Assim, substituindo as equações 5.14 e 5.15 na equação 5.1, considerando a mesma área  $\Delta x$ , tem-se que:

$$F_{ext,xy} \approx \mu \Delta x \frac{4(U - 2u_{j+1/2})}{h_{j+1/2}}. \tag{5.16}$$

Essa modelagem apresenta dependência tanto das condições de contorno da sapata deslizante como da própria velocidade a ser calculada. A modelagem apresentou convergência numérica, apresentando convergência qualitativa mas não quantitativa. A figura 9 mostra alguns resultados preliminares com essa primeira modelagem.

Figura 9 – Comparação entre os resultados obtidos para os valores das pressões com a modelagem discretizada.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os resultados apresentados na figura 9 acompanham o comportamento de crescimento e queda de pressão do modelo de Reynolds. Contudo não apresentam os mesmos resultados quantitativos. Em várias simulações realizadas variando velocidade, perfil do canal, propriedades

físicas, etc, foi notado que a diferença entre os valores das pressões se aproximava da constante  $\sqrt{2}$ . Assim, a equação 5.16 passou a ser escrita como:

$$F_{ext,xy_{j+1/2}} \approx \sqrt{2}\mu\Delta x \frac{4(U - 4u_{j+1/2})}{h_{j+1/2}}. \quad (5.17)$$

Os resultados obtidos com a implementação da equação 5.17 serão mostrados na seção dedicada a resultados obtidos neste trabalho. O motivo da existência da constante  $\sqrt{2}$  ainda é desconhecido, mas como uma primeira proposta de modelagem é o suficiente para o andamento do estudo.

A modelagem dos termos  $\eta_y$  e  $\varepsilon_y$  também se deram de uma adaptação da discretização convencional utilizando diferenças finitas. Havendo apenas uma célula computacional todas as condições de contorno devem estar presentes nessa modelagem. O processo das simplificações matemáticas para a imposição das condições de contorno não são relevantes. A modelagem dos termos se tornaram:

$$\eta_{y_j} \approx \frac{h_j}{k} \left[ \frac{\left(1 - \frac{2k}{h_j} \left(\frac{\xi}{k_s} + \frac{1}{h_{conv}}\right)\right) T_j - 2T_\infty}{-2kh_j \left(\frac{\xi}{k_s} + \frac{1}{h_{conv}}\right) - h_j^2} - \frac{T_j}{h_j^2} \right] \quad (5.18)$$

e

$$\varepsilon_{y_j} = -\frac{U}{h_j}. \quad (5.19)$$

## 5.2 Coordenadas cilíndricas

Não existindo transformada de Laplace em coordenadas cilíndricas e utilizando da experiência adquirida com a modelagem em coordenadas retangulares, a modelagem dos termos fonte em coordenadas cilíndricas pôde ser definida de forma mais rápida e objetiva.

A modelagem seguiu o mesmo princípio apresentado para a modelagem em coordenadas cartesianas, uma adaptação dos modelos já conhecidos na literatura com algum ajuste. Os três termos fontes ficam então da seguinte forma:

$$F_{ext,\theta_{k,j+1/2}} \approx \sqrt{2}\mu \left( \frac{R_e(\omega R_i - 4v_{\theta_{k,j+1/2}})}{h_{j+1/2}} - \frac{(R_e - h_{j+1/2})(4v_{\theta_{k,j+1/2}} - \omega R_i)}{h_{j+1/2}} + \omega R_i \right), \quad (5.20)$$

$$F_{ext,z_{k+1/2,j}} \approx -\frac{\sqrt{2}\mu v_{z_{k+1/2,j}}(2R_e - h_j)}{h_j}, \quad (5.21)$$

$$\eta_{r_{k,j}} \approx \frac{\left[ 1 - \frac{2kR_e}{h_j} \left( \frac{1}{h_{conv}(R_e\xi)} + \frac{\ln\left(\frac{R_e+\xi}{R_e}\right)}{k_s} \right) \right] T_{k,j} - 2T_\infty}{2kR_e h_j \left( \frac{1}{h_{conv}(R_e + \xi)} + \frac{\ln\left(\frac{R_e+\xi}{R_e}\right)}{k_s} \right) - h_j^2} - \frac{T_{k,j}}{h_j^2} \quad (5.22)$$

e

$$\varepsilon_{r_{k,j}} \approx \frac{2\nu\theta_{k,j}}{2R_e - h_j} - \frac{\omega R_i}{h_j}. \quad (5.23)$$

Vale ressaltar mais uma vez que essas modelagens, assim como para as coordenadas cartesianas, são adaptações de modelos consolidados.

---

## RESULTADOS

---

Finalizada a modelagem matemática diferencial e a metodologia computacional, códigos computacionais são criados a fim de resolver os problemas de mancais fluidodinâmicos. O presente trabalho utilizou de códigos criados pelo próprio autor na linguagem de programação Fortran 90 a fim de se obter as soluções aproximadas para os campos de pressão, de velocidade e de temperatura utilizando tanto o clássico modelo de Reynolds e também a nova metodologia proposta.

Essa seção é destinada a mostrar, comparar e discutir sobre os resultados obtidos das três variáveis (pressão, velocidade e temperatura) utilizando a nova metodologia proposta.

Como o objetivo do presente trabalho não é, nesta fase, comparar com resultados experimentais, os fluidos utilizados não representam fluidos reais. As propriedades dos mesmos foram escolhidas de forma que a exigência  $Re^* \ll 1$  fosse respeitada.

### 6.1 Coordenadas Cartesianas

O problema da sapata deslizante é apenas um exemplo de geometria que pode ser analisada utilizando os modelos propostos. O problema pode ser estendido para um canal de geometria qualquer.

Quatro canais de diferentes geometrias foram escolhidos para as análises. Os perfis tem caráter periódico, isto é, a altura do canal na entrada e na saída são os mesmos, possibilitando que as propriedades na saída do canal sejam dependentes das propriedades na entrada e vice-versa. Em outras palavras, a temperatura, a velocidade e a pressão na saída do canal são as mesmas na entrada e o mesmo acontece na entrada do canal.

Ao se aplicar as equações de Reynolds e a equação diferencial da quantidade de movimento linear utilizando teoria de filme fino pôde-se determinar os campos de pressão e de velocidade. A tabela 1 mostra as propriedades físicas do fluido e de operação da sapata.

Tabela 1 – Propriedades fluidodinâmicas e de operação das sapatas.

Propriedade	Valor
Viscosidade ( $\mu$ )	9,0 [Pa.s]
Massa específica ( $\rho$ )	998,0 [kg/m <sup>3</sup> ]
Velocidade da parede ( $U$ )	1,0 [m/s]
Condutividade térmica ( $k$ )	700,0 [W/(m·K)]
Capacidade térmica volumétrica ( $c_v$ )	4186,0 [J/(kg·K)]

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os canais escolhidos são geometria genéricas: um perfil parabólico com concavidade positiva e um com concavidade negativa, e um perfil em formato de V com concavidade positiva e um com concavidade negativa. A figura 10 é uma representação gráfica de cada uma das geometrias, enquanto a tabela 3 mostra as dimensões de cada uma delas bem como o número de Reynolds modificado ( $Re^*$ ).

A tabela 3 mostra as dimensões de cada uma das geometrias, enquanto a figura 10 é uma representação gráfica de cada uma delas.

Tabela 3 – Configurações geométricas dos canais cartesianos.

Canal	Comprimento (m)	$h(x=0)$ (m)	$h(x=L/2)$ (m)	$Re^*$ []
Parábola positiva	1,00E-1	51,25E-5	50,00E-5	2,91E-4
Parábola negativa	1,00E-1	48,75E-5	50,00E-5	2,77E-4
V positivo	1,00E-1	55,00E-4	50,00E-4	3,35E-2
V negativo	1,00E-1	45,00E-4	50,00E-4	2,77E-2

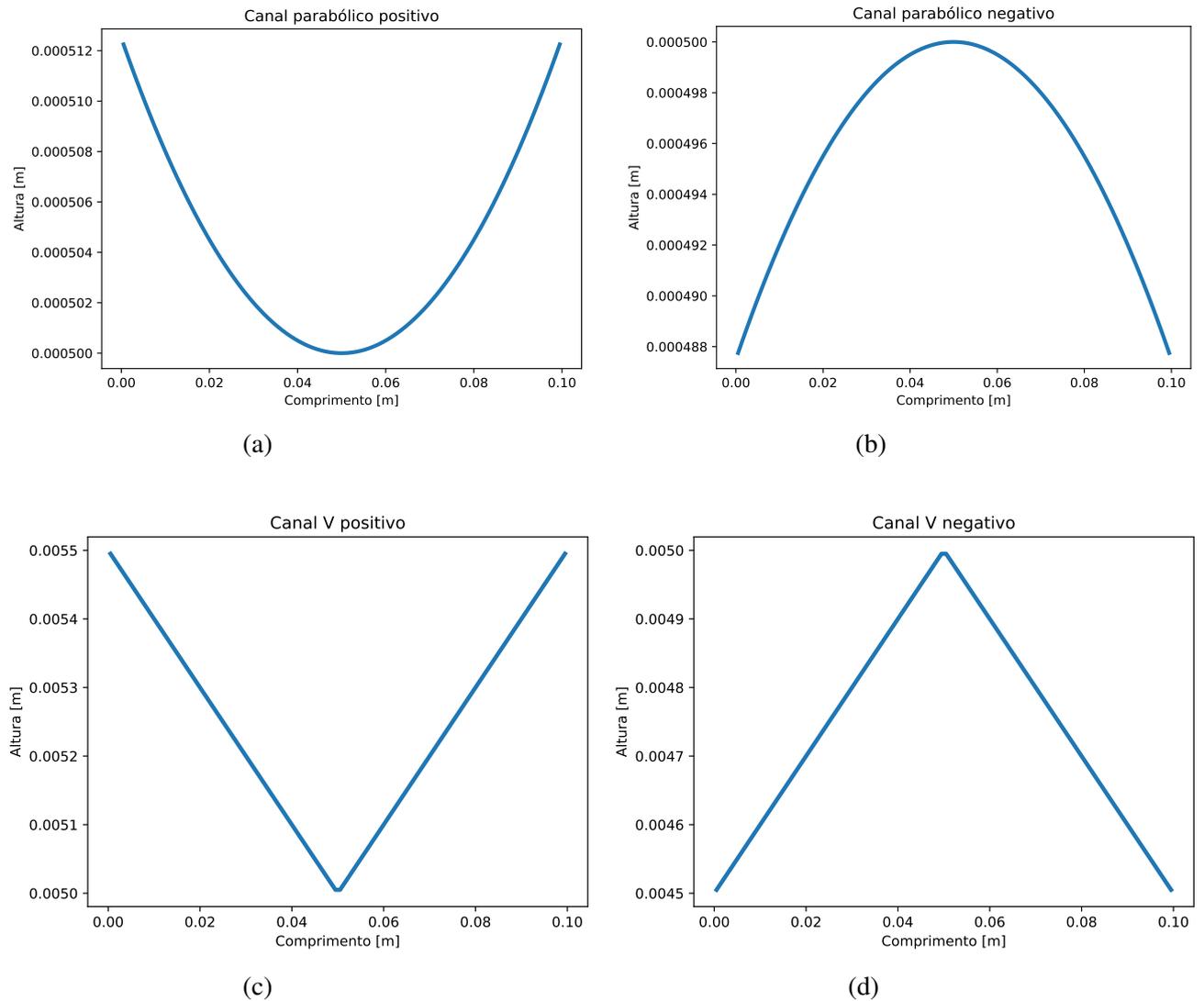
Fonte: Elaborada pelo autor.

