

THALES RENATO BERTOLAZZO TREVILATO

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO  
DE ROTORES EMBARCADOS EM REGIMES  
NÃO-LINEARES SOB A INFLUÊNCIA DE  
INCERTEZAS PARAMÉTRICAS



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBÊRLANDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2023

THALES RENATO BERTOLAZZO TREVILATO

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE  
ROTORES EMBARCADOS EM REGIMES NÃO-LINEARES  
SOB A INFLUÊNCIA DE INCERTEZAS PARAMÉTRICAS

**Tese** apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações

Orientador: Prof. Dr. Aldemir Ap Cavalini Jr (LMEst - UFU)

**UBERLÂNDIA-MG**

**2023**

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU  
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

T813  
2023 Trevilato, Thales Renato Bertolazzo, 1987-  
Análise do Comportamento Dinâmico de Rotores  
Embarcados em Regimes Não-Lineares sob a Influência de  
Incertezas Paramétricas [recurso eletrônico] / Thales  
Renato Bertolazzo Trevilato. - 2023.

Orientador: Aldemir Aparecido Cavalini Junior.  
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia,  
Pós-graduação em Engenharia Mecânica.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.te.2023.36>

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Engenharia mecânica. I. Cavalini Junior, Aldemir  
Aparecido ,1983-, (Orient.). II. Universidade Federal  
de Uberlândia. Pós-graduação em Engenharia Mecânica.  
III. Título.

CDU: 621

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:  
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091  
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074


**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica  
 Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902  
 Telefone: (34) 3239-4282 - www.posmecanicaufu.com.br - secposmec@mecanica.ufu.br


**ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO**

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Tese de Doutorado Acadêmico, nº 345, PPGEM				
Data:	13/02/2023	Hora de início:	08:00	Hora de encerramento:	10:30
Matrícula do Discente:	11813EMC011				
Nome do Discente:	Thales Renato Bertolazzo Trevilato				
Título do Trabalho:	Análise do Comportamento Dinâmico de Rotores Embarcados em Regime Não -Lineares Sob a Influência de Incertezas Paramétricas				
Área de concentração:	Mecânica dos Sólidos e Vibrações				
Linha de pesquisa:	Dinâmica de Sistemas Mecânicos				
Projeto de Pesquisa de vinculação:					

Reuniu-se por meio de videoconferência a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Professores Doutores: Valder Steffen Junior - FEMEC/UFU; Rogério Sales Gonçalves - FEMEC/UFU; Tiago Henrique Machado - UNICAMP; Fabian Andres Lara Molina - UFTM; e Aldemir Aparecido Cavallini Junior - FEMEC/UFU, orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Dr. Aldemir Aparecido Cavallini Junior, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Aldemir Aparecido Cavalini Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 13/02/2023, às 10:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Valder Steffen Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 13/02/2023, às 10:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Fabian Andres Lara Molina, Usuário Externo**, em 13/02/2023, às 10:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Rogério Sales Gonçalves, Professor(a) do Magistério Superior**, em 13/02/2023, às 10:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Tiago Henrique Machado, Usuário Externo**, em 13/02/2023, às 10:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **4259704** e o código CRC **3B92A056**.

---

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer, primeiramente, aos meus pais Margarete Silvana Bertolazzo Trevilato e Moacir Trevilato, por todo amor, carinho e ensinamentos que me dedicaram durante toda a minha vida. Gostaria de dedicar, em especial, esse trabalho ao meu pai, que infelizmente faleceu em 2021 e não pode ver a conclusão desse trabalho. A meu irmão Thiago Vinicius Bertolazzo Trevilato.

A minha esposa, Larissa Alves Trevilato, que sempre esteve ao meu lado durante todo o tempo, pela sua compressão, paciência, incentivo e amor sem o qual eu não teria chegado aonde estou.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavalini Jr, não só por sua orientação, mas também por seu conhecimento, paciência e amizade. O empenho e compreensão do Professor Aldemir foram primordiais para a conclusão desse trabalho, por isso, muito obrigado.

A todas os colegas do Laboratório de Mecânica de Estruturas (LMEst) Prof. José Eduardo Tannús Reis, pelo companheirismo e momentos de aprendizado sem os quais os nossos trabalhos não seriam possíveis. Refiro-me a “nossos” trabalhos, pois formamos uma equipe, na essência da palavra. Em especial, agradeço ao colega Marcelo Samora Sousa Júnior, pela ajuda e companheirismo durante as várias horas realizando os experimentos para nossas teses.

Aos professores e técnicos da Faculdade de Engenharia Mecânica (FEMEC) pelo convívio e aprendizado durante a minha formação.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia – Estruturas Inteligentes em Engenharia (INCT – EIE), Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), agradeço o auxílio financeiro.

Trevilato, T. R. B. Análise do comportamento dinâmico de rotores embarcados em regimes não-lineares sob a influência de incertezas paramétricas. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Uberlândia, 2023

## RESUMO

O entendimento sobre a dinâmica de máquinas rotativas, bem como a capacidade de modelar e prever o comportamento físico desses sistemas tem escalado rapidamente nas últimas décadas. As novas aplicações visam a otimização de aumento de desempenho e diminuição de custos, sem reduzir segurança e conforto, o que tem forçado os sistemas rotativos ao extremo.

Sendo assim, esta Tese de Doutorado apresenta uma investigação numérica e testes experimentais sobre o comportamento não-linear de sistemas rotativos submetidos a excitações pela base e sob a influência de incertezas paramétricas. Um modelo que considera não-linearidades devido a grandes deslocamentos é obtido a partir das equações de Lagrange e do método dos Elementos Finitos, de forma a permitir vibrações devidas ao movimento da base do rotor. Posteriormente, o modelo determinístico foi expandido para contemplar mancais com rigidez estocástica. A análise numérica investigou uma máquina rotativa composta de um eixo flexível contendo um disco rígido sustentado por dois mancais.

Uma bancada de testes foi construída e utilizada na validação do modelo, permitindo a comparação do modelo matemático implementado com as medidas experimentais, onde foram obtidas as respostas de vibração do rotor nos domínios do tempo e da frequência. Os resultados obtidos demonstram a representatividade do modelo proposto.

Palavras Chaves: Dinâmica de Rotação, Rotores Embarcados, Método do Elementos Finitos, Não-Linearidades, Incertezas Paramétricas

Trevilato, T. R. B. Analysis of the Dynamic Behavior of Onboard Rotors in Non-Linear Regimes Under the Influence of Parametric Uncertainties. Doctoral thesis. Federal University of Uberlândia, 2023

## **ABSTRACT**

The understanding of rotordynamics, as well as the ability to model and predict the physical behavior of these systems, has escalated rapidly in recent decades. The new applications aim to optimize performance and reduce costs, without reducing safety and comfort, which has forced rotating systems to the extreme.

Therefore, this Doctoral Thesis presents a numerical and experimental tests on the non-linear behavior of rotating systems subjected to base excitations and under the influence of parametric uncertainties. A model that considers nonlinearities due to large displacements is obtained from the Lagrange equations and the Finite Element method, in order to allow vibrations due to the motion of the rotor base. Subsequently, the deterministic model was expanded to include bearings with stochastic stiffness. Numerical analysis investigated a rotating machine composed of a flexible shaft containing a hard disk supported by two bearings.

A test bench was built and used to validate the model, allowing the comparison of the implemented mathematical model with the experimental measurements, where the rotor vibration responses were obtained in the time and frequency domains. The results obtained demonstrate the representativeness of the proposed model.

Keywords: Rotordynamics, Onboard Dynamics, Finite Element Method, Nonlinearities, Parametric Uncertainties



## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Representação Esquemática De Um Rotor Embarcado (Duchemin, 2003). .....	10
Figura 2.2 – Transformação De Coordenadas Do Referencial $R_s$ Ao Referencial $R$ (Lalanne; Ferraris, 1998). .....	10
Figura 2.3 – Transformação De Coordenadas Do Referencial $R_0$ Ao Referencial $R_s$ ..	11
Figura 2.4 – Massa De Desbalanceamento (Sousa, 2017). .....	14
Figura 2.5 – Coeficientes De Rigidez E Amortecimento Dos Mancais (Adaptado De: Cavalini Jr, 2013). .....	18
Figura 2.6 – Representação Do Elemento De Disco (Adaptado De: Cavalini Jr, 2013). 19	
Figura 2.7 – Graus De Liberdade Associados Ao Elemento Finito Do Eixo (Adaptado De: Cavalini Jr, 2013). .....	21
Figura 4.1: Representação Esquemática Utilizada Nas Análises Numéricas. ....	34
Figura 4.2: Diagrama De Campbell Da Máquina Rotativa (Adaptado: Cavalini Jr, 2013). .....	34
Figura 4.3: Respostas De Vibrações No Plano $S_8$ Para Excitações Senoidais Na Base Do Rotor Com Frequência Supersíncronas Da Velocidade De Rotação. ....	36
Figura 4.4: Respostas De Vibrações No Plano $S_{28}$ Para Excitações Senoidais Na Base Do Rotor Com Frequência Supersíncronas Da Velocidade De Rotação. ....	37
Figura 4.5: Orbitas Determinado No Plano $S_8$ Para Excitações Senoidais Na Base Do Rotor Com Frequência Supersíncronas Da Velocidade De Rotação. ....	38
Figura 4.6: Orbitas Determinado No Plano $S_8$ Para Excitações Senoidais Na Base Do Rotor Com Frequência Supersíncronas Da Velocidade De Rotação. ....	39

Figura 4.7: Transformada Discreta De Fourier (Discrete Fourier Transform / Dft), Para O Caso De $\Gamma = 50 \text{ M/S}^2$ Com Frequência Supersíncronas Da Velocidade De Rotação.	40
Figura 4.8: Respostas De Vibrações No Plano $S_8$ Para Excitações Senoidais Na Base Do Rotor Para O Caso De $\Gamma = 50 \text{ M/S}^2$ , Com Frequência Supersíncronas Da Velocidade De Rotação E Sem Efeito Da Gravidade.	41
Figura 4.9: Respostas De Vibrações No Plano $S_8$ Para Excitações Senoidais Na Base Do Rotor Para O Caso De $\Gamma = 50 \text{ M/S}^2$ , Com Frequência Supersíncronas Da Velocidade De Rotação E Sem Efeito Da Gravidade, Para Rotor Com 10mm De Diâmetro.	41
Figura 4.10: Respostas De Vibrações No Plano $S_8$ Para Excitações Senoidais Na Base Do Rotor Com Frequência Subsíncronas.	42
Figura 4.11: Respostas De Vibrações No Plano $S_{28}$ Para Excitações Senoidais Na Base Do Rotor Com Frequência Subsíncronas.	43
Figura 4.12: Transformada Discreta De Fourier (Discrete Fourier Transform / Dft), Para O Caso De $\Gamma = 50 \text{ M/S}^2$ .	44
Figura 4.13: Orbitas Determinado No Plano $S_8$ Para Excitações Senoidais Na Base Do Rotor Com Frequência Subsíncronas, Com $\Gamma = 50 \text{ M/S}^2$ .	45
Figura 4.14: Respostas De Vibrações No Plano $S_8$ Para Excitações Senoidais Na Base Do Rotor Nas Direções $x_s$ E $z_s$ Com Frequência Subsíncronas.	46
Figura 4.15: Transformada Discreta De Fourier (Discrete Fourier Transform / Dft) Da Direção $x_s$ Para O Caso Da Excitação Subsíncrona Nas Direções $x_s$ E $z_s$ .	48
Figura 4.16: Convergência Rmsd (Root-Mean-Square Deviation) Normalizado.	49
Figura 4.17: Envelopes Para Excitações Supersíncronas; Plano $S_8$ .	51
Figura 4.18: Envelopes Para Excitações Supersíncronas; Plano $S_{28}$ .	52
Figura 4.19: Envelopes Para Excitações Subsíncronas; Plano $S_8$ .	53
Figura 4.20: Envelopes Para Excitações Subsíncronas; Plano $S_{28}$ .	54
Figura 4.21: Envelopes Para Excitações Nas Duas Direções; Plano $S_8$ .	55
Figura 4.22: Envelopes Para Excitações Nas Duas Direções; Plano $S_{28}$ .	56

Figura 5.1: Bancada De Teste.....	58
Figura 5.2: Representação Esquemática Da Máquina Rotativa. ....	58
Figura 5.3: Frfs Numéricas E Experimentais Da Máquina Rotativa. ....	60
Figura 5.4: Resposta De Vibração Da Máquina Rotativa Operando A 1200 Rpm. ....	61
Figura 5.5: Excitador Eletrodinâmico Dongling Vibration®.....	62
Figura 5.6: Resposta De Vibração Considerando A Excitação Por Impacto De 5 M/S <sup>2</sup> . .....	63
Figura 5.7: Resposta De Vibração Considerando A Excitação Por Impacto De 25 M/S <sup>2</sup> . .....	64
Figura 5.8: Dft Da Resposta De Impacto De 25 M/S <sup>2</sup> De Amplitude. ....	65
Figura 5.9: Acelerações Senoidais Aplicadas A Base Do Rotor.....	66
Figura 5.10: Resposta De Vibração Para Excitação Senoidal.....	67
Figura 5.11: Dft Das Respostas Senoidais Para $N=1/3$ E $N = 1/2$ .....	68
Figura 5.12: Análises De Convergência.....	70
Figura 5.13: Envelopes De Incertezas. ....	71
Figura 5.14: Comparação Dos Envelopes De Incertezas ....	72

## LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIACÕES

$C$	Centro geométrico do eixo
$d$	Distância entre a massa de desbalanceamento e o centro do eixo
$d_{xx}$	Coefficiente de amortecimento do mancal
$d_{xz}$	Coefficiente de amortecimento do mancal
$d_{zx}$	Coefficiente de amortecimento do mancal
$d_{zz}$	Coefficiente de amortecimento do mancal
$D_m$	Matriz de amortecimento do mancal
$D_D$	Matriz clássica de efeito giroscópico do disco
$D_D^*$	Matriz de efeito giroscópico do disco relacionada com o movimento da base
$D_E$	Matriz de efeito giroscópico do eixo
$D_1$	Matriz relacionada com as matrizes elementares do eixo
$D_2$	Matriz relacionada com as matrizes elementares do eixo
$D^{total}$	Matriz de amortecimento do sistema rotativo
$E$	Módulo de elasticidade do eixo
$f_r$	Autofunções da função de covariância
$F_{mu}$	Força de sustentação do mancal na direção $xS$
$F_{wu}$	Força de sustentação do mancal na direção $zS$
$F_D^*$	Vetor de forças do disco relacionado com o movimento da base
$F_E$	Vetor de forças do eixo
$F_d$	Força devido aos desbalanceamentos
$F_{du}$	Força devido aos desbalanceamentos ao longo da direção $x$
$F_{dv}$	Força devido aos desbalanceamentos ao longo da direção $z$
$F_{d\theta}$	Força devido aos desbalanceamentos ao longo da rotação $\theta$
$F_{d\psi}$	Força devido aos desbalanceamentos ao longo da rotação $\psi$

$\mathbf{F}^{total}$	Vetor de força do sistema rotativo
$\mathbf{F}_E^*$	Vetor de força do sistema rotativo relacionada com o movimento da base
$G$	Módulo de cisalhamento do eixo
$H$	Espaço estocástico
$I_D$	Tensor de momentos de inércia de massa do disco
$I_{Dx}$	Momento de inércia de massa do disco em torno da direção $x$
$I_{Dy}$	Momento de inércia de massa do disco em torno da direção $y$
$I_{Dz}$	Momento de inércia de massa do disco em torno da direção $z$
$I_x$	Momento de inércia de área do eixo na direção $x$
$I_y$	Momento de inércia de área do eixo na direção $y$
$I_z$	Momento de inércia de área do eixo na direção $z$
$k_{xx}$	Coefficiente de rigidez do mancal
$k_{xz}$	Coefficiente de rigidez do mancal
$k_{zx}$	Coefficiente de rigidez do mancal
$k_{zz}$	Coefficiente de rigidez do mancal
$\mathbf{K}_m$	Matriz de rigidez do mancal
$\bar{\mathbf{K}}_m$	Matriz de rigidez do mancal média
${}_{es}\mathbf{K}_m$	Matriz de rigidez do mancal estocástica
$\ominus\mathbf{K}_m$	Matriz de rigidez aleatória elementar dos mancais
$\mathbf{K}_{nl}$	Parcela não-linear da matriz de rigidez do eixo
$\mathbf{K}_D^*$	Matriz de rigidez do disco relacionada com o movimento da base
$\mathbf{K}_E$	Parcela linear da matriz de rigidez do eixo
$\mathbf{K}_1$	Matriz relacionada com as matrizes elementares do eixo
$\mathbf{K}_2$	Matriz relacionada com as matrizes elementares do eixo
$\mathbf{K}_3$	Matriz relacionada com as matrizes elementares do eixo
$\mathbf{K}^{total}$	Matriz de rigidez do sistema rotativo

$\mathbf{K}_E^*$	Matriz de efeito rigidez do sistema rotativo relacionada com o movimento da base
$\mathbf{K}_{rot}$	Rigidez de rotação devido ao acoplamento
$L$	Comprimento do eixo
$L_{cor,x}$	Comprimentos de correlação nas direções $x$
$L_{cor,z}$	Comprimentos de correlação nas direções $z$
$m_D$	Massa do disco
$m_u$	Massa de desbalanceamento
$\mathbf{M}_D$	Matriz clássica de massa do disco
$\mathbf{M}_E$	Matriz de massa do eixo
$\mathbf{M}_1$	Matriz relacionada com as matrizes elementares do eixo
$\mathbf{M}_2$	Matriz relacionada com as matrizes elementares do eixo
$\mathbf{M}_3$	Matriz relacionada com as matrizes elementares do eixo
$\mathbf{M}^{total}$	Matriz de massa do sistema rotativo
$\mathbf{N}_1$	Vetor de funções de forma de um elemento de viga associa ao vetor $\mathbf{q}_u$
$\mathbf{N}_1$	Vetor de funções de forma de um elemento de viga associa ao vetor $\mathbf{q}_w$
$n$	constante
$P_p$	Medida de probabilidade
$\mathbf{q}_D$	Vetor de coordenadas generalizadas associado ao disco
$\mathbf{q}_E$	Vetor de deslocamentos nodais associado ao eixo
$\mathbf{q}_u$	Vetor de deslocamentos nodais associado ao nó 1 do elemento finito de eixo
$\mathbf{q}_w$	Vetor de deslocamentos nodais associado ao nó 2 do elemento finito de eixo
$R_0$	Referencial inercial
$R_s$	Referencial fixo na base do rotor
$R$	Referencial fixo ao disco

$R_1$	Referencial intermediário
$R_2$	Referencial intermediário
$R_3$	Referencial intermediário
$R_4$	Referencial intermediário
$S$	Área da secção transversal do eixo
$t$	Tempo
$T_D$	Energia cinética do disco
$T_E$	Energia cinética do eixo
$T_u$	Energia cinética da massa de desbalanceamento
$\hat{u}$	Campo de deslocamento
$u_C$	Amplitude de vibração do disco expressa em $R_S$ com relação a $R_0$ na direção $x_S$
$u_E$	Amplitude de vibração do eixo expressa em $R_S$ com relação a $R_0$ na direção $x_S$
$u_e$	Deslocamentos nas direções $x$
$u_0$	Deslocamentos da linha média do eixo na direção $x$
$U$	Energia de deformação do eixo
$\overline{V}_{D R_S}^{R_0}$	Velocidade de translação do ponto $D$ expressa em $R_S$ com relação a $R_0$
$\overline{V}_{C R_S}^{R_0}$	Velocidade de translação do disco expressa em $R_S$ com relação a $R_0$
$v_C$	Amplitude de vibração do disco expressa em $R_S$ com relação a $R_0$ na direção $y_S$
$v_E$	Amplitude de vibração do disco expressa em $R_S$ com relação a $R_0$ na direção $y_S$
$v_e$	Deslocamentos nas direções $y$
$V_1$	Vetor relacionada com as matrizes elementares do eixo
$V_2$	Vetor relacionada com as matrizes elementares do eixo

$V_3$	Vetor relacionada com as matrizes elementares do eixo
$V_4$	Vetor relacionada com as matrizes elementares do eixo
$V_5$	Vetor relacionada com as matrizes elementares do eixo
$V_6$	Vetor relacionada com as matrizes elementares do eixo
$x_S$	Eixo de referência no ponto $O$
$x_O$	Eixo de referência no ponto $A$
$x$	Eixo de referência no ponto $R$
$x_1$	Eixo do referencial $R_1$
$x_2$	Eixo do referencial $R_2$
$x_3$	Eixo do referencial $R_3$
$x_4$	Eixo do referencial $R_4$
$x_A$	Valor do vetor $\overline{OA}$ na direção $x$
$X$	Valor do vetor $\overline{OA}$ na direção $x_S$
$y_S$	Eixo de referência no ponto $O$
$y_O$	Eixo de referência no ponto $A$
$y$	Eixo de referência no ponto $R$
$y_1$	Eixo do referencial $R_1$
$y_2$	Eixo do referencial $R_2$
$y_3$	Eixo do referencial $R_3$
$y_4$	Eixo do referencial $R_4$
$y_A$	Valor do vetor $\overline{OA}$ na direção $y$
$Y$	Valor do vetor $\overline{OA}$ na direção $y_S$
$z_S$	Eixo de referência no ponto $O$
$z_O$	Eixo de referência no ponto $A$
$z$	Eixo de referência no ponto $R$



$z_1$	Eixo do referencial $R_1$
$z_2$	Eixo do referencial $R_2$
$z_3$	Eixo do referencial $R_3$
$z_4$	Eixo do referencial $R_4$
$z_A$	Valor do vetor $\overline{OA}$ na direção $z$
$Z$	Valor do vetor $\overline{OA}$ na direção $z_s$
$w$	Translação do ponto C ao longo da direção $z_s$
$w_C$	Amplitude de vibração do disco expressa em $R_s$ com relação a $R_0$ na direção $z_s$
$w_E$	Amplitude de vibração do disco expressa em $R_s$ com relação a $R_0$ na direção $z_s$
$w_e$	Deslocamentos nas direções $z$
$w_0$	Deslocamentos da linha média do eixo na direção $z$
<b>W</b>	Vetor peso dos componentes do sistema rotativo
$\overline{OA}$	Vetor posição do ponto $O$ ao ponto $A$
$\overline{AC}$	Vetor posição do ponto $A$ ao ponto $C$
$\overline{OC}$	Vetor posição do ponto $O$ ao ponto $C$
$\overline{OD}$	Vetor posição do ponto $O$ ao ponto $D$
$\alpha$	Rotação angular em torno de $z_s$
$\alpha_s$	Rotação angular do eixo de coordenadas $R_0$ em relação ao referencial $R_s$ na direção $z_s$
$\beta$	Rotação angular em torno de $x_3$
$\beta_s$	Rotação angular do eixo de coordenadas $R_0$ em relação ao referencial $R_s$ na direção $z_s$
$\gamma$	Rotação angular em torno de $y$
$\gamma_s$	Rotação angular do eixo de coordenadas $R_0$ em relação ao referencial $R_s$ na direção $z_s$
$\psi$	Rotação angular em torno de $z_s$
$\theta$	Rotação angular em torno de $x_1$

$\Theta$	Subconjunto de ocorrências contendo possíveis resultados
$\phi$	Rotação angular em torno de $y$
$\Omega$	Velocidade de rotação do eixo
$\Omega_p$	Espaço amostral de os possíveis resultados das variáveis aleatórias
$\rho$	Densidade do material do eixo
$\mu$	Posição angular
$\lambda_r$	Autovalores da função de covariância
$\Lambda_p$	Coleção de eventos possíveis tendo uma probabilidade bem definida
$\Omega_R^{R_s}$	Velocidade angular de $R$ em relação a $R_s$
$\bar{\Omega}_{R_s}^{R_0}$	Velocidade angular de $R_s$ em relação a $R_0$
$\bar{\Omega}_R^{R_0}$	Velocidade angular de $R$ em relação a $R_0$
$\omega_x$	Velocidade angular do eixo de coordenadas $R$ em relação ao referencial $R_0$ na direção $x$
$\omega_y$	Velocidade angular do eixo de coordenadas $R$ em relação ao referencial $R_0$ na direção $y$
$\omega_z$	Velocidade angular do eixo de coordenadas $R$ em relação ao referencial $R_0$ na direção $z$
$\xi_r$	Conjunto de variáveis aleatórias não correlacionadas e independentes
BW	Backward Whirl – Precessão inversa
EF	Elementos Finitos
FRF	Função de Resposta em Frequência
<b>FRF</b> <sub>exp</sub>	Função de Resposta em Frequência experimental
<b>FRF</b> <sub>num</sub>	Função de Resposta em Frequência numérica
FW	Forward Whirl – Precessão direta
RPM	Rotações por minuto

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS .....</b>	<b>V</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIACÕES .....</b>	<b>VIII</b>
<b>CAPÍTULO I: INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
<b>1.1 Introdução e Revisão Bibliográfica.....</b>	<b>1</b>
1.1.1 Contextualização do Trabalho .....	1
1.1.2 Não-linearidades Geométricas .....	3
1.1.3 Incertezas Paramétricas .....	4
<b>1.2 Objetivos do Trabalho.....</b>	<b>6</b>
<b>1.3 Estrutura do Trabalho .....</b>	<b>7</b>
<b>CAPÍTULO II:MODELO MATEMÁTICO.....</b>	<b>9</b>
<b>2.1 Modelo Matemático de Rotores Embarcados com Não-Linearidades Geométricas.....</b>	<b>9</b>
2.1.1 Dinâmica de Rotores Embarcados .....	9
2.1.2 Energia Cinética do disco .....	13
2.1.3 Energia Cinética da Massa de Desbalanceamento .....	14
2.1.4 Energia Cinética do Eixo.....	15
2.1.5 Energia Potencial do Eixo .....	15
2.1.6 Trabalho Virtual das Forças de Sustentação dos Mancais .....	17
<b>2.2 Formulação de Elementos Finitos.....</b>	<b>18</b>
2.2.1 Incorporação do Disco a Formulação de Elementos Finitos .....	18
2.2.2 Formulação das Matrizes de Elementos Finitos do Eixo .....	20
2.2.3 Matrizes de Rigidez do Eixo.....	25
2.2.4 Incorporação da Massa de Desbalanceamento e das Forças de Sustentação dos Mancais .....	26
<b>CAPÍTULO III:MODELO ESTOCÁSTICO .....</b>	<b>28</b>
<b>3.1 Modelo Estocástico por expansão de Karhunen-Loève .....</b>	<b>28</b>
<b>CAPÍTULO IV:APLICAÇÕES NUMÉRICAS.....</b>	<b>33</b>

<b>4.1</b>	<b>Simulações com Não-Linearidades Geométricas .....</b>	<b>33</b>
<b>4.2</b>	<b>Resultados Estocásticos .....</b>	<b>49</b>
	<b>CAPÍTULO V: RESULTADOS EXPERIMENTAIS.....</b>	<b>57</b>
<b>5.1</b>	<b>Bancada de Testes .....</b>	<b>57</b>
<b>5.2</b>	<b>Validação Experimental do Modelo Não-Linear Embarcado .....</b>	<b>61</b>
<b>5.3</b>	<b>Análises Estocásticas .....</b>	<b>70</b>
	<b>CAPÍTULO VI: CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS .....</b>	<b>74</b>
<b>6.1</b>	<b>Perspectivas Futuras .....</b>	<b>75</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>76</b>
	<b>ANEXO A: INTEGRAÇÃO NUMÉRICA .....</b>	<b>82</b>

# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

### 1.1 Introdução e Revisão Bibliográfica

#### 1.1.1 Contextualização do Trabalho

Segundo Lalanne e Ferraris (1998), uma máquina rotativa é composta por um ou mais eixos que podem ter diâmetros variáveis ao longo da direção longitudinal, discos de variados diâmetros e espessuras e mancais alocados em diferentes posições. Tais máquinas são usadas na humanidade a milênios, entretanto sua aplicação inicial era baseada apenas em empirismo e no chamado “tentativa e erro”, sendo que o primeiro estudo com rigor científico em dinâmica de rotação foi realizado por volta de 140 anos atrás (ISHIDA e YAMAMOTO; 2012).

O marco inicial desses estudos é considerado o trabalho pioneiro de W. J. Macquorn Rankine (RANKINE, 1869), mesmo esse apresentando uma conclusão errada e corrigida posteriormente por outras pesquisas, como Dunkerley (1894), o primeiro pesquisador que usou o termo “velocidade crítica” para se referir a velocidade de na qual o rotor entra em ressonância, e Jeffcott (1919), que propôs fundamentos simplificados para o estudo de dinâmica de rotação.

Rotores em base fixa foram extensivamente estudados, sendo seu comportamento dinâmico é bem estabelecido (LALANNE e FERRARIS; 1998), entretanto, uma vasta gama de aplicações apresenta deslocamento imposto pela base, como motores de aviões. No entanto, o número de trabalhos que abordam essa área específica é consideravelmente reduzido, como destaca Rangavajhala, Tiwari e Kannababu (2018).

Contudo, pode-se destacar o trabalho de Subbiah et al. (1985) que estudaram a resposta do rotor em que a base está sujeita a excitação de um ruído branco através de uma abordagem modal. Kim, Yang e Lin (1986) analisaram a resposta de vibração de uma máquina rotativa com eixo flexível submetida a acelerações aleatórias (sísmicas) na sua base. Já Berlioz e Ferraris (1986) estudaram o efeito que uma base flexível tem sobre

a modelagem do rotor e sobre o diagrama de Campbell da máquina rotativa considerada, enquanto Ganessian e Sankar estudaram, em dois trabalhos (1993-a e 1993-b), o comportamento dinâmico de rotores excitados pela base através do método das múltiplas escalas.

Bonello e Brennan (2001) estudaram modelos de rotores de base flexível usando técnicas de impedância mecânica. A análise experimental de rotores excitados pela base também foi realizada no trabalho de Driot; Lamarque e Berlioz (2006).

Han e Chu (2014) estudaram o comportamento dinâmico de um sistema de engrenagens com excitações aplicadas na base. O modelo proposto pelos autores considera 3 movimentos de rotação da base (*rolling*, *pitching* e *yawing*). Foi utilizado um método numérico para obter as respostas laterais e torcionais do sistema de engrenagens. O estudo mostrou que o movimento de *rolling* apresentou maior influência no comportamento dinâmico do sistema, enquanto os outros dois tipos de movimento (*pitching* e *yawing*) tiveram um efeito diminuto.

Liu et al. (2016) investigaram a influência da excitação pela base nas forças de sustentação geradas em um mancal hidrodinâmico. O modelo de elementos finitos do rotor levou em conta um eixo flexível, um disco rígido e dois mancais hidrodinâmicos, em que é considerada a velocidade da base. A influência da amplitude e frequência do movimento da base no comportamento dinâmico do sistema foi investigada e os autores mostraram que a velocidade da base não deve ser ignorada em alguns casos para determinar as forças de sustentação geradas nos mancais.

No contexto do Laboratório de Mecânica de Estruturas “José Eduardo Tannús Reis” (LMEst), onde o trabalho foi realizado, é preciso destacar os trabalhos desenvolvidos no contexto de máquinas rotativas embarcadas. abordados no âmbito de dinâmica de rotação. Sousa Jr (2017) investigou, numericamente, o comportamento dinâmico de uma máquina rotativa composta por um eixo horizontal flexível contendo dois discos e apoiada em suas extremidades do sistema rotativo quando submetida a uma excitação pela base, comparando as diferenças nas respostas para a base fixa e em movimento. Posteriormente, uma máquina rotativa composta por um eixo horizontal flexível apoiada em suas extremidades e um disco rígido foi utilizada na validação experimental do modelo adotado.

Del Claro (2020) desenvolveu dois modelos de rotor embarcado de material compósito: um baseado na Teoria Clássica de Vigas e outro na Teoria Unificada. Três

bancadas de testes experimentais foram e utilizadas na validação destas metodologias, permitindo uma boa representação do comportamento dinâmico dos rotores.

### 1.1.2 Não-linearidades Geométricas

Na natureza a regra, na verdade, é o comportamento não linear, sendo o comportamento linear não uma exceção exatamente, mas sim uma simplificação que é feita para facilitar o estudo e a compreensão da natureza, uma vez que tentar compreendê-la em sua plenitude é uma tarefa colossal e talvez impossível. Então essas simplificações, essas hipóteses linearizadoras, são não só importantes, mas necessárias para a compreensão e posterior aplicação na mudança da natureza ao redor do ser humano.

Ainda assim, um modelo criado a partir dessas hipóteses precisa ser representativo acerca dos fenômenos estudados. Para muitos casos, esse modelo linear cumpre esse papel, entretanto, em outros casos, algumas das hipóteses tradicionalmente usadas (que linearizam o modelo) não são mais respeitadas. Tais casos têm se tornado cada vez mais comum no atual cenário das pesquisas científicas que estão tentando atender a demanda da sociedade por sistemas mais eficientes e seguros mantendo níveis aceitáveis de conforto e custo. Então não é surpresa que esses requisitos forcem que modelos não-lineares sejam estudados e utilizados.

Um cuidado especial deve ser tomado na análise de modelos não-lineares, pois não-linearidades tem potencial para gerar um comportamento dinâmico bastante diferentes das esperadas em sistemas lineares (Savi, 2004; Gerges, 2013), podendo até mesmo apresentar comportamento caótico (Purcina, 2016).

As fontes de não-linearidades podem ser de natureza local ou global, sendo normalmente dependentes do comportamento do material, da natureza das deformações e das condições de contorno (Worden e Tomlinson, 2001). No tocante ao comportamento do material a forma mais básica de um comportamento não linear se dá quando a tensão não é mais linearmente proporcional à deformação, outro caso é quando a resposta ao carregamento é diferente da resposta ao descarregamento (Zienkiewicz e Taylor, 2000). Um caso comum de não-linearidade devido à natureza do carregamento é o caso de grandes deslocamentos, que são de interesse desse trabalho, na qual os carregamentos que a estrutura é sujeita induzem rotações que não são mais tão pequenas, como é preconizado pela teoria da elasticidade linear, mas agora moderados (Zienkiewicz e Taylor, 2000).

É importante destacar que quando o modelo adotado possui não-linearidades, as equações diferenciais que o constituem também são não-lineares, que por si só já impacta nos vários métodos que podem ser adotadas para a resolução dessas equações, sejam eles métodos analíticos ou numéricos. Nesse caso, não é mais possível utilizar métodos baseados no princípio da superposição, sendo necessário aplicar métodos específicos para lidar com sistemas não lineares, como por exemplo, o balanço harmônico, utilizado quando se deseja tratar o problema no domínio da frequência.

Para atender os requisitos desse cenário, eixos cada vez mais esbeltos e operando em maiores velocidades de rotação são cada vez mais utilizados, de tal forma que os fenômenos que merecem destaques nesse cenário são os de caráter não-linear. Portanto, torna-se importante a busca por técnicas de modelagem de eixos esbeltos de interesse industrial sujeitas a perturbações mecânicas que levam ao surgimento de grandes deslocamentos e rotações moderadas.

Quando se trabalha no domínio do tempo muitas vezes é necessário utilizar métodos de integração numérica das equações do movimento adaptadas para resolver o problema não-linear. Neste trabalho será usado um método de Newmark modificado.

No contexto de rotores embarcados pode-se destacar o trabalho de Dakel, Baguet e Dufour (2014) que investigaram o comportamento dinâmico não-linear de um rotor embarcado com mancais hidrodinâmicos. Os autores propuseram um modelo de elementos finitos, com diferentes geometrias do eixo e do disco (simétrico ou assimétrico). O modelo possui 6 graus de liberdade (3 translações e 3 rotações) e considera o comportamento não-linear do filme de óleo do mancal. Foi utilizado um integrador de Newmark para resolver as equações do movimento que são dependentes do tempo.

Lei e Yushu (2014) apresentaram a simulação dinâmica de um sistema rotativo não-linear considerando como excitação uma manobra de voo conhecida como Herbst. Uma abordagem de controle de vibração foi incorporada ao sistema. Os resultados forneceram uma melhor compreensão do efeito da manobra sobre o comportamento dinâmico do rotor.

### 1.1.3 Incertezas Paramétricas

Um aspecto importante durante a fase de concepção do projeto de estruturas dinâmicas em grandes deslocamentos é a consideração de incertezas nos parâmetros de



projeto. Na maioria das vezes, estruturas complexas exigem que seja considerado na modelagem o caráter incerto das informações obtidas dos ensaios experimentais. Isto evita a realização de vários experimentos para se determinar os limites de uma abordagem determinística de estruturas não-lineares. Para contornar esse problema pode-se utilizar um método de programação de incertezas paramétricas, como o método dos elementos finitos estocásticos, na tentativa de responder às diferentes exigências dos projetos.

Todo sistema dinâmico sofre com a presença de incertezas provenientes das mais diversas fontes, sejam elas devidas a simplificações e aproximações realizadas na formulação do modelo usado para representar o sistema, ou devidas a variações nos parâmetros usados no sistema. Assim, é de grande valor um modelo que leve em conta algumas dessas incertezas, melhorando sua capacidade de representar o sistema que se deseja analisar.

