
**Projeto Ótimo Robusto de Sistemas
Aeroviscoelásticos Estocásticos em Regime
Subsônico Utilizando *Doublet Lattice***

Prince Azsemergh Nogueira de Carvalho



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Prince Azsemergh Nogueira de Carvalho

**Projeto Ótimo Robusto de Sistemas
Aeroviscoelásticos Estocásticos em Regime
Subsônico Utilizando *Doublet Lattice***

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Orientador: Antônio Marcos Gonçalves de Lima.

Uberlândia-MG

2024

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

C331
2024 Carvalho, Prince Azsemergh Nogueira de, 1996-
Projeto Ótimo Robusto de Sistemas Aeroviscoelásticos
Estocásticos em Regime Subsônico Utilizando Doublet
Lattice [recurso eletrônico] / Prince Azsemergh
Nogueira de Carvalho. - 2024.

Orientador: Antônio Marcos Gonçalves de Lima.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Pós-graduação em Engenharia Mecânica.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.te.2024.471>

Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica. I. Lima, Antônio Marcos
Gonçalves de, 1975-, (Orient.). II. Universidade Federal
de Uberlândia. Pós-graduação em Engenharia Mecânica.
III. Título.

CDU: 621

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074


UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
 Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
 Telefone: (34) 3239-4282 - www.posmecanicaufu.com.br - secposmec@mecanica.ufu.br


ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Tese de Doutorado Acadêmico, nº 380, PPGEM				
Data:	07/06/2024	Hora de início:	09:00	Hora de encerramento:	11:52
Matrícula do Discente:	12013EMC013				
Nome do Discente:	Prince Azsemergh Nogueira de Carvalho				
Título do Trabalho:	Projeto Ótimo Robusto de Sistemas Aeroviscoelásticos Estocásticos em Regime Subsônico Utilizando Doublet Lattice				
Área de concentração:	Mecânica dos Sólidos e Vibrações				
Linha de pesquisa:	Aeroelasticidade				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Bolsa PQ-1D				

Reuniu-se por meio de videoconferência a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, composta pelos professores doutores: Fran Sérgio Lobato - UFU; Marcelo Leite Ribeiro - USP; Sebastião Simões da Cunha Júnior - UNIFEI; Marcus Antônio Vieira Duarte - UFU.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Prof. Antonio Marcos G. de Lima, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

APROVADO

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Marcos Gonçalves de Lima, Professor(a) do Magistério Superior**, em 07/06/2024, às 11:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcus Antonio Viana Duarte, Professor(a) do Magistério Superior**, em 07/06/2024, às 11:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcelo Leite Ribeiro, Usuário Externo**, em 07/06/2024, às 12:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Sebastiao Simoes da Cunha Jr, Usuário Externo**, em 10/06/2024, às 14:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Fran Sergio Lobato, Professor(a) do Magistério Superior**, em 18/06/2024, às 09:33, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5454234** e o código CRC **6E48BCB2**.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, o criador de todas as coisas, que em sua plena sabedoria e sua infinita misericórdia, me permitiu chegar até aqui.

A minha família, em especial a minha mãe e minha irmã que me inspiram a nunca desistir.

A minha noiva e companheira, Giovanna, por ser meu maior suporte e fonte de incentivo, sempre com sua boa energia, me mostrando o lado bom até das adversidades. Suas orações são fortes e Deus é conosco.

Aos meus amigos da RF/RN, Marcelo e Ricardo, vocês foram minha família longe de casa e um imenso apoio nessa jornada. Aos amigos do LMEst, Gutemberg, Ely, João Sena, Leo Cabral, Maria, Leo Sicchieri, Fernandinha, Fernanda, Stanley, Raimundo, Daniel "Jamal" e Beatriz Granado, o lugar de vocês no céu tá guardado por me suportarem. Obrigado pelos momentos (terapêuticos) durante os cafés e no RU. Agradeço também aos outros colegas do 1R, "Joãozim", Diogo e Ana, e a todos os que não lembrei de mencionar aqui, sintam-se agradecidos por fazerem parte dessa árdua jornada.

Agradeço ao meu orientador Antônio Marcos, pela paciência que teve comigo e pelas inestimáveis contribuições nesta orientação do trabalho.

A UFU pela estrutura do LMEst e pela bolsa do PROEX. A FEMEC, pela excelência mantida no curso e no programa, sendo referência nacional e internacional em pesquisa e desenvolvimento da engenharia mecânica.

A todos que não foram citados mas contribuíram para o desenvolvimento desse trabalho, o meu mais sincero obrigado!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"Mas Deus nos prova seu grande amor ao enviar Cristo para morrer por nós quando ainda éramos pecadores." (Rm 5:8 - NVT)

Resumo

Para reduzir o impacto ambiental global, governos e organizações internacionais têm proposto diversas estratégias para uma produção e soluções mais eficientes. As indústrias aeronáutica e aeroespacial se comprometeram a zerar suas emissões de CO₂ até 2050. Para alcançar essa meta, os fabricantes estão adotando soluções inovadoras, como motores mais eficientes, combustível de aviação sustentável (*Sustainable Aviation Fuel - SAF*), estruturas com materiais mais leves e formas geométricas aerodinâmicas mais eficientes. No entanto, para evitar os efeitos de instabilidade resultantes das modificações estruturais e aerodinâmicas nos sistemas aeroelásticos, como o fenômeno do *flutter*, uma estratégia viável é a utilização de técnicas de controle de vibração. Nesse contexto, o controle passivo utilizando material viscoelástico é uma abordagem interessante devido ao seu baixo custo e facilidade de aplicação nas estruturas. Além disso, devido às variabilidades inerentes dos parâmetros estruturais e aerodinâmicos presentes nesses sistemas, é necessário propor uma metodologia eficiente de modelagem estocástica para lidar com aplicações mais realistas. Portanto, este trabalho contribui com o desenvolvimento de uma ferramenta em código próprio para o projeto ótimo-robusto de sistemas aeroviscoelásticos em regime subsônico e aumento da eficiência estrutural pelo tratamento parcial através do *Modal Strain Energy (MSE)*. Como estudo de caso, é utilizado um sistema do tipo *Plate Like Wing* em regime subsônico para aumentar a estabilidade dessa estrutura, combinando modelagem estocástica de elementos finitos, o método *Doublet Lattice* e o otimizador NSGA II. Os resultados numéricos demonstram que o efeito conservativo associado ao amortecimento da estrutura é responsável por cerca de 80% na atenuação das vibrações, sendo a espessura das camadas elásticas o parâmetro mais relevante. Além disso, o MSE permitiu que o sistema tratado parcialmente obtivesse uma eficiência estrutural 1,8 vezes maior que o sistema completamente tratado. Os resultados em termos dos envelopes dos diagramas V-g e V-f também evidenciam que o sistema robusto apresenta uma vulnerabilidade 7 vezes menor que o sistema determinístico na resposta da velocidade de *flutter*, provando a eficiência da ferramenta desenvolvida integrada aos modelos. Com isso, é possível reduzir fatores de segurança de projetos devido às incertezas e lograr vantagens como: aumenta

da vida útil de componentes, utilização de menos material na fabricação e aumento da eficiência estrutural das aeronaves.

Palavras-chave: Material Viscoelástico, Método dos Elementos Finitos Estocástico, Controle de Vibração, Aeroelasticidade, Otimização Multiobjetivo, Algoritmo Genético.

Abstract

To reduce the global environmental impact, governments and international organizations have proposed various strategies for more efficient production and solutions. The aeronautical and aerospace industries have committed to zeroing their CO₂ emissions by 2050. To achieve this goal, manufacturers are adopting innovative solutions such as more efficient engines, Sustainable Aviation Fuel (SAF), structures with lighter materials, and more efficient aerodynamic geometries. However, to avoid the instability effects resulting from structural and aerodynamic modifications in aeroelastic systems, such as the flutter phenomenon, a viable strategy is the use of vibration control techniques. In this context, passive control using viscoelastic material is an interesting approach due to its low cost and ease of application in structures. Additionally, due to the inherent variabilities of structural and aerodynamic parameters present in these systems, it is necessary to propose an efficient stochastic modeling methodology to deal with more realistic applications. Therefore, this work contributes to the development of a proprietary tool for the robust optimal design of aeroviscoelastic systems in the subsonic regime and increasing structural efficiency through partial treatment using modal strain energy (MSE). As a case study, a Plate Like Wing system in the subsonic regime is used to increase the stability of this structure by combining stochastic finite element modeling, the Doublet Lattice method, and the NSGA II optimizer. The numerical results demonstrate that the conservative effect associated with the damping of the structure is responsible for about 80% of the vibration attenuation, with the thickness of the elastic layers being the most relevant parameter. Additionally, MSE allowed the partially treated system to achieve a structural efficiency 1.8 times greater than the fully treated system. The results in terms of the envelopes of the V-g and V-f diagrams also show that the robust system has a vulnerability 7 times lower than the deterministic system in the flutter speed response, proving the efficiency of the tool developed integrated with the models. With this, it is possible to reduce project safety factors due to uncertainties and achieve advantages such as: increased component lifespan, use of less material in manufacturing, and increased structural efficiency of aircraft.

Keywords: Viscoelastic Material, Stochastic Finite Element Method, Vibration Control, Aeroelasticity, Multiobjective Optimization, Genetic Algorithm.

Lista de ilustrações

Figura 2.1 – Representação esquemática do elemento finito de 3 camadas	30
Figura 2.2 – Variação do módulo de armazenamento e do fator de perda do viscoelástico em função da temperatura sob frequência constante	36
Figura 2.3 – Variação do módulo de armazenamento e do fator de perda do viscoelástico em função da frequência sob temperatura constante	37
Figura 2.4 – Representação do PSFT	38
Figura 3.1 – Ilustração dos painéis do método DLM	41
Figura 4.1 – Esquema de acoplamento das malhas estrutural e aerodinâmica	50
Figura 4.2 – Diagrama v-g para 3 modos	52
Figura 4.3 – Fluxograma do método pk	54
Figura 6.1 – Representação da geometria da asa Blaircraft 2100	66
Figura 6.2 – Discretização dos painéis da asa Blaircraft 2100	66
Figura 6.3 – Distribuição de pressão da Blaircraft 2100	67
Figura 6.4 – Geometria da PLW	68
Figura 6.5 – Diagrama V-f da PLW para 2 modos	69
Figura 6.6 – Diagrama V-g da PLW para 2 modos	70
Figura 6.7 – FRF dos 3 sistemas da placa engastada	72
Figura 6.8 – Diagramas V-f dos 3 sistemas para os 2 primeiros modos	73
Figura 6.9 – Diagramas V-g dos 3 sistemas para os 2 primeiros modos	74
Figura 6.10–Mapa da energia de deformação do Modo 1	75
Figura 6.11–Mapa da energia de deformação do Modo 2	76
Figura 6.12–Divisão das regiões no painel plano	77
Figura 6.13–Regiões de aplicação do viscoelástico em 3x3 para os dois primeiros modos	77
Figura 6.14–Diagrama V-f para o tratamento parcial	78
Figura 6.15–Diagrama V-g para o tratamento parcial	79
Figura 6.16–Análise Paramétrica da Espessura	81
Figura 6.17–Análise Paramétrica da Espessura	82

Figura 6.18–Superfície da Análise Paramétrica das Espessuras	83
Figura 6.19–Análise Paramétrica da Temperatura de Operação	84
Figura 6.20–Superfícies da Variação da Temperatura de Operação	85
Figura 6.21–Soluções ótimas do NSGA-II para as funções f_1 e f_2	87
Figura 6.22–Função de Vulnerabilidade de f_1	88
Figura 6.23–Função de Vulnerabilidade de f_2	89
Figura 6.24–Diagrama V-g dos pontos B e D	90

Lista de tabelas

Tabela 2.1 – Constantes do viscoelástico ISD112	39
Tabela 6.1 – Frequências de excitação dos 4 primeiros modos da placa engastada . .	65
Tabela 6.2 – Parâmetros do DLM utilizado por Blair	65
Tabela 6.3 – Comparação dos coeficientes de pressão obtidos por Blair e pelo Aero- Solver	67
Tabela 6.4 – Coeficientes de sustentação normalizados	67
Tabela 6.5 – Parâmetros de simulação da PLW de policarbonato no AeroSolver . . .	69
Tabela 6.6 – Resultados comparativos	70
Tabela 6.7 – Parâmetros da simulação em EF para obtenção das FRF's	71
Tabela 6.8 – Frequências e ganhos percentuais obtidos para os sistemas analisados .	72
Tabela 6.9 – Frequências dos modos 1 e 2 dos sistemas	73
Tabela 6.10–Ganhos de velocidade de <i>flutter</i> e acréscimos de massa	74
Tabela 6.11–Frequências dos modos 1 e 2 do sistema parcial	79
Tabela 6.12–Ganhos de velocidade de <i>flutter</i> e acréscimos de massa no sistema parcial	80
Tabela 6.13–Variáveis de projeto e espaço de busca do NSGA-II	86
Tabela 6.14–Parâmetros de configuração do NSGA-II	86
Tabela 6.15–Soluções de pareto e indivíduos do NSGA-II	87
Tabela 6.16–Ganhos de velocidade de <i>flutter</i> e acréscimos de massa no sistema par- cial otimizado	87
Tabela 6.17–Velocidades de <i>flutter</i> dos pontos determinísticos (B) e robustos (D) .	90

Lista de siglas

CCA - Comportamento Conservativo Associado

DLM - *Doublet Lattice Method*

DRS - *Deterministic and Robust Solutions*

FRF - Função Resposta em Frequência

FSDT - *First-Order Shear Deformation Theory*

HCL - Hipercubo Latino

KL - Karhunen-Loève

LMEst - Laboratório de Mecânica das Estruturas

MEF - Método dos Elementos Finitos

MSE - *Modal Strain Energy*

NSGA-II - *Nondominated Sorting Genetic Algorithm II*

PEEV - Princípio da Equivalência Elástico-Viscoelástico

PLA - Polímero Ácido Polilático

PLW - *Plate Like Wing*

PSFT - Princípio da Superposição Frequência-Temperatura

RNA - Rede Neural Artificial

SCA - Sistema Conservativo Associado

UFU - Universidade Federal de Uberlândia

v-f - Velocidade-Frequência

v-g - Velocidade-Amortecimento

VLM - *Vortex Lattice Method*

Sumário

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	Contribuição e Motivação	21
1.2	Acoplamento de sistemas multicamadas viscoelásticos e DLM .	23
1.3	Verificação do ganho do sistema para aumento da estabilidade	24
1.4	Técnica de projeto para tratamentos parciais usando <i>Modal Strain Energy</i> (MSE)	25
1.5	Otimização robusta com introdução de funções de vulnerabilidade	26
1.6	Objetivos	27
2	MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE PLACAS SANDUÍCHE DE 3 CAMADAS	29
2.1	Modelo Sanduíche de 3 Camadas	29
2.1.1	Relações cinemáticas	30
2.1.2	Relações de tensão e deformação	31
2.1.3	Matrizes elementares de rigidez e massa	33
2.2	Amortecimento Viscoelástico	35
2.2.1	Influência da temperatura e frequência	35
2.2.2	Princípio da superposição frequência-temperatura	37
3	MODELO AERODINÂMICO NÃO ESTACIONÁRIO	41
3.1	Descrição do <i>Doublet Lattice Method</i> (DLM)	41
3.1.1	Resolução da equação potencial aerodinâmica	42
3.1.2	Obtenção do diferencial de pressão	43
3.1.3	Carregamento aerodinâmico não estacionário	47
4	MODELO AEROVISCOELÁSTICO DETERMINÍSTICO	49
4.1	Acoplamento dos modelos estrutural e aerodinâmico	49

4.2	Análise de estabilidade do Sistema	51
4.2.1	Cálculo do <i>flutter</i> - Método PK	52
4.2.2	Aproximação de Roger	53
5	MODELO AEROVISCOELÁSTICO ESTOCÁSTICO	57
5.1	Matrizes Estocásticas pela Expansão de KL	57
5.1.1	Matriz de rigidez estocástica	58
5.1.2	Matriz de massa estocástica	61
5.2	Equações do Movimento do Sistema Estocástico	61
6	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	63
6.1	Verificação do modelo estrutural multicamadas	63
6.2	Verificação do modelo aeroelástico	65
6.2.1	Método DLM de Blair	65
6.2.2	Verificação com dados experimentais de uma <i>Plate Like Wing</i>	68
6.3	Sistema Conservativo Associado (SCA)	71
6.4	Influência do tratamento parcial na estabilidade	74
6.5	Análise paramétrica do sistema aeroviscoelástico	80
6.5.1	Influência das espessuras das camadas	80
6.5.2	Influência da temperatura na estabilidade	83
6.6	Otimização multiobjetivo robusta	85
7	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	91
7.1	Conclusão Geral	91
7.2	Principais Dificuldades e Perspectivas Futuras	92
	REFERÊNCIAS	95

Introdução

1.1 Contribuição e Motivação

Com o objetivo de reduzir os impactos ambientais causados por novos produtos e o consumo excessivo, governos e organizações internacionais têm se empenhado em discutir e buscar, em conjunto com a sociedade e a indústria, formas cada vez mais eficientes de criar produtos e soluções energeticamente sustentáveis. Um exemplo é o setor da aviação, que foi pioneiro na adoção de medidas para reduzir seu impacto ambiental, principalmente após o acordo de Paris em 2015, comprometendo-se a reduzir em 50 % suas emissões de CO₂ até 2050. Recentemente, em outubro de 2021, a meta foi renovada, estabelecendo a busca por emissão zero de carbono líquido até 2050 (ICAO, 2021).

Para atingir essas metas, fabricantes de aeronaves em todo o mundo têm investido na criação de aviões cada vez mais econômicos, com o uso de materiais mais leves e novos projetos estruturais e aerodinâmicos de componentes como as asas. Entretanto, essas inovações geométricas têm trazido novos desafios, especialmente no que diz respeito à integridade estrutural e segurança. Um dos problemas que podem surgir é o *flutter*, um fenômeno aeroelástico caracterizado por oscilações auto-excitadas causadas por instabilidades dinâmicas das forças de inércia, elasticidade e aerodinâmica (CUNHA-FILHO et al., 2016b). Esse tipo de instabilidade pode levar a um aumento significativo na amplitude de vibração da estrutura, afetando sua vida útil por fadiga e, em alguns casos, levar a acidentes fatais, como o ocorrido com o Lockheed L-188 (KUO, 2011).

Diante desse cenário, o controle do *flutter* tem sido objeto de estudo por muitos pesquisadores em todo o mundo (WRIGHT; COOPER, 2014) (GRIPP; RADE, 2018). Com o objetivo de alcançar maior confiabilidade e segurança no projeto e na fabricação de estruturas aeronáuticas (LEÃO et al., 2016), têm sido propostas técnicas de controle de vibrações, tanto ativas como passivas. Dentre as técnicas passivas, o tratamento com material viscoelástico se destaca pelas inúmeras vantagens, como facilidade de aplicação, menor custo com aplicação e manutenção e maior robustez do controle. No entanto, é importante considerar as dificuldades inerentes do uso desses materiais como técnica

de controle de vibrações e ruído de sistemas dinâmicos, devido à sua dependência em frequência e temperatura de operação do sistema (LIMA, 2007).

Estudos têm se dedicado à análise e o controle de vibrações com o uso de materiais viscoelásticos, como por exemplo, Mozaffari-Jovin, Firouz-Abadi e Roshanian (2015) que investigaram os parâmetros de controle e a influência de um *flap* no regime subsônico. Já Fazelzadeh, Pouresmaeeli e Ghavanloo (2015) conduziram uma pesquisa sobre materiais viscoelásticos em placas compósitas reforçadas com nanotubos de carbono no regime subsônico, estudando as instabilidades e a relação de aspecto dessas placas, bem como o impacto da fração volumétrica dos compósitos. Outros autores, como Sales et al. (2018), relatam que o amortecimento viscoelástico pode aumentar a velocidade de *flutter* e reduzir as oscilações, explorando também o efeito do amortecimento viscoelástico em relação às variações de temperatura.

Apesar dos estudos sobre o uso dos materiais viscoelásticos para a atenuação de vibrações e aumento da estabilidade em sistemas aeroelásticos sejam bem difundidos, grande parte deles está relacionada a sistemas supersônicos utilizando a Teoria do Pistão e análise transiente (CUNHA-FILHO, 2019) (CUNHA-FILHO et al., 2018), com modelos constitutivos baseados em derivadas fracionárias temporais para sistemas transientes (CUNHA-FILHO et al., 2021), (CUNHA-FILHO et al., 2016a), (CUNHA-FILHO et al., 2016b), (CUNHA-FILHO, 2015). Contudo, poucos trabalhos abordam o estudo de sistemas aeroviscoelásticos em regime subsônico, principalmente no contexto do uso do método *Doublet Lattice* em tais sistemas na presença de incertezas paramétricas, o que motivou a presente pesquisa. Isso se deve, em parte, à complexidade de modelar a dependência em frequência e temperatura dos sistemas aeroviscoelásticos estocásticos resultantes, além da dificuldade em representar esse comportamento no regime subsônico, onde são necessários métodos iterativos para obter as regiões de instabilidade em uma determinada velocidade do fluxo.

Assim, a investigação do comportamento de sistemas aeroviscoelásticos em regime subsônico e a avaliação do potencial dos materiais viscoelásticos para atenuar vibrações e aumentar a estabilidade são de grande relevância, pois podem contribuir para o desenvolvimento de tecnologias mais seguras e eficientes no campo da aeronáutica. Compreender as características de tais sistemas e identificar as condições adequadas para controlar as vibrações e aumentar a estabilidade permitirá a construção de aeronaves mais estáveis e menos suscetíveis a falhas.

Além disso, é importante propor uma metodologia eficaz para a modelagem da dependência em frequência e temperatura dos sistemas aeroviscoelásticos em regime subsônico, utilizando métodos iterativos para obter as regiões de instabilidade. Essa abordagem é fundamental para uma simulação do comportamento desses sistemas em condições reais de operação, o que é crucial para garantir a segurança das operações aéreas.

Por fim, a avaliação de como os parâmetros de projeto de sistemas aeroviscoelásticos influenciam na sua estabilidade para otimizar o seu desempenho em regime subsônico,

trazem informações valiosas para o projeto de aeronaves que operam em diferentes regimes de voo. Portanto, uma modelagem estocástica desses sistemas se faz necessária, além de combinar com técnicas eficientes de otimização multiobjetivo robusta, como será apresentado neste trabalho.

As inovações deste trabalho incluem a incorporação de incertezas no modelo aero-viscoelástico e a integração desses modelos com a otimização. Adicionalmente, foram implementadas melhorias no processo de otimização, que, mesmo utilizando uma linguagem de programação com tempo de processamento elevado, buscaram reduzir o custo computacional.

1.2 Acoplamento de sistemas multicamadas viscoelásticos e DLM

Segundo (BORGES, 2019), o acoplamento de sistemas multicamadas com materiais viscoelásticos e o *Doublet Lattice Method* (DLM) permite analisar sistemas amortecidos viscoelasticamente e obter os deslocamentos nodais, que são necessários para o uso do método DLM para calcular os carregamentos aerodinâmicos e, conseqüentemente, obter os diagramas v-g para a análise de estabilidade aeroelástica de tais sistemas.

Em sistemas multicamadas, como placas sanduíches viscoelásticas, os materiais viscoelásticos são frequentemente utilizados para interligar camadas, reduzindo as tensões e as amplitudes de vibração dos sistemas aos quais são aplicados (SHENG et al., 2018). Isso melhora a resistência a fadiga, contribuindo para o aumento da vida útil da estrutura, uma vez que os materiais viscoelásticos têm uma combinação única de comportamento elástico e viscoso (NASHIF; JONES; HENDERSON, 1985). O que significa que quando sujeitos a uma carga dinâmica ou deformação mecânica, eles podem exibir um comportamento elástico inicial e transicionar para um comportamento viscoso, dissipando energia e amortecendo o sistema.

Já o DLM é uma técnica bastante utilizada para a análise aerodinâmica e aeroelástica de asas, pás de turbinas e outras superfícies aerodinâmicas em movimento. O método divide a superfície em painéis finitos, e inseridos nos chamados dipolos, que são pequenas fontes de força e momento distribuídos ao longo da superfície. De acordo com Albano e Rodden (1969), o DLM é uma abordagem semi-empírica que permite calcular a distribuição de pressão e forças aerodinâmicas em uma superfície em resposta ao fluxo de ar circundante. Além disso, este método também pode ser estendido para incluir a análise aeroelástica, considerando a flexibilidade da estrutura e suas interações com as forças aerodinâmicas.

Neste contexto, a integração do DLM com sistemas incorporando materiais viscoelásticos é relevante para a dinâmica estrutural e aeroelasticidade, pois permite levar em consideração tanto a resposta aerodinâmica quanto a resposta estrutural, incluindo os efei-

tos do amortecimento viscoelástico nas oscilações e, conseqüentemente, na estabilidade da estrutura. Isso é especialmente importante para garantir que a aeronave ou estrutura de interesse seja projetada para evitar o fenômeno do *flutter*, ressonância estrutural e fadiga excessiva, que podem ser prejudiciais à integridade estrutural e segurança do sistema, podendo levá-lo ao colapso.

1.3 Verificação do ganho do sistema para aumento da estabilidade

Quando o material viscoelástico está acoplado no sistema estrutural multicamadas, há um ganho significativo em termos da redução das amplitudes de vibração. No domínio da frequência, isto pode ser facilmente identificado pela análise da função de resposta em frequência (FRF) do sistema. Devido ao aumento do fator de amortecimento do material viscoelástico em função da frequência para uma dada temperatura de operação, observa-se ganhos maiores em bandas maiores que 20 Hz (GE et al., 2021).

Além disso, a incorporação de um material viscoelástico em um sistema do tipo placas finas de 3 camadas pode trazer benefícios significativos para o aumento da estabilidade de estruturas aeroelásticas. Em primeiro lugar, o material viscoelástico é capaz de amortecer vibrações, dissipando a energia indesejável do sistema sob a forma de calor quando sujeito a cargas dinâmicas. Esse amortecimento resulta na redução da amplitude e do tempo de resposta das vibrações indesejadas, tornando a estrutura mais resistente a ressonâncias prejudiciais (VERBAAN; PETERS; STEINBUCH, 2017).

Outro ponto, é que o comportamento viscoelástico permite uma melhor adaptação da frequência natural da estrutura, deslocando-a para longe de regiões críticas de excitação. Dessa forma, ocorre uma redução dos riscos de ocorrer a coalescência de ressonâncias indesejadas, que poderiam levar a falhas por fadiga ou instabilidade estrutural (ALAIMO; ORLANDO; VALVANO, 2019).

Por fim, outro grande benefício do uso dos materiais viscoelásticos, é a maior tolerância da estrutura a perturbações aerodinâmicas em aplicações aeroelásticas. As placas de 3 camadas com material viscoelástico têm a capacidade de dissipar parte da energia cinética transferida pelas perturbações, tornando o sistema mais robusto e menos suscetível a oscilações descontroladas induzidas pelos esforços aerodinâmicos. Portanto, tem-se um ganho na estabilidade do sistema através do retardo do fenômeno do flutter, evitando, assim, catástrofes.

A presença do material viscoelástico também contribui para um aumento da capacidade de carga da estrutura. Ao dissipar parte da energia durante carregamentos dinâmicos ou transitórios, o material reduz os picos de tensão e evita concentrações excessivas de esforços, prolongando a vida útil da estrutura (SARWAR, 2019).

Em resumo, o emprego de estruturas sanduíches viscoelásticas proporciona maior estabilidade e confiabilidade em situações aeroelásticas e estruturais, permitindo a redução de vibrações indesejadas, melhorando a resposta a perturbações externas e aumentando a segurança e vida útil da estrutura.