Os campos de pressão e velocidade foram determinados utilizando a modelagem da tensão nas paredes da sapata conforme a equação 5.17. Uma comparação entre os resultados obtidos com o modelo de Reynolds e o atual modelo proposto para os campos de pressão e de velocidade para cada uma das geometrias das sapatas estão mostradas nas figuras 11 e 12, respectivamente. O campo de temperatura é mostrado na figura 13.

É importante lembrar que o modelo proposto calcula as propriedades médias em relação a fenda  $h$  ao longo do comprimento do canal. Já para o modelo de Reynolds existe, para a velocidade, uma equação continua para essa propriedade. Assim, a comparação é feita com os resultados obtidos em regime permanente do proposto modelo com a média dos valores obtidos utilizado do modelo de Reynolds.

Para o proposto modelo, foi considerado que o regime permanente dinâmico (pressão e velocidade) e térmico (temperatura) é atingido quando a variação temporal das grandezas fosse menor do que  $1E - 10$ :

Figura 10 – Representação dos canais analisados em coordenadas retangulares.



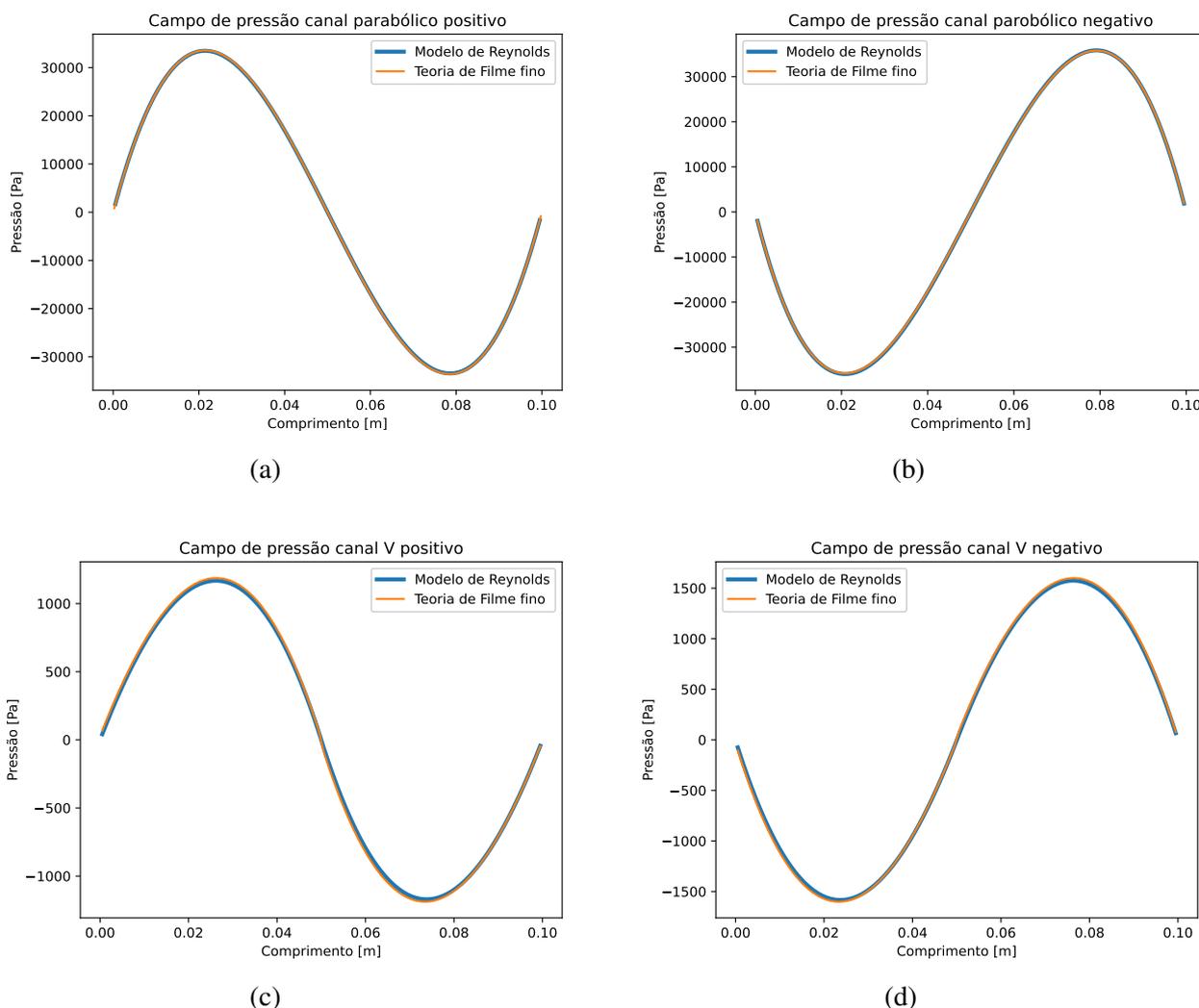
Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\max \left( \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} \right) < 1E - 10, \quad (6.1)$$

em que  $f$  pode representar qualquer uma das variáveis. O modelo dinâmico é acoplado, isto é, pressão e velocidade são calculadas a partir de uma mesma equação. Assim, quando a pressão atinge esse critério a velocidade também atinge.

As simulações foram realizadas seguindo um padrão de elementos na discretização espacial, sendo dividida em 100 elementos no eixo horizontal  $x$ . O modelo de Reynolds exige que, além da discretização em  $x$ , haja também uma discretização em  $y$  para que seja possível calcular os campos de velocidade e de temperatura. Essa divisão vertical utilizou-se de 40

Figura 11 – Comparação campos de pressão para as diferentes geometrias de sapatas.



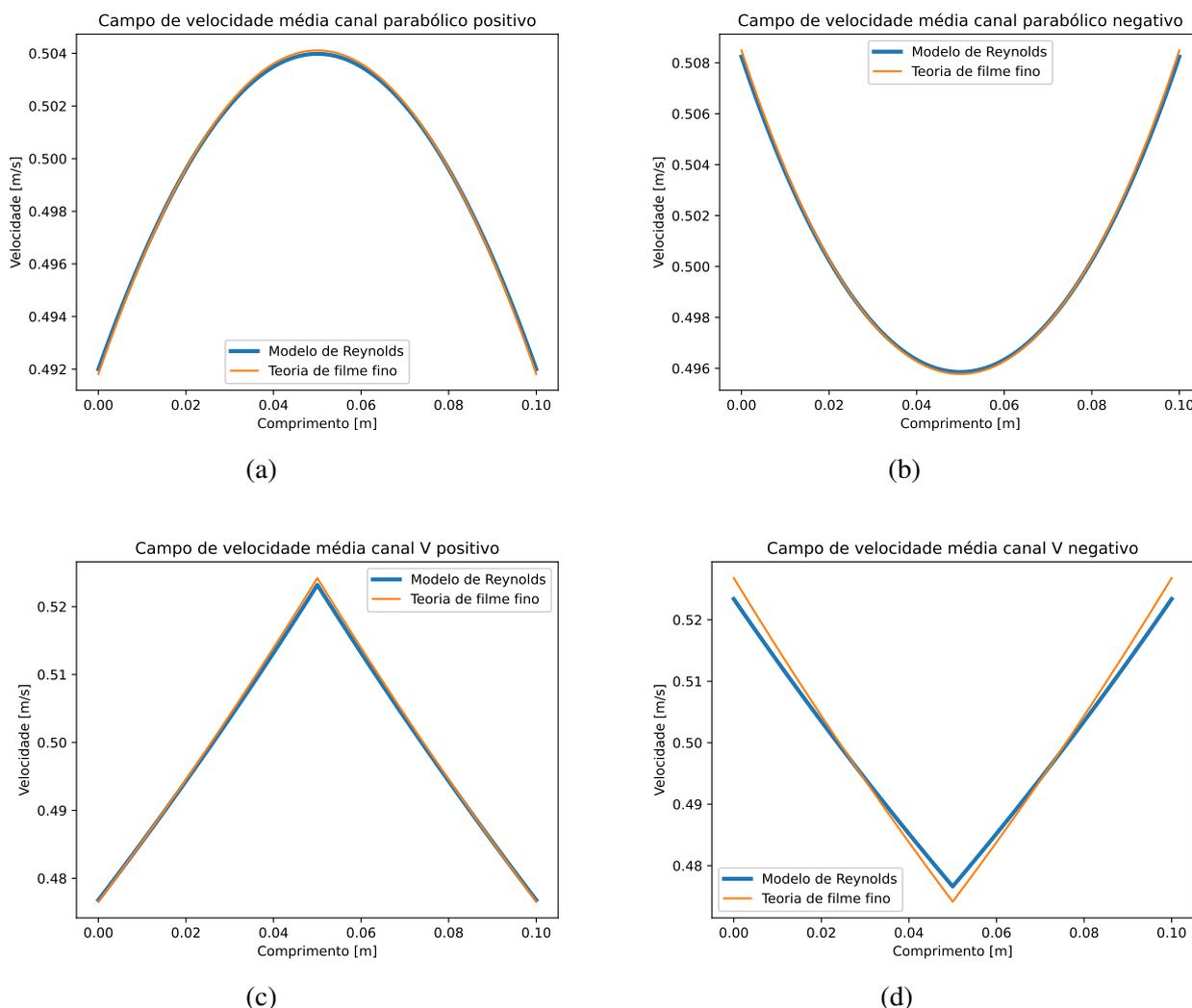
Fonte: Elaborada pelo autor.

elementos.

Pela figura 11 é notável que o modelo proposto alcançou com muita precisão (quase que com exatidão) o clássico modelo de Reynolds. A região negativa dos campos de pressão não representam por si só um fenômeno físico. Essa região é chamada de região de cavitação, onde o fluido atinge uma pressão mínima necessária para sair da fase líquida para a fase gasosa. Um dos artifícios para eliminar esse efeito de cavitação encontrados na literatura, é simplesmente tornar a região negativa num valor nulo para a pressão. Contudo, para a validação do método isso não é necessário. Além do mais, é esperado em estudos futuros que haja a integração mais realística da região de cavitação utilizando o método aqui apresentado, isso é feito considerando o fluido compressível.