Nesse âmbito, e em conjunto com o estudo de rotores, tem-se o trabalho de Lara-Molina et. al. (2019) que realizaram um estudo de sensibilidade de um rotor flexível a determinados parâmetros incertos, em especial, o impacto sobre órbitas e o diagrama de Campbell. Nessa mesma direção, também pode-se destacar o trabalho de Barbosa et. al. (2020) que também realizaram uma análise de sensibilidade, mas sobre um rotor flexível de material compósito modelado pela Teoria Simplificada de Viga Homogeneizada.

Nos últimos anos a área de análise de incertezas tem recebido uma maior atenção da comunidade científica e grandes desenvolvimentos estão em curso, especialmente para a dinâmica de sistemas rotativos, sendo a simulação de Monte Carlo (MC) o método mais utilizado. A simulação de MC é um método de amostragem que pode gerar amostras independentes de variáveis aleatórias, com base em suas distribuições de probabilidade, e resolver o problema determinístico para cada realização. Através da coleta de um conjunto de soluções, os momentos estatísticos podem ser calculados (SOBOL, 1994).

Embora fácil de aplicar, é necessário um grande número de amostras para obter convergência, o que significa altos custos computacionais. Há também os métodos não amostrais como o Método de Perturbação (KLEIBER e HIEN, 1992), Expansão de Neumann (ZHU ET AL., 1992), Caos Polinomial (GHANEM e SPANOS, 1991), método de Galerkin estocástico (LE MAÎTRE e KNIO, 2010) entre outros (MACHADO, 2016). Outro método amplamente utilizado é a expansão de Karhunen-Loève (KL). A expansão de KL pode ser usada para discretizar o campo aleatório representando-o por variáveis aleatórias ortogonais e funções determinísticas contínuas (GHANEM e SPANOS, 1991).

Pelo exposto nesta seção, fica claro que a compreensão das incertezas em sistemas embarcados sujeitos a efeitos lineares tem sido objeto de intensa investigação científica. No entanto, apesar dos avanços significativos nessa área, uma lacuna notável ainda persiste na literatura acadêmica: a falta de pesquisa específica sobre incertezas quando expostas a efeitos não-lineares limita nossa compreensão das complexas interações entre incertezas e não-linearidades, essenciais para uma modelagem precisa e confiável de sistemas reais. Portanto, é essencial preencher essa lacuna na literatura científica, investigando mais profundamente as implicações das incertezas em contextos não-lineares e desenvolvendo abordagens robustas e eficazes para lidar com esses desafios.

Para esse fim, o modelo aplicado utiliza Expansão de Karhunen-Loève (KL) para representar o campo aleatório, sendo que as tiragens das amostras são feitas através do método do Hiper-Cubo Latino. Neste trabalho foi escolhida a expansão de KL devido as suas principais propriedades:

- Não acumulação dos autovalores em torno de valores que não sejam zero, assim é possível ordená-los de forma de séries decrescente convergindo para zero;
- A base das autofunções de covariância é ótima, no sentido que o erro quadrático médio resultante do truncamento após o M-ésimo termo é minimizado;
- Devido a ortonormalidade das autofunções, pode-se obter uma forma fechada para cada variável aleatória da série;
- A expansão de Karhunen-Loeve sempre sub-representa a variância real do campo.

## 1.2 Objetivos do Trabalho

O objetivo geral da tese é analisar os efeitos de não-linearidades geométricas no comportamento dinâmico de uma máquina rotativa embarcada na presença de incertezas. O que levanta a questão de porquê estudar rotores embarcados sobre a influência desses dois fenômenos: não-linearidades geométricas e incertezas. A resposta mais simples é: para rotores embarcados, quando as condições de uso tornam um desses fenômenos relevante, geralmente torna o outro fenômeno relevante também.

Tome-se por exemplo uma aeronave ao realizar uma manobra na qual os rotores nela embarcados são expostos a esforços que podem levá-los a operar em um regime não-

linear, bem como a incertezas em parâmetros da sua operação, em especial se a aeronave está em operação a um longo tempo.

Posto isso, o sistema que será estudado possui um eixo flexível suportado por mancais de rolamento. Para realizar a análise, um modelo de Elementos Finitos do rotor foi construído. A formulação dos esforços dinâmicos decorrentes da excitação aplicada no rotor, e que configuram o sistema como sendo embarcado, segue as equações apresentadas no trabalho de Kapitaniak et. al. (2018).

As não-linearidades são introduzidas pelo relaxamento de uma das hipóteses comumente realizada: os deslocamentos transversais do eixo não são mais considerados pequenos (mas ainda dentro do regime elástico do material). A introdução dessas não-linearidades e resolução das equações do movimento resultante, através de elementos finitos, utiliza a abordagem proposta por Zienkiewicz (2000). Por fim, incertezas nas rigidezes dos mancais são introduzidas onde o campo aleatório é discretizado utilizando o método de expansão de Karhunen-Loève e, assim, gerando envelopes para os resultados no domínio do tempo.

Assim, a tese de doutorado defendida é a proposição de um modelo de rotor embarcado que considera as não-linearidades decorrentes de grandes deslocamentos, bem como as incertezas paramétricas nas rigidezes dos mancais que podem afetar o seu desempenho. O modelo proposto foi validado experimentalmente, o que comprova a sua eficácia e confiabilidade em situações reais. Com essa contribuição, espera-se avançar no conhecimento e desenvolvimento de sistemas de rotor embarcado mais precisos e robustos, capazes de enfrentar desafios complexos em diversas aplicações industriais.

### **1.3 Estrutura do Trabalho**

Esta tese está organizada em seis capítulos, a começar por esse primeiro capítulo que apresenta uma introdução histórica e contextualização do problema, além dos objetivos apresentados.

No Capítulo II o modelo matemático de rotor embarcado com não-linearidades geométricas é apresentado. A formulação matemática do rotor embarcado se dá através das equações de Lagrange sendo que a não-linearidade advém da segunda parcela do tensor de Green-Lagrange. Finalmente a equação do movimento, modelada em elementos finitos, é apresentada.

A extensão da modelagem determinística para o caso estocástico é apresentada no Capítulo III. O interesse é obter uma modelagem que permita o projeto e análise do sistema dinâmico não-linear na presença de incertezas paramétricas.

O Capítulo IV mostra os resultados numéricos obtidos, tanto para casos não-lineares determinísticos e estocásticos. O Capítulo V apresenta a validação experimental dos resultados numéricos.

Finalmente, no Capítulo VI são apresentadas as conclusões gerais perspectivas para trabalhos futuros.

## CAPÍTULO II

### MODELO MATEMÁTICO

Este capítulo apresenta a formulação matemática do modelo de elementos finitos estocástico do rotor embarcado sob não-linearidades geométricas. Para tal, serão utilizadas as equações de Lagrange para obter as equações diferenciais que representam o comportamento do rotor embarcado.

#### 2.1 Modelo Matemático de Rotores Embarcados com Não-Linearidades Geométricas

##### 2.1.1 Dinâmica de Rotores Embarcados

Tomando como referência a representação esquemática de um rotor embarcado mostrada na Fig. 2.1 na qual três eixos de referência são utilizados (DUCHEMIN; BERLIOZ; FERRARI, 2006),  $R_0(x_0, y_0, z_0)$  é o sistema de coordenadas inercial,  $R_s(x_s, y_s, z_s)$  é o referencial móvel fixo na base do rotor e  $R(x, y, z)$  o sistema de referência móvel fixo ao disco.

Neste caso,  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\phi$  descrevem o movimento do referencial  $R$  em relação ao sistema de coordenadas  $R_s$ . Para se obter a orientação de  $R$  inicialmente tem-se uma rotação  $\psi$  em torno de  $z_s$ , em que se chega ao referencial intermediário  $R_1(x_1, y_1, z_1)$ ; uma subsequente rotação  $\theta$ , agora em torno de  $x_1$ , leva a outro referencial intermediário  $R_2(x_2, y_2, z_2)$ ; por fim, uma rotação  $\phi$  é realizada em torno de  $y$ , sendo que  $y//y_2$ , como apresenta a Fig. 2.2, sendo  $\Omega$  a velocidade de rotação do rotor e  $\phi = \Omega t$ .

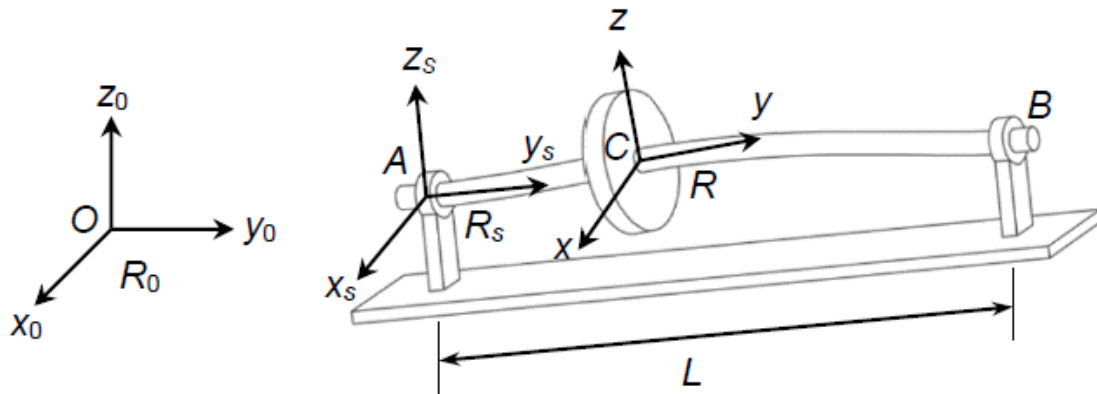


Figura 2.1 – Representação Esquemática de um rotor embarcado (DUCHEMIN, 2003).

A partir das transformações mostradas, a velocidade instantânea de rotação do sistema de coordenadas  $R$  com relação à  $R_s$  é dada pela Eq. (2.1).

$$\Omega_R^{R_s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}_{R_s} + \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_2} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\phi} \\ 0 \end{Bmatrix}_R = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \cos(\phi) - \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

onde  $[ \dot{\cdot} ]$  indica a derivada temporal da variável  $[ \cdot ]$ .

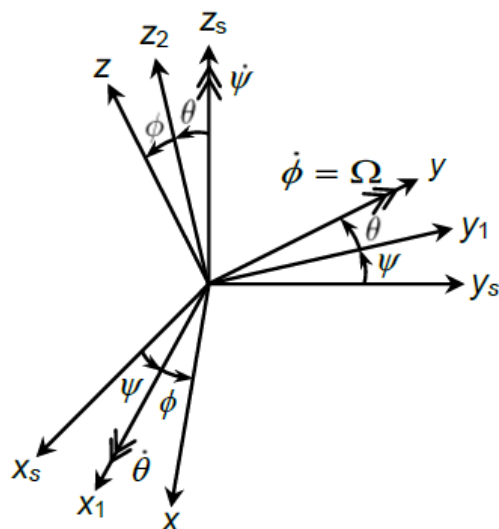


Figura 2.2 – Transformação de coordenadas do referencial  $R_s$  ao referencial  $R$  (LALANNE; FERRARIS, 1998).

Novamente é preciso uma sequência de rotações para obter-se a orientação do referencial  $R_0$  a partir de  $R_s$ , partindo de uma rotação  $\alpha$  em torno de  $z_s$ , que resulta no sistema de coordenadas  $R_3(x_3, y_3, z_3)$ ; seguida de uma rotação  $\beta$  em torno da nova direção  $x_3$ , levando ao referencial  $R_4(x_4, y_4, z_4)$ ; por fim uma rotação de  $\gamma$  em relação ao eixo  $y$ , sendo que  $y \parallel y_3$ .

Assim sendo, a velocidade angular do sistema de coordenadas  $R_s$  com relação à  $R_0$  é dada pela Eq. (2.2).

$$\bar{\Omega}_{R_s}^{R_0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix}_R + \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_3} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix}_{R_s} = \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \cos \gamma - \dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma \\ \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta \\ \dot{\beta} \sin \gamma + \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma \end{Bmatrix}_{R_s} = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}_s \\ \dot{\beta}_s \\ \dot{\gamma}_s \end{Bmatrix}_{R_s} \quad (2.2)$$

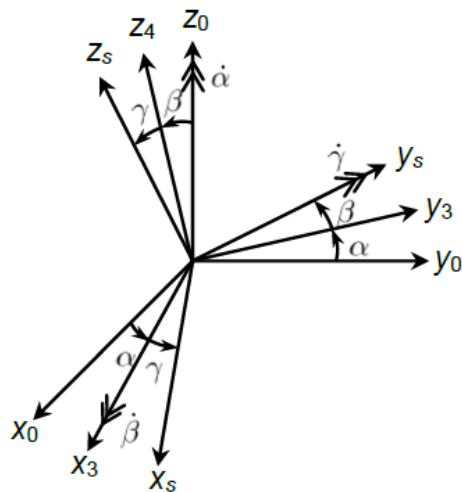


Figura 2.3 – Transformação de coordenadas do referencial  $R_0$  ao referencial  $R_s$ .

Conseqüentemente, o vetor que define a velocidade angular do referencial  $R$  em relação à  $R_0$  é dado pela Eq. (2.3).

$$\begin{aligned}
\vec{\Omega}_R^{R_0} = \vec{\Omega}_{R_s}^{R_0} = \vec{\Omega}_R^{R_s} &= \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}_s \\ \dot{\beta}_s \\ \dot{\gamma}_s \end{Bmatrix}_{R_s} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}_{R_s} + \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_s} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\phi} \\ 0 \end{Bmatrix}_R = \\
&\left\{ \begin{aligned} &(\dot{\alpha}_s \cos \psi + \dot{\beta}_s \sin \psi + \dot{\theta}) \cos \phi - ((\dot{\alpha}_s \sin \psi - \dot{\beta}_s \cos \psi) \sin \theta + (\dot{\gamma}_s + \dot{\psi}) \cos \theta) \sin \phi \\ &\quad - (\dot{\alpha}_s \sin \psi - \dot{\beta}_s \cos \psi) \cos \theta + (\dot{\gamma}_s + \dot{\psi}) \sin \theta + \dot{\phi} \\ &(\dot{\alpha}_s \cos \psi + \dot{\beta}_s \sin \psi + \dot{\theta}) \sin \phi + ((\dot{\alpha}_s \sin \psi - \dot{\beta}_s \cos \psi) \sin \theta + (\dot{\gamma}_s + \dot{\psi}) \cos \theta) \cos \phi \end{aligned} \right\} = \\
&= \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}_R
\end{aligned} \tag{2.3}$$

A posição da base do rotor (vetor  $\overline{OA}$ ; Fig. 1) em relação ao referencial  $R_0$  é definida pelas coordenadas  $x_A$ ,  $y_A$  e  $z_A$ , como mostra a Eq. (2.4). As coordenadas  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  descrevem a posição deste mesmo vetor em relação ao referencial  $R_s$ .

$$\begin{aligned}
\overline{OA} &= \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{Bmatrix}_{R_0} + \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}_{R_s} = \\
&\left\{ \begin{aligned} &(x_A \cos \alpha + y_A \sin \alpha) \cos \gamma - [z_A \cos \beta + (x_A \sin \alpha - y_A \cos \alpha) \sin \beta] \sin \gamma \\ &\quad z_A \sin \beta - (x_A \sin \alpha - y_A \cos \alpha) \cos \beta \\ &(x_A \cos \alpha + y_A \sin \alpha) \sin \gamma + [z_A \cos \beta + (x_A \sin \alpha - y_A \cos \alpha) \sin \beta] \cos \gamma \end{aligned} \right\}_{R_s}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

A posição do ponto  $C$  (vetor  $\overline{AC}$ ; Fig. 2.1) em relação ao referencial  $R_s$  é definido pela Eq. (2.5). A Eq. (2.6) descreve o vetor  $\overline{OC}$  em relação ao referencial  $R_s$ .

$$\overline{AC} = \begin{Bmatrix} u(y,t) \\ y \\ w(y,t) \end{Bmatrix}_{R_s} \tag{2.5}$$



$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = \begin{Bmatrix} X + u(y, t) \\ Y + y \\ Z + w(y, t) \end{Bmatrix}_{R_s} \quad (2.6)$$

Os deslocamentos  $u$  e  $w$  são variáveis, enquanto  $y$  é constante, sendo a vibração lateral no ponto  $C$  descrita pelas translações dos eixos  $u$  e  $w$  das direções  $x_s$  e  $z_s$ , respectivamente, enquanto as rotações ao longo do eixo em torno dessas mesmas direções são dadas por  $\theta$  e  $\psi$ , respectivamente.

### 2.1.2 Energia Cinética do disco

O disco é assumido rígido e, portanto, é caracterizado apenas pela sua energia cinética,  $T_D$ , que é obtida a partir da Eq. (2.7).

$$T_D = \frac{1}{2} m_D \left( \overline{V}_{C R_s}^{R_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \overline{\Omega}_{R_0}^{R_0} I_D \overline{\Omega}_{R_0}^{R_0} \quad (2.7)$$

onde  $m_D$  é a massa do disco.

A Eq.(2.8) apresenta a velocidade  $\overline{V}_{C R_s}^{R_0}$  de translação do disco expressa em  $R_s$  com relação a  $R_0$ ,  $\overline{\Omega}_{R_0}^{R_0}$  é o vetor de velocidade angular (Eq. (2.3)) e  $I_D$  é o tensor de momentos de inércia de massa (Eq. (2.9)).

$$\begin{aligned} \overline{V}_C^{R_0} &= \left\{ \frac{d\overline{OC}}{dt} \right\}_{R_0} + \left\{ \frac{d\overline{OC}}{dt} \right\}_{R_s} + \overline{\Omega}_{R_s}^{R_0} \times (\overline{OC})_{R_s} = \\ &= \begin{Bmatrix} \dot{X} + \dot{u} + \dot{\beta}_s (Z + w) - \dot{\gamma}_s (Y + y) \\ \dot{Y} + \dot{\gamma}_s (X + u) - \dot{\alpha}_s (Z + w) \\ \dot{Z} + \dot{w} + \dot{\alpha}_s (Y + y) - \dot{\beta}_s (X + u) \end{Bmatrix}_{R_s} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{v}_C \\ \dot{w}_C \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$I_D = \begin{bmatrix} I_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dz} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

onde  $I_{Dx}$ ,  $I_{Dy}$  e  $I_{Dz}$  são os momentos de inércia da massa do disco associados com as direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente (referencial  $R$ ; Fig. 2.1). Já  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  e  $\omega_z$  são as velocidades angulares definidas na Eq. (2.3).

### 2.1.3 Energia Cinética da Massa de Desbalanceamento

Tomando como referência a Fig. 2.4 que apresenta a massa de desbalanceamento  $m_u$  localizada no ponto  $D$  a uma distância  $d$  a partir do centro geométrico do eixo na posição  $C$ , a expressão da energia cinética para a massa desbalanceada  $m_u$  é dada por:

$$T_u = \frac{1}{2} m_u \left( \overline{V}_{D R_s}^{R_0} \right)^2 \quad (2.10)$$

onde  $\overline{V}_{D R_s}^{R_0}$  é a velocidade de translação do ponto  $D$  expressa em  $R_s$  em relação ao referencial  $R_0$  (Fig. 2.4), dada por:

$$\begin{aligned} \overline{V}_{D R_s}^{R_0} &= \left\{ \frac{d\overline{OD}}{dt} \right\}_{R_0} + \left\{ \frac{d\overline{OD}}{dt} \right\}_{R_s} + \overline{\Omega}_{R_s}^{R_0} \times (\overline{OD})_{R_s} = \\ &= \left\{ \begin{aligned} \dot{X} + \dot{u} + d\Omega \cos \Omega t + \dot{\beta}_s (Z + w + d\Omega \cos \Omega t) - \dot{\gamma}_s (Y + y) \\ \dot{Y} + \dot{\gamma}_s (X + u + d\Omega \sin \Omega t) - \dot{\alpha}_s (Z + w + d\Omega \cos \Omega t) \\ \dot{Z} + \dot{w} - d\Omega \sin \Omega t + \dot{\alpha}_s (Y + y) - \dot{\beta}_s (X + u - d\Omega \sin \Omega t) \end{aligned} \right\}_{R_s} \end{aligned} \quad (2.11)$$

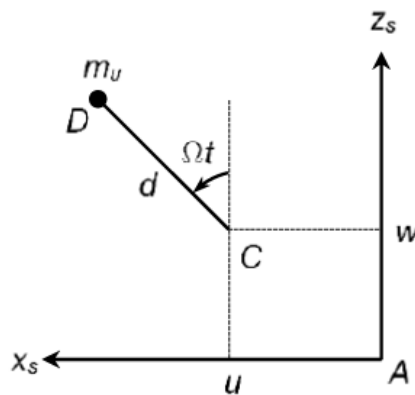


Figura 2.4 – Massa de desbalanceamento (SOUSA, 2017).

Neste caso, a posição do ponto  $D$  (vetor  $\overline{OD}$ ) em relação ao referencial  $R_s$  é definida pela Eq. (2.12).

$$\overline{OD} = \overline{OC} + \overline{CD} = \begin{cases} X + u(y,t) + d \cos \Omega t \\ Y + y \\ Z + w(y,t) + d \sin \Omega t \end{cases}_{R_s} \quad (2.12)$$

#### 2.1.4 Energia Cinética do Eixo

A expressão da energia cinética para o eixo é dada por:

$$T_E = \frac{1}{2} \rho S \int_0^L (\dot{u}_E^2 + \dot{v}_E^2 + \dot{w}_E^2) dy + \frac{1}{2} \rho \int_0^L [I_x \omega_y^2 + I_y \omega_x^2 + I_z \omega_z^2] dy \quad (2.13)$$

As velocidades de translação  $\dot{u}_E$ ,  $\dot{v}_E$  e  $\dot{w}_E$  são derivadas a partir de uma formulação semelhante à apresentada na Eq. (2.8) em relação a qualquer posição  $y$  ao longo do eixo (veja a Fig. 2.1). Enquanto,  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$  são os momentos de inércia de área do eixo de acordo com as direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente;  $\rho$  é a densidade do material,  $S$  é a área da secção transversal do eixo e  $L$  é o comprimento do eixo.

#### 2.1.5 Energia Potencial do Eixo

Para o cálculo da energia potencial (de deformação)  $U$  do eixo há de se destacar que essa não é modificada pelo movimento da base do rotor (DUCHEMIN, 2003), já que a deformação do eixo depende apenas das restrições adotadas (nesse caso, impostas através dos mancais).

Assim sendo, para formulação da energia de deformação é necessário, inicialmente, descrever o campo de deslocamento, dado pela Eq. (2.14):

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u_e \\ v_e \\ w_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0(y,t) \\ \mathbf{0} \\ w_0(y,t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -x \frac{\partial u_e}{\partial y} - z \frac{\partial w_e}{\partial y} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

onde  $u_e$ ,  $v_e$  e  $w_e$  são os deslocamentos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, enquanto  $u_0$  e  $w_0$  são deslocamentos da linha média do eixo nas direções  $x$  e  $z$ , respectivamente. Para determinar o campo de deformações é preciso aplicar o campo de deslocamentos ao tensor de Green-Lagrange, dado por:

$$e(\hat{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}(\nabla\hat{\mathbf{u}} + \nabla\hat{\mathbf{u}}^T) + \frac{1}{2}\nabla\hat{\mathbf{u}}\nabla\hat{\mathbf{u}}^T \quad (2.15)$$

onde  $\nabla\cdot$  é o operador gradiente. Quando se trabalha com pequenos deslocamentos o termo com a multiplicação dos gradientes, ou seja,  $1/2(\nabla\mathbf{u}\nabla\mathbf{u}^T)$  é desprezível, entretanto, quando se trabalha com grandes deslocamentos esse termo não pode ser totalmente desprezado, como será mostrado adiante. Assim, as seis componentes cartesianas do tensor de Green-Lagrange são dadas por:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \\ e_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ e_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ e_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Aqui é assumido que a seção transversal do eixo não se altera durante a deformação e, portanto  $e_{xx} = 0$ ,  $e_{zz} = 0$  e  $e_{xz} = 0$ . Note que a substituir da Eq. (2.15) na Eq. (2.16) resulta em uma grande quantidade de termos, felizmente, vários desses termos podem ser desprezados, como demonstrado por Kapitaniak et. al. (2020). Assim, o campo de deformações, apenas com os termos restantes, fica:

$$\begin{aligned}
e_{yy} &= -w_{0,y} z - u_{0,y} x + \frac{1}{2} w_{0,y}^2 z^2 + \frac{1}{2} u_{0,y}^2 x^2 + \frac{1}{2} w_{0,y}^2 + \frac{1}{2} u_{0,y}^2 \\
e_{xy} &= u_{0,y} w_{0,y} z + u_{0,y} u_{0,y} x \\
e_{yz} &= w_{0,y} w_{0,y} z + w_{0,y} u_{0,y} x
\end{aligned} \tag{2.17}$$

ou na forma matricial:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} e_{yy} \\ e_{xy} \\ e_{yz} \end{Bmatrix} &= z \begin{Bmatrix} -w_{0,y} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + x \begin{Bmatrix} -u_{0,y} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} 0 \\ u_{0,y} w_{0,y} \\ w_{0,y} w_{0,y} \end{Bmatrix} + x \begin{Bmatrix} 0 \\ u_{0,y} u_{0,y} \\ w_{0,y} u_{0,y} \end{Bmatrix} + \dots \\
&\dots + \frac{1}{2} z^2 \begin{Bmatrix} w_{0,y}^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} x^2 \begin{Bmatrix} u_{0,y}^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} w_{0,y}^2 + u_{0,y}^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

onde  $(\bullet)_{,y} = \partial(\bullet)/\partial y$ .

Agora, pode-se obter a energia potencial elástica do sistema, que para materiais isotrópicos pode ser dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int (E e_{yy}^2 + G(e_{xy}^2 + e_{yz}^2)) dV \tag{2.19}$$

onde  $E$  e  $G$  são o módulo de elasticidade e de cisalhamento, respectivamente.

### 2.1.6 Trabalho Virtual das Forças de Sustentação dos Mancais

Os mancais são representados por coeficientes de rigidez e amortecimento ( $k$  e  $c$ , respectivamente), introduzidos nas equações do movimento do rotor embarcado (referencial  $R_s$ ) a partir do trabalho virtual das forças de sustentação que atuam no eixo. A disposição dos coeficientes de rigidez ( $k_{xx}$ ,  $k_{xz}$ ,  $k_{zx}$  e  $k_{zz}$ ) e amortecimento ( $d_{xx}$ ,  $d_{xz}$ ,  $d_{zx}$  e  $d_{zz}$ ) entre o mancal e o eixo é ilustrada pela Fig. 2.5

O trabalho virtual das forças que atuam sobre o eixo é apresentado na Eq. (2.20), que está associado as direções  $x_s$  e  $z_s$ .

$$\delta W = F_{mu} \delta u + F_{mw} \delta w \quad (2.20)$$

As forças de sustentação dos mancais  $F_{mu}$  e  $F_{mw}$  são dadas pela Eq. (2.21).

$$\begin{Bmatrix} F_{mu} \\ F_{mw} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_m} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xz} \\ d_{zx} & d_{zz} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_m} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

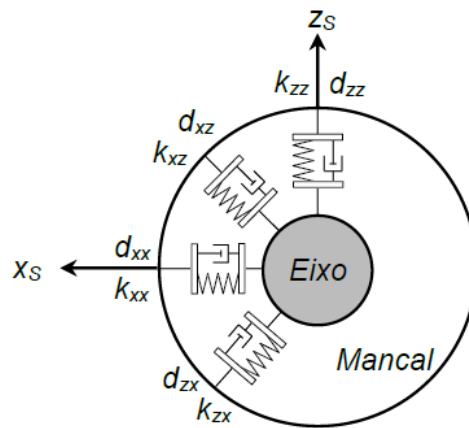


Figura 2.5 – Coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais (Adaptado de: CAVALINI Jr, 2013).

## 2.2 Formulação de Elementos Finitos

### 2.2.1 Incorporação do Disco a Formulação de Elementos Finitos

A Fig. 2.6 apresenta um diagrama do disco rígido, modelado considerando apenas sua energia cinética, conforme mostra a Eq. (2.7). Isso significa que as matrizes ligadas ao disco são aplicadas a um nó em particular do modelo de elementos finitos do eixo. O vetor de coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}_D$  associado ao disco é apresentado na Eq. (2.22).

$$\mathbf{q}_D = [u \quad w \quad \theta \quad \psi]^T \quad (2.22)$$

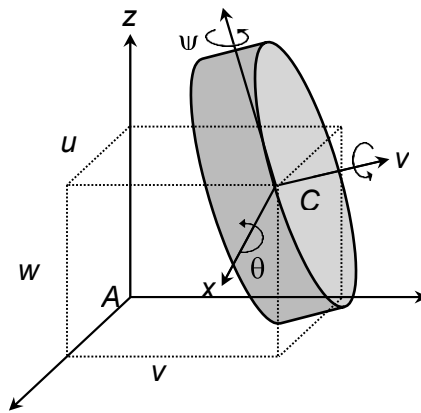


Figura 2.6 – Representação do elemento de disco (Adaptado de: CAVALINI Jr, 2013).

Assim, aplicando as equações de Lagrange em relação ao vetor de coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}_D$ , considerando a velocidade de rotação constante, chega-se a:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_D}{\partial \dot{\mathbf{q}}_D} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial \mathbf{q}_D} = \mathbf{M}_D \ddot{\mathbf{q}}_D + (\mathbf{D}_D + \mathbf{D}_D^*) \dot{\mathbf{q}}_D + \mathbf{K}_D^* \mathbf{q}_D - \mathbf{F}_D^* \quad (2.23)$$

onde  $\mathbf{M}_D$  e  $\mathbf{D}_D$  são as matrizes clássicas de massa e de efeito giroscópico do disco. As matrizes  $\mathbf{D}_D^*$  e  $\mathbf{K}_D^*$  estão relacionadas com o movimento da base, bem como o vetor  $\mathbf{F}_D^*$ . Estas matrizes e vetores são apresentados a seguir.

$$\mathbf{M}_D = \begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dm} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dm} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{D}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \Omega \\ 0 & 0 & I_{Dy} \Omega & 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{D}_D^* = \begin{bmatrix} 0 & 2m_D\dot{\beta}_s & 0 & 0 \\ -2m_D\dot{\beta}_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\dot{\beta}_s I_{Dm} - \dot{\beta}_s I_{Dy} \\ 0 & 0 & -2\dot{\beta}_s I_{Dm} + \dot{\beta}_s I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{K}_D^* = \begin{bmatrix} -m_D(\dot{\gamma}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) & m_D(\dot{\alpha}_s\dot{\gamma}_s + \ddot{\beta}_s) & 0 & 0 \\ m_D(\dot{\alpha}_s\dot{\gamma}_s + \ddot{\beta}_s) & -m_D(\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (I_{Dm} - I_{Dy})(\dot{\gamma}_s^2 - \dot{\beta}_s^2) + I_{Dy}\dot{\beta}_s\Omega & I_{Dy}\dot{\alpha}_s\dot{\gamma}_s + (-\dot{\alpha}_s\dot{\gamma}_s + \ddot{\beta}_s)I_{Dm} \\ 0 & 0 & (\dot{\alpha}_s\dot{\gamma}_s + \ddot{\beta}_s)(I_{Dy} - I_{Dm}) & (I_{Dm} - I_{Dy})(\dot{\alpha}_s^2 - \dot{\beta}_s^2) + I_{Dy}\dot{\beta}_s\Omega \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{F}_D^* = \begin{bmatrix} m_D \left[ \ddot{X} - 2\dot{\gamma}_s\dot{Y} + 2\dot{\beta}_s\dot{Z} - (\dot{\gamma}_s^2 + \dot{\beta}_s^2)X + (\dot{\alpha}_s\dot{\beta}_s - \dot{\gamma}_s)(Y + y) + (\dot{\beta}_s + \dot{\gamma}_s\dot{\alpha}_s)Z \right] \\ m_D \left[ \ddot{Z} - 2\dot{\beta}_s\dot{X} + 2\dot{\alpha}_s\dot{Y} - (\dot{\beta}_s - \dot{\alpha}_s\dot{\gamma}_s)X + (\dot{\alpha}_s - \dot{\beta}_s\dot{\gamma}_s)(Y + y) - (\dot{\beta}_s^2 + \dot{\alpha}_s^2)Z \right] \\ I_{Dm}(\ddot{\alpha}_s - \dot{\beta}_s\dot{\gamma}_s) - I_{Dm}\dot{\gamma}_s(\dot{\beta}_s + \Omega) \\ I_{Dm}(\dot{\gamma}_s - \dot{\alpha}_s\dot{\beta}_s) - I_{Dm}\dot{\alpha}_s(\dot{\beta}_s + \Omega) \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

onde  $I_{Dm} = (I_{Dx} + I_{Dz})/2$ .

### 2.2.2 Formulação das Matrizes de Elementos Finitos do Eixo

O modelo de Elementos Finitos (EF) do eixo considera a seção transversal circular e diâmetro constante, conforme mostra o elemento finito de comprimento  $L$  apresentado na Fig. 2.7. O elemento finito do eixo possui dois nós, sendo que cada nó possui quatro graus de liberdade, sendo dois deslocamentos e duas rotações (deslocamentos  $u_1, u_2, w_1$  e  $w_2$ ; e rotações  $\theta_1, \theta_2, \psi_1$  e  $\psi_2$ ).

O vetor de deslocamentos nodais do eixo é dado por:

$$\mathbf{q}_E = [u_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad \psi_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \theta_2 \quad \psi_2]^T \quad (2.29)$$



O vetor  $\mathbf{q}_E$  pode ser representado da seguinte forma:

$$\mathbf{q}_u = [u_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad \psi_1]^T \quad (2.20)$$

$$\mathbf{q}_w = [u_2 \quad w_2 \quad \theta_2 \quad \psi_2]^T$$

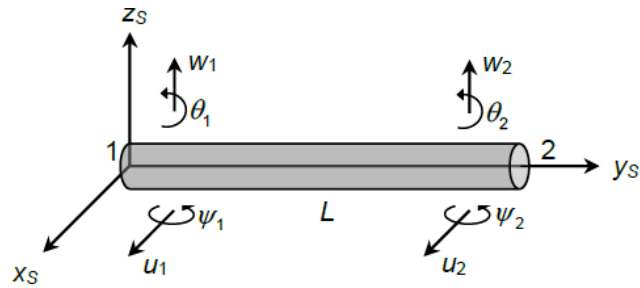


Figura 2.7 – Graus de liberdade associados ao elemento finito do eixo (Adaptado de: CAVALINI Jr, 2013).

