

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

GERSON CASSIANO DOS SANTOS NETTO

**APLICAÇÃO DO FILTRO DE KALMAN NA ESTIMAÇÃO
DINÂMICA DE ESTADOS DO SISTEMA ELÉTRICO DE
POTÊNCIA**

UBERLÂNDIA, MG
2023

Gerson Cassiano dos Santos Netto

Aplicação do Filtro de Kalman na estimação dinâmica de estados do sistema elétrico de potência

Projeto de Trabalho de Conclusão de Curso da Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Uberlândia - UFU - Campus Santa Mônica, como requisito para a obtenção do título de Graduação em Engenharia Elétrica.

Universidade Federal de Uberlândia

Orientador Prof. Me. Éder Alves de Moura

Uberlândia, MG

2023

Gerson Cassiano dos Santos Netto

Aplicação do Filtro de Kalman na estimação dinâmica de estados do sistema elétrico de potência

Projeto de Trabalho de Conclusão de Curso da Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Uberlândia - UFU - Campus Santa Mônica, como requisito para a obtenção do título de Graduação em Engenharia Elétrica.

Trabalho aprovado em 19 de JUNHO de 2023.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Me. Éder Alves de Moura
Orientador

Prof. Dr. Luciano Coutinho
Membro Avaliador

Prof. Dr. Thales Lima
Membro Avaliador

Uberlândia, MG
2023

Dedicado está este árduo labour àqueles espíritos indomáveis que, confrontados aos caprichos da adversidade, detiveram a serenidade de indagar a razão dos fatos.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente aos meus amigos Igor, Arthur e Bruno pelo apoio e ao grupo de estudo que me acompanhou do início até o fim da graduação. Juntos, não houve nada que fosse capaz de nos impedir. Agradeço ao restante dos membros da Confraria e aos meus amigos fora da universidade por me fazerem sempre sentir acolhido e por tornarem a vida suportável.

Gostaria de agradecer a todos os professores que me estenderam a mão durante a graduação. Obrigado Finzi, Ivan, Machini, Alan e ao meu orientador Éder que me possibilitaram a oportunidade de aprender e iniciar no mundo da pesquisa. Agradeço também ao Eronides, Gilson, Adalberto e Alex por me ensinarem na prática o que significa ser um profissional no ramo de engenharia elétrica, bem como a todos os meus colegas de trabalho, em especial ao Moacir, Leisson, Vantuil, Fernando, Luiz Ramos, Luiz Fernando e Denis, que contribuíram para o profissional que sou hoje.

Por último, gostaria de agradecer à minha família, meu padrinho e meu tio, Genis e Esio, que me ofereceram um teto sobre minha cabeça durante a graduação. Agradeço aos meus pais, Gerson e Fernanda, meus irmãos, Morgannah e Guilhermme, meus pequenos companheiros, Bob, Snow, Nico e Margot, e a todos os membros de minha família pelo apoio incondicional durante toda a minha graduação. Agradeço à minha madrinha Cristiane, às minhas avós Alice e Rosa, e aos meu avôs João e Gerson, que nunca duvidaram que eu chegaria lá. Sobretudo, agradeço ao meu Pai e à minha Mãe, que sem o sacrifício deles, nada disso seria possível. Devo tudo a eles.

*“Minha esperança é que,
quando eu morrer,
todo o inferno se alegre
por eu estar fora da luta.”
(C.S. Lewis)*

Resumo

Este trabalho propõe uma formulação do algoritmo do Filtro de Kalman Estendido, ou *Extended Kalman Filter*, para a Estimação Dinâmica de Estados, ou *Dynamic State Estimation* (DSE), em um sistema elétrico utilizando medidas fornecidas por unidades de medição de fasores, ou *Phasor Measurements Units* (PMUs), de um sistema simulado. O objetivo principal deste estudo é realizar a DSE por meio do uso de um EKF em um arranjo *Single Machine Infinite Bus* (SMIB) de um sistema gerador-barramento infinito. Através de simulações computacionais utilizando o software Plataforma de Sistemas de Potência da Universidade Federal de Uberlândia (PSP-UFU), o comportamento dinâmico do sistema foi determinado e a proposição consistiu em determinar o vetor de estados formado pelo: ângulo de potência ou ângulo do rotor (δ), velocidade do rotor (ω), tensão transitória de eixo em quadratura (E'_q) e tensão transitória de eixo direto (E'_d); vetor de entrada dado pela: potência mecânica (P_m), tensão de campo (E_{fd}) e a tensão terminal na máquina síncrona (V_t); usando as medidas de potência elétrica ativa de saída (P_e), medidas de potência elétrica reativa de saída (Q_e) e velocidade do rotor (ω). Os resultados dos estados estimados foram comparados com os valores simulados e uma breve avaliação do impacto da sintonia do filtro na qualidade da simulação foi realizada. A técnica DSE é usada para monitorar a condição de máquinas síncronas, melhorar a precisão dos cálculos de fluxo de energia e fornecer alertas antecipados de possíveis instabilidades do sistema, permitindo que problemas potenciais sejam identificados antes que causem falhas. Os resultados deste trabalho fornecem *insights* sobre técnicas efetivas de DSE para sistemas elétricos usando dados de PMU em aplicações do mundo real.

Palavras-chaves: estimação de estados, Filtro de Kalman, máquinas síncronas, medição de fasores.

Abstract

This work proposes a formulation of the Extended Kalman Filter algorithm for Dynamic State Estimation (DSE) in an electrical system utilizing measurements provided by Phasor Measurement Units (PMUs) in a simulated system. The primary objective of this study is to perform DSE through the use of an EKF in a Single Machine Infinite Bus (SMIB) arrangement of an infinite bus-generator system. Through computational simulations using the Power Systems Platform of the Federal University of Uberlândia (PSP-UFU) software, the dynamic behavior of the system was determined, and the proposition aimed to determine the state vector composed of the power angle or rotor angle (δ), rotor speed (ω), transient quadrature-axis voltage ($E'q$), and transient direct-axis voltage ($E'd$); the input vector given by mechanical power (P_m), field voltage ($E_f d$), and terminal voltage at the synchronous machine (V_t); using measurements of active electrical power output (P_e), reactive electrical power output (Q_e), and rotor speed (ω). The estimated state results were compared with simulated values, and a brief evaluation of the filter tuning's impact on simulation quality was conducted. The DSE technique is employed to monitor the condition of synchronous machines, enhance the accuracy of power flow calculations, and provide early warnings of potential system instabilities, allowing potential issues to be identified before they lead to failures. The results of this work offer insights into effective DSE techniques for electrical systems using PMU data in real-world applications.

Key-words: state estimation, Kalman Filter, synchronous machine, phasor measurement.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Ciclo de operação de um Filtro de Kalman	24
Figura 2 – Diagrama de blocos representativo do modelo 3 para maquinas síncronas.	30
Figura 3 – Máquina Síncrona conectada ao barramento infinito por duas linhas de transmissão.	32
Figura 4 – Diagrama esquemático do Caso 1, desenhado e simulado via PSP-UFU.	34
Figura 5 – Diagrama esquemático do Caso 2, desenhado e simulado via PSP-UFU.	35
Figura 6 – Fluxograma de algoritmo implementado no MatLab	37
Figura 7 – <i>Heatmap</i> de tensão para o diagrama esquemático de Caso 1	39
Figura 8 – Gráfico do ângulo do rotor δ do gerador síncrono do sistema de Caso 1.	40
Figura 9 – Gráfico da frequência f no gerador síncrono do sistema de Caso 1. . .	40
Figura 10 – Gráfico da potência ativa P_e no gerador síncrono do sistema de Caso 1.	41
Figura 11 – Gráfico da potência reativa Q_e no gerador síncrono do sistema de Caso 1.	42
Figura 12 – Gráfico da potência mecânica P_m no gerador síncrono do sistema de Caso 1.	43
Figura 13 – Gráfico da tensão de campo ou excitação E_{fd} no gerador síncrono do sistema de Caso 1.	43
Figura 14 – Gráfico da tensão de terminal V_t no gerador síncrono do sistema de Caso 1.	44
Figura 15 – <i>Heatmap</i> de tensão para o diagrama esquemático de Caso 2	45
Figura 16 – Gráfico do ângulo do rotor δ do gerador síncrono do sistema de Caso 2.	46
Figura 17 – Gráfico da frequência f no gerador síncrono do sistema de Caso 2. . .	46
Figura 18 – Gráfico da potência ativa P_e no gerador síncrono do sistema de Caso 2.	47
Figura 19 – Gráfico da potência reativa Q_e no gerador síncrono do sistema de Caso 2.	48
Figura 20 – Gráfico da potência mecânica P_m no gerador síncrono do sistema de Caso 2.	49
Figura 21 – Gráfico da tensão de campo ou excitação E_{fd} no gerador síncrono do sistema de Caso 2.	49
Figura 22 – Gráfico da tensão de terminal V_t no gerador síncrono do sistema de Caso 2.	50
Figura 23 – Comparação entre valores estimados pelo CD-EKF e os valores reais simulados pelo PSP-UFU para o caso 1.	52
Figura 24 – Comparação entre δ estimado pelo CD-EKF e δ simulado pelo PSP-UFU para o caso 1.	52
Figura 25 – Comparação entre valores estimados pelo CD-EKF e os valores reais simulados pelo PSP-UFU para o caso 2.	53

Figura 26 – Comparação entre δ estimado pelo CD-EKF e δ simulado pelo PSP-UFU para o caso 2.	53
Figura 27 – Comparação entre os erros entre os valores estimados e reais para cada instante de tempo do caso 1.	54
Figura 28 – Comparação entre os erros entre os valores estimados e reais para cada instante de tempo do caso 2.	55
Figura 29 – Estimação de estados em dessintonia de filtro, Covariância \mathbf{Q}	56
Figura 30 – Estimação de estados em dessintonia de filtro, Covariância \mathbf{R}	57

Lista de tabelas

Tabela 1 – Descrição de variáveis do espaço de estados em tempo contínuo.	21
Tabela 2 – Descrição e dimensões de variáveis do espaço de estados em tempo discreto.	22
Tabela 3 – Descrição de variáveis do espaço de estados em tempo contínuo.	25
Tabela 4 – Descrição de variáveis utilizadas na modelagem da máquina síncrona. . .	31
Tabela 5 – SMIB - Parâmetros de simulação.	35
Tabela 6 – Dados do Fluxo de Potência no Caso 1	38
Tabela 7 – Dados do Fluxo de Potência no Caso 2	45
Tabela 8 – Erro quadrático médio para os estados estimados	55

Lista de abreviaturas e siglas

ARC	<i>mes Research Center</i>
CAD	Desenho assistido por Computador
CD-EKF	Filtro de Kalman estendido contínuo-discreto
CKF	<i>Cubature Kalman Filter</i>
CSV	<i>Comma-separated values</i>
DSE	Estimação dinâmica de Estados
EnKF	<i>Ensemble Kalman Filter</i>
GUI	Interface gráfica de usuário
IEEE	<i>Institute of Electrical and Electronics Engineers</i>
EKF	Filtro de Kalman Estendido
KF	Filtro de Kalman
p.u.	por unidade
PMU	<i>Phasor Measurements Unit</i>
PSP-UFU	Plataforma de Sistemas de Potência da Universidade Federal de Uberlândia
SMIB	<i>Single Machine Infinite Bus</i>
UFU	Universidade Federal de Uberlândia
UKF	<i>Unscented Kalman Filter</i>

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Justificativas	15
1.2	Objetivos	16
1.2.1	Objetivos Gerais	16
1.2.2	Objetivos Específicos	16
1.3	Organização do Trabalho	17
2	REFERENCIAIS TEÓRICOS	18
2.1	Filtro de Kalman	18
2.1.1	O que é o Filtro de Kalman	19
2.1.2	Implementação do Filtro de Kalman	20
2.1.2.1	Definição	20
2.1.2.2	Procedimento de funcionamento do filtro de Kalman	23
2.1.2.3	Algoritmo	24
2.1.2.4	Covariância	26
2.1.3	Filtro de Kalman Estendido	27
2.1.4	Outras formulações não lineares para o Filtro de Kalman	29
2.2	Modelagem da Máquina Síncrona	30
2.2.1	Gerador Síncrono	30
2.2.2	Single Machine Infinite Bus - SMIB	32
3	METODOLOGIA	33
3.1	Simulação dinâmica do sistema	33
3.1.1	Simulador PSP-UFU	33
3.1.1.1	Diagrama Esquemático	34
3.2	Estimação dinâmica de estados	36
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	38
4.1	Simulação com o PSP-UFU	38
4.1.1	Parâmetros de simulação	38
4.1.2	Caso 1: Análise de estabilidade em um modelo SMIB com moderado grau de perturbações.	38
4.1.2.1	Fluxo de potencia.	38
4.1.2.2	<i>HeatMap</i> de Tensão	39
4.1.3	Estudo de Estabilidade	39

4.1.4	Caso 2: Análise de estabilidade em um modelo SMIB com elevado grau de perturbações.	44
4.1.4.1	Fluxo de potencia.	44
4.1.4.2	<i>HeatMap</i> de Tensão	45
4.1.5	Estudo de Estabilidade	45
4.2	Estimação dinâmica de Estados	50
4.2.1	Parâmetros de simulação	51
4.2.2	Estimação de Estados	51
4.2.2.1	Caso 1	51
4.2.3	Caso 2	52
4.3	Análise dos resultados	53
4.4	Sensibilidade a sintonia do filtro	56
5	CONCLUSÃO	58
5.1	Trabalhos Futuros	58
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	60

1 Introdução

A Estimação Dinâmica de Estado, ou *Dynamic State Estimation* (DSE), é uma técnica para estimar o estado dinâmico de um sistema de energia a partir de medições de suas grandezas elétricas. A DSE é utilizada para monitorar as condições das máquinas síncronas, melhorar a precisão dos cálculos de fluxo de energia e fornecer alertas antecipados de possíveis instabilidades do sistema. Essas informações podem ser usadas para monitorar a condição do gerador e identificar problemas potenciais antes que eles causem uma falha.

Ehya e Faiz (2022) afirmam que “a DSE é uma ferramenta poderosa para monitoramento das condições de geradores síncronos.” e ainda complementam ao refletirem que “Ao rastrear os valores dos estados internos ao longo do tempo, a DSE pode ser usada para identificar problemas potenciais, como desgaste de mancais ou degradação do isolamento do enrolamento do estator”.

HERNÁNDEZ (2007) discute o uso de Unidades de Medição Fasorial, ou do inglês *Phasor Measurement Unit* (PMUs), para a DSE de geradores síncronos. As PMUs são sensores de alta velocidade que podem medir as fasores de tensão e corrente em um ponto específico do sistema de energia. Essas informações podem ser usadas para estimar os estados dinâmicos do gerador, como sua velocidade, torque e ângulo do rotor.

A DSE pode ser utilizada para monitorar a condição de geradores síncronos, rastreando os valores de seus estados internos ao longo do tempo. Se os valores dos estados internos começarem a se desviar de suas faixas normais, isso pode indicar que o gerador está começando a falhar. Isso pode ajudar a evitar interrupções dispendiosos e melhorar a confiabilidade de geradores, e por consequência, do sistema elétrico.

Existem diversos métodos de DSE disponíveis. O método mais comum é o filtro de Kalman. O filtro de Kalman é um estimador recursivo que utiliza medições e um modelo do sistema para estimar o estado de um sistema dinâmico.

O filtro de Kalman é uma ferramenta poderosa para a DSE. No entanto, é importante escolher o filtro de Kalman correto para a aplicação. A escolha do filtro de Kalman depende das características do sistema de energia e dos requisitos de precisão da aplicação de DSE.

O filtro de Kalman funciona atualizando iterativamente sua estimativa do estado do sistema com base em novas medições. Ele utiliza uma matriz de ganho para ponderar as medições e o modelo do sistema. A matriz de ganho é calculada com base na incerteza das medições e do modelo do sistema. No entanto, ele pode ser sensível ao ruído presente nas medições.

Existem diversos desafios que podem surgir ao realizar a DSE. Um desafio é a não

linearidade dos sistemas de energia. Os sistemas de energia são compostos por um grande número de componentes, cada um com seu próprio comportamento não linear. Essa não linearidade dificulta o desenvolvimento de modelos precisos para os sistemas de energia.

Outro desafio é a natureza variável no tempo dos sistemas de energia. O estado de um sistema de energia pode mudar rapidamente em resposta a alterações na carga, na geração ou em outros fatores. Essa natureza variável no tempo dificulta a estimativa do estado do sistema utilizando medições feitas em intervalos discretos.

Formulações mais complexas de Filtro de Kalman, como o Filtro de Kalman Estendido, ou *Extended Kalman Filter* (EKF), podem ser implementadas com finalidade de aumentar a precisão e confiabilidade da metodologia a frente das dificuldades apresentadas pelo sistema elétrico de potência.

Além de desafios do sistema elétrico, há também complicações inerentes a própria técnica de estimação, como ruído nas medições e incerteza do modelo que podem causar estimativas imprecisas; e a complexidade computacional que pode dificultar sua implementação em tempo real.

Apesar desses desafios, a DSE é uma ferramenta valiosa que pode ser usada para melhorar a segurança, confiabilidade e eficiência dos sistemas de energia.

1.1 Justificativas

O sistema elétrico de Potência é um sistema complexo composto por geradores interconectados, transformadores, linhas de transmissão e diversas cargas elétricas diferentes. O estado de um sistema de energia é definido pelos valores de suas variáveis físicas, como a tensão, corrente, potência e frequência. O estado dinâmico de um sistema de energia é a evolução temporal das suas variáveis físicas.

O estado dinâmico de um sistema de energia é difícil de ser medido diretamente. As únicas medições normalmente disponíveis são os valores das grandezas elétricas em um número limitado de pontos do sistema. A DSE utiliza essas medições para estimar o estado dinâmico de todo o sistema.

A Estimação Dinâmica de Estado rastreia com precisão a dinâmica de um sistema de energia e fornece a evolução do estado do sistema em tempo real (LIU et al., 2021). A aquisição precisa em tempo real dos estados eletromecânicos dinâmicos de geradores síncronos desempenha um papel fundamental nos sistemas de energia (BAI et al., 2023).

A estimação dinâmica de estado em sistemas de energia fornece um histórico sincronizado em larga escala dos eventos dinâmicos, o que é fundamental na análise e compreensão do desempenho do sistema, comportamento e nos tipos de decisões de controle a serem tomadas para contingências em sistemas de energia em grande escala.

([TEBIANIAN; JEYASURYA, 2015](#)).

No contexto de monitoramento de condições de geradores síncronos, a alternativa ao DSE, seria a instalações de enrolamentos no interior da maquina capazes de medir com precisão as variações do campo magnético([CHEN; CHEN; SHEN, 2018](#)). Entretanto, segundo [Ehya e Faiz \(2022\)](#), tal técnica invasiva se torna inviável em grandes geradores síncronos. A utilização de redes neurais em [Yucui, Minghan e Yonggang \(2018\)](#) apesar de apresentar bons resultados para estimação de faltas nos enrolamentos do estator do gerador, não pode ser aplicada a grandes geradores por precisar de um grande quantidade de dados operacionais de funcionamento de uma maquina síncrona em curto-circuito para o treinamento do seu algoritmo.

