Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

João Victor Araújo Pinto

Dinâmica no contexto de espaços uniformes e dinâmica dos operadores de convolução sobre $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$

Uberlândia - MG

Fevereiro de 2024

João Victor Araújo Pinto

Dinâmica no contexto de espaços uniformes e dinâmica dos operadores de convolução sobre $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$

Dissertação apresentada a Faculdade de Matemática, UFU, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, sob a orientação do Prof. Dr.Vinícius Vieira Fávaro.

Uberlândia - MG

2024

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

P659
2024

Pinto, João Victor Araújo, 2000-
Dinâmica no contexto de espaços uniformes e dinâmicas dos operadores de convolução sobre H(C^N) [recurso eletrônico] / João Victor Araújo Pinto. - 2024.

Orientador: Vinícius Vieira Fávaro.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2024.190
Inclui bibliografia.

1. Matemática. I. Fávaro, Vinícius Vieira,1981-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 160 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3239-4209/4154 - www.posgrad.famat.ufu.br - pgmat@famat.ufu.br

ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

<table>
<tr><td>Programa de Pós-Graduação em:</td><td colspan="5">Matemática</td></tr>
<tr><td>Defesa de:</td><td colspan="5">Dissertação de Mestrado Acadêmico, 115, PPGMAT</td></tr>
<tr><td>Data:</td><td>20 de fevereiro de 2024</td><td>Hora de início:</td><td>15:00</td><td>Hora de encerramento:</td><td>16:30</td></tr>
<tr><td>Matrícula do Discente:</td><td colspan="5">12222MAT003</td></tr>
<tr><td>Nome do Discente:</td><td colspan="5">João Victor Araújo Pinto</td></tr>
<tr><td>Título do Trabalho:</td><td colspan="5">Dinâmica no contexto de espaços uniformes e dinâmica dos operadores de convolução sobre H(C^N)</td></tr>
<tr><td>Área de concentração:</td><td colspan="5">Matemática</td></tr>
<tr><td>Linha de pesquisa:</td><td colspan="5">Análise Funcional e Equações Diferenciais</td></tr>
<tr><td>Projeto de Pesquisa de vinculação:</td><td colspan="5">Análise em dimensão infinita: dinâmica linear, ideais e reticulados de Banach</td></tr>
</table>

Reuniu-se em web conferência pela plataforma Google Meet através do link https://meet.google.com/yar-gugf-erm, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática, assim composta: Professores Doutores: Blas Melendez Caraballo - Escuela Superior de Administración Pública /Colômbia; Daniela Mariz Silva Vieira - Universidade de São Paulo/USP e Vinícius Vieira Fávaro - FAMAT/UFU, orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Vinícius Vieira Fávaro, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu o Discente a palavra para a exposição do seu trabalho.

A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa. A seguir o senhor presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o candidato:

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

Documento assinado eletronicamente por **Blas Melendez Caraballo**, **Usuário Externo**, em 20/02/2024, às 17:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Vinicius Vieira Favaro**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 20/02/2024, às 17:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Daniela Mariz Silva Vieira**, **Usuário Externo**, em 20/02/2024, às 17:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5197521** e o código CRC **59E09010**.

Referência: Processo nº 23117.010394/2024-88 SEI nº 5197521

João Victor Araújo Pinto

Dinâmica no contexto de espaços uniformes e dinâmica dos operadores de convolução sobre $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$

Dissertação apresentada a Faculdade de Matemática, UFU, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro

Profa. Dra. Daniela Mariz Silva Vieira

Prof. Dr. Blas Melendez Caraballo

Agradecimentos

Agradeço à Deus, à minha família, ao meu orientador Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro e à FAPEMIG. Agradeço também à Profa. Dra. Daniela Mariz Silva Vieira e ao Prof. Dr. Blas Melendez Caraballo por aceitarem participar da banca e colaborarem com esse trabalho.

Resumo

Nesse trabalho estudaremos várias propriedades da dinâmica linear dos operadores de convolução sobre o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ de todas as funções inteiras de infinitas variáveis complexas, dentre elas, hiperciclicidade, mistura, ciclicidade, n-superciclicidade, caos Li-Yorke e caos distribucional. Para o estudo das duas últimas, foi preciso adaptar os conceitos já conhecidos em espaços de Fréchet para o contexto de espaços uniformes. Apresentaremos os resultados já conhecidos de que operadores de convolução em $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ não são cíclicos nem n-supercíclicos (em particular não são hipercíclicos), porém os operadores de convolução que não são múltiplos da identidade são misturados e Li-Yorke caóticos. Além disso, provaremos um resultado original de que estes operadores são distribucionalmente caóticos.

Palavras-Chave: Caos distribucional, caos Li-Yorke, espaços uniformes, espaços localmente convexos, operadores de convolução, funções holomorfas.

Abstract

In this work we will study several properties of the linear dynamics of convolution operators on the space $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ of all entire functions of infinitely many complex variables, as hypercyclicity, mixing, cyclicity, n-supercyclicity, Li-Yorke chaos and distributional chaos. For the study of the last two, we adapt the well-known concepts on Fréchet spaces to the context of uniform spaces. We will present the results that convolution operators on $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ are not cycllic or n-supercyclic (in particular they are not hypercyclic), but the convolution operators that are not scalar multiple of the identity are mixing and Li-Yorke chaotic. Besides, we will prove a original result that theses operators are distributionally chaotic.

Key-Words: Convolution operators, distributional chaos, holomorphic functions, Li-Yorke chaos, locally convex spaces, uniform spaces.

Sumário

Introdução

Os temas abordados nesse trabalho pertencem aos seguintes campos da Matemática: Sistemas Dinâmicos e Análise Funcional. Em certos momentos, como por exemplo no Capítulo 2, trabalharemos com conceitos que tangem apenas o primeiro campo citado. Já em outros instantes, como por exemplo em partes dos Capítulos 1 e 3, trataremos de temas da teoria de Análise Funcional.

O nosso principal objetivo reside no ramo da Matemática dito *dinâmica linear.* Este último pode ser visto como uma intersecção entre os campos citados no primeiro parágrafo e tem como ofício estudar propriedades dinâmicas, tais como caracterizações de várias noções de caos, de operadores lineares sobre espaços normados, espaços de Fréchet ou espaços vetoriais topológicos. As referências [4, 5, 6] são exemplos de importantes artigos nessa área e caracterizam os conceitos de *caos Li-Yorke* e *caos distribucional* no contexto de operadores lineares sobre espaços de Fréchet.

Denotamos por $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, o conjunto de todas as funções inteiras de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}$, o qual se torna um espaço de Fréchet com a topologia compacto-aberta (mais detalhes desta topologia serão dados na Seção 1.3). Dizemos que um operador linear contínuo L sobre o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ é um *operador de convolução* se o mesmo comuta com as translações neste mesmo espaço. Em [14] Godefroy e Shapiro apresentaram um resultado clássico:

- *Seja* $n \in \mathbb{N}$. *Todos os operadores de convolução, que não são múltiplos escalares da identidade, sobre o espaço* $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ *são hipercíclicos.*

Em contraste com este resultado, Fávaro e Mujica provaram em [12] que os operadores de convolução sobre o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ das funções inteiras de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ em $\mathbb{C}$, munido da topologia compacto-aberta, não são hipercíclicos. Além disso, em [8], Caraballo e Fávaro melhoraram o resultado anterior provando que nenhum operador de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ é cíclico ou n-supercíclico.

O parágrafo anterior nos alerta sobre a drástica diferença entre as propriedades dinâmicas satisfeitas pelos operadores de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ e os operadores de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$, embora todas as funções em $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ dependam apenas de um número finito de variáveis (veja o Teorema 3.1.7).

Nosso principal propósito nesse trabalho é averiguar várias propriedades dinâmicas que os operadores de convolução sobre o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ satisfazem. Isso será feito no Capítulo 3. Dentre tais propriedades, provaremos o seguinte resultado original:

- *Todo operador de convolução, que não é múltiplo escalar da identidade, sobre o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ é distribucionalmente caótico.*

Este último resultado já era conhecido no contexto de operadores de convolução sobre o espaço de Fréchet $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, com $n \in \mathbb{N}$ (veja [24]).

Na busca por tentar demonstrar o resultado mencionado acima, se fez necessário estudar o basilar da teoria de espaços uniformes. Esses espaços, assim como veremos no primeiro capítulo, são uma generalização dos espaços métricos e espaços vetoriais topológicos. Tal necessidade se dá pois o espaço que exploraremos ($\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$) é não metrizável (veja a Proposição 3.1.11). Além disso, recentemente vários autores estão trabalhando com propriedades dinâmicas nesse contexto, ou até mesmo em situações mais gerais ainda. Como por exemplo, citamos os artigos [9], [23] e [27].

Adaptamos a definição de caos distribucional em uma sequência (dada em [27]) para explorar a noção de caos distribucional no contexto de funções sobre espaços uniformes, a qual generaliza o caso de funções sobre espaços métricos (veja a Seção 2.3). Além disso, aplicamos alguns resultados técnicos dos operadores de convolução sobre o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$, apresentados em [7] e [8], para provar o nosso resultado principal (Teorema 3.5.2).

Finalizamos essa introdução dando um breve resumo do que será feito em cada capítulo desse trabalho. No primeiro capítulo apresentaremos todos os resultados necessários, em relação às teorias de topologia geral, espaços vetoriais topológicos, espaços uniformes e ações de grupo que serão utilizados no decorrer do texto. No segundo capítulo trabalharemos com as noções de caos Li-Yorke e caos distribucional no contexto de espaços uniformes. Por fim, no Capítulo 3 estudaremos as propriedades dinâmicas dos operadores de convolução sobre o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos definições e resultados que serão utilizados nos capítulos posteriores.

1.1 Espaços topológicos

Nessa seção apresentaremos definições e resultados básicos da teoria de Topologia Geral que serão úteis ao longo de todo trabalho. Para a confecção dessa seção utilizamos as referências [20] e [22].

Definição 1.1.1. Uma *topologia* sobre um conjunto não vazio X é uma coleção τ de subconjuntos de X que satisfazem as seguintes condições:

i) $X, \emptyset \in \tau$;

ii) Se $A_i \in \tau$ para todo $i \in I$, então $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \tau$;

iii) Se $A_i \in \tau$ para todo $i = 1, \ldots, n$, então $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \tau$.

Cada elemento de τ é chamado de *conjunto aberto*. O par (X, τ) é chamado de *espaço topológico*. Dizemos que $F \subset X$ é *fechado* se $X \setminus F \in \tau$.

Exemplo 1.1.2. Todo espaço métrico X é um espaço topológico considerando a topologia

$$\tau = \{A \subset X : \forall x \in A,\ \exists \varepsilon > 0,\ \text{tal que } B(x, \varepsilon) \subset A\},$$

onde $B(a, \varepsilon)$ denota a bola aberta de centro em a e raio ε.

Definição 1.1.3. Seja X um espaço topológico e $Y \subset X$.

a) Definimos o *interior de* Y por

$$\text{Int}(Y) := \bigcup \{B \subset Y : B \text{ é aberto}\}.$$

b) Definimos o *fecho de* Y *em* X por

$$\overline{Y} := \bigcap \{F \subset X : Y \subset F \text{ e } F \text{ é fechado}\}.$$

Também denotamos o fecho de Y por $\mathrm{Cl}(Y)$.

Dizemos que um subconjunto $D \subset X$ é *denso* em X se $\overline{D} = X$.

Definição 1.1.4. Seja X um espaço topológico e $x \in X$. Dizemos que um conjunto V é uma *vizinhança de x* se existe uma aberto A em X tal que $x \in A \subset V$.

Proposição 1.1.5. *(Vide [20], Proposição 7.3) Sejam (X, τ) um espaço topológico e $Y \subset X$.*

a) A coleção $\tau_Y = \{A \cap Y : A \in \tau\}$ é uma topologia em Y e é dita topologia de subespaço ou topologia em Y induzida da topologia de X.

b) Um subconjunto $U \subset Y$ é um aberto em (Y, τ_Y) se, e somente se, existe $U_1 \subset X$ aberto em (X, τ) tal que $U = U_1 \cap Y$.

c) $F \subset Y$ é um fechado em (Y, τ_Y) se, e somente se, existe $F_1 \subset X$ fechado em (X, τ) tal que $F = F_1 \cap Y$.

d) Sejam $V \subset Y$ e $y \in Y$. Então V é uma vizinhança de y em (Y, τ_Y) se, e somente se, existe uma vizinhança $V_1 \subset X$ de y em (X, τ) tal que $V = V_1 \cap Y$.

Observação 1.1.6. Seja X um espaço topológico e $Y \subset X$. Dado $A \subset Y$ denotamos o fecho de A e o interior de A com relação a Y (munido da topologia induzida de X) por $\mathrm{Cl}|_Y(A)$ e $\mathrm{Int}|_Y(A)$ respectivamente. Segue da Proposição 1.1.5 que

a) $\mathrm{Cl}|_Y(A) = \mathrm{Cl}|_X(A) \cap Y$ e

b) $\mathrm{Int}|_Y(A) = \mathrm{Int}|_X(A) \cap Y$.

Definição 1.1.7. Seja $f : X \to Y$ uma função entre espaços topológicos.

a) Dizemos que f *é contínua no ponto $a \in X$* se para todo aberto V de Y contendo $f(a)$, existe uma aberto U de X contendo a tal que $f(U) \subseteq V$. Dizemos que f é *contínua* se f for contínua em todos os pontos de seu domínio.

b) Dizemos que f é um *homeomorfismo* se f é uma bijeção contínua e se a função $f^{-1} : Y \to X$ for contínua.

Para a próxima proposição, lembramos que uma função $f : X \to Y$ entre os espaços topológicos X e Y é *aberta* se $f(A)$ é aberto em Y para todo $A \subset X$ aberto. Analogamente se define *função fechada.*

Proposição 1.1.8. *(Vide [20], Proposições 8.3 e 8.9) Seja $f : X \to Y$ uma função entre espaços topológicos.*

i) As seguintes afirmações são equivalentes:

i.a) f *é contínua;*

i.b) $f^{-1}(A)$ *é aberto em* X*, para todo aberto* A *em* Y*.*

i.c) $f^{-1}(F)$ *é fechado em* X*, para todo fechado* F *em* Y*.*

ii) As seguintes afirmações são equivalentes:

ii.a) f *é um homeomorfismo.*

ii.b) f *é uma bijeção contínua e aberta.*

ii.c) f *é uma bijeção contínua e fechada.*

Segue deste resultado que se $f : X \to Y$ é um homeomorfismo, $x \in X$ e V é uma vizinhança de x em X, então $f(V)$ é uma vizinhança de $f(x)$ em Y.

Definição 1.1.9. Seja (X, τ) um espaço topológico. Uma *base* para a topologia τ é uma coleção $\mathcal{B} \subset \tau$ tal que para todo $A \in \tau$ existe $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ tal que $A = \bigcup_{V \in \mathcal{C}} V$.