A partir das relações apresentadas na Eq. (2.30) é possível construir o elemento finito do eixo.

$$u = \mathbf{N}_u(y) \mathbf{q}_u \quad (2.31)$$

$$w = \mathbf{N}_w(y) \mathbf{q}_w$$

onde os vetores  $\mathbf{N}_1$  e  $\mathbf{N}_2$  correspondem às funções de forma de um elemento de viga em flexão apresentado por Zienkiewicz (1979).

$$\mathbf{N}_u(y) = \left[ 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; \quad -y + \frac{2y^3}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \quad \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \quad \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (2.32)$$

$$\mathbf{N}_w(y) = \left[ 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; \quad y + \frac{2y^3}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \quad \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \quad -\frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right]$$

Aplicando a Eq. (2.32) na energia cinética do eixo (Eq. (2.13)) e substituindo as equações resultantes nas equações de Lagrange, obtém-se a seguinte relação:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_E}{\partial \dot{\mathbf{q}}_E} \right) - \frac{\partial T_E}{\partial \mathbf{q}_E} = \mathbf{M}_E \ddot{\mathbf{q}}_E + \mathbf{D}_E \dot{\mathbf{q}}_E + \mathbf{K}_E \mathbf{q}_E - \mathbf{F}_E^* \quad (2.33)$$

As matrizes  $\mathbf{M}_E$ ,  $\mathbf{D}_E$  e  $\mathbf{K}_E^*$  o vetor  $\mathbf{F}_E^*$  são dados por:

$$\mathbf{M}_E = \rho S \mathbf{M}_1 + \rho I_m \mathbf{M}_2 \quad (2.34)$$

$$\mathbf{D}_E = 2\rho (\dot{\beta}_s S \mathbf{D}_1 - I_m \Omega \mathbf{D}_2) \quad (2.35)$$

$$\mathbf{K}_E^* = \rho S (\mathbf{K}_1 + \ddot{\beta}_s \mathbf{D}_1 + \dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s \mathbf{K}_2) + \rho I_m [\mathbf{K}_3 - (\ddot{\beta}_s + \dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s) \mathbf{M}_4 + 2\dot{\beta}_s (\dot{\beta}_s + \Omega) \mathbf{M}_2] \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_E^* = & \rho S [\ddot{X} + 2\dot{\beta}_s \dot{Z} - 2\dot{\gamma}_s \dot{Y} + (\ddot{\beta}_s + \dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s) Z + (\dot{\alpha}_s \dot{\beta}_s - \ddot{\gamma}_s) Y - (\dot{\gamma}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) X] \mathbf{V}_1 \dots \\ & + [\ddot{Z} + 2\dot{\alpha}_s \dot{Y} - 2\dot{\beta}_s \dot{X} + (\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s - \ddot{\beta}_s) X + (\ddot{\alpha}_s + \dot{\gamma}_s \dot{\beta}_s) Y - (\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) Z] \mathbf{V}_2 \dots \\ & + (\dot{\alpha}_s \dot{\beta}_s - \ddot{\gamma}_s) \mathbf{V}_3 + (\ddot{\alpha}_s + \dot{\gamma}_s \dot{\beta}_s) \mathbf{V}_4 \dots \\ & + \rho I_m \{ (\dot{\alpha}_s \dot{\beta}_s - \ddot{\gamma}_s) \mathbf{V}_5 + (\ddot{\alpha}_s + \dot{\gamma}_s \dot{\beta}_s) \mathbf{V}_6 - 2(\dot{\beta}_s + \Omega)(\dot{\alpha}_s \mathbf{V}_5 + \dot{\gamma}_s \mathbf{V}_6) \} \end{aligned} \quad (2.37)$$

As matrizes  $\mathbf{M}_1$ ,  $\mathbf{M}_2$ ,  $\mathbf{M}_3$ ,  $\mathbf{D}_1$ ,  $\mathbf{D}_2$ ,  $\mathbf{K}_1$ ,  $\mathbf{K}_2$  e  $\mathbf{K}_3$ , e os vetores  $\mathbf{V}_1$ ,  $\mathbf{V}_2$ ,  $\mathbf{V}_3$ ,  $\mathbf{V}_4$ ,  $\mathbf{V}_5$  e  $\mathbf{V}_6$  são dados por:

$$\mathbf{M}_1 = \frac{L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ & & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ & & & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ & & & & 156 & 0 & 0 & 22L \\ & SIM. & & & & 156 & -22L & 0 \\ & & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{M}_2 = \frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ & & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -L^2 & 0 \\ & & & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ & & & & 36 & 0 & 0 & 3L \\ & SIM. & & & & 36 & -3L & 0 \\ & & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{M}_3 = \frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ & & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ & & & 0 & 0 & 3L & L^2 & 0 \\ & & & & 0 & 36 & -3L & 0 \\ & SIM. & & & & 0 & 0 & 3L \\ & & & & & & 0 & -4L^2 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{D}_1 = \frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ & 0 & 0 & 22L & -54 & 0 & 0 & -33L \\ & & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ & & & 0 & 0 & -13L & 3L^2 & 0 \\ & & & & 0 & 156 & -22L & 0 \\ & ANTISIM. & & & & 0 & 0 & 22L \\ & & & & & & 0 & 4L^2 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{D}_2 = \frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ & & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ & & & 0 & 0 & -3L & L^2 & 0 \\ & & & & 0 & 36 & -3L & 0 \\ & ANTISIM. & & & & 0 & 0 & -3L \\ & & & & & & 0 & 4L^2 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$\mathbf{K}_1 = \frac{1}{420} \begin{bmatrix} -156c_1 & 0 & 0 & 22Lc_1 & -54c_1 & 0 & 0 & -13Lc_1 \\ & -156c_2 & -22Lc_2 & 0 & 0 & -54c_2 & 13Lc_2 & 0 \\ & & -4L^2c_2 & 0 & 0 & -13Lc_2 & 3Lc_2 & 0 \\ & & & -4L^2c_2 & 13Lc_1 & 0 & 0 & 3L^2c_1 \\ & & & & -156c_1 & 0 & 0 & -22Lc_2 \\ & SIM. & & & & -156c_2 & 22Lc_2 & 0 \\ & & & & & & -4L^2c_2 & 0 \\ & & & & & & & -4L^2c_2 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = \dot{\beta}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2 \quad c_2 = \dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2$$

(2.43)

$$\mathbf{K}_2 = \frac{L}{420} \begin{bmatrix} 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ & 0 & 0 & 22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ & & 0 & -4L^2 & 13L & 0 & 0 & 3L \\ & & & 0 & 0 & -13L & 3L^2 & 0 \\ & & & & 0 & 156 & -22L & 0 \\ & SIM. & & & & 0 & 0 & 22L \\ & & & & & & 0 & -4L^2 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$\mathbf{K}_3 = \frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 36c_1 & 0 & 0 & -3Lc_2 & -36c_2 & 0 & 0 & -3Lc_2 \\ & 36c_1 & 3Lc_1 & 0 & 0 & -36c_1 & 3Lc_1 & 0 \\ & & 4L^2c_1 & 0 & 0 & -3Lc_1 & -L^2c_2 & 0 \\ & & & -4L^2c_2 & 3Lc_2 & 0 & 0 & -L^2c_2 \\ & & & & -36c_2 & 0 & 0 & 3Lc_2 \\ & SIM. & & & & -36c_2 & -3Lc_1 & 0 \\ & & & & & & -4L^2c_1 & 0 \\ & & & & & & & 4L^2c_2 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

$$c_1 = \dot{\alpha}_s^2 - \dot{\beta}_s^2 \quad c_2 = \dot{\gamma}_s^2 + \dot{\beta}_s^2$$

$$\mathbf{V}_1 = \frac{L}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ -L \\ 0 \\ 0 \\ L \end{bmatrix}; \mathbf{V}_2 = \frac{L}{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ L \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -L \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{V}_3 = \frac{L}{12} \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ -2L \\ 21 \\ 0 \\ 0 \\ 3L \end{bmatrix}; \mathbf{V}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 2L \\ 0 \\ 0 \\ 21 \\ -3L \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{V}_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{V}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

### 2.2.3 Matrizes de Rigidez do Eixo

Substituindo a Eq. (2.32) na equação da energia potencial do eixo (Eq. (2.19)) e logo em seguida aplicando as equações de Lagrange, tem-se:

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_E} = \mathbf{K}_E \mathbf{q}_E + \mathbf{K}_{nl} \mathbf{q}_E \quad (2.47)$$

onde  $\mathbf{K}_E$  é a parcela linear de rigidez e  $\mathbf{K}_{nl}$  é a parcela não-linear (e de acoplamento de flexão das direções  $x_s$  e  $z_s$ ) e são dados por:

$$\mathbf{K}_E = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & 12 & 0 & 0 & -6L \\ & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & & & 4L^2 & 6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ & & & & 12 & 0 & 0 & 6L \\ & SIM. & & & & 12 & -6L & 0 \\ & & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$$\mathbf{K}_{nl} = \begin{bmatrix} K_{nl11}(u) & K_{nl12}(u, w) \\ K_{nl21}(u, w) & K_{nl22}(w) \end{bmatrix}$$

com:

$$\begin{aligned}
K_{nl11}(u) &= E \left( IB_u^{nl}{}_{,yy}{}^T B_u^{nl}{}_{,y} + IB_u^{nl}{}_{,y}{}^T B_u^{nl}{}_{,yy} + B_u^{nl}{}_{,y}{}^T B_u^{nl}{}_{,y} \right) + 2IG \left( B_u^{nl}{}_{,y}{}^T B_u^{nl}{}_{,yy} + B_u^{nl}{}_{,yy}{}^T B_u^{nl}{}_{,y} \right) \\
K_{nl12}(u, w) &= E \left( IB_w^{nl}{}_{,yy}{}^T B_u^{nl}{}_{,y} + IB_w^{nl}{}_{,y}{}^T B_u^{nl}{}_{,yy} + B_w^{nl}{}_{,y}{}^T B_u^{nl}{}_{,y} \right) + 2IG \left( B_w^{nl}{}_{,y}{}^T B_u^{nl}{}_{,yy} + B_w^{nl}{}_{,yy}{}^T B_u^{nl}{}_{,y} \right) \\
K_{nl21}(u, w) &= E \left( IB_u^{nl}{}_{,yy}{}^T B_w^{nl}{}_{,y} + IB_u^{nl}{}_{,y}{}^T B_w^{nl}{}_{,yy} + B_u^{nl}{}_{,y}{}^T B_w^{nl}{}_{,y} \right) + 2IG \left( B_u^{nl}{}_{,y}{}^T B_w^{nl}{}_{,yy} + B_u^{nl}{}_{,yy}{}^T B_w^{nl}{}_{,y} \right) \\
K_{nl22}(w) &= E \left( IB_w^{nl}{}_{,yy}{}^T B_w^{nl}{}_{,y} + IB_w^{nl}{}_{,y}{}^T B_w^{nl}{}_{,yy} + B_w^{nl}{}_{,y}{}^T B_w^{nl}{}_{,y} \right) + 2IG \left( B_w^{nl}{}_{,y}{}^T B_w^{nl}{}_{,yy} + B_w^{nl}{}_{,yy}{}^T B_w^{nl}{}_{,y} \right) \\
&\quad B_u^{nl} = u^T N_u^T N_u; \quad B_w^{nl} = w^T N_w^T N_w
\end{aligned} \tag{2.49}$$

onde  $G$  é o modulo de cisalhamento.

#### 2.2.4 Incorporação da Massa de Desbalanceamento e das Forças de Sustentação dos Mancais

A massa de desbalanceamento do rotor é incorporada nas equações do movimento do rotor apenas por sua energia cinética, como apresentado na Eq. (2.10). Sendo assim, aplicando as equações de Lagrange, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_u}{\partial \dot{\mathbf{q}}_u} \right) - \frac{\partial T_u}{\partial \mathbf{q}_u} = m_u d \begin{bmatrix} \left( \ddot{\beta}_s + \dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s \right) \cos(\Omega t + \mu) - \left[ \left( \Omega + \dot{\beta}_s \right)^2 + \dot{\gamma}_s^2 \right] \sin(\Omega t + \mu) \\ \left( \ddot{\beta}_s + \dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s \right) \sin(\Omega t + \mu) - \left[ \left( \Omega + \dot{\beta}_s \right)^2 + \dot{\alpha}_s^2 \right] \cos(\Omega t + \mu) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.50}$$

Portanto, as forças devidas ao desbalanceamento  $F_{du}$  e  $F_{dw}$  a serem aplicadas em um nó do modelo de EF ao longo das direções  $x_s$  e  $z_s$  para uma massa situada em uma posição angular  $\mu$  são dadas matricialmente pela Eq. (2.50).

$$\begin{Bmatrix} F_{du} \\ F_{dw} \\ F_{d\theta} \\ F_{d\psi} \end{Bmatrix} = m_u d \begin{bmatrix} (\ddot{\beta}_s + \dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s) \cos(\Omega t + \mu) - \left[ (\Omega + \dot{\beta}_s)^2 + \dot{\gamma}_s^2 \right] \sin(\Omega t + \mu) \\ (\ddot{\beta}_s + \dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s) \sin(\Omega t + \mu) - \left[ (\Omega + \dot{\beta}_s)^2 + \dot{\alpha}_s^2 \right] \cos(\Omega t + \mu) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{F}_d \quad (2.51)$$

As forças devido a sustentação dos mancais, dadas pela Eq. (2.21), são aplicadas, de forma análoga as forças de desbalanceamento, aos nós em que os mancais estão contidos, na forma das matrizes de rigidez dos mancais,  $\mathbf{K}_m$ , e de amortecimento dos mancais,  $\mathbf{D}_m$  e são adicionadas nas matrizes de amortecimento e rigidez do eixo

Por fim, a equação do movimento do rotor embarcado na forma matricial é apresentada na Eq. (2.52)

$$\underbrace{[\mathbf{M}_D + \mathbf{M}_E]}_{\mathbf{M}^{Total}} \ddot{\mathbf{q}} + \underbrace{[\mathbf{D}_D + \mathbf{D}_D^* + \mathbf{D}_E + \mathbf{D}_m]}_{\mathbf{D}^{Total}} \dot{\mathbf{q}} + \underbrace{[\mathbf{K}_D^* + \mathbf{K}_E^* + \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_{nl} + \mathbf{K}_m]}_{\mathbf{K}^{Total}} \mathbf{q} = \underbrace{\mathbf{W} + \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_D^* + \mathbf{F}_E^*}_{\mathbf{F}^{Total}} \quad (2.52)$$

No Anexo A é detalhada a integração numérica da equações não-lineares dada pela Eq. (2.52). É interessante destacar que o termo  $\mathbf{K}_{nl}$  é o termo não-linear aqui introduzido.

## CAPÍTULO III

### MODELO ESTOCÁSTICO

Esse capítulo apresenta um modelo estocástico aplicado a rotores embarcados com incertezas aplicadas a parâmetros do sistema. Para o cálculo das matrizes de rigidez estocásticas, o modelo proposto explora o método de expansão de Karhunen-Loève e o método de amostragem por Hipercubo Latino na obtenção distribuição estocástica das propriedades mecânicas.

#### 3.1 Modelo Estocástico por expansão de Karhunen-Loève

No estudo de teoria da probabilidade a observação de um fenômeno aleatório é chamada de *amostra* e, todos os possíveis resultados de uma amostra formam um espaço amostral. Um subconjunto de ocorrências contendo possíveis resultados  $\Theta$  é definido como evento e o conjunto de eventos tendo sua probabilidade definida denominada por  $\Lambda_p$ .

Assim, um processo estocástico ou aleatório é indexado por um conjunto de variáveis aleatórias reais de um sistema que evolui em função do tempo, sendo esse processo chamado de espaço estocástico (PAPOULIS e PILLAI; 2002). Tal processo pode ser representado por uma equação diferencial estocástica discretizada por variáveis aleatórias discretas. Há várias formas de se resolver essa equação, sendo uma delas a expansão de Karhunen-Loeve.

Dado um espaço estocástico  $H(X, \Theta)$  com variáveis aleatórias indexadas por um parâmetro contínuo  $X \in D$ , onde  $D \in \mathbb{R}^d$ . Seja  $(\Omega_p, \Lambda_p, P_p)$  um espaço probabilístico, onde  $\Omega_p$  é o espaço amostral de todas os possíveis resultados das variáveis aleatórias,  $\Lambda_p$  é a coleção de eventos possíveis tendo uma probabilidade bem definida,  $P_p$  é uma



medida de probabilidade e  $\Theta \in \Omega_p$  é um subconjunto de ocorrências contendo possíveis resultados (definido como evento).

Para variáveis aleatórias contínuas, a função de densidade de probabilidade e a função de distribuição acumulativa são denotadas por  $g_x(X)$  e  $G_x(X)$ . A esperança matemática ( $E[\cdot]$ ), a variância e o momento de ordem  $n$  de uma variável aleatória são expressos, respectivamente, por:

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} X g_x(X) dX \quad (3.1)$$

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu)^2 g_x(X) dX \quad (3.2)$$

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} X^n g_x(X) dX \quad (3.3)$$

A covariância de duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  é dada por:

$$C[X, Y] = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] \quad (3.4)$$

É possível discretizar o espaço estocástico  $H(X, \Theta)$  em uma parcela determinística e uma parcela aleatória, como se segue:

$$H(X, \Theta) = \bar{H}(X) + Y(X, \Theta) \quad (3.5)$$

sendo  $\bar{H}(X)$  é a esperança matemática do processo estocástico em questão, doravante, a barra sobrescrita indicará a esperança matemática. Já  $Y(X, \Theta)$  é um espaço estocástico que representa a parcela aleatória. O espaço  $H(X, \Theta)$  pode ser multidimensional ( $d > 1$ ) e aqui será um campo aleatório bidimensional  $H(x, z, \Theta)$  com  $x \in D$  e  $z \in D$ , assim a Eq. (3.5) é reescrita como:

$$H(x, z, \Theta) = \bar{H}(x, z) + Y(x, z, \Theta) \quad (3.6)$$

Assumindo uma função de covariância finita  $C[(x_1, z_1), (x_2, z_2)]$ , simétrica e positiva definida, o termo  $Y(x, z, \Theta)$  pode ser expandido em série de Fourier:

$$Y(x, z, \Theta) = \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_r} f_r(x, z) \xi_r(\Theta) \quad (3.7)$$

onde  $\xi_r(\Theta)$  é um conjunto de variáveis aleatórias não correlacionadas e independentes. Os termos  $\lambda_r$  e  $f_r(x, z)$  são, respectivamente, os autovalores e as autofunções definidas através da função de covariância  $C[(x_1, z_1), (x_2, z_2)]$  que possui uma decomposição espectral

$$C[(x_1, z_1), (x_2, z_2)] = \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r f_r(x_1, z_1) f_r(x_2, z_2) \quad (3.8)$$

onde os autovalores e as autofunções devem satisfazer a integral de Fredholm, dada por:

$$\lambda_r f_r(x, z) = \int_D C(x, z) f_r(x, z) dx dz \quad (3.9)$$

Substituindo a Eq. (3.7) na Eq. (3.6) e truncando a série no m-ésimo termo:

$$H(x, z, \Theta) \approx \bar{H}(x, z) + \sum_{r=1}^m \sqrt{\lambda_r} f_r(x, z) \xi_r(\Theta) \quad (3.10)$$

Para geometrias relativamente simples, a covariância pode ter uma decomposição espectral expressa na forma de decaimento exponencial (GHANEM e SPANOS, 1991):

$$C[(x_1, z_1), (x_2, z_2)] = e^{\left( \begin{array}{cc} |x_1 - x_2| & |z_1 - z_2| \\ L_{cor,x} & L_{cor,z} \end{array} \right)} \quad (3.11)$$

onde  $L_{cor,x}$  e  $L_{cor,z}$  são, respectivamente, os comprimentos de correlação nas direções  $x$  e  $z$  contidos nos domínios  $[-a,a]$  e  $[-b,b]$ , com  $a$  e  $b$  as dimensões do elemento finito usado nas direções  $x_s$  e  $z_s$ , respectivamente. Essa função de covariância adotada tem a vantagem de possuir a propriedade de separação de variáveis, assim o problema bidimensional será decomposto em dois problemas unidimensionais independentes, então as autofunções e autovalores:

$$f_r(x, z) = f_i(x) f_j(z) \quad (3.12)$$

$$\lambda_r = \lambda_i \lambda_j \quad (3.13)$$

Os autovalores e as autofunções são dados em função das raízes  $W_r$  de duas equações transcendentais dadas por (GHANEM e SPANOS, 1991):

Para  $i$  e  $j$  ímpar, com  $i \geq 1$  e  $j \geq 1$ :

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{2c_1}{w_i^2 + c_1^2}, & f_i(x) &= \alpha_i \cos(w_i x) \\ \lambda_j &= \frac{2c_2}{w_j^2 + c_2^2}, & f_j(z) &= \alpha_j \cos(w_j z) \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{1}{\sqrt{a + \sin(w_i a) / 2w_i}}, & \alpha_j &= \frac{1}{\sqrt{b + \sin(w_j b) / 2w_j}} \\ c_1 &= \frac{1}{L_{cor,x}}, & c_2 &= \frac{1}{L_{cor,z}} \end{aligned} \quad (3.15)$$

As equações transcendentais e o domínio em que são definidas são dadas por:

$$\begin{aligned} \text{Equações: } & c_1 - w_i \tan(w_i a) = 0; & c_2 - w_j \tan(w_j b) = 0 \\ \text{Domínio: } & [(i-1)\pi/a, (i-1/2)\pi/a] & [(j-1)\pi/a, (j-1/2)\pi/a] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para  $i$  e  $j$  par, com  $i \geq 2$  e  $j \geq 2$ :

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{2c_1}{w_i^2 + c_1^2}, & f_i(x) &= \alpha_i \sin(w_i x) \\ \lambda_j &= \frac{2c_2}{w_j^2 + c_2^2}, & f_j(y) &= \alpha_j \sin(w_j z) \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde:

$$\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{a - \sin(w_i a) / 2w_i}}, \quad \alpha_j = \frac{1}{\sqrt{b - \sin(w_j b) / 2w_j}} \quad (3.17)$$

As equações transcendentais e o domínio em que são definidas são dadas por:

$$\begin{aligned} \text{Equações: } & c_1 + w_i \tan(w_i a) = 0, & c_2 + w_j \tan(w_j b) = 0 \\ \text{Domínio: } & [(i-1/2)\pi/a, i\pi/a] & [(j-1/2)\pi/a, j\pi/a] \end{aligned} \quad (3.18)$$

A expansão de KL que foi aqui apresentada foi usada para modelar a matriz de rigidez aleatória elementar dos mancais:

$${}_{\Theta} \mathbf{K}_m(\Theta) = \bar{\mathbf{K}}_m + \sum_{r=1}^m [{}_{es} \mathbf{K}_m]^{(k)} \zeta_r^k(\Theta) \quad (3.19)$$

onde  $\bar{\mathbf{K}}_m$  é a matriz média calcula segundo Eq. (2.21), já a matriz estocástica é dada por:

$${}_{es} \mathbf{K}_m = \alpha_i \alpha_j \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} \int_{x=0}^{x=a} \int_{z=0}^{z=b} f_i(x) f_j(z) \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} dx dy \quad (3.20)$$

## CAPÍTULO IV

### APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Este capítulo apresenta os resultados numéricos obtidos através do modelo de elementos finitos apresentado no capítulo anterior, inicialmente para o modelo determinístico não-linear, onde três casos de excitações diferentes foram estudados. Por fim, os dois casos de maior impacto também foram analisados para o modelo estocástico.

#### 4.1 Simulações com Não-Linearidades Geométricas

A Fig. 4.1 mostra o rotor utilizado na análise do comportamento dinâmico do sistema, que é matematicamente representado por um modelo com 33 elementos finitos. O rotor é composto por um eixo flexível de aço com um comprimento de 860 mm e 17 mm de diâmetro ( $E = 205$  GPa,  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup> e  $\nu = 0,29$ ), dois discos rígidos  $D_1$  (nó #13 do modelo EF; 2,637 kg) e  $D_2$  (nó #23; 2,649 kg), ambos de aço e com 150 mm de diâmetro e 20 mm de espessura ( $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>) e dois mancais ( $B_1$  e  $B_2$  localizados nos nós #4 e #31, respectivamente). Sensores de deslocamento estão dispostos ortogonalmente nos nós #8 ( $S_{8x_s}$  e  $S_{8z_s}$ ) e #28 ( $S_{28x_s}$  e  $S_{28z_s}$ ) para medir a vibração do eixo.

Os coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais, amortecimento proporcional adicionado à matriz  $\mathbf{D}^{\text{total}}$  (coeficientes  $\gamma$  e  $\beta$ ;  $\mathbf{D}_p = \gamma\mathbf{M}_E + \beta\mathbf{K}_E$ ) e uma rigidez  $\mathbf{K}_{rot}$  devido ao acoplamento entre o motor elétrico e o eixo (adicionado em torno das direções ortogonais  $x_s$  e  $z_s$  do nó #1 (graus de liberdade 3, 4, 7 e 8), são apresentados na Tab. 4.1.

A Fig. 4.2 apresenta o Diagrama de Campbell determinado a partir do modelo EF da máquina rotativa. As velocidades críticas do rotor são, aproximadamente, 1675 RPM (BW<sub>1</sub>: velocidade crítica de *backward*), 1714 RPM (FW<sub>1</sub>: velocidade crítica de *forward*), 5426 RPM (BW<sub>2</sub>), e 5912 RPM (FW<sub>2</sub>).

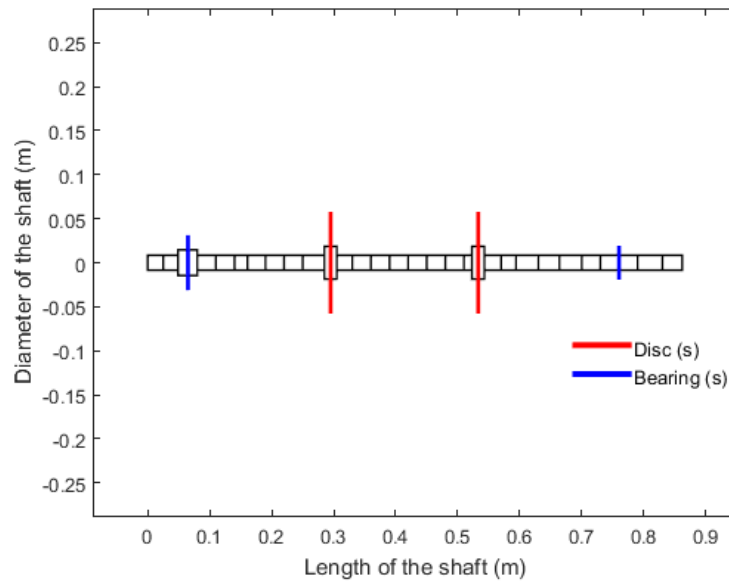


Figura 4.1: Representação esquemática utilizada nas análises numéricas.

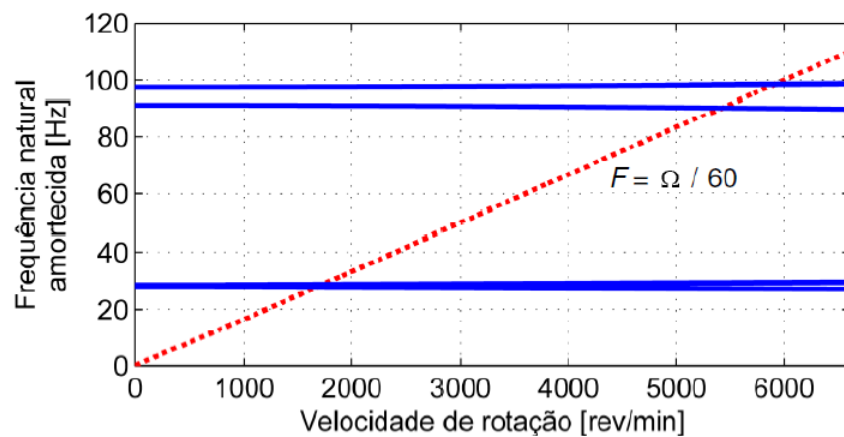


Figura 4.2: Diagrama de Campbell da máquina rotativa (adaptado: CAVALINI Jr, 2013).

Assim, uma excitação do tipo senoidal dada pela Eq. (4.1) é aplicada na base da máquina rotativa, ao longo da direção  $x_s$ . A resposta de vibração do rotor ao longo das direções  $x_s$  e  $z_s$  no plano de medição  $S_8$  é apresentada na Fig. 4.3 e o plano  $S_{28}$  é apresentada na Fig. 4.4.

$$\ddot{x}_s = \Gamma \sin\left(n \frac{2\pi\Omega}{60} t\right) \quad (4.1)$$

onde  $n = 2$  é uma constante utilizada para produzir excitações da base com frequências de excitação supersíncronas da velocidade de operação da máquina rotativa e  $\Gamma$  é utilizada para variar a amplitude de excitação ( $\Gamma = 5$ ,  $\Gamma = 25$  e  $\Gamma = 50$  m/s<sup>2</sup>). A velocidade de rotação do rotor  $\Omega$  foi fixada em 1200 RPM com um desbalanceamento de 487,5 g.mm/0° aplicado no disco  $D_1$ .

Tabela 4.1: parâmetros de rigidez e amortecimento dos mancais

Parâmetros	Valor	Parâmetros	Valor	Parâmetros	Valor
$k_{xx} / B_1$	$8,551 \times 10^5$	$k_{xx} / B_2$	$5,202 \times 10^7$	$\mathbf{K}_{rot}$	770,442
$k_{zz} / B_1$	$1,198 \times 10^6$	$k_{zz} / B_2$	$7,023 \times 10^8$	$\gamma$	2,730
$d_{xx} / B_1$	7,452	$d_{xx} / B_1$	25,587	$\beta$	$4,85 \times 10^{-6}$
$d_{zz} / B_1$	33,679	$d_{zz} / B_1$	91,033		

\* $k$ : rigidez [N/m];  $d$ : amortecimento [Ns/m].

É possível destacar que para a excitação de  $\Gamma = 5$  m/s<sup>2</sup> o caso linear e o não-linear se sobrepõem, tanto na direção  $x_s$  e  $z_s$ , evidenciando que o efeito não-linear é desprezível. Já para  $\Gamma = 25$  m/s<sup>2</sup> a diferença entre os dois casos já se faz notar, ficando mais evidente para  $\Gamma = 50$  m/s<sup>2</sup>. Desta forma, reforçando que quanto maior é a amplitude da excitação mais forte é a influência da não-linearidade geométrica estudada no presente trabalho. Já as Fig. 4.5 e 4.6 mostram as órbitas obtidas para os planos  $S_8$  e  $S_{28}$ , respectivamente.

Outro importante apontamento se dá na comparação das respostas nas direções  $x_s$  e  $z_s$ , em que mesmo a excitação sendo na direção  $x_s$  o efeito não-linear, em comparação a resposta puramente linear, se mostrou mais influente na direção  $z_s$ . Aqui o acoplamento das direções causado tanto pela própria não-linearidade como do efeito giroscópico resultam em uma resposta consideravelmente diferente da resposta meramente linear, como reforça a Fig. 4.7 que apresenta a Transformada Discreta de Fourier (Discrete Fourier Transform / DFT) para  $\Gamma = 50$  m/s<sup>2</sup>, onde a resposta para a direção  $z_s$  (Fig. 4.5-b e 4.5-d) apresenta um pico em 4800 RPM (duas vezes a frequência de excitação) que não é presente na resposta do modelo linear.

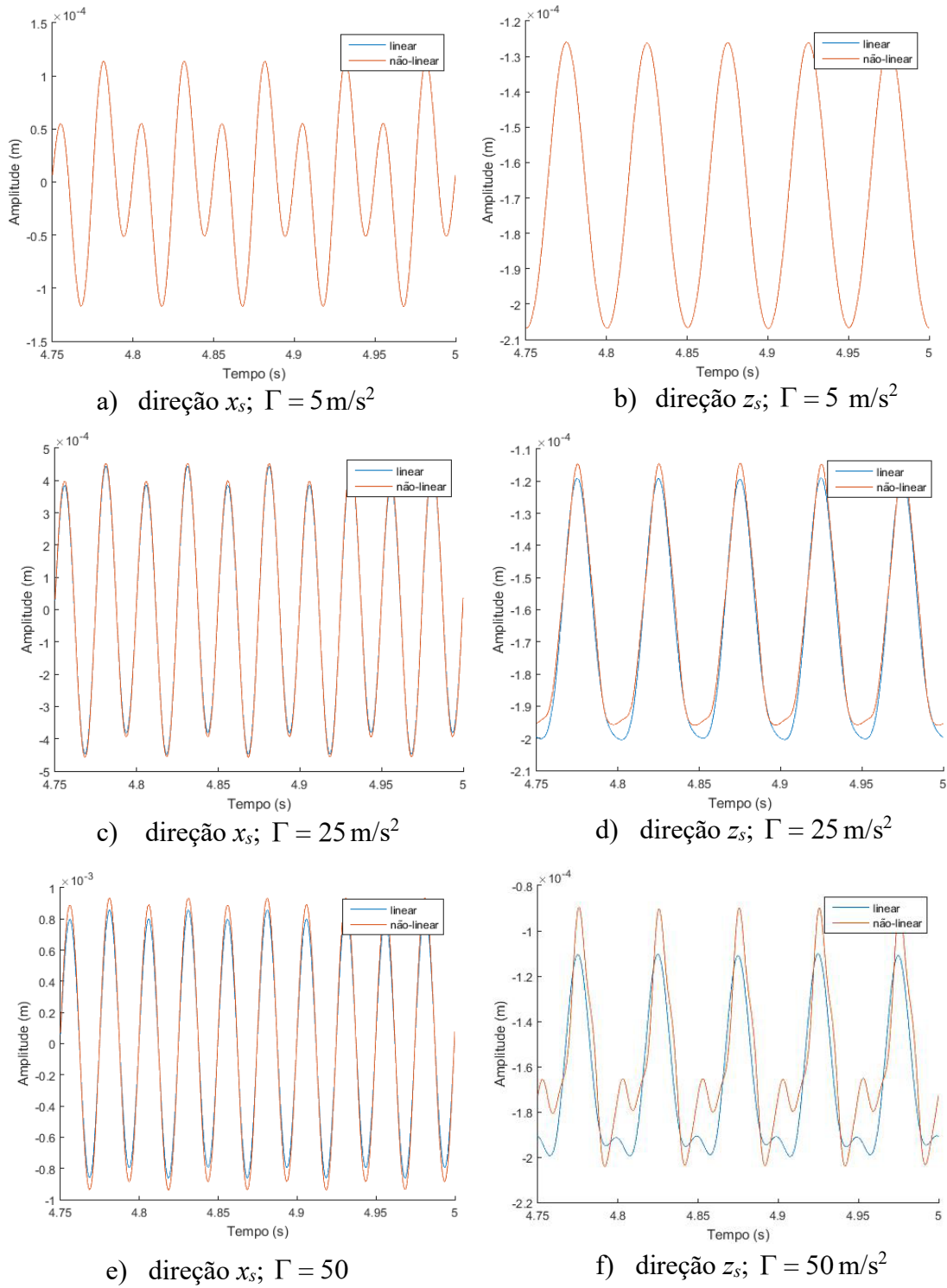


Figura 4.3: Respostas de vibrações no plano  $S_8$  para excitações senoidais na base do rotor com frequência supersíncronas da velocidade de rotação.



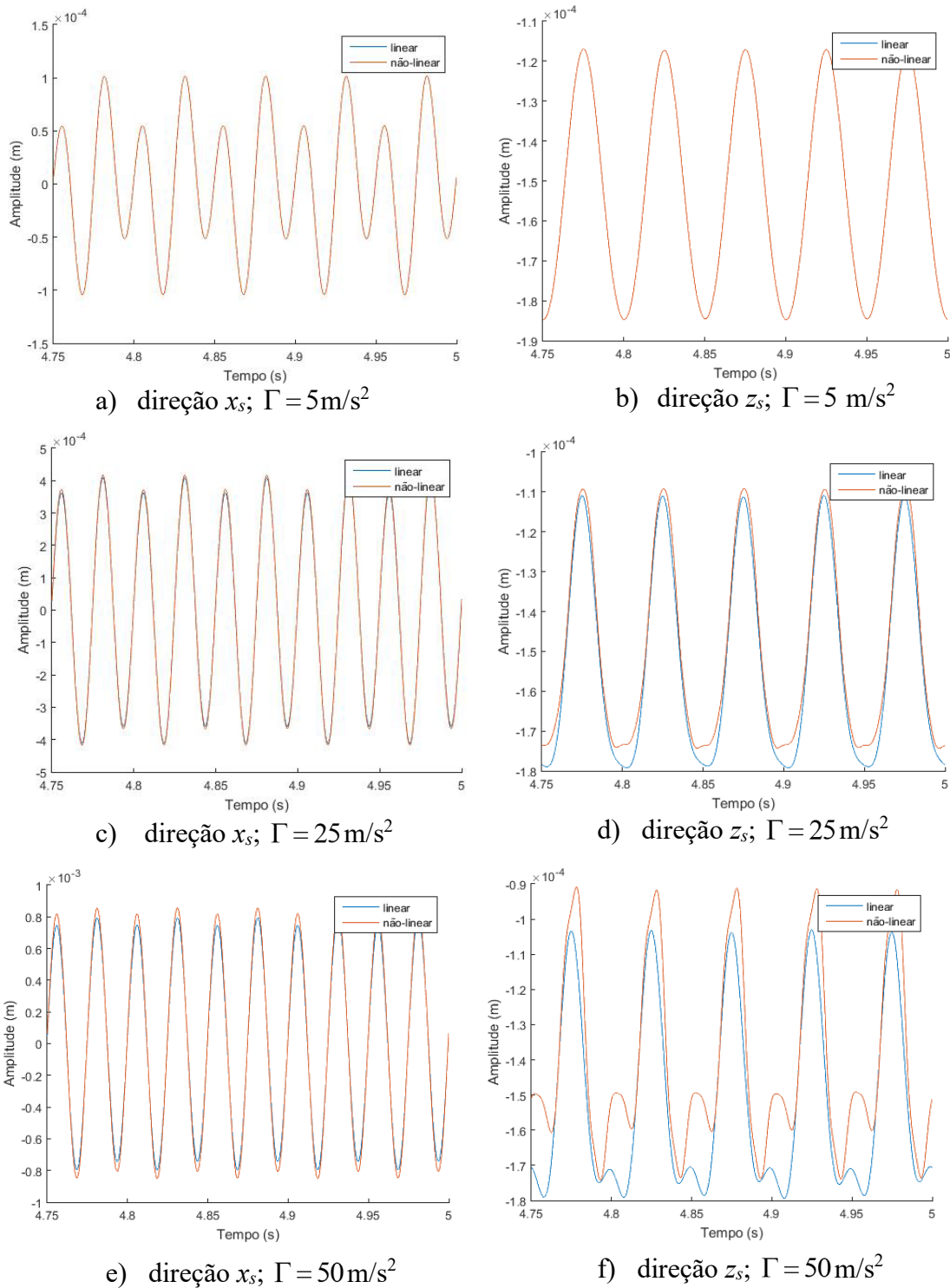


Figura 4.4: Respostas de vibrações no plano  $S_{28}$  para excitações senoidais na base do rotor com frequência supersíncronas da velocidade de rotação.