Os campos de velocidade também apresentaram resultados bastante satisfatórios. A maior discrepância é notada no canal em formato V com a concavidade para baixo (figura 12d).

Figura 12 – Comparação campos de velocidades médias para as diferentes geometrias de sapatas.



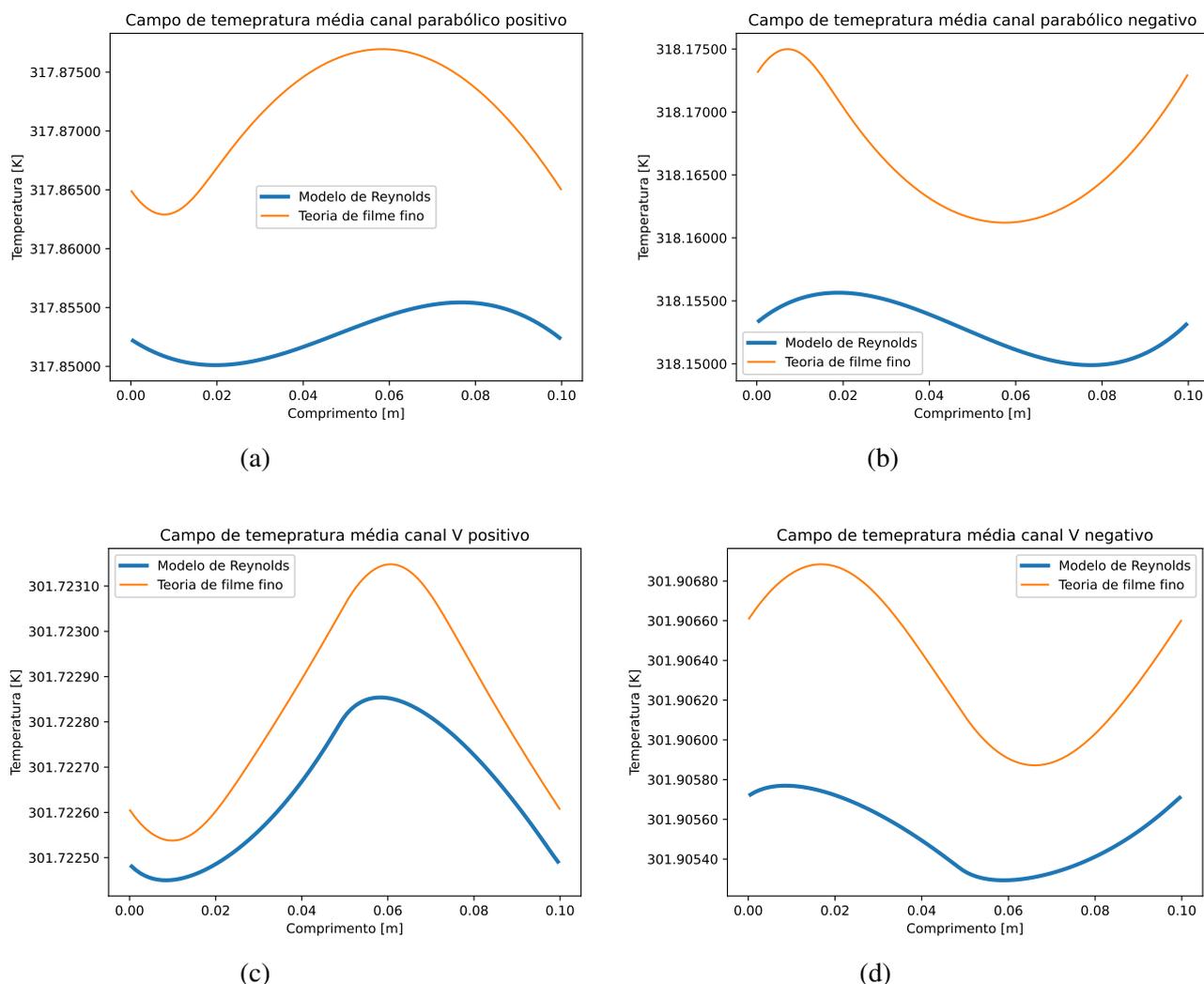
Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma explicação possível para essa discrepância é o próprio formato do canal, que possui uma forte descontinuidade em seu formato, deixando de ser divergente para ser convergente de forma muito abrupta.

O campo de temperatura (figura 13), apesar de não apresentar valores exatos, apresenta resultados quantitativos e qualitativos muito satisfatórios. O modelo de Reynolds, por ser regime permanente, exige que o método aplicado para a resolução da equação da energia (equação 4.3) seja puramente implícito. A formulação térmica utilizando a modelagem aqui apresentada (equações 4.35, 4.36 e 4.37) pode ser tanto explícita quanto implícita. Por facilidade, a metodologia aplicada foi a explícita. Métodos implícitos tendem, em geral, a ser mais estáveis do que metodologias explícitas.

O campo de temperatura foi calculado utilizando um coeficiente convectivo  $h_{conv} = 1000 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$  com uma temperatura  $T_{\infty} = 300 \text{ K}$  diretamente no fluido lubrificante. Isto é,

Figura 13 – Comparação campos de temperatura para as diferentes geometrias de sapatas.



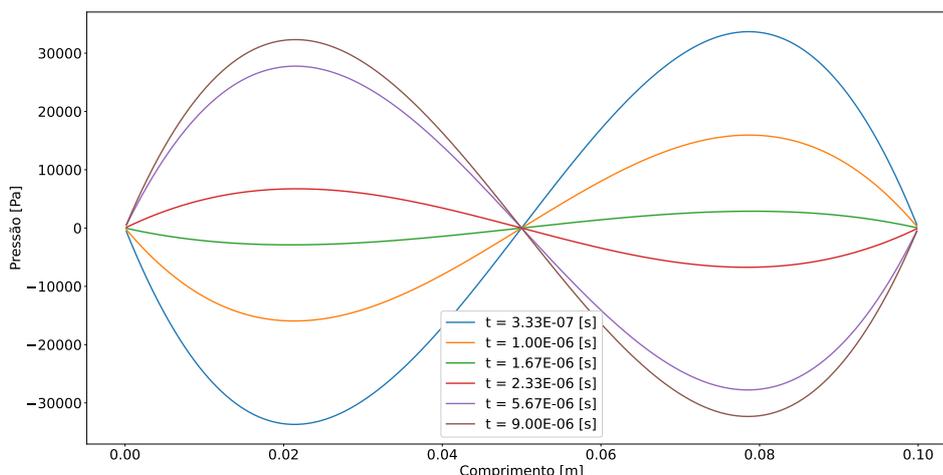
Fonte: Elaborada pelo autor.

não considerando uma espessura para a parede superior da sapata.

O método proposto, por ser transiente, permite o estudo do comportamento do fluido dentro da cavidade ao longo do tempo, antes de atingir o regime permanente. A figura 14 mostra o comportamento da pressão dentro da cavidade em diferentes tempos para a cavidade parabólica positiva (figura 10a).

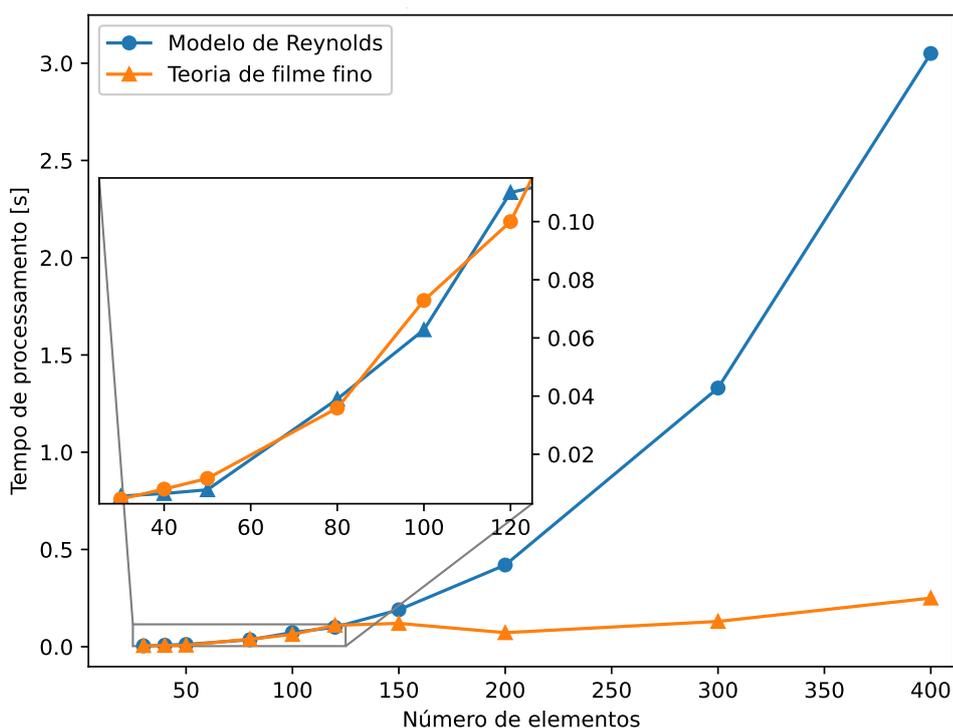
Outra vantagem esperada para o método é a redução do tempo necessário para a resolução das equações diferenciais. Uma comparação do tempo computacional necessário para a resolução dos campos de pressão utilizando os dois métodos é mostrado na figura 15, a comparação é feita comparando o tempo necessário para a resolução das equações em diferentes malhas discretas. O tempo leva em consideração apenas o modelo dinâmico do proposto modelo e apenas a resolução do campo de pressão do modelo de Reynolds.

Figura 14 – Evolução temporal da pressão no canal parabólico positivo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 15 – Comparação tempo de processamento para diferentes números de elementos na malha discreta.



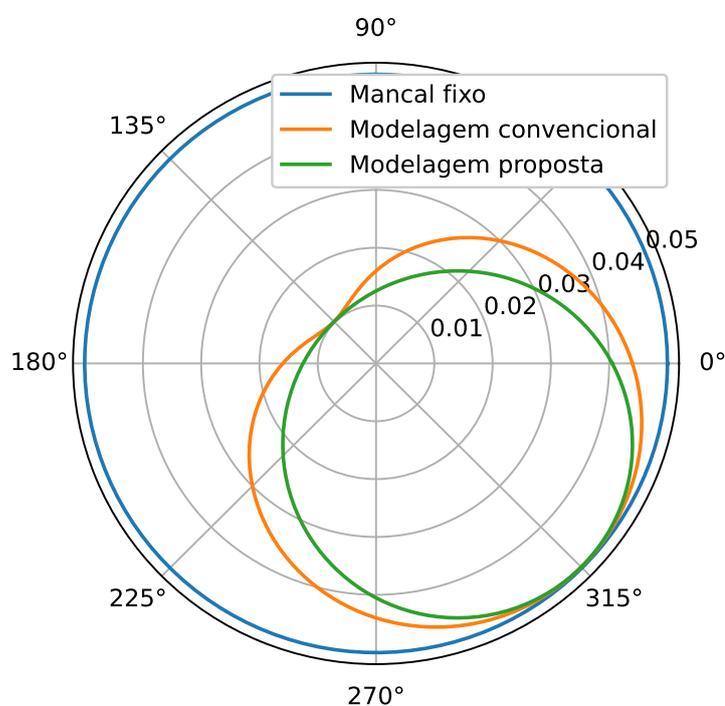
Fonte: Elaborada pelo autor.