Entretanto, o processo de estimação dinâmica de estados não possuem tais desvantagens e podem ser aplicadas a geradores síncronos de qualquer tamanho, de forma não invasiva, e em tempo-real, se fazendo uso de apenas dados de medições de saída do gerador. Segundo [Tebianian e Jeyasurya \(2013\)](#), entre os estados da máquina síncrona, informações precisas, acuradas e em tempo hábil sobre o ângulo do rotor e a defasagem de velocidade podem ser úteis para melhorar a confiabilidade e estabilidade do sistema de energia.

Os algoritmos baseados em filtro de Kalman, como os algoritmos principais de estimação dinâmica de estado em sistemas de energia, têm sido amplamente utilizados para fornecer dados precisos para aplicações em sistemas de energia. ([LIU et al., 2020](#))

Estimação dinâmica de estados pode ainda trazer diversos outros benefícios para os sistemas de energia, como, melhoria da estabilidade ao fornecer informações para algoritmos de controle; Redução de interrupções ao detectar e diagnosticar falhas precocemente e aumentar a eficiência ao monitorar a saúde do sistema e identificar problemas potenciais antes que causem interrupções ou outras perturbações.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivos Gerais

O principal objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de um algoritmo capaz de realizar a estimação dinâmica de estados em um sistema elétrico, utilizando os dados que as unidades de medição (PMUs) podem fornecer em uma aplicação real.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Estimar as variáveis de estado do sistema em tempo real, fornecendo informações precisas e confiáveis sobre o comportamento dinâmico do sistema.

- Monitorar o desempenho do sistema e detectar anomalias ou falhas que possam afetar o seu funcionamento.
- Fornecer informações para operador do sistema, permitindo a tomada de decisões com base em dados atualizados e precisos.
- Reduzir a dependência de medições diretas, permitindo a utilização de técnicas de medição indireta, economizando recursos e aumentando a eficiência do sistema.
- Lidar com a incerteza e ruído nas medições e no modelo do sistema, melhorando a precisão e confiabilidade das estimativas.
- Desenvolver um modelo matemático adequado para descrever o comportamento dinâmico do sistema em questão.
- Facilitar a identificação e diagnóstico de problemas no sistema, permitindo a rápida correção de falhas e aprimorando a confiabilidade e segurança do sistema.

1.3 Organização do Trabalho

O trabalho adota a seguinte estrutura:

- Capítulo 2: neste capítulo será apresentado uma revisão bibliográfica acerca do filtro de Kalman e modelagem de máquinas síncronas.
- Capítulo 3: no terceiro capítulo será feita a abordagem da metodologia utilizada para o estudo de estabilidade dinâmica realizada no PSP-UFU e sobre as definições para o algoritmo em Matlab para estimação de estados.
- Capítulo 4: serão apresentados os resultados das simulações na forma de gráficos, e serão comparados os valores estimados com os valores reais para o vetor de espaço de estados da máquina síncrona. Serão expostos também os da sintonia de filtro para qualidade da estimação.
- Capítulo 5: por fim, é feita um apanhado geral dos temas discutidos nos capítulos anteriores e a conclusão a respeito dos resultados obtidos no capítulo 4, além de sugestões de trabalhos futuros.

2 Referenciais Teóricos

O presente capítulo tem por objetivo revisar e discutir a literatura existente sobre o tema do presente projeto, que é a estimação dinâmica de estados no sistema elétrico. Primeiramente, a Seção 2.1 faz uma revisão detalhada acerca do filtro de Kalman e seus fundamentos, explicando passo a passo o seu algoritmo, notações, considerações e termos técnicos; detalhando o conceito de covariância no âmbito do KF e, em seguida, apresenta as aplicações de extensões do filtro para sistemas não lineares. Esta seção ainda apresenta referências para a modelagem de máquinas síncronas, com a explicação das considerações feitas neste trabalho e a apresentação das equações dinâmicas da máquina. Por fim, a Seção 2.2 faz uma breve revisão sobre o conceito de SMIB e sua aplicação neste estudo.

2.1 Filtro de Kalman

O filtro de Kalman é uma técnica matemática que utiliza uma série de medidas observadas ao longo do tempo para estimar uma variável desconhecida. É um processo iterativo de previsão-correção que pode ser usado para estimar o estado de um sistema com base em informações incompletas, medidas ruidosas e conhecimento prévio do sistema. O filtro de Kalman tem sido usado em várias aplicações, como suavização de dados ruidosos, fornecimento de estimativas de parâmetros de interesse e muitas outras ([MASNADI-SHIRAZI; MASNADI-SHIRAZI; DASTGHEIB, 2019](#)).

O filtro de Kalman foi desenvolvido por Rudolf E. Kalman em 1960 como um algoritmo para a estimativa de variáveis de estado não observáveis com base em variáveis observáveis que podem ter algum erro de medição. Em 1960, o Dr. Kalman apresentou sua publicação ao Dr. Schmidt do Ames Research Center (ARC) e a outros pesquisadores que estavam trabalhando na navegação e orientação em voo intermediário para a missão circum-lunar desde 1959. Os problemas com os quais esses pesquisadores estavam lidando eram modelados por meio de sistemas não lineares, mas o filtro usado era linear. No entanto, a proposta de Kalman foi interessante para esses pesquisadores, pois o novo filtro poderia ser adaptado e usado não apenas como uma solução para seus problemas, mas também para mitigar problemas de cálculo computacional nos computadores IBM 704 ([URREA; AGRAMONTE, 2021](#)).

Desde sua criação, o filtro de Kalman passou por inúmeras modificações e variações para resolver problemas específicos, especialmente relacionados a sistemas robóticos. É um estimador ótimo, o que significa que produz a melhor estimativa possível do estado dado as medidas disponíveis e o modelo do sistema. Ele foi estendido para uso com sistemas não lineares e tem sido aplicado em várias indústrias, incluindo automobilística, militar,

diagnóstico biomédico e previsão financeira.

Ao longo dos anos, foram propostas várias formulações diferentes do filtro de Kalman. Essas formulações diferentes oferecem diferentes compensações em termos de precisão, complexidade computacional e facilidade de implementação. O filtro de Kalman original é um filtro linear, o que significa que só pode ser usado para estimar o estado de um sistema linear. No entanto, muitos sistemas do mundo real são não lineares, o que significa que não podem ser estimados com precisão usando um filtro linear.

Para resolver esse problema, foram propostas várias extensões não lineares do filtro de Kalman. Uma das extensões não lineares mais comuns é o filtro de Kalman Estendido. O EKF convencional utiliza uma expansão em série de Taylor para linearizar o sistema não linear em torno da estimativa atual do estado. Isso permite que o EKF seja usado para estimar o estado de um sistema não linear, mas ao custo de introduzir algum erro na estimativa.

Outras possibilidades de extensão não linear do filtro de Kalman é o filtro de *Unscented Kalman Filter* (UKF). O UKF utiliza um método de Monte Carlo para aproximar o sistema não linear, o que permite que ele estime o estado de um sistema não linear de forma mais precisa do que o EKF. No entanto, o UKF também é mais complexo computacionalmente do que o EKF. Outras variantes também existem, incluindo o *Ensemble Kalman Filter* (EnKF) para problemas de grande escala e o *Cubature Kalman Filter* (CKF), que não requer Jacobianas e não depende de parâmetros de ajuste adicionais.

Neste trabalho, será fornecida uma explicação detalhada do filtro de Kalman e sua implementação. Não obstante, será discutido o filtro de Kalman estendido, que é usado para sistemas não lineares.

2.1.1 O que é o Filtro de Kalman

O Filtro de Kalman é um algoritmo que aplica técnicas de estimativa recursiva a uma série de medidas de entrada que variam com o tempo e contêm ruído para gerar estimativas de variáveis não observadas de interesse. As estimativas produzidas pelo filtro de Kalman tendem a ser mais precisas do que as estimativas baseadas em uma única medida de entrada isoladamente, devido à utilização do filtro de medidas de entrada sequenciais ao longo do tempo.

Filtros comuns, como filtros de ar em um sistema de resfriamento capturam partículas indesejadas, como poeira e pólen, antes que o ar seja circulado em uma residência. Da mesma forma, um filtro passa-banda em um circuito eletrônico permite que sinais de determinadas frequências passem, enquanto rejeita sinais acima e abaixo desse intervalo. Ambos os tipos de filtros trabalham para purificar sua saída, removendo componentes indesejados. Um filtro de ar utiliza um material fibroso que retém partículas à medida

que o ar é forçado através dele. Da mesma forma, um filtro passa-banda eletrônico utiliza capacitores e indutores que formam um circuito permitindo apenas sinais dentro de uma faixa de frequência específica a passar. Sinais fora dessa faixa “encontram resistência” e são efetivamente filtrados. De forma semelhante o filtro de Kalman capta informações imperfeitas, seleciona as partes importantes e reduz a sua incerteza ou ruído (RHUDY; SALGUERO; HOLAPPA, 2017).

Especificamente, o filtro de Kalman é um estimador quadrático linear iterativo que emprega a teoria de controle de feedback: o algoritmo primeiro gera uma estimativa a priori das variáveis não observadas com base em um modelo interno e medidas de entrada conhecidas até aquele ponto. Uma vez que uma medida de entrada subsequente real é obtida e incorporada à estimativa através do aspecto de feedback do filtro, uma estimativa a posteriori é gerada levando em conta todas as medidas de entrada disponíveis até o momento. O filtro, então, usa a diferença entre as estimativas a priori e a posteriori como feedback para refinar o modelo interno e melhorar as estimativas subsequentes.

Quando certas suposições matemáticas são atendidas, incluindo a linearidade do sistema a ser estimado e distribuições gaussianas que caracterizam o processo e o ruído de medição, o filtro de Kalman gera estimativas de estado ótimas no sentido de minimizar a média do erro ao quadrado entre as estimativas e as variáveis reais. Devido ao seu desempenho robusto nessas condições e sua natureza recursiva, o filtro de Kalman encontra ampla aplicação em áreas envolvendo estimativa de estado, navegação, sistemas de controle e processamento de sinais, entre outros.

Em sua formulação básica, o Filtro de Kalman só se aplica a sistemas lineares. No entanto, a maioria dos sistemas físicos é não linear por natureza. O Filtro de Kalman estendido aborda essa limitação linearizando o modelo do sistema em torno das estimativas atuais do estado e da covariância.

2.1.2 Implementação do Filtro de Kalman

2.1.2.1 Definição

O Filtro de Kalman é definido por equações no espaço de estados. Segundo Neusser (2016), a representação no espaço de estados é uma técnica flexível desenvolvida originalmente na engenharia de controle e automação para representar, modelar e controlar sistemas dinâmicos. Portanto assim, o estado não observado ou parcialmente observado do sistema no período t por meio de um vetor x_t m -dimensional. A evolução do estado é então descrita por uma equação de estado. Uma segunda equação descreve a relação entre o estado e as observações dadas por um vetor Y_t n -dimensional.

Logo,

$$\dot{x}_{(t)} = F_{(t)}x_{(t)} + G_{(t)}u_{(t)} + w_{(t)} \quad (2.1)$$

$$y_{(t)} = H_{(t)}x_{(t)} + v_{(t)} \quad (2.2)$$

Onde as variáveis descritas são detalhadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Descrição de variáveis do espaço de estados em tempo contínuo.

Notação	Descrição
$\mathbf{x}_{(t)}$	Estados do sistema
$\mathbf{y}_{(t)}$	Medidas do sistema
$\mathbf{u}_{(t)}$	Entradas do sistema
$\mathbf{w}_{(t)}$	Ruídos de processo
$\mathbf{v}_{(t)}$	Ruídos de medição
$\mathbf{F}_{(t)}$	Modelo de transição de estados
$\mathbf{G}_{(t)}$	Modelo de entradas de controle
$\mathbf{H}_{(t)}$	Modelo de observação

O filtro de Kalman pode ser implementado no tempo contínuo ou no tempo discreto. No tempo contínuo, as matrizes de transição de estado e de medição representam equações diferenciais, enquanto no tempo discreto, elas são equações de diferença. A implementação no tempo discreto é mais comum porque muitos sistemas podem ser modelados usando equações de diferença. O filtro de Kalman no tempo discreto também é mais simples de implementar e é mais eficiente computacionalmente.

A equação de estados em tempo contínuo pode ser discretizadas para obtenção das equações de estados em tempo discreto. O processo de discretização se baseia na relação demonstrado na Equação (2.3).

$$t = k\Delta t \quad (2.3)$$

Onde Δt é o tempo de amostragem, k é o índice em tempo discreto.

De forma clássica e didática, ela pode ser discretizadas utilizando uma aproximação de 1ª ordem, como demonstrado nas Equações (2.4)-(2.7).

$$x_k = x_{k-1} + \Delta t \dot{x}_k \quad (2.4)$$

$$x_k = x_{k-1} + \Delta t [F_{(t)}x_{(t)} + G_{(t)}u_{(t)} + w_{(t)}] \quad (2.5)$$

$$x_k = (I_F + \Delta t F_{(k\Delta t)})x_{k-1} + \Delta t G_{(k\Delta t)}u_k + \Delta t w_{(k\Delta t)} \quad (2.6)$$

$$x_k = Fx_{k-1} + Gu_k + w_{k-1} \quad (2.7)$$

De forma análoga, o mesmo processo pode ser aplicado a equações de medidas.

$$y_k = y_{k-1} + \Delta t \dot{y}_k \quad (2.8)$$

$$y_k = y_{k-1} + \Delta t [H_{(t)} x_{(t)} + v_{(t)}] \quad (2.9)$$

$$y_k = (I_H + \Delta t H_{(k\Delta t)}) x_k + \Delta t v_{(k\Delta t)} \quad (2.10)$$

$$y_k = H x_{k-1} + v_{k-1} \quad (2.11)$$

As variáveis descritas nas equações de diferenças e suas dimensões são detalhadas na Tabela 2.

Tabela 2 – Descrição e dimensões de variáveis do espaço de estados em tempo discreto.

Notação	Dimensão	Descrição
\mathbf{x}	$n \times 1$	Vetor de estados
\mathbf{y}	$m \times 1$	Vetor de medidas
\mathbf{u}	$\mu \times 1$	Vetor de entradas
\mathbf{w}	$n \times 1$	Vetor de ruídos de processo
\mathbf{v}	$m \times 1$	Vetor de ruídos de medição
\mathbf{F}	$n \times n$	Modelo de transição de estados
\mathbf{G}	$n \times \mu$	Modelo de entradas de controle
\mathbf{H}	$m \times n$	Modelo de observação
\mathbf{I}_F	$n \times n$	Matriz identidade para os estados
\mathbf{I}_H	$m \times n$	Matriz identidade para as medidas

Logo, temos que as equações de espaço em tempo discreto é pela seguintes equações.

$$\begin{aligned} x_k &= F_{k-1} x_{k-1} + G_k u_k + w_{k-1} \\ y_k &= H_{k-1} x_{k-1} + v_{k-1} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Posteriormente nesse trabalho será demonstrados outras técnicas mais sofisticadas para o processo discretização.

De acordo com [Kalman \(1960\)](#), representados por \mathbf{x} , o vetor de estado é uma representação matemática do estado do sistema em um determinado momento. Trata-se de um vetor de variáveis que descrevem completamente o estado do sistema e são usadas para prever seu comportamento futuro. Para problemas de estimativa que utilizam a filtragem de Kalman, o vetor de estado compreende os resultados pretendidos, em contraposição a cenários em que o termo “saída” denota as saídas desejadas. O vetor de estado lista as variáveis que o filtro tentará determinar. Além das variáveis que se deseja estimar, por vezes são adicionadas outras variáveis ao vetor, desde que estejam relacionadas de alguma forma, e que a estimação dessas variáveis possam reduzir a incerteza em relação às variáveis realmente cruciais.

O vetor de saídas, representado por \mathbf{y} , deve ser determinado de forma independente pelas ferramentas de medição do sistema e, ao mesmo tempo, poder ser expresso em função dos estados representados por \mathbf{x} .

O vetor de entradas do sistema ou vetor de entradas de controle, representado por \mathbf{u} , determina os estímulos que afetam a dinâmica do sistema e a evolui no tempo, conforme a equação de espaço de estados. De forma geral, ao determinar as variáveis que compõem a equação de estados, ver Equação (2.12), o que não for considerado um estado a ser estimado pode ser considerado uma entrada para o sistema. Contanto que essa entrada possa ser medida e a incerteza dos sensores seja incorporada na equação de ruídos \mathbf{w} .

As matrizes \mathbf{F} , \mathbf{G} e \mathbf{H} são compostas por coeficientes necessários para que as equações de espaço de estados ou equações de medidas possam ser representadas linearmente em relação aos estados e entradas. Convencionalmente, essas matrizes são consideradas constantes. Entretanto, em aplicações mais avançadas do filtro de Kalman, essas matrizes podem variar de acordo com cada iteração.