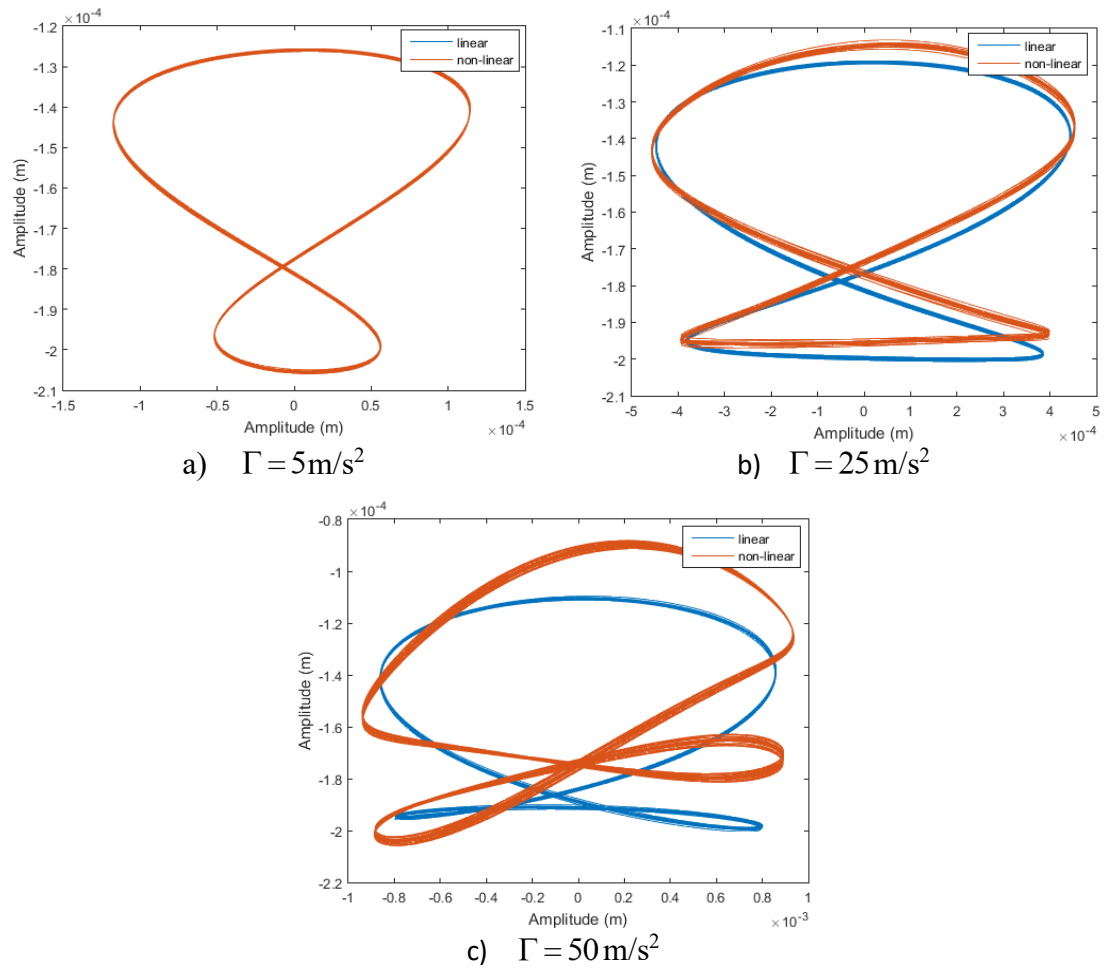


Figura 4.5: Orbitas determinado no plano  $S_8$  para excitações senoidais na base do rotor com frequência supersíncronas da velocidade de rotação.

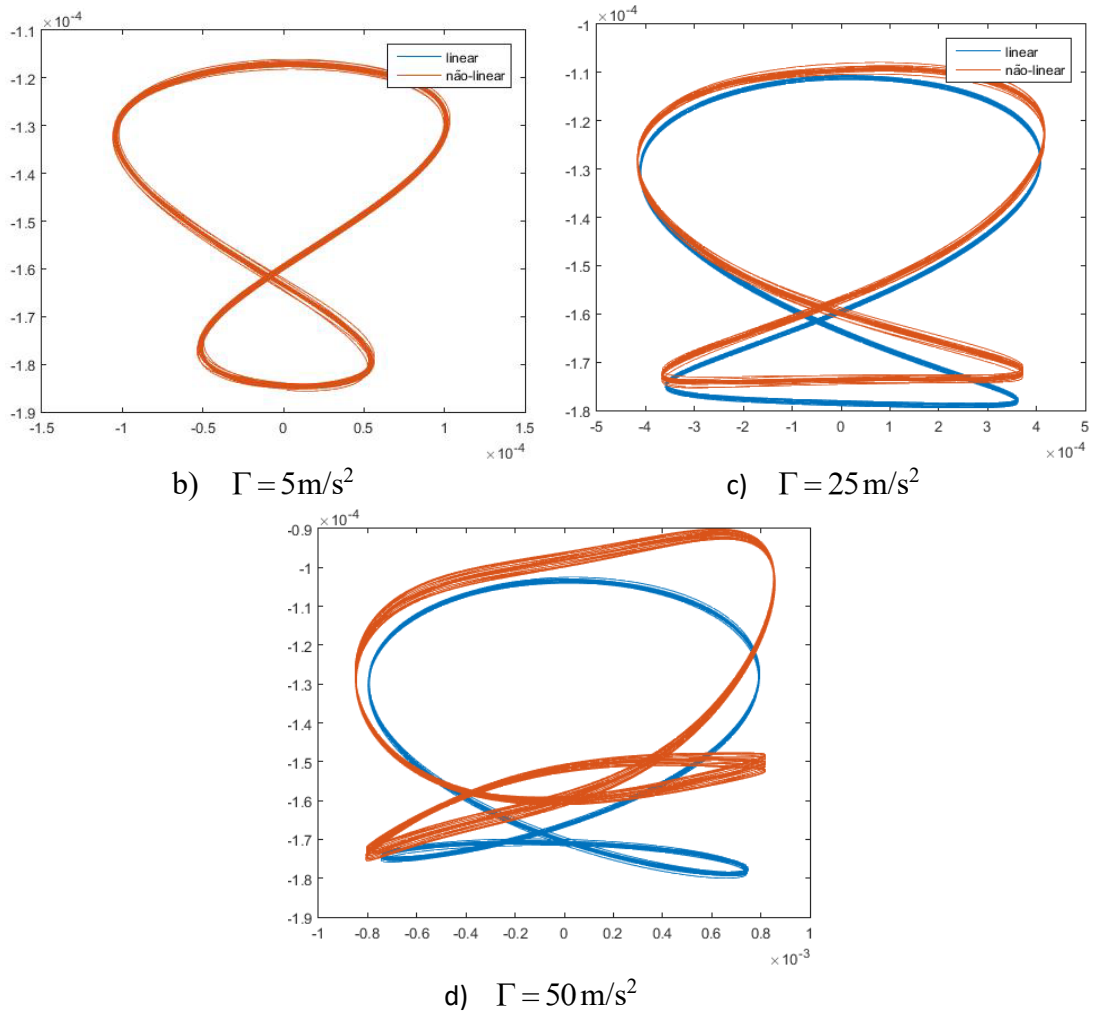


Figura 4.6: Orbitas determinado no plano  $S_8$  para excitações senoidais na base do rotor com frequência supersíncronas da velocidade de rotação.

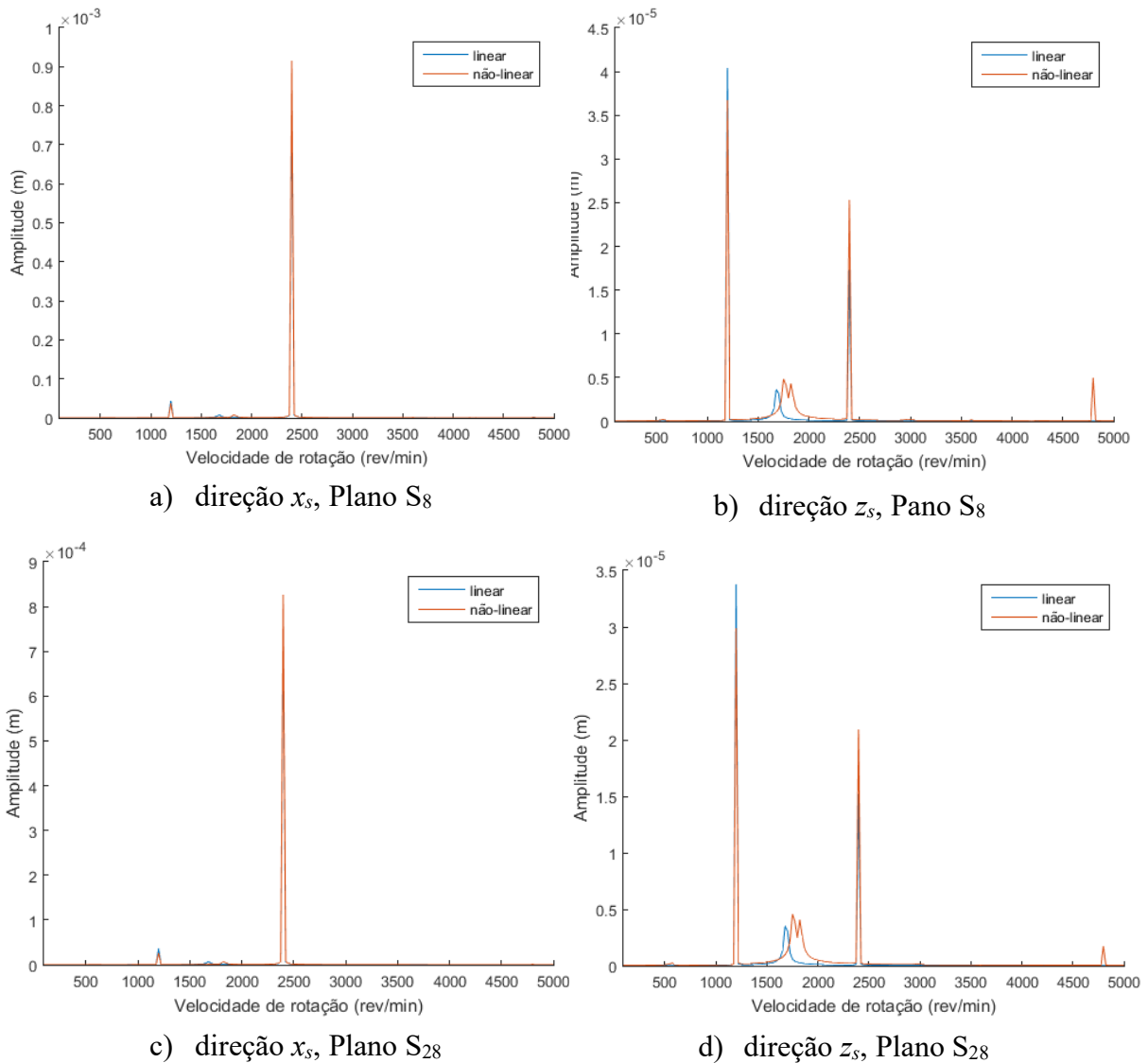


Figura 4.7: Transformada Discreta de Fourier (Discrete Fourier Transform / DFT), para o caso de  $\Gamma = 50 \text{ m/s}^2$  com frequência supersíncronas da velocidade de rotação.

Como há a influência da gravidade sobre a direção  $z_s$ , essa seria uma hipótese para um maior efeito não-linear nessa direção. Para verificar tal hipótese foi obtida a Fig. 4.8, onde foi simulada uma excitação de  $\Gamma = 50 \text{ m/s}^2$ , mas sem o efeito da gravidade. Note que a força de gravidade tem um efeito sobre a resposta não-linear no sentido de afastá-la da resposta do modelo linear, sobretudo nos picos superiores. Contudo, mesmo sem a atuação da gravidade a resposta na direção  $z_s$  continuou sendo mais influenciada pelo efeito não-linear que a direção  $x_s$ . Ainda na linha de estudar o efeito da gravidade sobre a resposta não-linear, foi simulado um rotor com diâmetro de 10mm, mantendo os outros para metros iguais, portanto, um rotor mais esbelto. Assim, a Fig. 4.9 apresenta quatro

comparações: reposta linear sem gravidade, não-linear sem gravidade, linear com gravidade, linear com gravidade

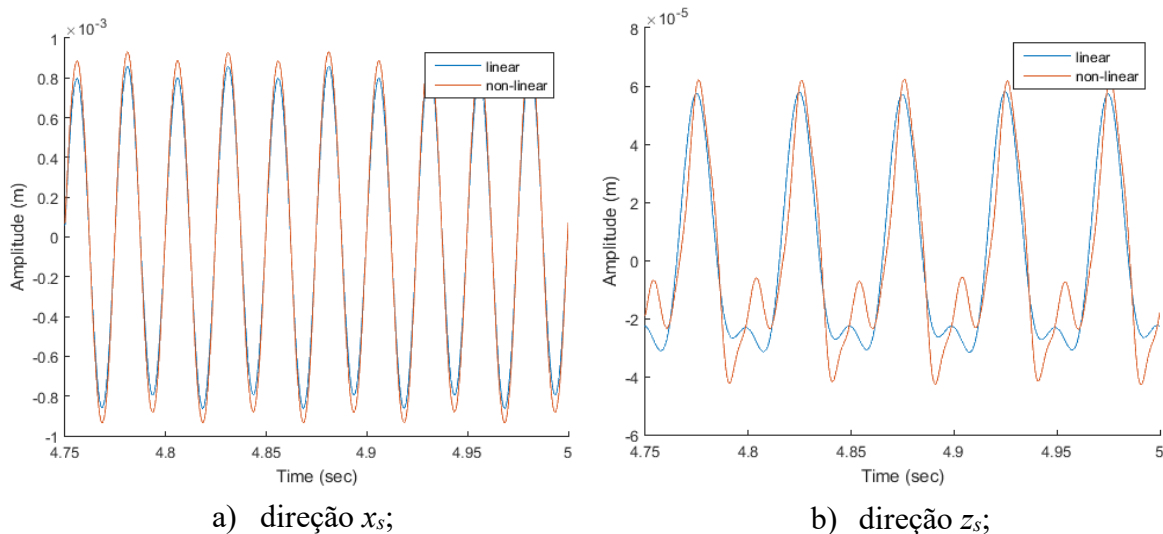


Figura 4.8: Respostas de vibrações no plano  $S_8$  para excitações senoidais na base do rotor para o caso de  $\Gamma = 50 \text{ m/s}^2$ , com frequência supersíncronas da velocidade de rotação e sem efeito da gravidade.

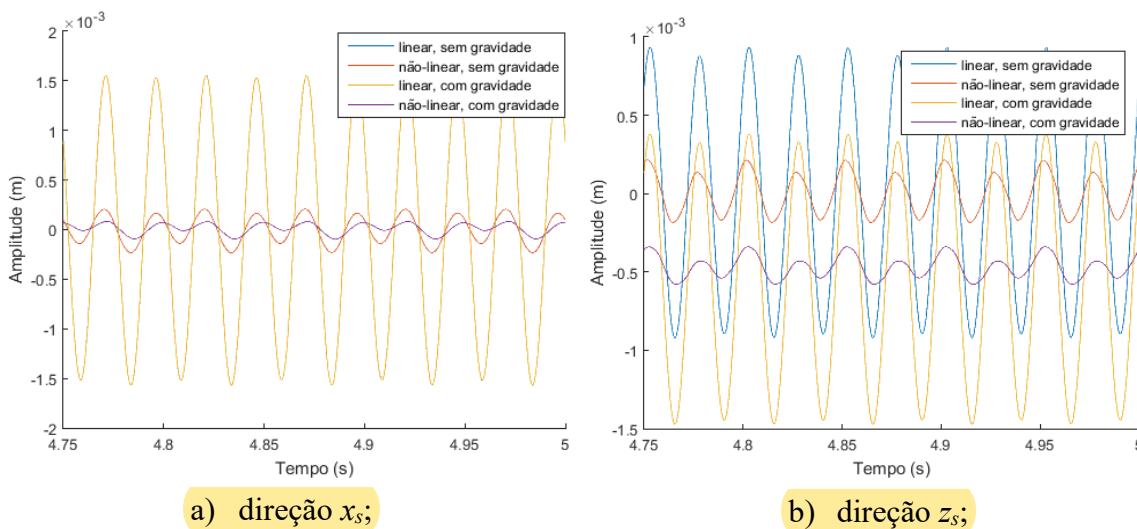


Figura 4.9: Respostas de vibrações no plano  $S_8$  para excitações senoidais na base do rotor para o caso de  $\Gamma = 50 \text{ m/s}^2$ , com frequência supersíncronas da velocidade de rotação e sem efeito da gravidade, para rotor com 10mm de diâmetro.

A Fig. 4.9 mostra que as respostas não-lineares tiveram considerável influência da gravidade, ao contrário do rotor de 17mm de diâmetro, sugerindo que esse tipo de não-

linearidade é muito influenciável pela esbeltez do rotor, inclusive sobre o quanto a gravidade influencia na resposta

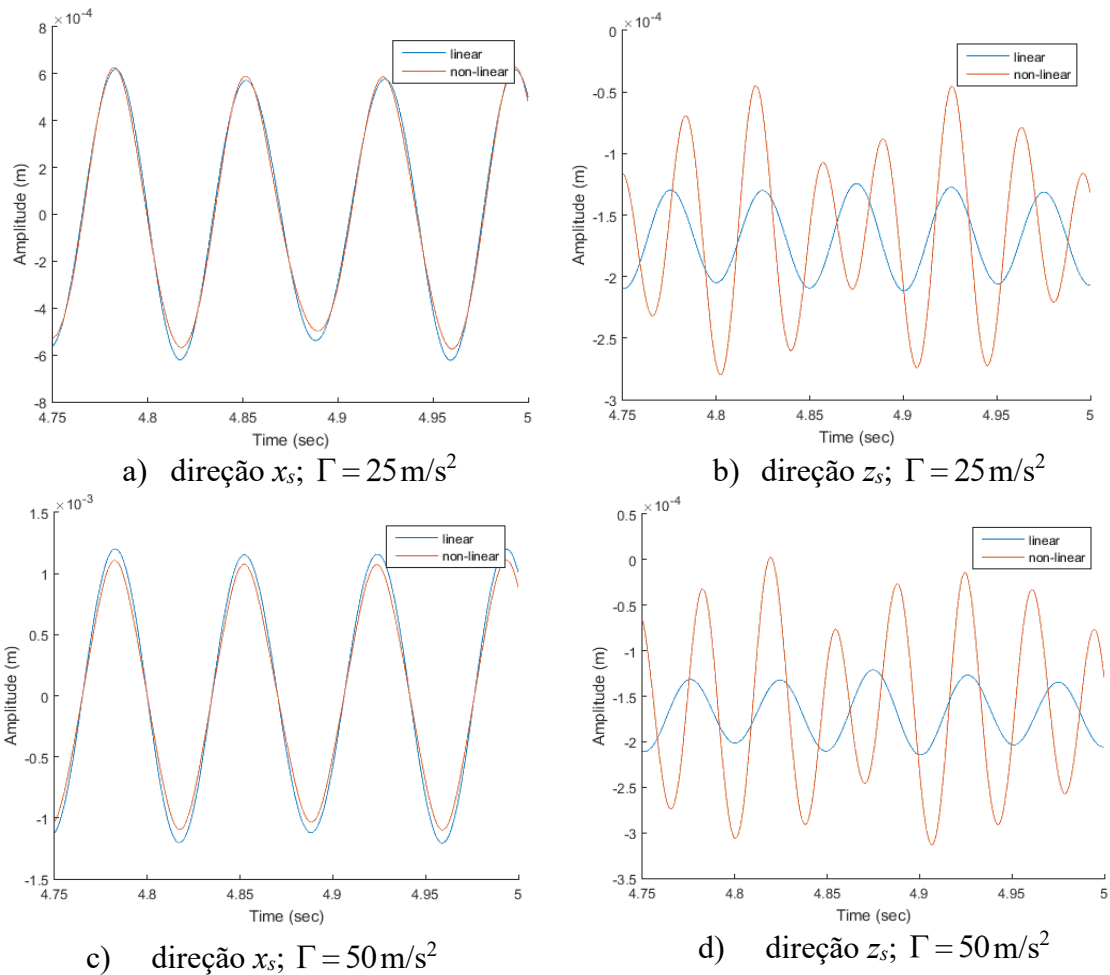


Figura 4.10: Respostas de vibrações no plano  $S_8$  para excitações senoidais na base do rotor com frequência subsíncronas.

As Fig. 4.10 e 4.11 mostram as respostas de vibração da máquina rotativa no plano  $S_8$  e  $S_{28}$ , respectivamente, utilizando uma excitação senoidal aplicada em torno da direção  $x_s$  dada pela Eq. (4.2):

$$\ddot{x}_s = \Gamma \sin\left(n \frac{2\pi \Omega_{cr}}{60} t\right) \quad (4.2)$$

onde  $\Omega_{cr} = 1700\text{RPM}$ ,  $n = 1/2$ ,  $\Gamma = 25 \text{ m/s}^2$  e  $\Gamma = 50 \text{ m/s}^2$ .

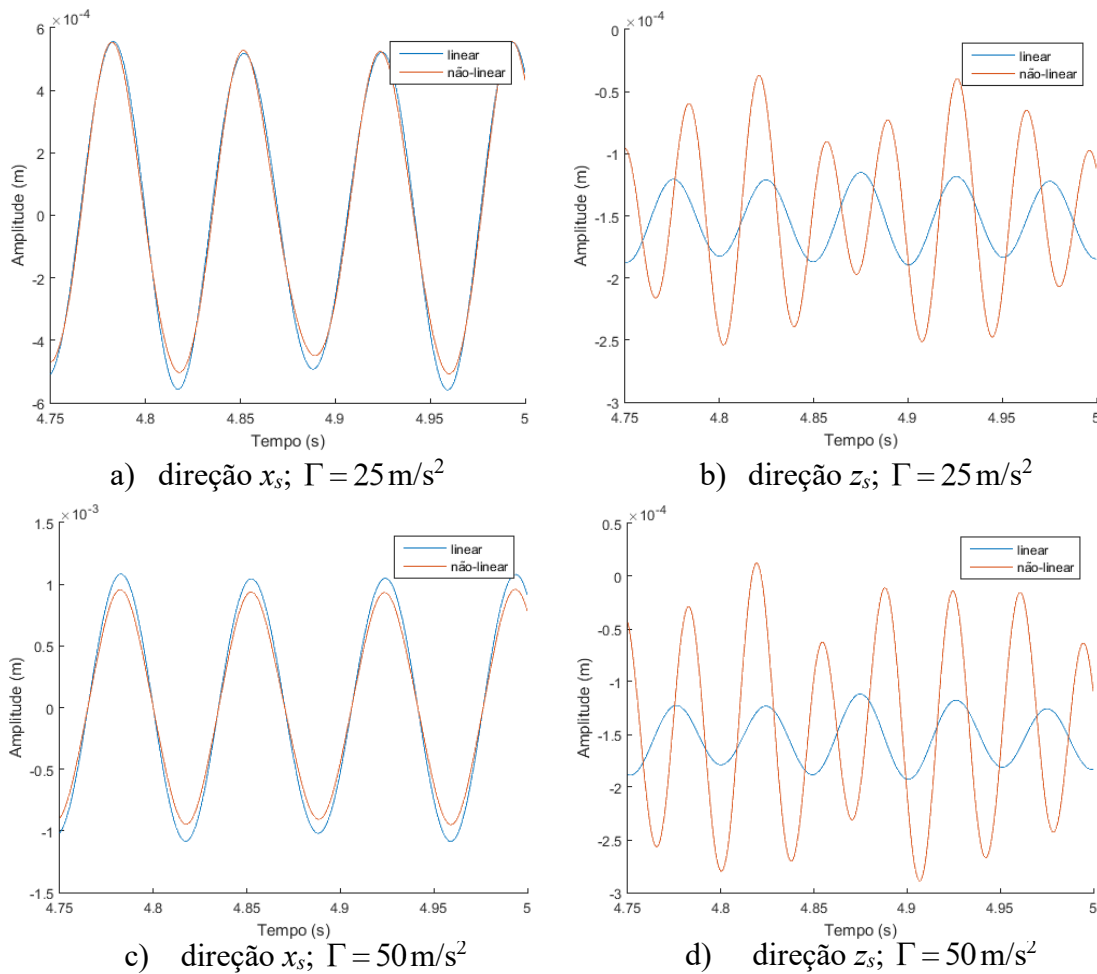


Figura 4.11: Respostas de vibrações no plano  $S_{28}$  para excitações senoidais na base do rotor com frequência subsíncronas.

Analisando as Fig. 4.10 e 4.11 percebe-se que a influência do efeito não-linear sobre a direção  $x_s$  se manteve de forma semelhante ao caso estudado anteriormente, entretanto a influência sobre a direção  $z_s$  é grande, tanto na amplitude como na frequência da resposta: a amplitude da resposta com não-linearidade é consideravelmente maior e a frequência da velocidade crítica excitada se torna bem mais participativa na resposta de vibração, como mostra a DFT da Fig. 4.12. A Fig. 4.13 apresenta a comparação das órbitas apenas para  $\Gamma = 50 \text{ m/s}^2$ .

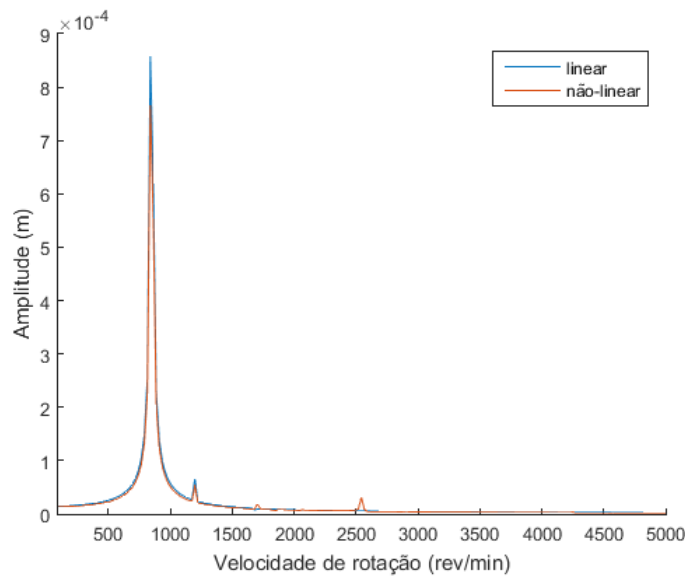
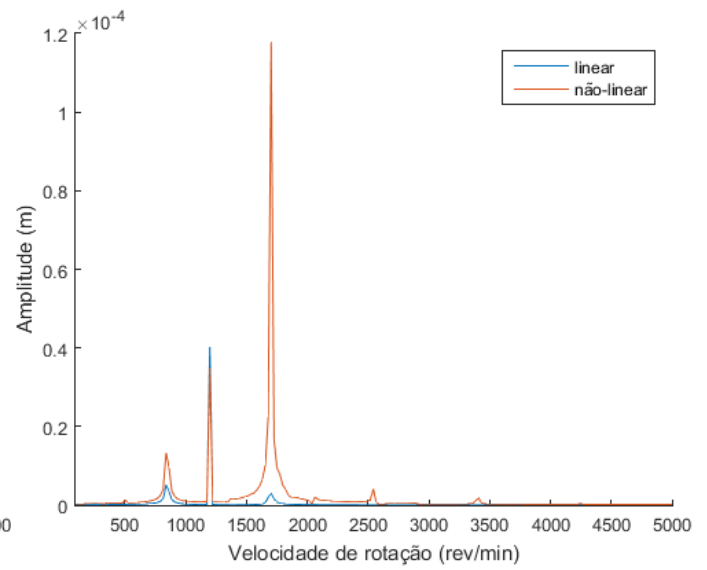
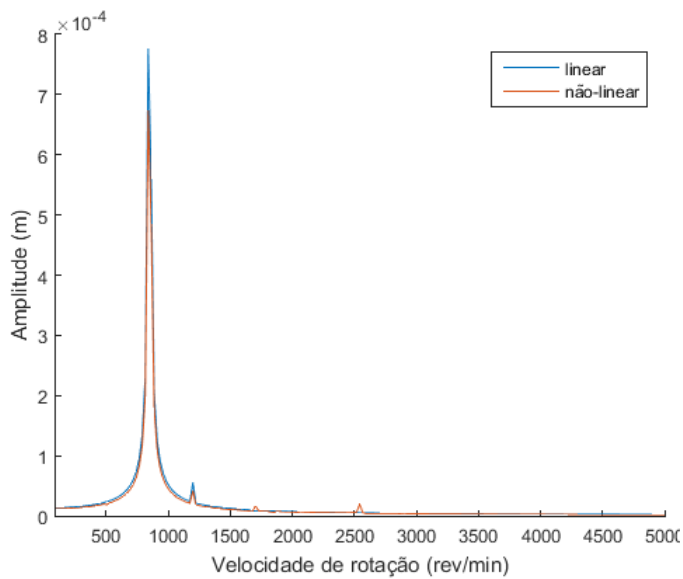
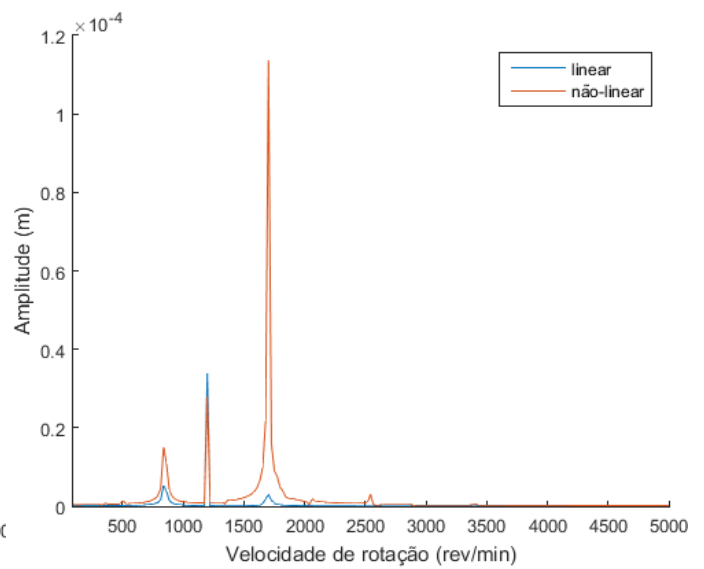
a) direção  $x_s$ , Plano  $S_8$ ;b) direção  $z_s$ , Plano  $S_8$ ;c) direção  $x_s$ , Plano  $S_{28}$ ;d) direção  $z_s$ , Plano  $S_{28}$ ;

Figura 4.12: Transformada Discreta de Fourier (Discrete Fourier Transform / DFT),  
para o caso de  $\Gamma = 50 \text{ m/s}^2$ .



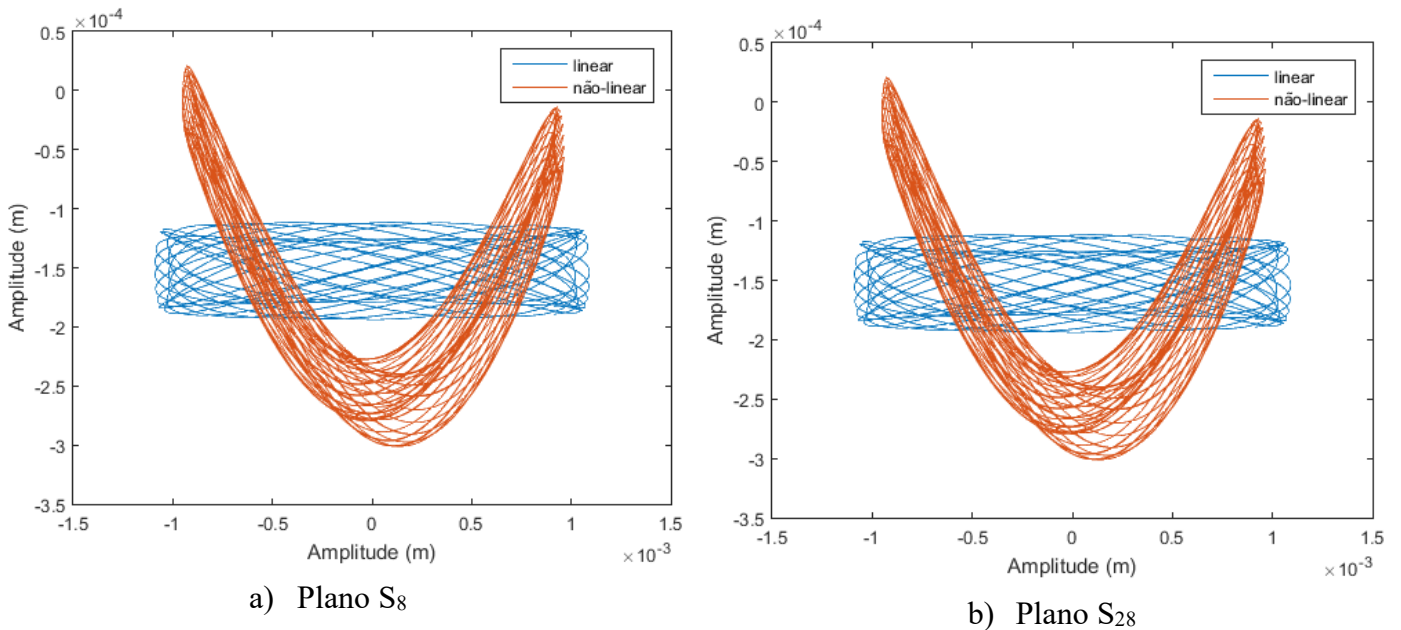


Figura 4.13: Orbitas determinado no plano  $S_8$  para excitações senoidais na base do rotor com frequência subsíncronas, com  $\Gamma = 50 \text{ m/s}^2$ .

Novamente, o acoplamento das direções se mostrou relevante, o que aventa outros questionamentos: se tanto na direção  $x_s$  e  $z_s$  houver excitações que sejam capazes de induzir respostas não-lineares como serão as respostas? O acoplamento das direções vai causar algum grau de retroalimentação nas respostas? O efeito de aumento de rigidez, característico desse tipo de não linearidade, contrabalança essa possível retroalimentação?

Assim, na tentativa de esclarecer esses questionamentos, a Fig. 4.14 apresenta as respostas quando o sistema é excitado nas direções  $x_s$  e  $z_s$  com  $\Gamma = 50 \text{ m/s}^2$ .