1.4 Técnica de projeto para tratamentos parciais usando *Modal Strain Energy* (MSE)

O tratamento parcial com camadas restritas passivas oferece várias vantagens em relação ao tratamento completo de toda a estrutura (LIMA, 2007). Um dos benefícios mais significativos é a sua relação custo-efetividade. O tratamento completo de um painel estrutural de interesse aeronáutico pode ser caro, pois requer uma maior quantidade desse material. Em contraste, a abordagem de tratamento parcial concentra-se em aplicar estrategicamente os tratamentos viscoelásticos em regiões que experimentam as vibrações e tensões mais significativas, reduzindo assim o uso de material e os custos totais (KUO, 2011), além de diminuir o peso acrescentado à estrutura base.

Portanto, ao tratar seletivamente apenas os modos de vibração mais críticos, a abordagem de tratamento parcial resulta numa redução do ganho de peso, tornando-se uma opção de projeto mais eficiente e atraente, especialmente em aplicações com restrição de acréscimo de peso, como nas indústrias aeroespacial e automotiva (LIMA, 2003).

Outra vantagem está na capacidade de personalizar o desempenho do amortecimento do sistema sanduíche, conforme os requisitos específicos de projeto. Diferentes aplicações demandam diferentes níveis de amortecimento para alcançar o desempenho ideal. Neste contexto, o método de energia modal de deformação (*Modal Strain Energy* - MSE) permite que os engenheiros identifiquem os modos mais influentes e apliquem estrategicamente o tratamento viscoelástico superficial para obter o efeito de amortecimento desejado nesses modos. Essa personalização garante que a placa sanduíche dissipe efetivamente a energia, minimizando as vibrações e melhorando a estabilidade e o desempenho estrutural. Além de se ter um menor esforço computacional com modos específicos (XU; LIU; WANG, 2002).

Além disso, o método de tratamento parcial ajuda a evitar possíveis problemas associados ao superamortecimento que pode levar a uma redução da rigidez geral da estrutura, afetando negativamente sua capacidade de suportar carga e seu desempenho geral. Ao tratar apenas os modos de interesse, a abordagem de tratamento parcial evita o superamortecimento e garante que a placa sanduíche mantenha sua integridade estrutural e propriedades mecânicas desejadas (DOLGAYA; UZDIN, 2000).

Assim, o tratamento parcial com camadas restritas passivas, usando o método MSE, oferece uma abordagem equilibrada e eficiente para melhorar o desempenho estrutural. A relação custo-efetividade, redução de peso e desempenho personalizado de amortecimento

tornam esse método uma escolha preferida para aplicações de engenharia onde o controle de vibrações e a otimização estrutural são críticos (SUN et al., 2017).

1.5 Otimização robusta com introdução de funções de vulnerabilidade

A otimização robusta é uma abordagem poderosa e sofisticada que lida com as incertezas inerentes em problemas de otimização (LIMA, 2007). Em muitos problemas de interesse prático, os dados e parâmetros utilizados em processos de otimização podem ser afetados por uma série de fatores imprevisíveis, como variações ambientais, defeitos no processo de fabricação ou erros de medição. Essas incertezas podem levar a soluções otimizadas que são inviáveis ou ineficazes em determinados cenários, comprometendo a robustez e precisão do sistema em questão (CHASSEIN; GOERIGK, 2018).

Uma das formas de garantir que as soluções ótimas sejam menos sensíveis às incertezas, é empregar funções de vulnerabilidade na otimização robusta. Essas funções permitem quantificar o impacto das incertezas nos resultados, medindo a suscetibilidade das soluções sob diferentes perturbações. Ao introduzir essas funções no processo de otimização, o objetivo é encontrar soluções que minimizem a função de vulnerabilidade, em vez de buscar apenas uma solução ótima para um único objetivo (LIMA, 2007). Em outras palavras, a otimização robusta com funções de vulnerabilidade busca soluções que sejam estáveis sob diferentes níveis de incerteza, onde o processo de otimização leva em conta a probabilidade de ocorrência de cada cenário incerto e busca encontrar soluções que tenham desempenho aceitável em todos eles (BERTSIMAS; HERTOOG; PAUPHILET, 2021).

Outro aprimoramento para a otimização robusta é a modelagem em elementos finitos estocásticos pela expansão de Karhunen-Loève (KL), onde nessa abordagem a variabilidade dos elementos finitos obedecem uma distribuição espacial, isto é, dependente da localização geométrica do elemento. Isto é particularmente importante, pois lida com incertezas a nível elementar, o que possibilita avaliar a probabilidade de falha e otimizar o design para garantir níveis adequados de segurança, além de modelar com precisão e eficiência tanto os problemas de elementos finitos estocásticos unidimensionais quanto os bidimensionais (LIU et al., 2021). A abordagem de Monte Carlo é frequentemente utilizada em conjunto com a otimização robusta no método dos elementos finitos (MEF) estocástico para lidar com as incertezas paramétricas. Esse método estatístico baseia-se na amostragem aleatória de valores para os parâmetros incertos, permitindo que sejam realizadas várias simulações do problema de otimização sob diferentes cenários. Com base nessas simulações, é possível calcular a função de vulnerabilidade e, assim, identificar as soluções ótimas mais robustas (IKONOMOV; GUTMANN, 2019).

A análise dos resultados obtidos após a otimização robusta é fundamental para entender o comportamento das soluções em diferentes cenários incertos. Através dessa análise,

é possível tomar decisões informadas sobre quais soluções são mais adequadas para a aplicação prática. A otimização robusta com introdução de funções de vulnerabilidade é amplamente aplicada em diversas áreas, como engenharia, finanças, logística e gestão de riscos, onde a incerteza é um fator crítico a ser considerado para garantir a eficácia e confiabilidade das soluções encontradas. Portanto, essa abordagem oferece uma maneira poderosa de abordar problemas complexos e aumentar a confiabilidade dos sistemas diante de cenários incertos e imprevisíveis (ABEDI; HESAMZADEH; ROMERIO, 2022).

1.6 Objetivos

Os seguintes objetivos gerais são apresentados numericamente e os objetivos específicos nas respectivas alíneas.

1. Modelagem de estrutura complexa com camada restritiva passiva:
 - a) Modelar em MEF a estrutura de placa sanduíche de três camadas;
 - b) Modelar o Material viscoelástico e sua dependência pelo princípio da frequência e temperatura;
 - c) Incluir o modelo estocástico no MEF por KL;
 - d) Acoplar o DLM e melhorar computacionalmente o método pk pela redução da estimativa do valor de frequência reduzida.
2. Analisar parametricamente e realizar o tratamento parcial via (MSE):
 - a) Analisar a influência dos parâmetros de projeto na velocidade de *flutter*;
 - b) Gerar superfícies de resposta como base para metamodelos;
 - c) Aumentar a eficiência estrutural do tratamento pelos mapas de energia.
3. Realizar uma otimização multiobjetivo robusta:
 - a) Integrar os modelos MEF-DLM (AeroSolver) com o *Nondominated Sorting Genetic Algorithm II*. Aerosolver DRS (*Deterministic and Robust Solutions*) em ambiente de programação próprio.

Modelagem por elementos finitos de placas sanduíches de três camadas

Este capítulo apresenta a modelagem determinística por elementos finitos de uma placa sanduíche viscoelástica de três camadas, abordando a inclusão do comportamento dinâmico do material viscoelástico através do Princípio da Equivalência Elástico-Viscoelástico (PEEV) e do conceito de módulo complexo e frequência reduzida. Com o intuito de reduzir o custo computacional envolvido durante a implementação numérico-computacional do modelo, as matrizes elementares de massa e rigidez da parte estrutural foram parametrizadas e colocadas em função das espessuras das camadas e da temperatura de operação do sistema. Referências adicionais sobre a modelagem por elementos finitos de placas sanduíches multicamadas podem ser encontradas nos trabalhos de Lima (2007), Cunha-Filho (2019) e Cunha-Filho et al. (2021).

2.1 Modelo Sanduíche de 3 Camadas

A Fig. (2.1) mostra o elemento finito de placa sanduíche de três camadas estudado neste trabalho, sendo (1) a camada de base, (2) o núcleo viscoelástico e (3) a camada restringente. Para as faces elásticas (1) e (3), consideram-se as deformações de extensão e flexão, enquanto que para a camada viscoelástica (2) é assumido também o cisalhamento transversal. O campo de deslocamento transversal, w , e as rotações, θ_x e θ_y , são os mesmos para todas as camadas, presumindo-se uma aderência perfeita entre ambas as camadas. Na mesma figura, pode-se notar que u_1 e u_3 representam os deslocamentos longitudinais médios na direção x das camadas elásticas, enquanto v_1 e v_3 representam os correspondentes na direção y . Para representar a estrutura deformada da placa, será adotada a Teoria da Deformação por Cisalhamento de Primeira Ordem ou *First-Order Shear Deformation Theory* (FSDT) (REDDY, 2003). Nessa abordagem, os deslocamentos das camadas elásticas (base e restringente) são definidos de acordo com a teoria de placas finas de Kirchhof-Love, onde mais detalhes sobre a dinâmica e formulação de placas

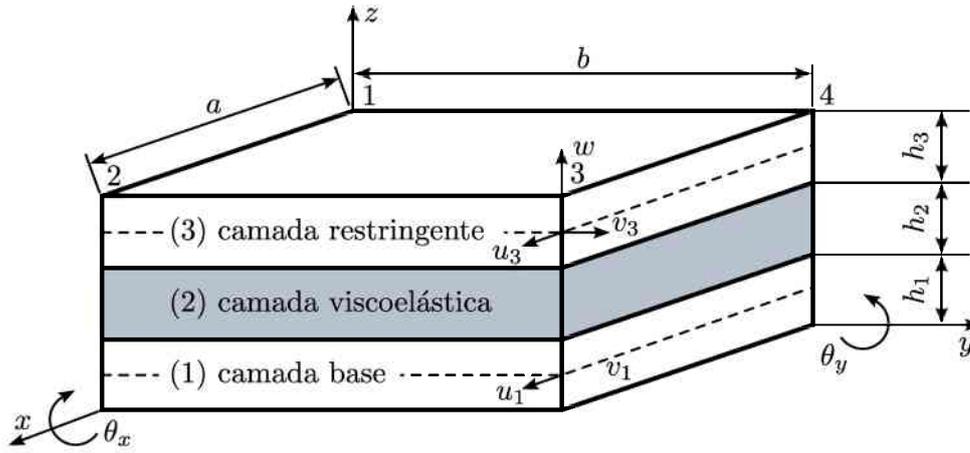


Figura 2.1 – Representação esquemática do elemento finito de 3 camadas.

Fonte: Adaptado de Lima (2007).

sanduíches utilizando esta teoria podem ser vistas em Cunha-Filho (2019).

2.1.1 Relações cinemáticas

Assumindo que as camadas das faces são planas antes e após a deformação, as seguintes relações cinemáticas para as faces elásticas podem ser estabelecidas, de acordo com Lima (2007):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_j = \frac{u_b - u_c}{h_j} \quad (2.1)$$

onde,

$$u_b = u_{i+1} + \frac{h_{i+1}}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.2)$$

$$u_c = u_i + \frac{h_i}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.3)$$

u_i e u_{i+1} representam os deslocamentos longitudinais médios das camadas elásticas inferior e superior, respectivamente, na direção x . Combinando as Equações (2.2) e (2.3) com (2.1), obtém-se:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_j = \frac{1}{h_j} \left[(u_{i+1} - u_i) + \left(\frac{h_{i+1} + h_i}{2}\right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (2.4)$$

rearranjando com d_j tem-se:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_j = \frac{d_j}{h_j} \left[\frac{(u_{i+1} - u_i)}{d_j} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (2.5)$$

sendo,

$$d_j = \frac{(h_{i+1} + h_i)}{2} \quad (2.6)$$

De forma análoga, para a direção y tem-se que:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_j = \frac{d_j}{h_j} \left[\frac{(v_{i+1} - v_i)}{d_j} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (2.7)$$

onde v_i e v_{i+1} , são os deslocamentos médios das camadas elásticas inferior e superior, respectivamente, na direção y . Para os deslocamentos médios da camada viscoelástica, na direção x :

$$u_j = \frac{u_b + u_c}{2} = \frac{1}{2} \left[(u_{i+1} + u_i) + \left(\frac{h_{i+1} - h_i}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (2.8)$$

na direção em y :

$$v_j = \frac{v_b + v_c}{2} = \frac{1}{2} \left[(v_{i+1} + v_i) + \left(\frac{h_{i+1} - h_i}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (2.9)$$

2.1.2 Relações de tensão e deformação

Considerando apenas deformações de extensão e flexão para as camadas elásticas, e incluindo a deformação por cisalhamento na camada viscoelástica, Lima (2007) mostra que as seguintes relações devem ser utilizadas:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.11)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.12)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.13)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.14)$$

O índice (i) faz referência à i -ésima camada elástica, e z_i é a distância segundo a direção z , medida a partir do plano médio.

Da mesma forma, o índice j é associado à j -ésima camada viscoelástica. Os deslocamentos longitudinais de um ponto qualquer nas direções x e y da i -ésima camada elástica, podem ser expressos como segue:

$$u^{(i)} = u_i - z_i \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i \quad (2.15)$$

$$v^{(i)} = v_i - z_i \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \quad (2.16)$$

Combinando as relações, pode-se obter as deformações como sendo:

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial u_i}{\partial x} - z_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.17)$$

$$\varepsilon_y^{(i)} = \frac{\partial v_i}{\partial y} - z_i \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.18)$$

$$\gamma_{xy}^{(i)} = \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.19)$$

Assim, são estabelecidas as seguintes relações de tensão e deformação na forma matricial:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = \mathbf{E}^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} \quad (2.20)$$

sendo o vetor de tensões representado por $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$, o vetor de deformações $\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}$ e a matriz de coeficientes elásticos $\mathbf{E}^{(i)}$ para a i -ésima camada, dados por:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = \begin{bmatrix} \sigma_x^{(i)} \\ \sigma_y^{(i)} \\ \tau_{xy}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^{(i)} \\ \varepsilon_y^{(i)} \\ \gamma_{xy}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$\mathbf{E}^{(i)} = \begin{bmatrix} \frac{E^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}} & \frac{E^{(i)}\nu^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}} & 0 \\ \frac{E^{(i)}\nu^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}} & \frac{E^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}} & 0 \\ 0 & 0 & G^{(i)} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Para a j -ésima camada (viscoelástica), o deslocamento longitudinal na direção x é dado por:

$$u^{(j)} = u_j + z_j \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_j \quad (2.24)$$

combinando a Eq. (2.4) com a Eq. (2.24), obtém-se:

$$u^{(j)} = u_j + z_j \left[\frac{u_{i+1} - u_i}{h_j} + \left(\frac{h_{i+1} + h_i}{2h_j} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (2.25)$$

para a direção y , tem-se:

$$v^{(j)} = v_j + z_j \left[\frac{v_{i+1} - v_i}{h_j} + \left(\frac{h_{i+1} + h_i}{2h_j} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (2.26)$$

considerando as Eq. (2.10) a Eq. (2.14), pode-se escrever as deformações para a camada viscoelástica como:

$$\varepsilon_x^{(j)} = \frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{z_j}{h_j} \left[\left(\frac{\partial u_{i+1}}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) + \left(\frac{h_{i+1} + h_i}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (2.27)$$

$$\varepsilon_y^{(j)} = \frac{\partial v_j}{\partial y} + \frac{z_j}{h_j} \left[\left(\frac{\partial v_{i+1}}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) + \left(\frac{h_{i+1} + h_i}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (2.28)$$

$$\gamma_{xy}^{(j)} = \frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x} + \frac{z_j}{h_j} \left[\left(\frac{\partial u_{i+1}}{\partial y} + \frac{\partial v_{i+1}}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) + (h_{i+1} + h_i) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (2.29)$$

$$\gamma_{xz}^{(j)} = \frac{1}{h_j} \left[u_{i+1} - u_i + \left(\frac{h_{i+1} + h_i}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (2.30)$$

$$\gamma_{yz}^{(j)} = \frac{1}{h_j} \left[v_{i+1} - v_i + \left(\frac{h_{i+1} + h_i}{2} + h_j \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (2.31)$$

Assim, é possível derivar a seguinte representação matricial que descreve as interações entre tensão e deformação para o núcleo de material viscoelástico:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(j)} = \mathbf{E}^{(j)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(j)} \quad (2.32)$$

onde o vetor de tensões $\boldsymbol{\sigma}^{(j)}$, o vetor de deformações $\boldsymbol{\varepsilon}^{(j)}$ e a matriz de coeficientes elásticos $\mathbf{E}^{(j)}$ para a camada viscoelástica j -ésima são expressos da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(j)} = \begin{bmatrix} \sigma_x^{(j)} \\ \sigma_y^{(j)} \\ \tau_{xy}^{(j)} \\ \tau_{xz}^{(j)} \\ \tau_{yz}^{(j)} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(j)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^{(j)} \\ \varepsilon_y^{(j)} \\ \gamma_{xy}^{(j)} \\ \gamma_{xz}^{(j)} \\ \gamma_{yz}^{(j)} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{E}^{(j)} = \begin{bmatrix} \frac{E^{(j)}}{1-\nu^{(j)2}} & \frac{E^{(j)}\nu^{(j)}}{1-\nu^{(j)2}} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{E^{(j)}}{1-\nu^{(j)2}} & 0 & 0 & 0 \\ & & G^{(j)} & 0 & 0 \\ & & & G^{(j)} & 0 \\ \text{sym.} & & & & G^{(j)} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

É fundamental destacar que os módulos $E^{(j)}$ e $G^{(j)}$ variam conforme a frequência e a temperatura nos materiais viscoelásticos (NASHIF; JONES; HENDERSON, 1985). Essa variação é considerada por meio do Princípio da Superposição Frequência-Temperatura, abordado na subseção 2.2.1.

2.1.3 Matrizes elementares de rigidez e massa

Conforme a Fig. (2.1), o elemento finito de placa sanduíche de três camadas considerado neste trabalho, é composto pelos seguintes graus de liberdade: os deslocamentos longitudinais u e v nas direções x e y ; deslocamento transversal w ; e as rotações θ_x e θ_y . Todos estes são agrupados no campo de deslocamento nodal $\boldsymbol{\delta}$, como mostra a Eq. (2.36). Para representar estes deslocamentos, são introduzidas funções de interpolação, agrupadas na matriz de funções de forma \mathbf{N} dada pela Eq. (2.37). Para completar o equacionamento, é mostrado também, a matriz dos operadores diferenciais \mathbf{D} na Eq. (2.38) e Eq. (2.39).

$$\boldsymbol{\delta}^{(k)} = \begin{bmatrix} u^{(k)}(x, y, z, t) \\ v^{(k)}(x, y, z, t) \\ w^{(k)}(x, y, z, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0^{(k)}(x, y, z, t) - (z - z^{(k)}) \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} \\ v_0^{(k)}(x, y, z, t) - (z - z^{(k)}) \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_{u_1} \quad \mathbf{N}_{v_1} \quad \mathbf{N}_{u_2} \quad \mathbf{N}_{v_2} \quad \mathbf{N}_{u_n} \quad \mathbf{N}_{v_n} \quad \mathbf{N}_{w_n}] \quad (2.37)$$

$$\mathbf{D}^{(1,3)} = \mathbf{N} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{D}^{(2)} = \mathbf{N} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = \mathbf{D}\boldsymbol{\delta}^{(k)} \quad (2.40)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(1,3)} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \tau_{xy}] \quad (2.41)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}] \quad (2.42)$$

Pela lei de Hooke, Eq. (2.20) e Eq. (2.32), pode-se estabelecer as equações do movimento para um elemento finito e assim formular as expressões das energias potencial de deformação mecânica e cinética, que permitem obter, respectivamente, as matrizes de rigidez e massa do sistema. Podemos escrever a energia de deformação da k -ésima camada como:

$$\mathbf{U}^{(k)} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)T} \mathbf{E}^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} dV = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \left(\int_V \mathbf{D}^{(k)T} \mathbf{E}^{(k)} \mathbf{D}^{(k)} dV \right) \boldsymbol{\delta} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}^{(k)} \boldsymbol{\delta} \quad (2.43)$$

onde o termo entre parênteses da Eq. (2.43) representa a matriz de rigidez elementar de cada camada. Assim, escrevemos a Eq. (2.44) para as camadas elásticas ($k=1,3$) e a a Eq. (2.45) para a camada viscoelástica ($k=2$), como seguem:

$$\mathbf{K}^{(1,3)} = \int_V \mathbf{D}^{(1,3)T} \mathbf{E}^{(1,3)} \mathbf{D}^{(1,3)} dV \quad (2.44)$$

$$\mathbf{K}^{(2)}(\omega, T) = \int_V \mathbf{D}^{(2)T} \mathbf{E}^{(2)}(\omega, T) \mathbf{D}^{(2)} dV \quad (2.45)$$

Nas equações anteriores, o termo \mathbf{E} representa o módulo de elasticidade para as camadas, sendo que para o material viscoelástico, sendo função da frequência ω e a temperatura T . Para determinar a matriz de massa elementar, define-se a energia cinética do elemento como:

$$T^{(k)} = \frac{1}{2} \int_m (\dot{w}^2 + \dot{u}_k^2 + \dot{v}_k^2) dm = \frac{1}{2} \rho^{(k)} h^{(k)} \left(\int_A \dot{w}^2 dA + \int_A \dot{u}_k^2 dA + \int_A \dot{v}_k^2 dA \right) \quad (2.46)$$

$$T^{(k)} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\delta}}^T \left(\rho^{(k)} h^{(k)} \int_A \left(\mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w + \mathbf{N}_{u^{(k)}}^T \mathbf{N}_{u^{(k)}} + \mathbf{N}_{v^{(k)}}^T \mathbf{N}_{v^{(k)}} \right) dA \right) \dot{\boldsymbol{\delta}} \quad (2.47)$$

$$T^{(k)} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\delta}}^T \mathbf{M}^{(k)} \dot{\boldsymbol{\delta}} \quad (2.48)$$

Assim, a matriz de massa elementar será dado pela Eq. (2.49), como segue:

$$\mathbf{M}^{(k)} = \rho^{(k)} h^{(k)} \int_A \left(\mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w + \mathbf{N}_{u^{(k)}}^T \mathbf{N}_{u^{(k)}} + \mathbf{N}_{v^{(k)}}^T \mathbf{N}_{v^{(k)}} \right) dA \quad (2.49)$$

onde a matriz \mathbf{N} contém as funções de interpolação dos campos de deslocamentos, $\rho^{(k)}$ e $h^{(k)}$ representam a densidade de cada camada e a sua espessura, respectivamente.

Por meio das matrizes elementares e dos procedimentos tradicionais de montagem de elementos finitos através da conectividade dos nós, é possível obter as equações de movimento do sistema no domínio do tempo, como mostrado na Eq. (2.50):

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\delta}}(t) + \mathbf{K}\boldsymbol{\delta}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2.50)$$

sendo \mathbf{M} , \mathbf{K} , as matrizes globais de massa e rigidez, respectivamente, $\boldsymbol{\delta}(t)$ e $\mathbf{f}(t)$, são os vetores de deslocamentos e forças externas aplicadas ao sistema.

Durante o procedimento de montagem das matrizes, pode-se ainda separar a matriz de rigidez \mathbf{K} numa parcela elástica \mathbf{K}_e e outra viscoelástica \mathbf{K}_v^* , onde esta última é função do módulo complexo. Assim, segue que:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v^* \quad (2.51)$$

Rearranjando as Eq. (2.51) com a Eq. (2.50), obtém-se a equação do movimento:

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\delta}}(t) + (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v^*)\boldsymbol{\delta}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2.52)$$

Considerando uma excitação harmônica da seguinte forma,

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{F}e^{i\omega t} \quad (2.53)$$

$$\boldsymbol{\delta}(t) = \mathbf{U}e^{i\omega t} \quad (2.54)$$

pode-se reescrever a Eq. (2.52) como sendo:

$$\mathbf{Z}(\omega, T)\mathbf{U}(\omega, T) = \mathbf{F}(\omega) \quad (2.55)$$

Em função da dependência das propriedades do viscoelástico com a frequência de oscilação da estrutura ω e com a temperatura de operação T , pode-se fatorar a matriz de rigidez viscoelástica, tal que:

$$\mathbf{K}_v^* = G(\omega, T)\bar{\mathbf{K}}_v \quad (2.56)$$

Assim, \mathbf{Z} representa a impedância mecânica do sistema, dada por:

$$\mathbf{Z}(\omega, T) = (\mathbf{K}_e + G(\omega, T)\bar{\mathbf{K}}_v - \omega^2\mathbf{M}) \quad (2.57)$$

2.2 Amortecimento Viscoelástico

2.2.1 Influência da temperatura e frequência

Os materiais viscoelásticos são conhecidos por terem as propriedades fortemente influenciadas pelas condições ambientais, como a temperatura, e operacionais, como a frequência de excitação. A análise da influência desses parâmetros é de extrema importância pois

em aplicações práticas, busca-se maximizar a eficiência estrutural (NASHIF; JONES; HENDERSON, 1985) (LIMA, 2007).

A Fig. (2.2) mostra a influência da temperatura de operação na variação do módulo de armazenamento (G') e do fator de perda (η) dos materiais viscoelásticos.

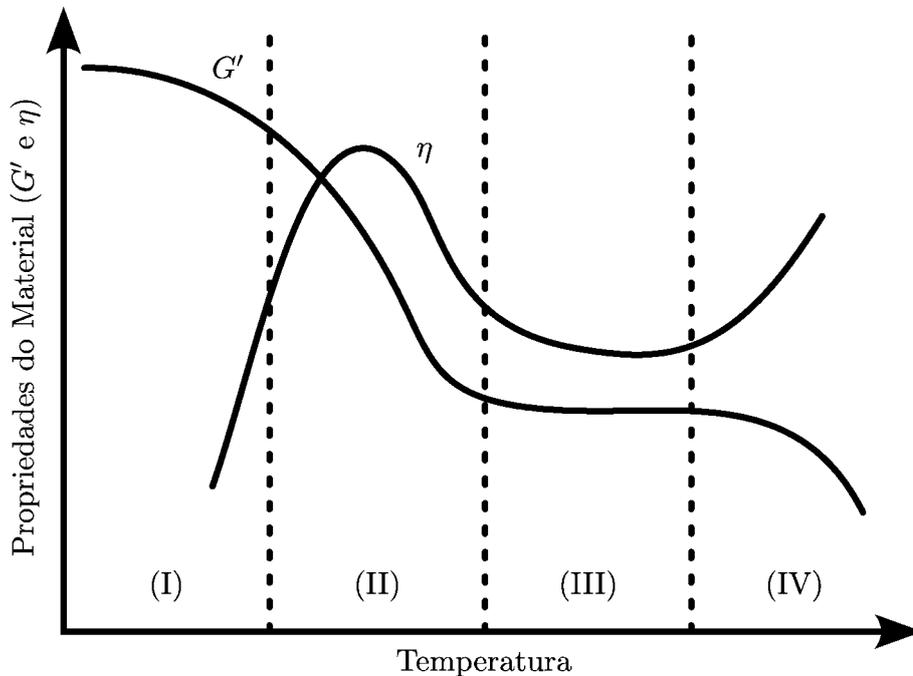


Figura 2.2 – Variação do módulo de armazenamento e do fator de perda do viscoelástico em função da temperatura sob frequência constante.

Fonte: Adaptado de Lima (2007).

Essa representação contempla quatro regiões descritas a seguir:

- ❑ Na região (I) apresentam-se as temperaturas mais baixas onde o material está sob a forma vítrea, caracterizado por um módulo de armazenamento atingindo seu valor máximo, e variando pouco com a temperatura. Já o fator de perda é muito pequeno e aumenta rapidamente com a temperatura. As deformações do material também são muito pequenas;
- ❑ A região (II) é caracterizada por um módulo que decresce fortemente com a temperatura, e um fator de perda apresentando seu valor máximo;
- ❑ Na região da borracha (III), o módulo de armazenamento e o fator de perda são caracterizados por valores pequenos e que variam pouco com a temperatura;
- ❑ Em (IV) o material apresenta um estado de fluido. Este último é pouco considerado em aplicações estruturais em razão de sua instabilidade.