Os vetores de ruídos de processo e ruídos de medição, representados respectivamente por \mathbf{w} e \mathbf{v} , são usados para modelar a incerteza presente no sistema. O ruído de medição é tipicamente causado por fatores como erros de sensores, erros de quantização e perturbações ambientais. O ruído de processo é tipicamente causado por fatores como conhecimento incompleto da dinâmica do sistema, modelagem imprecisa do sistema, incertezas em relação às variáveis de entrada do sistema e perturbações ambientais (JAZWINSKI, 1970). É comum assumir que \mathbf{w} e \mathbf{v} possuem características estocásticas com distribuição gaussiana de média nula. De acordo com Terejanu (2008), ambos são não correlacionados e possuem características de ruído branco, além de não serem correlacionados com os valores iniciais \mathbf{x}_0 para os estados do sistema. Veja:

$$E[w_k] = 0, \quad E[w_k w_k^T] = Q_k, \quad E[w_k w_j^T] = 0 \text{ p/ } k \neq j, \quad E[w_k x_0^T] = 0 \quad \forall k \quad (2.13)$$

$$E[v_k] = 0, \quad E[v_k v_k^T] = R_k, \quad E[v_k v_j^T] = 0 \text{ p/ } k \neq j, \quad E[v_k x_0^T] = 0, \quad \forall k \quad (2.14)$$

$$E[w_k v_j^T] = 0 \quad \forall k \text{ e } j \quad (2.15)$$

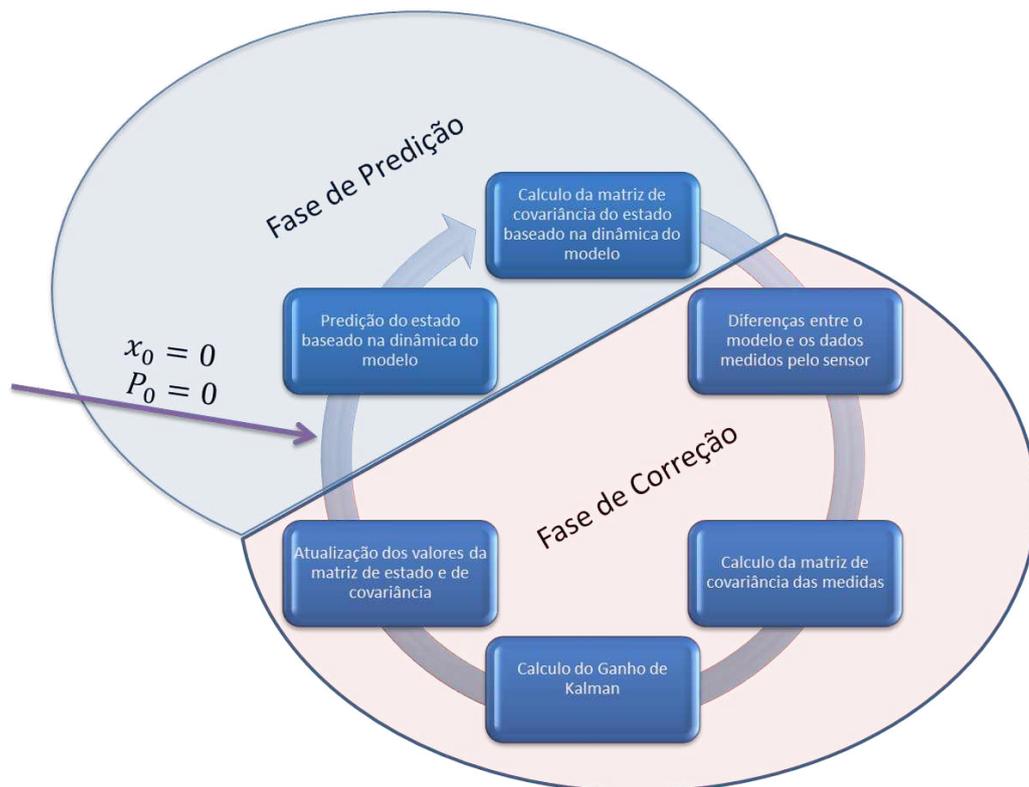
Como mencionado por Akhlaghi, Zhou e Huang (2017), o ruído de medição e o ruído de processo podem ter um impacto significativo no desempenho do filtro de Kalman. O filtro de Kalman é projetado para minimizar o erro quadrático médio das estimativas do vetor de estado, mas não pode eliminar completamente os efeitos do ruído. O filtro de Kalman pode ser tornar mais robusto ao ruído através da seleção cuidadosa dos parâmetros do filtro, como a matriz de covariância de ruído do processo, representado por \mathbf{Q}_k , e a matriz de covariância de ruído de medição, representado por \mathbf{R}_k .

2.1.2.2 Procedimento de funcionamento do filtro de Kalman

O procedimento de operação do filtro de Kalman pode ser descrito em duas fases distintas. Na primeira fase, chamada de *predição*, o filtro utiliza informações a respeito dos últimos estados conhecidos do sistema e os evolui na equação de espaço de estados, por meio das entradas atuais do sistema, a fim de determinar quais serão os próximos estados

do sistema. Na segunda fase, chamada de *correção* ou atualização, o filtro determina a inovação ou resíduo de medição, que consiste em comparar o vetor de saída medido com o vetor de saída predito com base nos cálculos realizados a partir dos estados preditos na etapa anterior. Em seguida, a *predição* de estados é executada a partir da inovação para determinar os estados estimados pelo filtro naquele ciclo em determinado instante. O filtro de Kalman opera de forma iterativa, e o seu ciclo de operação pode ser exemplificado na Figura 1.

Figura 1 – Ciclo de operação de um Filtro de Kalman



Fonte: Autoria Própria (2018).

2.1.2.3 Algoritmo

Ao se inicializar o filtro, primeiro deve-se definir a matriz de estados iniciais, representada por $\hat{\mathbf{x}}_0$, e também a matriz de covariância inicial, representada por \mathbf{P}_0 . Após a inicialização, a cada iteração, os valores iniciais para a próxima iteração são as matrizes de estados e covariâncias estimadas na etapa de *correção* da iteração anterior. Todas as notações utilizadas nas Equações (2.16) a (2.23) estão descritas na Tabela 3.

Predição

Estimativa de estados *a priori*.

$$\hat{x}_{k|k-1} = F_k \hat{x}_{k-1|k-1} + G_k u_k \quad (2.16)$$

Tabela 3 – Descrição de variáveis do espaço de estados em tempo contínuo.

Notação	Descrição
$\hat{\mathbf{x}}_0$	Estimação inicial de estado
$\hat{\mathbf{P}}_0$	Estimação inicial da covariância
$\hat{\mathbf{x}}_{k k-1}$	Vetor <i>a priori</i> de estados
$\hat{\mathbf{x}}_{k-1 k-1}$	Vetor de estados da iteração anterior.
\mathbf{u}_k	Vetor de entradas de controle
\mathbf{F}_k	Matriz de transição de estados
\mathbf{G}_k	Matriz de entradas de controle
\mathbf{H}_k	Matriz de observação
$\hat{\mathbf{P}}_{k k-1}$	Matriz <i>a priori</i> de covariância
$\hat{\mathbf{P}}_{k-1 k-1}$	Matriz de covariância da iteração anterior
\mathbf{Q}_k	Matriz de covariância do ruídos de processo
\mathbf{R}_k	Matriz de covariância do ruídos de medições
$\tilde{\mathbf{y}}_k$	Vetor de Inovação das medições
$\mathbf{P}_{k k-1}^{XY}$	Matriz de covariância cruzada
\mathbf{S}_k	Vetor Inovação da covariância
\mathbf{K}_k	Matriz de ganho ótimo de Kalman
$\hat{\mathbf{x}}_{k k}$	Vetor <i>a posteriori</i> de estados
$\hat{\mathbf{P}}_{k k}$	Matriz <i>a posteriori</i> de covariância

Estimativa da covariância *a priori*.

$$\hat{P}_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + Q_k \quad (2.17)$$

O subscrito $k|k-1$ é lido como "k', dado 'k' menos um" e tem a finalidade de demonstrar que a fase de *predição* faz uso do estado estimado corrigido da última iteração, para produzir a estimativa da iteração atual. Por conseguinte, embora sejam calculadas na iteração vigente, são chamadas de estimativas *a priori*, pois usam dados observacionais da etapa anterior. O subscrito $k-1|k-1$ é lido como " 'k' menos um, dado 'k' menos um" e possui a finalidade de sinalizar que essa grandeza foi calculada na iteração anterior, usando dados inerentes da iteração anterior, ou seja, são valores de estados e covariâncias corrigidos pela etapa de *correção* da iteração anterior.

Correção

Ao se concluir a etapa de *predição*, o objetivo é determinar o ganho de Kalman, e as seguintes etapas são necessárias.

Inovação de medições.

$$\tilde{y}_k = y_k - H_k \hat{x}_{k|k-1} \quad (2.18)$$

Covariância de cruzada.

$$P_{k|k-1}^{XY} = \hat{P}_{k|k-1} H_k^T \quad (2.19)$$

Inovação da covariância.

$$S_k = H_k \hat{P}_{k|k-1} H_k^T + R_k \quad (2.20)$$

Ganho ótimo de Kalman.

$$K_k = P_{k|k-1}^{XY} S_k^{-1} \quad (2.21)$$

Uma vez calculado, \mathbf{K}_k é utilizado para atualizar os valores de de estimação *a priori* a partir da inovação das medidas.

Estimação de estado *a posteriori*.

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k \tilde{y}_k \quad (2.22)$$

Estimação da covariância *a posteriori*.

$$\hat{P}_{k|k} = (I - K_k H_k) \hat{P}_{k|k-1} (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T \quad (2.23)$$

A Equação (2.23) é conhecida como equação de Joseph (BUCY; JOSEPH, 1969). Após a conclusão da etapa de *correção*, o ciclo recomeça, agora com a fase de *predição* usando dados produzidos pela etapa da iteração anterior de *correção*. A metodologia do Filtro de Kalman consiste em determinar um ganho ótimo de Kalman \mathbf{K} para minimizar o erro residual da *predição* dos estados.

2.1.2.4 Covariância

A variância é definida como o quadrado do desvio padrão e é denotada por σ^2 . A distribuição normal é uma curva em forma de sino que representa uma distribuição de probabilidade e é parametrizada pela média μ e pelo desvio padrão σ . A notação para uma variável aleatória α que segue uma distribuição normal é $\alpha \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$. À medida que aumenta o desvio padrão, a distribuição se torna mais dispersa.

Na análise de múltiplas dimensões, em vez de utilizar apenas a variância para descrever uma distribuição normal, é utilizada uma matriz de covariância. A matriz de covariância é uma matriz quadrada que descreve a relação entre as variáveis em um vetor. Se as distribuições das duas componentes do vetor forem independentes, a matriz de covariância será diagonal. No entanto, se houver uma dependência entre as componentes, haverá uma correlação entre as variáveis e a matriz de covariância conterá termos cruzados. É importante entender como esses erros estão relacionados para a utilização das matrizes de covariância no contexto do filtro de Kalman. O filtro de Kalman é um algoritmo que usa as matrizes de covariância para estimar o estado de um sistema dinâmico a partir de dados incompletos e ruidosos. As matrizes de covariância são usadas para modelar a incerteza nos dados e ajudar a fazer previsões precisas sobre o estado futuro do sistema.

Convencionalmente, a inicialização da matriz de covariância $\hat{\mathbf{P}}_0$ não é criteriosa na maioria das aplicações, visto que, após a primeira iteração, seu valor tende a ser corrigido para valores ótimos pelo próprio filtro de Kalman. Entretanto, as matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} possuem grande influência na qualidade da estimação de estados pelo filtro. Em geral, quanto maiores os valores atribuídos a \mathbf{Q} , maior será a incerteza a respeito da equação de espaço de estados \mathbf{x} e menor será a confiança do algoritmo nas equações. Portanto, atribui-se menor peso na etapa de *correção*, considerando-se de menor relevância para o cálculo dos estados estimados. Em contraste, quanto maiores os valores atribuídos a \mathbf{R} , maior será a incerteza das medições \mathbf{y} e menor será a confiança do algoritmo nas informações dos sensores. Portanto, atribui-se maior peso na etapa de *correção*, considerando-se de maior relevância para o cálculo dos estados estimados.

2.1.3 Filtro de Kalman Estendido

O Filtro de Kalman Estendido, ou *Extended Kalman Filter* (EKF), como sugere sua alcunha, é uma extensão do filtro de Kalman para sistemas não-lineares. O EKF possui uma definição mais generalizada que o próprio KF, permitindo que equações não-lineares de estados e de medidas possam ser representadas pela Equação (2.24), onde \mathbf{f} é a função vetorial não-linear de estados e \mathbf{h} é a função vetorial não-linear de observação. No entanto, devido à não-linearidade de \mathbf{f} e \mathbf{h} , não é possível relacioná-las diretamente às matrizes de covariância do algoritmo (DAUM, 2005). O EKF, por sua vez, baseia-se na expansão de Taylor para linearizar as funções não-lineares. Através da diferenciação parcial de \mathbf{f} e \mathbf{h} , são construídas as matrizes jacobianas que representam a linearização das funções em torno do ponto avaliado na iteração atual, conforme as Equações (2.25) e (2.26). As matrizes jacobianas são então usadas para relacionar as matrizes de covariância \mathbf{Q} e \mathbf{R} no algoritmo de forma sequencial.

$$\begin{aligned} x_k &= f(x_{k-1}, u_k) + w_k \\ y_k &= h(x_k) + v_k \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$F_k = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\hat{x}_{k-1|k-1}, u_k} \quad (2.25)$$

$$H_k = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\hat{x}_{k|k-1}} \quad (2.26)$$

Apesar de fundamentalmente se tratar do mesmo processo, o algoritmo para o EKF possui diversas formulações possíveis e podem utilizar diferentes técnicas matemáticas (DAUM, 2005). O EKF pode ser moldado para alcançar índices de desempenho customizados para a aplicação. Neste documento, será apresentado o algoritmo para o Continuous-Discrete Extended Kalman Filter (CD-EKF), que é uma implementação mais precisa e estável para a estimação de sistemas dinâmicos estocásticos (FROGERAIS;

BELLANGER; SENHADJI, 2012). O CD-EKF diferencia-se do EKF comum pelo fato de que a equação de transição de estados é contínua, enquanto as medidas são discretas. Essa abordagem híbrida permite que o CD-EKF seja usado em uma ampla variedade de aplicações práticas.

$$\begin{aligned}\dot{x}_t &= f(x_t, u_t) + w_t \\ y_k &= h(x_k) + v_k\end{aligned}\tag{2.27}$$

Dado que $w_t \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_t)$ e $v_k \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k)$. E que o vetor inicial de estados $\hat{\mathbf{x}}_0$ e a matriz inicial de covariância $\hat{\mathbf{P}}_0$ sejam estabelecidos.

Predição

Dado as Equações (2.28) e (2.29):

$$\hat{x}_{t_{k-1}} = \hat{x}_{k-1|k-1}\tag{2.28}$$

$$P_{t_{k-1}} = P_{k-1|k-1}\tag{2.29}$$

para um Δt constante, as Equações (2.30) e (2.32) podem ser integradas numericamente de t_{k-1} a t_k de forma a se determinar as Equações (2.33) e (2.34).

$$\dot{\hat{x}}_t = f(\hat{x}_t, u_t) + w_t\tag{2.30}$$

$$F_t = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\hat{x}_t, u_t}\tag{2.31}$$

$$\dot{P}_t = F_t P_t + P_t F_t^T + Q_t\tag{2.32}$$

$$\hat{x}_{k|k-1} = \hat{x}_{t_k}\tag{2.33}$$

$$P_{k|k-1} = P_{t_k}\tag{2.34}$$

O método de integração escolhido pode variar para cada aplicação, mas deve-se garantir que o método seja estável dadas as equações diferenciais do sistema. Posteriormente nesse trabalho será discutido métodos de integração empregados no CD-EKF.

Correção

A função h pode ser usada de forma direta para se determinar a inovação da medição, como demonstrado na Equação (2.35):

$$\tilde{y}_k = y_k - h(x_{k|k-1})\tag{2.35}$$

Ao substituir a Equação (2.33) na Equação (2.26) o algoritmo do CD-EKF desenvolve de forma análoga ao algoritmo KF.

Ao contrário do KF, de forma geral, o EKF não é um estimador ótimo devido à utilização de equações não-lineares. Embora seja uma extensão do KF, o EKF tem

limitações associadas às equações não-lineares, que podem levar a uma menor precisão na estimação dos estados do sistema. Além disso, devido à sua maior complexidade, o EKF é mais suscetível a erros de processo referentes à modelagem inadequada do sistema, o que pode levar à divergência da integração numérica de forma rápida. Portanto, é importante garantir que o modelo do sistema esteja bem definido e que as suposições subjacentes à modelagem sejam razoáveis antes de aplicar o EKF.

2.1.4 Outras formulações não lineares para o Filtro de Kalman

Uma alternativa mais comum ao EKF para sistemas não lineares é o Unscented Kalman Filter (UKF). A vantagem do UKF sobre o EKF é a sua não dependência da determinação de jacobianas, que, como discutido, pode favorecer erros de processo. O UKF utiliza técnicas de aproximação mais precisas para as equações não-lineares, através da Unscented Transformation (UT), que é um método de linearização estatística para equações não lineares. A UT permite que o UKF lide com não-linearidades de forma mais precisa e eficiente do que o EKF. De acordo com [Daum \(2005\)](#), ambos os métodos possuem custos computacionais equivalentes para equipamentos modernos. O desempenho do UKF em trabalhos como [Ito e Xiong \(2000\)](#) e [Crassidis e Markley \(2003\)](#) demonstrou-se superior ao EKF. Entretanto, é importante notar que não é possível concluir que o UKF possui desempenho superior ao EKF em todas as aplicações, pois, como discutido, o EKF possui uma grande capacidade de customização, mesmo que mais complexa. Dependendo da aplicação específica, o EKF pode ser melhor adaptado e produzir melhores resultados do que o UKF.

O Cubature Kalman Filter (CKF) baseia-se na técnica numérica de cubatura, um método aproximado que não requer a linearização do sistema. O CKF emprega uma abordagem de integração numérica para estimar a média e a covariância das variáveis de estado. Esse enfoque pode ser mais preciso em sistemas altamente não lineares do que a linearização de primeira ordem utilizada no filtro de Kalman estendido (EKF). Além disso, o CKF pode ser mais simples de implementar do que o EKF, uma vez que não necessita o cálculo de jacobianas, as quais podem ser difíceis de obter para sistemas complexos. Em suma, o filtro de Kalman com cubatura constitui um método numérico aproximado para lidar com a estimação do estado de sistemas não lineares que dispensa a linearização requerida pelo filtro de Kalman estendido, sendo, portanto, potencialmente mais preciso e menos trabalhoso de implementar, especialmente para sistemas de alta complexidade. Entretanto o CKF pode ser menos flexível que o EKF e apresentar maior custo computacional.

2.2 Modelagem da Máquina Síncrona

2.2.1 Gerador Síncrono

Seguindo os padrões estabelecidos em IEEE (2020), uma máquina síncrona pode ser modelada matematicamente através de parâmetros padrões obtidos por meio de ensaios.

Uma máquina síncrona pode ser modelada com diferentes níveis de complexidade. O modelo 3 para máquinas síncronas é uma solução de compromisso entre a complexidade e a qualidade do modelo, e será utilizado neste projeto para determinar as equações diferenciais que descrevem a dinâmica do gerador síncrono. Um diagrama de blocos representativo do modelo 3 está apresentado na Figura 2.

Como a ordem de grandeza de r_a é desprezível em relação às demais impedâncias da máquina (GHAHREMANI; KAMWA, 2011), ela pode ser desprezada, permitindo descrever as equações algébricas:

$$E_d = V_t \sin(\delta), \tag{2.36}$$

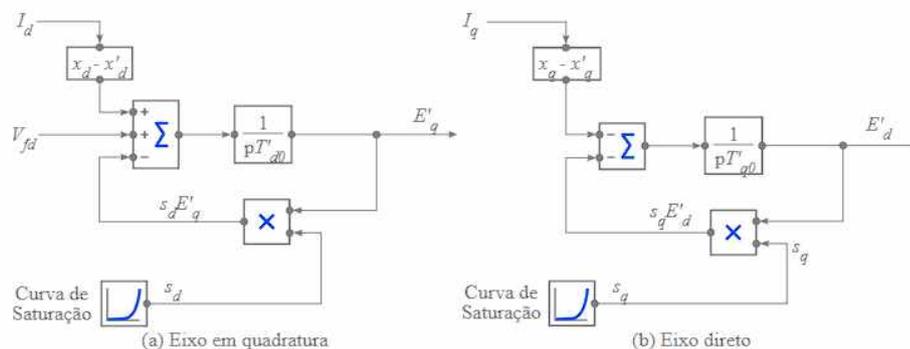
$$E_q = V_t \cos(\delta), \tag{2.37}$$

$$P_e = V_d I_d + V_q I_q, \text{ e} \tag{2.38}$$

$$Q_e = -V_d I_q + V_q I_d; \tag{2.39}$$

que ajudam a determinar o comportamento da máquina síncrona (ZHAO; NETTO; MILI, 2017).