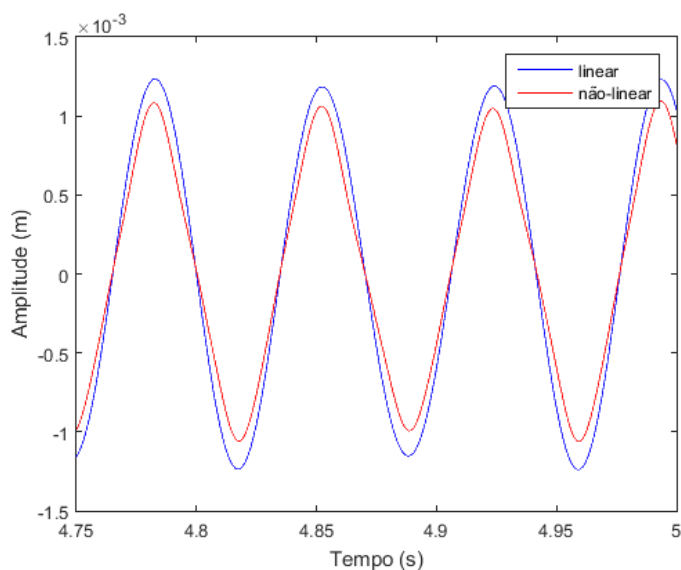
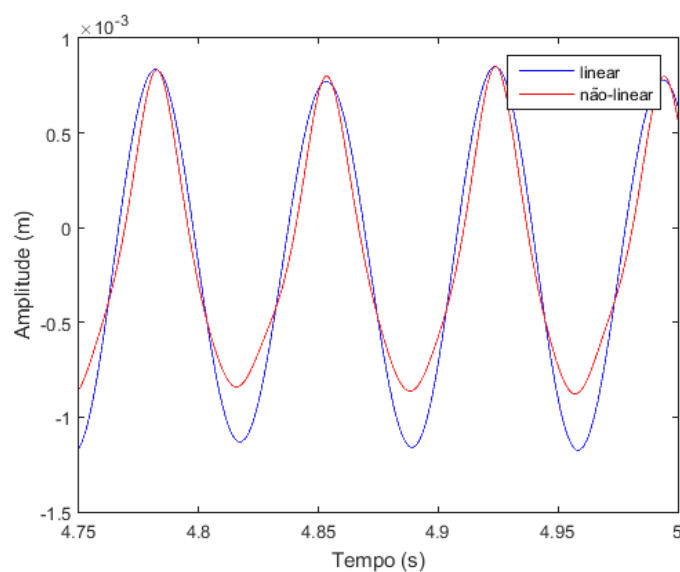
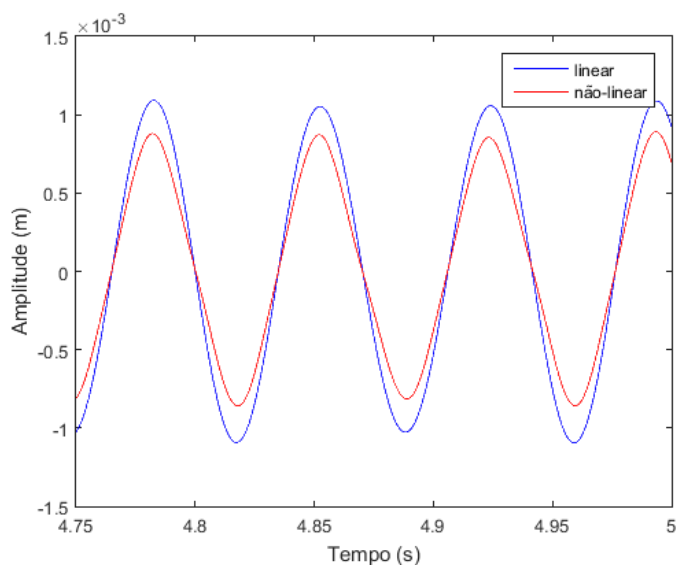
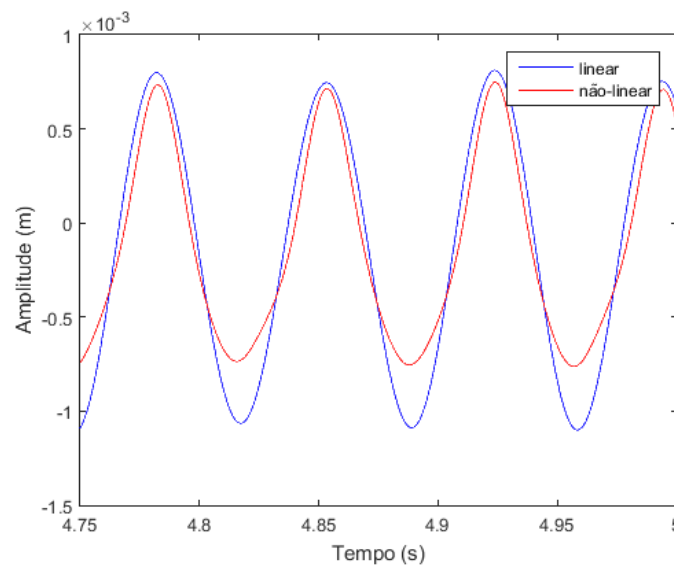
a) direção  $x_s$ ; Plano  $S_8$ b) direção  $z_s$ ; Plano  $S_8$ c) direção  $x_s$ ; Plano  $S_{28}$ d) direção  $z_s$ ; Plano  $S_{28}$ 

Figura 4.14: Respostas de vibrações no plano  $S_8$  para excitações senoidais na base do rotor nas direções  $x_s$  e  $z_s$  com frequência subsíncronas.

Pela análise da Fig. 4.14, percebe-se que as respostas lineares foram maiores que as não-lineares. Tal fato é explicado pelo o efeito de aumento da rigidez do eixo, devido a não-linearidade, que acabou tendo um impacto maior que o efeito do acoplamento e de tal forma que a resposta não-linear na direção  $x_s$ , quando com excitação nas duas direções (Fig. 4.14 - a e d), teve amplitudes ligeiramente menores que a resposta nessa

mesma direção quando excitada só na direção  $x_s$  (Fig. 4.10 - c e Fig. 4.11 - c). As respostas na direção  $z_s$  (Fig. 4.14 - b) não são iguais a direção  $x_s$  por causa do efeito da gravidade que também foi incluído em todos os casos.

Essa análise é corroborada pela Fig. 4.15 que mostra a resposta espectral para o caso em análise. É possível observar que, para o caso linear, o primeiro pico (850 RPM, a frequência de excitação) é superestimada em relação ao caso não-linear para as duas direções e nos dois planos, já para o caso não-linear, aparecem um terceiro e quarto picos (em 1700 e 2550 RPM, duas e três vezes a frequência de excitação respectivamente) devido ao acoplamento das direções, mas que não conseguem compensar a diminuição da amplitude do primeiro pico. O segundo pico se encontra em 1200 RPM, a velocidade de rotação usada.

O fato da não-linearidade geométrica aqui analisada ter induzido a uma considerável diferença das amplitudes quando comparada ao modelo linear é particularmente relevante, o que também levanta a questão da influência de oscilação de parâmetros do sistema sobre a resposta não-linear. Assim, o próximo tópico versa sobre a influência de incertezas sobre as rigidezes dos mancais.

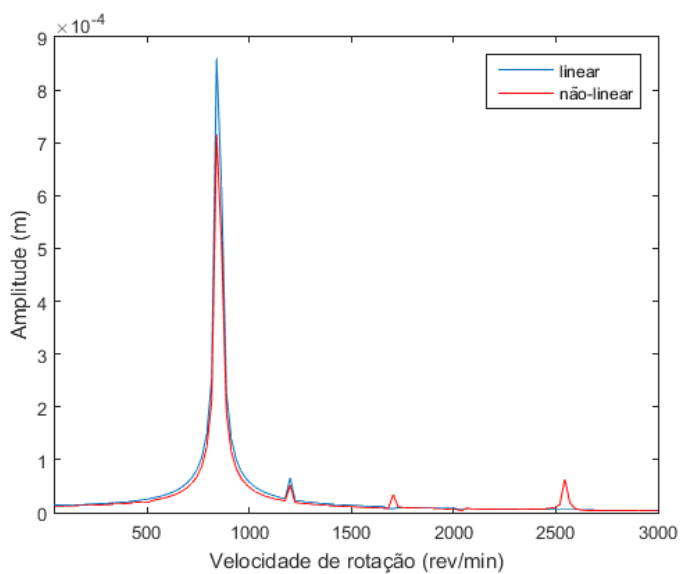
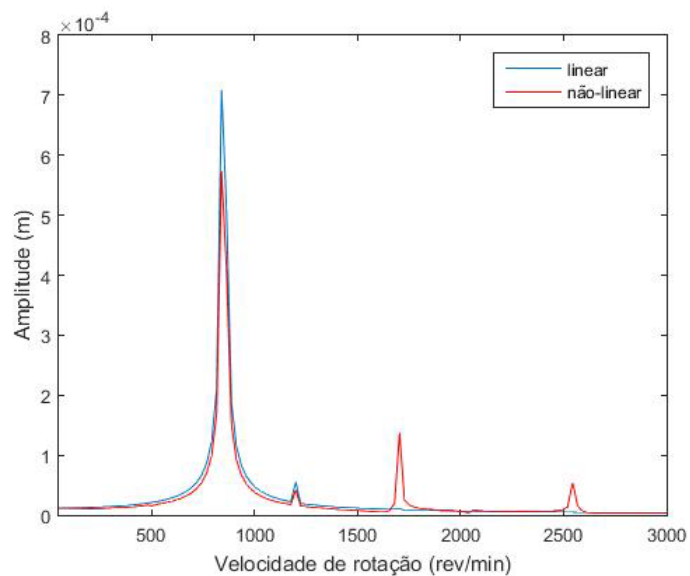
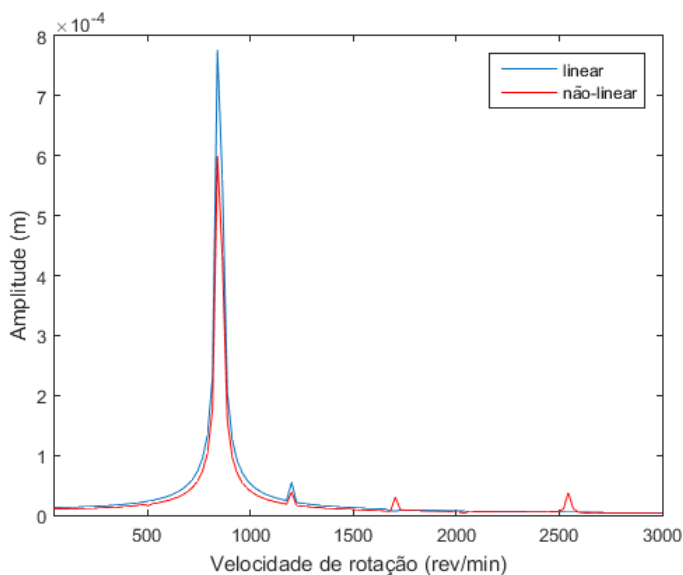
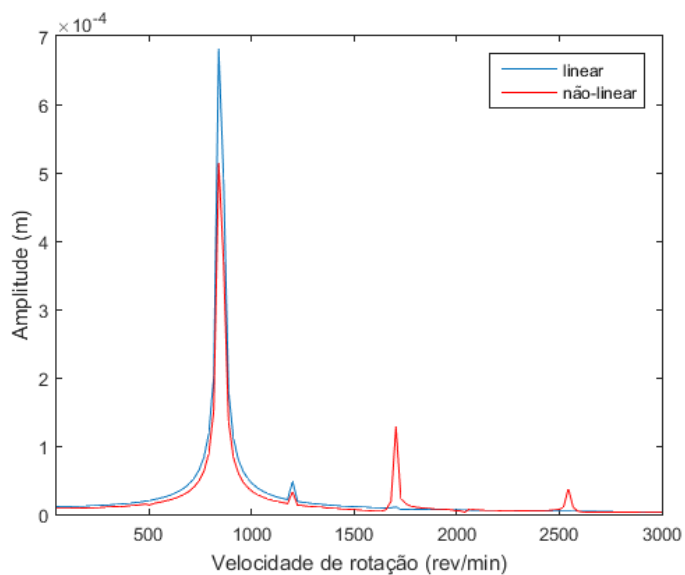
a) direção  $x_s$ ; Plano  $S_8$ b) direção  $z_s$ ; Plano  $S_8$ c) direção  $x_s$ ; Plano  $S_{28}$ d) direção  $z_s$ ; Plano  $S_{28}$ 

Figura 4.15: Transformada Discreta de Fourier (Discrete Fourier Transform / DFT)

da direção  $x_s$  para o caso da excitação subsíncrona nas direções  $x_s$  e  $z_s$ .

## 4.2 Resultados Estocásticos

Para a análise de incertezas foi introduzido um modelo estocástico com 10% de incertezas nas rigidezes dos mancais através da expansão de Karhunen-Loève, conforme a teoria apresentada no Capítulo III, em que foram geradas 200 amostras para a análise das respostas estocásticas sendo a análise de convergência é apresentada na Fig. 4.16 que mostra que antes mesmo de 200 amostra já há convergência já que a variação é menor que 5%.

A Fig.4.17 apresenta as respostas estocásticas, na forma de envelopes, ao longo das direções  $x_s$  e  $z_s$  do plano  $S_8$ , com a excitação senoidal da Eq. (4.1), na direção  $x_s$ , com  $\Gamma = 5\text{m/s}^2$ ,  $\Gamma = 25\text{m/s}^2$  e  $\Gamma = 50\text{m/s}^2$ ; o plano  $S_{28}$  é apresentado na Fig. 4.18. Pela análise dos envelopes, é perceptível que o envelope da resposta se torna mais estreito conforme o nível de excitação aumenta e, por conseguinte, o nível de não-linearidade também aumenta. Esse efeito ocorreu tanto nos planos  $S_8$  e  $S_{28}$ , como nas direções  $x_s$  e  $z_s$ , em especial na direção  $x_s$ , sendo uma evidência que a não-linearidade estudada diminui a sensibilidade do sistema para a incerteza nas rigidezes dos mancais, principalmente na direção de aplicação da excitação (direção  $x_s$ ).

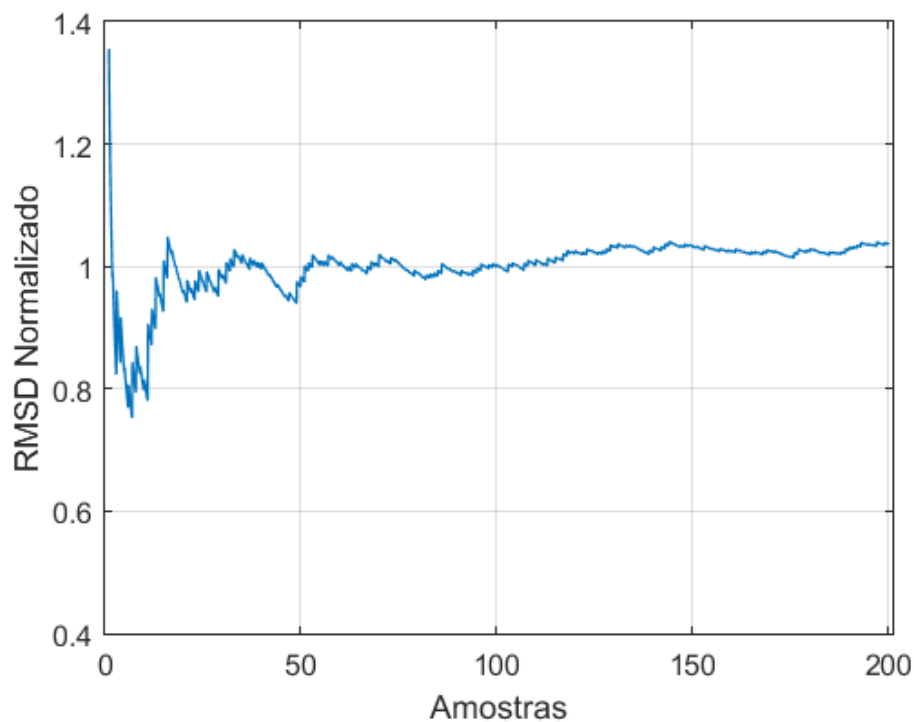
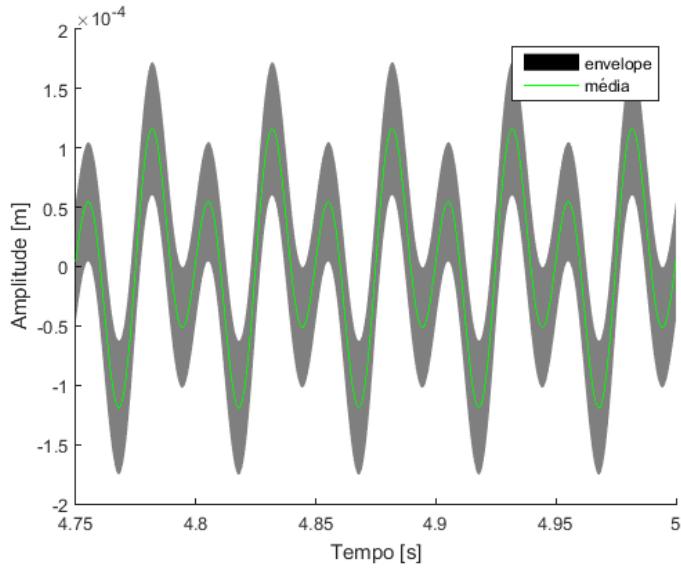
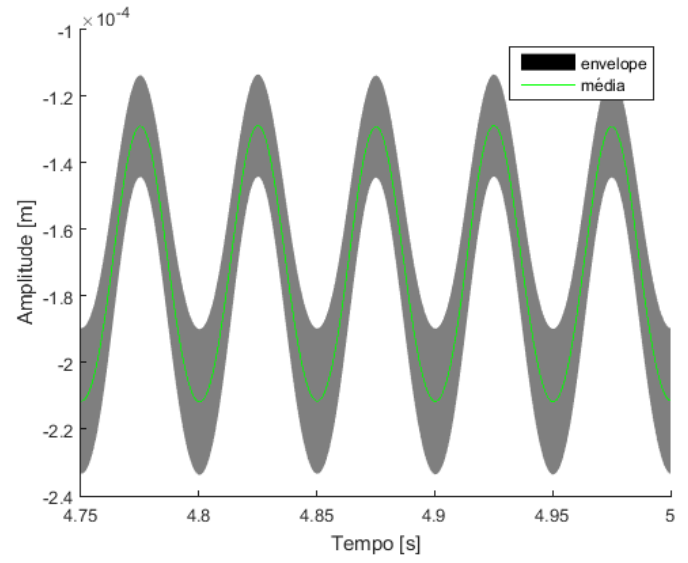
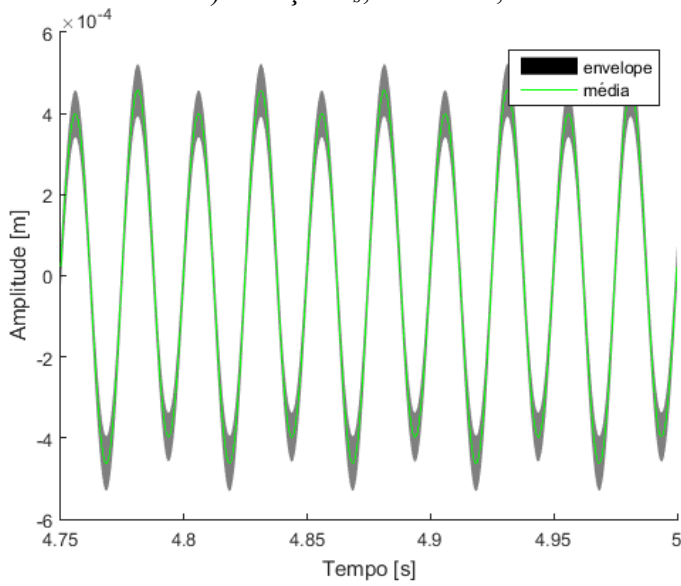
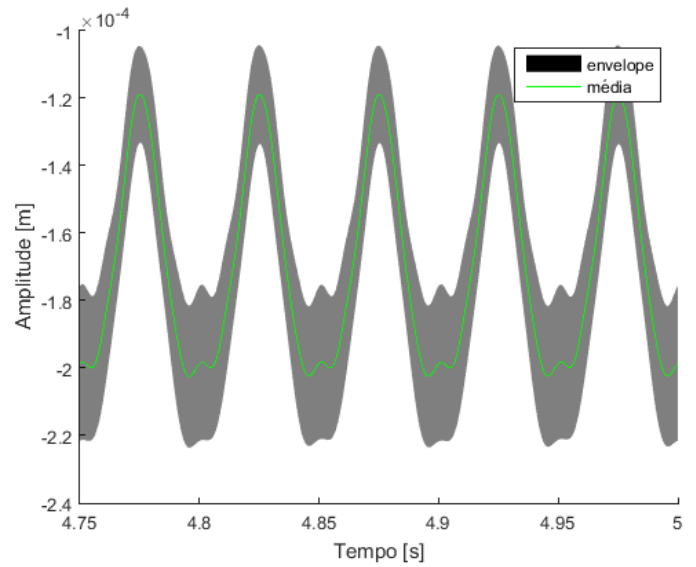
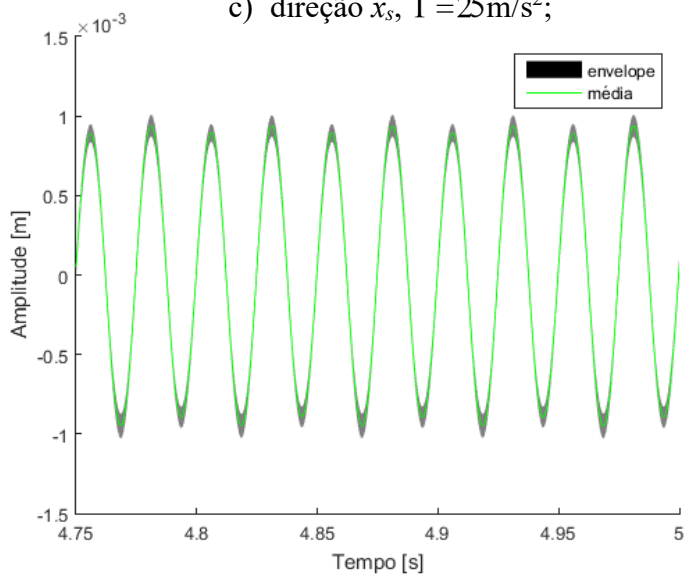
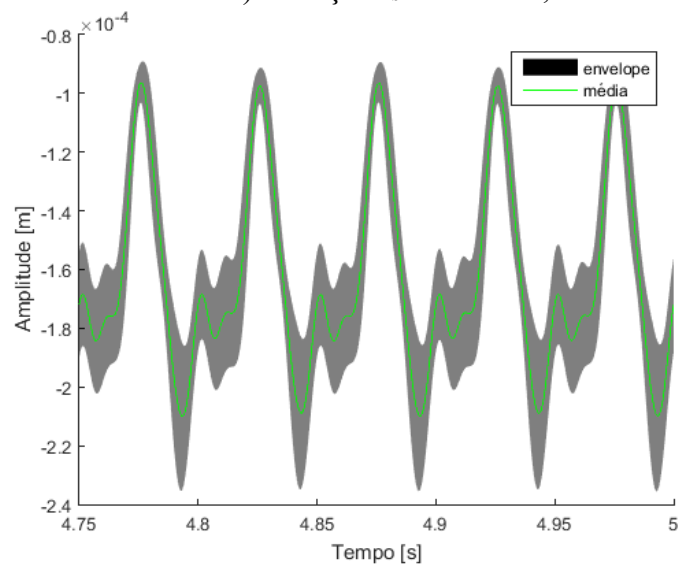


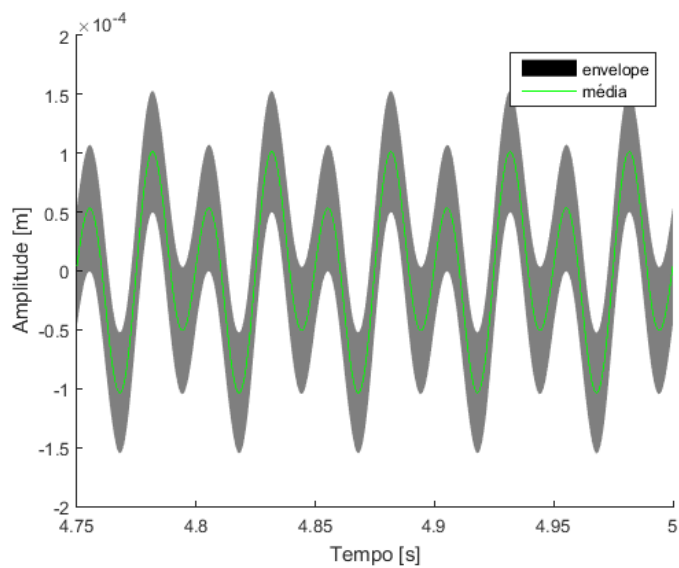
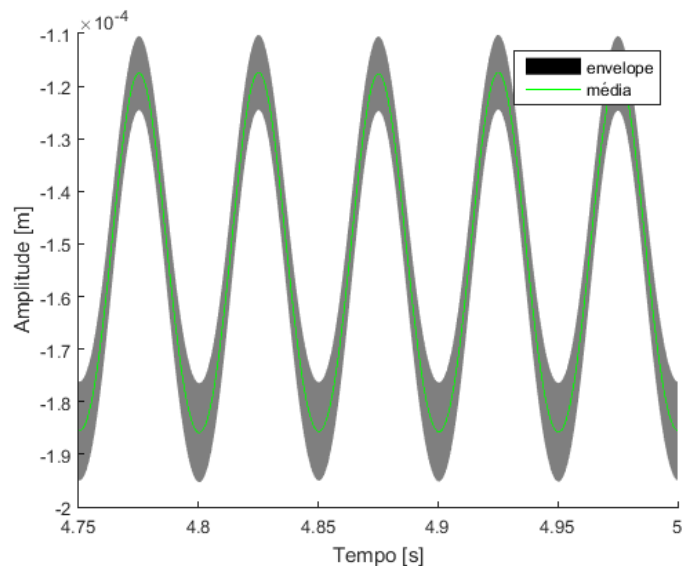
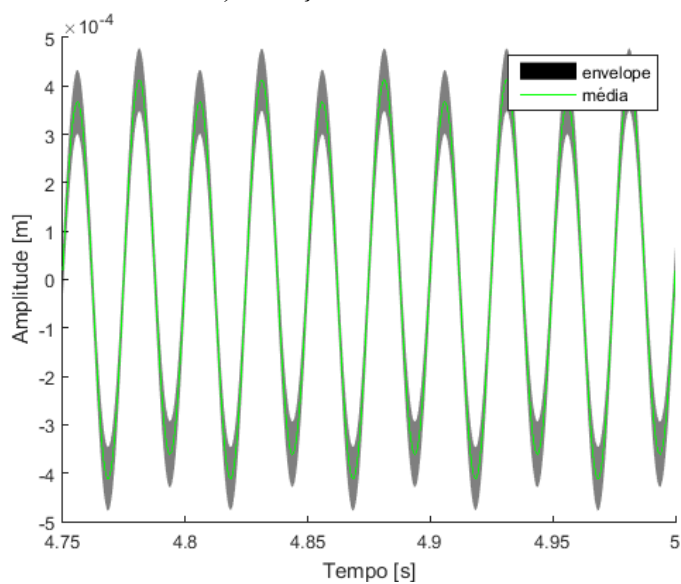
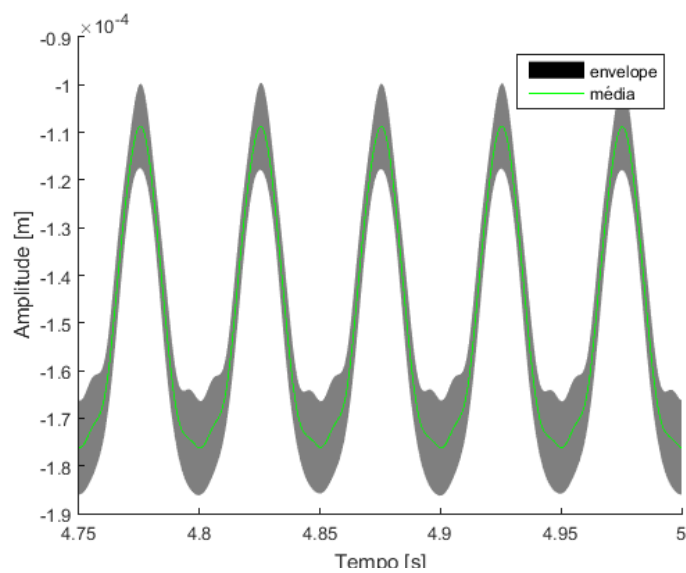
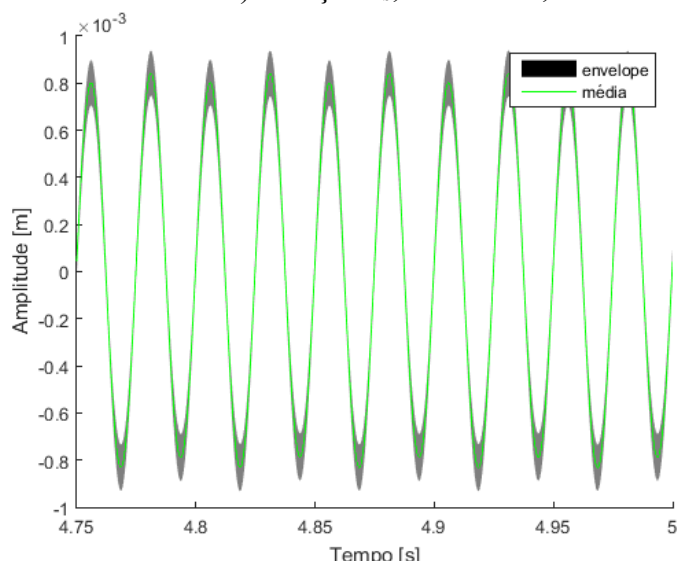
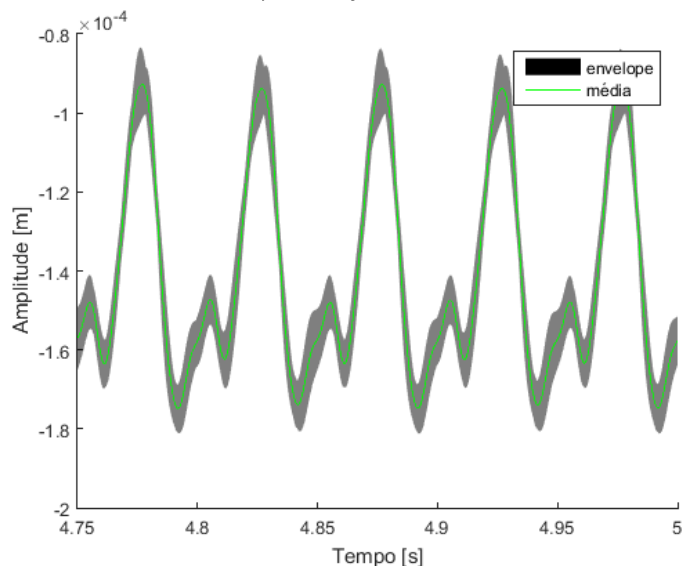
Figura 4.16: Convergência RMSD (root-mean-square deviation) normalizado.

Tal hipótese é reforçada pelas Fig. 4.19 e 4.20 que apresenta os envelopes dos planos  $S_8$  e  $S_{28}$ , respectivamente, com a excitação senoidal da Eq. (4.2), na direção  $x_s$ , com  $\Gamma = 5 \text{ m/s}^2$ ,  $\Gamma = 25 \text{ m/s}^2$  e  $\Gamma = 50 \text{ m/s}^2$ , novamente. Nestas figuras se repete o fato de os envelopes ficarem mais estreitos conforme a excitação aumenta.

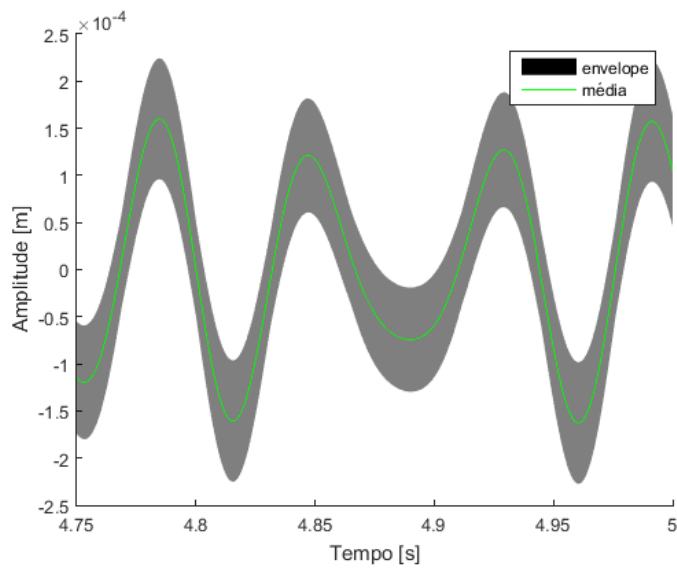
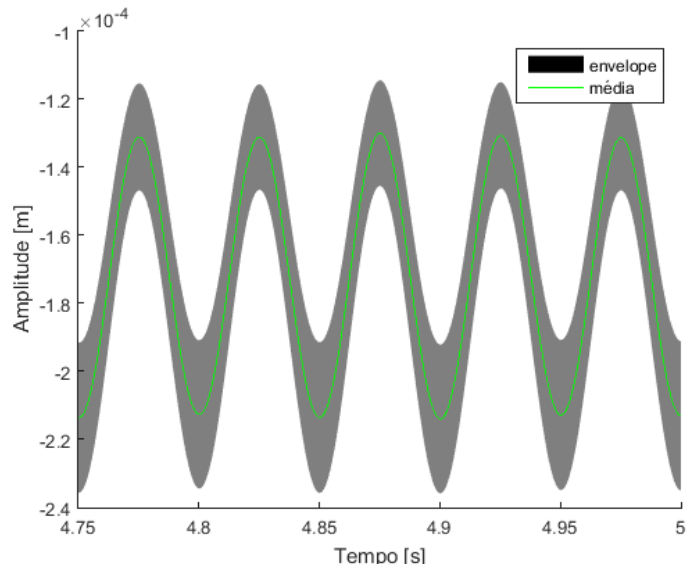
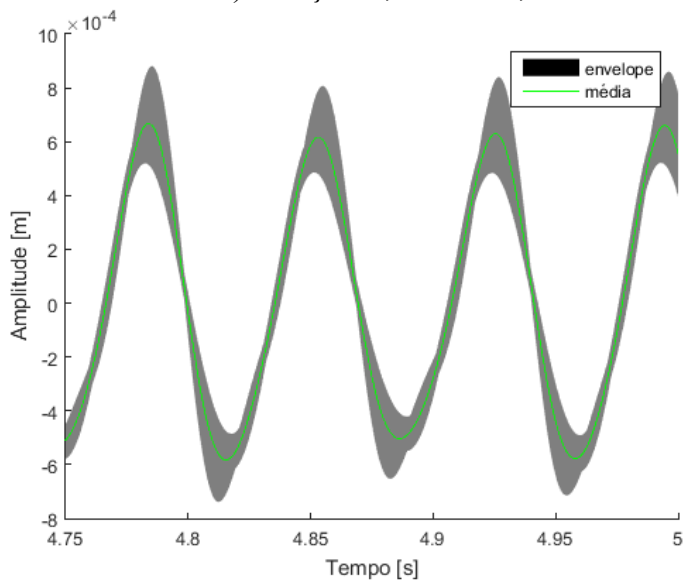
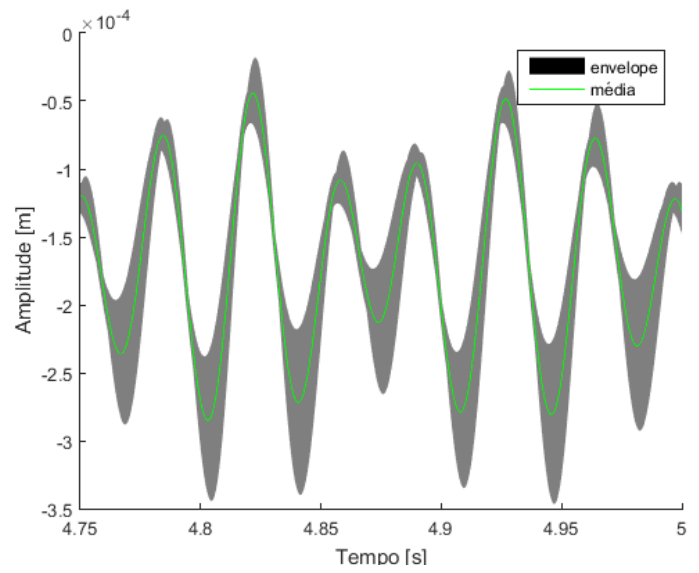
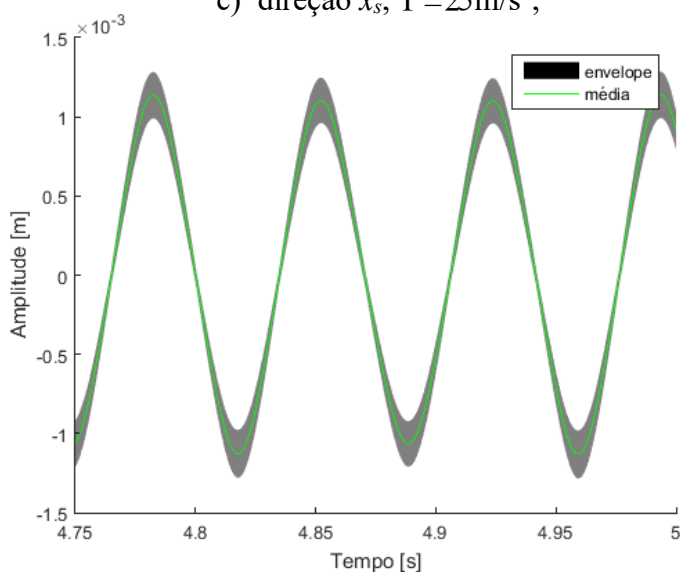
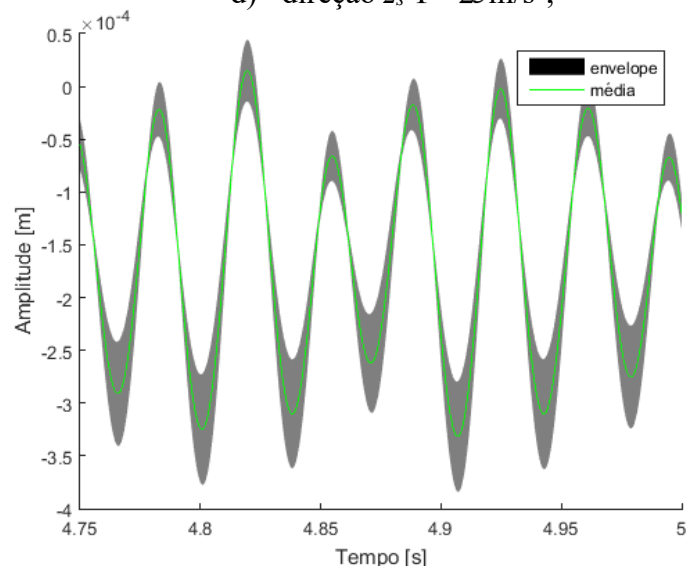
Por fim, as Fig. 4.21 e 4.22 contém os envelopes para excitações aplicada nas direções  $x_s$ , e  $z_s$ , segundo a Eq. (4.2), para os planos  $S_8$  e  $S_{28}$ , respectivamente. Aqui, o fenômeno fica mais evidente nas duas direções.