Definição 1.1.10. O produto cartesiano generalizado de uma coleção não vazia de conjuntos $(A_i)_{i \in I}$ é definido por

$$\prod_{i \in I} A_i := \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i : f(i) \in A_i \text{ para todo } i \in I \right\}.$$

Proposição 1.1.11. *(Vide [20], Proposição 10.2) Sejam* $(X_i)_{i \in I}$ *uma coleção de espaços topológicos e* $\mathcal{B}$ *a coleção de todos os produtos* $\prod_{i \in I} A_i$ *tais que:*

i) Para cada $i \in I$*,* A_i *é aberto em* X_i*;*

ii) $A_i \neq X_i$ *no máximo para um número finito de índices.*

Então $\mathcal{B}$ *é base para uma topologia em* $\prod_{i \in I} A_i$*, chamada de topologia produto.*

Definição 1.1.12. Seja X um espaço topológico.

a) Dizemos que X é um *espaço de Baire* se toda intersecção enumerável de conjuntos abertos e densos em X ainda for densa em X.

b) Dizemos que um subconjunto $A \subset X$ é de *primeira categoria* em X se é possível escrever

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{com } \operatorname{Int}(\overline{A_n}) = \emptyset, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Caso contrário, dizemos que A é de *segunda categoria*.

Proposição 1.1.13. *Todo espaço de Baire é de segunda categoria sobre si mesmo.*

Teorema 1.1.14. ***(Teorema de Baire):*** *(Vide [22], Theorem 48.2) Todo espaço métrico completo é um espaço de Baire.*

Proposição 1.1.15. *(Vide [22], Lemma 48.4) Seja X um espaço de Baire e $Y \subset X$ um aberto. Então Y é um espaço de Baire.*

Definição 1.1.16. Seja X um espaço topológico.

a) Um conjunto Λ, junto com uma relação $\leq$, é chamado de *conjunto dirigido* se verifica as seguintes condições:

i) $\lambda \leq \lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$.

ii) Se $\lambda_1 \leq \lambda_2$ e $\lambda_2 \leq \lambda_3$, então $\lambda_1 \leq \lambda_3$, para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda$.

iii) Dados $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, existe $\lambda_3 \in \Lambda$ tal que $\lambda_1 \leq \lambda_3$ e $\lambda_2 \leq \lambda_3$.

b) Chamaremos de *rede* em X qualquer função da forma $x : \Omega \to X$, onde Λ é um conjunto dirigido. Denotaremos tal rede por $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ou simplesmente por $(x_\lambda)_\lambda$.

c) Diremos que a rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *converge* a um ponto $x \in X$ se para toda vizinhança V de x, existe $\lambda_0 \in \Lambda$, tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$ tem-se $x_\lambda \in V$. Escrevemos $x_\lambda \to x$ para indicar que a rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ converge para o ponto x.

Definição 1.1.17. Sejam X um espaço topológico e $x : \Lambda \to X$ uma rede em X. Chamaremos de *subrede* de $x : \Lambda \to X$ qualquer rede da forma $x \circ \phi : M \to X$, onde M é um conjunto dirigido e $\phi : M \to \Lambda$ é uma função que cumpre as seguintes condições:

a) $\mu_1 \leq \mu_2$ implica $\phi(\mu_1) \leq \phi(\mu_2)$ para $\mu_1, \mu_2 \in M$.

b) Dado $\lambda \in \Lambda$, existe $\mu \in M$ tal que $\phi(\mu) \geq \lambda$.

Proposição 1.1.18. *(Vide [20], Proposição 13.6) Sejam $f : X \to Y$ uma função entre os espaços topológicos X e Y e $x \in X$. Então f é contínua em x se, e somente se, para toda rede $(x_\lambda)_\lambda$ em X com $x_\lambda \to x$ tem-se $f(x_\lambda) \to f(x)$.*

Definição 1.1.19. Seja X um espaço topológico.

a) Dizemos que X é T_1 se dados dois pontos distintos em X, cada um deles admite um vizinhança que não contém o outro.

b) Dizemos que X é de *Hausdorff* se para quaisquer pontos distintos $x, y \in X$, existem vizinhanças V e U de x e y respectivamente tais que $V \cap U = \emptyset$.

c) Dizemos que X é *1-enumerável* se cada ponto de X admite uma base de vizinhanças enumerável.

d) Dizemos que X é *2-enumerável* se X admite uma base enumerável de abertos para sua topologia.

e) Dizemos que X é *separável* se admite um subconjunto enumerável que é denso em X.

Definição 1.1.20. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é *compacto* se para toda coleção de abertos $(A_i)_{i \in I}$ tal que $X = \bigcup_{i \in I} A_i$, existem $n \in \mathbb{N}$ e $i_1, \cdots, i_n \in I$ tais que $X = \bigcup_{j=1}^{n} A_{i_j}$.

Dizemos que um subconjunto $Y \subset X$ é compacto, se o mesmo for compacto com a topologia induzida de X.

Proposição 1.1.21. *(Vide [22], Theorem 26.5.) Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ contínua. Se X é compacto então $f(X)$ é compacto.*

Definição 1.1.22. Seja A um conjunto munido de uma relação $\leq$.

a) Dizemos que $\leq$ é uma *ordem parcial* em X se são satisfeitos os seguintes axiomas:

i) $x \leq x$, para todo $x \in A$.

ii) Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$.

iii) Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$.

b) Seja $B \subset A$. Uma *cota superior* para B, se existir, é um elemento $x \in A$ tal que $y \leq x$, para todo $y \in B$.

c) Um *elemento maximal* de A, se existir, é um elemento $z \in A$ tal que se para algum $y \in A$ nós tivermos $z \leq y$, então $y = z$.

d) Um subconjunto $C \subset A$, é dito ser uma *cadeia* se para todo $x, y \in C$ temos que $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Teorema 1.1.23. ***(Lema de Zorn):*** *(Vide [20], p.38) Seja A um conjunto não vazio e parcialmente ordenado. Se toda cadeia em A possui cota superior, então A tem elemento maximal.*

Definição 1.1.24. Seja X um espaço topológico.

a) Dizemos que $A \subset X$ é um *conjunto G_δ de X*, se A pode ser escrito como uma intersecção enumerável de conjuntos abertos de X.

b) Seja X um espaço de Baire. Dizemos que $A \subset X$ é um *conjunto residual*, se ele contém um subconjunto G_δ denso em X.

As seguintes proposições são simples exercícios de Topologia Geral. Elas serão utilizadas no Capítulo 2.

Proposição 1.1.25. *Seja X um espaço topológico 1-enumerável e $A \subset X$. Então $x \in \overline{A}$ se, e somente se, existe uma sequência $(x_n) \subset A$ tal que $x_n \to x$.*

Proposição 1.1.26. *Seja X um espaço topológico T_1 sem pontos isolados.*

a) Para todo $x \in X$, o conjunto $\{x\}$ é tal que Int$\left(\overline{\{x\}}\right) = \emptyset$.

b) Seja $\{x_i : i \in \mathbb{N}\} \subset X$. Então $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i\}$ é de primeira categoria.

Proposição 1.1.27. *Em um espaço de Baire, a intersecção enumerável de conjuntos G_δ (residuais), ainda é um conjunto G_δ (residual).*

1.2 Espaços vetoriais topológicos

Nessa seção apresentaremos algumas definições e resultados da teoria de espaços vetoriais topológicos. Todos os espaços vetoriais mencionados nesse trabalho serão espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K}$ denota o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ ou o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$. Nos baseamos em [16] e [21] para a elaboração dessa seção e as demonstrações dos resultados apresentados podem ser encontradas em ambas referências ou qualquer outro livro introdutório da teoria de espaços vetoriais topológicos.

Definição 1.2.1. Diremos que E é um *espaço vetorial topológico* (abreviado *EVT*) se E é um espaço vetorial munido de uma topologia tal que as seguintes funções são contínuas:

$$\begin{aligned} (x, y) \in E \times E \quad &\mapsto \quad x + y \in E, \\ (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \quad &\mapsto \quad \lambda x \in E. \end{aligned}$$

Dado $a \in E$ denotamos por $\mathcal{U}_a$ o conjunto de todas as vizinhanças desse vetor.

A próxima proposição nos ajudará a compreender melhor como funciona a topologia em um EVT. Em outras palavras, as mesmas nos dizem que basta sabermos certas informações topológicas em um único vetor.

Proposição 1.2.2. *(Vide [21], Proposição 1.2 e Corolário 1.3]) Seja E um EVT. Então*

a) Para cada $a \in E$ a aplicação $x \mapsto x + a$ é um homeomorfismo,

b) Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ diferente de zero, a aplicação $x \mapsto \lambda x$ é um homeomorfismo,

c) Para cada $a \in E$, $U \in \mathcal{U}_0$ se, e somente se, $a + U \in \mathcal{U}_a$,

d) Para cada $\lambda \neq 0$ em $\mathbb{K}$ e $U \in \mathcal{U}_0$, $\lambda U \in \mathcal{U}_0$.

A proposição acima nós dá uma caracterização dos abertos em um EVT E: Um subconjunto $A \subset E$ é um aberto, se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um aberto B contendo zero, tal que $x + B \subset A$.

Definição 1.2.3. Dizemos que um subconjunto A de um espaço vetorial E é *convexo* se para todos $a, b \in A$ e $\alpha, \beta \geq 0$, com $\alpha + \beta = 1$, temos $\alpha a + \beta b \in A$.

Definição 1.2.4. Dizemos que E é um *espaço localmente convexo* (abreviado *ELC*) se o vetor nulo admite uma base de vizinhanças convexas. Neste caso dizemos que a topologia de E é uma *topologia localmente convexa.*

Pela proposição anterior, se E for um ELC então todo vetor admite uma base de vizinhanças convexas.

Definição 1.2.5. Seja E um espaço vetorial. Uma função $p : E \to \mathbb{R}$ é dita *seminorma* se verifica as seguintes condições:

i) $p(x) \geq 0$, para todo $x \in E$,

ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, para todos $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in E$,

iii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, para todos $x, y \in E$.

Seja p uma seminorma no EVT E. Então o conjunto

$$U_{p,\varepsilon} := \{x \in E : p(x) < \varepsilon\},$$

é convexo.

Proposição 1.2.6. *(Vide [21], Proposição 4.3) Seja E um espaço vetorial e P uma família de seminormas em E. Considere*

$$B_0 = \left\{ \bigcap_{p \in P_0} U_{p,\varepsilon} : P_0 \subset P \textit{ finito}, \ \varepsilon > 0 \right\}.$$

Então existe uma única topologia localmente convexa τ_P que admite B_0 como base de vizinhanças de zero. A topologia τ_P é a topologia mais fraca que torna cada $p \in P$ contínua. Diremos que τ_P é a topologia localmente convexa definida por P.

Exemplo 1.2.7. a) **O espaço produto** $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$: Seja $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ o espaço vetorial de todas as sequências complexas. Munimos este espaço da topologia localmente convexa gerada pela família de seminormas $p_n : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$p_n((z_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \max\{|z_1|, \cdots, |z_n|\},$$

com $n \in \mathbb{N}$. Além disso, essa topologia coincide com a topologia produto.

b) **O espaço das funções holomorfas** $\mathcal{H}(\Omega)$: Seja $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é holomorfa em Ω se para cada $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \Omega$ existe uma vizinhança aberta U de ζ em Ω tal que

$$f(\zeta + z) = \sum_{(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n} c_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n} z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n},$$

para cada $z = (z_1, \cdots, z_n)$ com $\zeta + z \in U$ e com $c_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n} \in \mathbb{C}$, onde $\sum_{(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n} c_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n}$, denota

$$\sum_{\alpha_1 \in \mathbb{N}_0} \cdots \sum_{\alpha_n \in \mathbb{N}_0} c_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n}.$$

Denotamos por $\mathcal{H}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções holomorfas em Ω.

A *topologia compacto-aberta* em $\mathcal{H}(\Omega)$, denotada por τ_0, é a topologia localmente convexa gerada pelas seminormas $p_K : \mathcal{H}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dadas por

$$p_K(f) = \sup_{z \in K} |f(z)|,$$

com $K \subset \Omega$ compacto.

Definição 1.2.8. Seja E um EVT e B_0 o conjunto das vizinhanças de zero.

a) Uma rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ é dita *de Cauchy* se para cada $U \in B_0$ existe $\lambda_0 \in \Omega$ tal que $x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2} \in U$ para todos $\lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0$.

b) Diremos que E é *completo* se toda rede de Cauchy em E for convergente em E.

Definição 1.2.9. a) Um EVT E é dito *metrizável* se existe uma métrica em E que define a topologia de E.

b) Seja E um espaço vetorial. Dizemos que uma métrica d em E é *invariante por translações* se

$$d(x, y) = d(x + a, y + a), \text{ para todos } x, y, a \in E.$$

c) Dizemos que uma uma métrica d de um espaço métrico X é *limitada* se existe $M > 0$ tal que

$$d(x, y) < M, \text{ para todos } x, y \in X.$$

Teorema 1.2.10. *(Vide [21], Teorema 12.2) Seja E um ELC de Hausdorff. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) E é metrizável com uma métrica limitada e invariante por translações.

b) E é metrizável,

c) Existe uma sequência de seminormas que define a topologia de E.

Definição 1.2.11. Dizemos que um ELC E é de *Fréchet* se ele é metrizável e completo.

Exemplo 1.2.12. (Vide [7], p. 20) a) O espaço $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ munido da topologia apresentada no Exemplo 1.2.7 é um espaço de Fréchet.

b) O espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ munido da topologia apresentada no Exemplo 1.2.7 é um espaço de Fréchet.

Definição 1.2.13. Sejam E e F espaços vetoriais topológicos. Denotamos por $\mathcal{L}(E; F)$ o conjunto de todas a aplicações $T : E \to F$ lineares e contínuas.

A seguir enunciaremos uma proposição que será de grande utilidade para provarmos a continuidade de algumas transformações lineares ao longo do texto.

Proposição 1.2.14. *(Vide [21], Proposição 6.2) Sejam E e F dois ELC's e sejam P e Q duas famílias de seminormas que definem as topologias de E e F, respectivamente. Então uma aplicação linear $T : E \to F$ é contínua se, e somente se, dada $q \in Q$ existem $p \in P$ e $c > 0$ tais que*

$$q(Tx) \leq cp(x),$$

para todo $x \in E$.

Definição 1.2.15. Um subespaço vetorial F de E é dito complementado se existe $T \in \mathcal{L}(E; E)$ tal que $T^2 = T$ e $T(E) = F$.