Figura 2 – Diagrama de blocos representativo do modelo 3 para maquinas síncronas.



Fonte: Adaptado de (OLIVEIRA, 2020a).

O gerador síncrono pode ter seu comportamento descrito por duas equações

diferenciais:

$$\frac{dE'_q}{dt} = \frac{1}{T'_{d0}} (-E_q + E_{fd} - (X_d - X'_d)I_d) \quad (2.40)$$

$$\frac{dE'_d}{dt} = \frac{1}{T'_{q0}} (-E_d - (X_q - X'_q)I_q) \quad (2.41)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega - \omega_s \quad (2.42)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega_s}{2H} (P_m - D(\omega - \omega_s) - Pe) \quad (2.43)$$

$$I_d = \frac{E'_q - E_q}{X'_d} \quad (2.44)$$

$$I_q = \frac{E_d - E'_d}{X'_q} \quad (2.45)$$

sendo que as Equações (2.40) e (2.41) são de origem elétrica, as Equações (2.43) e (2.42) são de origem mecânica e as Equações (2.44) e (2.45) são algébricas (OLIVEIRA, 2020a).

A descrição das variáveis pode ser encontrada na Tabela 4. Para mais detalhamento a respeito da validade teórica do modelo consultar (OLIVEIRA, 2020a) e (MILANO, 2010).

Tabela 4 – Descrição de variáveis utilizadas na modelagem da maquina síncrona.

Notação	Descrição
V_t	Tensão terminal na maquina síncrona
E_{fd}	Tensão de campo
E_d	Tensão síncrona de eixo direto
E_q	Tensão síncrona de eixo em quadratura
E'_d	Tensão transitória de eixo direto
E'_q	Tensão transitória de eixo em quadratura
I_d	Corrente síncrona de eixo direto
I_q	Corrente síncrona de eixo em quadratura
X_d	Reatância de eixo direto
X_q	Reatância de eixo em quadratura
X'_q	Reatância transitória de eixo em quadratura
T'_{d0}	Constante de tempo transitória de eixo direto de circuito aberto
T'_{q0}	Constante de tempo transitória de eixo em quadratura de circuito aberto
P_e	Potência elétrica ativa de saída
Q_e	Potência elétrica reativa de saída
P_m	Potência mecânica
D	Fator de Amortecimento
H	Constante de inercia
δ	Ângulo de potência ou ângulo do rotor
ω	Velocidade do rotor
ω_s	Velocidade síncrona do rotor

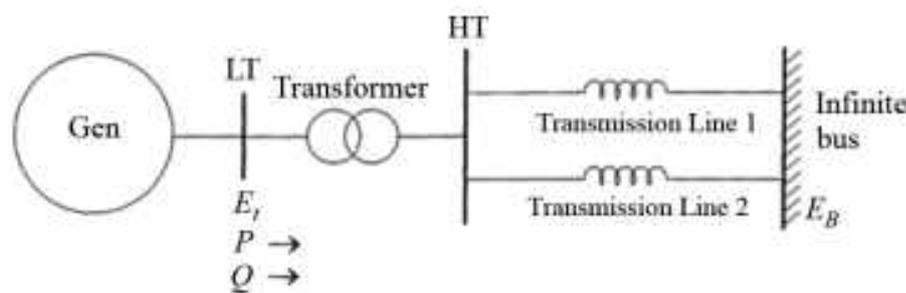
2.2.2 Single Machine Infinite Bus - SMIB

O modelo de máquina única conectada a barramento infinito (SMIB, na sigla em inglês), utilizado em frequência nos estudos dos sistemas elétricos de potência para analisar o comportamento de máquinas síncronas acopladas à rede, representa um arranjo simplificado. Nesta configuração, a máquina síncrona conecta-se a um barramento com tensão constante, independente das variações de carga na rede. Além disso, pressupõe-se que a máquina síncrona está em sincronismo com o barramento, ou seja, a frequência da tensão gerada pela máquina síncrona é idêntica à frequência do barramento.

Um dos benefícios principais do modelo SMIB está na sua capacidade para realizar análises simplificadas do comportamento da máquina síncrona sob diversas condições operacionais, sem necessariamente contemplar detalhes mais complexos como a impedância da rede, a presença de outros geradores e cargas, dentre outros fatores. Assim, possíveis problemas podem ser identificados prontamente e soluções preventivas podem ser implementadas.

Outro aspecto relevante do modelo SMIB é sua possibilidade de prever o comportamento da máquina síncrona em situações críticas, como variações na carga da rede ou falhas em outros geradores ou linhas de transmissão. É possível analisar como a máquina síncrona responde a uma rápida queda de carga na rede elétrica ou como ela se comporta em caso de perda de sincronismo com o barramento. Estas informações são fundamentais para garantir a estabilidade e confiabilidade do sistema elétrico. A Figura 3 demonstra o esquemático padrão para um modelo SMIB.

Figura 3 – Máquina Síncrona conectada ao barramento infinito por duas linhas de transmissão.



Fonte: Retirada de (GHAHREMANI; KAMWA, 2011).

3 Metodologia

Neste capítulo, será descrita a abordagem metodológica utilizada para conduzir o trabalho. O objetivo deste estudo consistiu em realizar a estimação dinâmica de estados (DSE) por meio de técnicas de estimação derivadas do Filtro de Kalman. Para tal, foi proposto um arranjo de um único gerador-barramento infinito (SMIB), denominado em inglês como *Single Machine Infinite Bus*. Através de simulações computadorizadas, foi possível determinar o comportamento dinâmico do sistema e, com base nesses resultados, elaborou-se um algoritmo capaz de estimar, dentre outras variáveis de estados, o ângulo de potência δ do sistema.

3.1 Simulação dinâmica do sistema

Nas primeiras revisões deste trabalho, a proposta consistia na simulação em tempo real da dinâmica do sistema elétrico e da estimação dinâmica de estados (DSE), de forma que as estimativas para os estados fossem calculadas simultaneamente à determinação da dinâmica do sistema elétrico. Para isso, foi pensado em um arranjo em SMIB (Single Machine Infinite Bus) na ferramenta computacional *Simulink*[®] (MATHWORKS, 2022b), na qual foi utilizado o bloco para máquinas síncronas de modelo padrão em p.u. da biblioteca do Simscape Electrical (MATHWORKS, 2023). Entretanto, após constatar a falta de documentação sobre o funcionamento do bloco e sua modelagem matemática para máquinas síncronas, o seguimento deste projeto em *Simulink*[®] foi descontinuado.

Com a necessidade de maior confiabilidade para a simulação dinâmica do sistema elétrico, optou-se pelo uso do software PSP-UFU (OLIVEIRA, 2020b), uma ferramenta robusta, de código aberto e com excelente documentação sobre seus mecanismos de funcionamento e modelagem de máquinas síncronas.

3.1.1 Simulador PSP-UFU

A Plataforma de Sistemas de Potência da Universidade Federal de Uberlândia (PSP-UFU) é um programa de computador que apresenta diversas funcionalidades para análise de sistemas elétricos de potência. Esse software é livre e de código aberto, permitindo sua utilização em diferentes plataformas e em diferentes idiomas. Ademais, destaca-se a presença de uma interface gráfica de usuário (GUI) avançada e de ferramentas de desenho assistido por computador (CAD), o que torna o PSP-UFU uma ferramenta de grande utilidade para estudos e projetos na área de sistemas elétricos de potência (OLIVEIRA, 2023).

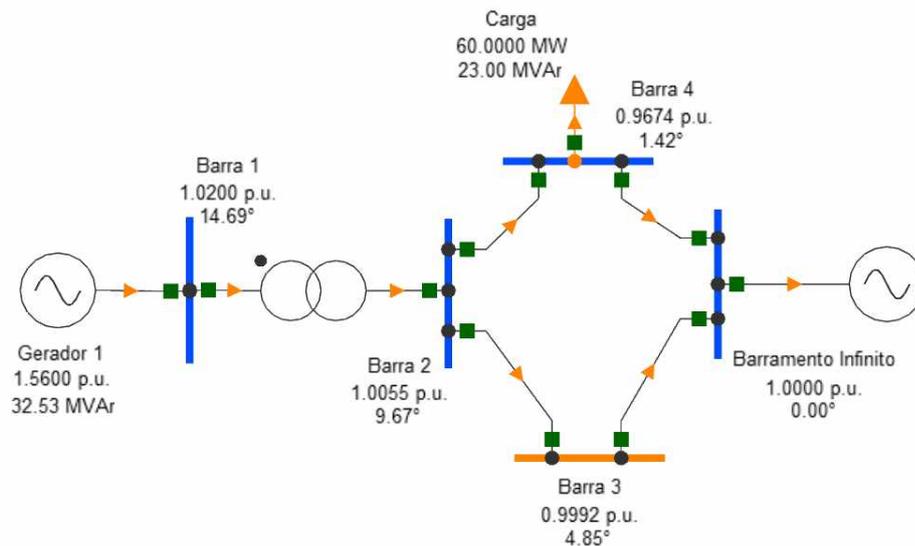
3.1.1.1 Diagrama Esquemático

No decorrer da pesquisa, foram propostos e simulados diversos diagramas esquemáticos para representação do sistema elétrico de potência em questão. Contudo, apenas os diagramas que foram capazes de sobreviver aos testes de estabilidade e que melhor representaram o problema proposto no projeto serão descritos a seguir.

- a. *Caso 1: Análise de estabilidade em um modelo SMIB com moderado grau de perturbações.*

No primeiro caso apresentado, o sistema elétrico de potência é representado pela Figura 4 a qual contempla uma carga conectada à *barra 4* com potência ativa e reativa de 60MW e 23Mvar , respectivamente. Em um determinado instante, a carga conectada à *barra 4* é desconectada do sistema, gerando uma perturbação à estabilidade do sistema. É importante destacar que a máquina possui parâmetros funcionais específicos e que as impedâncias do transformador e da linha de transmissão devem ser consideradas. Tais informações podem ser encontradas na Tabela 5.

Figura 4 – Diagrama esquemático do Caso 1, desenhado e simulado via PSP-UFU.

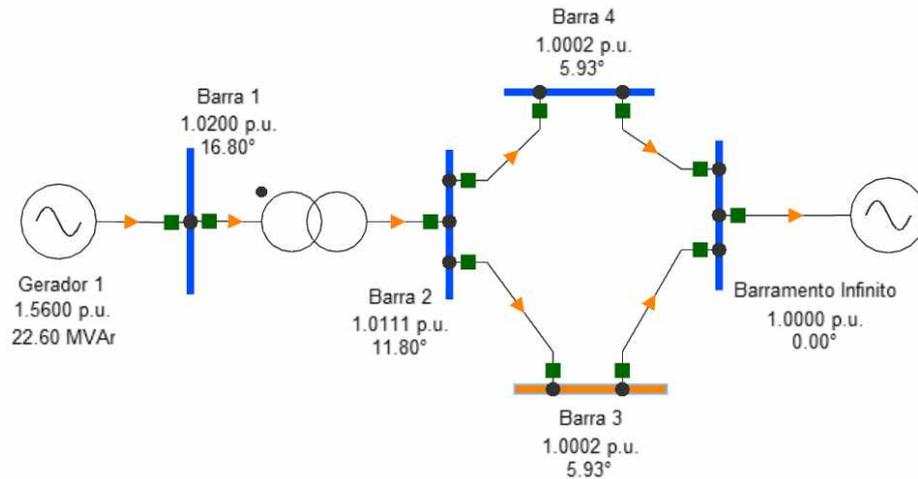


Fonte: Autoria Própria (2023).

- b. *Caso 2: Análise de estabilidade em um modelo SMIB com elevado grau de perturbações.*

No segundo caso apresentado, o sistema elétrico de potência é representado pela Figura 5, e submetido a uma falta trifásica simétrica na *barra 3*, com duração de 0.1 segundo. Mais informações a respeito dos parâmetros da máquina e impedâncias podem ser encontradas na Tabela 5.

Figura 5 – Diagrama esquemático do Caso 2, desenhado e simulado via PSP-UFU.



Fonte: Autoria Própria (2023).

Em ambos diagramas, a *Barra 1* é um barra PV, onde a sua potencia e tensão é fixada. As *Barras 2, 3 e 4*, são barras PQ, onde possuem demanda de potencia ativa e reativa constante. E a *Barra 5* é a barra de referencia, ou *slack*, e representa o barramento infinito. A modelagem para o controle de excitação e controle de velocidade da turbina não faz parte do escopo desse trabalho, apesar de que é realizado via PSP-UFU. Fazendo que o E_{fd} e P_m sejam tratados como entradas para o sistema de estimação de estados a seguir e inicializados pelo estudo de fluxo de carga realizado pelo PSP-UFU.

Tabela 5 – SMIB - Parâmetros de simulação.

Parâmetro	Descrição	Valor
D	Fator de Amortecimento	0.05 p.u.
H	Constante de inercia	5 s
V_t	Tensão nominal do Gerador 1.	1.02 p.u.
f_0	Frequência base da rede	60hz
ω_0	ω base da rede	$2\pi f$ rad/s
R_a	Resistência de armadura	0
X_d	Reatância de eixo direto	2.15 p.u.
X_q	Reatância de eixo em quadratura	1.365 p.u.
X'_q	Reatância transitória de eixo em quadratura	0.37 p.u.
T'_{d0}	Constante de tempo transitória de eixo direto de circuito aberto	0.131 s
T'_{q0}	Constante de tempo transitória de eixo em quadratura de circuito aberto	0.01 s
Z_L	Impedância interna do transformador	0.0576 p.u.
RT	Relação de transformação do transformador	13.8kV / 230kV
Z_L	Impedância interna do transformador	0.0576 p.u.
$Z_{2,3}$	Impedância da LT entre as Barras 2 e Barras 3	0.01 + j0.1 p.u.
$Z_{2,4}$	Impedância da LT entre as Barras 2 e Barras 4	0.02 + j0.2 p.u.
$Z_{3,5}$	Impedância da LT entre as Barras 3 e Barras 5	0.01 + j0.1 p.u.
$Z_{4,5}$	Impedância da LT entre as Barras 4 e Barras 5	0.02 + j0.2 p.u.
R_f	Resistência de curto-circuito trifásico Barra 3	0.001 p.u.

Fonte: Adaptado de Kooshkbaghi, Marquez e Xu (2020)

3.2 Estimação dinâmica de estados

Após a conclusão das simulações dinâmicas, seus resultados foram exportados para um arquivo CSV (*comma-separated values*), contendo todos os dados simulados para um estudo de estabilidade no PSP-UFU.

Para a realização da estimação proposta, foi utilizada a técnica do Filtro de Kalman Estendido Contínuo-Discreto, ou *Continuous-Discrete EKF* (CD-EKF), discutido no Capítulo 2. Utilizando o vetor de estados, o vetor de entradas de controle e o vetor de medidas, conforme apresentado na Subseção 2.1.3, foram definidos parâmetros baseados nas equações dinâmicas da modelagem matemática da máquina síncrona, Equações (2.40 - 2.45), e nos dados fornecidos pelo PSP-UFU. Assim, considerando o modelo dinâmico da máquina, o problema de DSE pode ser resumido em estimar os estados para o seguinte sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_2 - \omega_s \\ \frac{\omega_0}{2H} \left[u_1 - D_a(x_2 - \omega_r) - (E_d I_d + E_q I_q) \right] \\ \frac{1}{T'_{d0}} \left[u_2 - x_3 - (X_d - X'_d) I_d \right] \\ \frac{1}{T'_{q0}} \left[-x_4 - (X_q - X'_q) I_q \right] \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

onde o vetor de medidas e de entradas são, respectivamente:

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [\delta \ \omega \ E'_q \ E'_d]^T \quad (3.2)$$

$$\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T = [P_m \ E_{fd} \ V_t]^T \quad (3.3)$$

o vetor de medidas é dado por:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_e \\ Q_e \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_d I_d + E_q I_q \\ -E_d I_q + E_q I_d \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

sendo que:

$$E_d = u_3 \sin(x_1) \quad (3.5)$$

$$E_q = u_3 \cos(x_1) \quad (3.6)$$

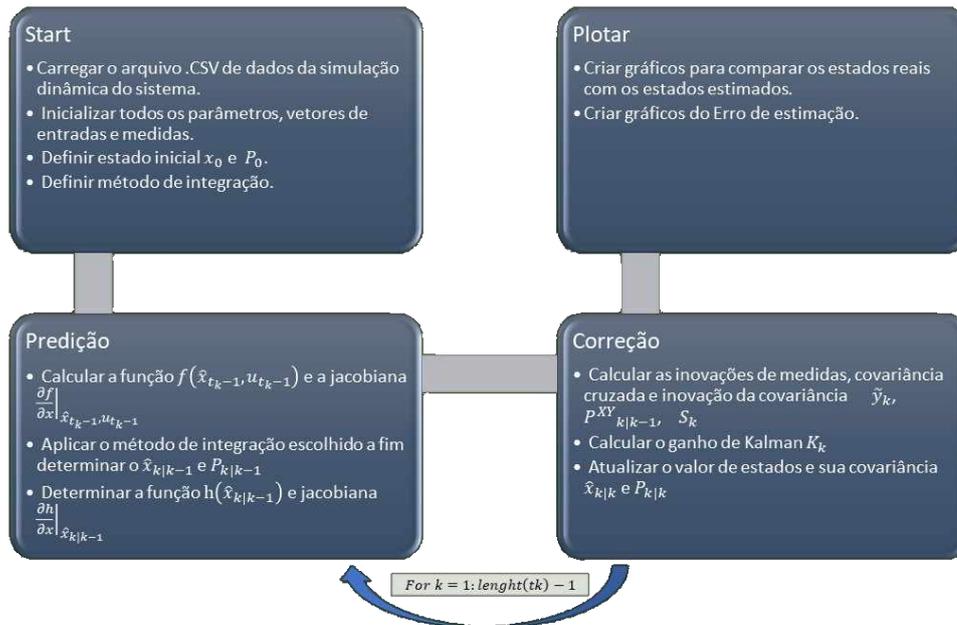
$$I_d = \frac{x_3 - E_q}{X'_d} \quad (3.7)$$

$$I_q = \frac{x_4 - E'_d}{X'_q} \quad (3.8)$$

utilizando a formulação do Filtro de Kalman Estendido.

Após o estabelecimento dos vetores do filtro de Kalman, foi desenvolvido um programa na ferramenta computacional *Matlab* (MATHWORKS, 2022a), capaz de carregar o arquivo da simulação dinâmica e utilizar seus dados para realizar a estimação de estados do modelo, por meio de um algoritmo de CD-EKF. O passo a passo do programa é descrito no 2 e pela Figura 6 e o método de integração utilizado foi o Runge-Kutta de 4° Ordem.

Figura 6 – Fluxograma de algoritmo implementado no MatLab



Fonte: Autoria Própria (2023).