Vale lembrar que o modelo dinâmico proposto apresenta velocidade e pressão acopladas numa mesma equação. Assim, o tempo apresentado na figura 15 é, na verdade, uma comparação entre o tempo necessário para o modelo proposto calcular os campos de pressão e de velocidade enquanto o modelo de Reynolds calcula apenas o campo de pressão.

## 6.2 Coordenadas Cilíndricas

Para coordenadas cilíndricas, uma representação mais fidedigna de um mancal fluidodinâmico, pode-se iniciar mostrando a melhor modelagem da função que descreve a folga radial do mancal cilíndrico (equação 3.71). A figura 16 é uma comparação entre as modelagens para a folga radial  $h$ . É notável que a clássica modelagem deforma o eixo rotativo em altas excentricidades enquanto a modelagem proposta neste trabalho mantém o formato perfeitamente cilíndrico do eixo rotativo. Isso é capaz de reduzir erros nos resultados obtidos numericamente ao se comparar com um modelo experimental, por exemplo.

Figura 16 – Comparação entre as modelagens para a função  $h(\theta)$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

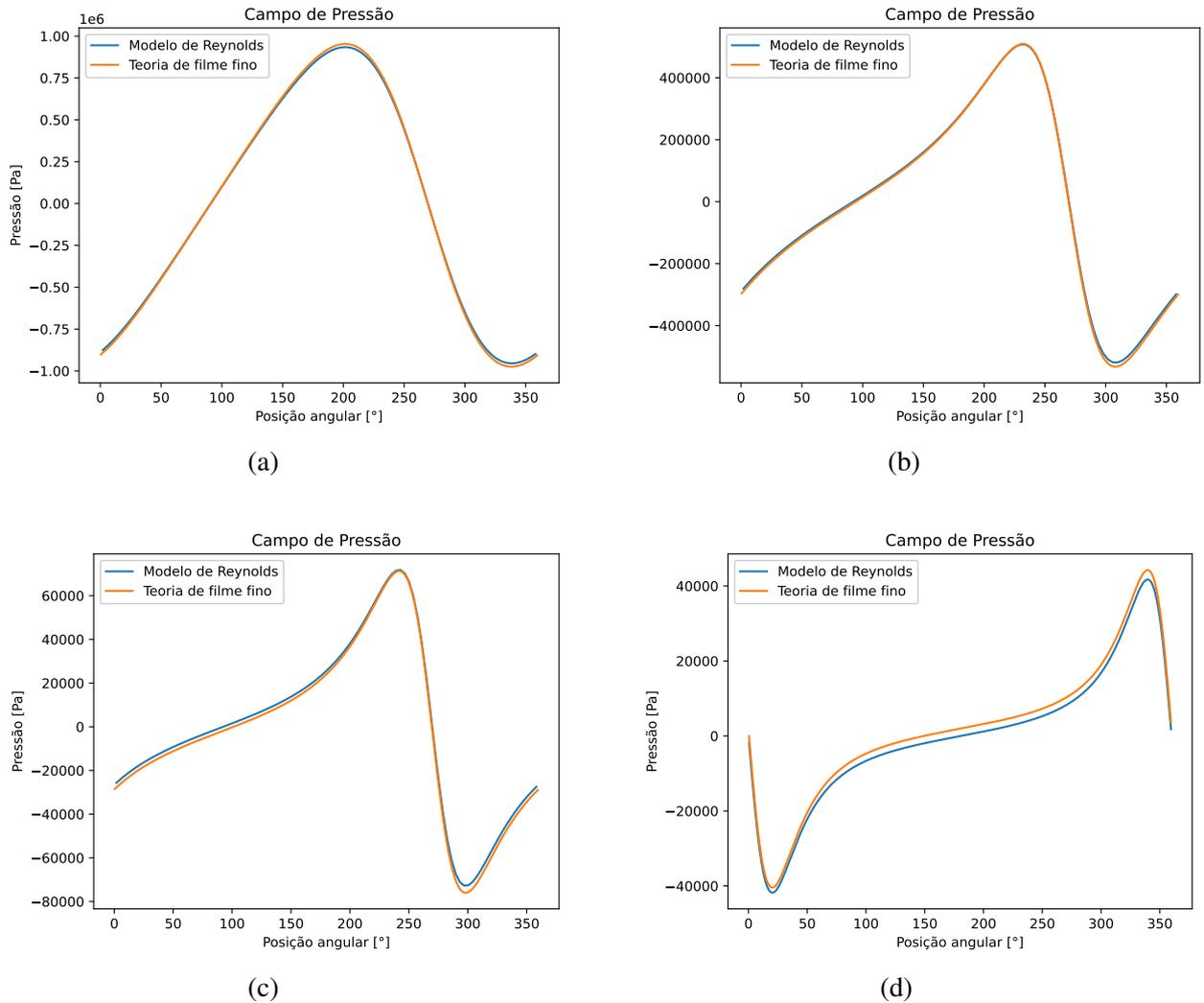
O método proposto neste estudo mostrou-se convergente e estável também para a modelagem em coordenadas cilíndricas. Dentro das limitações impostas pelo modelo de Reynolds ( $Re^* \ll 1$ ), o potencial completo do novo modelo ainda não foi totalmente explorado. Foram simuladas várias configurações de mancais, incluindo diferentes velocidades, excentricidades, folgas e dimensões do eixo, e comparadas ao modelo convencional.

### 6.2.1 Modelagem bi-dimensional

A figura 17 apresenta uma comparação entre os resultados do campo de pressão obtidos usando o modelo proposto em sua forma bi-dimensional com o modelo de Reynolds também bi-

dimensional. A Tabela 5 apresenta as configurações utilizadas para cada um dos casos mostrados na figura 17.

Figura 17 – Comparação campos de pressão para diferentes configurações de mancais bi-dimensional.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 5 – Configuração para os diferentes mancais.

Caso	$R_e$ [m]	$R_i$ [m]	$e_x$ [m]	$\omega$ [RPM]	$\theta_0$ [°]	$\mu$ [Pa.s]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$Re^*$
Fig. 17a	50,00E-3	48,00E-3	5,00E-4	1000	270	1,0E1	1000	1,02E-2
Fig. 17b	70,00E-3	68,00E-3	1,25E-3	500	270	1,5E0	500	2,89E-2
Fig. 17c	60,00E-3	58,00E-3	1,50E-3	50	270	1,7E0	776	4,58E-3
Fig. 17d	52,00E-3	51,00E-3	8,50E-4	100	0	8,1E-2	914	6,37E-2

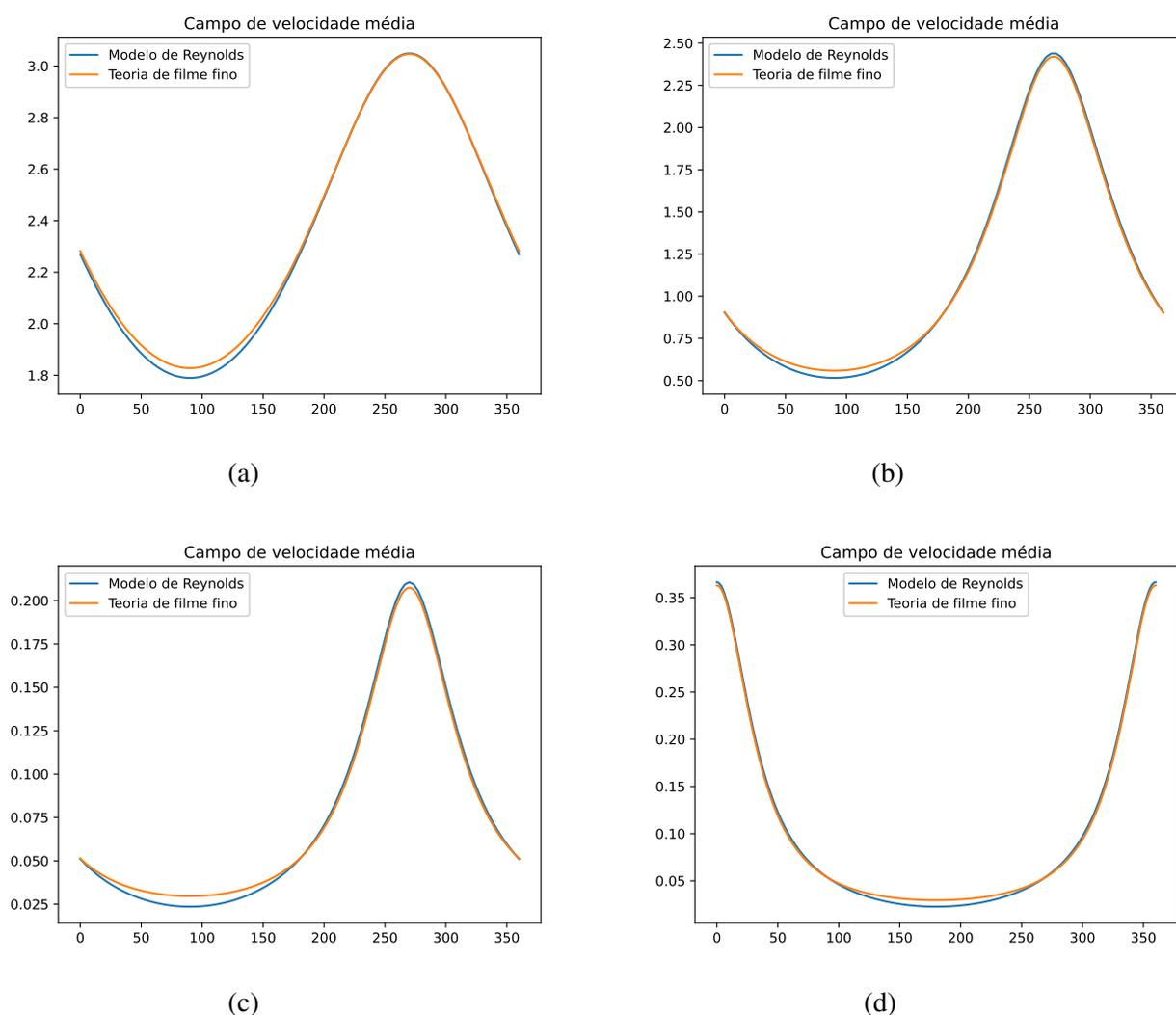
Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim como em coordenadas retangulares, o modelo também apresentou com muita precisão qualitativa e quantitativa os resultados para o campo de pressão quando comparado

com o modelo Reynolds. Nessas coordenadas o modelo também apresenta a pressão negativa na região convergente da folga radial. É perceptível também que a pressão máxima ocorre um pouco antes do menor valor de  $h$ . Esse efeito é o responsável por gerar sustentação num mancal real com um peso aplicado ao eixo rotativo. Os resultados apresentados não consideram um peso aplicado ao eixo.