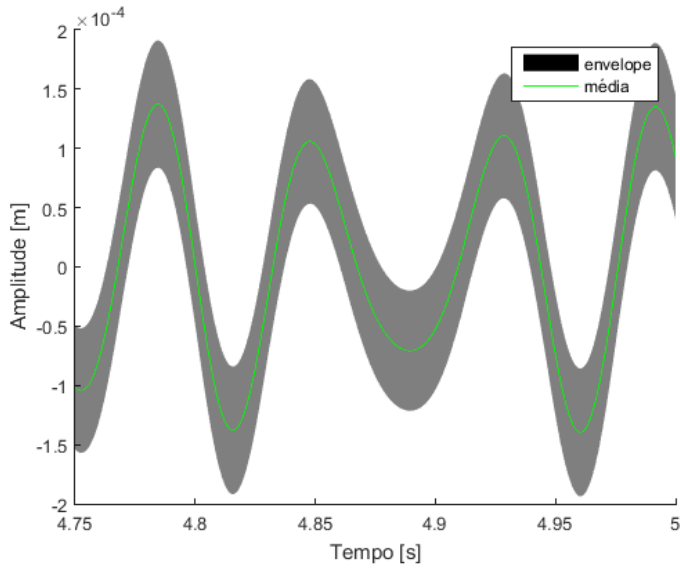
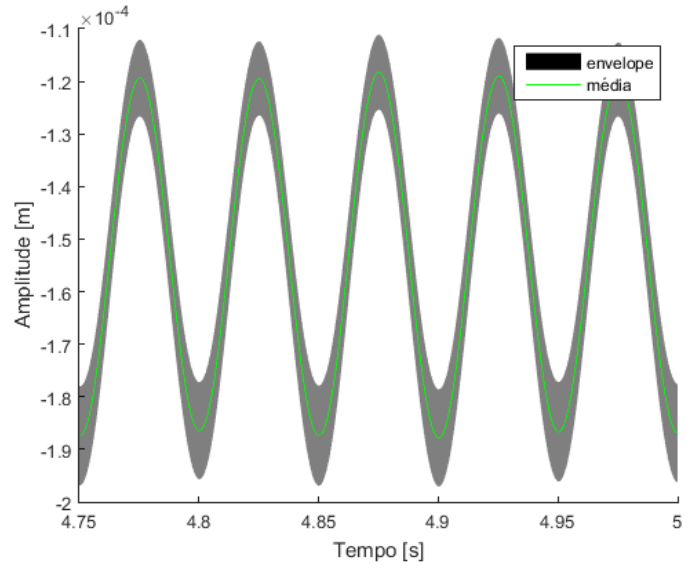
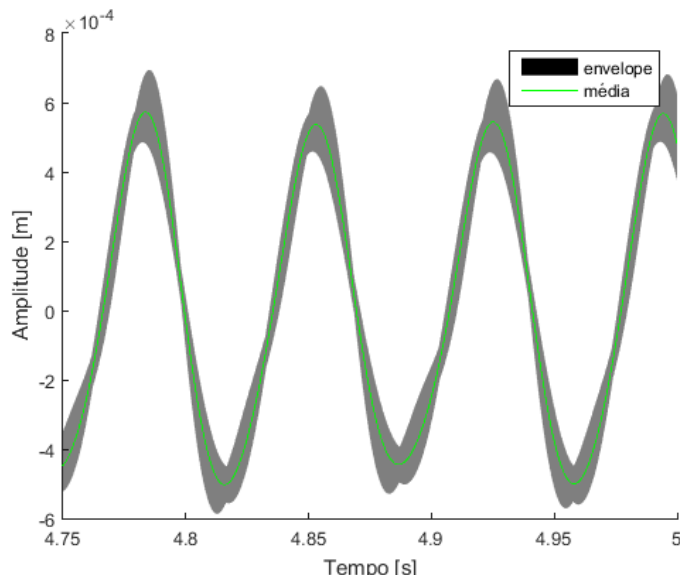
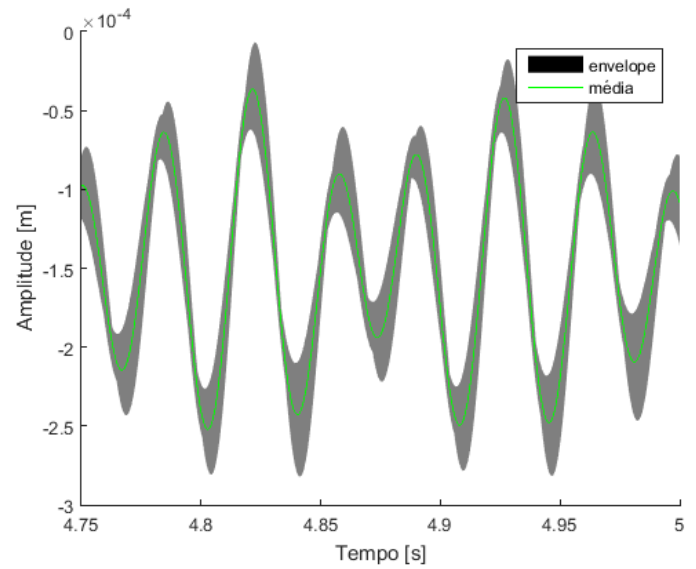
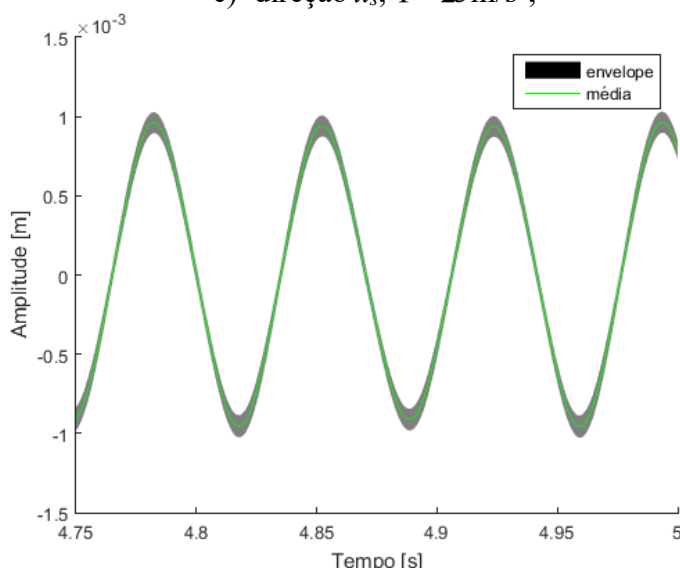
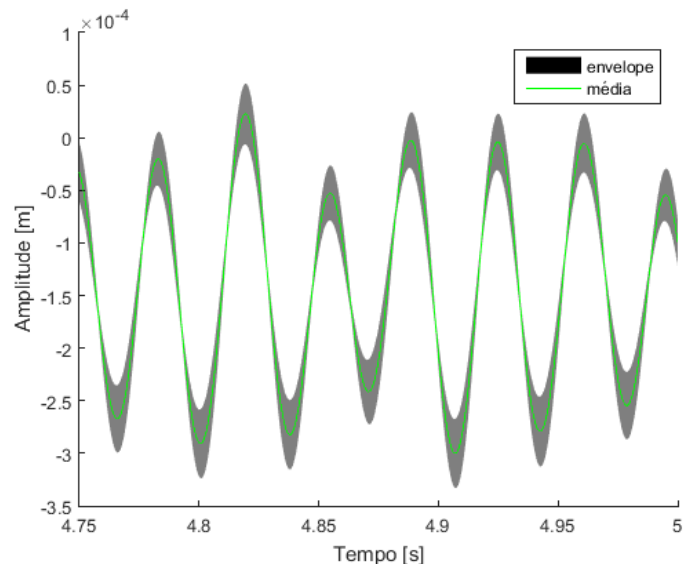
Esse último caso analisado também reforça que o efeito de aumento da rigidez do eixo, causada por essa não-linearidade, se sobrepõe ao efeito de acoplamento das direções, sendo esse fenômeno o maior provável responsável pelo estreitamento dos envelopes enquanto o sistema fica mais não-linear.

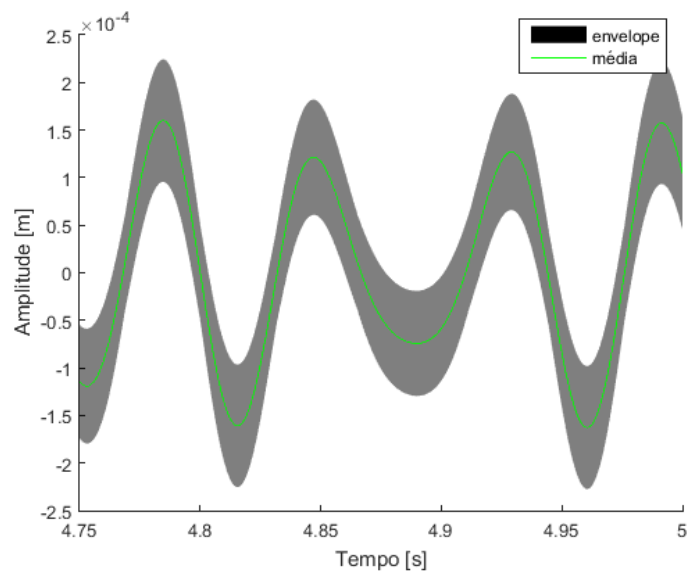
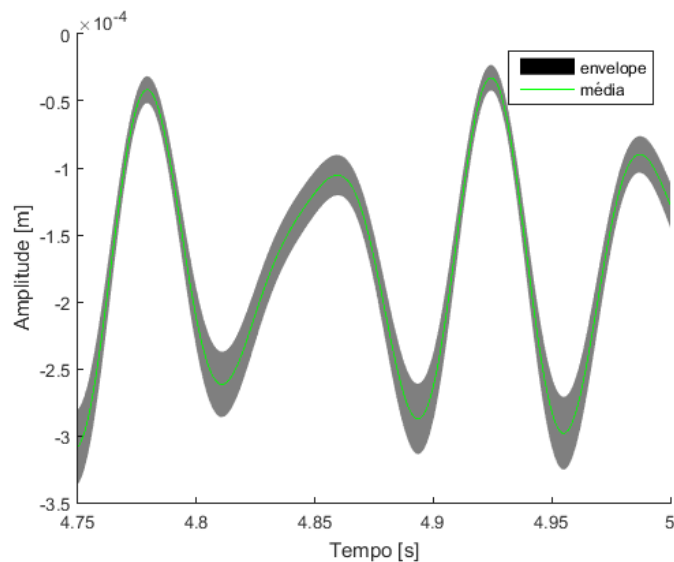
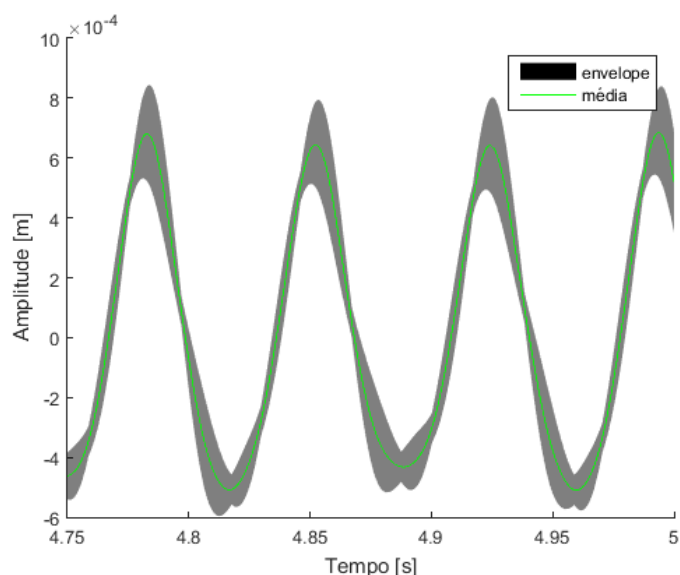
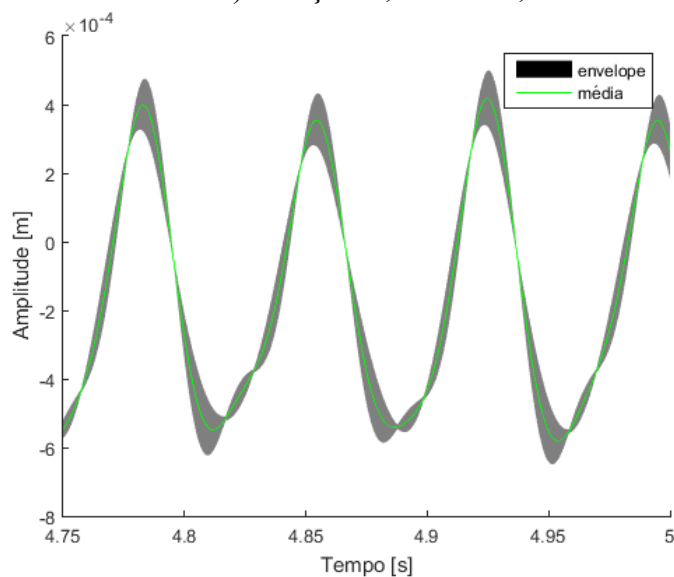
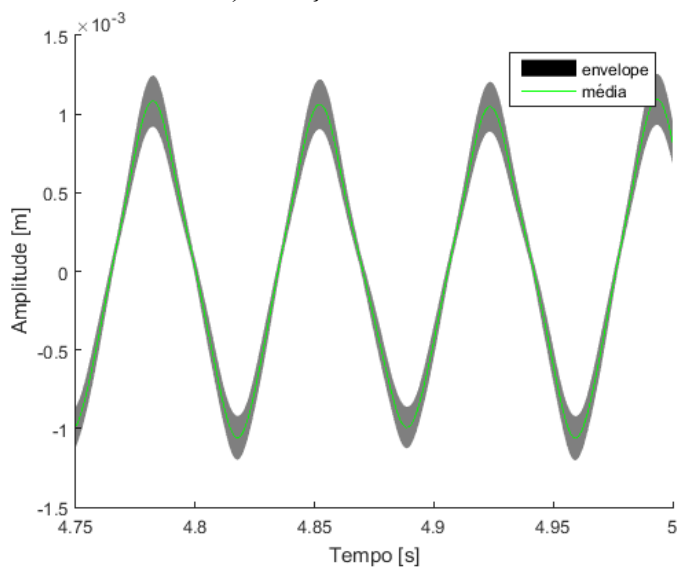
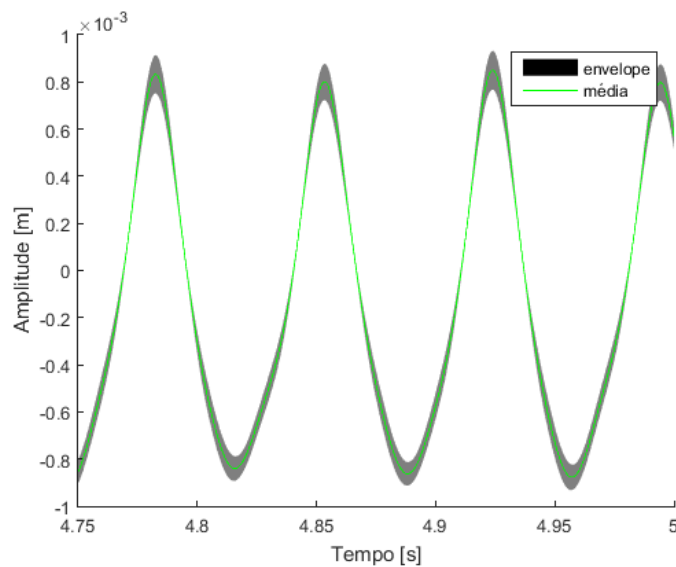
a) direção  $x_s$ ,  $\Gamma=5\text{m/s}^2$ ;b) direção  $x_s$ ,  $\Gamma=5\text{m/s}^2$ ;c) direção  $x_s$ ,  $\Gamma=25\text{m/s}^2$ ;d) direção  $z_s$ ,  $\Gamma=25\text{m/s}^2$ ;e) direção  $x_s$ ,  $\Gamma=50\text{m/s}^2$ ;f) direção  $z_s$ ,  $\Gamma=50\text{m/s}^2$ ;Figura 4.17: Envelopes para excitações supersíncronas; Plano  $S_8$ .

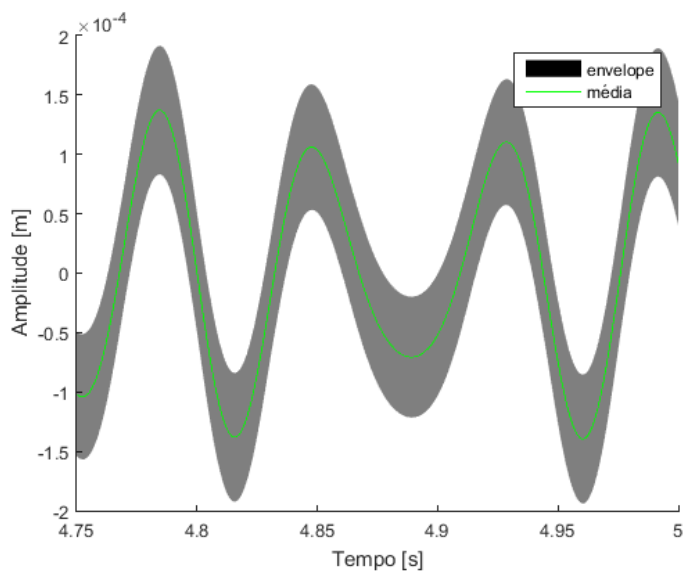
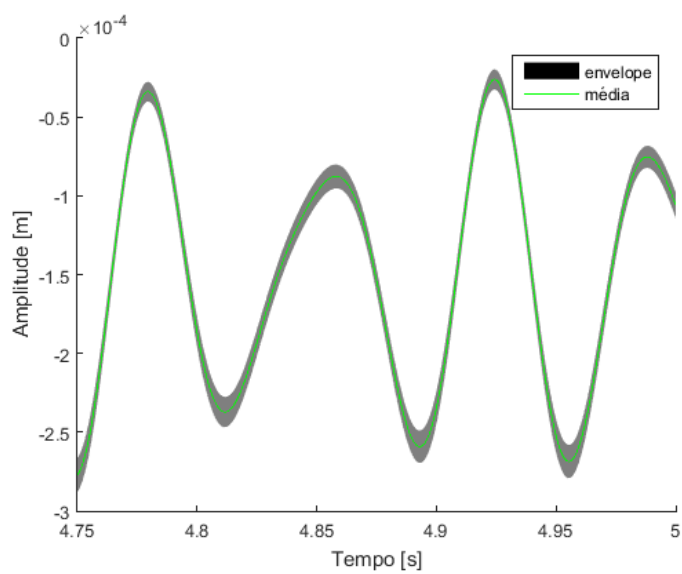
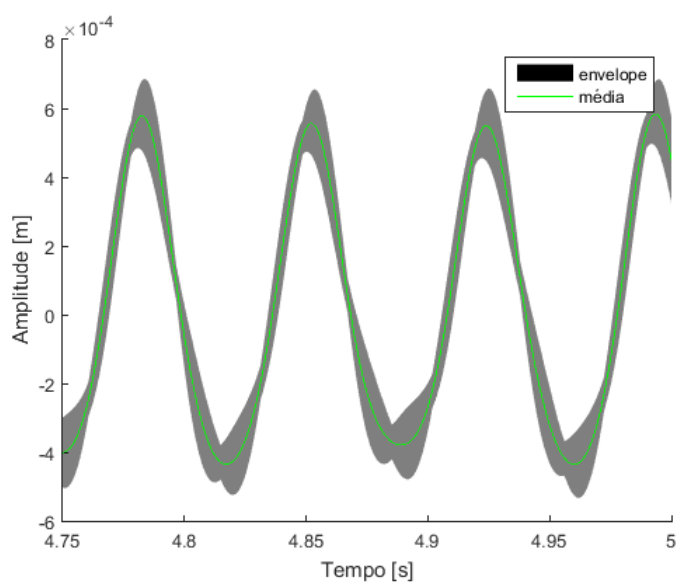
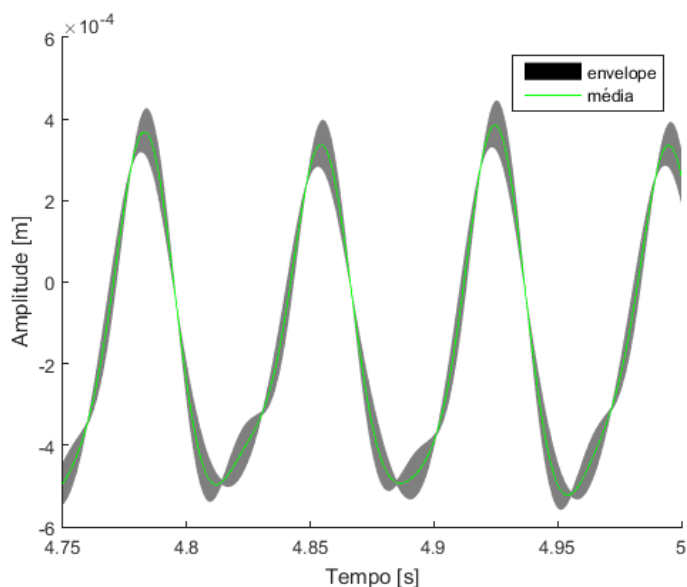
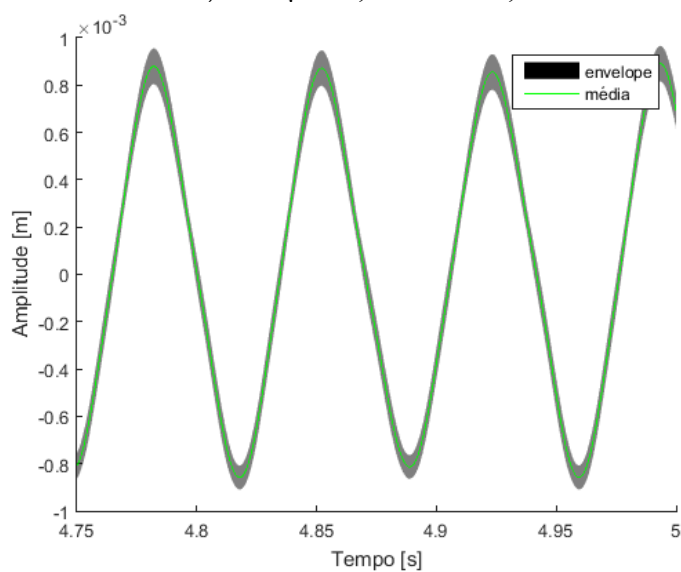
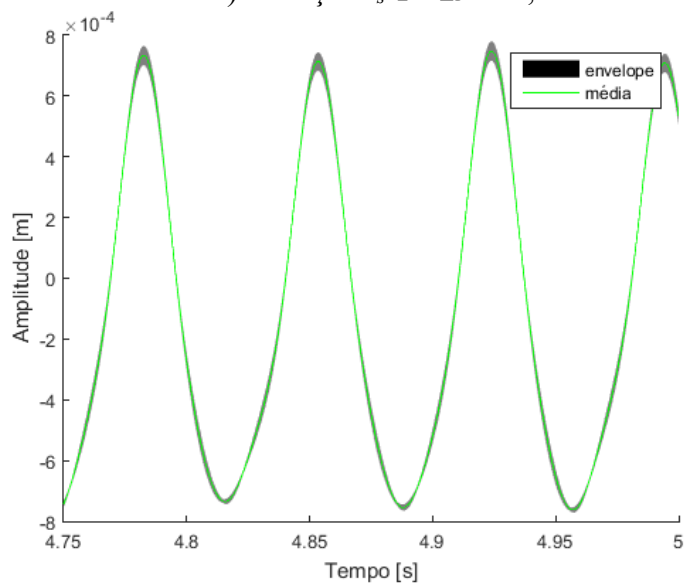
a) direção  $x_s$ ,  $\Gamma=5\text{m/s}^2$ ;b) direção  $x_s$ ,  $\Gamma=5\text{m/s}^2$ ;c) direção  $x_s$ ,  $\Gamma=25\text{m/s}^2$ ;d) direção  $z_s$ ,  $\Gamma=25\text{m/s}^2$ ;e) direção  $x_s$ ,  $\Gamma=50\text{m/s}^2$ ;f) direção  $z_s$ ,  $\Gamma=50\text{m/s}^2$ ;Figura 4.18: Envelopes para excitações supersíncronas; Plano  $S_{28}$ .



a) direção  $x_s$ ,  $\Gamma=5\text{m/s}^2$ ;b) direção  $x_s$ ,  $\Gamma=5\text{m/s}^2$ ;c) direção  $x_s$ ,  $\Gamma=25\text{m/s}^2$ ;d) direção  $z_s$ ,  $\Gamma=25\text{m/s}^2$ ;e) direção  $x_s$ ,  $\Gamma=50\text{m/s}^2$ ;f) direção  $z_s$ ,  $\Gamma=50\text{m/s}^2$ ;Figura 4.19: Envelopes para excitações subsíncronas; Plano  $S_8$ .

a) direção  $x_s$ ,  $\Gamma=5\text{m/s}^2$ ;b) direção  $x_s$ ,  $\Gamma=5\text{m/s}^2$ ;c) direção  $x_s$ ,  $\Gamma=25\text{m/s}^2$ ;d) direção  $z_s$ ,  $\Gamma=25\text{m/s}^2$ ;e) direção  $x_s$ ,  $\Gamma=50\text{m/s}^2$ ;f) direção  $z_s$ ,  $\Gamma=50\text{m/s}^2$ ;Figura 4.20: Envelopes para excitações subsíncronas; Plano  $S_{28}$ .

a) direção  $x_s$ ,  $\Gamma=5\text{m/s}^2$ ;b) direção  $x_s$ ,  $\Gamma=5\text{m/s}^2$ ;c) direção  $x_s$ ,  $\Gamma=25\text{m/s}^2$ ;d) direção  $z_s$ ,  $\Gamma=25\text{m/s}^2$ ;e) direção  $x_s$ ,  $\Gamma=50\text{m/s}^2$ ;f) direção  $z_s$ ,  $\Gamma=50\text{m/s}^2$ ;Figura 4.21: Envelopes para excitações nas duas direções; Plano  $S_8$ .

a) direção  $x_s$ ,  $\Gamma=5\text{m/s}^2$ ;b) direção  $x_s$ ,  $\Gamma=5\text{m/s}^2$ ;c) direção  $x_s$ ,  $\Gamma=25\text{m/s}^2$ ;d) direção  $z_s$ ,  $\Gamma=25\text{m/s}^2$ ;e) direção  $x_s$ ,  $\Gamma=50\text{m/s}^2$ ;f) direção  $z_s$ ,  $\Gamma=50\text{m/s}^2$ ;Figura 4.22: Envelopes para excitações nas duas direções; Plano  $S_{28}$ .

# CAPÍTULO V

## RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Este capítulo apresenta a validação e ajuste do modelo de EF de rotor embarcado não-linear descrito em capítulos anteriores desse trabalho. Para tal, foi projetada e construída uma bancada experimental com a finalidade de estudar o comportamento dinâmico desse sistema. Para a análise foram usadas excitações variadas: do tipo impacto e do tipo seno, para o sistema operando em 1200 RPM. Finalmente, uma análise estocástica foi realizada.

### 5.1 Bancada de Testes

A Fig. 5.1 mostra a bancada de teste na análise do rotor embarcado, representado por um modelo de 21 elementos finitos (Fig. 5.2), sendo esse composto de um eixo flexível de aço de 550 mm de comprimento, 10 mm de diâmetro (densidade de  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$  e módulo de elasticidade  $E = 190 \text{ GPa}$ ), um disco  $D$  considerado rígido (nó 10, 2.300 kg) de aço com 100 mm de diâmetro e 40 mm de espessura ( $\rho = 7842 \text{ kg/m}^3$ ), dois mancais de rolamento ( $B_1$  e  $B_2$ , localizado nos nós 3 e 20, respectivamente). Sensores de deslocamento (Meggitt TQ-412 com 4 mm de alcance) foram dispostos ortogonalmente no nó 10 ( $S_{10xs}$  e  $S_{10zs}$ ) para coletar a vibração do disco. O sistema é alimentado por um motor elétrico DC. As medidas foram realizadas pelo analisador Agilent® (modelo 35670A) com alcance de 0 a 250 Hz e passo de 0,25 Hz. A velocidade de rotação foi controlada através de uma fonte e aferida por um *encoder*.

Foi realizado um procedimento de ajuste de modelo para os valores de parâmetros desconhecidos a serem usados no modelo de elementos finitos (EF), sendo esses: os coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais, a rigidez devido ao acoplamento entre o motor elétrico e o eixo ( $K_{rotx}$  e  $K_{rotz}$ , em torno das direções ortogonais do nó 1,

sendo, então, os graus de liberdade 3 e 4, para  $K_{rotx}$ ; os graus de liberdade 7 e 8, para  $K_{rotz}$ ) e os coeficientes de amortecimento modal referentes aos dois primeiros modos.

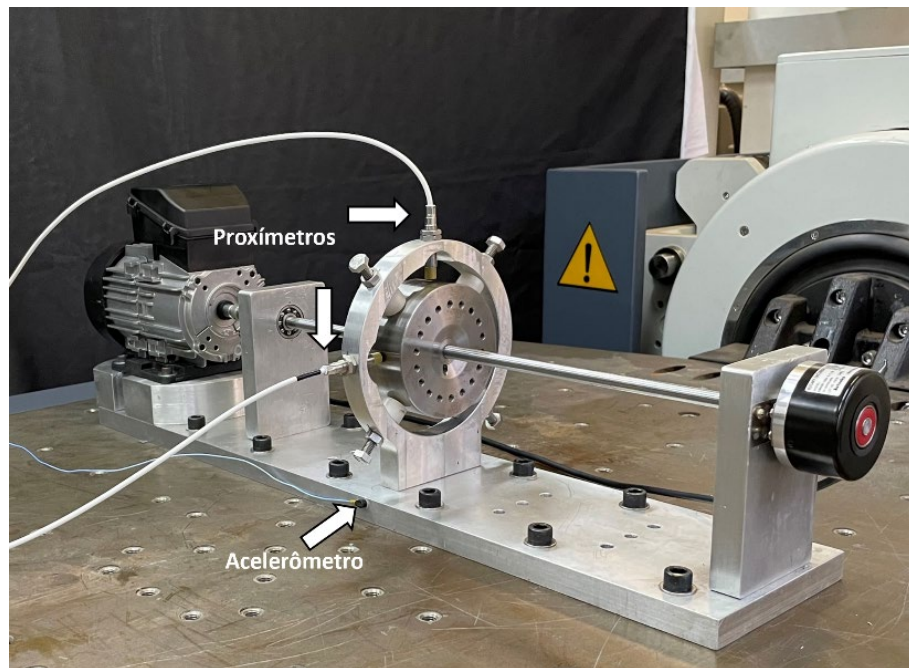


Figura 5.1: bancada de teste.

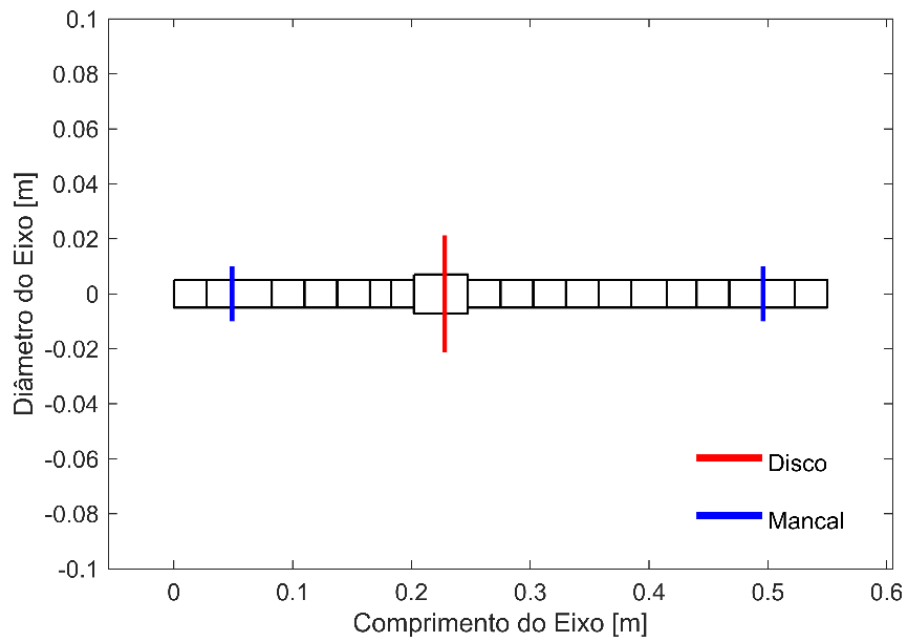


Figura 5.2: Representação esquemática da máquina rotativa.

O ajuste desses parâmetros desconhecidos foi realizado através de um processo de otimização com base nas funções de resposta em frequência (FRF) simuladas e experimentais do rotor. A função objetivo adotada neste caso é apresentada pela Eq. (5.1)

e o método de otimização escolhido foi o de Evolução Diferencial (PRICE, 2006). Cada processo de minimização da função objetivo foi realizado com 100 indivíduos na população inicial, sendo que esse processo foi repetido 10 vezes a fim de determinar a solução de mínimo global do problema. Aqui, apenas as regiões próximas aos picos associados as frequências naturais foram levadas em consideração.

$$Objetivo = \sum_{i=1}^n \frac{\|FRF_{exp,i} - FRF_{num,i}\|}{\|FRF_{exp,i}\|} \quad 5.1$$

onde  $n$  é o número de  $FRFs$  utilizadas no procedimento,  $FRF_{exp}$  representa os dados experimentais e  $FRF_{num}$  corresponde aos resultados numéricos obtidos pelo modelo EF do sistema de rotativo. As  $FRF$  foram medidas com o rotor em repouso através da aplicação de forças de impacto ao longo das direções  $x_s$  e  $z_s$  do disco. O sinal foi medido pelo proximetro disposto na direção de aplicação da força de impacto, como mostrado na Fig. 5.1, resultando em 2  $FRFs$ . A Tab. 5.1 apresenta os parâmetros determinados ao final do processo de otimização, já a Fig. 5.3 apresenta as comparações das  $FRFs$  experimentais e obtida pelo modelo de EF usando os parâmetros obtidos e a análise dessa Fig.5.3 mostra que o modelo de EF é representativo, principalmente na faixa de frequência que compreende os dois primeiros modos de vibrar do rotor. As velocidades críticas do rotor são, aproximadamente, 1620 RPM (BW) e 1640 RPM (FW).

Ainda no âmbito de verificar o ajuste do modelo, a Fig. 5.4 mostra as respostas de vibração comparando os resultados numérico e experimental para o sistema operando em 1200 RPM. Para o ajuste do modelo para o rotor em rotação foi inserido no modelo de EF um desbalanceamento no disco de 301 g.mm/180°.

Tabela 5.1: parâmetros obtidos pelo procedimento de otimização.

Parâmetros	Valor	Parâmetro s	Valor
$k_{xx} / B_1$	$6,2212 \times 10^{11}$	$k_{xx} / B_2$	$8,2154 \times 10^{11}$
$k_{zz} / B_1$	$5,2028 \times 10^{11}$	$k_{zz} / B_2$	$9,7563 \times 10^{11}$
$d_{xx} / B_1$	41,1095	$d_{xx} / B_2$	71,4022
$d_{zz} / B_1$	94,8811	$d_{zz} / B_2$	64,1701
$K_{rotx}$	300,1298	$K_{rotz}$	374,4974
$\gamma_1$	0.0160	$\gamma_2$	0.0130
$\gamma_3$	0.0020	$\gamma_4$	0.0030

\* $k$  e  $K_{rot}$ : rigidez [N/m];  $d$ : amortecimento [Ns/m];  $\gamma$ : amortecimento modal [Ns/m].