Proposição 1.2.16. *(Vide [21], p. 28) Seja E um EVT de Hausdorff e F um subespaço de E complementado. Então F é um subespaço fechado.*

Proposição 1.2.17. *(Vide [21], p. 28) Sejam E e F dois EVT's, $S \in \mathcal{L}(E; F)$ e $T \in \mathcal{L}(F; E)$ tais que $T \circ S = Id_E$. Então E é topologicamente isomorfo a um subespaço complementado de F.*

1.3 Funções holomorfas entre espaços localmente convexos

Nessa seção trabalharemos com objeto central desse trabalho: o espaço $\mathcal{H}(U; F)$, onde E e F são dois ELC's e $U \subset E$ é um aberto. Nos baseamos nas referências [2], [3], [7] e [11]. Além disso, recomendamos essas mesmas referências para um estudo mais aprofundado do tema.
Dado um EVT complexo E, denotamos por E' o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos de E.

Definição 1.3.1. Sejam E e F dois ELC's sobre $\mathbb{C}$ e $U \subset E$ um aberto. Dizemos que $f : U \to F$ é *G-holomorfa* se para cada $\xi \in U$, $\eta \in E$ e $\phi \in F'$, a função de uma variável complexa

$$\lambda \mapsto \phi \circ f(\xi + \lambda\eta)$$

é holomorfa em uma certa vizinhança de zero. Denotamos por $\mathcal{H}_G(U; F)$ o conjunto de todas as funções G-holomorfas de U em F. Se $F = \mathbb{C}$, denotamos $\mathcal{H}_G(U; F)$ por $\mathcal{H}_G(U)$.

Definição 1.3.2. Sejam E e F dois ELC's sobre $\mathbb{C}$ e $U \subset E$ um aberto. Dizemos que $f : U \to F$ é *holomorfa* se $f \in \mathcal{H}_G(U; F)$ e f é contínua. Denotamos por $\mathcal{H}(U; F)$ o conjunto de todas as funções holomorfas de U em F. Se $F = \mathbb{C}$, escrevemos $\mathcal{H}(U)$ no lugar de $\mathcal{H}(U; F)$.

No Capítulo 3 trabalharemos bastante com o caso onde $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ e $F = \mathbb{C}$, isto é $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$.
Agora, estabeleceremos algumas definições para enunciarmos uma proposição que diz que a definição acima generaliza a definição de holomorfia em dimensão finita apresentada no Exemplo 1.2.7 item b).

Definição 1.3.3. Sejam $E_1, \cdots, E_n$ e F espaços vetoriais complexos. Dizemos que a aplicação $T : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ é *n-linear*, se T for linear em cada coordenada, isto é, se para todo $i = 1, \ldots, n$, $v_1 \in E_1, \ldots, v_i, v_i' \in E_i, \ldots, v_n \in E_n$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, valer

$$T(v_1, \ldots, v_i + \alpha v_i', \ldots, v_n) = T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + \alpha T(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_n).$$

Denotaremos por $\mathcal{L}_a(^nE;F)$ o conjunto de todas a aplicações n-lineares de E^n em F. Quando E e F forem ELC's denotaremos por $\mathcal{L}(^nE;F)$ o conjunto de todas as aplicações n-lineares contínuas de E^n em F. Por convenção, denotaremos por $\mathcal{L}(^0E;F)$ o conjunto de todas as aplicações constantes de E em F.

Definição 1.3.4. Sejam E e F dois espaços vetoriais complexos e $n \in \mathbb{N}_0$. Uma função $P : E \to F$ é dita ser um *polinômio n-homogêneo* se existe alguma aplicação n-linear A de E^n em F tal que $P(x) = A(\underbrace{x, \ldots, x}_{n \text{ vezes}})$ para todo $x \in E$.

No caso de E e F serem dois ELC's, denotamos por $\mathcal{P}(^nE;F)$ o conjunto de todos os polinômios n-homogêneos contínuos de E em F.

Seja U um subconjunto aberto de um ELC E. Para cada $a \in U$ definimos o conjunto

$$B_a = \{b \in E : a + \lambda b \in U, \ , \lambda \in \mathbb{C}, \ |\lambda| \leq 1\}.$$

Proposição 1.3.5. *(Vide [11], Proposition 3.2) Sejam U um subconjunto aberto em um ELC E e F um ELC completo. Uma função $f : U \to F$ é holomorfa se, e somente se, para cada $a \in U$ existe uma única sequência de polinômios contínuos $(P_{f,a,j})_{j=0}^{\infty}$, $P_{f,a,j} \in \mathcal{P}\left(^jE;F\right)$, tal que*

$$f(a + x) = \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} P_{f,a,j}(x),$$

para todo $x \in B_a$.

A proposição acima deixa claro que a Definição 1.3.2 generaliza a definição de função holomorfa dada no Exemplo 1.2.7 (b). De fato, basta observar que no Exemplo 1.2.7 a função

$$z = (z_1, \cdots, z_n) \mapsto z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n},$$

é um polinômio pertencente ao espaço $\mathcal{P}(^{(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)}\mathbb{C}^n)$, para cada $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0$.

Vamos agora introduzir a topologia sobre o espaço $\mathcal{H}(U;F)$ que usaremos ao longo desse trabalho, a saber, a topologia compacto-aberta τ_0. Existem outras topologias usuais sobre este espaço, por exemplo as topologias τ_δ e τ_ω, porém não as utilizaremos nesse trabalho. Para os leitores interessados recomendamos as referências [2] e [3].

Definição 1.3.6. A *topologia compacto-aberta* de $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$, denotada por τ_0, é a topologia localmente convexa gerada pelas seminormas $p_K : \mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right) \to \mathbb{R}$, dadas por

$$p_K(f) = \textstyle\sup_{z \in A} |f(z)|,$$

com $K \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ compacto.

Definição 1.3.7. a) Seja $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. O *operador translação por a* $\tau_a : \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}) \to \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ é dado por

$$\tau_a(f)(x) = f(x - a)$$

b) Dizemos que um operador linear e contínuo $L : \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}) \to \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ é um *operador de convolução* se

$$L(\tau_a f) = \tau_a(Lf)$$

para toda $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ e $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Do mesmo modo é definido operador de convolução sobre o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, com $n \in \mathbb{N}$. Além disso, dizemos que um operador de convolução é *não trivial* se não é um múltiplo escalar da identidade.

Exemplo 1.3.8. a) Os operadores translação sobre o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ ou sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, são operadores de convolução.
b) Considere *operador derivação* $D : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}(\mathbb{C})$, o qual $D(f) = f'$, onde f' é a derivada da função f. Tal operador é um exemplo de operador de convolução sobre o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

1.4 Ações de grupos

Nessa seção apresentaremos um conceito que será de suma importância para o Capítulo 2, a saber o conceito de ação de grupo. Recentemente alguns pesquisadores têm estudado diferentes noções de dinâmica no contexto de ações de grupo sobre certos espaços como, por exemplo, em [1].

Definição 1.4.1. Sejam G um conjunto e $\cdot : G \times G \to G$ uma função. Dizemos que o par $(G, \cdot)$ é um *grupo* sempre que:
i) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ para todos $a, b, c \in G$.
ii) Existe $e \in G$ tal que $a \cdot e = e \cdot a = a$ para todo $a \in G$.
iii) Para todo $a \in G$ existe $b \in G$ tal que $a \cdot b = b \cdot a = e$.

A função $\cdot : G \times G \to G$ acima também é chamada de *operação*. Quando não houver necessidade de se especificar a operação do grupo escreveremos ab ao invés de $a \cdot b$. Prova-se que o elemento e do axioma ii) é único e este recebe o nome de *elemento neutro de* G. Além disso, se prova que para cada $a \in G$ o elemento b que satisfaz o axioma iii) é único. Este por sua vez recebe o nome de *elemento inverso de* a e é denotado por a^{-1}.

Definição 1.4.2. Sejam G um grupo com elemento identidade e e X um conjunto. Uma *ação do grupo* G em X é uma função

$$\begin{array}{rccc} \star : & G \times X & \to & X \\ & (g, x) & \mapsto & g \star x \end{array}$$

que satisfaz os seguintes axiomas:

i) $e \star x = x$, $\forall x \in x$,

ii) $g \star (h \star x) = (gh) \star x \ \forall g, h \in G$ e $\forall x \in X$.

Nós escrevemos a ação do grupo G em X simplesmente por G. Se X for um espaço topológico e a aplicação $x \mapsto g \star x$ for contínua para cada $g \in G$ então dizemos que a ação de grupo é contínua.

Quando não houver necessidade de se especificar a função $\star$ escreveremos gx ao invés de $g \star x$.

Exemplo 1.4.3. Em qualquer grupo $(G, \cdot)$ a multiplicação à esquerda $(g, x) \mapsto g \cdot x$ é uma ação do grupo G em G. Em particular as operações de adição e multiplicação de números reais são ações do grupo $\mathbb{R}$ em si mesmo.

Definição 1.4.4. Seja H um subconjunto de G. Dizemos que H é um *subgrupo de* G se as seguintes propriedades são satisfeitas:

i) $a \cdot b \in H$, para todos $a, b \in H$.

ii) $a^{-1} \in H$, para todo $a \in H$.

Definição 1.4.5. Seja G um grupo e H um subgrupo de G. Sobre G definimos a seguinte relação de equivalência:

$$a \sim b \text{ se, e somente se, existe } h \in H \text{ tal que } b = ah.$$

Denotaremos a classe de equivalência do elemento $a \in G$ por aH e a chamaremos de *classe lateral à esquerda* de H.

Como relações de equivalência particionam o conjunto, segue que

$$G = \bigcup_{a \in G} aH.$$

Além disso, se para cada classe lateral à esquerda escolhermos um único representante e denotarmos por I o conjunto desses representantes, temos que

$$G = \bigsqcup_{a \in I} aH,$$

onde o símbolo $\bigsqcup$ denota uma união disjunta. Denotamos por $(G : H)$ a cardinalidade do conjunto de classes laterais à esquerda.

1.5 Espaços uniformes

O conceito de espaço uniforme é uma generalização do conceito de espaço métrico. Essa é uma das principais noções desse trabalho, visto que a utilizaremos em todos os capítulos. Como caso particular de espaços uniformes nós temos os EVT's. Na busca por generalizar algumas noções de dinâmica para EVT's, optamos por estudar estas noções no contexto de espaços uniformes já que, recentemente, alguns pesquisadores têm estudado certas definições de dinâmica neste contexto (por exemplo [1] e [27]). Recomendamos a referência [17] para um aprofundamento sobre a teoria dos espaços uniformes. Antes da próxima definição precisaremos introduzir algumas operações entre conjuntos. Seja X um conjunto. Então:

a) A *diagonal* de $X \times X$ é o conjunto $\Delta = \{(x, x); x \in X\}$.

b) O *inverso* A^{-1} do subconjunto $A \subset X \times X$ é o conjunto $A^{-1} = \{(y, x); (x, y) \in A\}$. Dizemos que um conjunto é *simétrico* se ele é igual ao seu inverso.

c) A *composição* $A \circ B$ de dois subconjuntos de $X \times X$ é definida como

$$A \circ B = \{(x, z); \text{ existe } y \in X \text{ tal que } (x, y) \in A \text{ e } (y, z) \in B\}$$

Nós também escrevemos $A(x) = \{y \in X; (x, y) \in A\}$ onde A é um subconjunto de $X \times X$.

Definição 1.5.1. Uma coleção não vazia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de $X \times X$ é chamada de *estrutura uniforme em* X se satisfaz os seguintes axiomas:

(1) Se $U \in \mathcal{U}$, então $\Delta \subset U$.

(2) Se $U \in \mathcal{U}$ e $U \subset V \subset X \times X$, então $V \in \mathcal{U}$.

(3) Se $U, V \in \mathcal{U}$, então $U \cap V \in \mathcal{U}$.

(4) Se $U \in \mathcal{U}$, então $U^{-1} \in \mathcal{U}$.

(5) Se $U \in \mathcal{U}$, então existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V \circ V \subset U$.

Quando X tem uma estrutura uniforme $\mathcal{U}$ nós dizemos que $(X, \mathcal{U})$ é um *espaço uniforme*.

Definição 1.5.2. Seja $(X, \mathcal{U})$ um espaço uniforme. A *topologia uniforme* sobre X é a família de todos os subconjuntos T de X tal que para todo $x \in T$ existe $U \in \mathcal{U}$ com $U(x) \subset T$.

Definição 1.5.3. Seja $(X, \mathcal{U})$ um espaço uniforme. Um subconjunto $\mathcal{B}$ de $\mathcal{U}$ é chamado de uma *base* para a estrutura uniforme $\mathcal{U}$ se cada elemento de $\mathcal{U}$ contém um elemento de $\mathcal{B}$.

Proposição 1.5.4. *(Vide [17], p.177) Seja X um conjunto não vazio. Uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de $X \times X$ é uma base para alguma estrutura uniforme $\mathcal{U}$ se, e somente se, cumpre as condições abaixo:*

a) Cada elemento de $\mathcal{B}$ contém a diagonal Δ.

b) Se $B \in \mathcal{B}$, então B^{-1} contém um elemento de $\mathcal{B}$.

c) Se $B \in \mathcal{B}$, então existe um elemento $B_1 \in \mathcal{B}$ tal que $B_1 \circ B_1 \subset B$.

d) A intersecção de dois elementos de $\mathcal{B}$ contém um elemento de $\mathcal{B}$.

Além disso, $\mathcal{B}$ é base para uma única estrutura uniforme.

Exemplo 1.5.5. a) **Espaços métricos:** Todo espaço métrico (X, d) pode ser visto como um espaço uniforme. De fato, para cada $\varepsilon > 0$ considere o conjunto

$$\Delta_\varepsilon = \{(x, y) : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Tome $\mathcal{B} = \{\Delta_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$. Utilizando a proposição anterior se verifica que $\mathcal{B}$ é uma base para uma única estrutura uniforme $\mathcal{U}$. Portanto $(X, \mathcal{U})$ é um espaço uniforme.
Além disso, a topologia uniforme de $(X, \mathcal{U})$ coincide com a topologia usual de (X, d). De fato, tome A um aberto não vazio, na topologia usual de (X, d). Então, para $x \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset A$. Daí segue que $\Delta_\varepsilon(x) = B(x, \varepsilon) \subset A$. Como x é qualquer em A, segue que A é um aberto na topologia uniforme.
Reciprocamente, tome A um aberto não vazio, segundo a topologia uniforme e $x \in A$. Portanto existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U(x) \subset A$. Como $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathcal{U}$, segue que existe $\Delta_\varepsilon \subset U$. Logo, como $U(x) \subset A$, então $\Delta_\varepsilon(x) \subset A$. Pelo fato de $B(x, \varepsilon) = \Delta_\varepsilon(x)$ e $x \in A$ é arbitrário, concluímos a prova de tal afirmação.

b) **Espaços vetoriais topológicos:** Todo EVT E pode ser visto como um espaço uniforme. De fato, seja B_0 o conjunto de todas as vizinhanças de zero. Para cada $U \in B_0$ consideramos o seguinte conjunto

$$\Delta_U = \{(x, y) \in E \times E : x - y \in U\}.$$

Tome $\mathcal{U} = \{\Delta_U : U \in B_0\}$. Facilmente se verifica que $\mathcal{U}$ cumpre os cinco axiomas da definição de estrutura uniforme. Portanto $(X, \mathcal{U})$ é um espaço uniforme.
Além disso, a topologia uniforme de $(X, \mathcal{U})$ coincide com a topologia usual de E. Como E é um EVT, basta mostrarmos que A é um aberto que contém 0 segundo uma topologia se, e somente se, A é um aberto que contém 0 segundo a outra topologia, visto que os demais abertos serão translações desses abertos que contém 0.
Seja A um aberto que contém contém 0, segundo a topologia usual de E e seja $x \in A$. Como A é um aberto que contém x, então pela Proposição 1.2.2 existe um aberto $B \in B_0$ tal que $x + B \subset A$. Portanto $\Delta_B(x) \subset A$. Como $x \in A$ é qualquer, segue que A é um aberto segundo a topologia uniforme.
Reciprocamente, seja A um aberto que contém 0 segundo a topologia uniforme e seja $x \in A$. Logo existe um aberto $B \in B_0$ tal que $\Delta_B(x) \subset A$. Portanto $x + B \subset A$. Como $x \in A$ é qualquer, concluímos a prova de tal afirmação.