Para uma temperatura fixa próxima da temperatura de transição vítrea (dentro da região de transição II), as medidas das características viscoelásticas fornecem o módulo

de armazenamento, G' , e o fator de perda, η , para o qual a variação em frequência assemelha-se à Fig. (2.3). Nota-se que a influência exercida pela frequência é, inversa ao efeito da temperatura. Porém, uma influência menos abrupta, ao passo que seria preciso maiores frequências para corresponder a mesma variação em alguns poucos graus na temperatura.

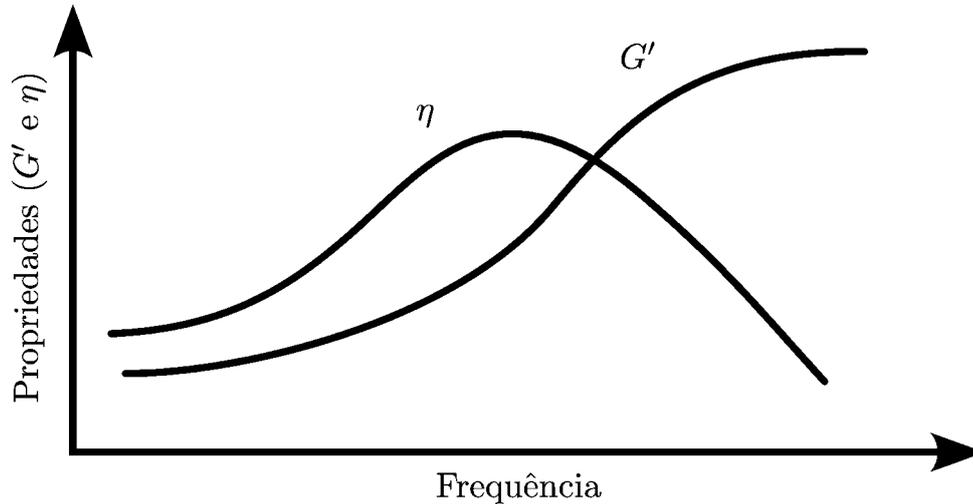


Figura 2.3 – Variação do módulo de armazenamento e do fator de perda do viscoelástico em função da frequência sob temperatura constante.

Fonte: Adaptado de Lima (2007).

Este fenômeno é um dos mais importantes aspectos da teoria da viscoelasticidade linear, fornecendo a base para o princípio da superposição frequência-temperatura (PSFT), o qual é utilizado para transformar as propriedades do material do domínio da frequência para o domínio da temperatura, e vice-versa.

2.2.2 Princípio da superposição frequência-temperatura

Quando variações são impostas nas curvas das propriedades, mostrado na Fig. (2.3), sob diferentes temperaturas, elas tendem a se sobrepor e descrever uma curva contínua. Isso implica em características viscoelásticas sob diferentes temperaturas, e podem ser relacionadas por meio de variações nos valores da frequência real de trabalho. Esse fato leva aos conceitos de fator de deslocamento e frequência reduzida, associados ao PSFT, que se aplica a muitos materiais viscoelásticos lineares (LIMA, 2007). Este princípio pode ser representado simbolicamente por:

$$G(\omega_r, T_0) = G(\alpha_t \omega, T_0) \quad (2.58)$$

$$\eta(\omega_r, T_0) = \eta(\alpha_t \omega, T_0) \quad (2.59)$$

$$\omega_r = \alpha_T(T) \omega \quad (2.60)$$

onde a Eq. (2.60) é a frequência reduzida, ω é a frequência de excitação, $\alpha_T(T)$ é o fator de deslocamento que depende da temperatura de trabalho do material viscoelástico, e T_0 é a temperatura de referência. As Equações (2.58) e (2.59) são comumente chamadas de curvas mestras e são apresentadas na forma de nomogramas.

A Fig. (2.4) ilustra o Princípio de Superposição Frequência-Temperatura. Considerando o módulo de armazenamento e o fator de perda de um material viscoelástico em diferentes valores de temperatura (T_{-1} , T_0 , T_1), a aplicação de deslocamentos horizontais ao longo do eixo da frequência em cada uma dessas curvas possibilita a combinação delas em uma única curva. O parâmetro α_T determina esse deslocamento e varia de acordo com a temperatura.

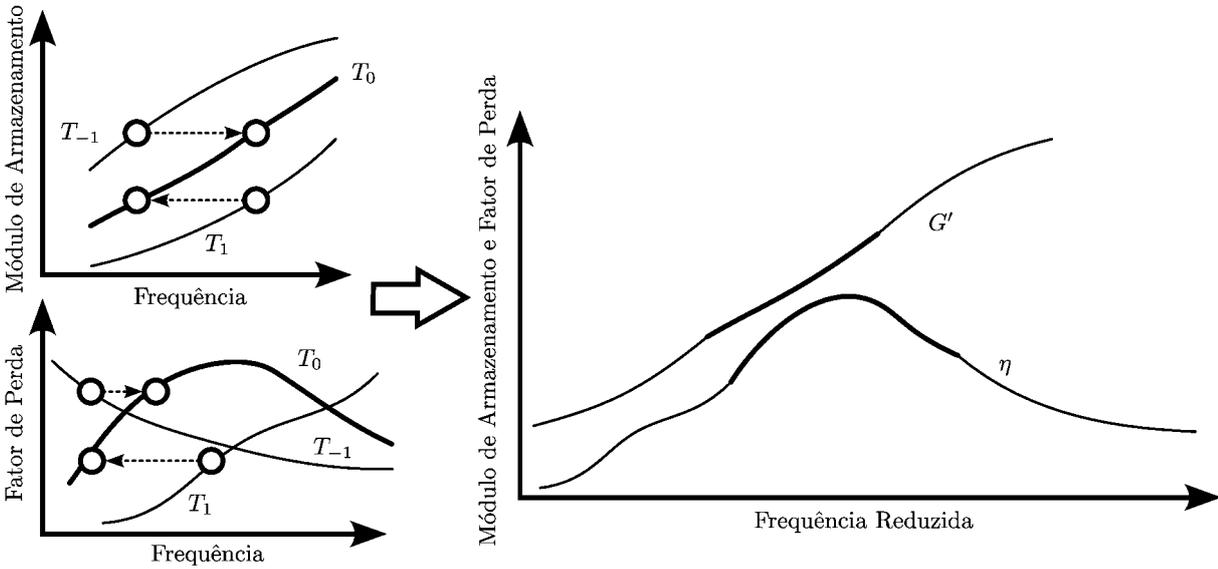


Figura 2.4 – Representação do PSFT.

Fonte: Adaptado de Lima (2007).

Para o material viscoelástico utilizado neste trabalho, a saber, o 3M™ ISD 112, os desenvolvimentos feitos por Soovere, Drake e Miller (1984) e Lima (2007), fornecem as seguintes expressões para o módulo complexo G combinado com a frequência reduzida (f_r) e a temperatura absoluta T :

$$G(f_r, T) = B_1 + \frac{B_2}{1 + B_5 \left(\frac{if_r}{B_3}\right)^{-B_6} + \left(\frac{if_r}{B_3}\right)^{-B_4}}, \quad (2.61)$$

$$f_r = \alpha(T) \cdot f, \quad (2.62)$$

$$\log_{10} \alpha(T) = a \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_z} \right) + 2,303 \left(\frac{2a}{T_z} - b \right) \log_{10} \left(\frac{T}{T_z} \right) + \left(\frac{b}{T_z} - \frac{a}{T_z^2} - S_{AZ} \right) (T - T_z), \quad (2.63)$$

$$a = \frac{(D_B C_C - C_B D_C)}{D_E}, b = \frac{C_A D_C - D_A C_C}{D_E}, \quad (2.64)$$

$$C_A = \left(\frac{1}{T_L} - \frac{1}{T_Z} \right)^2, D_A = \left(\frac{1}{T_H} - \frac{1}{T_Z} \right)^2, C_B = \frac{1}{T_L} - \frac{1}{T_Z}, D_B = \frac{1}{T_H} - \frac{1}{T_Z}, \quad (2.65)$$

$$C_C = S_{AL} - S_{AZ}, D_C = S_{AH} - S_{AZ}, D_E = D_B C_A - C_B D_A. \quad (2.66)$$

Os valores das constantes obtidas nos trabalhos são apresentadas na Tab. (2.1).

Tabela 2.1 – Constantes do viscoelástico ISD112.

Constante	Valor	Constante	Valor
B_1 [MPa]	0,4307	T_Z [K]	290,0
B_2 [MPa]	1200,00	T_L [K]	210,0
B_3 [MHz]	1,5403	T_H [K]	360,0
B_4	0,6847	$S_{AZ}[K^{-1}]$	0,05956
B_5	3,241	$S_{AL}[K^{-1}]$	0,1474
B_6	0,180	$S_{AH}[K^{-1}]$	0,009725

Modelo Aerodinâmico Não Estacionário

3.1 Descrição do *Doublet Lattice Method* (DLM)

O *Doublet Lattice Method* foi primeiramente proposto por Albano e Rodden (1969) com o objetivo de adaptar o *Vortex Lattice Method* (VLM), criado por Hedman (1965), para a análise de escoamentos não estacionários. Semelhante ao VLM, o DLM representa a superfície sustentadora através de uma série de painéis dispostos em colunas paralelas ao fluxo de ar, como apresentado na Fig. (3.1). Cada painel incorpora uma linha de dipolos de aceleração potencial, localizados a $1/4$ da corda do painel, c . O escoamento induzido pela linha de dipolos é então empregado para formular uma solução básica para o potencial aerodinâmico linearizado em torno de um escoamento subsônico e uniforme ao longo do eixo x . Essa solução, em conjunto com as condições de contorno para a velocidade induzida no ponto de controle (posicionado a $3/4$ de c), possibilita a determinação da distribuição de pressão sobre a asa. O procedimento completo é detalhado na sequência.

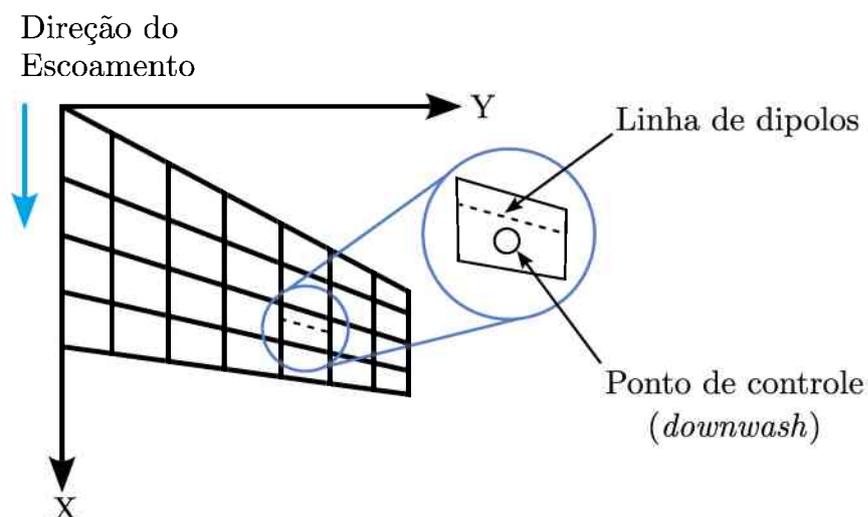


Figura 3.1 – Ilustração dos painéis do método DLM.

Fonte: Adaptado de Borges (2019).

3.1.1 Resolução da equação potencial aerodinâmica

Primeiramente, antes de introduzir o DLM, é imperativo linearizar o potencial aerodinâmico ϕ do escoamento uniforme na direção x , o qual é assumido como não viscoso, irrotacional e incompressível. Nessa abordagem, ϕ é expresso pela Eq. (3.1), decompondo-o em uma componente estacionária, $\bar{\phi}$, e uma componente temporal, $\tilde{\phi}$:

$$\phi(x, y, z, t) = \bar{\phi}(x, y, z) + \tilde{\phi}(x, y, z, t) \quad (3.1)$$

Destaca-se que $\tilde{\phi}$ representa uma perturbação pequena na velocidade do escoamento U_∞ , em relação à qual a linearização é realizada. Conforme minuciosamente elucidado por Blair (1992), esse método conduz à obtenção da seguinte expressão:

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial z^2} - \frac{1}{a_\infty^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2} + 2U_\infty \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x \partial t} \right) = 0 \quad (3.2)$$

onde M_∞ é o número de Mach do escoamento subsônico em relação ao qual a linearização é executada. Uma solução fundamental para o potencial linearizado, conforme definido pela Eq. (3.2), pode ser derivada a partir do potencial de aceleração de Prandtl associado a um dipolo.

Um dipolo (*doublet*) é uma configuração especial de escoamento aerodinâmico gerada pela proximidade infinitesimal de um par de correntes elementares, uma fonte e um sumidouro, conforme descrito por (ANDERSON, 2010). Assumindo que a fonte e o sumidouro estão separados por um vetor \mathbf{n}_s , perpendicular à superfície sustentadora, pode-se expressar o potencial de aceleração do dipolo, conforme indicado pela Eq. (3.3), como sendo a derivada direcional de um potencial de aceleração associado a uma fonte, ψ_{fonte} , ao longo de \mathbf{n}_s :

$$\psi_{dipolo} = \frac{\partial \psi_{fonte}}{\partial n_s} \quad (3.3)$$

Caso sejam consideradas soluções harmônicas, o potencial de aceleração associado à fonte, ψ_{fonte} , pode ser expresso da forma:

$$\psi_{fonte} = \bar{\psi}_{fonte} e^{i\omega t} \quad (3.4)$$

sendo o valor absoluto de $\bar{\psi}_{fonte}$ dado como segue:

$$\bar{\psi}_{fonte} = \frac{A_\psi}{R} e^{\left\{ \frac{i\omega}{a_\infty \beta_\infty^2} [M_\infty(\chi - \kappa) - R] \right\}} \quad (3.5)$$

Na Eq. (3.5), a_∞ representa a velocidade do som no escoamento, A_ψ é a amplitude da solução harmônica proposta, e ω é a frequência de oscilação. O fator de Prandtl-Glauert, dado por β_∞ , e o raio hiperbólico R são definidos pelas Equações (3.6) e (3.7), respectivamente:

$$\beta_\infty^2 = 1 - M_\infty^2 \quad (3.6)$$

$$R = \left[(x - \kappa)^2 + \beta_\infty^2 (y - \eta)^2 + \beta_\infty^2 (z - \zeta)^2 \right]^{1/2} \quad (3.7)$$

Ao substituir a Eq. (3.4) na Eq. (3.3), chega-se à seguinte equação:

$$\psi_{dipolo} = \frac{\partial}{\partial n_s} \left\{ \frac{A_\psi}{R} e^{\left\{ \frac{i\omega}{a_\infty \beta_\infty^2} [M_\infty (x - \kappa) - R] \right\}} \right\} e^{i\omega t} \quad (3.8)$$

A equação anterior representa o potencial de aceleração de um dipolo, sendo a base para a obtenção da solução do potencial aerodinâmico ϕ . Nesse contexto, considera-se a definição do potencial de aceleração ψ , expresso como a derivada substancial de ϕ e formulado da seguinte maneira:

$$\psi(x, y, z, t) = \left[\frac{\partial}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right] \phi(x, y, z, t) \quad (3.9)$$

Isolando ϕ , é possível expressá-lo da forma:

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{1}{U_\infty} \int_{-\infty}^x \psi \left(\gamma, y, z, t - \frac{x - \gamma}{U_\infty} \right) d\gamma \quad (3.10)$$

Usando γ como variável de integração, é possível substituir a Eq. (3.8) na Eq. (3.10) para obter a magnitude do potencial de velocidade $\bar{\phi}$. Este representa a solução desejada para a Eq. (3.2):

$$\bar{\phi} = -\frac{A_\psi}{U_\infty} \frac{\partial}{\partial n_s} e^{\left[\frac{i\omega}{U_\infty} (x - \kappa) \right]} \int_{-\infty}^{x - \kappa} \frac{1}{R'} e^{\left\{ i\omega \left[\frac{\gamma}{U_\infty} + \frac{M_\infty \gamma}{a_\infty \beta_\infty^2} - \frac{R'}{a_\infty \beta_\infty^2} \right] \right\}} d\gamma \quad (3.11)$$

onde o raio R' é expresso por:

$$R' = \left[\gamma^2 + \beta_\infty^2 (y - \eta)^2 + \beta_\infty^2 (z - \zeta)^2 \right]^{1/2} \quad (3.12)$$

Na expressão anterior, κ , η e ζ representam as coordenadas locais do dipolo em um ponto s .

3.1.2 Obtenção do diferencial de pressão

Após determinar a magnitude do potencial de velocidade $\bar{\phi}$, pode-se calcular a velocidade normal induzida \bar{w} , conhecida como *normalwash*, diferenciando $\bar{\phi}$ ao longo de um vetor normal à superfície \mathbf{n}_r . Isso é feito em um ponto receptor da superfície sustentadora:

$$\bar{\phi} = -\frac{A_\psi}{U_\infty} \frac{\partial}{\partial n_r} \frac{\partial}{\partial n_s} e^{\left[\frac{i\omega}{U_\infty} (x - \kappa) \right]} \int_{-\infty}^{x - \kappa} \frac{1}{R'} e^{\left\{ i\omega \left[\frac{\lambda}{U_\infty} + \frac{M_\infty \lambda}{a_\infty \beta_\infty^2} - \frac{R'}{a_\infty \beta_\infty^2} \right] \right\}} d\gamma \quad (3.13)$$

A velocidade *normalwash* pode, por sua vez, ser associada ao diferencial de pressão gerado pela linha de dipolos por meio da seguinte equação:

$$\Delta p = 4\pi \rho_\infty A_\psi d\kappa dt \quad (3.14)$$

onde deve ser resolvida para A_ψ e, em seguida, substituída na Eq. (3.13). A expressão resultante, obtida após a integração e divisão do resultado por U_∞ , é dada por:

$$\frac{\bar{w}}{U_\infty} = \frac{-1}{4\pi\rho_\infty U_\infty^2} \iint_S \Delta p(\kappa, \eta, \zeta) K(x - \kappa, y - \eta, z - \zeta) d\kappa d\iota \quad (3.15)$$

onde κ e ι representam as coordenadas tangenciais à superfície do painel. Na Eq. (3.15), define-se o *normalwash* normalizado pela velocidade do escoamento livre, \bar{w}_N :

$$\bar{w}_N = \frac{\bar{w}}{U_\infty} \quad (3.16)$$

De forma resumida, o método DLM é uma abordagem para resolver a Eq. (3.15) para o diferencial de pressão Δp . Para alcançar esse objetivo, é necessário calcular a função *kernel* K , definida como segue:

$$K(x - \kappa, y - \eta, z - \zeta) = e^{\left[\frac{i\omega(x-\kappa)}{U_\infty}\right]} \frac{\partial}{\partial n_r} \frac{\partial}{\partial n_s} \int_{-\infty}^{x-\kappa} \frac{1}{R'} e^{\left[\frac{i\omega\gamma - M_\infty R'}{U_\infty \beta_\infty^2}\right]} d\gamma \quad (3.17)$$

Uma metodologia foi introduzida por Andrews e Vivian (1965), com mais simplificações na formulação sugeridas por Landahl (1967) e Laschka (1963). Mais informações e detalhes são encontrados em Borges (2019).

Considerando que a solução para K pode ser numericamente obtida conforme as referências mencionadas, avança-se no desenvolvimento com a discretização da Eq. (3.15) para um conjunto de painéis, conforme ilustrado na Fig. (3.1). O resultado é dado por:

$$(\bar{w}_N)_r = \sum_s \frac{-\Delta p_s c_s}{4\pi\rho_\infty U_\infty^2} \iint_S K(x - \kappa, y - \eta, z - \zeta) d\kappa d\iota \quad (3.18)$$

A expressão anterior descreve a velocidade *normalwash* no ponto de controle de um painel receptor r em termos das contribuições dos outros painéis emissores s , é expressa em relação à corda do painel, denotada por c . Além disso, ela pode ser reescrita em termos do coeficiente de pressão Δc_p , conforme indicado pela Eq. (3.19):

$$\Delta c_{p,s} = \frac{\Delta p_s}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2} \quad (3.19)$$

resultando na Eq. (3.20):

$$(\bar{w}_N)_r = \sum_s -\Delta c_{p,s} \frac{c_s}{8\pi} \iint_S K(x - \kappa, y - \eta, z - \zeta) d\kappa d\iota \quad (3.20)$$

Para obter o conjunto de *normalwash* de todos os painéis, a Eq. (3.20) deve ser estendida modo que o lado direito seja representado pelo vetor $\bar{\mathbf{w}}_N$, no qual cada elemento corresponde a um valor específico de $(\bar{w}_N)_r$. Assim, chega-se à seguinte equação matricial:

$$\bar{\mathbf{w}}_N = \mathbf{D}\Delta\mathbf{c}_p \quad (3.21)$$

onde \mathbf{D} representa a matriz de fatores *downwash*, cuja inversa pode ser utilizada para determinar o vetor de coeficientes de pressão Δc_p . A inversa da matriz \mathbf{D} é conhecida como matriz de coeficientes de influência aerodinâmicos (*Aerodynamics Influence Coefficients Matrix*), expressa por \mathbf{AIC} . Assim, a Eq. (3.21) pode ser reescrita da forma:

$$\Delta c_p = \mathbf{AIC} \bar{\mathbf{w}}_N \quad (3.22)$$

A matriz \mathbf{AIC} é dada por:

$$\mathbf{AIC} = \mathbf{D}^{-1} \quad (3.23)$$

Já a matriz de fatores *downwash* \mathbf{D} é decomposta na soma de um termo estacionário \mathbf{D}_E e um termo não estacionário \mathbf{D}_{NE} :

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_E + \mathbf{D}_{NE} \quad (3.24)$$

É relevante destacar a dependência de \mathbf{D} , e, conseqüentemente, de \mathbf{AIC} , em relação à frequência reduzida. Este parâmetro adimensional desempenha um papel significativo no campo da aeroelasticidade, representando o número de oscilações do aerofólio durante o intervalo de tempo necessário para que um escoamento de velocidade U_∞ percorra a distância da semi-corda b (WRIGHT; COOPER, 2014). A frequência reduzida é definida como segue:

$$k = \frac{\omega b}{U_\infty} \quad (3.25)$$

Além disso, \mathbf{D} é dependente tanto da geometria quanto do número de Mach. Vale ressaltar que quando k é nulo, ou seja, para o regime estacionário, o DLM converge para o VLM (ALBANO; RODDEN, 1969). Dessa forma, utiliza-se o VLM para determinar a parte estacionária, oferecendo a vantagem de uma convergência aprimorada dos resultados em frequências próximas de zero.

No contexto do termo não estacionário, adota-se uma distribuição quadrática para a pressão criada pela linha de dipolos. Essa configuração, proposta por Rodden, Taylor e McIntosh (1998), representa uma melhoria em relação à distribuição parabólica originalmente proposta por Albano e Rodden (1969). Tal abordagem confere maior estabilidade para asas enflechadas com alto alongamento, especialmente em situações de elevados valores de k (BORGES, 2019). Vale ressaltar que, neste estudo, a superfície sustentadora em análise é uma placa sanduíche plana, resultando em uma matriz \mathbf{D}_{NE} planar.

A velocidade normal induzida (*normalwash*) no ponto de controle para cada painel pode ser fundamentada nas condições de contorno do potencial linearizado mostrado na Eq. (3.2). Dessa maneira, em conformidade com a condição de não penetrabilidade, inexistente fluxo normal à superfície sustentadora, o que pode ser expresso matematicamente da seguinte maneira:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla h = 0 \quad (3.26)$$

onde h é uma função que descreve a superfície sustentadora com base na deformação de seu plano médio (h_m) e no envelope de espessura (h_t) em relação ao plano médio não deformado, que se localiza em $z = 0$:

$$h(x, y, t) = h_m(x, y, t) \pm h_t(x, y, t) \quad (3.27)$$

O vetor velocidade \mathbf{v} é expresso como segue:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_\infty + \nabla \tilde{\phi} = (U_\infty + u)\mathbf{i} + (v)\mathbf{j} + (w)\mathbf{k} \quad (3.28)$$

onde u , v e w são perturbações pequenas no escoamento livre U_∞ . Substituindo a Eq. (3.28) na Eq. (3.26) chega-se que:

$$-\frac{\partial h}{\partial t} - (U_\infty + u)\frac{\partial h}{\partial x} - v\frac{\partial h}{\partial y} + w = 0 \quad (3.29)$$

Dado que o potencial de velocidade foi linearizado em torno de um escoamento uniforme U_∞ , é necessário que as condições de contorno também sejam linearizadas. Isso é alcançado negligenciando os termos não lineares da Eq. (3.29), o que resulta, isolando w , em:

$$w = \frac{\partial h}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.30)$$

Conforme Blair (1992), essa linearização limita a modelagem a superfícies sustentadoras finas. De acordo com o autor, para asas com geometria simples, é conveniente expressar as deformações utilizando polinômios no espaço e harmônicos no tempo, da seguinte forma:

$$h(x, y, t) = \left[\sum_{j=0}^{n_x} \sum_{m=0}^{n_y} a_{jm} X^j Y^m \right] e^{i\omega t} = \bar{h} e^{i\omega t} \quad (3.31)$$

Aqui, a_{jm} são as constantes do polinômio, X e Y representam as coordenadas no ponto de aproximação e n_x e n_y indicam a ordem dos polinômios nas direções x e em y , respectivamente. Substituindo a Eq. (3.31) na Eq. (3.30), é obtido a velocidade normal induzida:

$$w = \bar{w} e^{i\omega t} \quad (3.32)$$

onde \bar{w} é dado por:

$$\bar{w} = i\omega \left[\sum_{j=0}^{n_x} \sum_{m=0}^{n_y} a_{jm} X^j Y^m \right] + U_\infty \left[\sum_{j=0}^{n_x} \sum_{m=0}^{n_y} j a_{jm} X^{j-1} Y^m \right] \quad (3.33)$$

A partir da definição de frequência reduzida, Eq. (3.25), é possível escrever a Eq. (3.33):

$$\bar{w} = \frac{ik}{b} U_\infty \left[\sum_{j=0}^{n_x} \sum_{m=0}^{n_y} a_{jm} X^j Y^m \right] + U_\infty \left[\sum_{j=0}^{n_x} \sum_{m=0}^{n_y} j a_{jm} X^{j-1} Y^m \right] \quad (3.34)$$

Substituindo a Eq. (3.34) na Eq. (3.32) e usando a Eq. (3.31), pode-se encontrar a velocidade induzida normalizada por:

$$\bar{w}_N = \frac{ik}{b} h + \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \quad (3.35)$$

Alternativamente, para representar o vetor *normalwash* de todos os painéis, a Eq. (3.35) pode ser expressa de forma matricial (KIER; LOOYE, 2009):

$$\bar{w}_N = (\mathbf{D}_R + ik\mathbf{D}_I) \bar{h}^T \quad (3.36)$$

em que \mathbf{D}_I e \mathbf{D}_R indicam as matrizes de diferenciação associadas, respectivamente, à magnitude dos deslocamentos \bar{h} e à amplitude de suas inclinações.