A Figura 18 mostra os perfis de velocidade angular média resultantes. A sequência de imagens é a mesma apresentada na Figura 17.

Figura 18 – Comparação campos de velocidade média para diferentes configurações de mancais bi-dimensional.



O eixo vertical representa a velocidade média  $v_\theta$  em m/s e o eixo horizontal representa a posição angular  $\theta$  em graus.

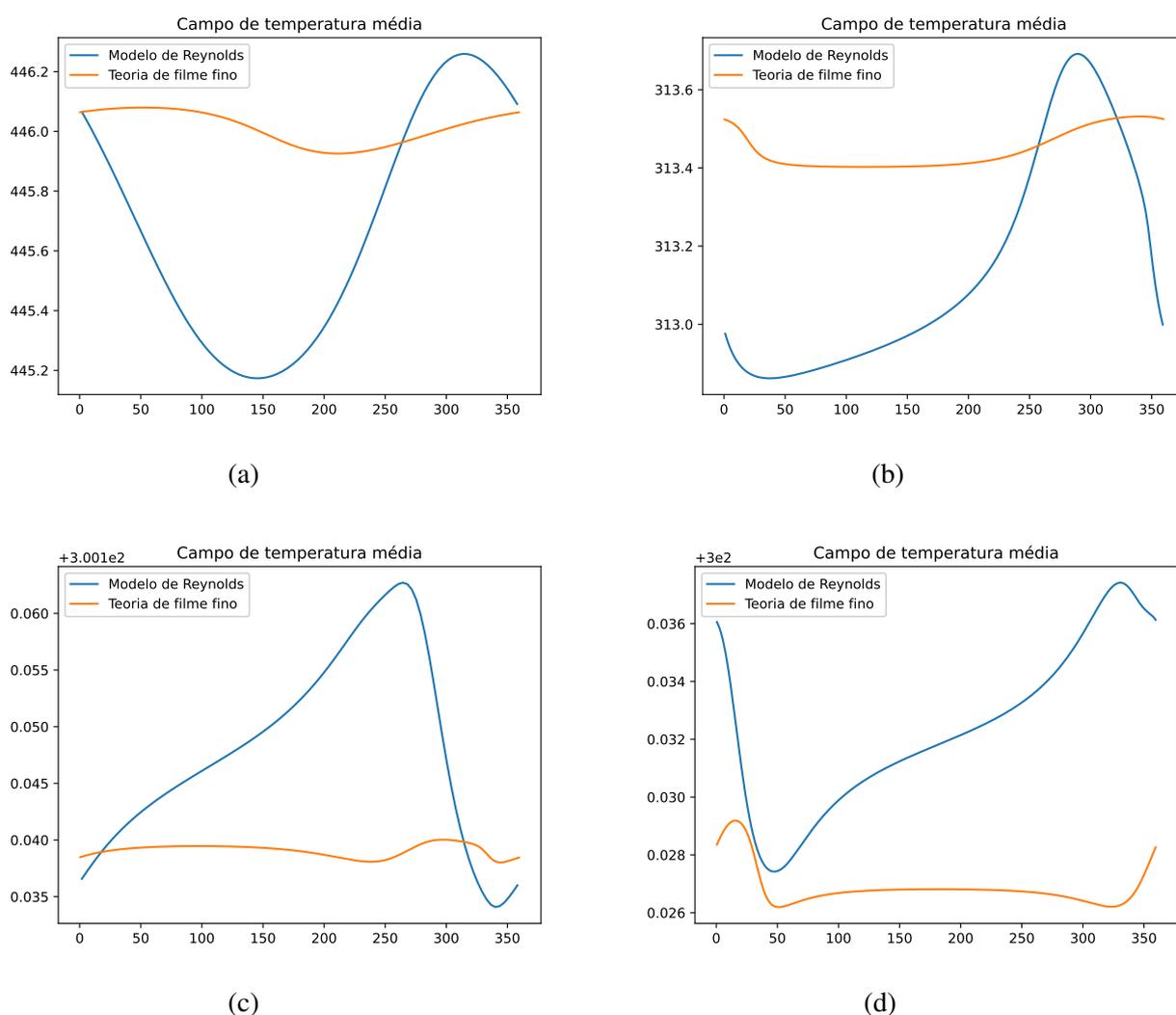
Fonte: Elaborada pelo autor.

As velocidades são um tanto contraditórias quando avaliadas em relação ao princípio de Bernoulli (BERNOULLI, 1738), mas é importante lembrar que o princípio de Bernoulli é

válido apenas para fluxos invíscidos, ao contrário do caso avaliado aqui, que possui  $Re^* \ll 1$ . Em outras palavras, as forças viscosas predominam sobre as forças inerciais.

A figura 19 mostra a comparação do campo das temperaturas médias obtidas com o proposto modelo. Mais uma vez, o método utilizado para a discretização temporal da equação da energia foi o método explícito, contribuindo para que haja algumas discrepâncias dos resultados. Apesar das discrepâncias os erros são muito pequenos, podendo ser considerado apenas como erros numéricos.

Figura 19 – Comparação campos de temperatura média para diferentes configurações de mancais bi-dimensional.



O eixo vertical representa a temperatura média  $T$  em K e o eixo horizontal representa a posição angular  $\theta$  em graus.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A determinação do campo de temperatura utilizando o modelo de Reynolds foi demasiada custosa computacionalmente. Tanto para o proposto modelo quanto para o clássico modelo foram

utilizadas 360 células na discretização da coordenada angular. Para a determinação do campo de temperatura utilizando o modelo de Reynolds é necessário também a discretização ao longo da coordenada radial  $r$ . A discretização nessa coordenada exigiu, ao menos, 200 células na discretização dessa coordenada, resultando um total de 72000 células no total.

Para a determinação de campo de temperatura foi considerado um material de uma certa espessura para o mancal fixo, a fim de trazer mais realismo. As propriedades térmicas dos fluidos lubrificantes e do mancal fixo estão dispostas na tabela 6.

Tabela 6 – Propriedades termodinâmicas mancais bi-dimensionais.

Propriedade	Valor
Espessura mancal fixo ( $\xi$ )	5,00E-3 [m]
Capacidade térmica ( $c_v$ )	4001,69 [J/(kg · K)]
Condutividade térmica do fluido ( $k$ )	7,00E-1 [W/(m · K)]
Condutividade térmica do sólido ( $k_s$ )	397,00 [W/(m · K)]
Coefficiente convectivo ( $h_{conv}$ )	10000,00 [W/(m <sup>2</sup> · K)]
Temperatura no infinito ( $T_\infty$ )	300,00 [K]

Fonte: Elaborada pelo autor.

## 6.2.2 Modelagem tri-dimensional

Para a modelagem tri-dimensional foi avaliado apenas o campo de pressão. Isso devido ao elevado custo computacional exigido pelo modelo de Reynolds ainda em bi-dimensional.

As condições de contorno impostas no eixo axial foram Dirichilet para a pressão e Neumann para as velocidades, A imposição dessas condições produz um gradiente de pressão também na direção axial do mancal:

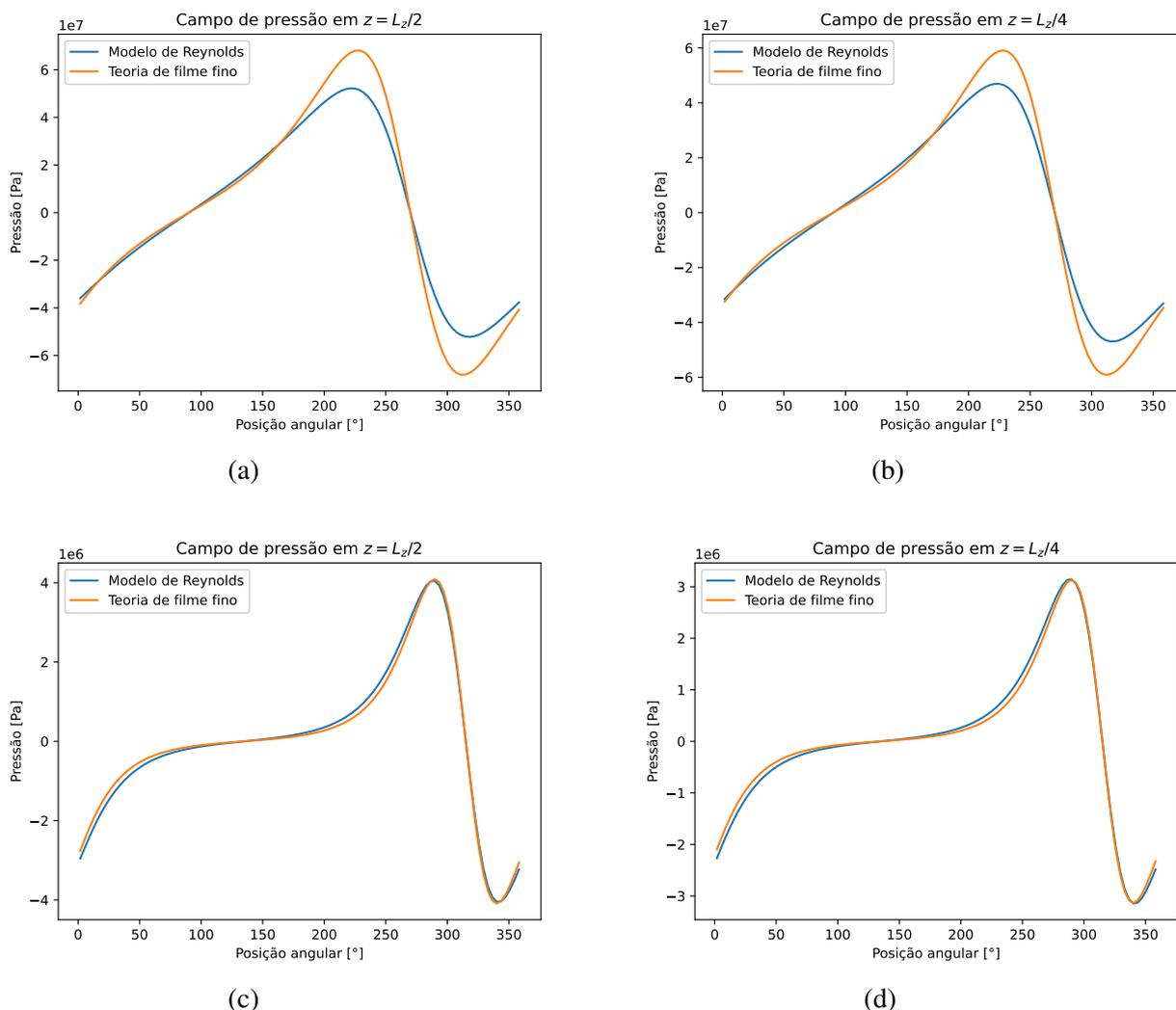
$$\left\{ \begin{array}{l} p(\theta, z = 0) = p(\theta, z = L_z) = 0 \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial v_z}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \Big|_{z=L_z} = \frac{\partial v_z}{\partial z} \Big|_{z=L_z} = 0. \end{array} \right.$$

A figura 20 mostra o campo de pressão obtido para duas configurações diferentes de mancais. A figura mostra o campo de pressão obtido no centro axial do mancal e também em 1/4 da dimensão axial do mancal. As configurações desses mancais estão dispostas na tabela 7.