As seguintes proposições serão utilizadas na primeira seção do Capítulo 2.

Proposição 1.5.6. *(Vide [17], Theorem 8, p. 180) Seja $(X,\mathcal{U})$ um espaço uniforme. Para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $W \in U$ fechado e simétrico tal que $W \subset U$.*

Proposição 1.5.7. *(Vide [17], Theorem 6, p. 179) Seja $(X,\mathcal{U})$ um espaço uniforme. Se $U \in \mathcal{U}$, então $Int(U) \in \mathcal{U}$.*

Proposição 1.5.8. *Sejam G uma ação de grupo contínua sobre um espaço uniforme $(X,\mathcal{U})$ e $V \in \mathcal{U}$.*
a) Sejam $g \in G$ e $q \in X$ tal que $gq = q$. Então existe um conjunto aberto $W_g \subset V$ em $X \times X$ tal que $(gx, gy) \in V$ para todo $(x, y) \in W_g$.
b) Seja $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \to x$ na topologia uniforme. Seja $A \subset X \times X$ tal que A é aberto e $(x, x) \in A$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(x_n, x) \in A$ para todo $n \geq n_0$.

Demonstração. a) Pela Proposição 1.5.7, $\mathrm{Int}(V) \in \mathcal{U}$, logo $(q, q) \in \mathrm{Int}(V)$. Pela definição de topologia produto existem abertos A_1 e A_2 contendo q tal que $A_1 \times A_2 \subset \mathrm{Int}(V)$. Tomando $A := A_1 \cap A_2$, segue que $(q, q) \in A \times A \subset \mathrm{Int}(V)$. Pela continuidade da aplicação $x \mapsto gx$ (logo a aplicação $(x, y) \mapsto (gx, gy)$ é continua) e por $gq = q$ existe um aberto $W_g \subset A$ contendo q tal que $gW_g \subset A$. Logo $(gx, gy) \in A \times A \subset V$ para todo $(x, y) \in W_g$.
b) Pela topologia produto em $X \times X$ existe um aberto $B \subset X$ tal que $(x, x) \in B \times B \subset A$. Como $x_n \to x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ temos que $x_n \in B$. Portanto $(x_n, x) \in B \times B \subset A$ para todo $n \geq n_0$. □

1.6 Definições e propriedades dinâmicas

Nessa seção apresentaremos definições e resultados da teoria de Sistemas Dinâmicos. Tais conceitos serão úteis para todos os demais capítulos desse trabalho. Daremos um enfoque maior para o ramo da dinâmica linear, o qual é o principal tema deste trabalho. Nos baseamos nas referências [7] e [15]. Além disso, recomendamos essa última referência para os leitores que desejarem se aprofundar nos estudos do ramo da dinâmica linear.

Definição 1.6.1. Um *sistema dinâmico* é um par (X, f), consistindo de um espaço topológico X e uma aplicação contínua $f : X \to X$.

Usualmente denotamos o sistema dinâmico (X, f) simplesmente por $f : X \to X$ ou apenas f.

Definição 1.6.2. Um sistema dinâmico $f : X \to X$ é dito *topologicamente transitivo* se para quaisquer dois abertos não vazios $U, V \subset X$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Definição 1.6.3. Um sistema dinâmico $f : X \to X$ é dito *misturador* se para quaisquer dois abertos não vazios $U, V \subset X$, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, para todo $n \geq N$.

Obviamente, mistura implica em transitividade topológica.

Definição 1.6.4. Seja $f : X \to X$ um sistema dinâmico. Dado $V \subset X$, chamamos de *órbita* de V sob f, e denotamos por $\text{orb}_f(V)$, o conjunto

$$\text{orb}_f(V) := \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(V),$$

onde $f^0(V) := V$. Quando V é unitário, digamos $V = \{x\}$, denotamos $\text{orb}_f(\{x\})$ por $\text{orb}(f, x)$.

Sejam $f : X \to X$ e $x \in X$. Dizemos que o ponto x é *periódico* se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$.

Definição 1.6.5. Seja $f : X \to X$ um sistema dinâmico. Dizemos que f é *hipercíclico* se existe $x \in X$ tal que $\overline{\text{orb}(f, x)} = X$. O ponto x é dito *ponto hipercíclico* ou *vetor hipercíclico*, no caso de X ser um espaço vetorial topológico.

Note que, se f for hipercíclico, então X é separável. A seguir veremos um resultado que apresenta uma importante classe de operadores hipercíclicos. Tal resultado clássico é devido à Godefroy e Shapiro.

Teorema 1.6.6. *(Vide [14], Theorem 5.1) Todo operador de convolução sobre o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, que não é múltiplo escalar da identidade, é hipercíclico.*

A situação do teorema acima muda drasticamente quando consideramos operadores de convolução sobre o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$, como veremos no Capítulo 3.

Proposição 1.6.7. *(Vide [15], Proposition 1.15) Seja $f : X \to X$ um sistema dinâmico. Se f é hipercíclcico, então f é topologicamente transitivo.*

Quando se considera o contexto dos espaços métricos completos sem pontos isolados, a volta da proposição acima é verdadeira. Tal resultado é conhecido como Teorema da transitividade de Birkhoff, o qual enunciaremos a seguir.

Teorema 1.6.8. ***(Transitividade de Birkhoff):*** *(Vide [15], Theorem 1.16) Seja X um espaço métrico completo sem pontos isolados e $f : X \to X$ contínuo. Então f é topologicamente transitivo se, e somente se, f é hipercíclico.*

Quando se considera o contexto de EVT's em geral, tal equivalência não é verdadeira. Veremos a razão disso no Capítulo 3. Agora trabalharemos com algumas noções mais fracas que o conceito de hiperciclicidade.

Definição 1.6.9. Seja E um EVT e $T : E \to E$ um operador contínuo. Dizemos que T é *cíclico* se existe $x \in E$ tal que $\overline{\text{span}(\text{orb}(T, x))} = E$. O vetor x é dito *vetor cíclico* para T.

Definição 1.6.10. Seja E um EVT e $T : E \to E$ um operador contínuo. Dizemos que T é n-*supercíclico* se existe algum subespaço V de E de dimensão n, tal que $\overline{\mathrm{orb}_T(V)} = E$. Em tal caso, V é dito um subespaço *supercíclico* para T. Um operador 1-supercíclico é geralmente chamado apenas por *supercíclico*.

Com base nas definições acima, segue o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hiperciclicidade} & \Rightarrow & \text{Superciclicidade} & \Rightarrow & \text{Ciclicidade} \\ & & \Downarrow & & . \\ & & n\text{-Superciclicidade} & & \end{array}$$

No Capítulo 3, mostraremos que os operadores de convolução sobre o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ não são cíclicos nem n-supercíclicos.

Trabalharemos agora com a noção de caos Li-Yorke, a qual será um conceito bem importante no decorrer desse trabalho. Tal noção de caos foi apresentada em [19] por Li e Yorke no contexto de espaços métricos e, no caso linear, foi inicialmente explorada no contexto de espaços de Banach. Porém, ela foi recentemente estudada no contexto de espaços de Fréchet, recuperando vários resultados válidos no caso de espaços de Banach (vide [5]).

A seguir vamos expor a noção de caos Li-Yorke no contexto de espaços métricos.

Definição 1.6.11. Sejam (X, d) um espaço métrico e $f : X \to X$ uma função contínua. Um par $(x, y) \in X \times X$ é dito um *par Li-Yorke* para f se

$$\liminf_n d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \quad \text{e} \quad \limsup_n d(f^n(x), f^n(y)) > 0.$$

Dizemos que um conjunto $S \subset X$ é *misturado* se todo par (x, y) de elementos distintos de S for um par Li-Yorke. A função f é dita *Li-Yorke caótica* se X admite um subconjunto misturado não enumerável.

Em [1] o autor propõe uma definição de caos Li-Yorke para o contexto de ações de grupo sobre espaços uniformes, no Capítulo 2 desse trabalho a abordaremos melhor. Em [8], os autores adaptam a definição de [1] para o contexto de operadores lineares contínuos sobre EVT's. A seguir mostraremos tal definição.

Definição 1.6.12. (Vide [8]) Seja $T : E \to E$ um operador linear contínuo sobre um EVT E. Um par $(x, y) \in E \times E$ é dito um *par Li-Yorke* para T se a sequência $(T^n(x - y))_{n \in \mathbb{N}}$ não converge para zero, mas possui uma subrede que converge para zero. Dizemos que um conjunto $S \subset X$ é *misturado* se todo par (x, y) de elementos distintos de S for um par Li-Yorke. O operador T é dito *Li-Yorke caótica* se X admite um subconjunto misturado não enumerável.

Observação 1.6.13. (A definição anterior é coerente): Como um espaço de Fréchet, além de ser um EVT, é também um espaço métrico, precisamos mostrar que nesse caso as Definições 1.6.11 e 1.6.12 são equivalentes. Para isso, basta mostrarmos que um par é Li-Yorke segundo a Definição 1.6.11 se, e somente se é Li-Yorke segundo a Definição 1.6.12. Seja $T : E \to E$ um operador linear continuo sobre um espaço de Fréchet E.

Suponha que $(x, y) \in E \times E$ é um par Li-Yorke segundo a Definição 1.6.11. Portanto utilizando o fato de que a métrica em um espaço de Fréchet é invariante por translações e T é linear segue que

$$\liminf_n d(T^n(x - y), 0) = 0 \quad \text{e} \quad \limsup_n d(T^n(x - y), 0) > 0\cdot$$

Por definição de limite superior e inferior, segue que a sequência $(T^n(x - y))_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para zero, mas possui uma subsequência que converge para zero. Como toda subsequência é uma subrede da sequência, concluímos que o par (x, y) é Li-Yorke segundo a Definição 1.6.12.

Suponha agora que $(x, y) \in E\times E$ é um par Li-Yorke segundo a Definição 1.6.12. Como $(T^n(x-y))_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para zero segue que $\limsup_n d(T^n(x - y), 0) > 0$. Como T é linear e d é invariante por translações segue que $\limsup_n d(T^n(x), T^n(y)) > 0$. Resta mostrar que $\liminf_n d(T^n(x), T^n(y)) = 0$. Como existe uma subrede de $(T^n(x - y))_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para zero, conseguimos encontrar uma subsequência estritamente crescente de naturais $(n_k)_k$ tal que $\lim_k d(T^{n_k}(x-y), 0) = 0$. Logo, novamente utilizando o fato de T ser linear e d invariante por translações, segue que $\liminf_n d(T^n(x), T^n(y)) = 0$. Portanto (x, y) é um par Li-Yorke segundo a Definição 1.6.11.

Definição 1.6.14. Seja $T : E \to E$ um operador linear contínuo sobre um EVT E. Dizemos que o vetor $x \in E$ é *semi-irregular* se a sequência $(T^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para zero, mas possui uma subrede que converge para zero.

O seguinte teorema, provado pelos autores em [8] será de grande importância no Capítulo 3. O resultado diz que no contexto de operadores lineares sobre EVT's basta encontramos um vetor semi-irregular para que este operador seja Li-Yorke caótico.

Teorema 1.6.15. *(Vide [8], Theorem 3.4) Seja $T : E \to E$ um operador linear contínuo sobre um EVT E. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) T é Li-Yorke caótico.

ii) T admite um par Li-Yorke,

iii) T admite um vetor semi-irregular.

Como todo vetor hipercíclico é um vetor semi-irregular, segue um corolário do teorema acima.

Corolário 1.6.16. *Seja $T : E \to E$ um operador linear contínuo sobre um EVT E. Se T é hipercíclico, então T é Li-Yorke caótico.*

Veremos no Capítulo 3 que não vale a volta do corolário acima. Outras noções de caos serão vistas no Capítulo 2.

Apresentaremos agora a versão do caos de Devaney no contexto de funções sobre espaços métricos. Na primeira seção do próximo capítulo, apresentaremos tal definição no âmbito de ações de grupo sobre espaços uniformes.

Definição 1.6.17. (Caos de Devaney): Seja $f : X \to X$ um sistema dinâmico. Dizemos que f é *Devaney caótica* se f é topologicamente transitiva e X possui um conjunto denso de pontos periódicos.

Capítulo 2

Dinâmica no contexto de espaços uniformes

2.1 Caos Li-Yorke no contexto de ações de grupo sobre espaços uniformes

A definição de caos Li-Yorke no contexto de ações de grupo sobre espaços uniformes foi introduzida por Arai em [1] provando, dentre outros resultados, que vale a implicação

$$\text{Caos Devaney} \quad \Rightarrow \quad \text{Caos Li-Yorke} \ ,$$

a qual já era conhecida para o caso de funções sobre espaços métricos (veja [25]). Nessa seção vamos apresentar a prova de tal implicação, detalhando o artigo [1]. Nessa seção G denotará a ação de um grupo G sobre um espaço uniforme $(X, \mathcal{U})$ ou, mais geralmente, sobre um espaço topológico X.

Definição 2.1.1. a) A *órbita* de um ponto $x \in X$ é o conjunto $Gx = \{gx : g \in G\}$.
b) Sejam um subespaço $Y \subset X$ e um subgrupo $G' \subset G$. Definimos o conjunto

$$T(Y, G') = \Big\{x \in Y : \mathrm{Cl}_Y(G'x) = Y\Big\}.$$

c) Um ponto $p \in X$ é dito *periódico* se Gp é finito. Denotamos por P o conjunto de todos os pontos periódicos.
d) Dado $p \in X$ definimos o *estabilizador* de p como sendo o conjunto $G_{p,0} = \{g \in G : gp = p\}$.

Proposição 2.1.2. *a) $G_{p,0}$ é um subgrupo de G.*
b) $p \in P$ se, e somente se, $(G_{p,0} : G)$ é finito.