3.1.3 Carregamento aerodinâmico não estacionário

As forças decorrentes do carregamento aerodinâmico não estacionário são determinadas usando o DLM, com base nas velocidades *normalwash* \bar{w}_N e na matriz \mathbf{AIC} , conforme apresentado na Eq. (3.22). Portanto, ao aplicar a definição do coeficiente de pressão, como indicado pela Eq. (3.19), é possível expressar o vetor de forças aerodinâmicas como:

$$\mathbf{f}_a = q_\infty \mathbf{s} \bar{w}_N \mathbf{AIC} \quad (3.37)$$

onde $q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2$ é a pressão dinâmica e \mathbf{s} é o vetor no qual está contido as áreas de cada painel. Com o vetor de velocidades *normalwash* normalizadas da Eq. (3.36) sendo substituído, a Eq. (3.37) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{f}_a = q_\infty \mathbf{s} \mathbf{AIC} (\mathbf{D}_R + ik\mathbf{D}_I) \bar{h}^T \quad (3.38)$$

A Eq. (3.38) descreve o vetor de esforços aerodinâmicos que é obtido através do método DLM. Os esforços desse vetor agem nos pontos de controle dos painéis aerodinâmicos. Esses esforços serão empregados para modelar o carregamento sobre a estrutura.

Modelo Aeroviscoelástico Determinístico

O objetivo aqui é apresentar a metodologia de acoplamento entre os modelos estrutural e aerodinâmico discutidos anteriormente, a fim de obter a expressão que representa a natureza e comportamento do sistema aeroviscoelástico sob fluxos subsônicos. Logo após, é apresentado o método *pk* adaptado, utilizado para realizar a análise de estabilidade do sistema aeroviscoelástico e determinar sua velocidade de *flutter*. Este capítulo também mostra o cálculo da matriz de esforços generalizados por meio da aproximação de Roger.

4.1 Acoplamento dos modelos estrutural e aerodinâmico

Para se obter o vetor de esforços provenientes do DLM, utilizando a Eq. (3.38), é necessário determinar o vetor de deslocamentos nos pontos de controle, $\bar{\mathbf{h}}$. Para isso, sugere-se expressá-lo em termos dos deslocamentos da malha de elementos finitos, $\boldsymbol{\delta}$, segundo a Eq. (4.1):

$$\bar{\mathbf{h}} = \mathbf{T}_{as}\boldsymbol{\delta} \quad (4.1)$$

onde \mathbf{T}_{as} é a matriz de interpolação que transforma, através de *splines*, os deslocamentos nodais em z no deslocamento no ponto de controle de cada painel aerodinâmico, como mostrado na Fig. (4.1). Por sua vez, \mathbf{T}_{as} é calculada da forma:

$$\mathbf{T}_{as} = \sum_{i=0}^{nx} \sum_{j=0}^{ny} a_{ij} \mathbf{X}_a^i \mathbf{Y}_a^j \quad (4.2)$$

onde \mathbf{X}_a e \mathbf{Y}_a representam as coordenadas nos pontos de controle dos painéis e a_{ij} representa todas as constantes de interpolação das formas modais, que são calculadas pela equação que segue:

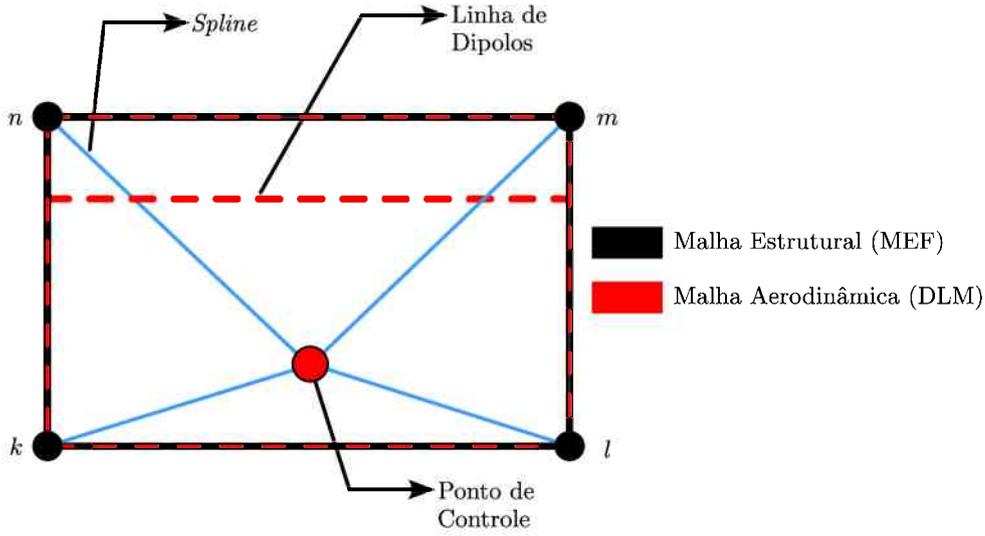


Figura 4.1 Esquema de acoplamento das malhas estrutural e aerodinâmica.

Fonte: Filho (2021).

$$a_{ij} = \left[\sum_{i=0}^{nx} \sum_{j=0}^{ny} \mathbf{X}^i \mathbf{Y}^j \right]^{-1} \delta \quad (4.3)$$

É importante observar que \mathbf{X} e \mathbf{Y} representam as coordenadas dos nós na malha de elementos finitos, sendo utilizadas interpolações lineares neste trabalho.

Para obter a equação aeroelástica do sistema viscoelástico no domínio modal, os deslocamentos são expressos em termos dos deslocamentos modais, como é mostrado a seguir:

$$\bar{\mathbf{h}} = \mathbf{T}_{as} \Phi \mathbf{q} \quad (4.4)$$

de modo que Φ é a matriz das formas modais e \mathbf{q} é o vetor composto pelos deslocamentos modais. Assim, é possível definir a força agindo nos pontos de controle substituindo a Eq. (4.4) na Eq. (3.38), como segue:

$$\mathbf{f}_a = q_\infty \mathbf{sAIC} (\mathbf{D}_R + ik\mathbf{D}_I) \mathbf{T}_{as} \Phi \mathbf{q} \quad (4.5)$$

Posteriormente, a força definida, é transferida para os nós da malha de elementos finitos bem como para o domínio modal:

$$\mathbf{f}_q = \Phi^T \mathbf{T}_{as}^T \mathbf{f}_a \quad (4.6)$$

A Eq. (4.6) pode ser reescrita para expressar explicitamente $\mathbf{Q}(k)$, chamada de matriz aerodinâmica generalizada (GAM), como:

$$\mathbf{f}_q = q_\infty \mathbf{Q}(k) \mathbf{q} \quad (4.7)$$

Sendo:

$$\mathbf{Q}(k) = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{T}_{as}^T \mathbf{sAIC} (\mathbf{D}_R + ik\mathbf{D}_I) \mathbf{T}_{as} \mathbf{\Phi} \quad (4.8)$$

Para reduzir os custos computacionais, $\mathbf{\Phi}$ é projetada em uma base modal específica, com uma análise de convergência sendo conduzida para determinar a ordem dessa redução.

Diante dessa circunstância, o número de autovetores que define a dimensão da base é equivalente ao número de modos verificados pelo programa. Com isso, destaca-se que a matriz aerodinâmica generalizada (GAM) depende da frequência reduzida k , e os esforços \mathbf{f}_q necessitam ser calculados modo a modo.

Por fim, ao transformar a equação de movimento do sistema, Eq. (2.52), para o domínio modal e substituindo os esforços contidos na Eq. (4.7), é obtido a equação aeroelástica:

$$\mathbf{M}_q \ddot{\mathbf{q}} + \left(\mathbf{K}_{eq} + G(\omega, T) \bar{\mathbf{K}}_{vq} \right) \mathbf{q} = q_\infty \mathbf{Q}(k) \mathbf{q} \quad (4.9)$$

A Eq. (4.9) caracteriza o acoplamento entre os modelos estrutural e aerodinâmico, sendo utilizada para efetuar a análise de estabilidade conforme detalhado a seguir.

4.2 Análise de estabilidade do Sistema

O fenômeno do *flutter* é caracterizado por uma vibração instável e autoexcitada, na qual a estrutura retira energia do escoamento, onde frequentemente ocasiona oscilações de alta amplitude que podem levar à falha estrutural (WRIGHT; COOPER, 2014). O *flutter* binário acontece quando há um acoplamento desfavorável entre dois modos de vibração, provocado pelas forças aerodinâmicas ligadas ao movimento de cada um desses modos. Dependendo dos pares de modos envolvidos, as oscilações resultantes são capazes de se manifestar de várias formas (WRIGHT; COOPER, 2014).

No entanto, há situações em que mais de dois modos contribuem para gerar o *flutter*, exigindo uma análise mais abrangente do problema. Para identificar esse fenômeno, utiliza-se a equação aeroelástica do sistema, que permite avaliar sua estabilidade por meio de um problema de autovalores. Nesse contexto, relaciona-se o autovalor ao amortecimento e determina-se a velocidade crítica onde a parte real desse autovalor se torna nula para um modo específico, como exemplificado na Fig. (4.2).

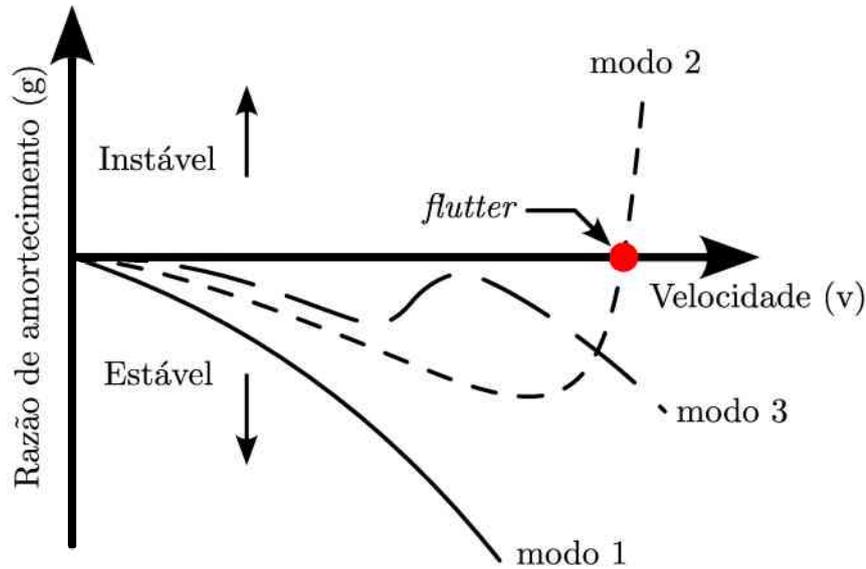


Figura 4.2 – Diagrama v-g para 3 modos.

Fonte: Adaptado de Garrick e Reed (1981).

Como a dependência da matriz GAM com a frequência reduzida dificulta a resolução do problema de autovalor, este autovalor é determinado com base no conhecimento da matriz $\mathbf{Q}(k)$, que, por outro lado, requer a frequência reduzida associada ao autovalor desejado.

Assim, não existe solução analítica, devendo-se recorrer a uma abordagem iterativa de acoplamento de frequências, na qual um dos métodos disponíveis é o método pk, utilizado neste trabalho, que modela o amortecimento de maneira mais realista e, portanto, oferece a vantagem de ser fisicamente representativo mesmo em condições subcríticas.

4.2.1 Cálculo do *flutter* - Método PK

Resultante da Eq. (4.9), o problema de autovalor associado é expresso por:

$$\left(p^2 \mathbf{M}_q + \mathbf{K}_q - q_\infty \mathbf{Q}(k) \right) \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4.10)$$

onde está implícita a relação:

$$p \equiv \frac{d}{dt} \rightarrow \ddot{\mathbf{q}} = p^2 \mathbf{q} \quad (4.11)$$

A solução não trivial da Eq. (4.11), requer que o determinante apresentado a seguir seja nulo:

$$\left| p^2 \mathbf{I} + \mathbf{M}_q^{-1} (\mathbf{K}_q - q_\infty \mathbf{Q}(k)) \right| = 0 \quad (4.12)$$

Dessa forma, p^2 é o autovalor do segundo termo do determinante $\mathbf{M}_q^{-1} (\mathbf{K}_q - q_\infty \mathbf{Q}(k))$, onde p é expresso da seguinte forma:

$$p = \omega \left(\frac{g}{2} \pm i \right) \quad (4.13)$$

É importante destacar que, pela Eq. (4.13), a parte imaginária de p representa a frequência circular ω , que está relacionada com a frequência reduzida k da seguinte maneira:

$$\omega = \text{Im}(p) = k \frac{V}{b} \quad (4.14)$$

Assim, é necessário determinar de forma iterativa um autovalor e uma frequência que satisfaçam tanto a Eq. (4.12) quanto a Eq. (4.14). Com esse fim, inicialmente estima-se um valor para k com base nas frequências naturais da estrutura e, em seguida, resolve-se o problema de autovalor dado pela Eq. (4.10). Posteriormente, determina-se um novo valor de k correspondente a esse autovalor e compara-se com a estimativa anterior. Caso a comparação satisfaça uma tolerância pré-definida, a solução é considerada obtida; caso contrário, atualiza-se o valor de k e o processo se repete até que ocorra a convergência. Esse processo é mostrado no fluxograma da Fig. (4.3). É importante destacar que o critério de convergência é determinado pela tolerância tol , definida por:

$$\begin{cases} |k_j - k_{j-1}| < tol & \text{se } k_{j-1} < 1 \\ |k_j - k_{j-1}| < tol \cdot k_{j-1} & \text{se } k_{j-1} \geq 1 \end{cases} \quad (4.15)$$

Além disso, para facilitar a resolução do problema de autovalores, a Eq. (4.10) é transformada para a forma de espaço de estados, originando a Eq. (4.16):

$$\mathbf{A} - p\mathbf{I}q = \mathbf{O} \quad (4.16)$$

Sendo \mathbf{O} a matriz nula e a matriz \mathbf{A} é dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}_q^{-1}(\mathbf{K}_q - q_\infty \text{Re}(\mathbf{Q})) & \mathbf{M}_q^{-1} \left(\frac{q_\infty b}{2Vk} \text{Im}(\mathbf{Q}) \right) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Com os autovalores assumindo o formato da Eq. (4.13), o amortecimento é expresso conforme a Eq. (4.18):

$$g = \frac{2\text{Re}(p)}{\text{Im}(p)} \quad (4.18)$$

4.2.2 Aproximação de Roger

O método pk necessita o cálculo da matriz $\mathbf{Q}(k)$ para cada iteração, o que pode ser computacionalmente custoso. Para evitar esse problema e viabilizar a análise, é utilizado a aproximação de Roger. Este método envolve o pré-cálculo das matrizes GAM para alguns valores discretos da frequência reduzida k , seguido de um ajuste por mínimos quadrados

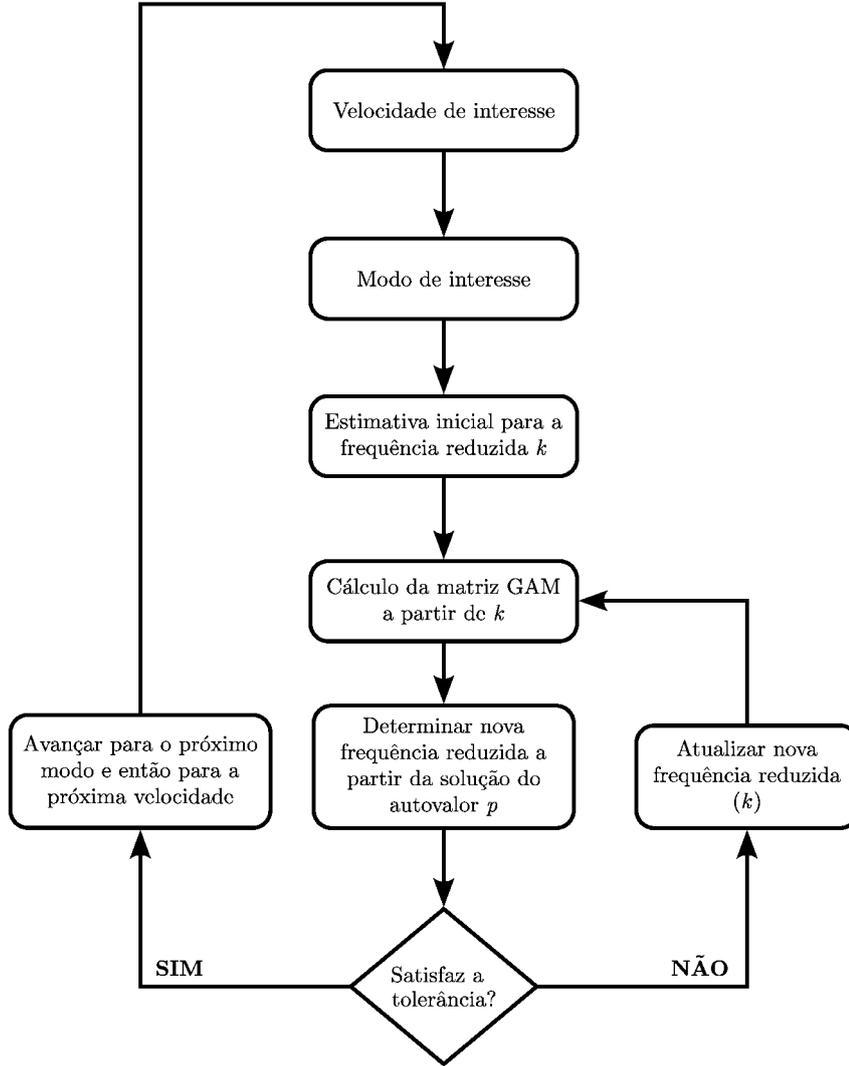


Figura 4.3 – Fluxograma do método pk.

Fonte: Adaptado de Borges (2019).

utilizando uma função racional pré-definida (KOTIKALPUDI; PFIFER; BALAS, 2015). Concretamente, a aproximação é expressa pela seguinte formulação:

$$\hat{Q}(k) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \left(\frac{b}{V}\right) s + \mathbf{A}_2 \left(\frac{b}{V}\right)^2 s^2 + \sum_{m=3}^6 \frac{\mathbf{A}_m s}{\left(s + \frac{V}{b} \beta_{m-2}\right)} \quad (4.19)$$

É importante salientar que s está relacionado a ω pela Eq. (4.20), ao passo que o parâmetro β_{m-2} é determinado pela Eq. (4.21), dependendo do número de estados aerodinâmicos de atraso n .

$$s = i\omega \quad (4.20)$$

$$\beta_{m-2} = -1,7k \frac{n}{(n+1)^2_{max}} \quad (4.21)$$

Os coeficientes de ajuste \mathbf{A}_i são definidos como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{A}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_6 \end{bmatrix} = \left[\sum_{j=1}^N (\mathbf{B}_{R,j} \mathbf{B}_{R,j}^T + \mathbf{B}_{I,j} \mathbf{B}_{I,j}^T) \right]^{-1} \sum_{i=1}^N (\mathbf{Q}_{R,j} \mathbf{B}_{R,j} + \mathbf{Q}_{I,j} \mathbf{B}_{I,j}) \quad (4.22)$$

Sendo:

$$\mathbf{B}_{R,j} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & k_j^2 & \frac{-k_j^2}{k_j^2 + \beta_1^2} & \frac{-k_j^2}{k_j^2 + \beta_2^2} & \frac{-k_j^2}{k_j^2 + \beta_3^2} & \frac{-k_j^2}{k_j^2 + \beta_4^2} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{B}_{I,j} = \begin{bmatrix} 0 & -k_j & 0 & \frac{-\beta_1 k_j}{k_j^2 + \beta_1^2} & \frac{-\beta_2 k_j}{k_j^2 + \beta_2^2} & \frac{-\beta_3 k_j}{k_j^2 + \beta_3^2} & \frac{-\beta_4 k_j}{k_j^2 + \beta_4^2} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

A aproximação das matrizes GAM pode ser definida em termos de suas partes real e imaginária, facilitando assim seu uso na Eq. (4.17).

$$Re(\mathbf{Q}(k)) = \mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_2 k^2 + \mathbf{A}_2 (ik)^2 + \frac{k^2 \mathbf{A}_3}{k^2 + \beta_1^2} + \frac{k^2 \mathbf{A}_4}{k^2 + \beta_2^2} + \frac{k^2 \mathbf{A}_5}{k^2 + \beta_3^2} + \frac{k^2 \mathbf{A}_6}{k^2 + \beta_4^2} \quad (4.25)$$

$$Im(\mathbf{Q}(k)) = \mathbf{A}_1 k + \frac{\beta_1 k \mathbf{A}_3}{k^2 + \beta_1^2} + \frac{\beta_2 k \mathbf{A}_4}{k^2 + \beta_2^2} + \frac{\beta_3 k \mathbf{A}_5}{k^2 + \beta_3^2} + \frac{\beta_4 k \mathbf{A}_6}{k^2 + \beta_4^2} \quad (4.26)$$

Modelo Aeroviscoelástico Estocástico

As matrizes de massa e de rigidez elementares obtidas no Capítulo 2 são determinísticas, o que significa que os valores das variáveis de projeto do sistema são assumidas constantes, no entanto, como a eficiência dos tratamentos superficiais por camadas restritas é bastante influenciada por variações nas espessuras das camadas, como mostrado por Lima et al. (2006), pretende-se considerar as espessuras das camadas como sendo variáveis aleatórias, seguindo uma distribuição normal de probabilidade. Neste contexto, as matrizes de elementos finitos do sistema viscoelástico devem ser reescritas segundo a expansão de Karhunen-Loève (KL) para incluir essa variação nas espessuras e nos respectivos parâmetros geométricos para resolver as equações do movimento do sistema aeroviscoelástico estocástico, será utilizado neste trabalho o método de Monte Carlo, por se tratar de um método não intrusivo.

5.1 Matrizes Estocásticas pela Expansão de KL

Para representar cada matriz elementar do modelo de elementos finitos da placa sanduíche de três camadas, de acordo com a expansão de KL e utilizando os desenvolvimentos feitos por Lima (2007), assume-se que as espessuras são processos aleatórios que podem ser expressos como a soma de uma parte determinística com uma parte aleatória de média nula, tal como:

$$h_1(x, y, \theta) = h_1 + \alpha_1(x, y, \theta) \quad (5.1)$$

$$h_2(x, y, \theta) = h_2 + \alpha_2(x, y, \theta) \quad (5.2)$$

$$h_3(x, y, \theta) = h_3 + \alpha_3(x, y, \theta) \quad (5.3)$$

onde h_k representa a espessura média da camada k , e $\alpha_k(x, y, \theta)$ é o processo estocástico de cada camada. A diferença está na variação espacial (x, y) introduzida para cada amostragem θ . Usando a expansão de KL dos processos estocásticos α_k até uma ordem

N , pode-se reescrever cada espessura estocástica da seguinte forma:

$$h_k(x, y, \theta) = h_k + \sum_{r=1}^N \sqrt{\lambda_{k,r}} f_{k,r}(x, y) \xi_{k,r}(\theta) \quad (5.4)$$

onde $\lambda_{k,r}$, são os autovalores das autofunções $f_{k,r}$ para cada variável aleatória $\xi_{k,r}$. Da mesma forma, os parâmetros geométricos que dependem dessas espessuras se tornarão estocásticos. Assim:

$$d_1(x, y, \theta) = h_3(x, y, \theta) - h_1(x, y, \theta) \quad (5.5)$$

$$d_2(x, y, \theta) = h_3(x, y, \theta) + h_1(x, y, \theta) \quad (5.6)$$

$$d_3(x, y, \theta) = h_3(x, y, \theta) + 2h_2(x, y, \theta) + h_1(x, y, \theta) \quad (5.7)$$

A truncatura da série infinita da decomposição por KL até uma ordem N definida pela Eq. (5.4) leva a um pequeno erro, que para ser minimizado, deve-se assumir ordens elevadas para a discretização de KL. Entretanto, quanto maior a ordem, maior o custo computacional envolvido nas análises estocásticas, principalmente quando se utiliza o método de Monte Carlo para a geração das amostras das variáveis aleatórias de problemas mais complexos de interesse prático, como mostrado em Lima (2007). Neste caso, conforme discutido por Sudret e Kiureghian (2000), uma das estratégias é aumentar os comprimentos de correlação, o que será feito neste trabalho.

Com a inclusão dos parâmetros estocásticos na modelagem, todas as relações de energias e as matrizes elementares contendo os parâmetros das Eq. (5.4) a (5.7) serão alteradas. Assim, as integrais que representam estas matrizes precisam ser recalculadas para levar em conta a aleatoriedade das variáveis de projeto. Para o caso específico da placa sanduíche plana de interesse deste trabalho, as autofunções da Eq. (5.4) são definidas sobre o intervalo $D = [-1, 1] \cdot [-1, 1]$. Os comprimentos de correlação em x e y são dependentes da camada k , no entanto, geralmente se usa o comprimento de correlação igual ao comprimento do intervalo de definição das autofunções. Portanto, serão adotados os mesmos comprimentos de correlação para as três camadas.