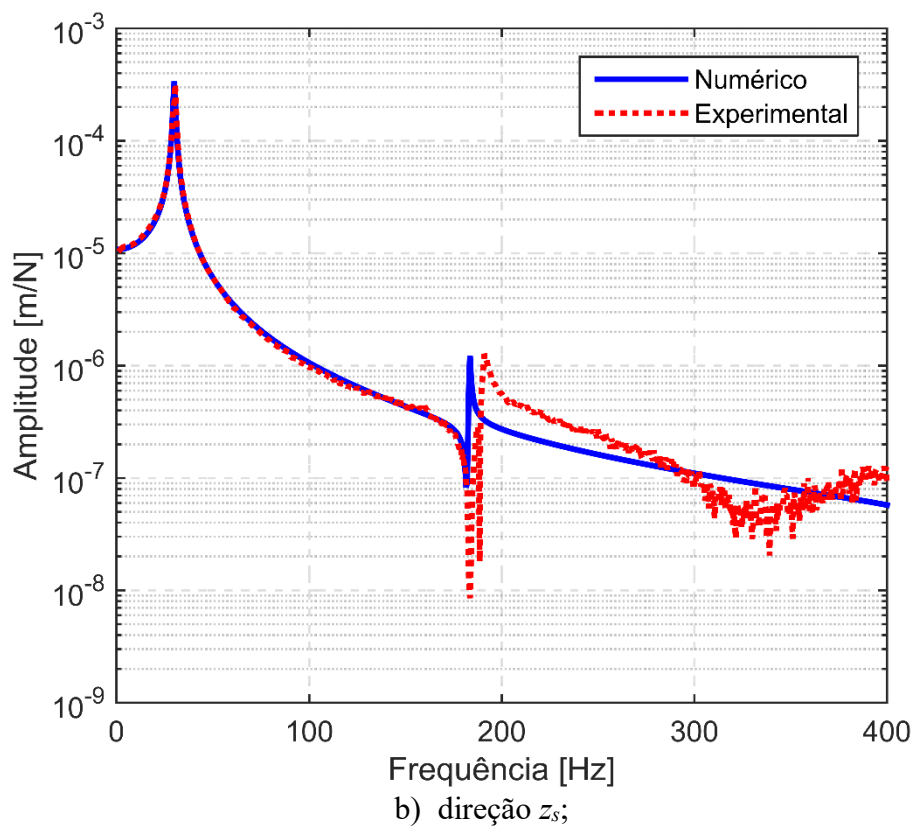
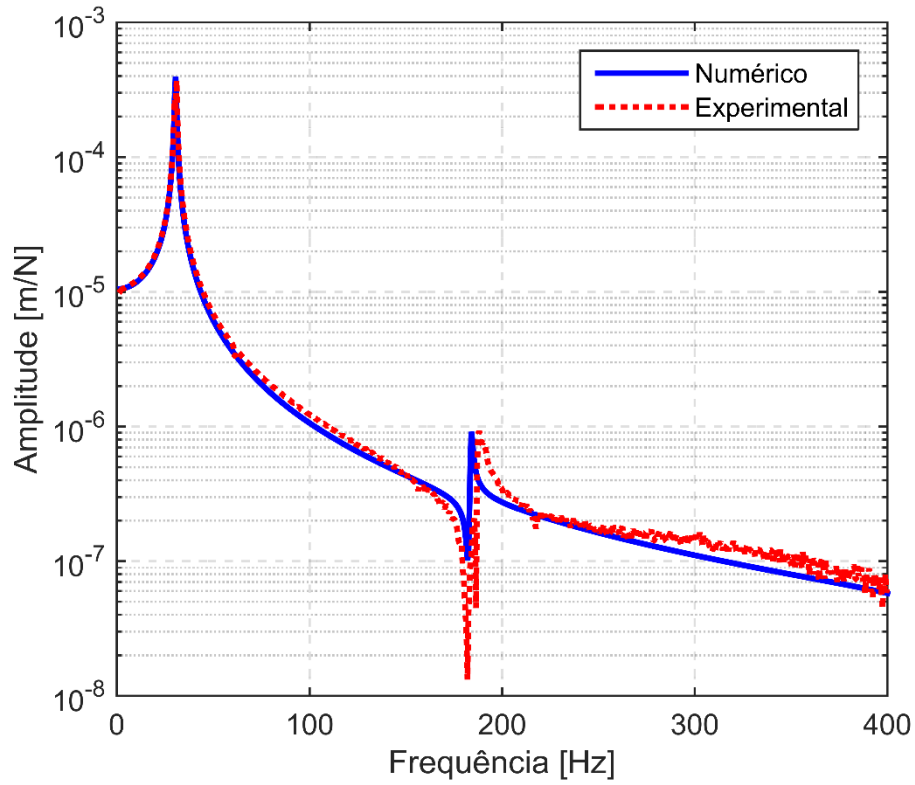


Figura 5.3: FRFs numéricas e experimentais da máquina rotativa.



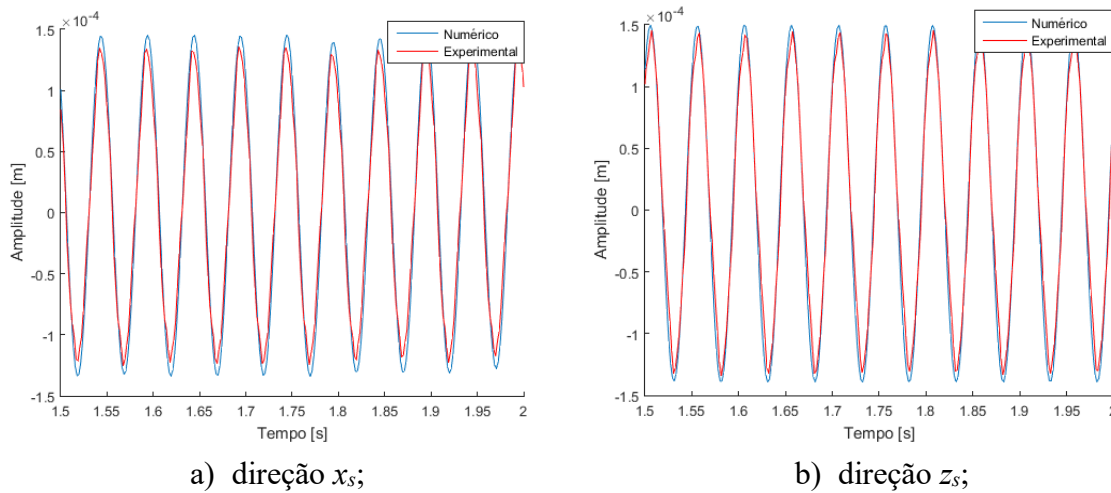


Figura 5.4: Resposta de vibração da máquina rotativa operando a 1200 RPM.

## 5.2 Validação Experimental do Modelo Não-Linear Embarcado

Esta seção se dedica a avaliar o comportamento dinâmico da bancada de teste apresentada na Fig. 5.1 perante diferentes excitações da base, sendo as respostas de vibração medidas e comparadas com os resultados obtidos pelo modelo de EF. Os sinais de excitação avaliados foram produzidos por um excitador eletrodinâmico da Dongling Vibration® (modelo GT1000), como mostra a Fig. 5.5, e os sinais de excitação da base foram medidos por um acelerômetro instalado na base da bancada de testes. Para os testes realizados, todas as excitações foram aplicadas na direção  $x_s$  com o rotor operando em 1200 RPM.

Inicialmente foram aplicados no rotor impactos com duas amplitudes:  $1,5 \text{ m/s}^2$  e  $25 \text{ m/s}^2$  em um intervalo de 5 ms (Fig. 5.6 e 5.7, respectivamente). As respostas de vibração são apresentadas na Fig. 5.6 e 5.7 para  $1,5 \text{ m/s}^2$  e  $25 \text{ m/s}^2$ , respectivamente, onde são comparadas as curvas obtidas experimentalmente e a partir dos modelos de EF não-linear e linear. Pela análise da Fig. 5.6 percebe-se que a amplitude de  $1,5 \text{ m/s}^2$  não é capaz de evidenciar os efeitos não-lineares presente no rotor, como fica mais claro na Fig. 5.6-b, assim, a resposta entre o modelo de EF linear e não-linear foram praticamente iguais. Também se conclui que o modelo de EF foi capaz de representar adequadamente o comportamento dinâmico do rotor nas duas direções para essa amplitude de excitação.

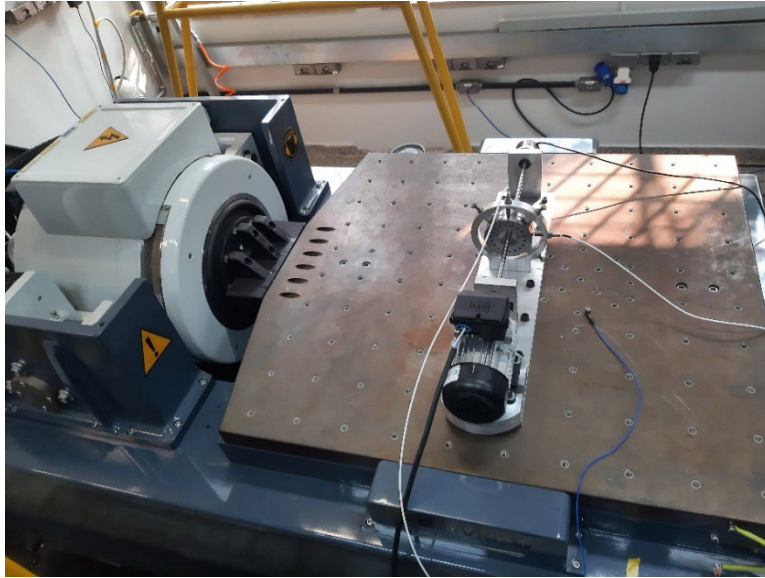
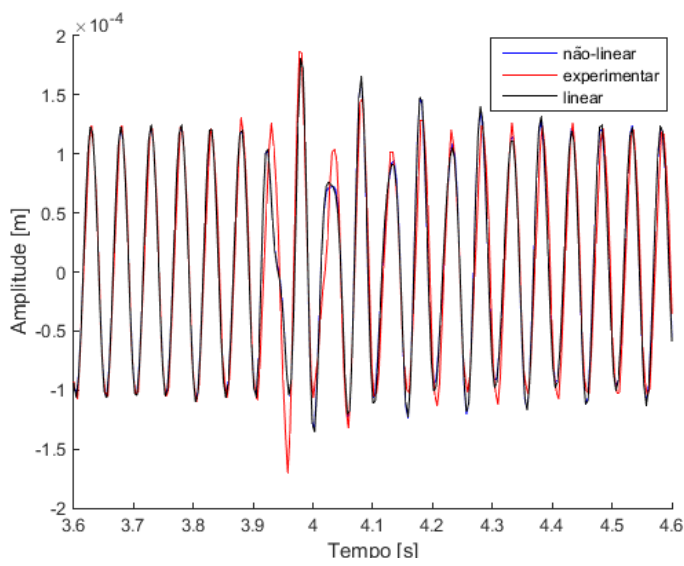
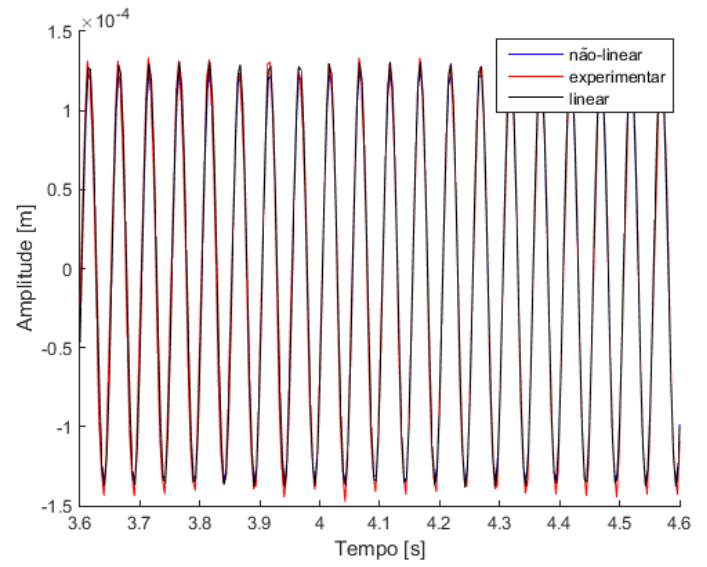
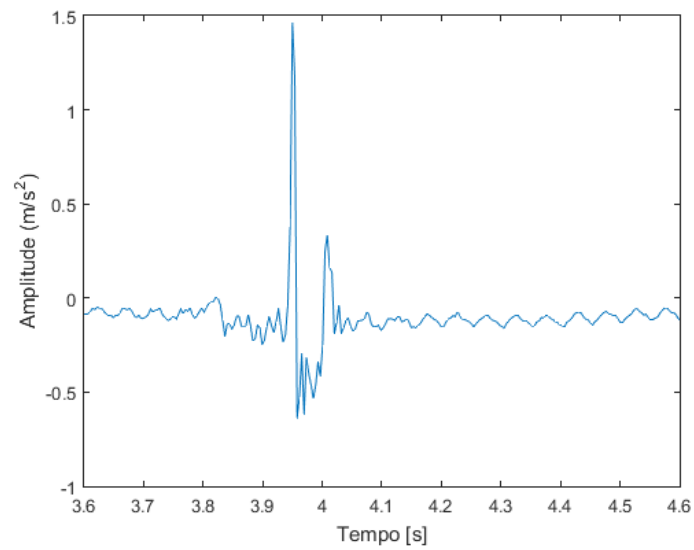
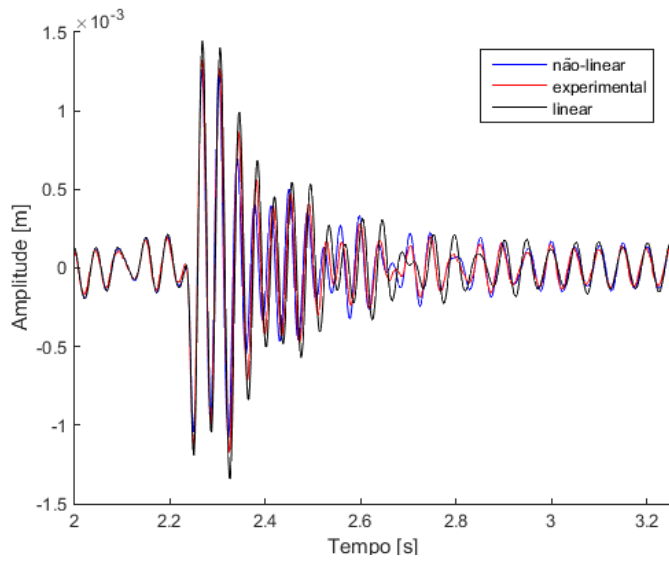
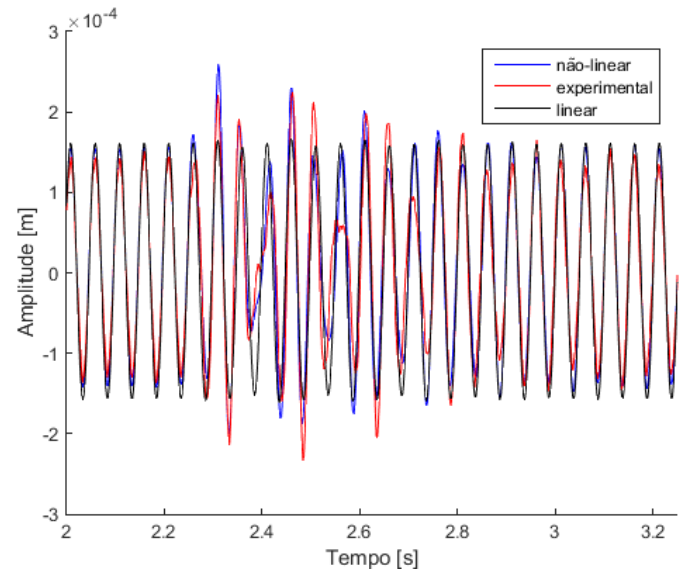
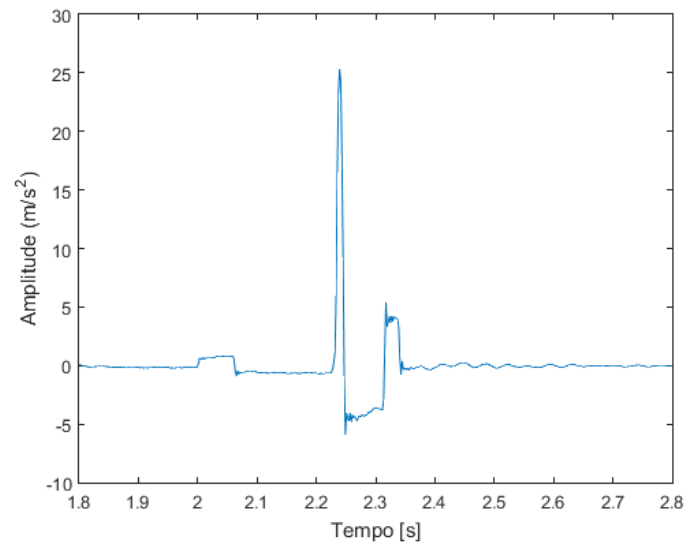


Figura 5.5: Excitador eletrodinâmico Dongling Vibration®.

A Fig. 5.7 mostra a excitação com amplitude de  $25 \text{ m/s}^2$  os efeitos não-lineares ficaram mais evidentes. O modelo não-linear continuou sendo bem representativo da resposta, com uma considerável melhora quando comparado com a resposta do modelo linear. Para a direção  $x_s$  a resposta linear é consideravelmente maior que a não-linear, fato corroborado pela DFT da Fig. 5.8-a.

Na direção  $z_s$  é importante ressaltar uma melhora da resposta do modelo não-linear em relação ao linear já que a resposta linear não conseguiu perceber bem o acoplamento das direções, como mostra a DFT da Fig. 5.8-b, em que o modelo linear não consegue perceber o segundo pico da figura (em torno de 1620 RPM).

a) Impacto  $5 \text{ m/s}^2$ , direção  $x_s$ ;b) Impacto  $5 \text{ m/s}^2$ , direção  $z_s$ ;c) Aceleração da base ao longo da direção  $x_s$ Figura 5.6: Resposta de vibração considerando a excitação por impacto de  $5 \text{ m/s}^2$ .

a) Impacto  $25 \text{ m/s}^2$ , direção  $x_s$ ;b) Impacto  $25 \text{ m/s}^2$ , direção  $z_s$ ;c) Aceleração da base ao longo da direção  $x_s$ Figura 5.7: Resposta de vibração considerando a excitação por impacto de  $25 \text{ m/s}^2$ .

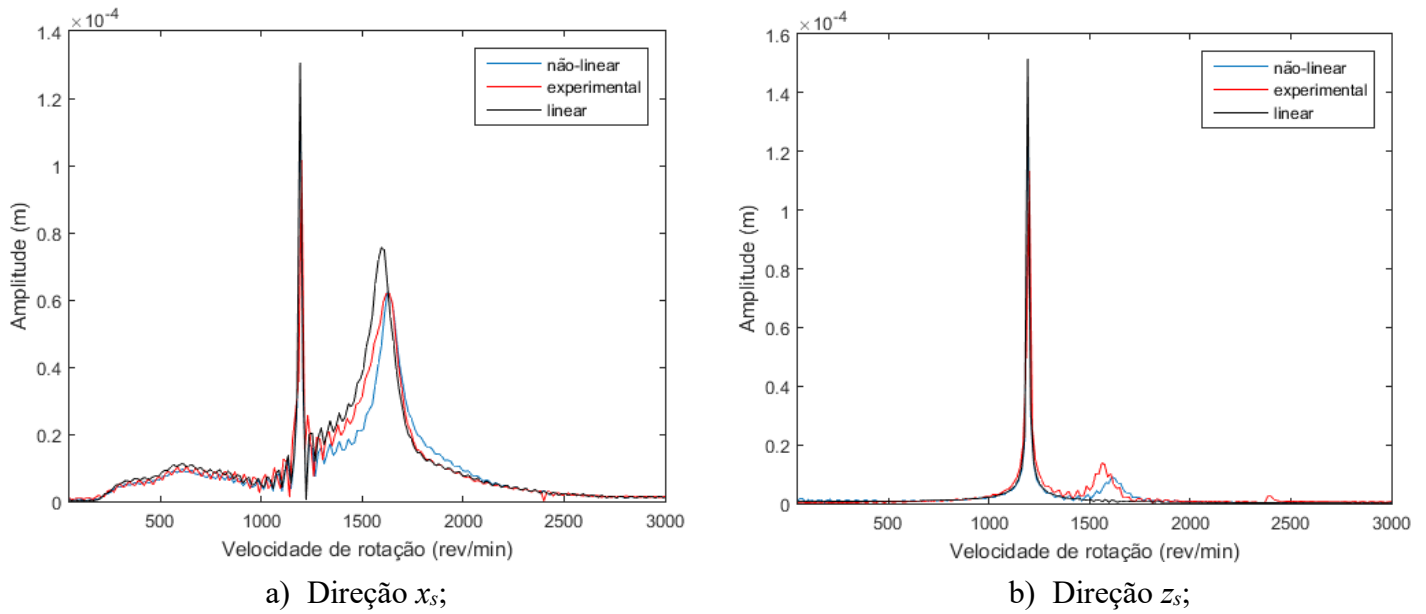


Figura 5.8: DFT da resposta de Impacto de  $25 \text{ m/s}^2$  de amplitude.

A Eq. 5.2 apresenta a excitação senoidal, na direção  $x_s$ , usada para gerar os próximos resultados analisados.

$$\ddot{x}_s = \Gamma \sin\left(n \frac{2\pi \Omega_{cr}}{60} t\right) \quad 5.2$$

onde  $\Omega_{cr}=1560$  é uma frequência próxima a primeira velocidade crítica de backward do rotor ( $BW_1 = 1620 \text{ RPM}$ ),  $n$  é uma constante utilizada para produzir excitações submúltiplos de  $\Omega_{cr}$ , aqui foram usadas  $n = 1/2$  e  $n = 1/3$ ; e  $\Gamma$  utilizada para definir a amplitude de excitação afim de influir o nível de não-linearidade do sistema ( $\Gamma = 15 \text{ m/s}^2$  e  $\Gamma = 30 \text{ m/s}^2$ , para  $n = 1/2$  e  $n = 1/3$ , respectivamente, sendo esses valores definidos em função das limitações do excitador eletrodinâmico). A Fig. 5.9 apresenta as excitações utilizadas, enquanto a Fig. 5.10 mostra as respostas de vibração.

A Fig. 5.10-a reforça a capacidade do modelo de EF não-linear de representar satisfatoriamente o comportamento dinâmico do rotor na direção em que a excitação é aplicada (no caso, direção  $x_s$ ). Na direção  $z_s$  o modelo não-linear apresenta uma considerável melhora na resposta que a apresentada pelo modelo linear.

A Fig. 5.11 apresenta a comparação entre os modelos de EF e o resultado experimental para as direções  $x_s$  e  $z_s$ . Para as Fig. 5.11-a e 5.11-c, a principal diferença entra a resposta experimental e do modelo não-linear para o modelo linear se dá na



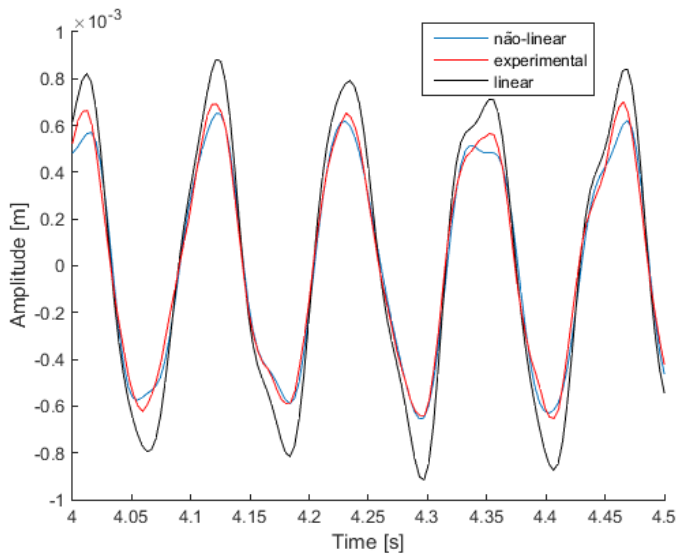
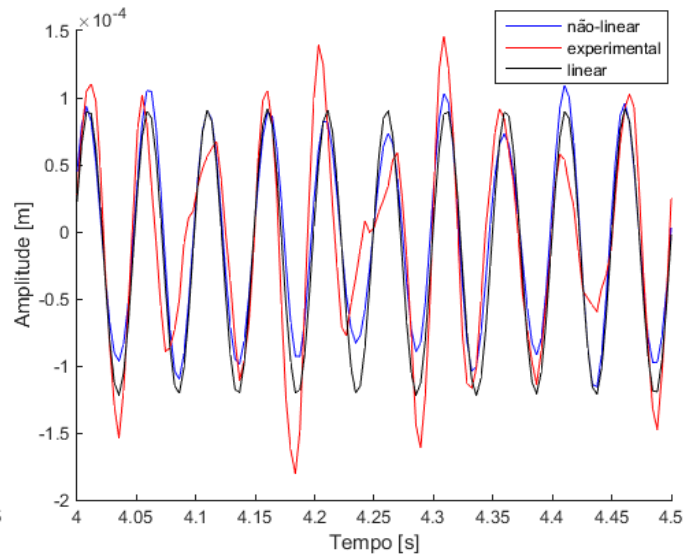
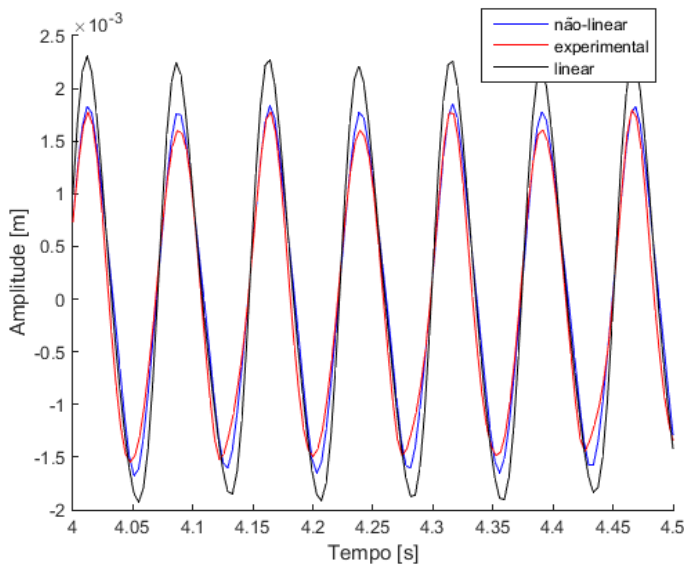
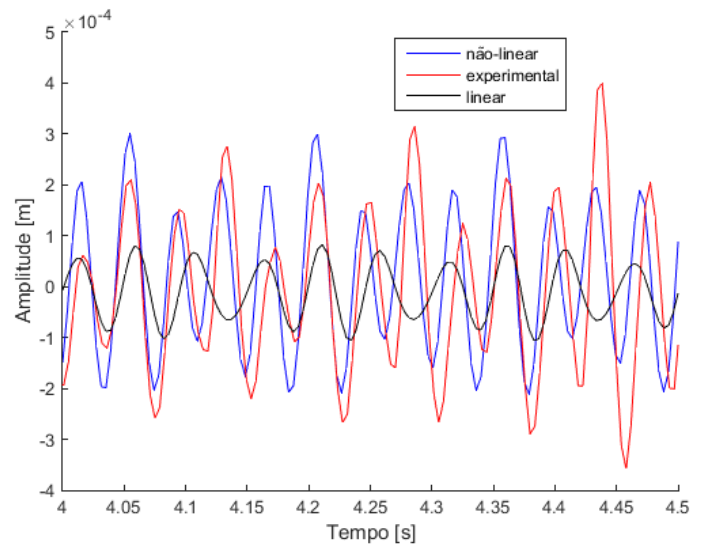
a) direção  $x_s$ ;  $n = 1/3$ .b) direção  $z_s$ ;  $n = 1/3$ .c) direção  $x_s$ ;  $n = 1/2$ .d) direção  $z_s$ ;  $n = 1/2$ .

Figura 5.10: Resposta de vibração para excitação senoidal.

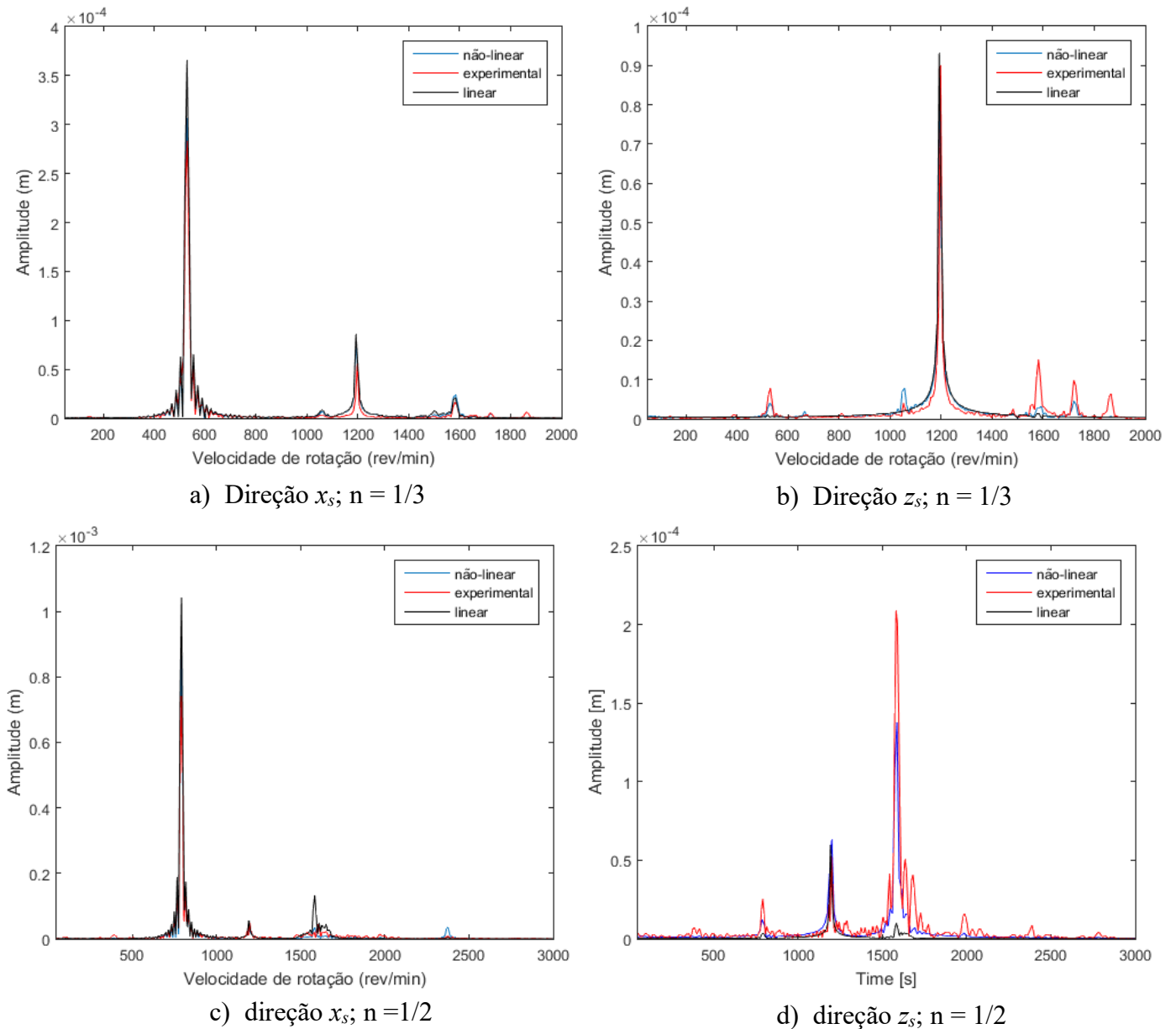


Figura 5.11: DFT das respostas senoidais para  $n=1/3$  e  $n = 1/2$

Foi calculado o erro quadrático médio ( $EQM$ ), segundo a Eq. (5.3), para os casos linear e não-linear, tanto para  $n = 1/2$  e  $n = 1/3$ , nas duas direções:

$$EQM = \frac{1}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} (\hat{y}_i - y_i)^2 \quad 5.3$$

onde  $N_x$  é o número de pontos avaliado no intervalo de tempo analisado na Fig. (5.10), ou seja, de 4s a 4,5s. Já  $\hat{y}_i$  é o valor de amplitude da curva experimental e  $y_i$  o valor de



amplitude do modelo para o qual o erro será calculado (linear ou não linear). Assim foi gerada a tabela 5.2.

Tabela 5.2: comparação dos erros quadráticos médios E Desvios Padrão.

n = 1/3			
		Direção x	Direção z
Linear	<i>EQM</i>	$2,2418 \cdot 10^{-8}$	$4,1327 \cdot 10^{-9}$
	Desvio P.	$1,6928 \cdot 10^{-8}$	$5,0706 \cdot 10^{-9}$
Não-linear	<i>EQM</i>	$6,2548 \cdot 10^{-9}$	$2,0731 \cdot 10^{-9}$
	Desvio P.	$8,0623 \cdot 10^{-9}$	$2,7815 \cdot 10^{-9}$
n = 1/2			
		Direção x	Direção z
Linear	<i>EQM</i>	$2,0231 \cdot 10^{-7}$	$2,8265 \cdot 10^{-8}$
	Desvio P.	$1,6868 \cdot 10^{-7}$	$4,1671 \cdot 10^{-8}$
Não-linear	<i>EQM</i>	$7,8908 \cdot 10^{-8}$	$1,5457 \cdot 10^{-8}$
	Desvio P.	$9,1935 \cdot 10^{-8}$	$1,7564 \cdot 10^{-8}$

A análise da Tab. 5.2 mostra que para os dois casos ( $n = 1/3$  e  $n = 1/2$ ) o erro médio do modelo não-linear foi menor que o erro do modelo linear, para as duas direções, sendo que para o caso de  $n = 1/3$  os erros do modelo não-linear foram de 3,58 e 1,99 vezes menores que os erros do modelo linear, para as direções  $x$  e  $z$ , respectivamente. Para  $n=1/2$ , os erros do modelo não-linear foram de 2,56 e 1,83 menores que os erros do modelo linear, para as direções  $x$  e  $z$ , respectivamente.

No entanto, é necessário verificar se os valores menores dos erros médios do modelo não-linear, em relação aos erros do modelo linear são estaticamente relevantes e em que grau de significância estatística. Para tal foram realizados testes de hipótese referentes aos quatro cenários delineados na Tab. 5.2 ( $n = 1/2$  e  $n = 1/3$ ; direção  $x$  e direção  $z$ ), onde a hipótese nula afirma que o erro do modelo linear é menor ou igual ao erro do modelo não linear, ou seja,  $EQM_L \leq EQM_{nL}$ ; por conseguinte, a hipótese alternativa é  $EQM_L > EQM_{nL}$ . Para todos os casos a hipótese nula é rejeita em favor da hipótese alternativa, aceita com um nível significância estatística em torno de 15%. Esses resultados indicam que o modelo não-linear apresenta um erro inferior ao modelo linear com uma relevância estatística considerável.

### 5.3 Análises Estocásticas

A exemplo do que foi realizado no Capítulo anterior, foi introduzido um modelo estocástico com 10% de incertezas nas rigidezes dos mancais através da expansão de Karhunen-Loève e aplicado aos três casos estudados nesse capítulo, novamente, com 200 amostras. A Fig. 5.12 mostra a análise de convergência para os três casos estudados.