Demonstração. a) Se $g, h \in G_{p,0}$, então $gp = p$ e $hp = p$. Portanto $(gh)p = g(hp) = gp = p$. Logo $gh \in G_{p,0}$. Agora, como $gp = p$, multiplicando ambos os lados da igualdade por g^{-1}, obtemos que

$g^{-1}p = p$. Logo $g^{-1} \in G_{p,0}$.

b) O ponto p é periódico se, e somente se, o conjunto $Gp = \{gp : g \in G\}$ é finito. Esta última afirmação é equivalente a dizer que o conjunto $\{gpG_{p,0} : g \in G\} = \{gG_{p,0} : g \in G\}$ é finito, isto é, $(G_{p,0} : G)$ é finito. □

Observação 2.1.3. Pela proposição acima se $p \in P$ então $(G_{p,0} : G)$ é finito, digamos $(G_{p,0} : G) := n(p)$. Seja $\left\{e = h_0, \cdots, h_{n(p)-1}\right\}$ o conjunto dos representantes de classe a esquerda de $G_{p,0}$ em G e denote por $G_{p,i} := h_i G_{p,0}$, com $i = 0, \cdots, n(p)-1$. Logo temos

$$G = \bigsqcup_{i=0}^{n(p)-1} G_{p,i}. \tag{2.1}$$

e $Gp = \{h_i p : i = 0, \cdots, n(p)-1\}$.

Definição 2.1.4. a) Dizemos que uma ação do grupo G sobre um espaço topológico X é *topologicamente transitiva*, ou simplesmente *transitiva*, se para cada par de abertos não vazios A, B de X, existe $g \in G$ tal que $gA \cap B \neq \emptyset$.

b) Dizemos que uma ação de grupo G sobre o espaço uniforme $(X,\mathcal{U})$ é *sensitiva* se existe $U \in \mathcal{U}$ tal que para todo $x \in X$ e toda vizinhança N_x de x existir $y \in N_x$ e $g \in G$ tal que $(gx, gy) \notin U$.

Definição 2.1.5. (Caos Devaney) Dizemos que uma ação de um grupo G sobre o espaço uniforme $(X,\mathcal{U})$ é *Devaney caótica* se G é topologicamente transitiva e o conjunto P dos pontos periódicos é denso em X.

Definição 2.1.6. Seja G uma ação de grupo sobre o espaço uniforme $(X,\mathcal{U})$.

a) Denotamos por $\mathcal{G}_0$ o conjunto das sequências $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos finitos de G onde $G_i \subset G_{i+1}$.

b) Dizemos que os elementos $x, y \in X$ são *assintóticos* se para todo $U \in \mathcal{U}$ e para toda $(G_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{G}_0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(gx, gy) \in U$ para todo $g \in G \setminus G_k$. Denotamos

$$AR = \{(x, y) \in X \times X : x \text{ e } y \text{ são assintóticos}\}.$$

Para $x \in X$ denotamos

$$AR(x) = \{y \in X : (x, y) \in AR\}.$$

c) Dizemos que os elementos $x, y \in X$ são *proximais* se para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $g \in G$ tal que $(gx, gy) \in U$. Denotamos

$$PR = \{(x, y) \in X \times X : x \text{ e } y \text{ são proximais}\}.$$

Para $x \in X$ denotamos

$$PR(x) = \{y \in X : (x, y) \in PR\}.$$

Observação 2.1.7. Por conta da própria definição da estrutura uniforme $\mathcal{U}$ segue que os conjuntos AR e PR são simétricos. Observamos também que os mesmos podem serem escritos como

$$AR = \bigcap_{U\in\mathcal{U}} \bigcap_{(G_i)\in\mathcal{G}_0} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{g\in G\setminus G_k} (g \times g)^{-1}(U),$$

e

$$PR = \bigcap_{U\in\mathcal{U}} \bigcup_{g\in G} (g \times g)^{-1}(U)$$

onde $(g \times g)^{-1}(U) = \{(x, y); (gx, gy) \in U\}$.

Observação 2.1.8. Utilizando a Proposição 1.5.7, se mostra que

$$AR = \bigcap_{U\in\mathcal{U}} \bigcap_{(G_i)\in\mathcal{G}_0} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{g\in G\setminus G_k} (g \times g)^{-1}(\mathrm{Int}(U)),$$

e

$$PR = \bigcap_{U\in\mathcal{U}} \bigcup_{g\in G} (g \times g)^{-1}(\mathrm{Int}(U))$$

Observação 2.1.9. Se G é uma ação de grupo contínua sobre X então os conjuntos PR, AR, $PR(x)$ e $AR(x)$ são conjuntos G_δ para todo $x \in X$. De fato, pela observação anterior segue que PR e AR são conjuntos G_δ. Agora tome $x \in X$. Note que a função $y \mapsto (gx, gy)$, a qual denotaremos por f_g, é contínua (visto que as funções $f_1 : y \mapsto gy$ e $f_2 : y \mapsto (gx, y)$ são contínuas e $f_g = f_2 \circ f_1$) e

$$PR(x) = \bigcap_{U\in\mathcal{U}} \bigcup_{g\in G} f_g^{-1}(U).$$

Utilizando a Proposição 1.5.7 segue que

$$PR(x) = \bigcap_{U\in\mathcal{U}} \bigcup_{g\in G} f_g^{-1}(\mathrm{Int}(U)).$$

Portanto $PR(x)$ é um conjunto G_δ. Fazendo a mesma análise concluímos que $AR(x)$ é um conjunto G_δ.

Observação 2.1.10. (A definição anterior é natural) Seja (X, d) um espaço métrico e $f : X \to X$ uma função contínua. Lembramos, da seção de espaços uniformes, que $(X,\mathcal{U})$ é um espaço uniforme onde

$$\mathcal{B} = \{\Delta_\varepsilon : \Delta_\varepsilon = \{(x, y) : d(x, y) < \varepsilon\}\ ,\ \varepsilon > 0\},$$

é uma base para a estrutura uniforme $\mathcal{U}$. Além disso, a topologia uniforme coincide com a topologia oriunda da métrica. Nesse contexto dos espaços métricos, dizemos que os elementos $x, y \in X$ são *assintóticos* se $\lim_n d(f^n(x), f^n(y)) = 0$ e são *proximais* se $\liminf_n d(f^n(x), f^n(y)) = 0$. Assim como

na definição anterior definimos os conjuntos AR e PR como sendo o conjunto dos pares de pontos assintóticos e proximais respectivamente.
Afirmamos que os conjuntos dos pares assintóticos e proximais são dados respectivamente pelos conjuntos abaixo

$$AR = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{f^n\in G\setminus G_k} (f^n \times f^n)^{-1} (U)$$

e

$$PR = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{f^n\in G} (f^n \times f^n)^{-1} (U)$$

onde $G = \{I, f, f^2, \cdots\}$, $G_k = \{I, \cdots, f^{k-1}\}$ e $(f^n \times f^n)^{-1}(U) = \{(x, y); (f^n(x), f^n(y)) \in U\}$.
De fato, seja (x, y) um par assintótico. Tome $U \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{B}$ é uma base para $\mathcal{U}$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $\Delta_\varepsilon \subset U$. Pelo fato que $\lim_n d(f^n(x), f^n(y)) = 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$ para todo $n \geq k$, isto é, $(f^n(x), f^n(y)) \in \Delta_\varepsilon \subset U$ para todo $n \geq k$. Portanto o par (x, y) pertence ao conjunto

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcap_{f^n\in G\setminus G_i} (f^n \times f^n)^{-1} (U).$$

Como U é qualquer, segue que $(x, y) \in \bigcap_{U\in\mathcal{U}} \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcap_{f^n\in G\setminus G_i} (f^n \times f^n)^{-1} (U)$.
Suponha agora que $(x, y) \in \bigcap_{U\in\mathcal{U}} \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcap_{f^n\in G\setminus G_i} (f^n \times f^n)^{-1} (U)$. Provaremos que $\lim_n d(f^n(x), f^n(y)) = 0$. Tome $\varepsilon > 0$. Como

$$(x, y) \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcap_{f^n\in G\setminus G_i} (f^n \times f^n)^{-1} (\Delta_\varepsilon),$$

então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(f^n(x), f^n(y)) \in \Delta_\varepsilon$ para todo $n \geq k$, isto é, $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$ para todo $n \geq k$. Portanto $\lim_n d(f^n(x), f^n(y)) = 0$.
De forma similar, se mostra a igualdade referente ao conjunto dos pares proximais. Baseado nessa observação e na Observação 2.1.7 vemos que a Definição 2.1.6 é de certa forma bem natural.

Definição 2.1.11. (Caos Li-Yorke) Um subconjunto S do espaço uniforme X é dito *misturado* se $(x, y) \in PR \setminus AR$ para todo par de elementos distintos em S. Uma ação de grupo G sobre um espaço uniforme X é dita *Li-Yorke caótica* se X admite um subconjunto não enumerável misturado. Denotamos $LYR = PR \setminus AR$ e $LYR(x) = \{y \in X : (x, y) \in LYR\}$ para cada $x \in X$. Se $(x, y) \in LYR$ dizemos que (x, y) é um par *Li-Yorke misturado*.

Observamos que LYR é simétrico pois PR e AR são simétricos.
A seguir provaremos alguns lemas a fim de auxiliar na demonstração da implicação referida no início desta seção.

Definição 2.1.12. Seja G uma ação de grupo sobre um espaço topológico X.

a) Dado $U \subset X$ denotamos $G(U) := \{gx : g \in G, x \in U\}$.

b) Dizemos que $U \subset X$ é *G-invariante* se $G(U) \subset U$.

Lema 2.1.13. *Seja G uma ação de grupo sobre o espaço topológico X.*

a) Se G é transitiva então todo conjunto G-invariante aberto e não vazio é denso em X.

b) Se G é contínua e U é um aberto de X, então $G(U)$ também é aberto.

Demonstração. a) Seja $U \subset X$ G-invariante aberto e não vazio. Seja $A \subset X$ um aberto não vazio. Como G é transitiva, existe $g \in G$ tal que $gU \cap A \neq \emptyset$. Como $gU \subset U$, segue que $U \cap A \neq \emptyset$. Como A é um aberto não vazio qualquer, segue que U é denso.

b) Note que

$$G(U) = \bigcup_{g \in G} gU.$$

Como, para cada $g \in G$, a aplicação $g \mapsto gx$ é um homeomorfismo e U é aberto, segue que $G(U)$ é aberto. $\square$

Lema 2.1.14. *Seja X um espaço topológico de Baire e* 2*-enumerável. Se uma ação contínua G sobre X é transitiva, então $T(X, G)$ contém um subconjunto G_δ denso de X.*

Demonstração. Como X é 2-enumerável, então existe uma base enumerável de abertos $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$. Seja $V_i = G(U_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Obviamente V_i é G-invariante para cada i, logo pelo Lema 2.1.13 V_i é um aberto denso em X. Logo como X é de Baire segue que $V = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} V_i$ é um conjunto G_δ denso. Afirmamos que cada elemento de V tem órbita densa em X. De fato, tome $x \in V$ e um aberto não vazio A de X. Logo existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U_{i_0} \subset A$. Como $x \in V$ então $x \in V_{i_0} = G(U_{i_0})$. Portanto $gx \in U_{i_0} \subset A$ para algum $g \in G$. Como A é um aberto não vazio arbitrário, segue que a órbita de x é densa em X. $\square$

Lema 2.1.15. *Seja G uma ação de grupo contínua sobre um espaço topológico* 1*-enumerável X. Se $P \neq \emptyset$ e $T(X, G) \neq \emptyset$ então a ação do grupo $G_{p,0}$ sobre $\mathrm{Cl}_X(G_{p,0}t)$ é transitiva para todo $p \in P$ e $t \in T(X, G)$.*

Demonstração. Sejam A e B dois abertos não vazios de $\mathrm{Cl}_X(G_{p,0}t)$. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. Pela Proposição 1.1.25, existem sequências (g_n) e (g'_n) de elementos de $G_{p,0}$ tal que $g_n t \to a$ e $g'_n t \to b$. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g_n t \in A$ e $g'_n t \in B$ para todo $n \geq n_0$. Como $g'_n g_n^{-1} g_n t = g'_n t \in B$ e $g'_n g_n^{-1} \in G_{p,0}$ para todo $n \geq n_0$, segue que $(g'_n g_n^{-1} A) \cap B \neq \emptyset$ para todo $n \geq n_0$. O que completa a prova. $\square$

Lema 2.1.16. *Seja G uma ação de grupo contínua sobre um espaço topológico de Baire e 2-enumerável X. Se $P \neq \emptyset$ e $T(X,G) \neq \emptyset$ então $T\left(\mathrm{Int}_X(\mathrm{Cl}_X(G_{p,0}t), G_{p,0}\right)$ contém um subconjunto denso G_δ de $\mathrm{Int}_X(\mathrm{Cl}_X(G_{p,0}t))$ para todo $p \in P$ e $t \in T(X,G)$.*

Demonstração. Seja $Y = \mathrm{Int}_X(\mathrm{Cl}_X(G_{p,0}t)$. Para quaisquer abertos não vazios A e B de Y existe $g \in G_{p,0}$ tal que $A \cap gB \neq \emptyset$, pelo Lema 2.1.15. Como $g^{-1}A \cap B \neq \emptyset$, então

$$\mathrm{Cl}_X\left(\bigcup_{g\in G_{p,0}} g^{-1}A\right) = Y.$$

Como X é 2-enumerável, então Y também é (subespaço de espaço 2-enumerável também é 2-enumerável). Portanto existe uma base enumerável de abertos $\{C_i : i \in \mathbb{N}\}$ para a topologia de Y. Pelo que foi feito anteriormente, nós temos que $\mathrm{Cl}_X\left(\bigcup_{g\in G_{p,0}} g^{-1}C_i\right) = Y$ para cada i. Como $\bigcup_{g\in G_{p,0}} g^{-1}C_i$ é aberto e subespaço aberto de espaço de Baire é ainda um espaço de Baire, segue que Y é um espaço de Baire. Portanto $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\bigcup_{g\in G_{p,0}} g^{-1}C_i$ é um subconjunto denso G_δ de Y.
Além disso, temos que $Z := \bigcap_{i\in\mathbb{N}}\bigcup_{g\in G_{p,0}} g^{-1}C_i \subset T(Y, G_{p,0})$. De fato, dado $x \in Z$, temos que para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $g \in G_{p,0}$ tal que $x \in g^{-1}C_i$. Portanto $G_{p,0}x \cap C_i \neq \emptyset$. Como i é qualquer e os conjuntos C_i formam uma base de abertos da topologia, segue que $x \in T(Y, G_{p,0})$. □

Lema 2.1.17. *Seja G uma ação de grupo abeliana sobre o espaço uniforme $(X,\mathcal{U})$ de Hausdorff e 1-enumerável. Se existe um elemento $p \in P$ e um elemento $t \in T(X,G)$, então $PR(x)$ é subconjunto denso G_δ de $\mathrm{Cl}_X\left(G_{p,0}t\right)$ para todo $x \in T\left(\mathrm{Cl}_X\left(G_{p,0}t\right), G_{p,0}\right)$.*