Com essas escolhas, o índice k da Eq. (5.4) pode sumir nos autovalores e nas autofunções. No entanto, ele permanece nas variáveis aleatórias, já que elas dependem da incerteza imposta na análise para cada camada. Tem-se então:

$$h_k(\xi, \eta, \theta) = h_k + \sum_{r=1}^N \sqrt{\lambda_r} f_r(\xi, \eta) \xi_{k,r}(\theta) \quad (5.8)$$

5.1.1 Matriz de rigidez estocástica

No caso da matriz de rigidez elementar, deve-se associar a estocacidade em cada efeito de membrana (m) e flexão (f) para as camadas elásticas, e também o cisalhamento (c) para a camada viscoelástica. Para o caso das camadas elásticas, $i = 1$ e $i = 3$, tem-se:

$$\mathbf{K}_i^{(1)}(\theta) = \mathbf{K}_{i_m}^{(1)}(\theta) + \mathbf{K}_{i_f}^{(1)}(\theta) \quad (5.9)$$

Como exemplo, na sequência, será mostrado o desenvolvimento da matriz de rigidez estocástica da camada base (1). Para o efeito de membrana $\mathbf{K}_{i_m}^{(1)}$, tem-se então:

$$\mathbf{K}_{i_m}^{(1)}(\theta) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(h_1 + \sum_{r=1}^N \sqrt{\lambda_r} f_r(\xi, \eta) \xi_{1,r}(\theta) \right) \mathbf{D}^T \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{J} \, d\xi d\eta \quad (5.10)$$

ou ainda, sob a seguinte forma:

$$\mathbf{K}_{i_m}^{(1)}(\theta) = \mathbf{K}_{i_m}^{(1)} + \sum_{r=1}^N \mathbf{K}_{i,r_m}^{(1)} \xi_{1,r}(\theta) \quad (5.11)$$

onde $\mathbf{K}_{i_m}^{(1)}$ é a parcela determinística da rigidez de membrana, que deve ser computada assumindo os valores nominais para as variáveis de projeto, como segue:

$$\mathbf{K}_{i_m}^{(1)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (h_1) \mathbf{D}^T \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{J} \, d\xi d\eta \quad (5.12)$$

Já a parcela estocástica da rigidez de membrana é determinada da forma:

$$\mathbf{K}_{i,r_m}^{(1)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\sqrt{\lambda_r} f_r(\xi, \eta) \right) \mathbf{D}^T \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{J} \, d\xi d\eta \quad (5.13)$$

Para o caso da flexão, o cálculo da contribuição estocástica da matriz é mais detalhado, já que a espessura aleatória fatorada fora da matriz aparece ao cubo nas integrais. Na tentativa de simplificar o cálculo, pode-se linearizar o processo estocástico ao aplicar a expansão de Taylor na primeira ordem de α_1 :

$$h_1^3(\theta) = (h_1 + \alpha_1(\theta))^3 \approx h_1^3 + 3h_1^2\alpha_1(\theta) \quad (5.14)$$

Assim, pode-se repetir a mesma etapa para a matriz de rigidez de membrana, já que o processo estocástico de $h_1^3(\theta)$ se tornou linear, dependente somente de $\alpha_1(\theta)$ como contribuição estocástica. No entanto, para uma incerteza maior, ou seja, um α_1 maior em relação ao h_1 , o erro obtido com a aproximação pode se tornar grande, resultando em envelopes imprecisos. Neste caso, é necessário então aumentar a expansão de Taylor até a ordem 2 ou 3, e o desenvolvimento se torna mais complexo, onde não se fazem aproximações:

$$h_1^3(\theta) = (h_1 + \alpha_1(\theta))^3 = h_1^3 + 3h_1^2\alpha_1(\theta) + 3h_1\alpha_1(\theta)^2 + \alpha_1(\theta)^3 \quad (5.15)$$

Sendo acrescentadas ordens a mais (s e t) em cada α :

$$\alpha_1(\theta) = \sum_{r=1}^N \sqrt{\lambda_r} f_r(\xi, \eta) \xi_{1,r}(\theta) \quad (5.16)$$

$$\alpha_1(\theta)^2 = \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \sqrt{\lambda_r \lambda_s} f_r(\xi, \eta) f_s(\xi, \eta) \xi_{1,r}(\theta) \xi_{1,s}(\theta) \quad (5.17)$$

$$\alpha_1(\theta)^3 = \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \sum_{t=1}^N \sqrt{\lambda_r \lambda_s \lambda_t} f_r(\xi, \eta) f_s(\xi, \eta) f_t(\xi, \eta) \xi_{1,r}(\theta) \xi_{1,s}(\theta) \xi_{1,t}(\theta) \quad (5.18)$$

Assim, a matriz de rigidez estocástica $\mathbf{K}_i^{(1)} f(\theta)$ associada ao efeito de flexão assume a forma seguinte:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_i^{(1)} f(\theta) &= \mathbf{K}_i^{(1)} f \\ &+ \sum_{r=1}^N \mathbf{K}_{i,r}^{(1)} f \xi_{1,r}(\theta) \\ &+ \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \mathbf{K}_{i,rs}^{(1)} f \xi_{1,r}(\theta) \xi_{1,s}(\theta) \\ &+ \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \sum_{t=1}^N \mathbf{K}_{i,rst}^{(1)} f \xi_{1,r}(\theta) \xi_{1,s}(\theta) \xi_{1,t}(\theta) \end{aligned} \quad (5.19)$$

O desenvolvimento é feito de forma similar à membrana para cada expansão. Já para a camada viscoelástica, tem-se também o efeito de cisalhamento, além da flexão e membrana já detalhados anteriormente. Para este caso, nota-se o aparecimento do termo $1/h_2$ nas matrizes, dificultando o processo de expansão em série da variável aleatória. Assim, pode-se aproximar o fator $1/h_2$, usando a decomposição em série de Taylor, sabendo que:

$$\frac{1}{h_2(\theta)} = \frac{1}{h_2 + \alpha_2(\theta)} = f(h_2 + \alpha_2(\theta)) \quad (5.20)$$

onde f representa a função inversa, sendo aproximada pela expansão de Taylor da seguinte forma:

$$f(h_2 + \alpha_2(\theta)) = f(h_2) + \alpha_2(\theta) f'(h_2) + \frac{\alpha_2(\theta)^2}{2} f''(h_2) + \frac{\alpha_2(\theta)^3}{6} f'''(h_2) + O(\alpha_2^4) \quad (5.21)$$

Realizando as respectivas derivações da função inversa na expansão de Taylor em torno da posição $h_2(\theta) = h_2$ até a ordem 3, chega-se à seguinte forma final da expansão da variável aleatória:

$$\frac{1}{h_2(\theta)} \approx \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_2^2} \alpha_2(\theta) + \frac{1}{h_2^3} \alpha_2(\theta)^2 - \frac{1}{h_2^4} \alpha_2(\theta)^3 \quad (5.22)$$

Usando a expansão de α_2 , reorganiza-se a matriz $\mathbf{K}_i^{(2)} c(\theta)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_i^{(2)} c(\theta) &= \mathbf{K}_i^{(2)} c \\ &- \sum_{r=1}^N \mathbf{K}_{i,r}^{(2)} c \xi_{1,r}(\theta) \\ &+ \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \mathbf{K}_{i,rs}^{(2)} c \xi_{1,r}(\theta) \xi_{1,s}(\theta) \\ &- \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \sum_{t=1}^N \mathbf{K}_{i,rst}^{(2)} c \xi_{1,r}(\theta) \xi_{1,s}(\theta) \xi_{1,t}(\theta) \end{aligned} \quad (5.23)$$

5.1.2 Matriz de massa estocástica

Para encontrar as matrizes de massa elementares, vê-se que somente as espessuras aparecem de maneira linear nas duas matrizes de energia cinética. O cálculo das matrizes estocásticas torna-se mais simples, como segue:

$$\mathbf{M}_{i_m}(\theta) = \mathbf{M}_{i_m} + \sum_{r=1}^N \mathbf{M}_{i,r_m} \xi_r(\theta) \quad (5.24)$$

$$\mathbf{M}_{i_f}(\theta) = \mathbf{M}_{i_f} + \sum_{r=1}^N \mathbf{M}_{i,r_f} \xi_r(\theta) \quad (5.25)$$

5.2 Equações do Movimento do Sistema Estocástico

Uma vez obtida as matrizes elementares do problema aeroviscoelástico estocástico, pode-se obter as matrizes globais utilizando-se procedimentos padrões de montagem de matrizes via método dos elementos finitos.

Neste caso, tem-se a seguinte expressão das equações do movimento do sistema aeroviscoelástico estocástico, onde o módulo complexo também estocástico foi fatorado fora da matriz de rigidez da subestrutura viscoelástica:

$$\mathbf{M}_q(\theta) \ddot{\mathbf{q}} + \left(\mathbf{K}_{eq}(\theta) + G(\omega, T, \theta) \bar{\mathbf{K}}_{vq}(\theta) \right) \mathbf{q} = q_\infty \mathbf{Q}(k) \mathbf{q} \quad (5.26)$$

Neste caso, a resolução pelo método pk é feita da mesma forma como descrito na Seção 4.2, onde são obtidos os diagramas de frequência (f) e amortecimento (g) em função da velocidade (v). Já as tiragens aleatórias θ podem ser obtidas pelo emprego do método de Monte Carlo, onde são geradas amostras aleatórias conforme uma distribuição gaussiana para as variáveis geométricas ($h2$ e $h3$). No entanto, para otimizar a eficiência do processo, reduzindo o tempo de execução e número de simulações do modelo, será utilizado o método do Hipercubo Latino (HCL), conhecido por oferecer uma convergência mais rápida para o resultado desejado em comparação com o método de Monte Carlo tradicional (GARCIA-ALFONSO; CORDOVA-ESPARZA, 2018).

Isso se deve ao fato de que o HCL busca as amostras tentando varrer uniformemente o espaço de busca, reduzindo a variância e, conseqüentemente, o número de amostras necessárias para alcançar uma estimativa precisa, como relatado por (WANG, 2022) em um estudo sobre análise de confiabilidade estrutural.

Simulações numéricas

Neste capítulo serão apresentados os resultados das simulações numéricas realizadas com os modelos estrutural e aeroelástico do sistema, a influência dos parâmetros geométricos, de operação e ambientais na estabilidade, além de verificar a influência do acréscimo de massa e rigidez no sistema através do comportamento conservativo associado. Será feito também, um estudo do sistema parcialmente tratado com viscoelástico, a fim de propor uma metodologia de projeto mais eficiente. Por fim, será feito a otimização multiobjetivo do sistema tratado parcialmente, tanto em sua forma determinística quanto de maneira robusta, levando em consideração as incertezas dos parâmetros geométricos, como as espessuras das camadas, e operacionais, como a temperatura de operação do sistema. Todo o código AeroSolver foi implementado em ambiente de programação através da construção de rotinas próprias.

6.1 Verificação do modelo estrutural multicamadas

A implementação do modelo estrutural multicamadas descrito em 2.1, foi verificada numericamente e experimentalmente por vários autores em trabalhos sobre materiais inteligentes e materiais de classificação funcional, como Behrens et al. (2015) que se concentraram em uma análise experimental de um processo de conformação de chapas metálicas usando um material composto de folha de aço, onde a análise foi feita utilizando o *software* LS-DYNA. Esses estudos demonstram coletivamente o uso de MEF na análise do comportamento de chapas sanduíche sob diversas condições de aplicação de cargas.

No estudo realizado por Dey e Nimje (2016), foi feito uma análise experimental sobre a resposta de uma placa sanduíche metálica e comparado com o modelo de MEF para placas multicamadas onde foi constatado que os parâmetros geométricos influenciaram significativamente a resposta da estrutura.

Mais recentemente, Brischetto e Torre (2020) expandiram esse campo experimentando formas de placas sanduíches de *Honeycomb* fabricadas em polímero ácido polilático (PLA), produzidas por impressão 3D, para avaliar a redução de peso e propriedades mecânicas.

No trabalho realizado por Njim, Al-Waily e Bakhy (2021), eles forneceram alguns dados baseados em revisões de parâmetros de projeto relacionados a impacto, cisalhamento e mecanismos de falha para materiais sanduíche, como altura do núcleo, materiais das camadas, índice de lei de potência para análise em materiais magneto-reológicos e espessura das camadas adjacentes da estrutura sanduíche.

As análises em MEF de estruturas sanduíches dos trabalhos referidos ajudaram a determinar os parâmetros de espessura das camadas buscando a melhor relação rigidez/massa. Esse estudo paramétrico no presente trabalho será melhor descrito na seção 6.5.

No âmbito do grupo de pesquisa em estruturas sanduíches viscoelásticas do laboratório de mecânica das estruturas (LMEst), muitos trabalhos têm sido desenvolvidos ao longo dos anos, como o estudo realizado por Lima (2003) sobre a implementação em MEF de materiais viscoelásticos como estratégia de redução de vibrações em veículos aeroespaciais, compressores herméticos, automóveis e estruturas na construção civil. Em Lima (2007) foram desenvolvidas otimizações multiobjetivo em sistemas estruturais multicamadas considerando incertezas.

Ainda no grupo de pesquisa, outros trabalhos relativos ao uso do modelo de estruturas multicamadas e aplicação de MEF foram realizados nos últimos 5 anos. A saber: a tese de doutorado desenvolvida por Cunha-Filho (2019) fez uma abordagem transiente sobre os efeitos do amortecimento viscoelástico na estabilidade aeroelástica de estruturas aeronáuticas; o trabalho de Ribeiro (2019), onde foi aplicada uma metodologia ótima robusta para o controle passivo de supressão do fenômeno de *flutter* supersônico em painéis compósitos; a dissertação de Borges (2019) que tratou do desenvolvimento de uma metodologia de análise da estabilidade de sistemas aeroviscoelásticos empregando aerodinâmica não estacionária com DLM; A tese de doutorado de Fonseca-Junior (2020) que versou sobre a modelagem numérico-computacional de vigas sanduíches viscoelásticas sujeitas a grandes deslocamentos na presença de incertezas paramétricas; os trabalhos de Nunes (2020) e Garcia (2022), aplicaram o modelo e variações do modelo de derivadas fracionárias proposto por Cunha-Filho (2019). Por fim, o trabalho de tese de Cunha (2022) tratou da análise da estabilidade aeroelástica de painéis sanduíches viscoelásticos em regime subsônico empregando o método *Doublet Lattice* não planar.

Neste contexto, para demonstrar a fidelidade do modelo de placa sanduíche de três camadas implementado neste trabalho, foi simulado uma placa sanduíche tratada completamente com camada restrita passiva na condição de engastada-livre. Os resultados da simulação foram comparados com os resultados obtidos com o emprego do *software* comercial ANSYS em termos das frequências naturais dos quatro primeiros modos de vibração dos sistemas.

$$Erro = \left| \frac{f_{A-DRS} - f_{ANSYS}}{f_{ANSYS}} \right| \quad (6.1)$$

Tabela 6.1 – Frequências de excitação dos 4 primeiros modos da placa engastada.

	$M1$	$M2$	$M3$	$M4$
$f_{AeroSolver}$ [Hz]	5,11	18,40	31,52	61,34
f_{ANSYS} [Hz]	4,99	18,27	31,97	60,94
Erro %	2,40	0,71	1,41	0,66

Pela análise da Tab. (6.1), pode-se concluir sobre a boa correlação entre os resultados obtidos com o modelo implementado neste trabalho com os respectivos gerados pelo código ANSYS.

6.2 Verificação do modelo aeroelástico

6.2.1 Método DLM de Blair

Para verificar a implementação numérico-computacional do método DLM, e validar o carregamento aerodinâmico, será feito uma comparação com a asa de geometria simples descrita em Blair (1992). A verificação se dará por meio da avaliação da matriz de influência dos coeficientes aerodinâmicos (AIC), de acordo com a quantidade de painéis adotada no respectivo trabalho. Vale ressaltar que em Blair (1992) adota-se a implementação parabólica da função kernel, assim a parte estacionária da função é subtraída, devendo ser computada pelo VLM.

O modelo descrito é oscilatório em modo de translação, com uma amplitude unitária, cujos dados de simulação e demais parâmetros estão definidos na Tab. (6.2).

Tabela 6.2 – Parâmetros do DLM utilizado por Blair.

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
Envergadura [m]	24	Área Alar [m ²]	2,4
Corda [m]	12	k	1
AR	2	Mach	0,5

A Fig. (6.1) representa o modelo da asa Blaircraft 2100 adotada na análise. Vale salientar que existe um eixo de simetria sobre o plano x-y, assim, será mostrado como resultado da análise, somente a metade dos painéis, uma vez que a outra metade é igual devido à simetria da placa.

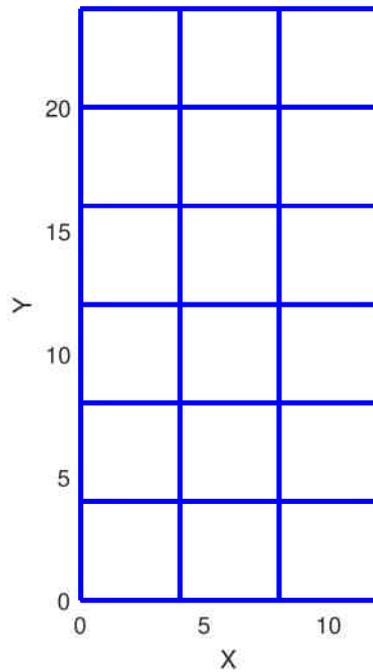


Figura 6.1 – Representação da geometria da asa Blaircraft 2100.

Fonte: Autoria própria.

A Fig. (6.2) mostra a discretização dos painéis, o ponto a 1/4 da corda e o ponto de controle do método DLM. A representação indica o número de cada painel, podendo ser observado pela análise da Tab. (6.3) os valores de $\Delta \bar{c}_p$ para o modelo de Blair (1992) e os respectivos gerados pelo código AeroSolver, mostrando uma boa correlação entre ambos os resultados obtidos.

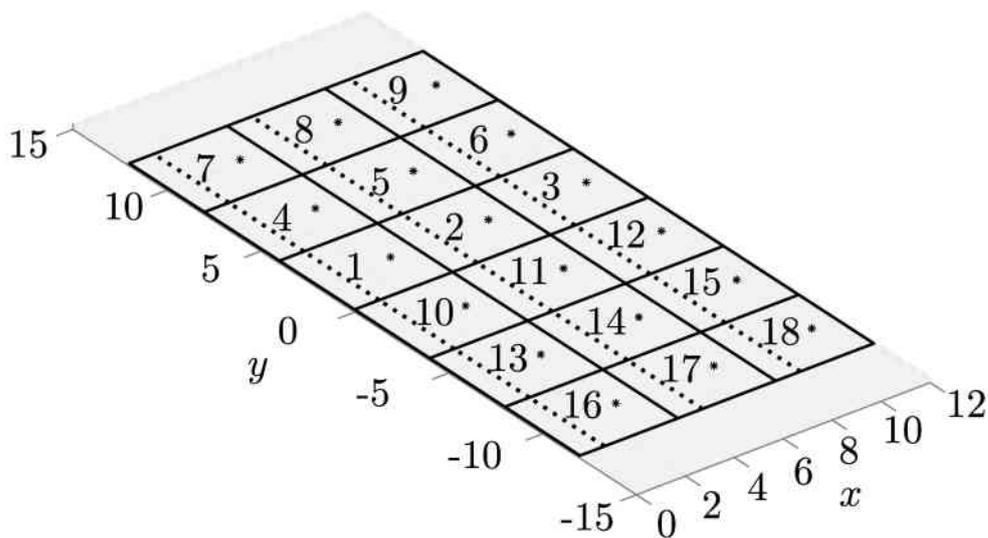


Figura 6.2 – Discretização dos painéis da asa Blaircraft 2100.

Fonte: Autoria própria.

Tabela 6.3 – Comparação dos coeficientes de pressão obtidos por Blair e pelo AeroSolver.

Nº do Painel	$\Delta\bar{c}_p$ (Blair)	$\Delta\bar{c}_p$ (AeroSolver)
1	-3,8736 + 1,1745i	-3,8736 + 1,1745i
2	-3,8862 + 2,4495i	-3,8862 + 2,4495i
3	-0,5490 + 6,2682i	-0,5490 + 6,2682i
4	-3,6234 + 1,0281i	-3,6234 + 1,0281i
5	-3,6405 + 2,1530i	-3,6405 + 2,1530i
6	-0,5915 + 5,8092i	-0,5915 + 5,8092i
7	-2,8893 + 0,7119i	-2,8893 + 0,7119i
8	-2,8983 + 1,4663i	-2,8983 + 1,4663i
9	-0,5829 + 4,5474i	-0,5829 + 4,5474i

Os 9 painéis analisados referem-se a semi-envergadura, pois a asa é simétrica. Na Tab. (6.4) é mostrado o valor do coeficiente de sustentação (C_l) normalizado pela área para ambos modelos, a amplitude e o ângulo de fase.

Tabela 6.4 – Coeficientes de sustentação normalizados.

Parâmetro	(Blair)	(AeroSolver)
C_l	-2,5038 + 2,8453i	-2,5038 + 2,8453i
Amplitude	3,7901	3,7901
Fase [°]	131,3471	131,3471

A Fig. (6.3) mostra o gráfico da distribuição de pressão em cada painel da semi-asa. Pode-se notar que a distribuição está em conformidade com a respectiva distribuição de pressão apresentada por Blair (1992) sendo ambas iguais.

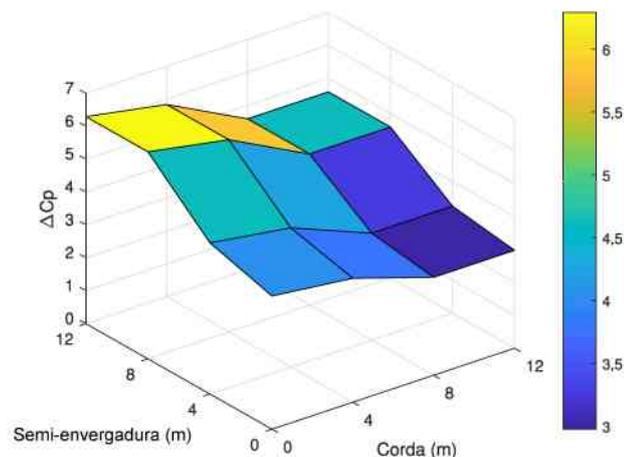


Figura 6.3 – Distribuição de pressão da Blaircraft 2100.

Fonte: Autoria própria.

6.2.2 Verificação com dados experimentais de uma *Plate Like Wing*

Com o intuito de avaliar o modelo aerodinâmico do DLM integrado ao código próprio AeroSolver, será feito um comparativo entre o trabalho de Conyers, Dowell e Hall (2010) para uma estrutura do tipo *plate like wing* (PLW), conforme ilustrado na Fig. (6.4).

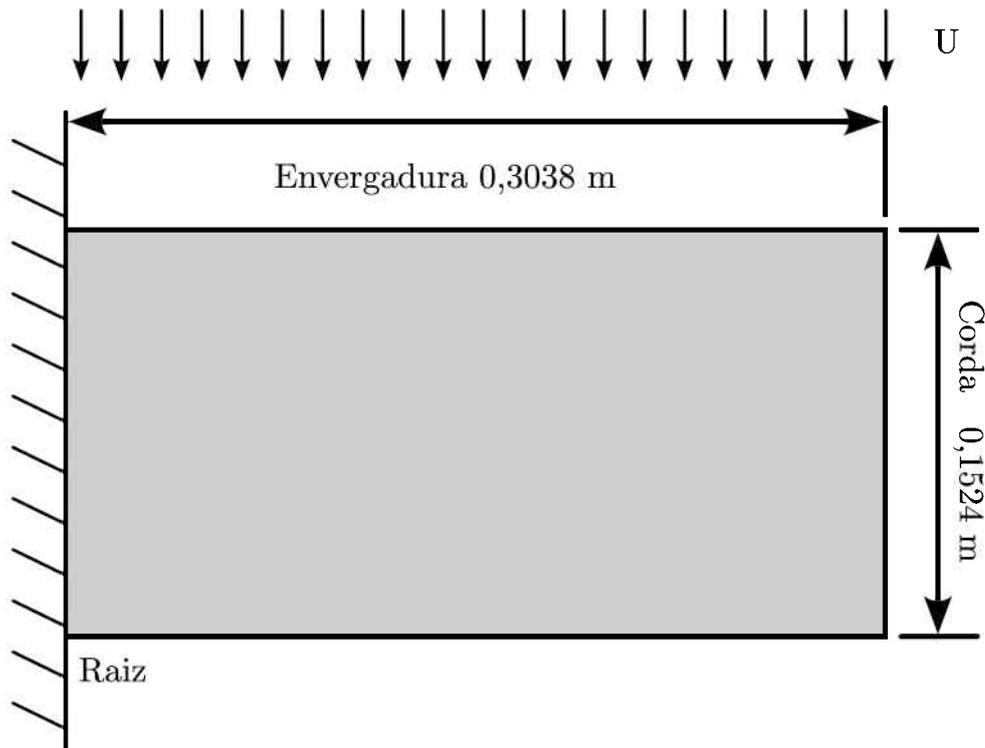


Figura 6.4 – Geometria da PLW.

Fonte: Autoria própria.

Para a solução do problema, foi utilizado o método p-k, descrito na subseção 4.2.1. Na simulação, foram empregados 144 painéis, tomando o intervalo de velocidades de 0 a 30 m/s. O cálculo das matrizes aerodinâmicas levou em consideração o número de Mach fixado em 0,25.

A interpolação das matrizes aerodinâmicas generalizadas foi feita por meio da técnica de aproximação de Roger, utilizando dois estados de atraso aerodinâmico. As frequências reduzidas, antes utilizadas no trabalho de Borges (2019) no intervalo de 0 a 5, com incrementos de 0,1, foram otimizadas neste trabalho através da utilização de uma rotina própria.

Esses dados da simulação aeroelástica e as propriedades da placa de policarbonato ensaiada por Conyers, Dowell e Hall (2010) são descritas nas Tab. (6.5).

Tabela 6.5 – Parâmetros de simulação da PLW de policarbonato no AeroSolver.

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
Nx	12	Vel. [m/s]	0 a 30
Ny	12	Mach	0,25
b [m]	0,3048	E [GPa]	2,4
c [m]	0,1524	ρ [kg/m ³]	1217
h [mm]	1,58	ν	0,33

Os resultados obtidos do modelo aeroelástico via emprego do AeroSolver estão apresentados nos diagramas v-f e v-g das Figs. (6.5) e (6.6), respectivamente. Já a Tab. (6.6) faz um comparativo entre os resultados obtidos neste trabalho com os correspondentes apresentados em Conyers, Dowell e Hall (2010).

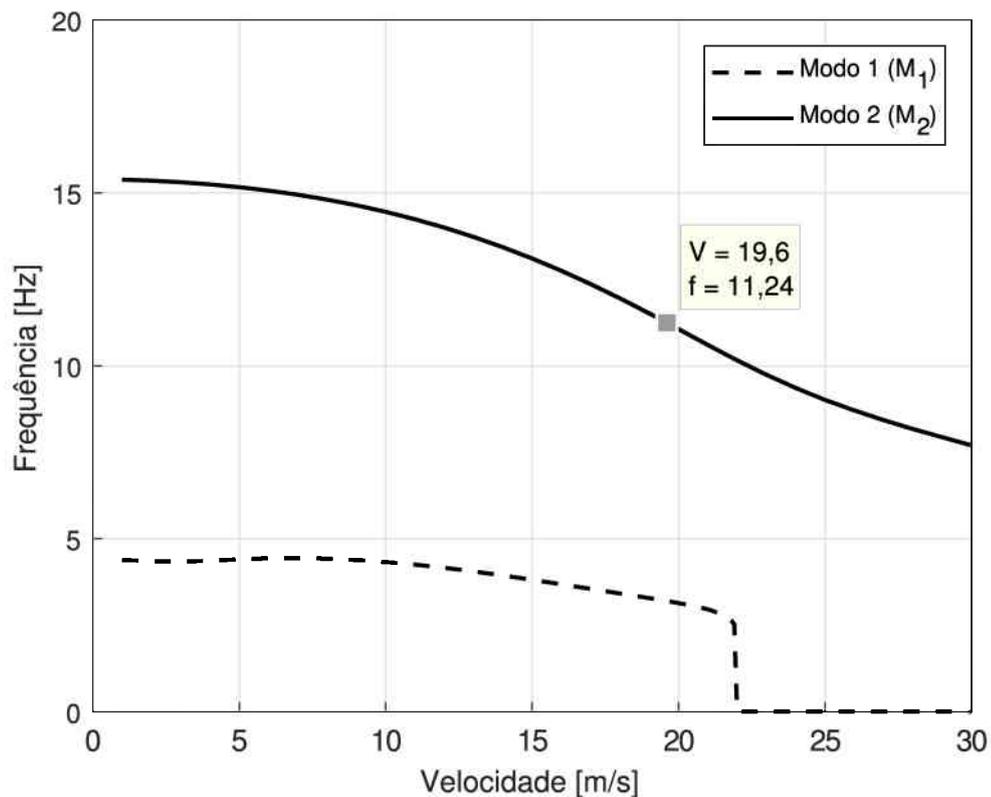


Figura 6.5 – Diagrama V-f da PLW para 2 modos.

Fonte: Autoria própria.

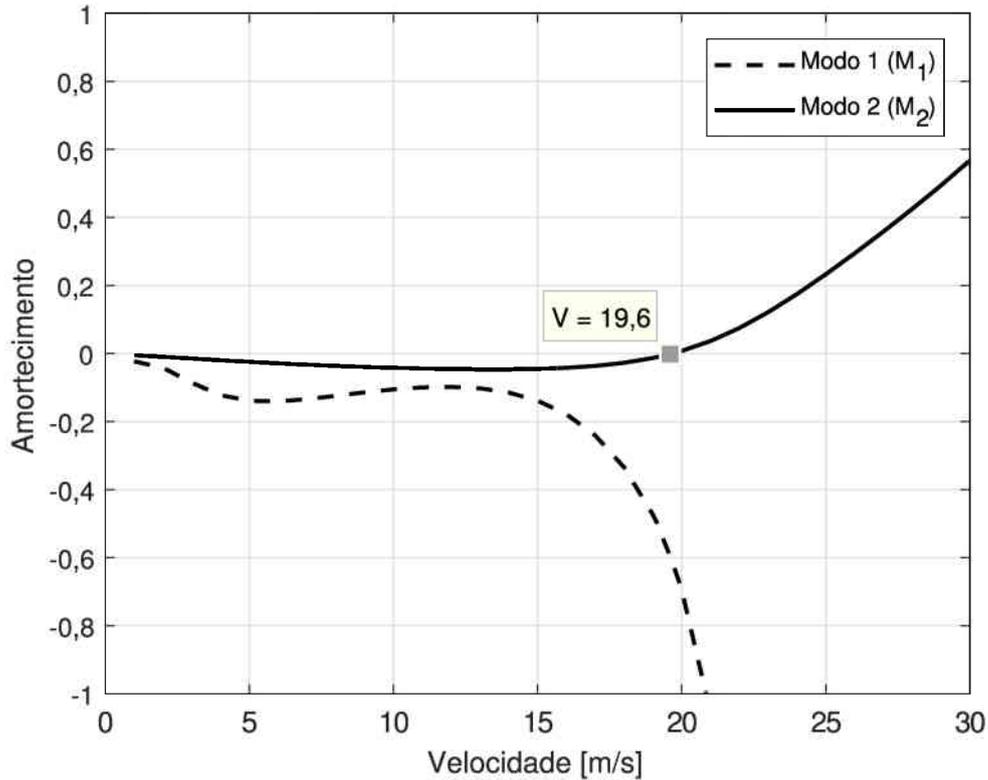


Figura 6.6 – Diagrama V-g da PLW para 2 modos.