4 Resultados e discussões

Este capítulo inicia com a Seção 4.1 detalhando o processo de simulação do sistema elétrico realizado com o software PSP-UFU, apresenta a estimação de estados obtida com a aplicação do Filtro de Kalman Estendido na Seção 4.2, discute os resultados gerais obtidos com todo o processo na Seção 4.3 e finaliza apresentado alguns apontamentos sobre o procedimento de sintonia do EKF na Seção 4.4, baseados na experiência obtida.

4.1 Simulação com o PSP-UFU

4.1.1 Parâmetros de simulação

A potência base escolhida foi de **100 MVA** e a frequência base de **60 Hz**. Para o cálculo do fluxo de potência, foi escolhido o método numérico de *Gauss-Seidel* (OLIVEIRA, 2020a). Para o estudo de estabilidade, foi definido um *time-step* de 1×10^{-3} s, com um tempo de simulação de **10 s**.

4.1.2 Caso 1: Análise de estabilidade em um modelo SMIB com moderado grau de perturbações.

4.1.2.1 Fluxo de potencia.

A etapa de cálculo do fluxo de potência é essencial para o estudo de estabilidade, pois é por meio desse cálculo que o sistema é inicializado e o seu comportamento em regime permanente é definido. O fluxo de potência é representado no próprio diagrama, conforme apresentado na Figura 4. Os resultados numéricos para a transferência de potência, gerados pelo PSP-UFU, são apresentados na Tabela 6.

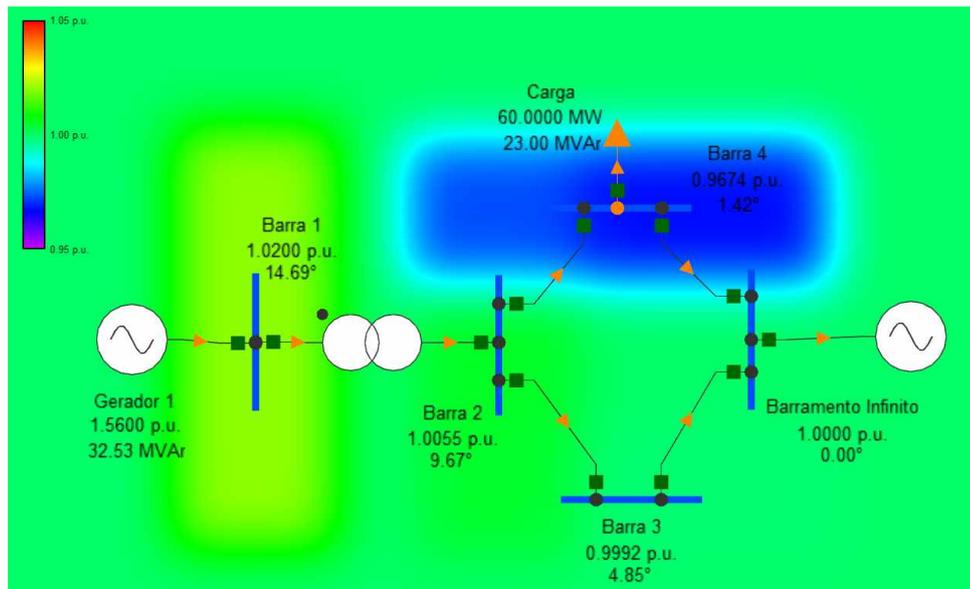
Tabela 6 – Dados do Fluxo de Potencia no Caso 1

Tipo	Nome	De	Para	Potência Ativa (MW)	Potência Reativa (MVar)	Online
LT	Linha 2	Barra 3	Barra 2	-83.8622	5.6297	Yes
LT	Linha 2	Barra 2	Barra 3	84.5698	1.4464	Yes
LT	Linha 3	Barra 3	Bar. Inf	83.8622	-5.6297	Yes
LT	Linha 3	Bar. Inf	Barra 3	-83.1546	12.7059	Yes
LT	Linha 1	Barra 2	Barra 4	71.4299	17.0225	Yes
LT	Linha 1	Barra 4	Barra 2	-70.3633	-6.3561	Yes
LT	Linha 1	Bar. Inf	Barra 4	-10.2811	17.4654	Yes
LT	Linha 1	Barra 4	Bar. Inf	10.3633	-16.6439	Yes
Trafo	Trafo 1	Barra 1	Barra 2	156.0000	32.5278	Yes
Trafo	Trafo 1	Barra 2	Barra 1	-156.0000	-18.4688	Yes

4.1.2.2 HeatMap de Tensão

Uma ferramenta interessante oferecida pelo PSP-UFU é o *Heatmap*, também conhecido como mapa de calor de tensão. Basicamente, consiste em uma representação gráfica das diferentes tensões em p.u. presentes no diagrama após o cálculo do fluxo de potência.

Figura 7 – Heatmap de tensão para o diagrama esquemático de Caso 1



Fonte: Autoria Própria, criado através do software PSP-UFU.

Conforme apresentado na Figura 7, a queda de tensão é mais acentuada na região ao redor da carga conectada à *Barra 4*, onde há um fluxo de potência mais intenso.

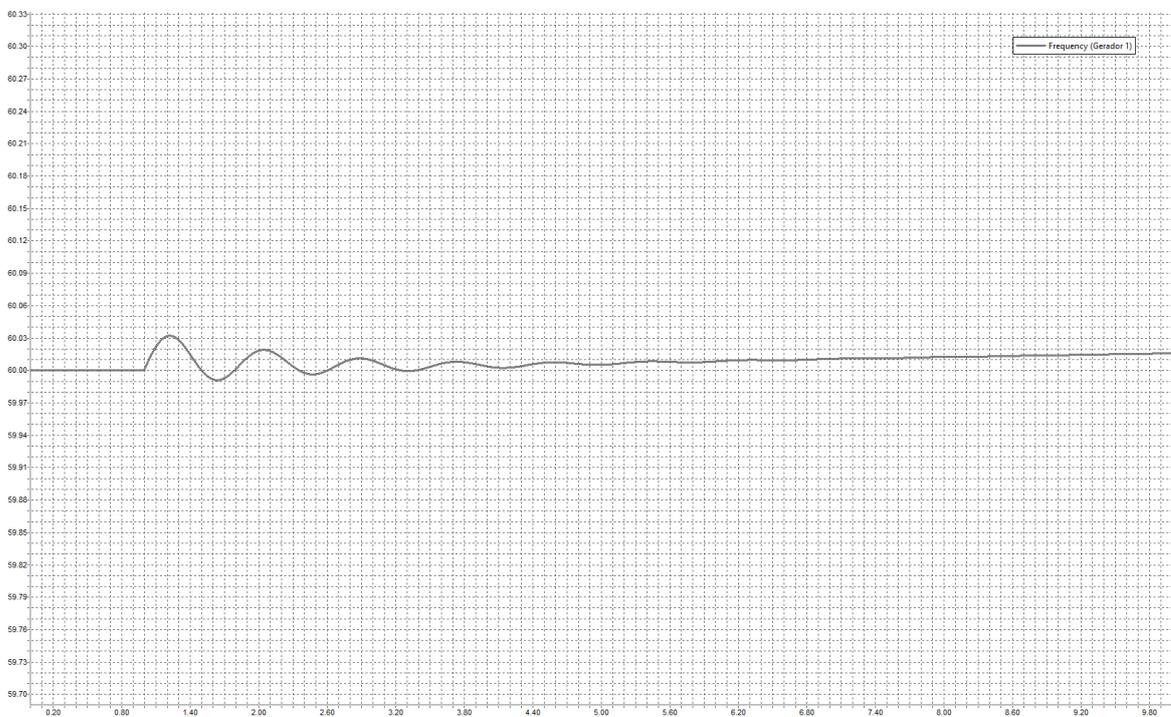
4.1.3 Estudo de Estabilidade

Após a definição dos objetos de estudo descritos no Capítulo 3, o diagrama esquemático apresentado na Figura 4 foi elaborado e construído no Programa PSP-UFU. Os parâmetros de simulação foram ajustados e o cálculo do fluxo de potência foi concluído. Em seguida, o estudo de estabilidade foi iniciado. O Programa levou cerca de 20s para concluir a simulação e os resultados são apresentados nas figuras a seguir.

No Caso 1, no instante $t = 1s$, a carga representativa conectada à *Barra 4* foi desconectada de forma súbita, gerando uma perturbação na estabilidade do sistema.

Figura 8 – Gráfico do ângulo do rotor δ do gerador síncrono do sistema de Caso 1.

Fonte: Autoria Própria, criado através do software PSP-UFU .

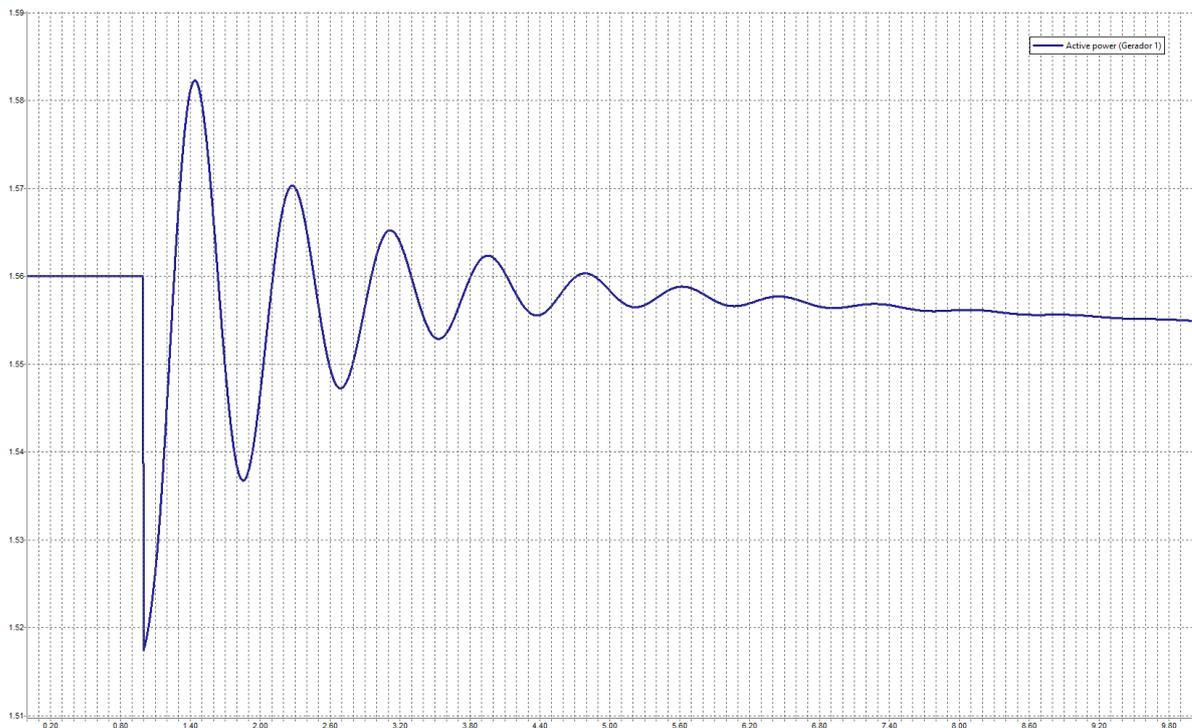
Figura 9 – Gráfico da frequência f no gerador síncrono do sistema de Caso 1.

Fonte: Autoria Própria, criado através do software PSP-UFU .

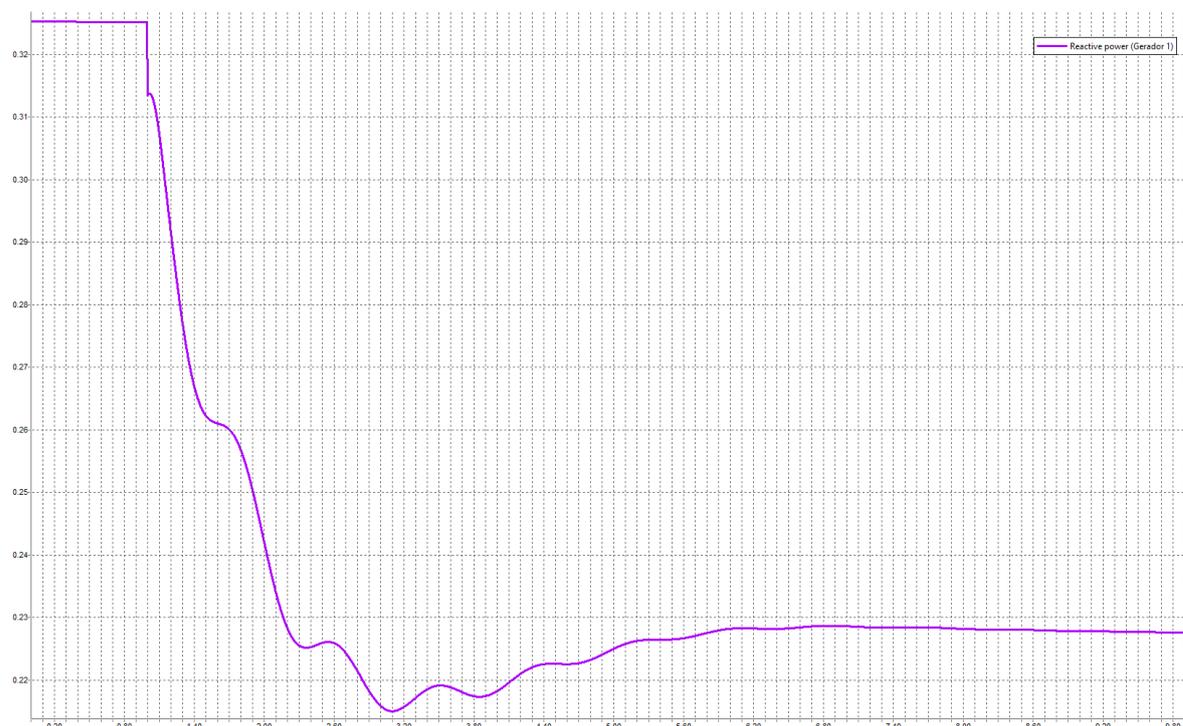
Nas Figuras 8 e 9, pode-se observar que após o instante $t = 1$ s, a carga foi desconectada da *Barra 4*, gerando uma perturbação no ângulo δ , enquanto a frequência do

gerador sofreu uma alteração mínima. Vale ressaltar que embora o PSP-UFU não forneça a velocidade do rotor da máquina de forma direta, ela pode ser encontrada por meio de uma combinação linear da própria frequência do gerador, onde $\omega = 2\pi f$. Ambos os dados serão tratados como estados do sistema e serão estimados e comparados na Seção 4.2.

Figura 10 – Gráfico da potência ativa P_e no gerador síncrono do sistema de Caso 1.



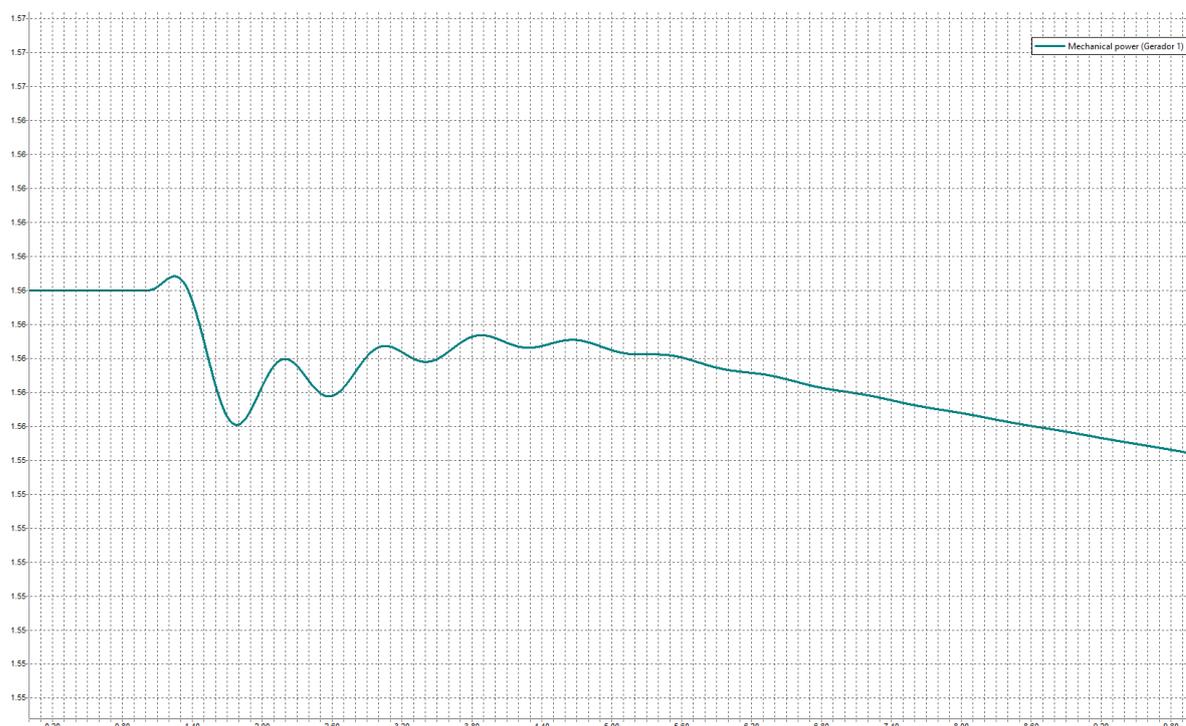
Fonte: Autoria Própria, criado através do software PSP-UFU .

Figura 11 – Gráfico da potência reativa Q_e no gerador síncrono do sistema de Caso 1.

Fonte: Autoria Própria, criado através do software PSP-UFU .