Demonstração. Primeiro vamos verificar que existe um elemento $q \in \mathrm{Cl}_X\left(G_{p,0}t\right)$ tal que $G_{p,0}q = \{q\}$. Como $X = \mathrm{Cl}_X(Gt) = \bigcup_{i=0}^{n(p)-1} \mathrm{Cl}_X\left(G_{p,i}t\right)$ (aqui utilizamos (2.1) e o fato de que o fecho de uma união finita é a união dos fechos), existe $i \in \{0, \cdots, n(p)-1\}$ tal que $p \in \mathrm{Cl}_X\left(G_{p,i}t\right)$. Da Observação 2.1.3 nós temos que $G_{p,i} = h_iG_{p,0}$, logo $(h_i)^{-1}G_{p,i} = G_{p,0}$. Daí

$$gp \in g\mathrm{Cl}_X\left(G_{p,i}t\right) = \mathrm{Cl}_X\left(gG_{p,i}t\right) = \mathrm{Cl}_X\left(G_{p,0}t\right)$$

para todo $g \in (h_i)^{-1}G_{p,0}$, visto que se $g \in (h_i)^{-1}G_{p,0}$ então existe $h \in G_{p,0}$ tal que $g = (h_i)^{-1}h$. Logo

$$(h_i)^{-1}hG_{p,i} = h(h_i)^{-1}G_{p,i} = hG_{p,0} = G_{p,0}.$$

Como $(h_i)^{-1}G_{p,0}p = \left\{(h_i)^{-1}p\right\}$, segue que

$$G_{p,0}((h_i)^{-1}p) = (h_i)^{-1}G_{p,0}p = \left\{(h_i)^{-1}p\right\}.$$

Portanto tomando $(h_i)^{-1}p = q$ concluímos a nossa verificação.
Agora vamos mostrar que $G_{p,0}x \subset PR(x)$ para todo $x \in T\left(\mathrm{Cl}_X\left(G_{p,0}t\right), G_{p,0}\right)$. Note que

$$\mathrm{Cl}_X\left(G_{p,0}x\right) \cap \mathrm{Cl}_X\left(G_{p,0}t\right) = \mathrm{Cl}_X\left(G_{p,0}t\right).$$

De fato, como $x \in T\left(\mathrm{Cl}_X\left(G_{p,0}t\right), G_{p,0}\right)$ então

$$\mathrm{Cl}_{\mathrm{Cl}_X(G_{p,0}t)}\left(G_{p,0}x\right) = \mathrm{Cl}_X\left(G_{p,0}t\right),$$

daí pela Observação 1.1.6 temos que

$$\mathrm{Cl}_X\left(G_{p,0}x\right) \cap \mathrm{Cl}_X\left(G_{p,0}t\right) = \mathrm{Cl}_X\left(G_{p,0}t\right).$$

Pela Proposição 1.5.8 para todo $g \in G_{p,0}$ e $U, V \in \mathcal{U}$ com $V \circ V \subset U$, existe um aberto $W_g \in X \times X$ com $W_g \subset V$ tal que $(gy, gq) = (gy, q) \in V$ para todo $(y, q) \in W_g$. Como $q \in \mathrm{Cl}_X\left(G_{p,0}t\right) \subset \mathrm{Cl}_X\left(G_{p,0}x\right)$, pela Proposição 1.1.25 existe uma sequência $(g_i x)_i \in (G_{p,0}x)$ que converge para q. Pela Proposição 1.5.8 existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(g_n x, q) \in W_g$ para todo $n \geq n_0$. Portanto $(gg_n x, gq) = (gg_n x, q) \in V$ para todo $n \geq n_0$. Segue que

$$(g_n x, gg_n x) = (g_n x, g_n g x) \in W_g \circ V \subset V \circ V \subset U,$$

para todo $n \geq n_0$. Isso mostra que $gx \in PR(x)$. Como $g \in G_{p,0}$ é qualquer, segue que $G_{p,0}x \in PR(x)$, portanto $PR(x)$ é denso em $\mathrm{Cl}_X\left(G_{p,0}t\right)$. Pela Observação 2.1.9 sabemos que $PR(x)$ é um conjunto G_δ, o que conclui a prova. □

Lema 2.1.18. *Seja G uma ação de grupo abeliana sobre o espaço uniforme $(X,\mathcal{U})$ de Hausdorff. Se a ação de grupo G é sensitiva então $AR(x)$ é de primeira categoria para todo $x \in X$.*

Demonstração. Seja U como na Definição 2.1.4. Pela definição de estrutura uniforme e pela Proposição 1.5.6 existem $V, W \in \mathcal{U}$ simétricos, com W fechado tal que $V \circ V \subset U$ e $W \subset V$. Seja $(G_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{G}_0$ com $G_1 \neq \emptyset$. Denotamos

$$W_k(x) = \left\{ y \in X : (x, y) \in \bigcap\nolimits_{g\in G\setminus G_k} (g \times g)^{-1}(W) \right\},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Afirmamos que $\mathrm{Int}_X\left(W_k(x)\right) = \emptyset$ para cada k. Suponha que $\mathrm{Int}_X\left(W_k(x)\right) \neq \emptyset$ para algum k. Como G_k é finito nós podemos denotar $G_k := \{g_{k,1}, \cdots, g_{k,\ell_k}\}$ para algum $\ell_k \in \mathbb{N}$. Pela continuidade das aplicações $x \mapsto gx$ para todo $g \in G$, segue que para cada $g_{k,i} \in G_k$ e para cada $y \in \mathrm{Int}_X(W_k(x))$ existe uma vizinhança $N_i(y)$ de y tal que $N_i(y) \subset \mathrm{Int}_X(W_k(x))$ e $(g_{k,i}y, g_{k,i}z) \in \mathrm{Int}_X(W) \subset \mathrm{Cl}_X(W)$ para todo $z \in N_i(y)$. Tomando $N(y) = \bigcap_{i=1}^{\ell_k} N_i(y)$ segue que $(gy, gz) \in W$ para todo $g \in G_k$ e para todo $z \in N(y)$.

Além disso, como $N(y) \subset \mathrm{Int}_X(W_k(x))$ segue pela definição de $W_k(x)$ que (x, y) e (x, z) pertencem à $\bigcap_{g\in G\setminus G_k} (g \times g)^{-1}(W)$ para todo $z \in N(y)$. Logo (gx, gy) e (gx, gz) pertencem à W para todo $g \in G \setminus G_k$ e para todo $z \in N(y)$. Como W é simétrico temos que

$$(gy, gz) \in W \circ W \subset V \circ V \subset U$$

para todo $g \in G \setminus G_k$. Logo, $(gy, gz) \in U$ para todo $g \in G$ e para todo $z \in N(y)$. Isso contraria a hipótese de sensibilidade com respeito à U. Portanto $\mathrm{Int}_X\left(W_k(x)\right) = \emptyset$ para cada k.

Pela continuidade das aplicações $x \mapsto gx$ para todo $g \in G$ e como W é fechado, segue que $W_k(x)$ é fechado para cada k. Portanto o conjunto $Z := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} W_k(x)$ é de primeira categoria. Como subconjunto de conjunto de primeira categoria é de primeira categoria e $AR(x) \subset Z$, concluimos a prova. $\square$

Proposição 2.1.19. *Seja G uma ação de grupo abeliana sobre o espaço uniforme $(X,\mathcal{U})$ de Hausdorff. Suponha que exista um elemento $p \in P$ e um elemento $t \in T(X, G)$. Se a ação de grupo G é sensitiva, então $LYR(x)$ contém um subconjunto denso G_δ de $\mathrm{Cl}_X\left(G_{p,0}t\right)$ para todo $x \in T\left(\mathrm{Cl}_X\left(G_{p,0}t\right), G_{p,0}\right)$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.1.17, $PR(x)$ é subconjunto denso G_δ de $\mathrm{Cl}_X\left(G_{p,0}t\right)$ qualquer que seja $x \in T\left(\mathrm{Cl}_X\left(G_{p,0}t\right), G_{p,0}\right)$. Pelo Lema 2.1.18, $AR(x)$ é de primeira categoria para todo $x \in X$, logo $(AR(x))^{\complement}$ é residual. Como $LRY(x) = PR(x) - AR(x) = PR(x) \cap (AR(x))^{\complement}$, então $LRY(x)$ é residual em $\mathrm{Cl}_X\left(G_{p,0}t\right)$, isto é, $LRY(x)$ contém um subconjunto denso G_δ de $\mathrm{Cl}_X\left(G_{p,0}t\right)$ para todo $x \in T\left(\mathrm{Cl}_X\left(G_{p,0}t\right), G_{p,0}\right)$. $\square$

Para a prova do Teorema 2.1.21 precisaremos do seguinte resultado:

Proposição 2.1.20. *(Vide [9], Theorem 2) Seja G uma ação de grupo topologicamente transitiva sobre uma espaço uniforme infinito X de Hausdorff. Se X admite um conjunto denso de pontos periódicos, então a ação de grupo G é sensitiva.*

Teorema 2.1.21. *Seja G uma ação de grupo abeliana sobre um espaço uniforme $(X,\mathcal{U})$ de Baire, de Hausdorff, infinito e 2-enumerável. Se a ação de grupo G é Devaney caótica então G é Li-Yorke caótica.*

Demonstração. Pela Definição 2.1.5 e pelo Lema 2.1.14 temos que $P \neq \emptyset$ e $T(X, G) \neq \emptyset$. Denotaremos por $Y = \mathrm{Int}_X\left(\mathrm{Cl}_X(G_{p,0})\right)$ onde $p \in P$ e $t \in T(X, G)$. Pelo Lema 2.1.16 $T(Y, G_{p,0})$ contém um subconjunto denso G_δ de Y. Pela Proposição 2.1.21 e pelo Lema 2.1.15, nós temos que a ação do grupo $G_{p.0}$ sobre Y é sensitiva. Portanto, pela Proposição 2.1.19, segue que $LYR(x)$ contém um subconjunto denso G_δ de Y para todo $x \in T(Y, G_{p,0})$. Considere a seguinte família

$$\mathcal{B} := \{B : \emptyset \neq B \subset T(Y, G_{p,0}) \text{ e } (B \times B) \setminus \Delta \subset LYR\}.$$

Primeiro checaremos que $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Como X é 2-enumerável então Y também é. Seja $\{C_i : i \in \mathbb{N}\}$ uma base de abertos para Y. Como $T(Y, G_{p.0})$ é denso em Y existe $x_1 \in C_1 \cap T(Y, G_{p.0})$. Como Y é aberto e X é de Baire, então Y também é de Baire, pela Proposição **??**. Portanto pelo Lema 2.1.16 e pela Proposição 2.1.19, o conjunto $LYR(x_1) \cap T(Y, G_{p.0})$ contém um subconjunto denso G_δ de Y (lembre que, da Proposição 1.1.27, temos que intersecção enumerável de conjuntos residuais, ainda é um conjunto

residual). Pela densidade desse último conjunto podemos tomar $x_2 \in C_2 \cap LYR(x_1) \cap T(Y, G_{p.0})$, com $x_2 \neq x_1$ (podemos fazer essa escolha $x_2 \neq x_1$ pelo fato de X ser Hausdorff). Como $(x_1, x_2) \in LYR$ e LYR é simétrico segue que $\{x_1, x_2\} \in \mathcal{B}$ e portanto $\mathcal{B} \neq \emptyset$.
Agora mostraremos que existe um elemento $B \in \mathcal{B}$ tal que B é denso em Y. Repetindo o mesmo argumento anterior temos que $LYR(x_1) \cap LYR(x_2) \cap T(Y, G_{p.0})$ contém um subconjunto denso G_δ de Y, daí podemos tomar $x_3 \in C_3 \cap LYR(x_1) \cap LYR(x_2) \cap T(Y, G_{p.0})$ com $x_3 \notin \{x_1, x_2\}$. Refazendo o mesmo processo nós obtemos $\{x_i : i \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{B}$ tal que $x_i \in C_i$ para cara i. Pelo Lema de Zorn (Teorema 1.1.23) existe um elemento maximal $B \in \mathcal{B}$ tal que $\{x_i : i \in \mathbb{N}\} \subset B$. Como $B \cap C_i \neq \emptyset$ para todo i segue que B é denso em Y.
Afirmamos que B é não enumerável. Suponha que B é enumerável. Novamente pelas Proposições 1.1.27 e 2.1.19 e por Y ser um espaço de Baire, segue que o conjunto $\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} LYR(x_i)\right) \cap T(Y, G_{p,0})$ contém um subconjunto denso G_δ de Y. Logo podemos escolher um elemento $x \in Z := \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} LYR(x_i)\right) \cap T(Y, G_{p,0})$ tal que $x \notin B$, visto que se o conjunto Z apenas contivesse elementos de B, o mesmo seria enumerável e portanto de primeira categoria, pela Proposição 1.1.26. Como Y é de Baire, Z não seria denso em Y, o que é uma contradição.
Como $(x, x_i) \in LYR$ para todo $i \in \mathbb{N}$, segue que $B \cup \{x\} \in \mathcal{B}$, o que contraria a maximalidade de B. Logo B é não enumerável, o que conclui a demonstração. $\square$

2.2 Caos Li-Yorke no contexto de funções sobre espaços uniformes

Com base na definição de caos Li-Yorke introduzida por Arai em [1], alguns autores, como por exemplo em [23] e [27], trabalharam com uma adaptação de tal conceito no contexto de funções sobre espaços uniformes, a qual mostraremos abaixo.

Definição 2.2.1. Seja $f : X \to X$ uma aplicação sobre um espaço uniforme $(X, \mathcal{U})$. Um par $(x, y) \in X \times X$ é chamado de *proximal* se para todo $U \in \mathcal{U}$ existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $(f^n(x), f^n(y)) \in U$. Um par $(x, y) \in X \times X$ é chamado de *assintótico* se para todo $U \in \mathcal{U}$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(f^n(x), f^n(y)) \in U$ para todo $n \geq n_0$. Denotamos por PR e AR o conjunto dos pares proximais e assintóticos respectivamente.
Um par $(x, y) \in X \times X$ é dito *par Li-Yorke* se $(x, y) \in PR - AR$. Dizemos que um subconjunto $S \subset X$ é *misturado* se todo par de elementos distintos de S for um par Li-Yorke. Dizemos que f é *Li-Yorke caótica* se X admite um subconjunto misturado não enumerável.

Abaixo provaremos que a Definição 1.6.12 é consistente com a definição anterior, isto é, dada uma aplicação linear $T : E \to E$ sobre um EVT E, então T é Li-Yorke caótica com relação a definição anterior (E sendo visto como um espaço uniforme, segundo o Exemplo 1.5.5 b)) se, e somente se, T é Li-Yorke caótica segundo a Definição 1.6.12.