A configuração das figuras 20c e 20d resultaram num campo de pressão muito próximos ao campo de pressão obtido pelo modelo de Reynolds enquanto o modelo as configuração das figuras 20a e 20b apresentam discrepâncias consideráveis.

Em investigações realizadas foi observados que essa diferença entre os resultado tende a aumentar, ou diminuir, com a variação da excentricidade do mancal. A figura 21 mostra os campos de pressão obtidos no centro axial do mancal variando apenas a excentricidade do mancal que apresentou maior divergência.

Figura 20 – Comparação campos de pressão para mancais tri-dimensionais.



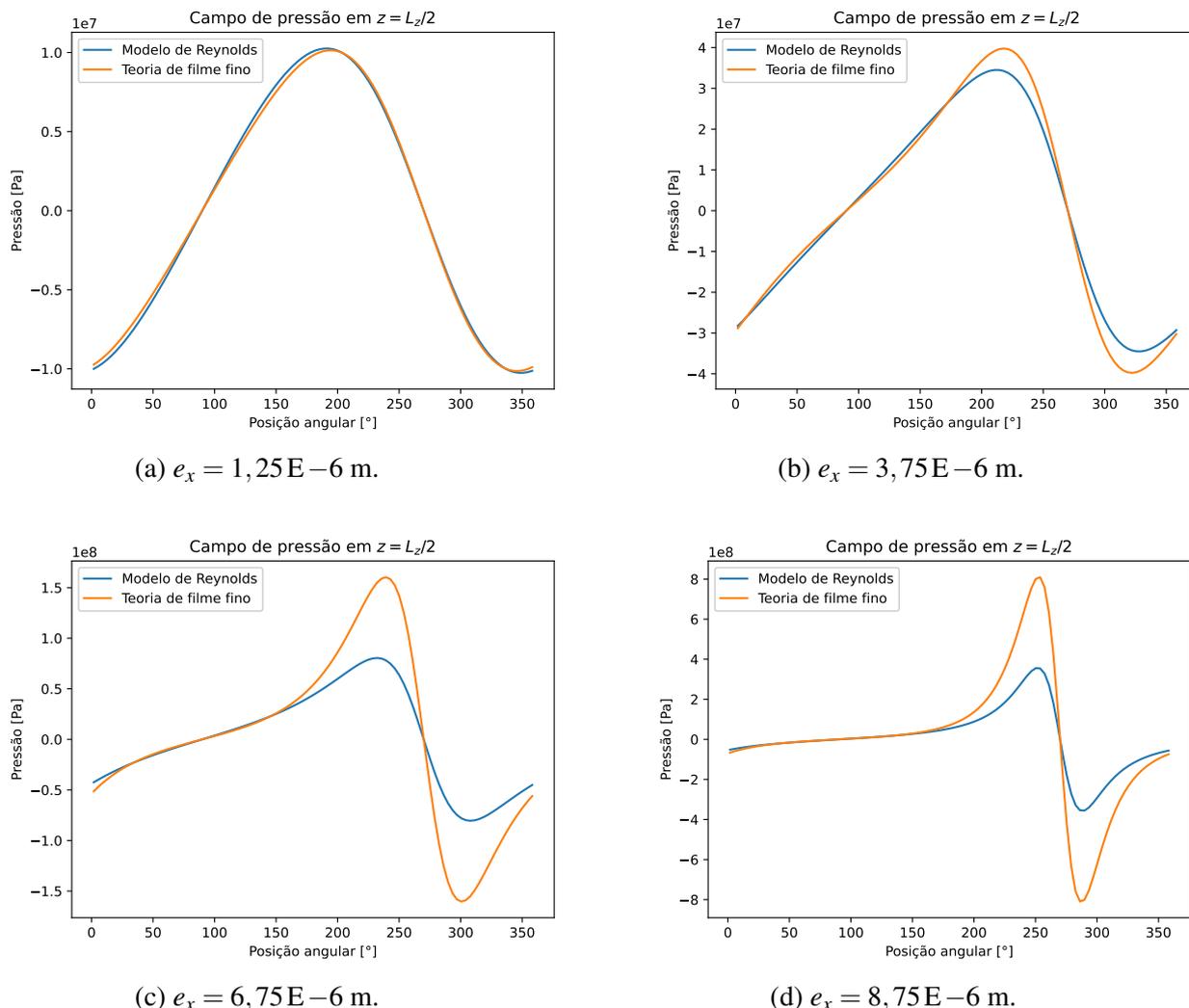
Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 7 – Propriedades termodinâmicas mancais bi-dimensionais.

Propriedade	Figuras 20a e 20b	Figuras 20c e 20d
Raio do mancal fixo $R_e$ [m]	2,01E-3	50,00E-3
Raio do eixo rotativo $R_i$ [m]	2,00E-3	49,8E-3
Comprimento do eixo $L_z$ [m]	13,00E-3	50,00E-3
Velocidade de rotação $\omega$ [RPM]	15000	1000
Excentricidade $e_x$ [m]	5,00E-6	1,41E-4
Ângulo de atitude $\theta_0$ [°]	270	315
Massa específica $\rho$ [kg / m <sup>3</sup> ]	1060	1060
Viscosidade dinâmica $\mu$ [Pa.s]	2,33E-2	2,33E-2
Número de Reynolds modificado $Re^*$ []	2,55E-4	8,81E-3

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 21 – Comparação campos de pressão para diferentes excentricidades mancal figura 20a.



Fonte: Elaborada pelo autor.

É notável que o erro tende a aumentar com o aumento da excentricidade do mancal. Após várias análises tanto no código computacional quando nas modelagens do problema constatou-se uma inconsistência na modelagem da tensão  $F_{ext,z}$  mostrada na equação 5.21. A constante  $\sqrt{2}$  foi imposta de forma prévia devido à boa convergência dos modelos bi-dimensionais utilizando a mesma constante. Contudo, com base nos resultados obtidos, esse fator de ajuste nessa modelagem não é o suficiente. Uma saída é a determinação de um fator de ajuste função da excentricidade do mancal.

### 6.3 Interação Fluido-Estrutura

Poucas são os textos encontrados sobre estudos de FSI em mancais utilizando a formulação transiente. O trabalho de Concli (2020) utiliza de software comercial para a determinação do

ponto de equilíbrio do mancal utilizando FSI.

Os eixos rotativos partem do centro do mancal ( $e_x = 0$ ) com uma certa carga aplicada sobre si então a força peso aplicada sobre esse eixo deve se equilibrar com a força exercida pelo gradiente produzido pelo fluido lubrificante na folga radial.

Os mancais de Concli tem as mesmas propriedades apresentadas do mancal apresentado na figura 20a variando a carga aplicada e a velocidade de rotação do eixo e, claro, a excentricidade e o ângulo de atitude, que agora são função do campo de pressão e do peso. A velocidade de rotação escolhida por Concli é de 328 rad/s para todos os mancais e as massas variam entre 0,05 kg e 1,00 kg. A figura 22 mostra uma comparação entre os resultados obtidos entre a modelagem FSI mostrada neste trabalho com os resultados obtidos por Concli, o autor não trás uma forma eficiente de comparar os resultados de forma quantitativa, porém é o suficiente para que se haja a comparação.

Mesmo não havendo uma fonte precisa de comparação quantitativa, os resultados qualitativos obtidos pela modelagem mostrada neste trabalho não se mostraram satisfatórias. A figura 22a mostra uma tendência a se aproximar do ponto de equilíbrio mostrado pela referência, porém alguma instabilidade o afasta deste ponto. Em ambos os casos, há a passagem do centro do eixo rotativo para o lado esquerdo do plano cartesiano ( $x < 0$ ), o que não ocorre nos resultados mostrados por Concli.

Uma possibilidade para a divergência entre os modelos é a modelagem ainda não satisfatória do termo  $F_{ext,z}$ . Ao se causar uma grande divergência no campo de pressão, ocorre também uma divergência na força exercida por esse campo ( $F_{p,y}$  e  $F_{p,x}$ ).

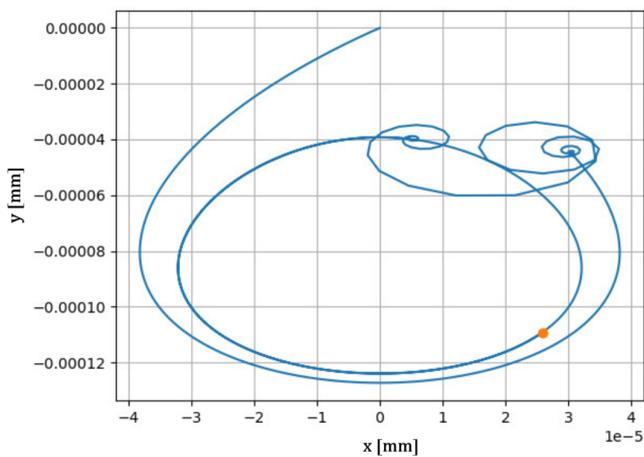
## 6.4 Violação da exigência $Re^* \ll 1$

Tendo as modelagem bi-dimensional cilíndrica apresentando bons resultados quando comparados ao modelo de Reynolds, pôde-se então explorar um pouco do poder da metodologia. O clássico modelo de Reynolds apresenta, como dito anteriormente, a exigência de que  $Re^* \ll 1$ . A título de curiosidade, foi comparado a configuração mostrada na figura 17c com uma velocidade de rotação do eixo de 5000 RPM e uma viscosidade  $\mu = 1,7E - 2$  Pa.s, resultando num  $Re^* = 45,8$ . A comparação é mostrada na figura 23.