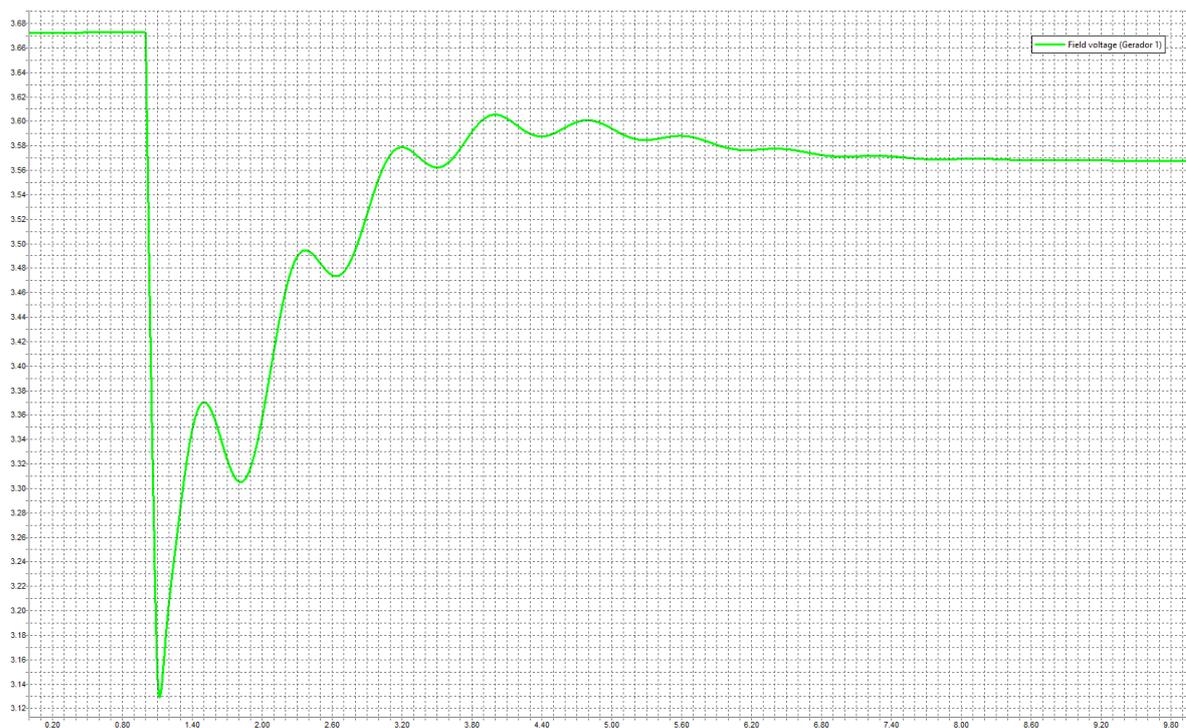
Nas Figuras 10 e 11, após a perturbação, a potência ativa oscilou até se estabelecer em seu novo estado de equilíbrio. A oscilação ocorreu devido ao efeito transitório que afetou a tensão de terminal da máquina e, por consequência, a corrente de terminal. Já a potência reativa teve parte do seu efeito oscilatório mascarado pela queda brusca de seu valor, visto que a carga desconectada é uma parte substancial da potência reativa total do sistema. Ambos os valores serão considerados medições do sistema e serão estimados e comparados na Seção 4.2.

Figura 12 – Gráfico da potência mecânica P_m no gerador síncrono do sistema de Caso 1.



Fonte: Autoria Própria, criado através do software PSP-UFU .

Figura 13 – Gráfico da tensão de campo ou excitação E_{fd} no gerador síncrono do sistema de Caso 1.



Fonte: Autoria Própria, criado através do software PSP-UFU .

Figura 14 – Gráfico da tensão de terminal V_t no gerador síncrono do sistema de Caso 1.

Fonte: Autoria Própria, criado através do software PSP-UFU .

Nas Figuras 12, 13 e 14, pode-se observar como os efeitos do controle de excitação e regulador da velocidade atuam sobre a tensão de excitação E_{fd} e a potência mecânica P_m , respectivamente, na tentativa de estabilizar o sistema após a perturbação, em um tempo mínimo. Já a tensão terminal V_t teve uma elevação acentuada no instante da perturbação e, em seguida, oscilou para uma nova posição de equilíbrio do sistema. Todos os três valores serão considerados entradas de controle do sistema e serão estimados e comparados na Seção 4.2.

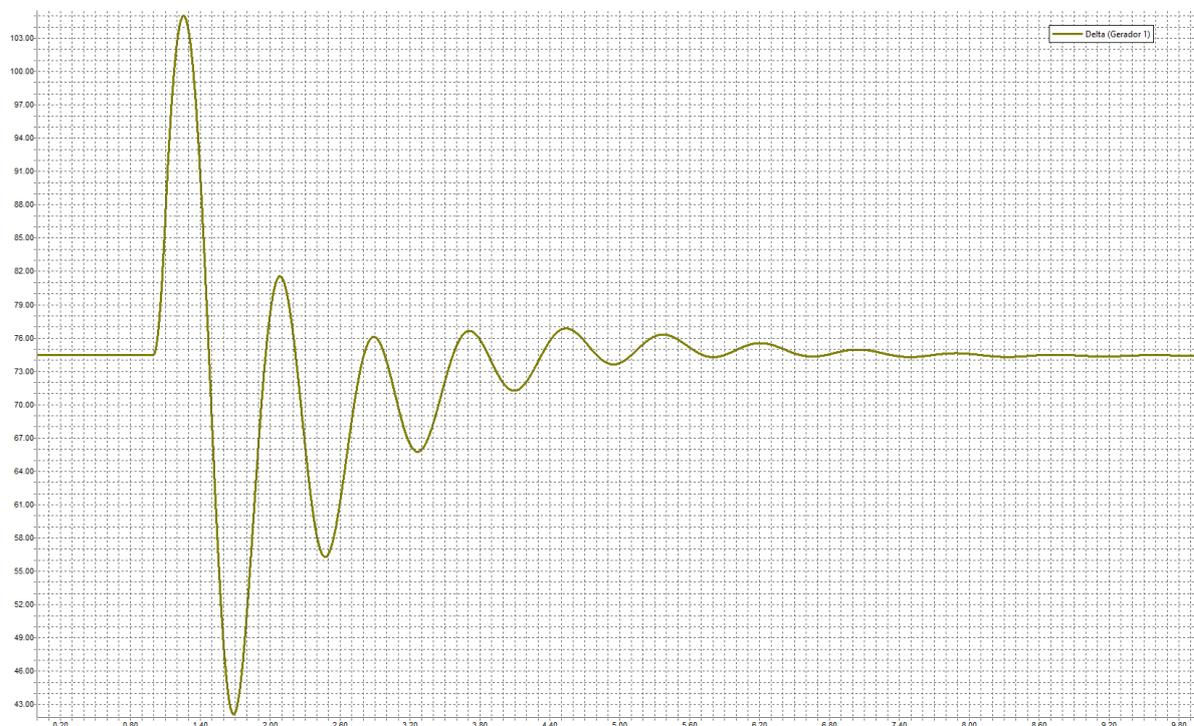
4.1.4 Caso 2: Análise de estabilidade em um modelo SMIB com elevado grau de perturbações.

4.1.4.1 Fluxo de potencia.

O fluxo de potência é representado no próprio diagrama, conforme apresentado na Figura 5. Os resultados numéricos para a transferência de potência, gerados pelo PSP-UFU, são apresentados na Tabela 7.

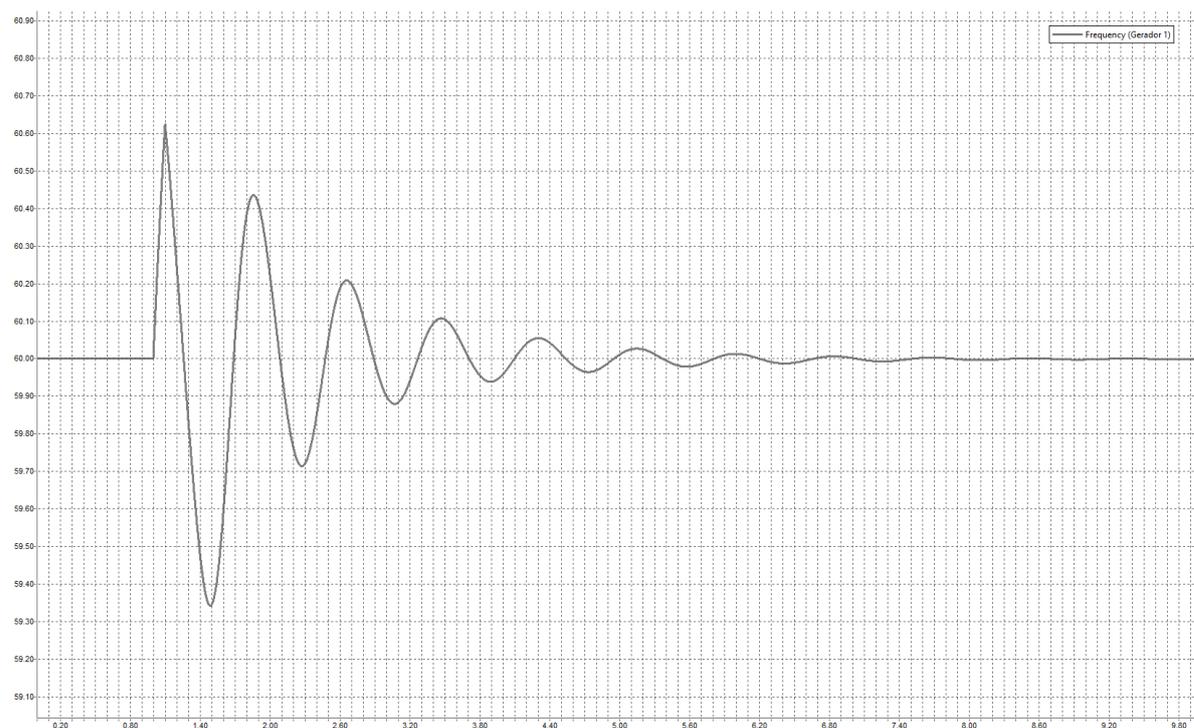
0.1s. Após o instante $t = 1.1s$ a falta é solucionada e o sistema pode oscilar de volta a estabilidade.

Figura 16 – Gráfico do ângulo do rotor δ do gerador síncrono do sistema de Caso 2.



Fonte: Autoria Própria, criado através do software PSP-UFU .

Figura 17 – Gráfico da frequência f no gerador síncrono do sistema de Caso 2.



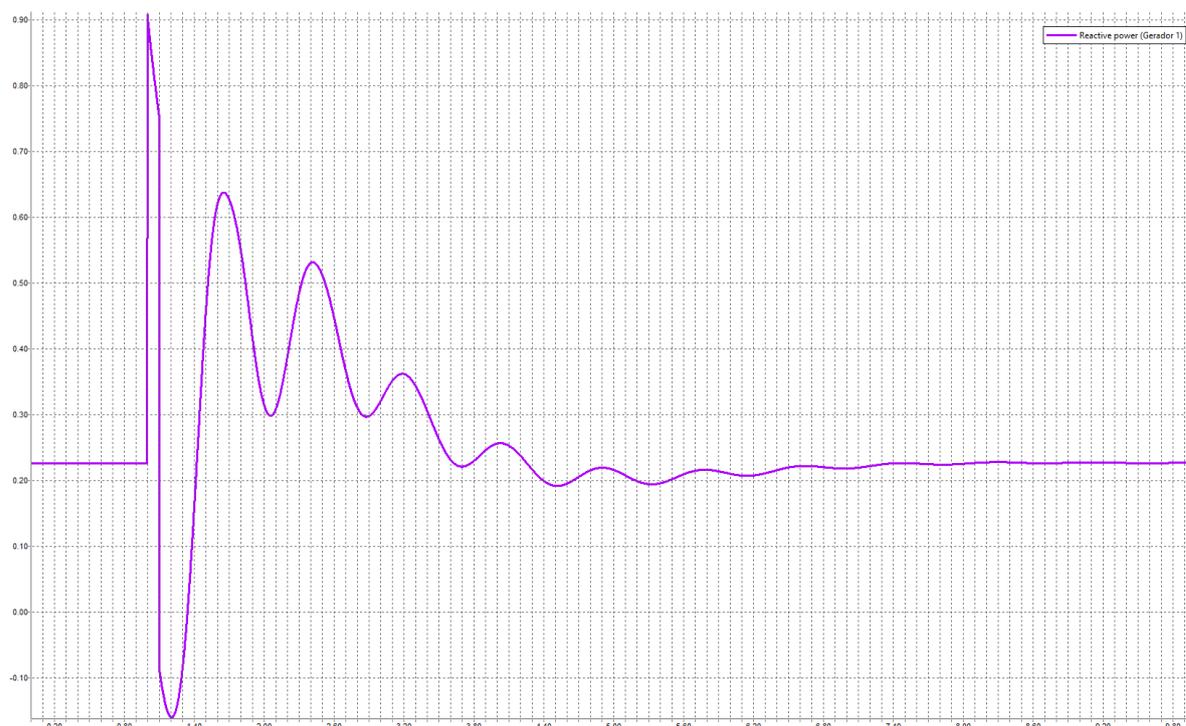
Fonte: Autoria Própria, criado através do software PSP-UFU .

Analisando as Figuras 16 e 17, pode-se observar que após o instante $t = 1\text{s}$, a falta trifásica causa grande perturbação no ângulo δ , a fazendo oscilar, tendo seu pico superior em 103° e o pico inferior em 43° . No Caso 2, pode-se notar uma maior expressividade na oscilação para frequência de gerador f , embora ela continue bem instável. Ambos os dados serão tratados como estados do sistema e serão estimados e comparados na Seção 4.2.

Figura 18 – Gráfico da potência ativa P_e no gerador síncrono do sistema de Caso 2.



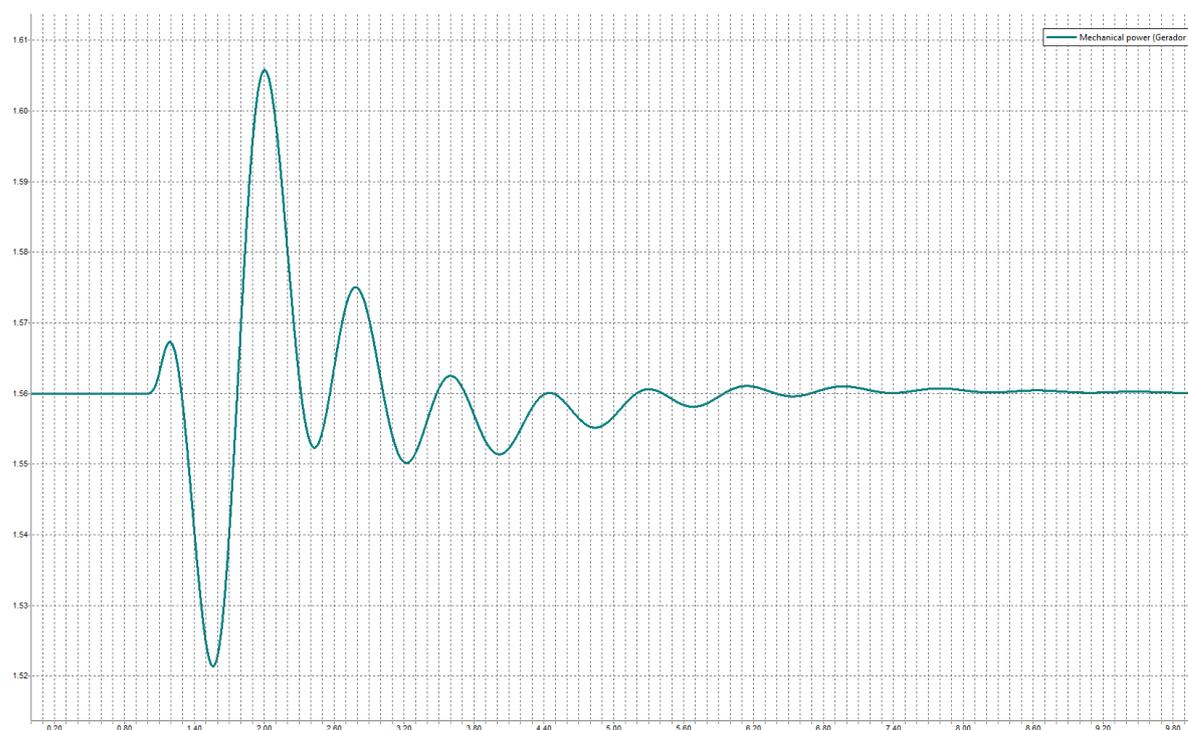
Fonte: Autoria Própria, criado através do software PSP-UFU .

Figura 19 – Gráfico da potência reativa Q_e no gerador síncrono do sistema de Caso 2.

Fonte: Autoria Própria, criado através do software PSP-UFU .

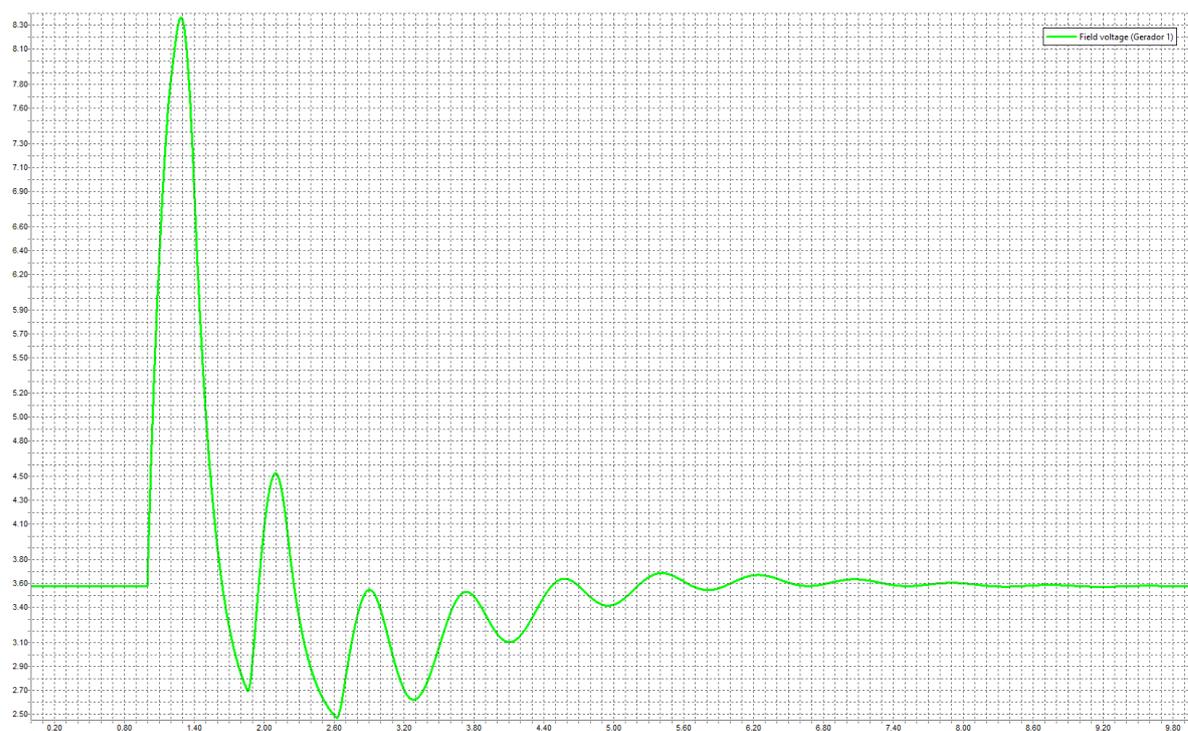
Analisando as Figuras 18 e 19, após a perturbação, a potência ativa e reativa oscilou de forma bem mais significativa, mas diferente do Caso 1 se estabeleceu no ponto de equilíbrio anterior a perturbação. Pois, após a falta se cessar, o sistema do Caso 2 não é alterado de nenhuma maneira, e portanto o fluxo de potencia para a situação é a mesma que antes da falta, voltando a seu estado de regime permanente. Ambos os valores serão considerados medições do sistema e serão estimados e comparados na Seção 4.2.

Figura 20 – Gráfico da potência mecânica P_m no gerador síncrono do sistema de Caso 2.