Proposição 2.2.2. *Seja $T : E \to E$ uma aplicação linear sobre um EVT E. Então T é Li-Yorke caótica segundo a Definição 2.2.1 se, e somente se, T é Li-Yorke caótica segundo a Definição 1.6.12.*

Demonstração. Começamos lembrando que o EVT E, quando visto pela Definição 2.2.1, é o espaço uniforme $(E,\mathcal{U})$, onde $\mathcal{U} = \{\Delta_U : U \in B_0\}$, B_0 é o conjunto de vizinhanças de zero e

$$\Delta_U = \{(x, y) \in E \times E : x - y \in U\}.$$

A fim de mostrarmos a equivalência das definições de caos Li-Yorke, basta mostrarmos que um par (x, y) é um par Li-Yorke segundo uma das definições se, e somente se, é um par Li-Yorke segundo a outra definição.

Suponha que (x, y) é um par Li-Yorke segundo a Definição 1.6.12, então as duas condições abaixo são satisfeitas:

i) A sequencia $(T^n(x - y))_n$ não converge para zero.

ii) Existe uma subrede da sequência $(T^n(x - y))_n$ que converge para zero.

Mas cumprir as condições acima é equivalente a cumprir, respectivamente, as condições abaixo:

i) Existe $V \in B_0$ tal que para todo $K \in \mathbb{N}$, existe $n \geq K$ com $T^n(x - y) \notin V$.

ii) Para todo $U \in B_0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(x - y) \in U$.

Utilizando a linearidade de T e as notações de espaços uniformes, segue que cumprir as condições acima é equivalente a cumprir, respcetivamente, as condições abaixo:

i) Existe $\Delta_V \in \mathcal{U}$ tal que para todo $K \in \mathbb{N}$, existe $n \geq K$ com $(T^n(x), T^n(y)) \notin \Delta_V$.

ii) Para todo $\Delta_U \in \mathcal{U}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(T^n(x), T^n(y)) \in \Delta_U$.

E cumprir as condições acima é equivalente a dizer que (x, y) é um par Li-Yorke segundo a Definição 2.2.1. □

2.3 Caos distribucional no contexto de funções sobre espaços uniformes

Nesta seção apresentaremos a noção de caos distribucional no contexto de espaços uniformes. Iniciaremos apresentando a noção de caos distribucional em uma sequência no contexto de espaços métricos e depois no contexto de espaços uniformes, a qual foi introduzida em [27]. Baseado nessa definição, apresentaremos outras noções de caos distribucional nesse mesmo contexto.

Em [26], os autores introduziram a seguinte definição, conhecida como caos distribucional em uma sequência.

Definição 2.3.1. Sejam (X, d) um espaço métrico, $f : X \to X$ uma função contínua e (p_i) uma sequência estritamente crescente de números naturais. Dizemos que um subconjunto $D \subset X$ é *distribucionalmente misturado na sequência* (p_i) se para cada par (x, y) de elementos distintos de D temos que

i) $F^*_{x,y}(\varepsilon, (p_i)) := \limsup_n \frac{1}{n}\text{card}\,\{0 \le i \le n-1 : d(f^{p_i}(x), f^{p_i}(y)) < \varepsilon\} = 1$, para todo $\varepsilon > 0$ e

ii) $F_{x,y}(\delta, (p_i)) := \liminf_n \frac{1}{n}\text{card}\,\{0 \le i \le n-1 : d(f^{p_i}(x), f^{p_i}(y)) < \delta\} = 0$, para algum $\delta > 0$.

Se X admite um subconjunto não enumerável distribucionalmente misturado na sequência (p_i) dizemos que f é *distribucionalmente caótica na sequência* (p_i). Se um par (x, y) de elementos em X satisfaz as condições i) e ii) acima dizemos que o par é *distribucionalmente caótico na sequência* (p_i).

Notação 2.3.2. Quando a sequência $(p_i)_i$ for igual a sequência dos naturais, isto é $(p_i)_i = (i)_i$, denotamos $F^*_{x,y}(\varepsilon) := F^*_{x,y}(\varepsilon, (i)_i)$ e $F_{x,y}(\varepsilon) := F_{x,y}(\varepsilon, (i)_i)$.

Em [27] os autores generalizam a definição acima e estabelecem a seguinte definição de caos distribucional em uma sequência para o contexto de aplicações sobre espaços uniformes:

Definição 2.3.3. Seja $(X,\mathcal{U})$ um espaço uniforme, $f : X \to X$ uma função contínua e (p_i) uma sequência estritamente crescente de números naturais. Dizemos que um subconjunto $D \subset X$ é *distribucionalmente misturado na sequência* (p_i) se para cada par (x, y) de elementos distintos de D nós temos que

i) $F^*_{x,y}(U, (p_i)) := \limsup_n \frac{1}{n}\text{card}\,\{0 \le i \le n-1 : (f^{p_i}(x), f^{p_i}(y)) \in U\} = 1$, para todo $U \in \mathcal{U}$ e

ii) $F_{x,y}(V, (p_i)) := \liminf_n \frac{1}{n}\text{card}\,\{0 \le i \le n-1 : (f^{p_i}(x), f^{p_i}(y)) \in V\} = 0$, para algum $V \in \mathcal{U}$.

Se X admite um subconjunto não enumerável distribucionalmente misturado na sequência (p_i) dizemos que f é *distribucionalmente caótica na sequência* (p_i). Se um par (x, y) de elementos em X satisfaz as condições i) e ii) acima dizemos que o par é *distribucionalmente caótico na sequência* (p_i).

Notação 2.3.4. Quando a sequência $(p_i)_i$ for igual a sequência dos naturais, isto é $(p_i)_i = (i)_i$, denotamos $F^*_{x,y}(U) := F^*_{x,y}(U, (i)_i)$ e $F_{x,y}(U) := F_{x,y}(U, (i)_i)$.

Para a próxima observação, lembremos que dado um espaço métrico (X, d), ele pode ser visto como um espaço uniforme $(X,\mathcal{U})$, onde

$$\mathcal{B} = \{\Delta_\varepsilon : \Delta_\varepsilon = \{(x, y) : d(x, y) < \varepsilon\}\,,\ \varepsilon > 0\}$$

é uma base para a estrutura uniforme $\mathcal{U}$. Além disso, topologia uniforme coincide com a topologia da métrica. $(X,\mathcal{U})$ é dito espaço uniforme induzido do espaço métrico (X, d).

Observação 2.3.5. Note que a definição anterior generaliza bem a Definição 2.3.1 no seguinte sentido: uma aplicação $f : X \to X$ sobre o espaço métrico (X, d) é distribucionalmente caótica na sequência

(p_i) segundo a Definição 2.3.1 se, e somente se, f sobre o espaço uniforme $(X, \mathcal{U})$ é distribucionalmente caótica na sequência (p_i) segundo a Definição 2.3.3, onde $(X, \mathcal{U})$ é o espaço uniforme induzido do espaço métrico (X, d).

Para isso, basta observamos que (x, y) é um par distribucionalmente caótico na sequência (p_i) segundo a Definição 2.3.1 se, e somente se, (x, y) é um par distribucionalmente caótico na sequência (p_i) segundo a Definição 2.3.3.

De fato, (x, y) é um par distribucionalmente caótico na sequência (p_i) segundo a Definição 2.3.1 se cumpre as condições abaixo

i) $F^*_{x,y}(\varepsilon, (p_i)) = \limsup_n \frac{1}{n} \text{card}\,\{0 \leq i \leq n-1 : d(f^{p_i}(x), f^{p_i}(y)) < \varepsilon\} = 1$, para todo $\varepsilon > 0$ e

ii) $F_{x,y}(\delta, (p_i)) := \liminf_n \frac{1}{n} \text{card}\,\{0 \leq i \leq n-1 : d(f^{p_i}(x), f^{p_i}(y)) < \delta\} = 0$, para algum $\delta > 0$.

Cumprir as condições acima é equivalente a cumprir as condições abaixo

i) $F^*_{x,y}(\Delta_\varepsilon, (p_i)) = \limsup_n \frac{1}{n} \text{card}\,\{0 \leq i \leq n-1 : (f^{p_i}(x), f^{p_i}(y)) \in \Delta_\varepsilon\} = 1$ para todo $\Delta_\varepsilon \in \mathcal{B}$ e

ii) $F_{x,y}(\Delta_\delta, (p_i)) = \liminf_n \frac{1}{n} \text{card}\,\{0 \leq i \leq n-1 : (f^{p_i}(x), f^{p_i}(y)) \in \Delta_\delta\} = 0$ para algum $\Delta_\delta \in \mathcal{B}$.

Utilizando o fato que $\mathcal{B}$ é uma base para a estrutura uniforme $\mathcal{U}$, segue que cumprir as condições acima é equivalente a cumprir as condições abaixo

i) $F^*_{x,y}(U, (p_i)) = \limsup_n \frac{1}{n} \text{card}\,\{0 \leq i \leq n-1 : (f^{p_i}(x), f^{p_i}(y)) \in U\} = 1$ para todo $U \in \mathcal{U}$ e

ii) $F_{x,y}(V, (p_i)) = \liminf_n \frac{1}{n} \text{card}\,\{0 \leq i \leq n-1 : (f^{p_i}(x), f^{p_i}(y)) \in V\} = 0$ para algum $V \in \mathcal{U}$.

Portanto (x, y) é um par distribucionalmente caótico na sequência (p_i) segundo a Definição 2.3.3.

Outra noção de caos bem conhecida no contexto dos espaços métricos é o conceito de caos distribucional, o qual apresentaremos a definição a seguir.

Definição 2.3.6. Seja (X, d) um espaço métrico e $f : X \to X$ uma função contínua. Dizemos que um subconjunto $\Gamma \subset X$ é *distribucionalmente misturado* se existe $\delta > 0$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$ e para cada par de pontos distintos $x, y \in \Gamma$, temos

$$F^*_{x,y}(\varepsilon) = 1 \quad \text{e} \quad F_{x,y}(\delta) = 0.$$

Dizemos que f é distribucionalmente caótica (abreviadamente DC) , se X admite um subconjunto Γ não enumerável e distribucionalmente misturado. Se um par (x, y) de elementos em X satisfaz as condições acima, dizemos que o par é *distribucionalmente caótico*.

Baseado na generalização feita na Definição 2.3.3, apresentaremos a definição natural de caos distribucional no contexto de funções sobre espaços uniformes.

Definição 2.3.7. (Caos distribucional): Seja $(X, \mathcal{U})$ um espaço uniforme e $f : X \to X$ uma função contínua. Dizemos que um subconjunto $\Gamma \subset X$ é *distribucionalmente misturado* se existe $V \in \mathcal{U}$ tal que, para todo $U \in \mathcal{U}$ e para cada par de pontos distintos $x, y \in \Gamma$, temos

$$F^*_{x,y}(U) = 1 \quad \text{e} \quad F_{x,y}(V) = 0.$$

Dizemos que f é distribucionalmente caótica (abreviadamente DC), se X admite um subconjunto Γ não enumerável e distribucionalmente misturado. Se um par (x, y) de elementos em X satisfaz as condições acima dizemos que o par é *distribucionalmente caótico*.

Observação 2.3.8. Assim como na Observação 2.3.5, mostra-se que a definição anterior generaliza bem a Definição 2.3.6 no seguinte sentido: uma aplicação $f : X \to X$ sobre o espaço métrico (X, d) é distribucionalmente caótica segundo a Definição 2.3.6 se, e somente se, $f : X \to X$ sobre o espaço uniforme $(X, \mathcal{U})$ é distribucionalmente caótica segundo a Definição 2.3.7, onde $(X, \mathcal{U})$ é o espaço uniforme induzido do espaço métrico (X, d).

Há também outras duas noções de caos distribucional mais fracas - caos distribucional do tipo 1 e do tipo 2 - as quais apresentamos a seguir.

Definição 2.3.9. Seja (X, d) um espaço métrico e $f : X \to X$ uma função contínua. Se o par $(x, y) \in X \times X$ satisfaz

(DC1) $F^*_{xy} \equiv 1$ e $F_{xy}(\varepsilon) = 0$ para algum $\varepsilon > 0$, ou

(DC2) $F^*_{xy} \equiv 1$ e $F_{xy}(\varepsilon) < 1$ para algum $\varepsilon > 0$,

então (x, y) é dito um *par distribucionalmente caótico do tipo 1* ou *do tipo 2*, respectivamente. A função f é dita *distribucionalmente caótica do tipo* $k \in \{1, 2\}$ se existe um conjunto não enumerável $\Gamma \subset X$ tal que todo par (x, y) de pontos distintos em Γ é um par distribucionalmente misturado do tipo $k \in \{1, 2\}$.

Vamos generalizar as definições acima para o contexto de funções sobre espaços uniformes a seguir.

Definição 2.3.10. Seja $(X, \mathcal{U})$ um espaço uniforme e $f : X \to X$ uma função contínua. Se o par $(x, y) \in X \times X$ satisfaz

(DC1) $F^*_{xy} \equiv 1$ e $F_{xy}(V) = 0$ para algum $V \in \mathcal{U}$, ou

(DC2) $F^*_{xy} \equiv 1$ e $F_{xy}(V) < 1$ para algum $V \in \mathcal{U}$,

então (x, y) é dito um *par distribucionalmente caótico do tipo 1* ou *do tipo 2*, respectivamente. A função f é dita *distribucionalmente caótica do tipo* $k \in \{1, 2\}$ (abreviadamente DCk) se existe um conjunto não enumerável $\Gamma \subset X$ tal que todo par (x, y) de pontos distintos em Γ é um par distribucionalmente misturado do tipo $k \in \{1, 2\}$.

Observação 2.3.11. Note que a definição anterior generaliza bem a Definição 2.3.9, no mesmo sentido que foi abordado nas Observações 2.3.5 e 2.3.8. Além disso, segue diretamente das definições acima o diagrama de implicações abaixo:

$$\text{DC} \Rightarrow \text{DC1} \Rightarrow \text{DC2}.$$

Para o próximo capítulo precisaremos explorar estas noções de caos no contexto de espaços vetoriais topológicos. Vejamos então como fica a caracterização de caos distribucional para espaços vetoriais topológicos.