Ao se violar a restrição do modelo de Reynolds, tem-se uma predominância das forças inerciais sobre as forças viscosas. Enquanto o modelo de Reynolds, que não considera as forças viscosas mantém o mesmo comportamento qualitativo, o proposto modelo apresenta uma grande alteração no comportamento qualitativo. Ao se violar a restrição do modelo de Reynolds, as forças inerciais se tornam muito predominantes em relação às forças viscosas. Assim, há o aparecimento do efeito Bernoulli, apresentando uma pressão mínima no mesmo ponto onde o valor de  $h$  também é mínimo. O modelo ainda não foi validado via software CFD para que se possa afirmar com

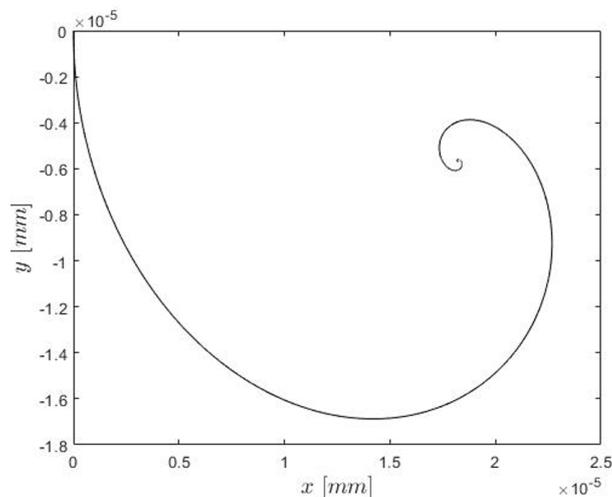
Figura 22 – Comparação resultados obtidos pela modelagem FSI.

Posição espacial do centro do eixo rotativo.



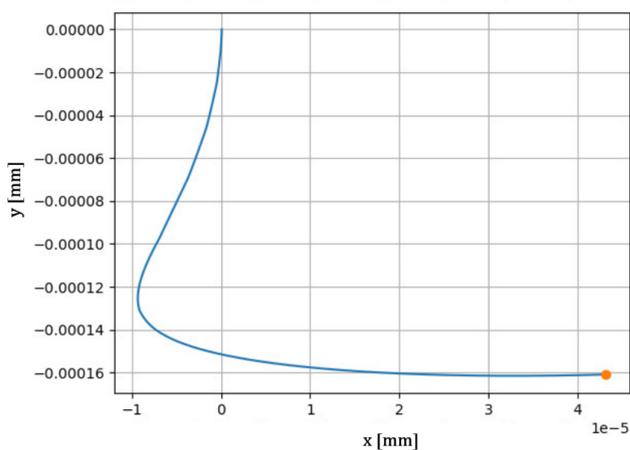
(a)  $m_e = 0,5$  kg.

Fonte: Elaborada pelo autor.



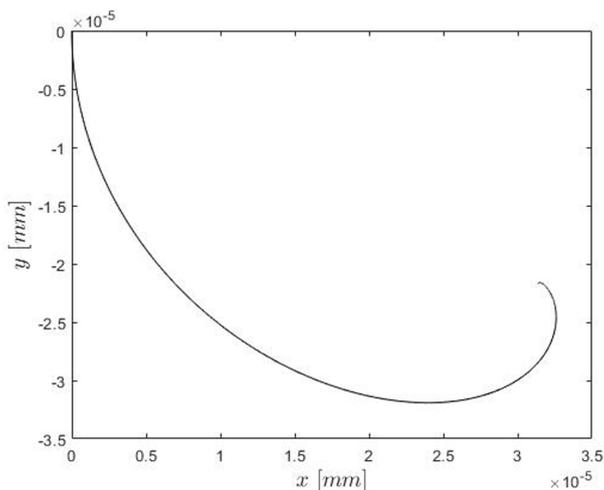
(b)  $m_e = 0,5$  kg.

Fonte: Concli (2020).



(c)  $m_e = 1,0$  kg.

Fonte: Elaborada pelo autor.

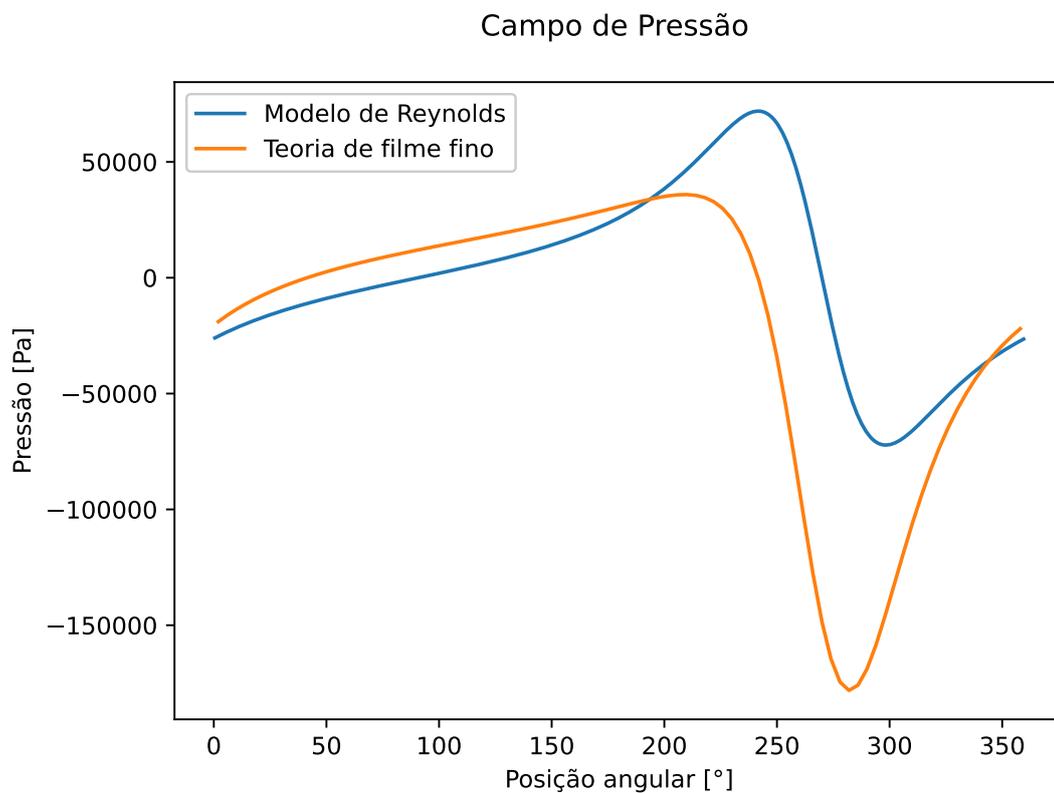


(d)  $m_e = 1,0$  kg.

Fonte: Concli (2020).

certeza que ele é válido também para essas condições onde a restrição não é respeitada.

Figura 23 – Comparação campo de tensão com  $Re^* > 1$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

---

## CONCLUSÃO

---

No presente trabalho desenvolveu-se e apresentou-se uma nova metodologia para a análise de mancais fluidodinâmicos utilizando teoria de filme fino. A metodologia proposta foi comparada com o clássico modelo de Reynolds.

Os resultados mostraram que o novo modelo obteve precisão elevada ao reproduzir os campos de pressão e velocidade calculados a partir do modelo de Reynolds. Apesar da alta precisão, os modelos diferem ligeiramente, o que é esperado, visto que a modelagem clássica não leva em conta nas suas equações os efeitos inerciais do fluido.

Os campos de temperatura também apresentaram resultados bastante satisfatórios indicando que a modelagem proposta é válida também para a análise térmica desse tipo de escoamento. A escolha por uma formulação explícita, apesar de menos estável, foi suficiente para demonstrar a eficácia do modelo.

Em coordenadas cilíndricas, o método também se apresentou convergente e estável, reproduzindo com precisão os campos de pressão e de velocidade angular para os diferentes mancais. A nova modelagem para a função da folga radial também obteve resultados significativamente positivos.

O modelo transiente possibilita o estudo do comportamento ao longo do tempo, antes de atingir o regime permanente, algo não abordado pelo clássico modelo. Isso permite que a análise mais realística de mancais, utilizando, por exemplo, efeitos compressíveis.

O proposto modelo utiliza de adaptações de modelagens já conhecidas na literatura para determinar os termos fontes, não havendo ainda uma modelagem específica para esses termos. É esperado em trabalhos futuros que haja um melhor desenvolvimento da modelagem desses termos. Apesar de ainda não validado utilizando softwares comerciais, a validação a partir do modelo de Reynolds, que é reconhecido e validado, é um forte indicativo da eficácia do método.

A interação fluido-estrutura ainda não mostrou convergência e/ou estabilidade. Contudo,

é, também, esperado em trabalhos futuros uma exploração de outros métodos mais estáveis e mais eficientes computacionalmente para resolver as equações do movimento, como o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Isso poderia aumentar a precisão e a eficácia dessa modelagem.

A metodologia se apresentou uma ferramenta forte e eficiente para a análise de mancais fluidodinâmicos, apresentando resultados precisos, principalmente nos casos bi-dimensionais, e ótimo potencial de otimização de tempo computacional. Estudos futuros poderão explorar a integração de modelos compressíveis para a modelagem da região de cavitação de forma mais realística.

---

## REFERÊNCIAS

---

AHMADKHAH, A.; KAKAEE, A. H. Three-dimensional thermohydrodynamic analysis of the effects of textured main bearing on lubricant density and viscosity in internal combustion engines. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology**, v. 236, p. 386 – 404, 2021. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:236612509>>. Citado na página 20.

ALVES, D. S. **Investigação do efeito térmico no comportamento dinâmico de mancais hidrodinâmicos**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 2011. Citado na página 17.

AU-YANG, M. K.; GALFORD, J. E. Fluid-structure interaction — a survey with emphasis on its application to nuclear steam system design. **Nuclear Engineering and Design**, v. 70, p. 387–399, 1982. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:111268487>>. Citado na página 20.

BARBOSA, J. S. **Análise de modelos termohidrodinâmicos para mancais de unidades geradoras Francis**. Tese (Doutorado), 2018. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/22546>>. Citado na página 40.

BERNOULLI, D. Hydrodynamica. **Commentarii academiae scientiarum imperialis petropolitanae**, v. 5, p. 128–168, 1738. Citado na página 71.

CASTRO, H. Fiori de. **Análise de mancais hidrodinâmicos em rotores sob instabilidade fluido-induzida**. Tese (Doutorado), 2007. Citado na página 17.

CAUCHY, A.-L. Méthode générale pour la résolution des systèmes d'équations simultanées. **Comptes Rendus de l'Académie des Sciences**, v. 1, n. 1, p. 536–538, 1829. Citado na página 19.

CAVALINI, A. J. **Detecção e identificação de trincas transversais incipientes em eixos horizontais flexíveis de máquinas rotativas**. Tese (Doutorado), 2013. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/14730>>. Citado na página 39.

ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. **Mecânica dos fluidos - 3.ed.** [S.l.]: AMGH Editora, 2015. Citado nas páginas 30 e 34.

CHAUHAN, A.; SEHGAL, R.; SHARMA, R. K. Investigations on the thermal effects in non-circular journal bearings. **Tribol. Int.**, Elsevier BV, v. 44, n. 12, p. 1765–1773, nov. 2011. Citado na página 20.