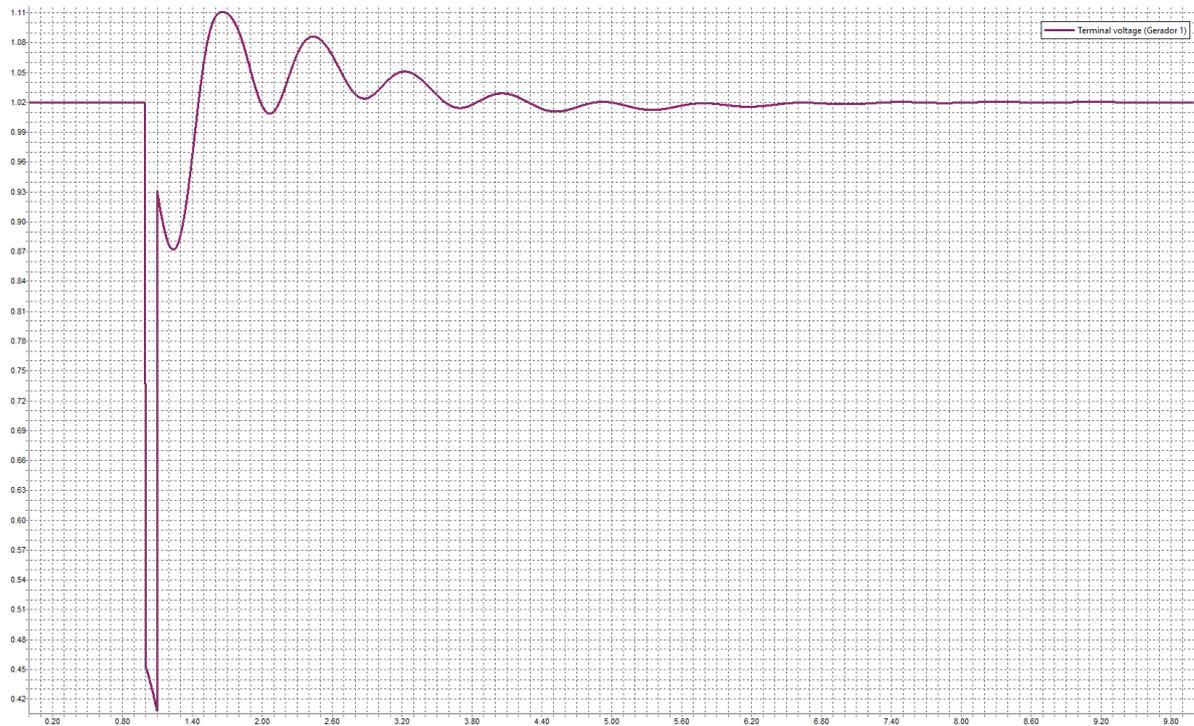


Fonte: Autoria Própria, criado através do software PSP-UFU .

Figura 21 – Gráfico da tensão de campo ou excitação E_{fd} no gerador síncrono do sistema de Caso 2.



Fonte: Autoria Própria, criado através do software PSP-UFU .

Figura 22 – Gráfico da tensão de terminal V_t no gerador síncrono do sistema de Caso 2.

Fonte: Autoria Própria, criado através do software PSP-UFU .

Analisando as figuras 20, 21 e 22, pode-se observar como os efeitos do controle de excitação e regulador da velocidade, da mesma forma que no Caso 1, atuam sobre a tensão de excitação E_{fd} e a potência mecânica P_m , de forma a amortecer a oscilação das outras grandezas da máquina, impedindo que sistema tenda a instabilidade e possa cessar o efeito transitório mais rápido possível. Já a tensão terminal V_t teve uma queda acentuada no instante da perturbação e, em seguida, oscilou de volta para a posição de equilíbrio anterior. Como não há alteração no sistema após o cessar da falta, os valores podem retornar para posição em regime permanente anterior a falta. Todos os três valores serão considerados entradas de controle do sistema e serão estimados e comparados na Seção 4.2.

4.2 Estimação dinâmica de Estados

Utilizando o sistema de equações desenvolvido na Seção 3.2 e os dados de simulação apresentados na Seção 4.1, veja o desenvolvimento do sistema de estimação utilizando o EKF.

4.2.1 Parâmetros de simulação

Além dos parâmetros que representam a dinâmica do sistema previstos na Tabela 5, devem ser ajustados os valores inicializados do vetor de estados e da matriz de covariância, $\hat{\mathbf{x}}_0$ e $\hat{\mathbf{P}}_0$. O vetor de estados foi ajustado para os valores de estados no instante $\mathbf{t} = 0\mathbf{s}$ obtidos do PSP-UFU, enquanto que a matriz de covariância foi ajustada de acordo com a Equação (4.1) abaixo.

$$\hat{\mathbf{P}}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

A inicialização de $\hat{\mathbf{P}}_0$, conforme discutido no Capítulo 2, na maioria dos sistemas não tem um grande impacto no desempenho do Filtro de Kalman após a primeira iteração. No entanto, a sintonia do filtro, que envolve o ajuste das matrizes de covariância \mathbf{Q} e \mathbf{R} , é de suma importância para qualquer técnica de estimação derivada do EKF. Com base na teoria apresentada, na incerteza relativa ao grau de não linearidade de cada equação de estado e em testes extensivos, foram determinados os valores presentes nas Equações (4.2) e (4.3).

$$\mathbf{Q} = (0.1)^2 \begin{bmatrix} 0.0367 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.010695 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{R} = (0.001)^2 \begin{bmatrix} 1.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.000001 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

4.2.2 Estimação de Estados

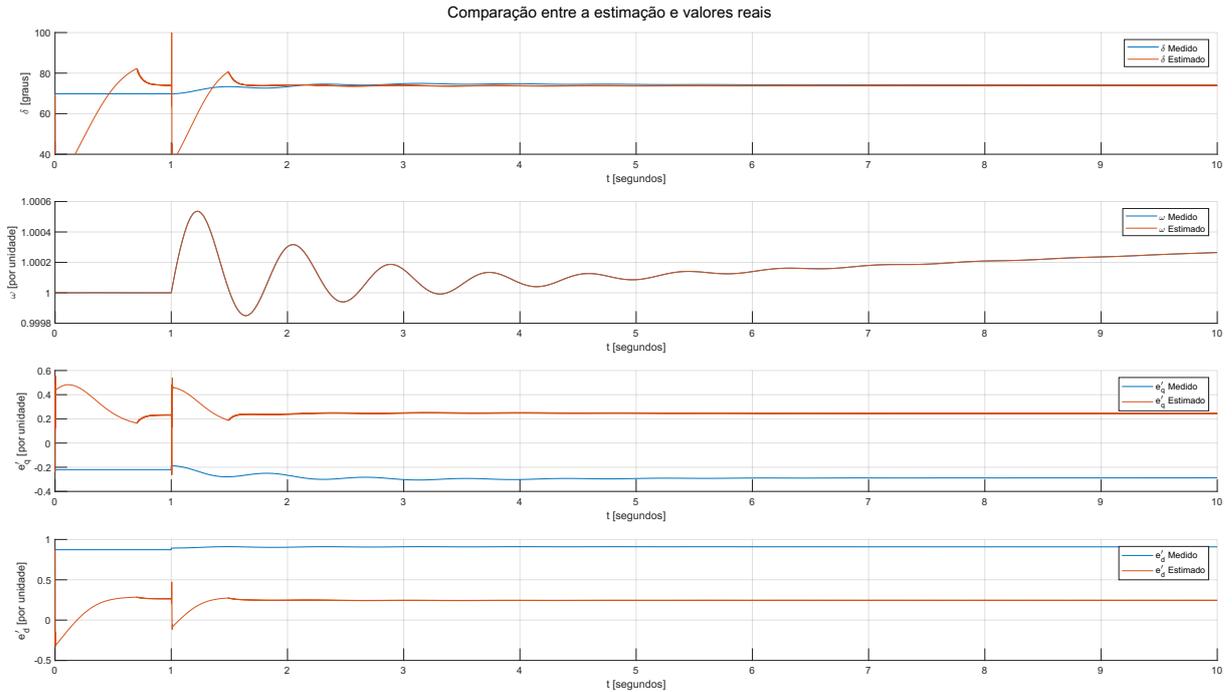
Os resultados apresentados nesta subseção foram obtidos por meio da execução do programa em Matlab.

4.2.2.1 Caso 1

No Caso 1, a Figura 23 apresenta a estimação dinâmica de estados para o sistema proposto. O gráfico mostra os valores estimados em comparação com os valores reais obtidos por meio das simulações no PSP-UFU. O PSP-UFU não é capaz de fornecer diretamente os valores de ω , \mathbf{E}'_d e \mathbf{E}'_q . A velocidade do rotor pode ser calculada a partir da frequência do gerador, $\omega = 2\pi f$. Já as tensões transitórias podem ser calculadas por meio das Equações (2.36) e (2.37), respectivamente.

Observamos que, embora a estimação das tensões transitórias de eixo direto e de eixo em quadratura, \mathbf{E}'_d e \mathbf{E}'_q , não corresponda ao valor real calculado a partir do PSP-UFU, o valor estimado da velocidade do rotor é capaz de emular quase perfeitamente o valor real.

Figura 23 – Comparação entre valores estimados pelo CD-EKF e os valores reais simulados pelo PSP-UFU para o caso 1.



Fonte: Autoria Própria, criado através da rotina em Matlab.

O valor estimado para o ângulo δ , apresentado com mais detalhes na Figura 24, parece ser capaz de emular bem o comportamento real de δ após um período de convergência.

Figura 24 – Comparação entre δ estimado pelo CD-EKF e δ simulado pelo PSP-UFU para o caso 1.

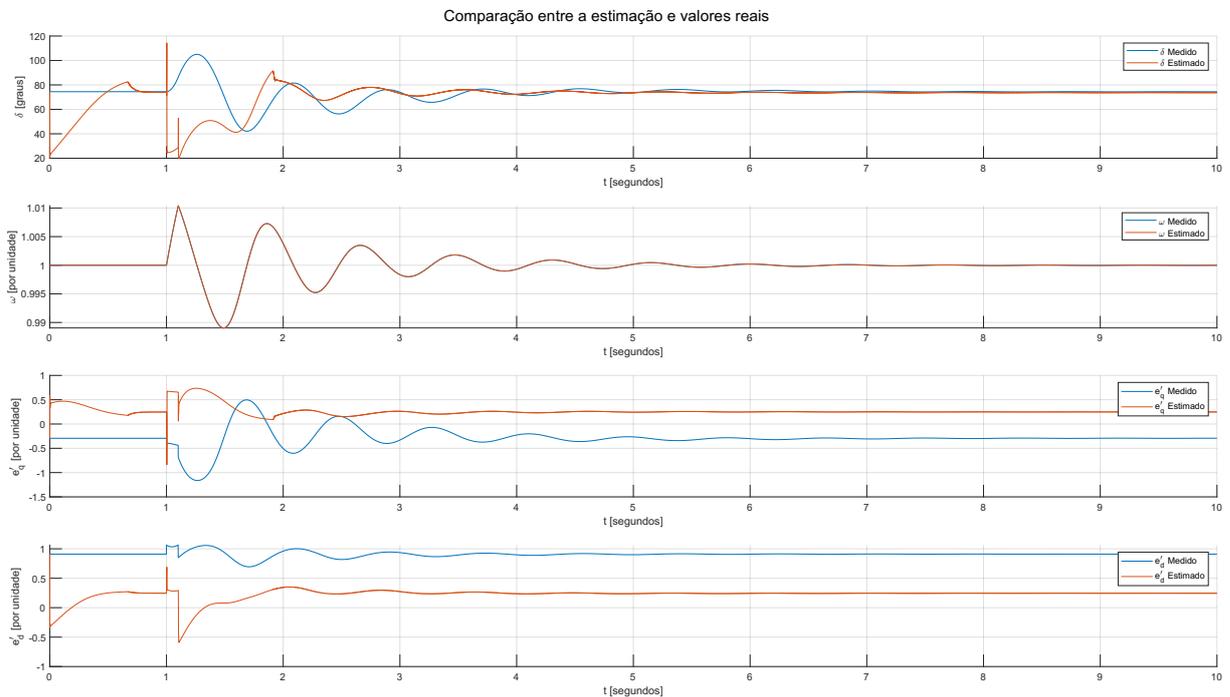


Fonte: Autoria Própria, criado através da rotina em Matlab.

4.2.3 Caso 2

No Caso 2, os resultados de estimação são apresentados na Figura 25. Os valores reais para ω , \mathbf{E}'_d e \mathbf{E}'_q são obtidos da mesma forma que no caso anterior. Assim como no Caso 1, o comportamento do ω estimado possui correspondência exata com o ω real.

Figura 25 – Comparação entre valores estimados pelo CD-EKF e os valores reais simulados pelo PSP-UFU para o caso 2.



Fonte: Autoria Própria, criado através da rotina em Matlab.

A Figura 26 fornece mais detalhes sobre o comportamento do ângulo estimado em relação ao ângulo real. Podemos observar com mais clareza, no Caso 2, a semelhança comportamental entre o ângulo estimado e o real.

Figura 26 – Comparação entre δ estimado pelo CD-EKF e δ simulado pelo PSP-UFU para o caso 2.



Fonte: Autoria Própria, criado através da rotina em Matlab.

4.3 Análise dos resultados

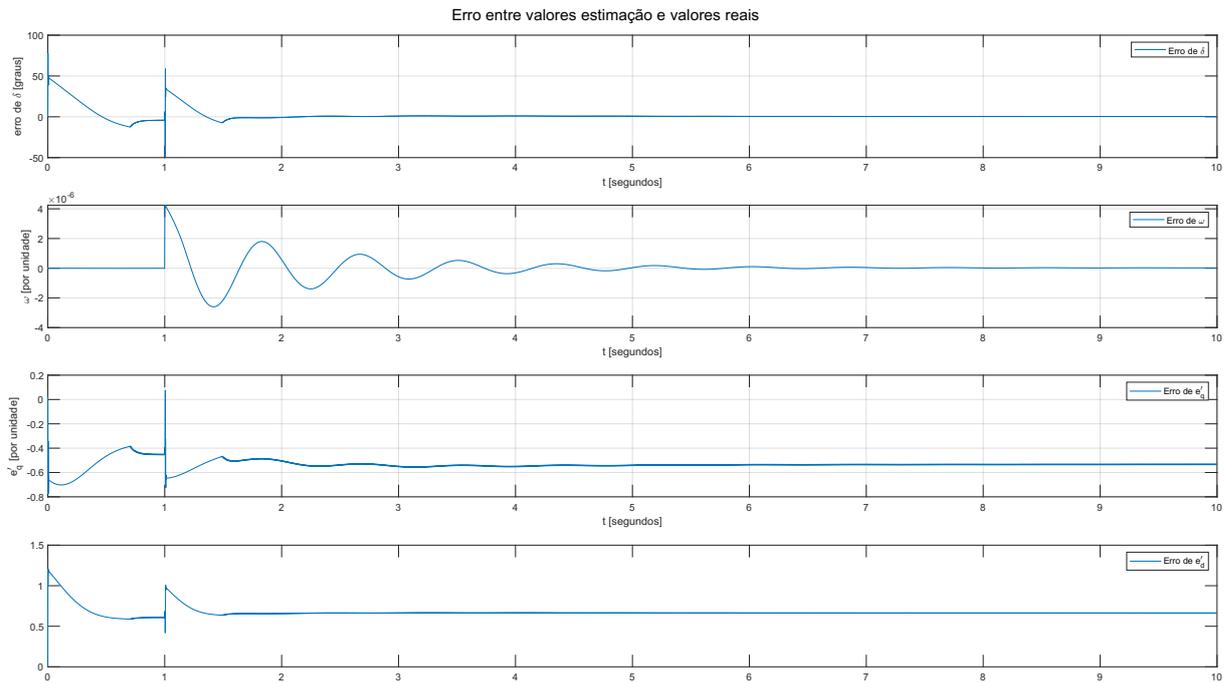
Para o Caso 1, a Figura 27 mostra o erro instantâneo na estimação de estado em comparação com o valor real.

Ao analisar os valores para \mathbf{E}'_d e \mathbf{E}'_q , vemos que ambos apresentam elevado erro relativo a sua grandeza. Entretanto vemos que os comportamentos de ambas Figura 23 parecem corresponderem bem aos comportamentos da curva \mathbf{E}'_d e \mathbf{E}'_q reais. Outro ponto de destaque é que a curva para as tensão transitória de eixo direto \mathbf{E}'_d real e a \mathbf{E}'_d estimada aparentam ser uma imagem espelhada uma da outra.

O ω , visto que o utilizamos também como uma medida, apresentou baixo erro relativos entre o real e o estimado.

Para o ângulo δ , vemos na Figura 27 que erro no início da simulação e no instante da perturbação é elevado, mas após a convergência esse erro tende a cair drasticamente. A Tabela 8 apresenta os erros quadráticos médios para cada estado, e vemos que para o δ no caso 1, o $Erro_{RMS} = 7.2170^\circ$

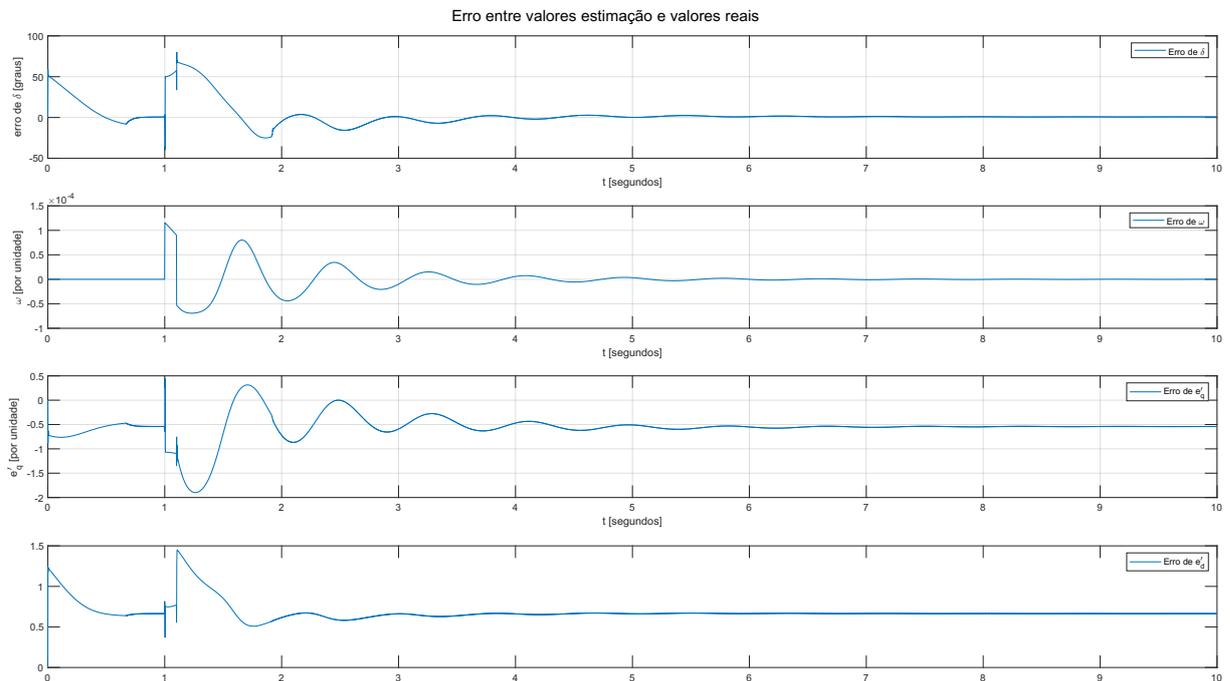
Figura 27 – Comparação entre os erros entre os valores estimados e reais para cada instante de tempo do caso 1.