Fonte: Autoria própria.

Tabela 6.6 – Resultados comparativos.

	$V_{flutter}$ [m/s]	$\omega_{flutter}$ [Hz]
AeroSolver	19,6	11,24
Experimental	20,1	11,5
Erro relativo [%]	2,25	2,24

Pela análise da tabela anterior, nota-se que a correlação obtida predição da velocidade de *flutter* pelo modelo aeroelástico que foi implementado no AeroSolver é satisfatória, revelando um erro relativo de aproximadamente 2,25 % entre os resultados obtidos pelo AeroSolver com os experimentais apresentados pela referência. Uma das possíveis explicações para esse valor de erro, pode ser as modificações introduzidas no método pk deste trabalho, especialmente nos procedimentos de interpolação das matrizes aerodinâmicas.

Isso se deve ao fato de que o AeroSolver adota uma abordagem de interpolação distinta da convencional, optando pela aproximação de Roger. Embora esse esquema seja amplamente empregado em análises relacionadas ao controle ativo, sua aplicação exclusiva à análise aeroelástica e interpolação das matrizes generalizadas do sistema aeroviscoelástico difere dos métodos convencionais, inclusive os utilizados por alguns pacotes comerciais.

Contudo, os resultados se mostraram satisfatórios, com erros de 2,5 %, sendo assim capazes de determinar as velocidades de *flutter* de sistemas aeroelásticos em regime subsônico, combinando o MEF com o DLM. Vale salientar que os diagramas V-f e V-g, foram

otimizados com relação à sua frequência reduzida (k), como explicitado anteriormente, a fim de melhorar a eficiência computacional em análises de estabilidade de sistemas aeroviscoelásticos mais complexos de interesse prático, além de tais sistemas na presença de incertezas e otimização robusta.

6.3 Sistema Conservativo Associado (SCA)

Com a adição da camada viscoelástica, na configuração de placa completamente tratada, mostrada na Fig. (6.7), é de se esperar que haja um ganho no desempenho da mesma, tanto em termos do comportamento dinâmico estrutural, através da redução das amplitudes de vibração do sistema, quanto da estabilidade aeroelástica em regime subsônico de interesse deste trabalho, através do aumento das velocidades críticas ou de *flutter* do sistema aeroviscoelástico.

Porém, é importante quantificar os ganhos (estrutural e aerodinâmico) obtidos com a adição do tratamento superficial por camadas restritas passivas (viscoelástica + restringente). Neste caso, deve-se avaliar o chamado comportamento conservativo associado (CCA) do sistema viscoelástico. Para tanto, considera-se somente o comportamento estático do material viscoelástico presente no tratamento superficial, representado pela matriz de rigidez $G_0 * K_v$, sendo chamado aqui de SCA. Para efeito de comparação dos resultados obtidos, o sistema viscoelástico completo com efeito dissipativo do material viscoelástico é chamado de "C/Visc.", e o painel base sem tratamento viscoelástico é chamado de "S/Visc."

Os valores das variáveis de projeto utilizadas na construção do modelo de elementos finitos do sistema viscoelástico para a obtenção das FRFs estão definidos na Tab. (6.7). As condições de contorno assumidas aqui são as mesmas que foram adotadas na Subseção 6.2.

Tabela 6.7 – Parâmetros da simulação em EF para obtenção das FRF's.

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
h_1 [mm]	1,5	E_1 [GPa]	68,9
h_2 [mm]	0,508	G	(ω, T)
h_3 [mm]	0,5	E_3 [GPa]	68,9
ν_1	0,34	Frequência [Hz]	1 a 80
ν_2	0,49	T_v [°C]	25
ν_3	0,34	N_x	12
ρ_1 [kg/m ³]	2700	N_y	12
ρ_2 [kg/m ³]	950	L_x [m]	0,30
ρ_3 [kg/m ³]	2700	L_y [m]	0,50

Através da análise da Fig. (6.7), fica evidente a forte atenuação das amplitudes de vibração do sistema proporcionada pelo material viscoelástico, além da dependência de

seu comportamento em função da frequência, que pode ser notado pelas variações das posições das ressonâncias quando comparadas com as correspondentes obtidas para o painel sem tratamento. Além disso, em termos estruturais, percebe-se a contribuição somente do efeito dissipativo do tratamento viscoelástico nas respostas em frequência, quando comparado com FRF do sistema SCA.

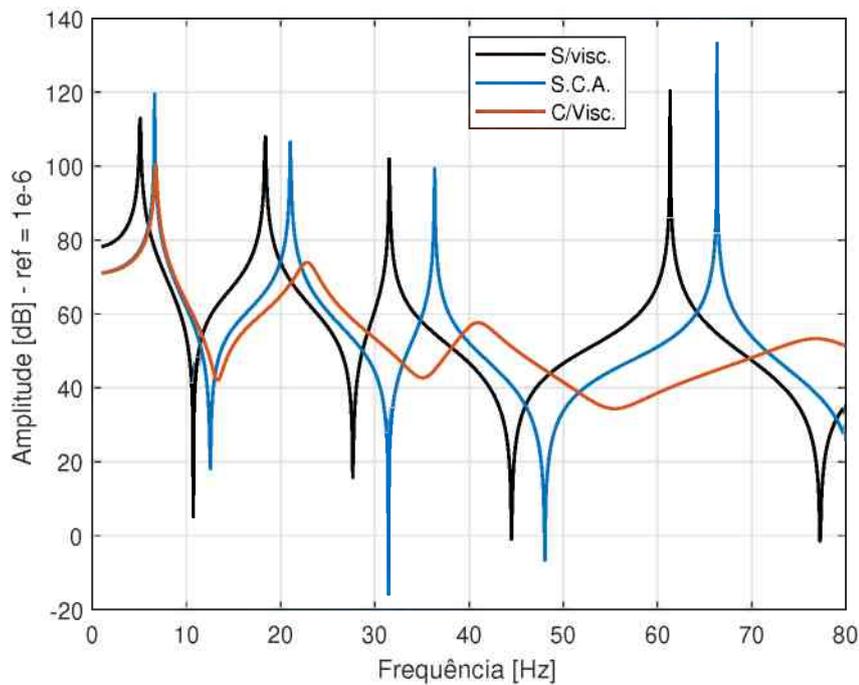


Figura 6.7 – FRF dos 3 sistemas da placa engastada.

Fonte: Autoria própria.

Os dados do ganho (em termos de frequência) mostrados na Fig. (6.7) do sistema sem tratamento para o modelo conservativo é denotado por $\uparrow f_{SCA}$, e o ganho considerando o mesmo sistema sem tratamento, mas comparado com o viscoelástico e seu sistema dissipativo é indicado por $\uparrow f_{SD}$, ambos são mostrados na Tab. (6.8) para os 4 modos ($M1, M2, M3, M4$).

Tabela 6.8 – Frequências e ganhos percentuais obtidos para os sistemas analisados.

	$M1$	$M2$	$M3$	$M4$
S/Visc. [Hz]	5,11	18,40	31,52	61,34
S.C.A. [Hz]	6,61	21,01	36,35	66,32
C/Visc. [Hz]	6,77	22,83	40,93	76,84
$\uparrow f_{SCA}$ [%]	29 %	14 %	15 %	8 %
$\uparrow f_{SD}$ [%]	32 %	24 %	29 %	25 %

Após a análise puramente estrutural, são apresentados os resultados obtidos com o código Aerosolver para ambos os sistemas sem e com tratamento viscoelástico. As Figs. (6.8)

e (6.9) mostram os diagramas V-f e V-g, respectivamente, que foram obtidos para os dois primeiros modos dos sistemas.

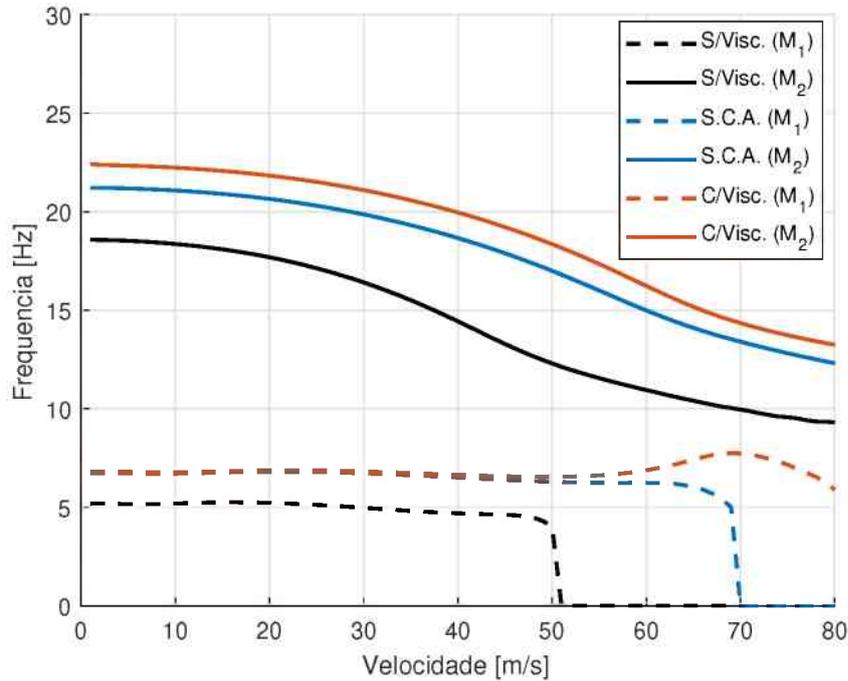


Figura 6.8 – Diagramas V-f dos 3 sistemas para os 2 primeiros modos.

Fonte: Autoria própria.

Pelos valores de frequência de ambos os modos considerando o efeito dissipativo, percebe-se que os mesmos coalescem em torno de 70 m/s. Além disso, a diferença (ganho) em comparação com o SCA não ultrapassa os 2 Hz durante todo o intervalo de velocidades. Porém, o efeito dissipativo do material viscoelástico consegue provocar uma coalescência maior, e somente ocorre o fenômeno de *flutter*. Os dados de frequência nas velocidades de *flutter* são mostrados na Tab. (6.9). Ressalta-se que apesar da divergência ser um fenômeno aeroelástico igualmente danoso para a estrutura assim como o *flutter*, ela não é objeto de estudo do presente trabalho.

Tabela 6.9 – Frequências dos modos 1 e 2 dos sistemas.

	$M1$	$M2$
S/Visc. [Hz]	4,67	14,09
S.C.A. [Hz]	6,25	16,37
C/Visc. [Hz]	6,69	16,95
$\uparrow f_{SCA}$ [%]	34 %	16 %
$\uparrow f_{SD}$ [%]	43 %	20 %

É possível evitar a divergência no caso da SCA e placa simples (S/visc.) aplicando um enflechamento positivo.

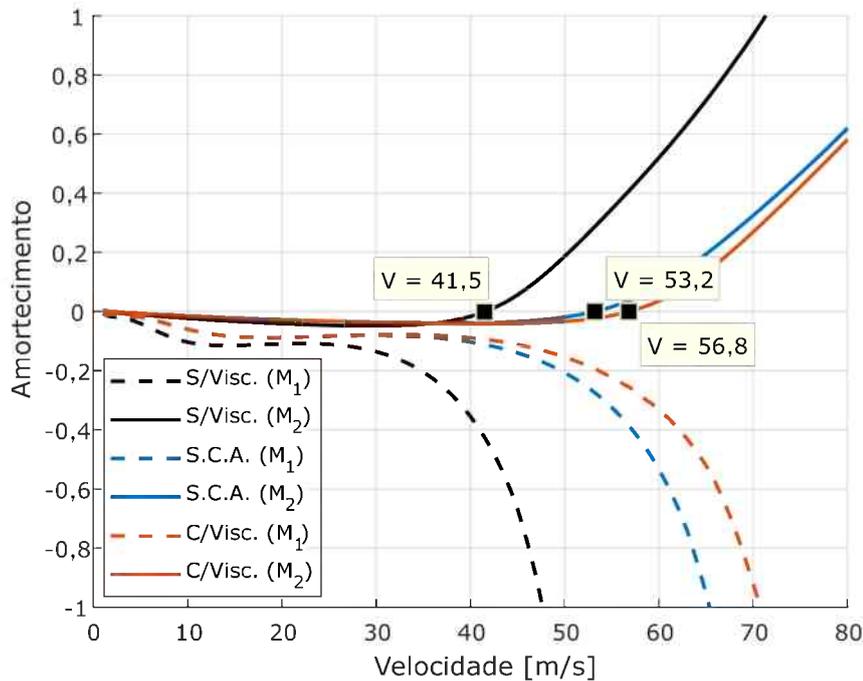


Figura 6.9 – Diagramas V-g dos 3 sistemas para os 2 primeiros modos.

Fonte: Autoria própria.

Em comparação com a placa simples, nota-se que no tratamento completo há um ganho de aproximadamente 37 % na velocidade de *flutter*. Entretanto, a maior parte (28 %) desse ganho se deve à adição de camadas, que é representado pelo SCA, e apenas 9 % dos 37 % são devidos ao efeito dissipativo do material viscoelástico (C/Visc.). Apesar do ganho expressivo em termos da velocidade de *flutter*, há também um aumento de 35 % na massa (\uparrow massa), que fornece uma relação quase linear de incremento percentual. Os valores de velocidade de *flutter* e da massa das placas analisadas na Fig. (6.9) são representados na Tab. (6.10).

Tabela 6.10 Ganhos de velocidade de *flutter* e acréscimos de massa.

Sistema	V_f [m/s]	$\uparrow V_f$ [%]	massa [g]	\uparrow massa [%]
S/Visc.	41,5	-	607,5	-
S.C.A.	53,2	28	817,1	35
C/Visc.	56,8	37	817,1	35

6.4 Influência do tratamento parcial na estabilidade

Foi visto que o tratamento superficial com material viscoelástico é vantajoso em termos dos ganhos aeroelástico também em regime subsônico. No entanto, é demasiadamente caro para estruturas, principalmente em aplicações de interesse aeronáutico, arcar com o acréscimo de massa para um componente estrutural completamente tratado. Portanto, é

preciso obter formas mais eficientes de reduzir o fenômeno de *flutter* sem acrescentar tanto peso à estrutura. Isto é, tratar apenas uma parte da placa para aumentar a eficiência estrutural, aqui definida como sendo a relação da variação percentual de velocidade de *flutter* em relação a variação percentual do acréscimo de massa ($\Delta V_{flutter}[\%]/\Delta massa[\%]$).

Utilizando a técnica da energia de deformação modal (*Modal Strain Energy*) ou MSE, pode-se analisar os dois primeiros modos onde a PLW entra em *flutter*, e assim escolher regiões para aplicar o tratamento viscoelástico superficial. Essas regiões, são os pontos que concentram a maior parte da energia de deformação associada aos modos de interesse, de forma que a aplicação de tratamento parcial em dois ou mais modos, deve ser feito através de uma combinação destas regiões.

O uso de zonas de energia, englobando vários elementos finitos da malha é útil em razão de aplicações práticas, diminuindo o tempo de tratamento de uma determinada superfície. Nas Figs. (6.10) e (6.11) são mostrados as regiões (elementos) com mais energia para os dois primeiros modos.

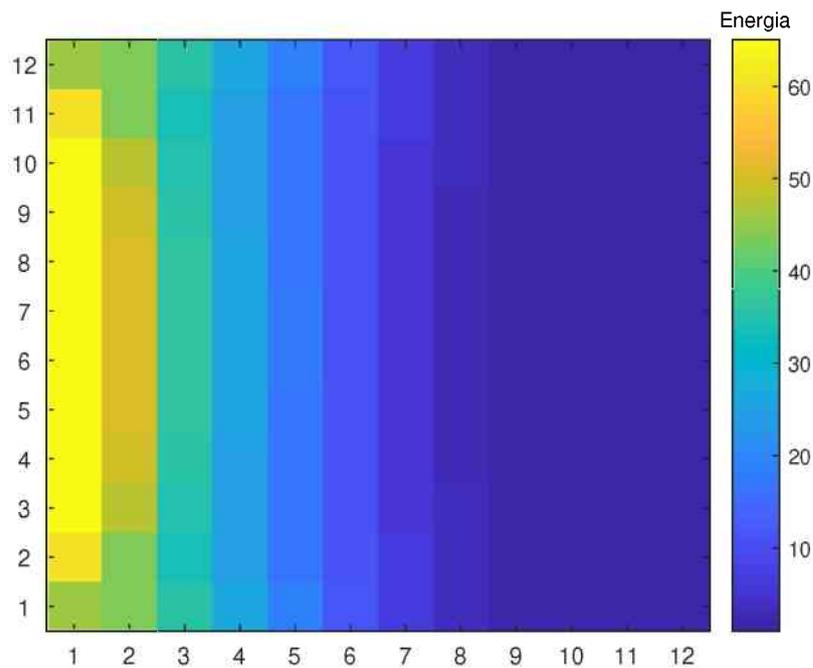


Figura 6.10 – Mapa da energia de deformação do Modo 1.

Fonte: Autoria própria.

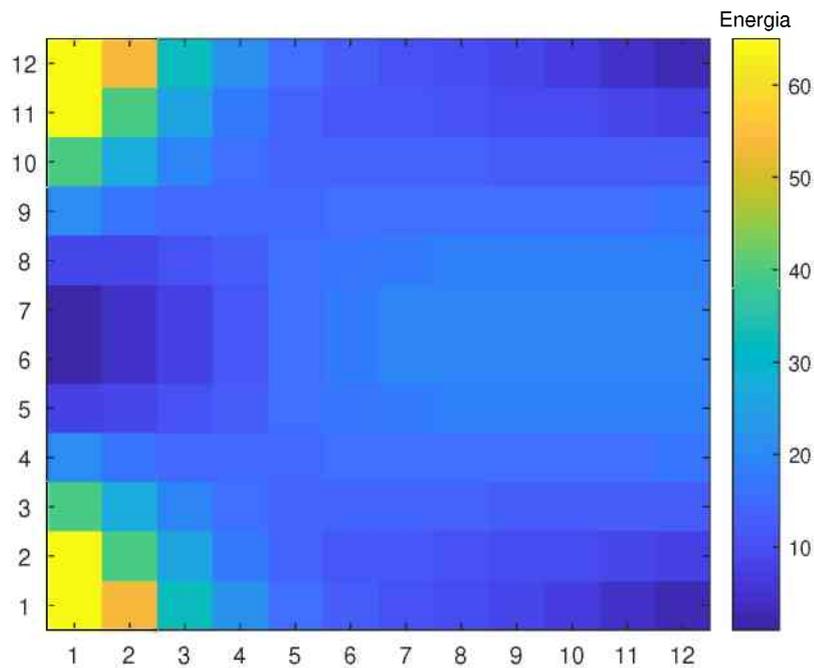


Figura 6.11 – Mapa da energia de deformação do Modo 2

Fonte: Autoria própria.

A fim de oferecer praticidade ao projetista, deseja-se identificar as regiões (ou zonas) de aplicação do tratamento viscoelástico superficial, adotando-se cada conjunto com 9 elementos finitos (3×3), e dividindo o painel plano em 12 regiões de aplicação, conforme a Fig. (6.12). Pode-se notar as regiões dois e três referentes ao primeiro modo (em azul), e as regiões um e quatro para o segundo modo de torção (em laranja) na Fig. (6.13). Vale salientar que os tratamentos com camada restrita passiva podem ser aplicados em mais regiões, porém, busca-se aqui, minimizar o número de tratamentos, tendo em vista a restrição de peso acrescentado à estrutura base. Assim, o número mínimo para se obter simetria no modelo é de duas regiões.

12	1	13	25	37	49	61	73	85	97	109	121	133
11	2	14	26	38	50	62	74	86	98	110	122	134
10	3	15	27	39	51	63	75	87	99	111	123	135
9	4	16	28	40	52	64	76	88	100	112	124	136
8	5	17	29	41	53	65	77	89	101	113	125	137
7	6	18	30	42	54	66	78	90	102	114	126	138
6	7	19	31	43	55	67	79	91	103	115	127	139
5	8	20	32	44	56	68	80	92	104	116	128	140
4	9	21	33	45	57	69	81	93	105	117	129	141
3	10	22	34	46	58	70	82	94	106	118	130	142
2	11	23	35	47	59	71	83	95	107	119	131	143
1	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Número de elementos em x

Figura 6.12 Divisão das regiões no painel plano.

Fonte: Autoria própria.

12	1	13	25	37	49	61	73	85	97	109	121	133
11	2	14	26	38	50	62	74	86	98	110	122	134
10	3	15	27	39	51	63	75	87	99	111	123	135
9	4	16	28	40	52	64	76	88	100	112	124	136
8	5	17	29	41	53	65	77	89	101	113	125	137
7	6	18	30	42	54	66	78	90	102	114	126	138
6	7	19	31	43	55	67	79	91	103	115	127	139
5	8	20	32	44	56	68	80	92	104	116	128	140
4	9	21	33	45	57	69	81	93	105	117	129	141
3	10	22	34	46	58	70	82	94	106	118	130	142
2	11	23	35	47	59	71	83	95	107	119	131	143
1	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Número de elementos em x

Figura 6.13 – Regiões de aplicação do viscoelástico em 3x3 para os dois primeiros modos.

Fonte: Autoria própria.

Após aplicar o tratamento sobre a estrutura, semelhante ao abordado na seção 6.3, calculou-se os diagramas V-f e V-g, que são mostrados nas Figs. (6.14) e (6.15), respectivamente, a fim de analisar os comportamentos aeroelásticos das estruturas com tratamentos parcial e completo.

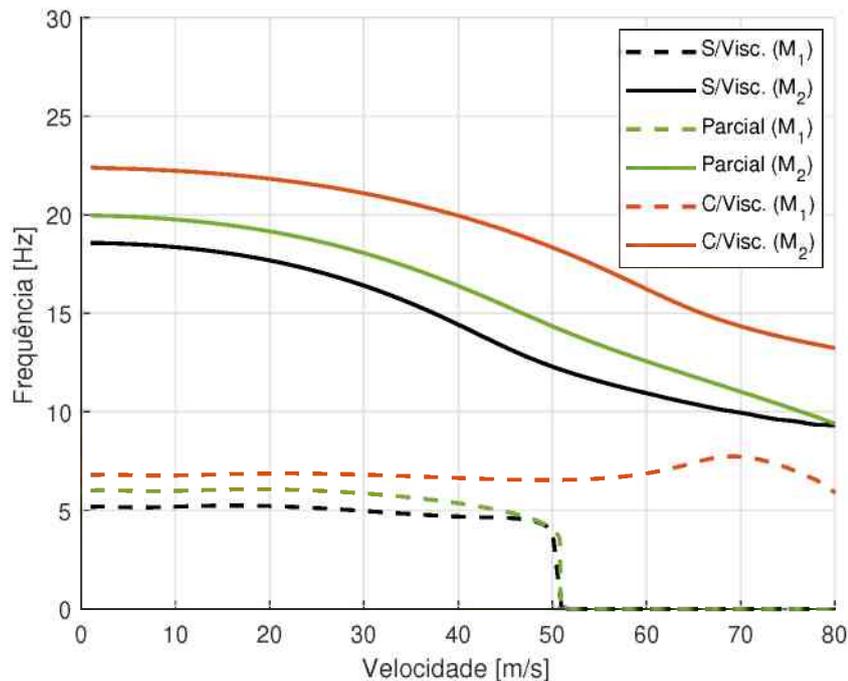


Figura 6.14 – Diagrama V-f para o tratamento parcial.

Fonte: Autoria própria.

Analisando os valores sumarizados na Tab. (6.11), nota-se que existe a coalescência do sistema completamente tratado da mesma forma que na análise da Fig. (6.8) em torno de 70 m/s, afinal, o sistema é o mesmo (completamente tratado com viscoelástico), e portanto, o ganho associado a este e a placa simples é de 43 % no primeiro modo e 20 % no segundo modo. Já o ganho do sistema simples para o sistema parcialmente tratado é menor, chegando a cerca de 3 % e 7 % para o primeiro e segundo modo, respectivamente. Este ganho menor nas frequências se deve ao fato de que a estrutura não teve sua massa e rigidez tão alteradas quando comparadas com as do sistema completamente tratado, o que era de se esperar. Mesmo tendo agora o mecanismo de dissipação de energia do viscoelástico, o número de regiões tratadas não foi suficiente para evitar o fenômeno de divergência, mas sim o fenômeno de *flutter*, novamente, este último ocorre antes do *flutter*. O incremento em valor de frequência do sistema parcial para o completamente agora é menor, sendo o valor da diferença entre eles em mais de 2 Hz.

Tabela 6.11 – Frequências dos modos 1 e 2 do sistema parcial

	M_1	M_2
S/Visc. [Hz]	4,67	14,09
S.C.A. [Hz]	4,81	15,13
C/Visc. [Hz]	6,69	16,95
$\uparrow f_{Parcial}$ [%]	3 %	7 %
$\uparrow f_{SD}$ [%]	43 %	20 %

Quando se analisa o diagrama V-g mostrado na Fig. (6.9) percebe-se que o ganho aeroelástico parcialmente tratado, é ainda significativo em relação ao painel simples sem tratamento, porém menor que no sistema completamente tratado.

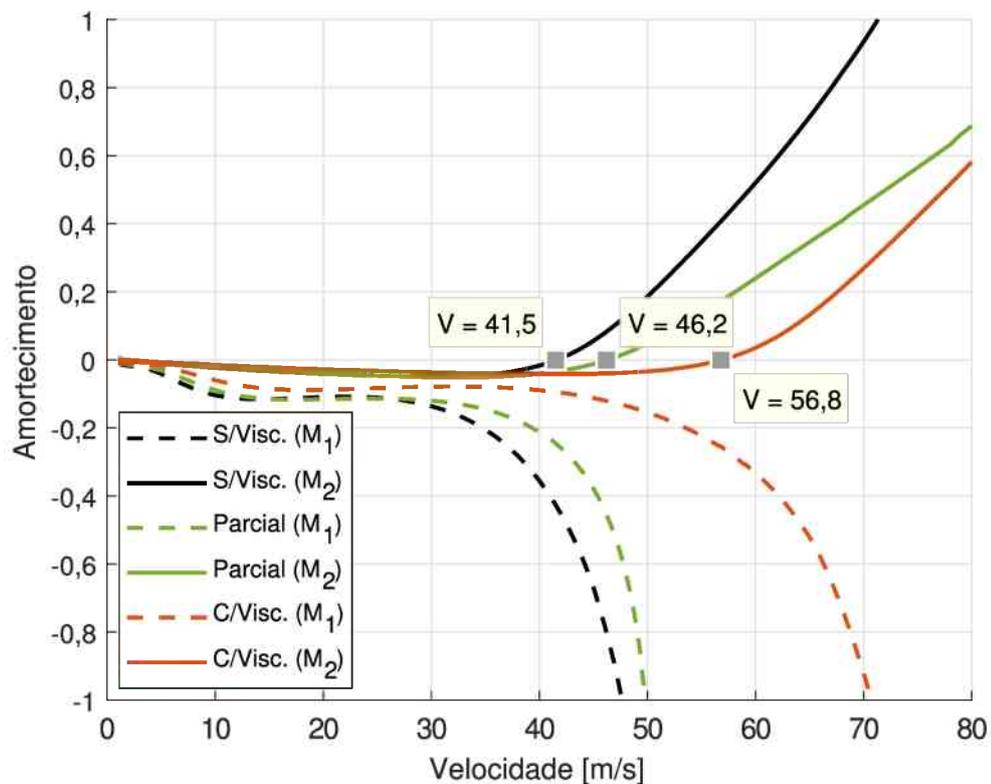


Figura 6.15 – Diagrama V-g para o tratamento parcial

Fonte: Autoria própria.