CONCLI, F. Equilibrium of a journal bearing: A simplified cfd-analytical coupled approach. In: **Advances in Fluid Mechanics XIII**. WIT Press, 2020. (AFM20). ISSN 1746-4471. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2495/AFM200021>>. Citado nas páginas 20, 39, 75 e 77.

COURANT, R.; FRIEDRICHS, K.; LEWY, H. On the partial difference equations of mathematical physics. **IBM J. Res. Dev.**, IBM, v. 11, n. 2, p. 215–234, mar. 1967. Citado na página 47.

FOURIER, J. B. J. **Théorie Analytique de la Chaleur**. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1822. Citado na página 36.

FRENE D NICOLAS, B. D. D. B. M. G. J. Hydrodynamic lubrication: bearings and thrust bearings. In: \_\_\_\_\_. [S.l.]: ELSEVIER, 1997. cap. 5. Citado na página 19.

HAASE, W. Unsteady aerodynamics including fluid/structure interaction. **Air Space Europe**, v. 3, n. 3, p. 83–86, 2001. ISSN 1290-0958. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1290095801900632>>. Citado na página 19.

HAMROCK, B. **Fundamentals of Fluid Film Lubrication**. McGraw-Hill, 1991. (McGraw-Hill series in mechanical engineering). ISBN 9780070259560. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=7dpSAAAAMAAJ>>. Citado na página 19.

HARLOW, F. H.; WELCH, J. E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. **Physics of Fluids**, AIP Publishing, v. 8, n. 12, p. 2182–2189, 1965. Citado na página 47.

HEIL, M. An efficient solver for the fully coupled solution of large-displacement fluid–structure interaction problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 193, n. 1–2, p. 1–23, jan. 2004. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2003.09.006>>. Citado na página 20.

HübNER, B.; SEIDEL, U.; ROTH, S. Application of fluid-structure coupling to predict the dynamic behavior of turbine components. **IOP Conference Series: Earth and Environmental Science**, IOP Publishing, v. 12, p. 012009, ago. 2010. ISSN 1755-1315. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1755-1315/12/1/012009>>. Citado na página 19.

HUGHES, W. F.; OSTERLE, F. Temperature effects in journal bearing lubrication. **ASLE Trans.**, Informa UK Limited, v. 1, n. 1, p. 210–212, jan. 1958. Citado na página 20.

INCROPERA, F. P. **Fundamentos de transferência de calor e de massa**. [S.l.: s.n.], 2008. Citado na página 34.

ISHIDA, Y.; YAMAMOTO, T. Linear and nonlinear rotordynamics: a modern treatment with applications. In: \_\_\_\_\_. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013. cap. 10. Citado na página 19.

JO, J. C. Fluid-structure interactions. In: . [s.n.], 2011. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:210659188>>. Citado na página 20.

KAMAT, H.; KINI, C. R.; SHENOY, S. B. Effect of cavitation and temperature on fluid film bearing using cfd and fsi technique: A review. **Archives of Computational Methods in Engineering**, Springer Science and Business Media LLC, v. 30, n. 3, p. 1623–1636, nov. 2022. ISSN 1886-1784. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s11831-022-09847-z>>. Citado na página 20.

KIM, H.; LEE, S.; SON, E.; LEE, S.; LEE, S. Aerodynamic noise analysis of large horizontal axis wind turbines considering fluid–structure interaction. **Renewable Energy**, v. 42, n. C, p. 46–53, 2012. Disponível em: <<https://ideas.repec.org/a/eee/renene/v42y2012icp46-53.html>>. Citado na página 19.

LEVEQUE, R. J. **Finite difference methods for ordinary and partial differential equations**. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1955. Citado na página 45.

- LI, Q.; ZHANG, S.; WANG, Y.; XU, W.-W.; WANG, Z. Investigations of the three-dimensional temperature field of journal bearings considering conjugate heat transfer and cavitation. **Ind. Lubr. Tribol.**, Emerald, v. 71, n. 1, p. 109–118, jan. 2019. Citado na página 20.
- LIU, H.; XU, H.; JIN, Z.; ELLISON, P. Lubrication analysis of journal bearing and rotor system using cfd and fsi techniques. In: \_\_\_\_\_. **Advanced Tribology**. Springer Berlin Heidelberg, 2009. p. 40–41. ISBN 9783642036538. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-03653-8\\_15](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-03653-8_15)>. Citado na página 20.
- LIU, J.-m.; LU, C.-j.; XUE, L.-p. Investigation of airship aeroelasticity using fluid-structure interaction. **Journal of Hydrodynamics**, Springer Science and Business Media LLC, v. 20, n. 2, p. 164–171, abr. 2008. ISSN 1878-0342. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S1001-6058\(08\)60042-6](http://dx.doi.org/10.1016/S1001-6058(08)60042-6)>. Citado na página 19.
- LORENZ, N.; OFFNER, G.; KNAUS, O. Fast thermo-elasto-hydrodynamic modeling approach for mixed lubricated journal bearings in internal combustion engines. **Proc. Inst. Mech. Eng. Pt. J: J. Eng. Tribol.**, SAGE Publications, v. 229, n. 8, p. 962–976, ago. 2015. Citado na página 20.
- MOTA, J. A.; MALDONADO, D. J. G.; VALÉRIO, J. V.; RITTO, T. G. Modeling of hydrodynamic bearings with a novel boundary parameterization approach. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 44, n. 5, p. 171, Apr 2022. ISSN 1806-3691. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s40430-022-03474-2>>. Citado nas páginas 19, 27 e 39.
- MOTA, J. d. A. **Estudo da teoria de lubrificação com parametrização diferenciada da geometria e aplicações em mancais hidrodinâmicos**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2020. Citado na página 17.
- NETO, A. d. S. **Escoamentos turbulentos: análise física e modelagem teórica**. [S.l.]: Composer, 2020. Citado na página 28.
- NORTON, R. L. **Projeto de Máquinas - 4ed**. [S.l.]: Bookman Editora, 2013. Citado na página 17.
- OCVIRK, F. W. Short-bearing approximation for full journal bearings. In: . [S.l.: s.n.], 1952. Citado na página 19.
- OLIVEIRA, F. M. d.; HUEBNER, R.; GRECO, M. Simulação de interação fluido-estrutura em dutos com escoamento interno utilizando software livre. **Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia**, v. 2, n. 35, p. 01–18, ago. 2017. Disponível em: <<https://periodicos.unb.br/index.php/ripe/article/view/21412>>. Citado na página 19.
- PINKUS, O. Closure to “Discussion of ‘Analysis of Elliptical Bearings’” (1956, Trans. ASME, 78, pp. 972–973). **Transactions of the American Society of Mechanical Engineers**, v. 78, n. 5, p. 973–973, 02 1956. ISSN 0097-6822. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.4013890>>. Citado na página 19.
- RAMOS, D. J. **Efeito da cavitação em mancais hidrodinâmicos no comportamento dinâmico de rotores [recurso eletrônico]**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 2019. Citado nas páginas 17 e 18.

REYNOLDS, O. Iv. on the theory of lubrication and its application to mr. beauchamp tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil. **Phil. Trans. R. Soc.**, v. 177, p. 157–234, 1886. Citado na página 18.

RIUL, J. A. **Estudo teórico e experimental de mancais hidrodinâmicos cilíndricos**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 1988. Citado na página 39.

SANTOS, G. **Transferência térmica conjugada utilizando fronteira imersa para solução de problemas bidimensionais**. Tese (Doutorado), 2022. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/36011>>. Citado na página 24.

SILVA, T. A. D.; CAVALINI, A. A.; NETO, A. S. Thin film theory applied to mathematical modeling of fluidynamic bearings. **COBEM 2023**, 12 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.26678/abcm.cobem2023.cob2023-0603>>. Citado na página 19.

SOMMERFELD, A. Zur theorie der schmiermittelreibung. **Z Math Phys**, v. 50, p. 97–155, 1904. Citado na página 19.

SPENCER, A. J. M. **Continuum Mechanics**. London, England: Longman, 1980. (Longman mathematical texts). Citado na página 24.

STIEBER, W. **Das Schwimmlager: Hydrodynamische Theorie des Gleitlagers**. VDI-Verlag, 1933. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=V5H-GwAACAAJ>>. Citado na página 19.

STRIKWERDA, J. C. **Finite difference schemes and partial differential equations**. [S.l.]: SIAM, 1989. Citado na página 46.

SWIFT, H. The stability of lubricating films in journal bearings. **Journal of the Institution of Civil Engineers**, v. 233, p. 289:322, 1932. Citado na página 19.

SZERI, A. Z. (Ed.). **Tribology**. Maidenhead, England: McGraw Hill Higher Education, 1980. Citado na página 27.

TAKAKAZU, S. Method for obtaining roots of polynomial equations. **Wazan Kaden**, v. 3, n. 1, p. 102–113, 1674. Citado na página 19.

UHKOETTER, S.; WIESCHE, S. aus der; KURSCH, M.; BECK, C. Development and validation of a three-dimensional multiphase flow CFD analysis for journal bearings in steam and heavy duty gas turbines. In: **Volume 7: Structures and Dynamics, Parts A and B**. [S.l.]: American Society of Mechanical Engineers, 2012. Citado na página 20.

VIERENDEELS, J.; DUMONT, K.; VERDONCK, P. A partitioned strongly coupled fluid-structure interaction method to model heart valve dynamics. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Elsevier BV, v. 215, n. 2, p. 602–609, jun. 2008. ISSN 0377-0427. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2006.04.067>>. Citado na página 20.

VILLAR, M. M. **Análise numérica detalhada de escoamentos multifásicos bidimensionais**. Tese (Doutorado) — UFU - Universidade Federal de Uberlândia, 2007. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/14664>>. Citado na página 47.

WANG, Y.; YIN, Z.; JIANG, D.; GAO, G.; ZHANG, X. Study of the lubrication performance of water-lubricated journal bearings with cfd and fsi method. **Industrial Lubrication and Tribology**, Emerald, v. 68, n. 3, p. 341–348, abr. 2016. ISSN 0036-8792. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1108/ILT-04-2015-0053>>. Citado na página 19.

WHITE, F. **Mecânica dos Fluidos**. McGraw-Hill, 1988. ISBN 9788580556070. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=3D1LDwAAQBAJ>>. Citado nas páginas 29 e 31.

WHITE, F. M. **VISCOUS FLUID FLOW**. [S.l.]: McGraw Hill LLC, 2022. Citado nas páginas 17, 18, 25, 27 e 36.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method: Basics v. 1**. 5. ed. Oxford, England: Butterworth-Heinemann, 2000. Citado na página 20.

ZIRKELBACK, N. L.; ANDRÉS, L. S. Effect of frequency excitation on force coefficients of spiral groove gas seals. **Journal of Tribology-transactions of The Asme**, v. 121, p. 853–861, 1999. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:111302155>>. Citado na página 27.