Fonte: Autoria Própria, criado através da rotina em Matlab.

No segundo caso, analisando a Figura 25, pode-se se dizer o mesmo para o comportamento de \mathbf{E}'_d e \mathbf{E}'_q , com a ressalva que agora a curva de \mathbf{E}'_q estimado parece ter seu comportamento espelhado em relação ao a curva do valor real. A Figura 28 apresenta o erro esperado para os estados a cada instante de tempo.

Figura 28 – Comparação entre os erros entre os valores estimados e reais para cada instante de tempo do caso 2.



Fonte: Autoria Própria, criado através da rotina em Matlab.

O ângulo δ estimado para o Caso 2, de forma bastante similar ao primeiro caso, possui comportamento semelhante ao ângulo δ real. Entretanto devido ao segundo caso o sistema possuir uma maior tendencia oscilatório, o erro médio quadrático é maior, $Error_{RMS} = 14.26^\circ$.

Tabela 8 – Erro quadrático médio para os estados estimados

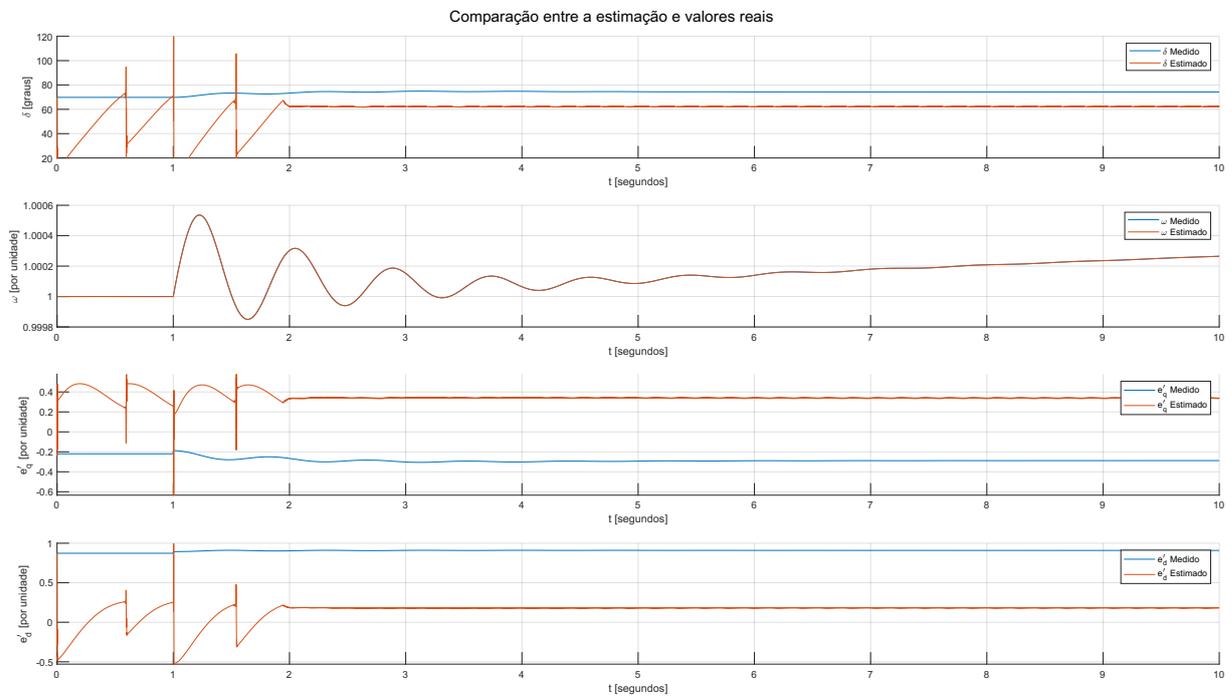
Caso 1	
Estados	Erro Quadrático médio
δ	7.2170°
ω	$6.71e - 07$
\mathbf{E}'_q	0.5372
\mathbf{E}'_d	0.6752
Caso 2	
Estados	Erro Quadrático médio
δ	14.2625°
ω	$2.08e - 05$
\mathbf{E}'_q	0.6211
\mathbf{E}'_d	0.6949

4.4 Sensibilidade a sintonia do filtro

O Filtro de Kalman Estendido possui grande sensibilidade as inicialização de suas matrizes de covariância \mathbf{Q} e \mathbf{R} . Ao modificar um único parâmetro de sintonia, uma boa estimativa pode tender ao singularidade matemática. A Figura 29 apresenta o resultado de estimação ao se adotar a matriz de covariância da Equação (4.4).

$$Q = (0.5)^2 \begin{bmatrix} 0.0367 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.010695 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Figura 29 – Estimação de estados em dessintonia de filtro, Covariância \mathbf{Q}

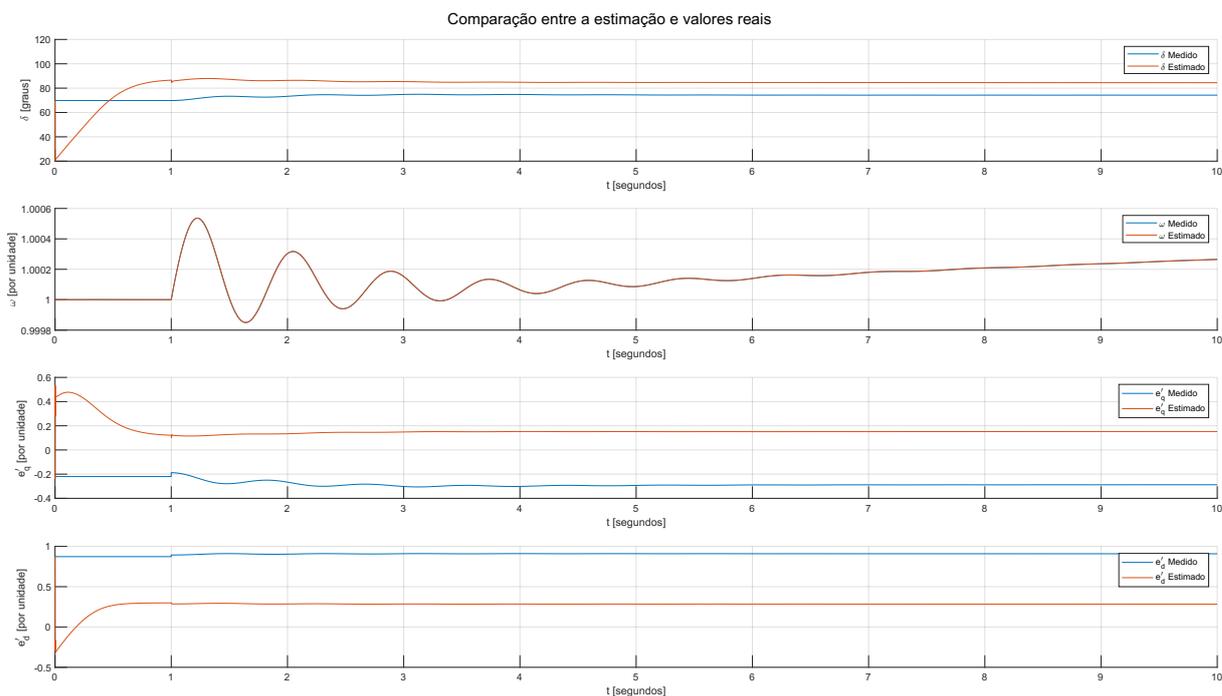


Fonte: Autoria Própria, criado através da rotina em Matlab.

A Figura 30 apresenta o resultado de estimação ao se adotar a matriz de covariância da Equação (4.5).

$$R = (0.01)^2 \begin{bmatrix} 1.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.000001 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Figura 30 – Estimação de estados em dessintonia de filtro, Covariância **R**.



Fonte: Autoria Própria, criado através da rotina em Matlab.

5 Conclusão

Em resumo, nesse projeto foi discutido a utilização do filtro de Kalman estendido em sua formulação contínua-discreta para a estimação dinâmica de estados de uma máquina síncrona. O filtro de Kalman contínuo-discreto (CDKF) é uma técnica de filtragem que é usada para sistemas dinâmicos contínuos e discretos. Ele é usado para estimar o estado de um sistema dinâmico a partir de uma série de medições, em que o processo dinâmico é descrito por um modelo contínuo e as medições são tomadas em intervalos discretos. O CDKF é uma generalização do filtro de Kalman discreto (DKF) para sistemas contínuos. Ele utiliza um modelo contínuo do processo dinâmico para prever o estado do sistema em cada intervalo de tempo discretizado. Em seguida, o filtro usa as medições discretas obtidas nesses intervalos para atualizar a estimativa do estado do sistema.

Na aplicação real de estimação de estado, as grandezas elétricas do sistema seriam adquiridas com precisão temporal por uma unidade de medição fasorial (PMU). Esse sistema de medição é capaz de fornecer dados precisos sobre a magnitude e fase da tensão e corrente elétrica em diferentes pontos do sistema elétrico, permitindo uma análise detalhada da operação e desempenho do sistema. PMUs são amplamente utilizados em grandes unidades geradoras e operadoras do sistema elétrico. No entanto, os dados obtidos podem estar contaminados com ruídos e incertezas. Com base nesses dados, um sistema de estimação dinâmica de estado baseado nesse projeto poderia ser capaz de estimar o ângulo δ do sistema, que não pode ser medido diretamente, informando ao operador do sistema em tempo real sobre a estimação do ângulo δ e sua tendência. Dessa forma, o operador pode tomar ações de controle antes que uma perturbação leve o sistema ao colapso e instabilidade.

O estimador de estados descrito nesse projeto, embora apresente imprecisão no cálculo das tensões transitórias de eixo direto e em quadratura, conseguiu capturar de forma adequada o comportamento do ângulo δ . Embora o PMU seja capaz de fornecer medidas sobre a velocidade de rotor ω , o estimador conseguiu estimá-la precisamente, permitindo informar sua tendência ao sistema de controle. Além disso, o filtro pode realizar filtragem de ruídos nos sinais de medidas. Em suma, com a sintonia adequada, o filtro pode melhorar a precisão do sistema, reduzir o erro de estimativa e melhorar o desempenho geral do sistema.

5.1 Trabalhos Futuros

Nessa seção, são feitas algumas sugestões de continuidade desse trabalho:

- Propõe-se a elaboração de um método que possibilite a sintonia automática do algoritmo com o sistema a ser estimado, evitando a necessidade de ajustes manuais por parte do usuário.
- Além disso, propõe-se a implementação e comparação de outros métodos de filtros de Kalman, como o UKF e o CKF, que apresentam maior capacidade de lidar com a não linearidade das equações do sistema elétrico.
- Adicionalmente, propõe-se a avaliação do desempenho dos estimadores em cenários de alta incerteza em relação às entradas e medidas, por meio da utilização de técnicas de análise de sensibilidade, como a análise de Monte Carlo.
- Também propõe-se a implementação de um estimador capaz de lidar com as particularidades das medições aperiódicas e disparadas através de eventos dos sistemas digitais de proteção do sistema elétrico, por meio da utilização de técnicas de filtragem adaptativa, como o filtro de Kalman adaptativo, filtro de Kalman robusto ou formulações especiais para o CKF.
- Por fim, propõe-se a modelagem do controle de excitação e governança de velocidade dos geradores síncronos e a integração desses modelos ao estimador de estados, visando melhorar o desempenho geral do sistema.

Referências Bibliográficas

- AKHLAGHI, S.; ZHOU, N.; HUANG, Z. Adaptive adjustment of noise covariance in kalman filter for dynamic state estimation. fev. 2017. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1702.00884>>. Citado na página 23.
- BAI, X. et al. Dynamic state estimation for synchronous generator with communication constraints: An improved regularized particle filter approach. *IEEE Transactions on Sustainable Computing*, v. 8, n. 2, p. 222–231, 2023. Citado na página 15.
- BUCY, R. S.; JOSEPH, P. D. *Filtering for stochastic processes with applications to guidance*. Nashville, TN: John Wiley & Sons, 1969. (Tracts in Pure & Applied Mathematics). Citado na página 26.
- CHEN, Y.; CHEN, X.; SHEN, Y. On-line detection of coil inter-turn short circuit faults in dual-redundancy permanent magnet synchronous motors. *Energies*, v. 11, n. 3, 2018. ISSN 1996-1073. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/1996-1073/11/3/662>>. Citado na página 16.
- CRASSIDIS, J. L.; MARKLEY, F. L. Unscented filtering for spacecraft attitude estimation. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, v. 26, p. 536–542, 2003. Citado na página 29.
- DAUM, F. Nonlinear filters: beyond the kalman filter. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, v. 20, n. 8, p. 57–69, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 29.
- EHYA, H.; FAIZ, J. *Electromagnetic Analysis and Condition Monitoring of Synchronous Generators*. Wiley, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/9781119636151>>. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 16.
- FROGERAIS, P.; BELLANGER, J.-J.; SENHADJI, L. Various ways to compute the continuous-discrete extended kalman filter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 57, n. 4, p. 1000–1004, abr. 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/tac.2011.2168129>>. Citado na página 28.
- GHAHREMANI, E.; KAMWA, I. Dynamic state estimation in power system by applying the extended kalman filter with unknown inputs to phasor measurements. *IEEE Transactions on Power Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 26, n. 4, p. 2556–2566, nov. 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/tpwrs.2011.2145396>>. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 32.
- HERNÁNDEZ, A. D. Á. *Dynamic State Estimation of Synchronous Generators using Phasor Measurement Units*. Tese (Doutorado) — UNIVERSITÉ DE LIÈGE, Faculté des Sciences Appliquées, 2007. Citado na página 14.
- IEEE. *IEEE Guide for Test Procedures for Synchronous Machines Including Acceptance and Performance Testing and Parameter Determination for Dynamic Analysis*. [S.l.], 2020. 1-246 p. Citado na página 30.

ITO, K.; XIONG, K. Gaussian filters for nonlinear filtering problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 45, n. 5, p. 910–927, 2000. Citado na página 29.

JAZWINSKI, A. H. *Stochastic processes and filtering theory*. San Diego, CA: Academic Press, 1970. (Mathematics in Science and Engineering). Citado na página 23.

KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, ASME International, v. 82, n. 1, p. 35–45, mar. 1960. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3662552>>. Citado na página 22.

KOOSHKBAGHI, M.; MARQUEZ, H. J.; XU, W. Event-triggered approach to dynamic state estimation of a synchronous machine using cubature kalman filter. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 28, n. 5, p. 2013–2020, set. 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/tcst.2019.2923374>>. Citado na página 35.

LIU, H. et al. Comparisons on kalman-filter-based dynamic state estimation algorithms of power systems. *IEEE Access*, v. 8, p. 51035–51043, 2020. Citado na página 16.

LIU, Y. et al. Dynamic state estimation for power system control and protection. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 36, n. 6, p. 5909–5921, 2021. Citado na página 15.

MASNADI-SHIRAZI, H.; MASNADI-SHIRAZI, A.; DASTGHEIB, M.-A. A step by step mathematical derivation and tutorial on kalman filters. out. 2019. Citado na página 18.

MATHWORKS. *MATLAB version: 9.12.0 (R2022b)*. Natick, Massachusetts, United States: The MathWorks Inc., 2022. Disponível em: <<https://www.mathworks.com>>. Citado na página 37.

MATHWORKS. *Simulink version: 10.5 (R2022a)*. Natick, Massachusetts, United States: The MathWorks Inc., 2022. Disponível em: <<https://www.mathworks.com>>. Citado na página 33.

MATHWORKS. *Simscape Electrical library documentation*. Natick, Massachusetts, United States: The MathWorks Inc., 2023. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/help/sps/index.html>>. Acesso em: 20 de maio de 2023. Citado na página 33.

MILANO, F. *Power System Modelling and Scripting*. Springer Berlin Heidelberg, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-3-642-13669-6>>. Citado na página 31.

NEUSSER, K. State-space models and the kalman filter. In: *Time Series Econometrics*. Springer International Publishing, 2016. p. 325–352. ISBN 978-3-319-32862-1. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-32862-1_17>. Citado na página 20.

OLIVEIRA, T. *Desenvolvimento de um programa computacional livre, gráfico, e multiplataforma para analisar sistemas elétricos de potência em regime permanente e dinâmico*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia - UFU, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.14393/ufu.te.2019.2444>>. Citado 3 vezes nas páginas 30, 31 e 38.

OLIVEIRA, T. L. *PSP-UFU 2020w31a-beta*. Uberlândia, Minas Gerais, Brasil: Universidade Federal de Uberlândia - UFU, 2020. Disponível em: <<https://thales1330.github.io/PSP/>>. Citado na página 33.

- OLIVEIRA, T. L. *PSP-UFU 2020w31a-beta*. Uberlândia, Minas Gerais, Brasil: Universidade Federal de Uberlândia - UFU, 2023. Disponível em: <<https://thales1330.github.io/PSP/pt/docs/>>. Acesso em: 01 de junho de 2023. Citado na página 33.
- RHUDY, M. B.; SALGUERO, R. A.; HOLAPPA, K. A kalman filtering tutorial for undergraduate students. *International Journal of Computer Science & Engineering Survey*, Academy and Industry Research Collaboration Center (AIRCC), v. 08, n. 01, p. 01–18, fev. 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.5121/ijcses.2017.8101>>. Citado na página 20.
- TEBIANIAN, H.; JEYASURYA, B. Dynamic state estimation in power systems using kalman filters. In: *2013 IEEE Electrical Power & Energy Conference*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 1–5. Citado na página 16.
- TEBIANIAN, H.; JEYASURYA, B. Dynamic state estimation in power systems: Modeling, and challenges. *Electric Power Systems Research*, v. 121, p. 109–114, 2015. ISSN 0378-7796. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378779614004441>>. Citado na página 16.
- TEREJANU, G. A. Extended kalman filter tutorial. 2008. Citado na página 23.
- URREA, C.; AGRAMONTE, R. Kalman filter: Historical overview and review of its use in robotics 60 years after its creation. *Journal of Sensors*, Hindawi Limited, v. 2021, p. 1–21, set. 2021. Citado na página 18.
- YUCAI, W.; MINGHAN, M.; YONGGANG, L. A new detection coil capable of performing online diagnosis of excitation winding short-circuits in steam-turbine generators. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, v. 33, n. 1, p. 106–115, 2018. Citado na página 16.
- ZHAO, J.; NETTO, M.; MILI, L. A robust iterated extended kalman filter for power system dynamic state estimation. *IEEE Trans. Power Syst.*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 32, n. 4, p. 3205–3216, jul. 2017. Citado na página 30.