A maior vantagem do tratamento parcial está no menor incremento de massa quando comparado ao sistema completamente tratado, mas ainda assim há uma vantagem no aumento da estabilidade do sistema. Como observado na Tab. (6.12), o acréscimo de massa do sistema parcial é de 9 %, e o seu aumento na velocidade de *flutter* é de 11 %, tornando-o mais vantajoso do ponto de vista de aplicações aeronáuticas devido às restrições de peso dos produtos do setor. Nota-se que neste caso do sistema parcialmente tratado, há uma diferença de eficiência (maior), provando a eficácia da técnica do MSE em sistemas aeroelásticos.

Tabela 6.12 – Ganhos de velocidade de *flutter* e acréscimos de massa no sistema parcial.

Sistema	V_f [m/s]	$\uparrow V_f$ [%]	massa [g]	\uparrow massa [%]	Eficiência
S/Visc.	41,5	-	607,5	-	-
MSE (Parcial)	46,2	11	659,9	9	1,22
C/Visc.	56,8	37	817,1	35	1,06
Diferença [%]	-	26	-	26	15

Portanto, percebe-se que o sistema parcial é cerca de 15 % mais eficiente na supressão de *flutter* que o sistema completamente tratado. Ademais, os parâmetros geométricos do tratamento parcial via MSE podem ser otimizados buscando-se o máximo rendimento em configurações estruturais mais complexas de interesse prático.

6.5 Análise paramétrica do sistema aeroviscoelástico

Para observar o comportamento da velocidade de *flutter* do sistema aeroviscoelástico em regime subsônico em função da variação dos seus parâmetros geométricos e operacionais, será investigado aqui o grau de influência de variações impostas nas espessuras das camadas do tratamento viscoelástico superficial, além de variações na temperatura de operação do sistema.

6.5.1 Influência das espessuras das camadas

Na avaliação da estabilidade, observou-se a variação para as espessuras com incrementos em Δh_2 , de 0 a 60 % e em Δh_3 de 0 até 30 %, ambos em relação à espessura nominal. Uma vez que a placa multicamadas também depende da temperatura de operação do sistema, devido à presença do material viscoelástico. A próxima subseção tratará da influência desse parâmetro na estabilidade do sistema aeroviscoelástico.

Ao analisar a Fig. (6.16), nota-se que o aumento da espessura da camada restringente leva a um aumento significativo de 10 % na velocidade de *flutter* do sistema aeroviscoelástico em regime subsônico. Esse fato ocorre porque a função da camada restringente é a de induzir deformações cisalhantes na camada viscoelástica durante a flexão do painel base, devido aos esforços aerodinâmicos oriundos do DLM. Portanto, isto leva a maiores dissipações de energia de deformação do núcleo viscoelástico e assim, um aumento da sua capacidade de amortecimento.

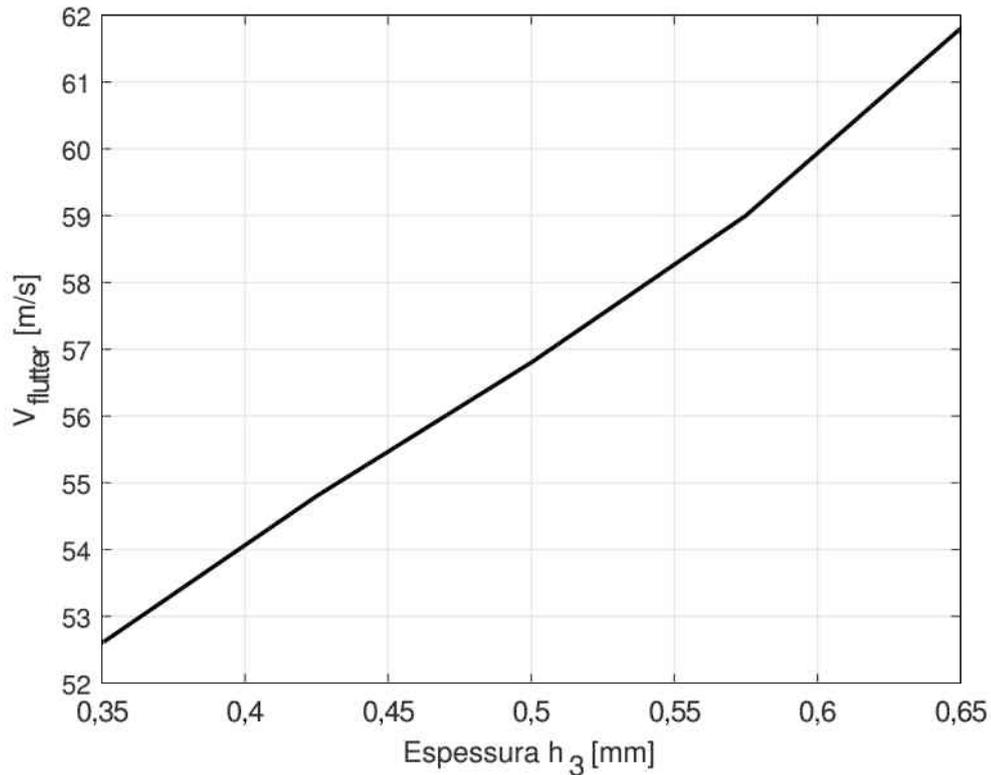


Figura 6.16 Análise Paramétrica da Espessura.

Fonte: Autoria própria.

Por outro lado, a Fig. (6.17) mostra que o aumento da espessura da camada viscoelástica resulta num incremento menor da velocidade crítica de aproximadamente 4,5%. Conseqüentemente, a alteração da espessura da camada restringente de tratamentos viscoelásticos por camadas restritas passivas leva a uma maior eficiência do sistema aeroviscoelástico em regime subsônico. Porém, em projetos aeronáuticos de interesse prático, deve-se ficar atento ao acréscimo de massa ao sistema, uma vez que neste ramo, o acréscimo de peso às estruturas é considerado um fator crítico de projeto.

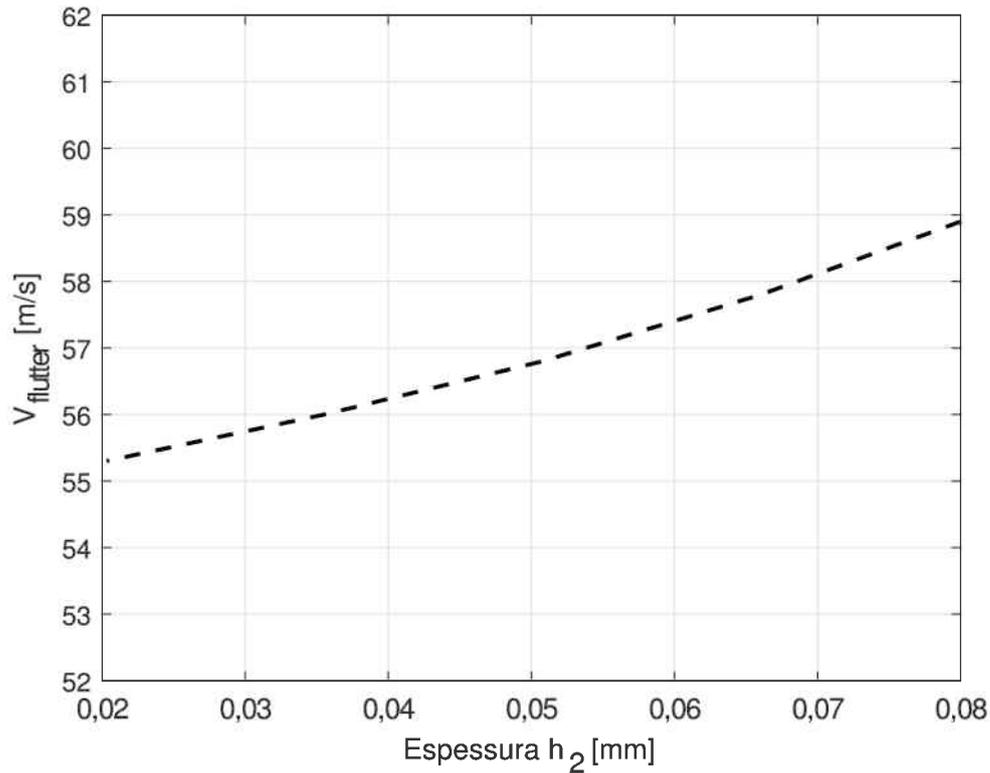


Figura 6.17 – Análise Paramétrica da Espessura.

Fonte: Autoria própria.

Como forma de melhor visualização da combinação das duas curvas apresentadas nas Figs. (6.16) e (6.17) foi gerada a superfície de resposta interpolada, ilustrada na Fig. (6.18), onde nota-se a relação do incremento de espessuras de cada camada e a variação na velocidade de *flutter*. Além da observação mais detalhada, a superfície pode ser utilizada como base para metamodelos e ainda servir como uma função analítica de resposta para o *flutter* considerando o intervalo analisado de variação de espessura.

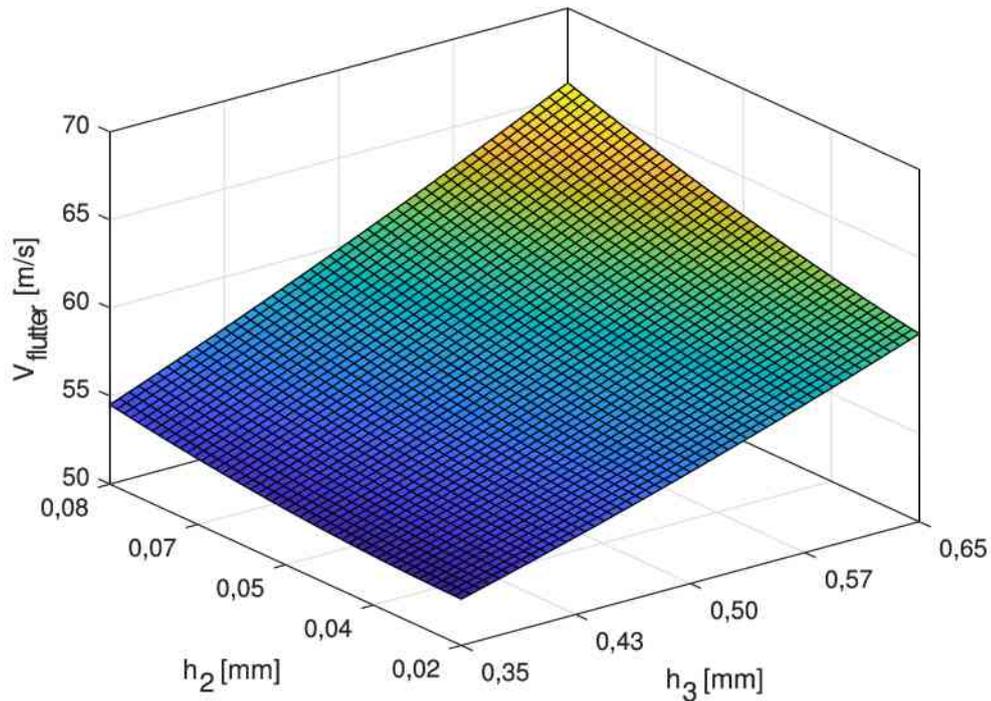


Figura 6.18 Superfície da Análise Paramétrica das Espessuras.

Fonte: Autoria própria.

6.5.2 Influência da temperatura na estabilidade

Como discutido na subseção 2.2.1, as propriedades mecânicas dos materiais viscoelásticos são fortemente dependentes da temperatura de operação. Portanto, é de se esperar que a estabilidade do sistema aeroviscoelástico seja significativamente afetada por variações desse parâmetro físico. Para as análises do efeito da temperatura, foi utilizado um intervalo de 15 % sobre a temperatura nominal de 25°C do material.

A Fig. (6.19) mostra a influência da temperatura na estabilidade do sistema aeroviscoelástico em regime subsônico. Pode-se notar claramente que o aumento de temperatura leva à perda de eficiência do sistema, que é representada pela diminuição na sua velocidade de *flutter*. Neste caso, vale ressaltar que, na prática, uma das estratégias para minimizar os efeitos das variações de temperatura em projetos de engenharia é o de projetar os sistemas tratados com materiais viscoelásticos para atuarem na região de borracha, que é menos sensível às variações desse parâmetro físico, mas, com uma menor eficiência dos materiais viscoelásticos.

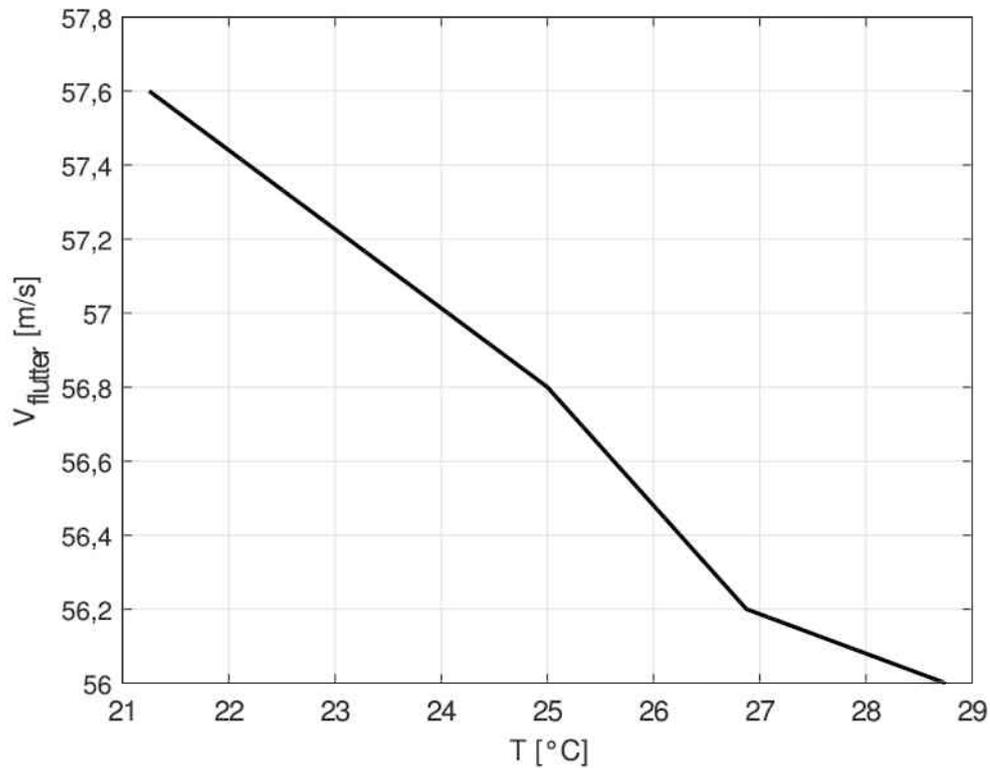


Figura 6.19 – Análise Paramétrica da Temperatura de Operação.

Fonte: Autoria própria.

Na Fig. (6.20), buscou-se o mesmo objetivo de melhor visualização e representação do comportamento da variação de temperatura, combinado com as variações de espessuras das camadas. Também é útil para construção de metamodelos e funções de resposta.

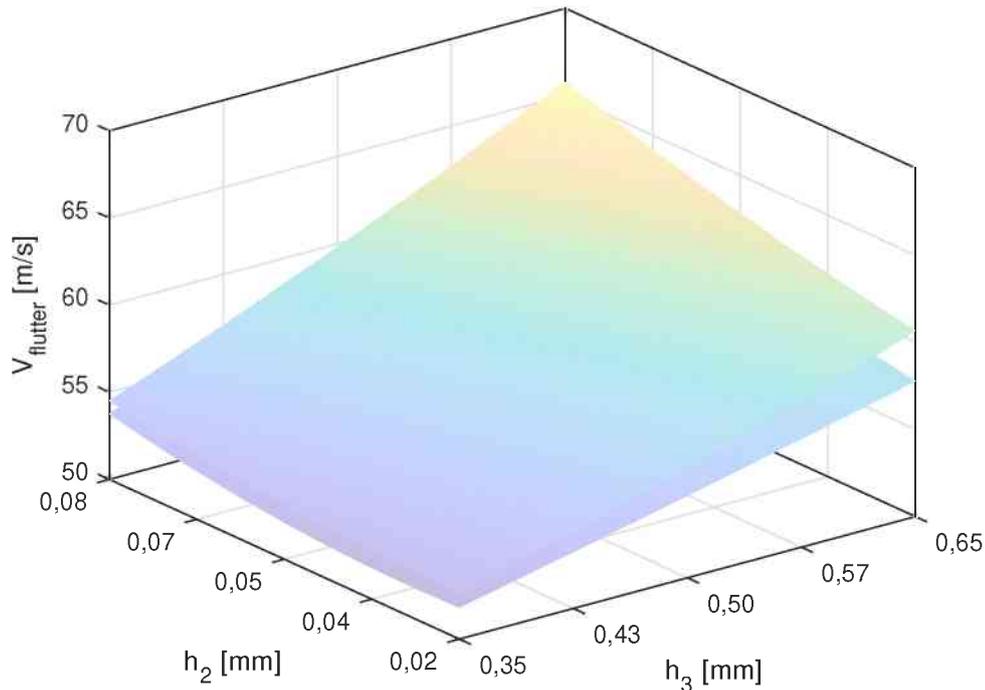


Figura 6.20 – Superfícies da Variação da Temperatura de Operação.

Fonte: Autoria própria.

É perceptível que a diminuição da temperatura aumenta a estabilidade, e quando operamos em temperaturas maiores, o material viscoelástico se torna menos eficiente, porém, pode ser interessante operar em temperaturas maiores, uma vez que a região de borracha mostrada na Fig. (2.2) apresenta-se mais estável, e portanto menos sensível às variações de temperatura que as demais.

6.6 Otimização multiobjetivo robusta

Nesta seção, serão mostrados os resultados da otimização robusta do sistema aeroviscoelástico parcialmente tratado, com o intuito de otimizar os seus parâmetros geométricos, como espessuras das camadas do tratamento e da temperatura do sistema, buscando o melhor compromisso entre acréscimo de massa na estrutura e ganho da velocidade de *flutter*. Serão consideradas as incertezas envolvidas no processo de cada variável aleatória, conforme os desenvolvimentos apresentados no Capítulo 5.

Para a otimização, será utilizado o *Nondominated Sorting Genetic Algorithm II* (NSGA-II) similar ao problema resolvido por Lima (2007), considerando no processo de otimização as seguintes variáveis contínuas a serem otimizadas: as espessuras das camadas viscoelásticas (h_2) e restringente (h_3) e a temperatura (T) de operação do sistema.

A fim de incorporar as incertezas nas variáveis de concepção durante o processo de otimização, os parâmetros geométricos e da temperatura serão perturbados. Essas per-

turbações são definidas como variações de 5%, em relação aos valores nominais de cada variável de projeto, seguindo uma distribuição normal.

Para o cálculo das funções de vulnerabilidade são tomadas 30 amostras aleatórias para cada variável utilizando o método do Hipercubo Latino (HCL). O número de 30 amostras pode representar baixa acuracidade durante as tiragens das amostras e resultar, conseqüentemente, em incertezas maiores.

Porém, na implementação computacional deste trabalho, optou-se pelas 30 amostras em virtude do alto custo computacional agregado, em que cada simulação completa de otimização dura cerca de 30 dias. A mesma justificativa se dá para o número de gerações e populações, onde pode-se notar os parâmetros adotados para a simulação nas Tabs. (6.13) e (6.14) baseando-se em um problema similar de otimização estrutural multicamadas realizado por Lima (2007).

Tabela 6.13 – Variáveis de projeto e espaço de busca do NSGA-II.

Espaço de busca		Nível de incerteza [%]
$0,02 < h_2 < 0,08$	[mm]	15
$0,35 < h_3 < 0,65$	[mm]	15
$21,25 < T < 28,75$	[°C]	15

Tabela 6.14 – Parâmetros de configuração do NSGA-II.

Parâmetro	Valor
Probabilidade de seleção	0,25
Probabilidade de cruzamento	0,25
Probabilidade de mutação	0,25
Número de gerações	80
Número de indivíduos/população	30

Para otimizar os parâmetros já mencionados, foram escolhidas as funções de Velocidade de *flutter* (f_1), representada na Eq. (6.2) e a função representando a massa total do sistema tratado parcialmente (f_2), dada pela Eq. (6.3):

$$f_1(h_2, h_3, T) = -V_{flutter} \quad (\text{m/s}) \quad (6.2)$$

$$f_2(h_2, h_3) = Massa \quad (\text{g}) \quad (6.3)$$

A Fig. (6.21) apresenta o conjunto de soluções ótimas (não dominadas) do modelo determinístico comparadas com as respectivas soluções obtidas com o modelo robusto (considerando as incertezas) do sistema aeroviscoelástico parcialmente tratado, além do projeto nominal.

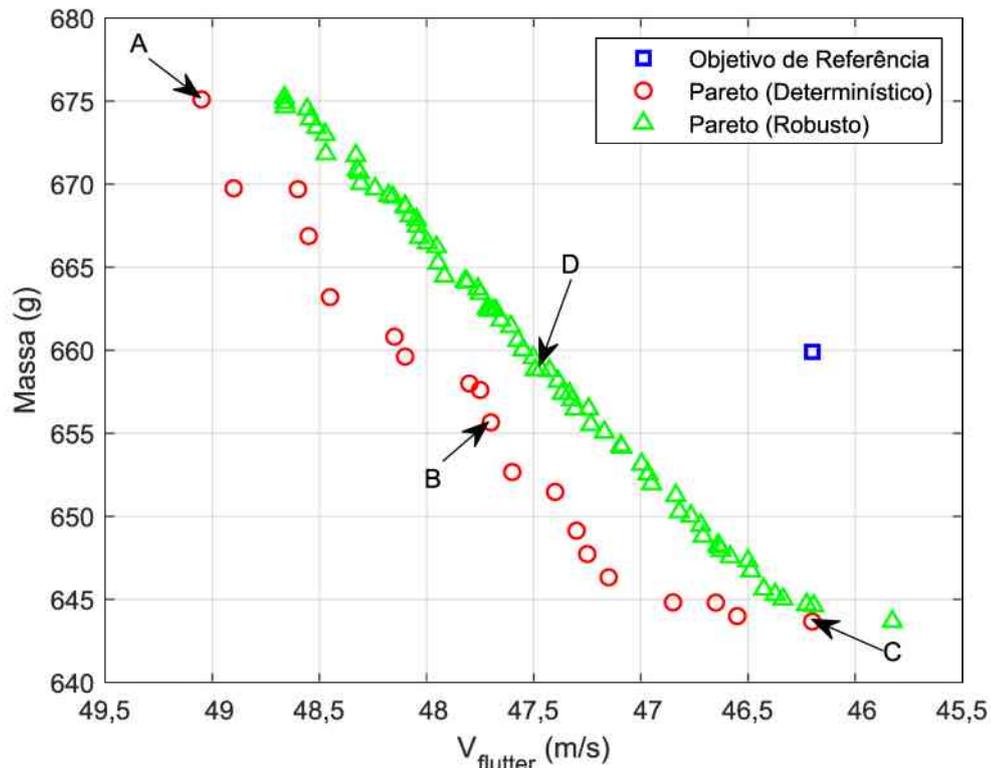


Figura 6.21 – Soluções ótimas do NSGA-II para as funções f_1 e f_2 .

Fonte: Autoria própria.

São mostrados na Tab. (6.15) os valores de cada função custo associada aos pontos A e C da frente de Pareto do problema determinístico, e os pontos de melhor compromisso (B e D) das frentes determinística e robusta, respectivamente.

Tabela 6.15 – Soluções de Pareto e indivíduos do NSGA-II.

Ponto	f_1 [m/s]	f_2 [g]	h_2 [mm]	h_3 [mm]	T [°C]
A	49,1	675,1	0,071	0,650	21,87
B	47,7	655,7	0,057	0,455	21,88
C	46,2	643,7	0,020	0,350	21,63
D	47,5	658,8	0,073	0,481	22,25

Ainda observa-se também, que a eficiência estrutural mostrado na Tab. (6.16) do sistema otimizado é agora mais significativa do que os 15 % apresentados anteriormente na Tab. (6.12).

Tabela 6.16 – Ganhos de velocidade de flutter e acréscimos de massa no sistema parcial otimizado.

Sistema	V_f [m/s]	$\uparrow V_f$ [%]	massa [g]	\uparrow massa [%]	Eficiência
S/Visc.	41,5	-	607,5	-	-
C/Visc.	56,8	37	817,1	35	1,06
MSE (Ponto A)	49,1	18	675,1	11	1,63
MSE (Ponto B)	47,7	15	655,7	8	1,85
MSE (Ponto C)	46,2	11	643,7	6	1,91

Como forma de se analisar a robustez do sistema, para gerar a frente de pareto do problema robusto, foram introduzidas as funções de vulnerabilidade f_3 e f_4 , representando respectivamente, a velocidade de *flutter* e massa total do sistema. Ambas funções são mostradas nas Equações (6.4) e (6.5).

O intuito de se considerar essas funções no NSGA-II é o de minimizá-las simultaneamente com as funções custo originais, tomando como base o fato de que para vulnerabilidades baixas, as variáveis de projeto nas quais as perturbações foram inseridas, não influem de forma significativa na resposta de saída do sistema, como o *flutter* e a massa.

$$f_3(h_2, h_3, T) = \frac{\sigma_V}{\mu_V} \quad (6.4)$$

$$f_4(h_2, h_3) = \frac{\sigma_m}{\mu_m} \quad (6.5)$$

As Figs. (6.22) e (6.23) mostram a função de vulnerabilidade associada à cada função custo, podendo ser observado a dispersão para cada uma delas, normalizadas pela média (μ) é de 0,5 % a 1,6 % para o *flutter* e de 0,45 % a 0,9 % para a massa.