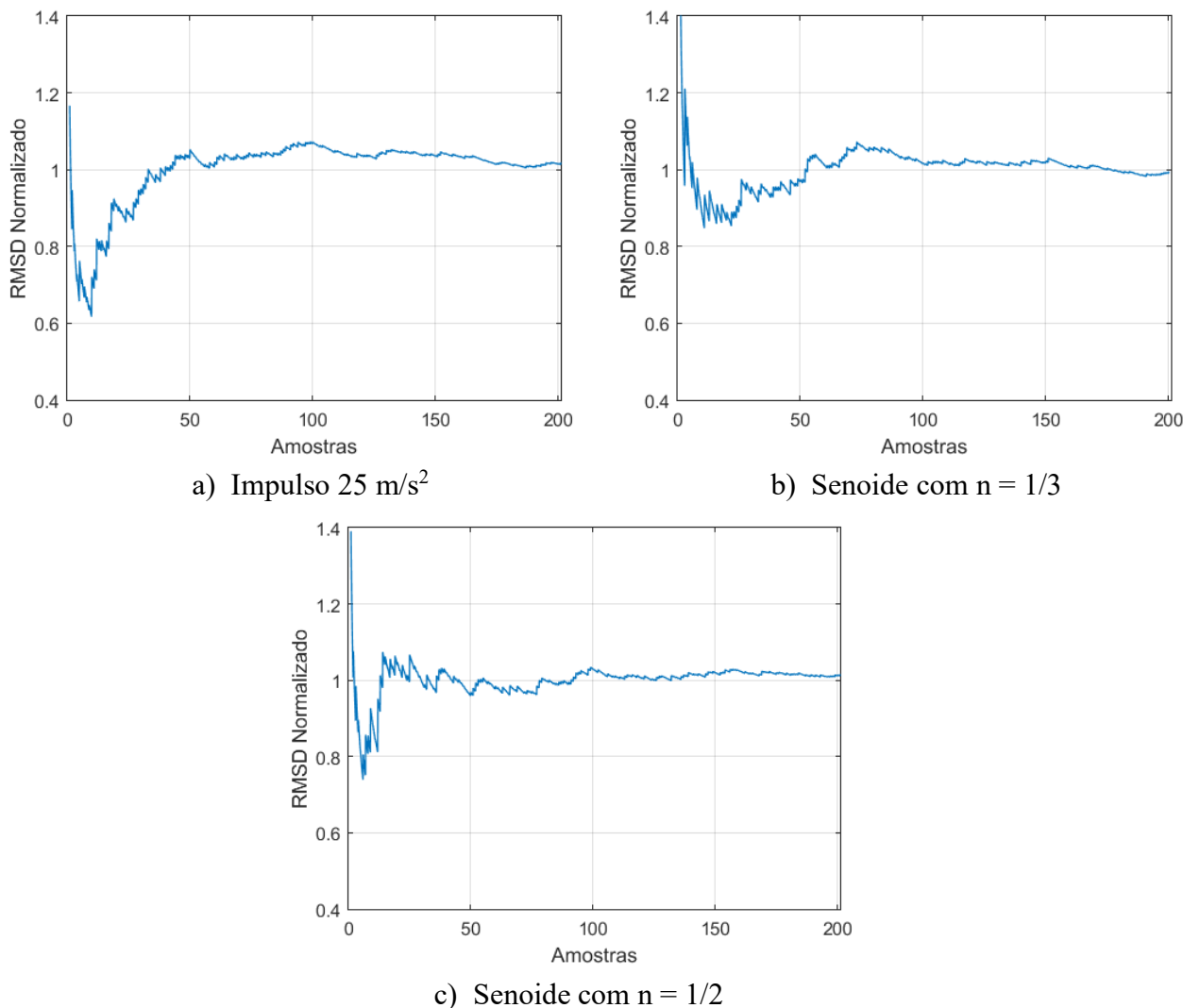


Figura 5.12: Análises de convergência.

A Fig. 5.13 apresentam os envelopes de incertezas para três casos estudados aqui: impulso de  $25 \text{ m/s}^2$  e as duas excitações de forma senoidal estudados neste Capítulo. Para os envelopes da resposta ao impulso (Fig. 5.13-a e 5.13-b) percebe-se que os envelopes são mais estreitos nos instantes logo após a aplicação do impulso e se tornando mais largos ao longo da atenuação do sinal. Os envelopes das respostas as excitações senoidais corroboram as conclusões do Capítulo anterior, onde os envelopes para o caso mais não-linear ( $n = 1/2$ ) são mais estreitos que para caso menos não-linear ( $n=1/3$ ), em especial na direção de aplicação do esforço (direção  $x_s$ ).

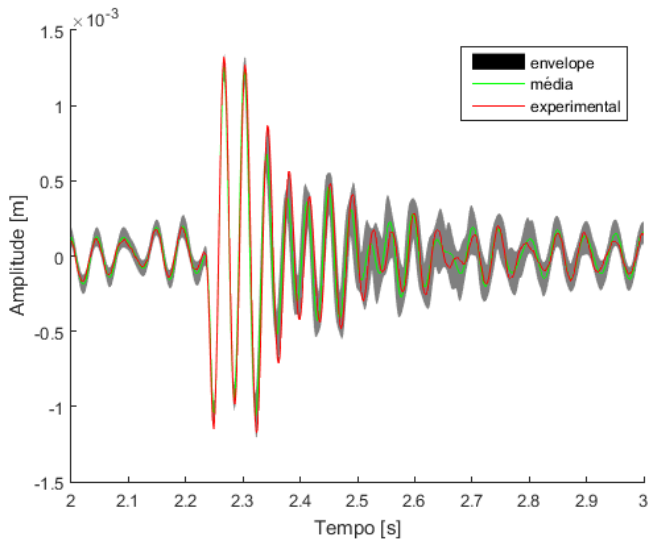
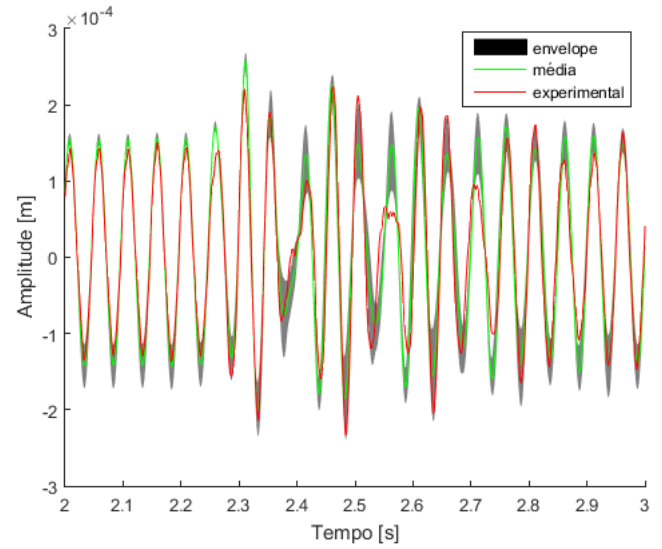
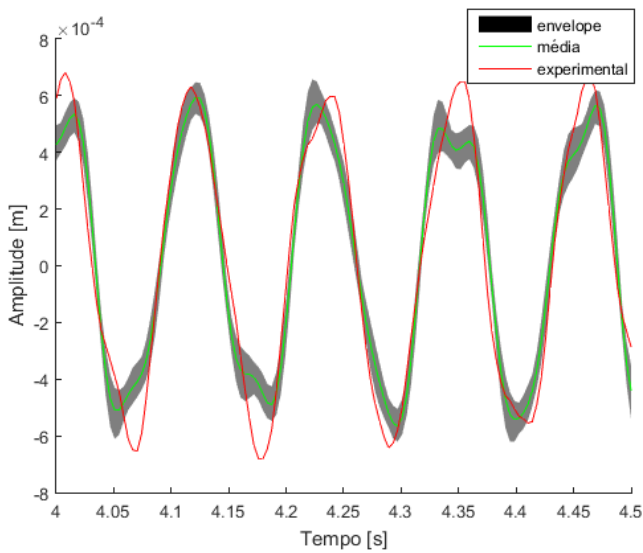
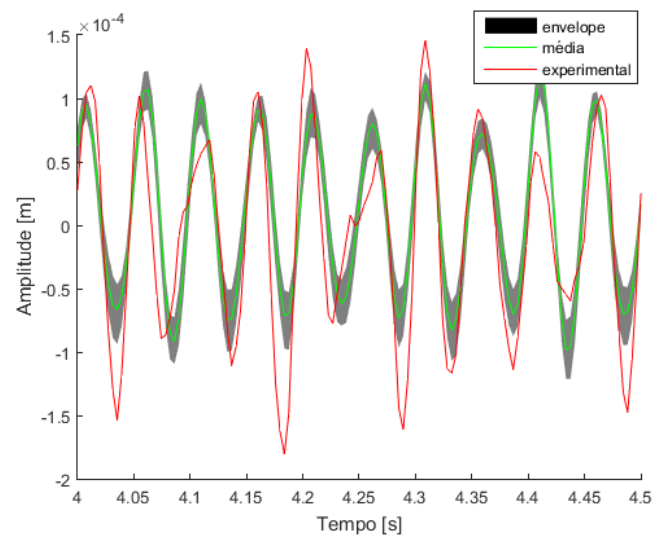
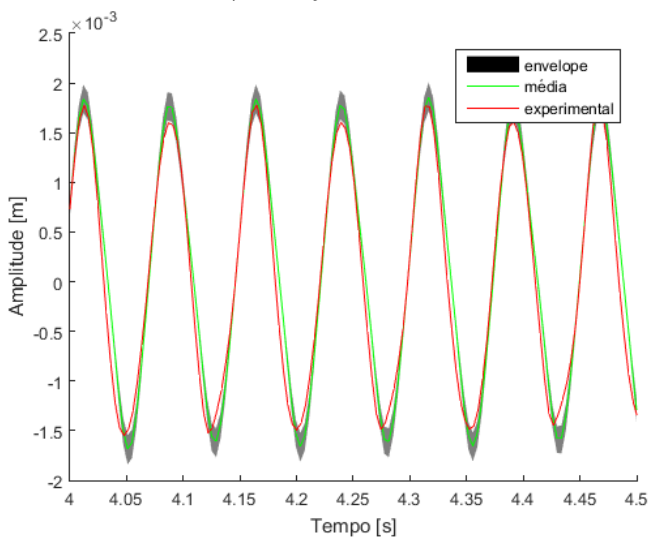
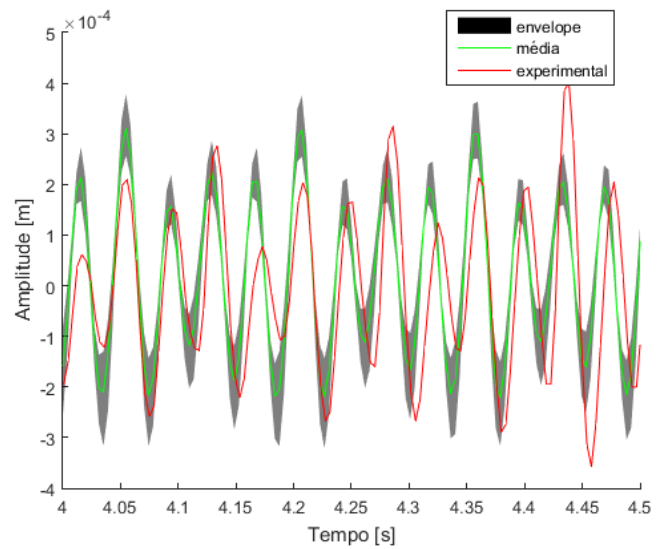
a) direção  $x_s$ ; impulso.b) direção  $z_s$ ; impulso.c) direção  $x_s$ ;  $n = 1/3$ .d) direção  $z_s$ ;  $n = 1/3$ .e) direção  $x_s$ ;  $n = 1/2$ .f) direção  $z_s$ ;  $n = 1/2$ .

Figura 5.13: Envelopes de incertezas.

Para explorar melhor o aumento de robustez, quanto a rigidez dos mancais, a Fig. 5.14 apresenta uma comparação apenas dos envelopes para o caso linear e não-linear. É evidente o quanto os envelopes dos casos lineares são consideravelmente maiores.

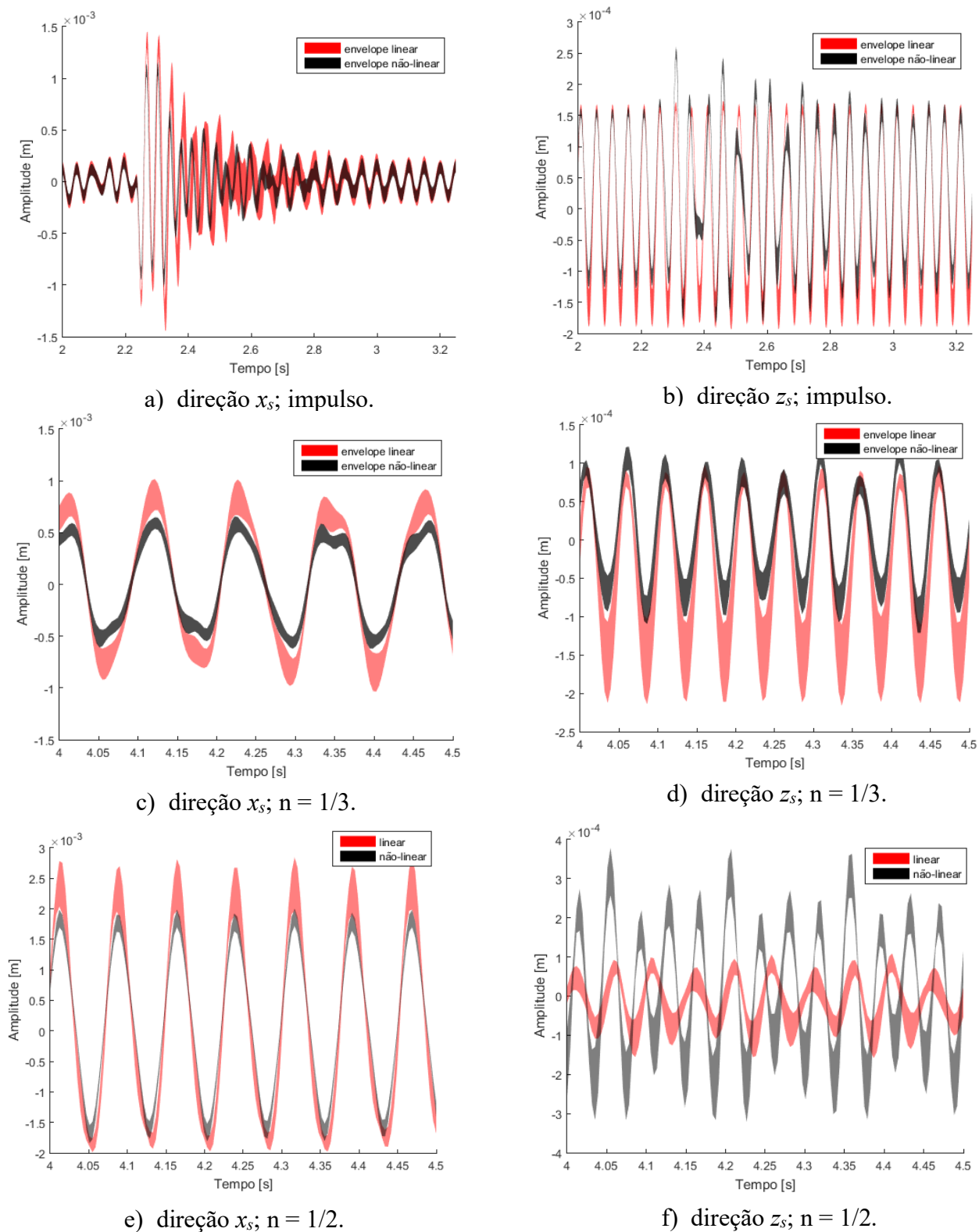


Figura 5.14: Comparação dos envelopes de incertezas

A análise das todas as figuras apresentadas neste Capítulo vão na direção de evidenciar a considerável margem de erro de considerar um modelo linear quando a não-linearidade devido a grandes deslocamentos se faz presente. Na direção em que a excitação é aplicada (direção  $x_s$ ) o modelo linear superestima em boa escala a amplitude da resposta, além de também superestimar a sensibilidade do rotor a incertezas nas rigidezes dos mancais. Já na direção oposta a aplicação da excitação, o modelo linear não consegue perceber o acoplamento das direções devido aos grandes deslocamentos, subestimando, em uma escala ainda maior, a amplitude da resposta real, além de também estimar uma maior sensibilidade a incertezas nas rigidezes dos mancais.

Em contrapartida, o modelo não-linear proposto neste trabalho conseguiu representar de forma satisfatória as respostas na direção  $x_s$ , além de apresentar uma melhora considerável da resposta na direção  $z_s$ , apesar que está ainda pode ser melhorada em trabalhos futuros. O modelo não-linear demonstrou, também, a diminuição da sensibilidade das respostas (em especial na direção  $x_s$ ) para com a rigidez dos mancais, de forma inversa ao aumento da resposta não-linear, ou seja, quanto maior o nível da não-linearidade devido a grandes deslocamentos, menos a resposta era sensível a essas incertezas. Uma análise mais detalhada dessa possível correlação demanda estudos mais aprofundados no futuro.

## CAPÍTULO VI

### CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Neste trabalho foi formulado um modelo de rotor embarcado não-linear estocástico excitados pela base, tanto pelo ponto de vista numérico, como experimental. Ainda é diminuto o número de trabalhos científicos sobre sistemas rotativos embarcados, bem como a análise de rotores não-lineares ou de rotores estocásticos, sendo sua análise conjunta um ramo que recebe pouca atenção, justificando, assim, esse trabalho por oferecer novas perspectivas de análise e pela validação experimental do modelo desenvolvido. Para tal, foi apresentado o modelo matemático de rotor embarcado não-linear proposto nesse trabalho, inicialmente na forma determinística e posteriormente sua expansão para o caso estocástico.

Foi realizada a análise numérica para uma máquina rotativa com dois disco no Capítulo IV. Foram apresentados os ajustes do modelo de Elementos Finitos da bancada da máquina rotativa. Foi investigada a resposta do rotor sob a influência de várias excitações sendo constatado uma considerável diferença entre a resposta do modelo não-linear e o linear tanto na direção em que houve a aplicação da excitação como na direção perpendicular e sendo ainda mais discrepante quando a excitação é aplicada nas duas direções. Também foi investigada a resposta do sistema estocástico, na forma de envelopes, para incertezas na rigidez dos mancais. Essa análise revelou envelopes proporcionalmente maiores para as respostas obtidas para a direção oposta à da excitação.

No Capítulo V foi realizada a análise experimental de uma bancada de teste montada com o propósito de validar o modelo proposto. O modelo da bancada de testes foi ajustado a partir de FRFs experimentais medidas diretamente no sistema instalado, o Diagrama de Campbell e as respostas de vibração para o sistema em rotação fazem parte do processo de validação.

O comportamento dinâmico da bancada de testes foi investigado para diferentes tipos de excitação, níveis de aceleração e frequência de excitação. Tanto para excitações do tipo impacto como do tipo senoidal mostram que o modelo utilizado foi capaz de

reproduzir satisfatoriamente o comportamento experimental do rotor na direção  $x_s$  (direção em que foram aplicadas as excitações), enquanto na direção  $z_s$  houve uma considerável melhora na resposta quando compara ao modelo linear comumente usado. Assim como no Capítulo IV, foram gerados envelopes para os casos estudados experimentalmente nos quais os envelopes para a direção  $z_s$  foram proporcionalmente maiores que o da direção  $x_s$ .

As principais contribuições deste trabalho podem ser assim resumidas:

- Construção de um modelo matemático para representar rotores embarcados não-lineares;
- Expansão do modelo determinístico para o caso estocástico;
- Análise teórica do modelo de rotores embarcado não-lineares, tanto determinístico como estocástico;
- Resultados experimentais que demonstram a capacidade do modelo proposto em representar o comportamento dinâmico de rotores embarcados;

## 6.1 Perspectivas Futuras

Como principais linhas de continuidade desse trabalho é possível apontar:

- Melhorar o modelo de Elementos Finitos para as respostas de vibração ao longo da direção oposta a excitação, identificando os motivos que levam a resposta nessa direção não ser tão precisa;
- Analisar o modelo de EF para outras condições de excitação;
- Estudar outras configurações de rotores, como rotores sustentados por mancais magnéticos e hidrodinâmicos, eixos de material compósitos, entre outros;
- Analisar o efeito de incertezas em outros parâmetros como amortecimentos dos mancais, rigidez de acoplamentos entre outros parâmetros;

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALVES, M. T. S. Controle de Vibrações em Rotores Flexíveis usando Liga com Memória de Forma. 2015. Tese de Doutorado – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.
- AL-WEDYAN, H. M.; TAHAT, M. S. MUTASHER, S. A. The behaviour of the jeffcott rotor under a vibrating base of fluid film bearing. Suranaree Journal of Science and Technolo-gy. v.15, n.3, p.167-176, 2008.
- BARBOSA, P. C. P. de F.; LARA-MOLINA, F. A.; DA SILVA, I. B.; CAVALINI JR., A. A.; STEFFEN JR; V. Uncertain and sensitivity analyses of a composite shaft. Meccanica. v. 55, p. 35–48 2020. <https://doi.org/10.1007/s11012-019-01109-w>
- BONELLO, P.; BRENNAN, M. J. Modeling the Dynamical Behavior of a Supercritical Rotor on a Flexible Foundation Using the Mechanical Impedance Technique, J. Sound Vib., v. 239, n. 3, p. 445–466. 2001. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3172>
- BORGES, A. S. Controle Modal de Rotores com Mancais Magnéticos – Projeto robusto. 2016. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.
- BERLIOZ, A., AND FERRARIS, G. Utilisation de la Sous-Structuration em Dynamique des Rotors. Méc. Mat. Elec., v. 416, p. 30–33, 1986
- CAMPBELL, W. Protection of steam turbine disk wheels from axial vibration. General Elec-tric Review. London, v. 27, n. 6-8, p. 459-484, 1924.
- CAVALCA, K.L.; CAVALVANTE, P.F.; OKABE, E.P. An investigation on the influence of the supporting structure on the dynamics of the rotor system. Mechanical Systems and Signal Processing. v. 19, n. 1, p. 157-174, 2004. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2004.04.001>



CAVALINI JR., A.A., LARA-MOLINA, F.A., SALES. T.P., KOROISHI, E.H., STEFFEN JR, V. Uncertainty analysis of a flexible rotor supported by fluid film bearings. *Latin American Journal of Solids and Structures*. v. 12, v. 8, p. 1487-1504, 2015a. <https://doi.org/10.1590/1679-78251582>

CAVALINI JR, A. A. Detecção e identificação de trincas transversais em eixos horizontais de máquinas flexíveis. 2013. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

CHEN, L.; WANG, J.; HAN, Q. CHU, F. Nonlinear dynamic modeling of a simple flexible rotor system subjected to time-variable base motions. *Journal of Sound and Vibration*. v. 404, p. 58-83, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.05.032>

CHOY FK, PADOVAN JJ, LI WH. Seismic Induced Nonlinear Rotor-Bearing-Casing Interaction of Rotating Nuclear Components. *ASME. J. Vib., Acoust., Stress, and Reliab.* v. 111, p. 11-16, 1989. <https://doi.org/10.1115/1.3269810>

CHOUHDARY, B.; PRATIHER, B. Bifurcation. Nonlinear responses of externally excited rotor bearing system. *MATEC Web of Conferences*, v. 16, 2014. <https://doi.org/10.1051/mateconf/20141603006>

DAKEL, M.; BAGUET, S.; DUFOUR, R. Bifurcation analysis of a non-linear on-board rotor-bearing system. In: international design engineering technical conferences & computers and information in engineering conference, idetc/cie, 2014, buffalo, New York, USA. *Anais*. <https://doi.org/10.1115/DETC2014-34352>

DAS, A.S.; DUTT, J.K.; RAY, K. Active vibration control of unbalanced flexible rotor-shaft systems parametrically excited due to base motion. *Applied Mathematical Modelling*. v. 34, n. 1, p. 2353-2369, 2010. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2009.11.002>

DESSOMBZ, O., THOUVEREZ, F., LAÎNÉ, J.-P., AND JÉZÉQUEL, L., Analysis of mechanical systems using interval computations applied to finite elements methods. *J. Sound. Vib*, v. 238 n. 5, p. 949–968, 2001. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3191>

DRIOT, N., LAMARQUE, C. H., BERLIOZ, A. Theoretical and Experimental Analysis of a Base-Excited Rotor. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, v. 1, n. 3, p. 257, 2006. <https://doi.org/10.1115/1.2209648>

DUCHEMIN, M., 2003, “contribution à l’étude du comportement dynamic d’un rotor embarqué”. Phd thesis, Insa Lyon, Lyon.

DUNCHEMIM, M.; BERLIOZ, A.; FERRARIS, G. Dynamic behavior and stability of a rotor under base excitation. *ASME*. v. 128, p. 576, 2006. <https://doi.org/10.1115/1.2202159>

EL-SAEIDY, F. M. A.; STICHER, F. Dynamics of a rigid rotor linear/nonlinear bearings system subject to rotating unbalance and base excitations. *Journal of vibration and control*, v. 16, n. 3, p. 403-438, 2010. <https://doi.org/10.1177/1077546309103565>

GANESAN, R., AND SANKAR, T. S. Resonant Oscillations and Stability of Asymmetric Rotors. *ASME Design Technical Conference, 14th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise*, Albuquerque, NM, v. 56, p. 131–137, 1993-a. <https://doi.org/10.1115/DETC1993-0099>

GANESAN, R., AND SANKAR, T. S. Non-Stationary Vibrations of Rotor Systems With Non-Symmetric Clearance. *ASME Design Technical Conference, 14th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise*, Albuquerque, NM, v. 56, p. 295–301. 1993-b. <https://doi.org/10.1115/DETC1993-0117>

HAN, Q.; CHU, F. Dynamic behaviors of a geared rotor system under time-periodic base angular motions. *Mechanism and Machine Theory*. v. 78, p. 1-14, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2014.02.016>

IMBERT, J. F.. *Analyse des structures par éléments finis*. Sup'aéro, 2001.

ISHIDA, Y.; YAMAMOTO, T. *Linear and nonlinear rotordynamics*. Wileyvch, 2012. <https://doi.org/10.1002/9783527651894>

JEFFCOTT, H. H. The lateral vibration of loaded shafts in the neighborhood of a whirling speed: the effect of want of balance. *Philosophical magazine a*, v. 37, n. 1, p. 304-315, 1919. <https://doi.org/10.1080/14786440308635889>

JENG, J. D.; KANG, Y.; CHANG, TY. An alternative Poincaré' section for high-order harmonic and Chaotic responses of a rubbing rotor. *Journal of Sound and Vibration*. v. 328, p. 191-202, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.07.018>

KAPITANIAK, M., VAZIRI, V., WIERCIGROCH, M., Helical buckling of thin rods: FE modelling. *MATEC Web of Conferences*, v. 211, 2018. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201821102010>

KOÇER, B., Vibration fatigue analysis of structures under broadband excitation, Master of Science in Mechanical Engineering Department, Middle East Technical University; 2010.

KLEIBER, M.; HIEN, T. D.; *The stochastic finite element method (basic perturbation technique and computer implementation)*, Wiley, Chichester, U.K., 1992.

KOROISHI, E. H. *Controle de Vibrações em Máquinas Rotativas utilizando Atuadores Eletromagnéticos*. 2013. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

L. HOU et al. Nonlinear response and bifurcation analysis of a Duffing type rotor model under sine maneuver load. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 78, p.13313-141, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.12.012>

LALANNE, M.; FERRARIS, G. *Rotordynamics prediction in engineering*. John Wiley & sons, inc., 1998.

LALLEMENT, G.; LECOANET, H.; STEFFEN JR, V. Vibrations de rotors sur paliers à matrice de raideur non symetrique. *Machine and mechanism theory*, v. 17, n. 1, p. 47-55, 1982. [https://doi.org/10.1016/0094-114X\(82\)90023-4](https://doi.org/10.1016/0094-114X(82)90023-4)

LAURSEN T. A., *Computational Contact and Impact Mechanics Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis*, Springer, 2002.

LEI, H.; YUSHU, C. Dynamical simulation and load control of a Jeffcott rotor system in Herbst maneuvering flight. *Journal of Vibration and Control*. v. 1, n. 1, p. 1-14, 2014.

LIU, Z.; LIU, Z.; LI, Y.; ZHANG, G. Dynamics response of an on-board rotor supported on modified oil-film force considering base motion. *Journal of Mechanical Engineering Science*. 2016.

MACHADO, M. R. Uma abordagem espectral para a detecção de danos e estimação de parâmetros em sistemas dinâmicos estocásticos. 2016. 158p. Tese (Doutorado). Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

LE MAÎTRE, O., KNIO, O.M.; Spectral methods for uncertainty quantification: with applications to computational fluid dynamics, Springer, 2010. <https://doi.org/10.1007/978-90-481-3520-2>

NELSON, H. D.; MACVAUGH, J. M. The dynamics of rotor bearing systems using finite elements. *Journal of engineering for industry*, v. 98, n. 2, p. 593-600, 1976. <https://doi.org/10.1115/1.3438942>

PAPADRAKAKIS, M., KOTSOPULOS, A., Parallel solution methods for stochastic finite element analysis using Monte Carlo simulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 168, n. 1, p. 305-320, 1999. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(98\)00147-9](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00147-9)

RADE, D. A. Introdução ao método dos elementos finitos. Notas de aula, Universidade Federal de Uberlândia, 2008.

RANKINE, B. J. M. On the centrifugal force of rotating shafts. *The engineer*, v. 1, n.1, 1 p., 1869.

RUBINSTEIN R.Y., *Simulation and the Monte Carlo Method*, New York: John Wiley & Sons, Inc, 1981. <https://doi.org/10.1002/9780470316511>

SOUSA Jr, M. S. Análise Do Comportamento Dinâmico De Rotores Embarcados. 2017. 50 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

SPANOS, P.D., ZELDIN, B.A. Monte Carlo treatment of random fields: a broad perspective, *Applied Mechanics Reviews (ASME)*, v. p. 51:219–237, 1998 <https://doi.org/10.1115/1.3098999>

SUBBIAH, R., BHAT, R., AND SANKAR, T. S., 1985, “Response of Rotors Subjected to Random Support Excitations,” *Trans. ASME, J. Vib., Acoust., Stress, Reliab. Des.*, v. 107, p. 453–459. <https://doi.org/10.1115/1.3269287>

TIAN, L.; WANG, W.J.; PENG, Z.J. Dynamic behaviours of a full floating ring bearing supported Turbocharger rotor with engine excitation. *Journal of Sound and Vibration*, v. 330, n. 20, p. 4851-4874, 2011. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.04.031>

ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR R. L. *The Finite Element Method. Volume 2: Solid Mechanics*. Oxford, UK: Butterworth-Heinemann (5th ed.), 2000.

ZHU, W. Q., REN, Y.J., WU, W.Q.; Stochastic FEM based on local averages of random vector fields, *Journal of Engineering Mechanics*, v. 118, n. 3, 1992. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1992\)118:3\(496\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1992)118:3(496))

## ANEXO A

### INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

A Eq. (2.52) é integrada de forma numérica através de uma variante do método de Newmark e para tanto os vetores de velocidade  $\dot{\mathbf{q}}_n$  e de aceleração  $\ddot{\mathbf{q}}_n$  (onde o subíndice  $n$  indica que o vetor ou matriz está no instante  $t_n$ ) são dados por (Reddy, 1997):

$$\ddot{\mathbf{q}}_n = \frac{1}{\lambda_1 \Delta t^2} (\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_{n-1}) - \frac{1}{\lambda_1 \Delta t} \dot{\mathbf{q}}_{n-1} + \left(1 - \frac{1}{2\lambda_1}\right) \ddot{\mathbf{q}}_{n-1} \quad (\text{A.1})$$

$$\dot{\mathbf{q}}_n = \dot{\mathbf{q}}_{n-1} + (1 - \lambda_2) \ddot{\mathbf{q}}_{n-1} + \lambda_2 \Delta t \ddot{\mathbf{q}}_n$$

onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são parâmetros do método de Newmark. Aplicando a Eq. (A.1) na equação do movimento do rotor (Eq. (2.51)), tem-se a equação discretizada:

$$\hat{\mathbf{K}}(\mathbf{q}_n) \mathbf{q}_n = \hat{\mathbf{F}}_n \quad (\text{A.2})$$

onde:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}}(\mathbf{q}_n) &= \mathbf{K}^{Total}(\mathbf{q}_n) + a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{D}^{Total} \\ \hat{\mathbf{F}}_n &= \mathbf{F}_n^{Total} + \mathbf{M} \mathbf{A}_{n-1} + \mathbf{D}^{Total} \mathbf{B}_{n-1} \\ \mathbf{A}_{n-1} &= a_0 \mathbf{q} \mathbf{X}_{n-1} + a_2 \dot{\mathbf{q}}_{n-1} + a_3 \ddot{\mathbf{q}}_{n-1} \\ \mathbf{B}_{n-1} &= a_1 \mathbf{q} \mathbf{X}_{n-1} + a_4 \dot{\mathbf{q}}_{n-1} + a_5 \ddot{\mathbf{q}}_{n-1} \end{aligned}$$

com:

$$a_0 = \frac{1}{\lambda_1(\Delta t)^2}, \quad a_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 \Delta t}, \quad a_2 = \frac{1}{\lambda_1 \Delta t},$$

$$a_3 = \frac{1}{2\lambda_1} - 1, \quad a_4 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1, \quad a_5 = \Delta t \left( \frac{\lambda_2}{2\lambda_1} - 1 \right)$$

A Eq. (A.2) é um sistema de equações algébricas não-lineares no instante  $t_n$  que podem ser resolvidas iterativamente usando o método de Newton-Raphson que é baseado em expandir essa equação algébrica não-linear em séries de Taylor em torno da solução conhecida. Na formulação usada neste trabalho será assumido que para a solução da iteração  $r$  a solução para a iteração  $r-1$  é conhecida. Assim é definido um resíduo  $\phi(\mathbf{q}_n)$ :

$$\phi(\mathbf{q}_n) \equiv \hat{\mathbf{K}}(\mathbf{q}_n)\mathbf{q}_n - \hat{\mathbf{F}}_n = 0 \quad (\text{A.3})$$

Expandindo  $\phi(\mathbf{q}_n)$  em séries de Taylor:

$$\phi(\mathbf{q}_n) = \phi(\mathbf{q}_n^{r-1}) + \left[ \frac{\partial \phi_n^{r-1}}{\partial \mathbf{q}_n^{r-1}} \right] (\mathbf{q}_n^r - \mathbf{q}_n^{r-1}) + O(\mathbf{q}^2) \quad (\text{A.4})$$

onde  $O(\mathbf{q}^2)$  são os termos de alta ordem. Usando as Eqs. (A.4) e (A.2) e considerando desprezível os termos de alta ordem, obtém-se então:

$${}^t\mathbf{K}(\mathbf{q}_n^{r-1})\Delta\mathbf{q}^r + \phi_n^{r-1} = 0 \quad (\text{A.5})$$

sendo que  ${}^t\mathbf{K}$  é conhecida como matriz tangente, ou matriz de rigidez tangente. O incremento de deslocamento pode ser dado por:

$$\mathbf{q}_n^r = \mathbf{q}_n^{r-1} + \Delta\mathbf{q}^r \quad (\text{A.6})$$

O cálculo da matriz  ${}^t\mathbf{K}$  é dado por:

$${}^t\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(K_{nl11}(u) + K_{nl12}(u, w))}{\partial u} & \frac{\partial(K_{nl11}(u) + K_{nl12}(u, w))}{\partial w} \\ \frac{\partial(K_{nl22}(w) + K_{nl21}(u, w))}{\partial u} & \frac{\partial(K_{nl22}(w) + K_{nl21}(u, w))}{\partial w} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

que, por fim, resulta em:

$${}^t\mathbf{K} = [\mathbf{K}_l + 2\mathbf{K}_{nl} + \mathbf{K}^* + \mathbf{K}^{\Delta}] \quad (\text{A.8})$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{\Delta}(1,1) &= E \left( \begin{aligned} &Iw^T B_w^{nl}{}^T B_u{}_{,yy} + Iu^T B_u^{nl}{}^T B_u{}_{,yy} + Iw^T B_w^{nl}{}^T B_u{}_{,yy} + \dots \\ &+ Iu^T B_u^{nl}{}^T B_u{}_{,yy} + w^T B_w^{nl}{}^T B_u{}_{,yy} + u^T B_u^{nl}{}^T B_u{}_{,yy} \end{aligned} \right) + \dots \\ &\quad \dots + G \left( 2Iw^T B_w^{nl}{}^T B_u{}_{,yy} + 2Iu^T B_u^{nl}{}^T B_u{}_{,yy} + 2Iw^T B_w^{nl}{}^T B_u{}_{,yy} + 2Iu^T B_u^{nl}{}^T B_u{}_{,yy} \right) \\ \mathbf{K}^{\Delta}(2,2) &= E \left( \begin{aligned} &Iw^T B_w^{nl}{}^T B_w{}_{,yy} + Iu^T B_u^{nl}{}^T B_w{}_{,yy} + Iw^T B_w^{nl}{}^T B_w{}_{,yy} + \dots \\ &+ Iu^T B_u^{nl}{}^T B_w{}_{,yy} + w^T B_w^{nl}{}^T B_w{}_{,yy} + u^T B_u^{nl}{}^T B_w{}_{,yy} \end{aligned} \right) + \dots \\ &\quad \dots + G \left( 2Iw^T B_w^{nl}{}^T B_w{}_{,yy} + 2Iu^T B_u^{nl}{}^T B_w{}_{,yy} + 2Iw^T B_w^{nl}{}^T B_w{}_{,yy} + 2Iu^T B_u^{nl}{}^T B_w{}_{,yy} \right) \\ \mathbf{K}^{\Delta}(1,2) &= \mathbf{K}^{\Delta}(2,1) = 0 \\ &\quad B_u^{nl} = u^T N_u^T N_u; \quad B_w^{nl} = w^T N_w^T N_w; \quad B_u = N_u^T N_u; \quad B_w = N_w^T N_w \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$