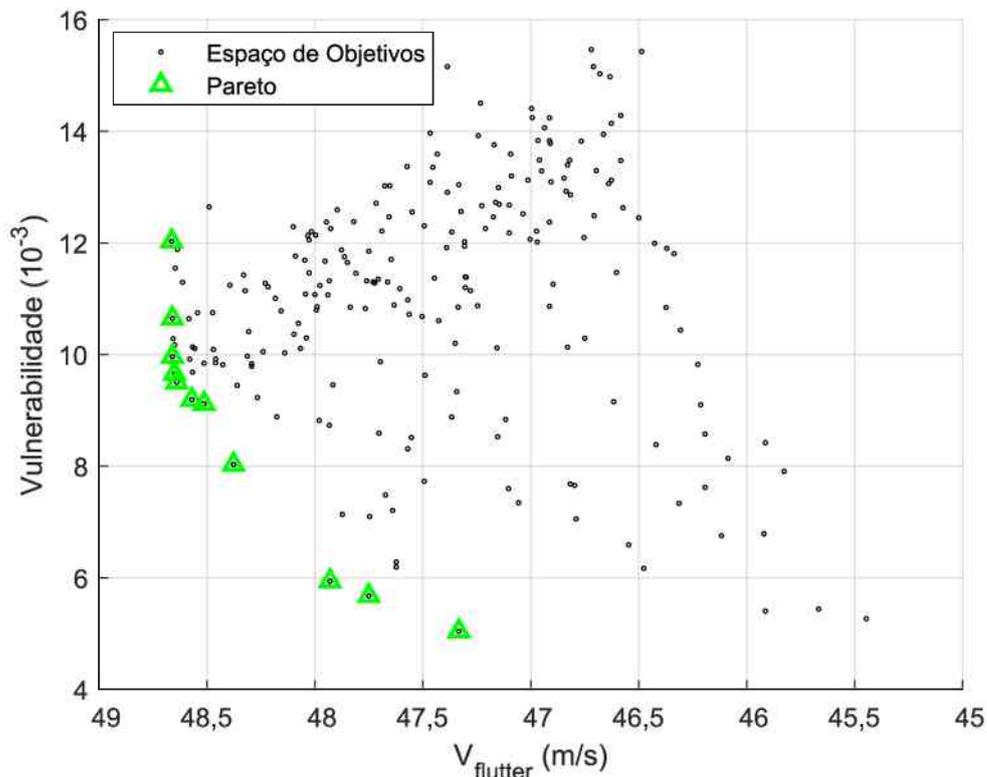
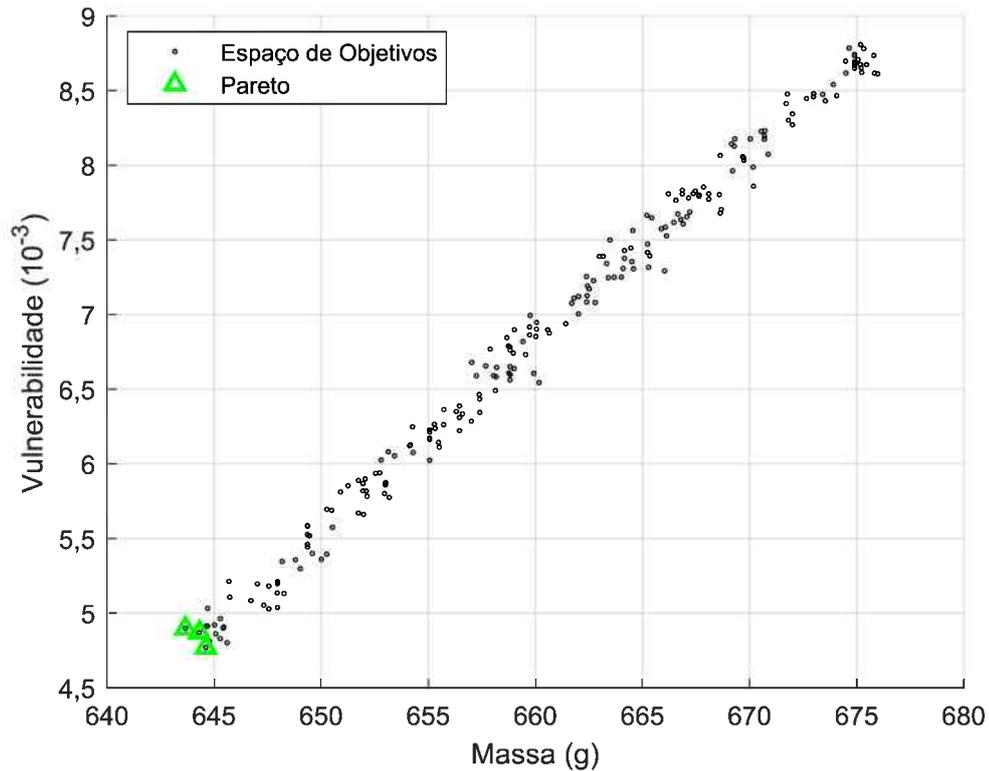


Figura 6.22 – Função de Vulnerabilidade de f_1 .

Fonte: Autoria própria.

Figura 6.23 – Função de Vulnerabilidade de f_2 .

Fonte: Autoria própria.

Pela análise da Fig. (6.21), nota-se que a frente de Pareto do problema determinístico é mais interessante, do ponto de vista ótimo, do que a frente de Pareto do problema robusto. Entretanto, do ponto de vista de implementação prática, para se considerar variações inerentes das variáveis de projeto, será comparado a robustez dos dois sistemas. Neste caso, considerou-se os parâmetros de projeto dos pontos B e D, depois foram geradas amostras pelo método do Hipercubo Latino, com variações de 15 % inseridas em ambas as variáveis de projeto, e construídos os diagramas V-g de ambos os problemas determinístico e robusto, como visto na Fig. (6.24).

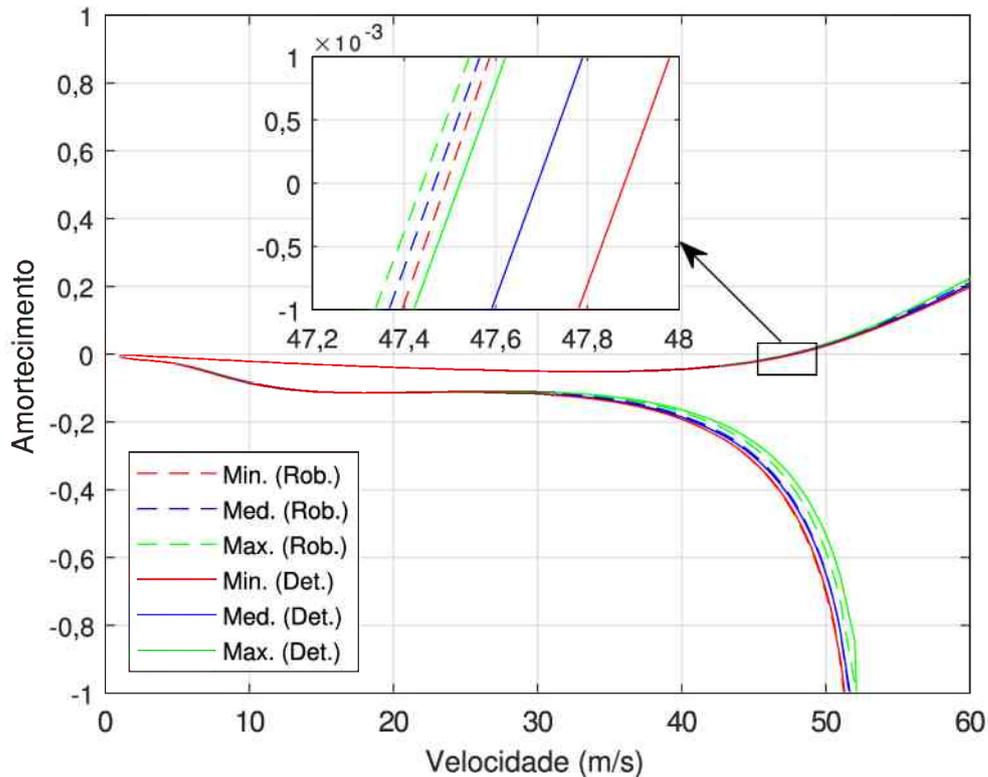


Figura 6.24 – Diagrama V-g dos pontos B e D.

Fonte: Autoria própria.

As dispersões são detalhadas na Tab. (6.17), na qual é observado que no modo dois, onde o *flutter* ocorre, as variáveis de projeto do ponto D demonstram maior robustez, exibindo menor variação diante das perturbações que foram introduzidas nas variáveis de projeto ótimas. Embora essa abordagem seja ótima em termos de estabilidade do sistema, resultando em menor velocidade de *flutter*, ela possui a vantagem de ser menos vulnerável às perturbações que podem surgir durante a operação do sistema aeroviscoelástico. Portanto, torna-se mais interessante do ponto de vista de implementações práticas de interesse industrial.

Tabela 6.17 – Velocidades de *flutter* dos pontos determinísticos (B) e robustos (D).

Ponto	$V_{Min.}$ [m/s]	$V_{Med.}$ [m/s]	$V_{Max.}$ [m/s]	$V_{un.}$ [%]
B (Det.)	47,52	47,69	47,88	0,31
D (Rob.)	47,44	47,47	47,49	0,04

Assim, a estratégia de projeto ótimo-robusto de sistemas aeroviscoelásticos assume uma importância particular no contexto da aplicação aeronáutica, onde não apenas a estabilidade e a massa do sistema são de extrema importância, mas também a sua confiabilidade. É evidente ainda que o ponto representativo do conjunto de variáveis robustas demonstra uma vulnerabilidade mais de sete vezes menor do que as variáveis determinísticas do sistema, mostrando-se menos suscetível às perturbações do ambiente.

Conclusões e Perspectivas Futuras

7.1 Conclusão Geral

Este trabalho representa uma continuidade das atividades de pesquisa que vêm sendo realizadas no LMEst/UFU no contexto da modelagem numérica e implementação computacional de sistemas aeroelásticos incorporando materiais viscoelásticos para a supressão do *flutter* empregando os métodos DLM e MEF.

Para garantir a segurança e robustez de sistemas aeroviscoelásticos em regime subsônico, é essencial realizar uma modelagem estocástica. Nesse sentido, uma abordagem determinística pode ser insuficiente, uma vez que o comportamento do sistema aeroviscoelástico pode ser sensivelmente afetado por pequenas variações nos parâmetros que o governam. Dado que nenhum sistema é completamente estático na prática e está sujeito à flutuações nos parâmetros de projeto, é crucial quantificar as incertezas associadas.

Assim, este trabalho contribuiu com o desenvolvimento de uma ferramenta capaz de oferecer estimativas mais precisas dos envelopes operacionais de sistemas aeroviscoelásticos estocásticos com baixo custo computacional, além de oferecer opções de otimização para tratamentos superficiais por camadas restritas passivas de painéis aeronáuticos em regime subsônico. O desenvolvimento também buscou integrar conhecimentos com as pesquisas em andamento no LMEst, contribuindo para a expansão do conhecimento nessas áreas.

Além de modelar e acoplar os sistemas aeroviscoelásticos utilizando-se os métodos MEF e DLM para análises de estabilidade em regime subsônico, conclui-se que a abordagem do SCA, voltada para investigar os fenômenos associados aos efeitos conservativos do tratamento viscoelástico, proporcionou uma compreensão mais efetiva da real contribuição dos efeitos dissipativos do tratamento viscoelástico superficial no controle do *flutter* em regime subsônico. Isto foi feito, tendo em vista que, em aplicações de camadas restritas passivas, é de se esperar que a maior parte da eficiência do tratamento superficial advém do acréscimo de rigidez e massa das camadas viscoelástica e restringente acrescida à estrutura-base.

Por meio da análise da energia de deformação modal, foi possível identificar os elementos com maior energia de deformação nos modos de interesse que afetam a estabilidade do sistema aeroviscoelástico, visando aumentar a eficiência do tratamento. A técnica do MSE não se mostrou apenas 15 % mais eficiente, estruturalmente falando, mas também mais econômica, reduzindo os custos com aplicação e manutenção de tratamentos superficiais por camadas restritas passivas.

Também foi concluído que o aumento da camada restringente é mais eficiente para a estabilidade do sistema do que a camada viscoelástica, porém, o projetista deve-se atentar ao fato de que ela também é responsável pela maior parte do acréscimo de massa. Pelos resultados também ficou claro que o aumento da temperatura de operação do sistema aeroviscoelástico em regime subsônico diminui o desempenho do sistema, tornando crucial quantificar a incerteza em relação à este parâmetro físico em envelopes de voos de interesse prático, visando a manutenção da eficiência do tratamento viscoelástico. Para isto, pode-se projetar os sistemas tratados para atuarem em regiões de borracha do material viscoelástico.

Ainda, através dos resultados obtidos com a implementação do NSGA-II e da estocacidade do MEF no Aerosolver desenvolvido neste trabalho, é possível realizar a otimização robusta de sistemas aeroviscoelásticos em regime subsônico, resultando em uma nova versão do Aerosolver denominada Aerosolver-DRS (Deterministic and Robust Solutions). Com o DRS, é possível otimizar os parâmetros geométricos e operacionais do sistema, melhorando sua eficiência e estabilidade, além de reduzir sua massa mantendo a confiabilidade.

Por fim, na modelagem e otimização determinísticas, ficou evidente que as funções de vulnerabilidade associadas às funções objetivo do problema original permitem levar em conta as incertezas oriundas dos processos de fabricação, montagem e manutenção de um componente aeronáutico durante o processo de otimização do sistema. Isto leva à construção dos chamados envelopes com maior confiabilidade advinda das incertezas introduzidas no sistema por meio de distribuições de probabilidade. Isto representa uma melhoria e vantagem do ponto de vista de confiabilidade, permitindo aos projetistas diminuir margens de segurança advindas do aumento de confiabilidade do sistema otimizado, com isso permite-se então menor quantidade de material aplicado à estrutura, além de permitir também estimar mais precisamente a vida útil dos componentes, auxiliando assim, na redução de custos e aumento da eficiência dos produtos aeronáuticos.

7.2 Principais Dificuldades e Perspectivas Futuras

Os principais desafios que constituem melhorias, ideias de trabalhos futuros e potencialidades deste trabalho são:

- Os potenciais futuros desta tese incluem a possibilidade de que, com a inclusão das

incertezas e a otimização do modelo robusto, a ferramenta desenvolvida permita aos projetistas, durante a fase de projeto preliminar, obter um intervalo de velocidade de flutter com maior confiabilidade, reduzindo, assim, o fator de segurança. Isso, além de aumentar a confiabilidade e segurança do projeto, possibilita a redução da quantidade de material empregado, resultando na diminuição do peso da aeronave, característica essencial na indústria aeronáutica.

- ❑ A implementação de um código aprimorado que possibilite a análise de placas finas com afilamento e refinamento de malha, viabilizando a análise de configurações complexas de asas/empenagens em conjunto com a discretização aplicada à malha aerodinâmica em DLM;
- ❑ Implementar um esquema avançado de interpolação para a malha aerodinâmica e estrutural, utilizando matrizes de transformação que permitam uma maior flexibilidade e ajuste na densidade de elementos da malha aerodinâmica estrutural;
- ❑ Explorar aspectos ligados à quantificação de incertezas nas estimativas numéricas realizadas para a função kernel do modelo aerodinâmico;
- ❑ Elaborar metamodelos e/ou integração do NSGA-II com Rede Neural Artificial (RNA) nos intervalos propostos de estudo a fim de reduzir significativamente o tempo da otimização, além de fornecer resultados mais simplificados para uma possível implementação em aplicativo de *smartphone*;
- ❑ Validação dos modelos através de experimentos em túnel de vento e eventual calibração dos mesmos;
- ❑ Uso de outras técnicas de otimização e heurística para trabalhos futuros.

Referências

- ABEDI, A.; HESAMZADEH, M. R.; ROMERIO, F. **Adaptive robust vulnerability analysis of power systems under uncertainty: A multilevel OPF-based optimization approach**. Elsevier BV, 2022. v. 134. 107432 p. ISSN 0142-0615. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijepes.2021.107432>>.
- ALAIMO, A.; ORLANDO, C.; VALVANO, S. **Analytical frequency response solution for composite plates embedding viscoelastic layers**. Elsevier BV, 2019. v. 92. 429–445 p. ISSN 1270-9638. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/J.AST.2019.06.021>>.
- ALBANO, E.; RODDEN, W. P. **Doublet-Lattice Method for Calculating Lift Distributions on Oscillating Surfaces in Subsonic Flows**. American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), 1969. v. 7. 2192a–2192a p. ISSN 1533-385X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2514/3.55530>>.
- ANDERSON, J. D. **Fundamentals of aerodynamics**. 5. ed. New York, NY: McGraw-Hill Professional, 2010. (Anderson series).
- ANDREWS, L. V.; VIVIAN, H. T. **Unsteady Aerodynamics For Advanced Configurations: Part I - Application Of The Subsonic Kernel Function To Nonplanar Lifting Surfaces**. Ohio, 1965.
- BEHRENS, B. A. et al. **Experimental Test and FEA of a Sheet Metal Forming Process of Composite Material and Steel Foil in Sandwich Design Using LS-DYNA**. Trans Tech Publications, Ltd., 2015. v. 651–653. 439–445 p. ISSN 1662-9795. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.651-653.439>>.
- BERTSIMAS, D.; HERTOOG, D. den; PAUPHILET, J. **Probabilistic Guarantees in Robust Optimization**. Society for Industrial 'I&' Applied Mathematics (SIAM), 2021. v. 31. 2893–2920 p. ISSN 1095-7189. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1137/21m1390967>>.
- BLAIR, M. **A Compilation Of The Mathematics Leading To The Doublet Lattice Method**. Ohio, 1992.
- BORGES, D. M. **Desenvolvimento De Uma Metodologia De Análise Da Estabilidade De Sistemas Aeroviscoelásticos Empregando O Método Doublet Lattice**. 34 p. Dissertação (Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica) —

- Graduate Program in Mechanical Engineering, Federal University of Uberlândia, Uberlândia, Brasil, 2019.
- BRISCHETTO, S.; TORRE, R. **Honeycomb Sandwich Specimens Made of PLA and Produced Via 3D FDM Printing Process: An Experimental Study**. Science Publications, 2020. v. 4. 54–69 p. ISSN 2523-1200. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3844/jastsp.2020.54.69>>.
- CHASSEIN, A.; GOERIGK, M. **Variable-sized uncertainty and inverse problems in robust optimization**. Elsevier BV, 2018. v. 264. 17–28 p. ISSN 0377-2217. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2017.06.042>>.
- CONYERS, H. J.; DOWELL, E. H.; HALL, K. C. **Aeroelastic Studies of a Rectangular Wing with a Hole: Correlation of Theory and Experiment**. Los Angeles, CA, United States, 2010. Document ID: 20100005187, Date Acquired: August 25, 2013, Report/Patent Number: SSTI-8080-0045.
- CUNHA, B. S. C. da. **Análise da estabilidade aeroelástica de painéis sanduíches viscoelásticos em regime subsônico empregando o método doublet-lattice não planar**. Tese (Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica) — EDUFU - Editora da Universidade Federal de Uberlandia, Uberlândia, Brasil, 2022. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.14393/ufu.te.2022.616>>.
- CUNHA-FILHO, A. **A influência do amortecimento viscoelástico na estabilidade aeroelástica de painéis aeronáuticos**. Tese (Doutorado) — EDUFU - Editora da Universidade Federal de Uberlandia, 2015. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2015.460>>.
- CUNHA-FILHO, A. **Transient approach to the effects of viscoelastic damping on the aeroelastic stability of aeronautical structures**. Tese (Doutorado) — Federal University of Uberlândia, Brazil, 2019.
- CUNHA-FILHO, A. et al. **An efficient iterative model reduction method for aeroviscoelastic panel flutter analysis in the supersonic regime**. [S.l.: s.n.], 2018. v. 104. 575-588 p.
- CUNHA-FILHO, A. et al. **A new and efficient constitutive model based on fractional time derivatives for transient analyses of viscoelastic systems**. Elsevier BV, 2021. v. 146. 107042 p. ISSN 0888-3270. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ymsp.2020.107042>>.
- CUNHA-FILHO, A. et al. **Flutter suppression of plates subjected to supersonic flow using passive constrained viscoelastic layers and Golla–Hughes–McTavish method**. Elsevier BV, 2016. v. 52. 70–80 p. ISSN 1270-9638. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ast.2016.02.022>>.
- CUNHA-FILHO, A. et al. **Flutter suppression of plates using passive constrained viscoelastic layers**. [S.l.: s.n.], 2016. v. 79. 99-111 p.
- DEY, C.; NIMJE, S. **Experimental and Numerical Study on Response of Sandwich Plate Subjected to Blast Load**. Springer Science and Business Media LLC, 2016. v. 40. 401–411 p. ISSN 1747-1567. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s40799-016-0043-7>>.

DOLGAYA, A.; UZDIN, A. M. **The Concept of Damping Tuning for Seismic Isolation**. Auckland, New Zealand: [s.n.], 2000.

FAZELZADEH, S.; POURESMAEELI, S.; GHAVANLOO, E. **Aeroelastic characteristics of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates under a supersonic flow**. Elsevier BV, 2015. v. 285. 714–729 p. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2014.11.042>>.

FILHO, M. A. D. **Análise de estabilidade de sistemas aeroelásticos empregando elementos finitos estocásticos e o Método Doublet Lattice**. Tese (Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica) — EDUFU - Editora da Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Brasil, 2021. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2021.27>>.

FONSECA-JUNIOR, L. A. **Modelagem numérico-computacional de vigas sanduíches viscoelásticas sujeitas a grandes deslocamentos na presença de Incertezas paramétricas**. Tese (Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica) — EDUFU - Editora da Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Brasil, 2020. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.14393/ufu.te.2020.645>>.

GARCIA-ALFONSO, H.; CORDOVA-ESPARZA, D.-M. **Comparison of uncertainty analysis of the Montecarlo and Latin Hypercube algorithms in a camera calibration model**. IEEE, 2018. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/CCRA.2018.8588138>>.

GARCIA, G. F. **Estudo numérico-experimental de fadiga no domínio do tempo de vigas sanduíches viscoelásticas empregando o modelo fracionário com recorrência**. Tese (Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica) — EDUFU - Editora da Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Brasil, 2022. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2022.8>>.

GARRICK, I. E.; REED, W. H. **Historical Development of Aircraft Flutter**. American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), 1981. v. 18. 897–912 p. ISSN 1533-3868. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2514/3.57579>>.

GE, T. et al. **Investigation of Mechanical and Damping Performances of Cylindrical Viscoelastic Dampers in Wide Frequency Range**. MDPI AG, 2021. v. 10. 71 p. ISSN 2076-0825. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3390/ACT10040071>>.

GRIPP, J.; RADE, D. **Vibration and noise control using shunted piezoelectric transducers: A review**. [S.l.: s.n.], 2018. v. 112. 359-383 p.

HEDMAN, S. G. **Vortex Lattice Method For Calculation Of Quasi Steady State Loadings On Thin Elastic Wings In Subsonic Flow**. Sweden, 1965.

ICAO. **Latest News and Highlights**. 2021. Disponível em: <<https://www.icao.int/Newsroom/Pages/ICAO-welcomes-new-netzero-2050-air-industry-commitment.aspx>>.

IKONOMOV, B.; GUTMANN, M. U. **Robust Optimisation Monte Carlo**. [s.n.], 2019. abs/1904.00670. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:90262768>>.

KIER, T.; LOOYE, G. **Unifying Manoeuvre and Gust Loads Analysis**. [S.l.: s.n.], 2009.

KOTIKALPUDI, A.; PFIFER, H.; BALAS, G. J. **Unsteady Aerodynamics Modeling for a Flexible Unmanned Air Vehicle**. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2015. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2514/6.2015-2854>>.

KUO, S. **Flutter of rectangular composite plates with variable fiber pacing**. [S.l.: s.n.], 2011. v. 93. 2533-2540 p. ISSN 0263-8223.

LANDAHL, M. T. **Kernel Function for Nonplanar Oscillating Surfaces in a Subsonic Flow**. American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), 1967. v. 5. 1045–1046 p. ISSN 1533-385X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2514/3.55319>>.

LASCHKA, B. **Das Potential und das Geschwindigkeitsfeld der harmonisch schwingenden tragenden Fläche bei Unterschallströmung**. [S.l.: s.n.], 1963. v. 43. 325-333 p.

LEÃO, L. et al. **Dynamic and aeroelastic behavior of composite plates with multimode resonant shunted piezoceramics in series**. Elsevier BV, 2016. v. 153. 815–824 p. ISSN 0263-8223. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.07.010>>.

LIMA, A. d. et al. **Sensitivity Analysis of Viscoelastic Structures**. Hindawi Limited, 2006. v. 13. 545–558 p. ISSN 1875-9203. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1155/2006/917967>>.

LIMA, A. M. G. **Modélisation et Optimisation robuste de systèmes mécaniques en présence d amortissement viscoélastique**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2007.

LIMA, A. M. G. de. **Modelagem Numérica e Avaliação Experimental de Materiais Viscoelásticos Aplicados ao Controle Passivo de Vibrações Mecânicas**. 118 p. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil, 2003.

LIU, X. et al. **Stochastic finite element method based on point estimate and Karhunen–Loève expansion**. Springer Science and Business Media LLC, 2021. v. 91. 1257–1271 p. ISSN 1432-0681. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00419-020-01819-8>>.

MOZAFFARI-JOVIN, S.; FIROUZ-ABADI, R.; ROSHANIAN, J. **Flutter of wings involving a locally distributed flexible control surface**. [S.l.: s.n.], 2015. v. 357. 377-408 p.

NASHIF, A.; JONES, D.; HENDERSON, J. **Vibration Damping**. [S.l.]: Wiley, 1985.

NJIM, E. K.; AL-WAILY, M.; BAKHY, S. H. **A Review of the Recent Research on the Experimental Tests of Functionally Graded Sandwich Panels**. [s.n.], 2021. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:250272928>>.

- NUNES, E. P. **Análise transiente de sistemas tratados com materiais viscoelásticos através de um modelo de derivadas fracionárias melhorado e uma técnica de redução.** Tese (Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica) — EDUFU - Editora da Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Brasil, 2020. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2020.642>>.
- REDDY, J. N. **Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells.** CRC Press, 2003. ISBN 9780429210693. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1201/b12409>>.
- RIBEIRO, L. P. **Metodologia ótima robusta para o projeto de uma técnica de controle passivo de supressão do fenômeno de flutter em painéis compósitos de interesse aeronáutico.** Tese (Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica) — EDUFU - Editora da Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Brasil, 2019. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.14393/ufu.te.2019.2404>>.
- RODDEN, W. P.; TAYLOR, P. F.; MCINTOSH, S. C. **Further Refinement of the Subsonic Doublet-Lattice Method.** American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), 1998. v. 35. 720–727 p. ISSN 1533-3868. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2514/2.2382>>.
- SALES, T. et al. **Dynamic assessment of nonlinear typical section ae-roviscoelastic systems using fractional derivative-based viscoelastic model.** Elsevier BV, 2018. v. 423. 230–245 p. ISSN 0022-460X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2018.02.008>>.
- SARWAR, W. **Viscoelastic Material as Energy Dissipater Viscoelastic Damper for Building Structures to Mitigate the Seismic Vibration.** University of Zielona Góra, Poland, 2019. v. 29. 41–49 p. ISSN 2450-8594. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2478/ceer-2019-0015>>.
- SHENG, M. et al. **Vibration characteristics of a sandwich plate with viscoelastic periodic cores.** Elsevier BV, 2018. v. 206. 54–69 p. ISSN 0263-8223. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/J.COMPSTRUCT.2018.07.110>>.
- SOOVERE, J.; DRAKE, M. L.; MILLER, V. **A Design Guide for Damping of Aerospace Structures.** [S.l.: s.n.], 1984.
- SUDRET, B.; KIUREGHIAN, A. D. **Stochastic Finite Element Methods and Reliability A State-of-the-Art Report.** [S.l.: s.n.], 2000.
- SUN, B. et al. **Modified Modal Strain Energy Method for Analyzing the Dynamic Damping Behavior of Constrained Viscoelastic Structures.** International Hellenic University, 2017. v. 10. 174–180 p. ISSN 1791-2377. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.25103/jestr.105.21>>.
- VERBAAN, C. A.; PETERS, G. W.; STEINBUCH, M. **The advantage of linear viscoelastic material behavior in passive damper design-with application in broad-banded resonance dampers for industrial high-precision motion stages.** Elsevier BV, 2017. v. 386. 242–250 p. ISSN 0022-460X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/J.JSV.2016.05.031>>.

WANG, Z. **Comparative Study of Latin Hypercube Sampling and Monte Carlo Method in Structural Reliability Analysis**. Darcy 'I&' Roy Press Co. Ltd., 2022. v. 28. 61–69 p. ISSN 2791-0210. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.54097/hset.v28i.4061>>.

WRIGHT, J. R.; COOPER, J. E. **Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads**. Wiley, 2014. ISBN 9781118700440. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/9781118700440>>.

XU, Y.; LIU, Y.; WANG, B. S. **Revised modal strain energy method for finite element analysis of viscoelastic damping treated structures**. SPIE, 2002. ISSN 0277-786X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1117/12.472676>>.