Seja E um EVT e B_0 o conjunto de todas as vizinhanças de zero. Lembremos da seção de espaços uniformes que $(E,\mathcal{U})$ é um espaço uniforme, onde $\mathcal{U} = \{\Delta_U : U \in B_0\}$ e

$$\Delta_U = \{(x, y) \in E \times E : x - y \in U\}.$$

Além disso a topologia uniforme coincide com a topologia de E. De posse dessas informações e da Definição 2.3.7, segue a definição de caos distribucional para EVT's:

Definição 2.3.12. (Caos distribucional para EVT's): Sejam E um EVT, B_0 o conjunto de todas as vizinhanças de zero e $f : E \to E$ contínua. Dizemos que um subconjunto $\Gamma \subset E$ é *distribucionalmente misturado* se existe $V \in B_0$ tal que, para todo $U \in B_0$ e para cada par de pontos distintos $x, y \in \Gamma$, é válido que

$$F^*_{x,y}(\Delta_U) = 1 \quad \text{e} \quad F_{x,y}(\Delta_V) = 0.$$

Dizemos que f é distribucionalmente caótica (abreviadamente DC), se E admite um subconjunto Γ não enumerável e distribucionalmente misturado. Se um par (x, y) de elementos em X satisfaz as condições acima, dizemos que o par é *distribucionalmente caótico.*

A pergunta natural agora é em relação aos espaços de Fréchet. Como um espaço de Fréchet E é um espaço métrico e um EVT, dada uma aplicação $f : E \to E$, as Definições 2.3.7 (E sendo visto como espaço uniforme induzido da métrica) e 2.3.12 coincidem? Isto é, f é distribucionalmente caótica em relação a Definição 2.3.7 se, e somente se, é distribucionalmente caótica em relação a Definição 2.3.12 ? A resposta é sim e é dada na proposição abaixo.

Proposição 2.3.13. *Seja E um espaço de Fréchet e $f : E \to E$ contínua. Então f é distribucionalmente caótica em relação a Definição 2.3.7 se, e somente se, é distribucionalmente caótica em relação a Definição 2.3.12.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que f é distribucionalmente caótica em relação a Definição 2.3.7, com E sendo visto como o espaço uniforme induzido da métrica. Pela Observação 2.3.8, f é distribucionalmente caótica segundo a Definição 2.3.6. Portanto existem um subconjunto $\Gamma \subset X$ não enumerável e $\delta > 0$ tais que

$$F^*_{x,y}(\varepsilon) = 1 \quad \text{e} \quad F_{x,y}(\delta) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ e } \forall x, y \in \Gamma \ (x \neq y).$$

Tome $x, y \in \Gamma$ distintos. Tome $U \in B_0$. Portanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(0,\varepsilon) \subset U$. Logo utilizando o fato de que a métrica referente ao espaço de Fréchet E é invariante por translações, segue que

$$F^*_{x,y}(\Delta_U) = \limsup_n \tfrac{1}{n}\text{card}\left\{0 \leq i \leq n-1 : (f^i(x), f^i(y)) \in \Delta_U\right\}$$

$$= \limsup_n \tfrac{1}{n}\text{card}\left\{0 \leq i \leq n-1 : f^i(x) - f^i(y)) \in U\right\}$$

$$\geq \limsup_n \tfrac{1}{n}\text{card}\left\{0 \leq i \leq n-1 : f^i(x) - f^i(y)) \in B(0,\varepsilon)\right\}$$

$$= \limsup_n \tfrac{1}{n}\text{card}\left\{0 \leq i \leq n-1 : d(f^i(x) - f^i(y)), 0) < \varepsilon\right\}$$

$$= \limsup_n \tfrac{1}{n}\text{card}\left\{0 \leq i \leq n-1 : d(f^i(x)), f^i(y)) < \varepsilon\right\} = F^*_{x,y}(\varepsilon) = 1.$$

Portanto $F^*_{x,y}(\Delta_U) = 1$. Agora vamos analisar o valor $F_{x,y}(\Delta_{B(0,\delta)})$.

$$F_{x,y}(\Delta_{B(0,\delta)}) = \liminf_n \tfrac{1}{n}\text{card}\left\{0 \leq i \leq n-1 : (f^i(x), f^i(y)) \in \Delta_{B(0,\delta)}\right\}$$

$$= \liminf_n \tfrac{1}{n}\text{card}\left\{0 \leq i \leq n-1 : f^i(x) - f^i(y) \in B(0,\delta)\right\}$$

$$= \liminf_n \tfrac{1}{n}\text{card}\left\{0 \leq i \leq n-1 : d(f^i(x) - f^i(y), 0) < \delta\right\}$$

$$= \liminf_n \tfrac{1}{n}\text{card}\left\{0 \leq i \leq n-1 : d(f^i(x), f^i(y)) < \delta\right\} = F_{x,y}(\delta) = 0.$$

Portanto $F_{x,y}(\Delta_{B(0,\delta)}) = 0$. Como (x, y) é qualquer par de elementos distintos de Γ e U é qualquer em B_0, concluímos tal implicação.

$\Leftarrow$) Basta observar que $F^*_{x,y}(\Delta_{B(0,\varepsilon)}) = F^*_{x,y}(\varepsilon)$ e $F_{x,y}(\Delta_{B(0,\varepsilon)}) = F_{x,y}(\varepsilon)$ e novamente utilizar a Observação 2.3.8. □

Finalizamos essa seção mostrando que a noção de caos distribucional é mais forte que a noção de caos Li-Yorke, isto é, o caos distribucional implica em caos Li-Yorke.

Proposição 2.3.14. *Seja $f : X \to X$ uma função contínua sobre um espaço uniforme $(X, \mathcal{U})$. Se f é DC2 então f é Li-Yorke caótica.*

Demonstração. Seja D um conjunto não enumerável e distribucionalmente misturado do tipo 2 para f. Provaremos que D é misturado (no sentido do caos de Li-Yorke). Seja (x, y) um par de elementos distintos em D. Tome $U \in \mathcal{U}$. Como $F^*_{x,y}(U) = 1$, segue que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(f^n(x), f^n(y)) \in U$. Como $U \in \mathcal{U}$ é qualquer, segue que $(x, y) \in PR$. Como existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $F_{x,y}(V) = 0$, segue que $(f^n(x), f^n(y)) \notin V$ para infinitos números naturais n. Logo $(x, y) \notin AR$. Portanto $(x, y) \in PR \setminus AR$, isto é, é um par Li-Yorke caótico. Como (x, y) é um par arbitrário de elementos distintos em D, segue que D é misturado. □

Em virtude da Observação 2.3.11 que DC e DC1 implicam em DC2, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 2.3.15. *Seja $f : X \to X$ uma função contínua sobre um espaço uniforme $(X,\mathcal{U})$. Se f é DC ou DC1 então f é Li-Yorke caótica.*

Capítulo 3

Dinâmica dos operadores de convolução sobre $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$

Assim como mencionado na introdução, os operadores de convolução não triviais sobre os espaços $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, onde $n \in \mathbb{N}$, satisfazem diversas noções de caos. O cenário muda quando se trabalha com esses operadores de convolução sobre o espaço $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ como veremos nesse capítulo. Além de mostrarmos os resultados conhecidos das referências [8] e [12], vamos apresentar um resultado original referente ao caos distribucional.

3.1 Propriedades do espaço $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$

Nessa seção apresentaremos alguns resultados e definições envolvendo o espaço $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ que nos auxiliarão nas seguintes seções. Utilizamos a referência [7] para a confecção dessa seção.

Definição 3.1.1. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ não vazio e $f : U \to \mathbb{C}$. Dizemos que f *depende apenas das n primeiras variáveis* se $f((x_i)_i) = f((y_i)_i)$ para todo $(x_i)_i, (y_i)_i \in U$ que coincidem em suas n primeiras coordenadas.

Definição 3.1.2. Seja $n \in \mathbb{N}$.

a) Definimos a função *projeção canônica* $\pi_n : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^n$ por

$$(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mapsto (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n.$$

b) Definimos a função *inclusão canônica* $J_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ por

$$(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mapsto (x_1, \cdots, x_n, 0, 0 \cdots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.$$

Proposição 3.1.3. *Seja $n \in \mathbb{N}$. a) A função $\pi_n : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^n$ é contínua.*

b) A função $J_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ é contínua.

Demonstração. Como as aplicações acima são obviamente lineares, utilizaremos a Proposição 1.2.14 para essa demonstração. Lembre-se do Exemplo 1.2.7, que $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ está munido da topologia gerada pelas seminormas $p_n : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$p_n((z_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \max\{|z_1|, \ldots, |z_n|\},$$

Além disso, consideraremos em $\mathbb{C}^n$ a norma do máximo, isto é $\|(z_1, \ldots, z_n)\| = \max\{|z_1|, \ldots, |z_n|\}$, para $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.

a) A continuidade de π_n segue do fato de que

$$\|\pi_n((z_i)_{i\in\mathbb{N}})\| = p_n((z_i)_{i\in\mathbb{N}}),$$

para todo $(z_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

b) Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ e considere a seminorma p_{n_0}. Portanto

$$p_{n_0}(J_n(z_1, \ldots, z_n)) = p_{n_0}((z_1, \ldots, z_n, 0, 0, \ldots)) \leq \max\{|z_1|, \ldots, |z_n|\} = \|(z_1, \ldots, z_n)\|,$$

para todo $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. □

A projeção e a inclusão canônicas geram, naturalmente, as seguintes funções:

Definição 3.1.4. Seja $n \in \mathbb{N}$.

a) Definimos a função $J_n^* : \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}) \to \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ por

$$f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}) \mapsto f \circ J_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n).$$

b) Definimos a função $\pi_n^* : \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ por

$$f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \mapsto f_n \circ \pi_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$$

Observação 3.1.5. (Boa definição das funções π_n^* e J_n^*): Mostraremos que para todo $n \in \mathbb{N}$ as aplicações J_n^* e π_n^* são de fato bem definidas, isto é, $f \circ J_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ para toda $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ e $f_n \circ \pi_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ para toda $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$. Para isso, utilizaremos a Definição 1.3.2.

Tome $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$, logo f é contínua e $f \in \mathcal{H}_G(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$. Pela Proposição 3.1.3 temos que $f \circ J_n$ é contínua. Resta mostrar que $f \circ J_n \in \mathcal{H}_G(\mathbb{C}^n)$. Para tal, tome $\xi, \eta \in \mathbb{C}^n$ e $\phi \in (\mathbb{C})'$. Como

$$\phi(f \circ J_n(\xi + \lambda\eta)) = \phi(f(J_n(\xi) + \lambda J_n(\eta)))$$

e essa última função é holomorfa (na variável λ) em uma vizinhança de zero (pois $f \in \mathcal{H}_G(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$), segue que $f \circ J_n \in \mathcal{H}_G(\mathbb{C}^n)$.

De modo análogo se mostra que a função π_n^* está bem definida.

Observamos que, como as aplicações π_n^* são lineares, então os conjuntos $\pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n))$ são subespaços veotriais de $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$.

Note que, dado $n \in \mathbb{N}$, nós temos $\pi_n \circ J_n((x_1, \cdots, x_n)) = (x_1, \cdots, x_n)$, para todo $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, ou seja, $\pi_n \circ J_n = Id_{\mathbb{C}^n}$. Daí segue que $J_n^* \circ \pi_n^*(f) = f \circ \pi_n \circ J_n = f$, para toda $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$. Logo

$$J_n^* \circ \pi_n^* = Id_{\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)} \tag{3.1}$$

e a função π_n^* é injetora. Portanto se $f \in \pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n))$, então existe uma única $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ tal que $f = f_n \circ \pi_n$.

Lema 3.1.6. *Vale a sequência de inclusões estritas abaixo*

$$\pi_1^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^1)) \subsetneq \pi_2^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^2)) \subsetneq \cdots \subsetneq \pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}).$$

Demonstração. Tome $n \in \mathbb{N}$ e seja $f \in \pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n))$. Então existe $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ tal que $f = f_n \circ \pi_n$. Considere a projeção $\pi_{n+1,n} : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^n$, dada por $\pi_{n+1,n}((z_1, \ldots, z_{n+1})) = (z_1, \ldots, z_n)$, para todo $(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Note que $f_n \circ \pi_{n+1,n} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{n+1})$ e $\pi_{n+1,n} \circ \pi_{n+1} \equiv \pi_n$. Logo

$$f = f_n \circ \pi_n = (f_n \circ \pi_{n+1,n}) \circ \pi_{n+1} \in \pi_{n+1}^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{n+1})).$$

Como f é qualquer em $\pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n))$, segue que $\pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)) \subset \pi_{n+1}^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{n+1}))$. Provaremos agora que a inclusão é estrita. Para tal, observe que a função $\pi_{n+1,1} \circ \pi_{n+1} \in \pi_{n+1}^*\left(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{n+1})\right)$ e $\pi_{n+1,1} \circ \pi_{n+1} \notin \pi_n^*\left(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)\right)$. De fato, caso houvesse $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ tal que $\pi_{n+1,1} \circ \pi_{n+1} = f_n \circ \pi_n$, teríamos que

$$\begin{cases} f_n(0, \ldots, 0) = f_n \circ \pi_n(0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{posição } n+1}, 0, \ldots) = \pi_{n+1,1} \circ \pi_{n+1}(0, \ldots, \underbrace{1}_{\text{posição } n+1}, 0, \ldots) = 1, \\ f_n(0, \ldots, 0) = f_n \circ \pi_n(0, \ldots, 0, \underbrace{2}_{\text{posição } n+1}, 0, \ldots) = \pi_{n+1,1} \circ \pi_{n+1}(0, \ldots, \underbrace{2}_{\text{posição } n+1}, 0, \ldots) = 2 \end{cases},$$

o que é uma contradição. Portanto a inclusão é estrita. $\square$

A seguinte proposição é de extrema utilidade. Em suma a mesma diz que toda função $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ depende apenas de um número finito de variáveis.

Proposição 3.1.7. *(Vide [11], p. 163) Segue a seguinte igualdade de conjuntos:*

$$\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)).$$

A seguir trabalharemos com algumas propriedades topológicas de $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$. Para o próximo resultado, lembramos que os espaços $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ e $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ estão munidos de suas respectivas topologias compacto-aberta τ_0 .

Proposição 3.1.8. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Então os operadores*

$$J_n^* : f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}) \mapsto f \circ J_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \quad e \quad \pi_n^* : f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \mapsto f_n \circ \pi_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$$

são contínuos.

Demonstração. Como as aplicações acima são obviamente lineares, utilizaremos a Proposição 1.2.14 para essa demonstração. Iniciaremos provando a continuidade da função J_n^*.
Seja K um compacto em $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ e considere a seminorma p_K em $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$. Logo para todo $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ temos

$$p_K(f \circ J_n) = \sup_{z \in K} |f \circ J_n(z)| = \sup_{z' \in J_n(K)} |f(z')| = p_{J_n(K)}(f),$$

o que conclui a prova, visto que $J_n(K)$ é um compacto em $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$, pois funções contínuas levam compactos em compactos.
Provaremos agora a continuidade da função π_n^*.
Seja K um compacto em $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ e considere a seminorma p_K em $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$. Logo para todo $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ temos

$$p_K(f_n \circ \pi_n) = \sup_{z \in K} |f_n \circ \pi_n(z)| = \sup_{z' \in \pi_n(K)} |f_n(z')| = p_{\pi_n(K)}(f_n)$$

o que conclui a prova, visto que $\pi_n(K)$ é um compacto em $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$. □

Para o próximo corolário, a fim de não sobrecarregar a escrita, denotaremos a função que restringe o contradomínio da função π_n^* ao conjunto $\pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n))$ simplesmente por π_n^*.

Corolário 3.1.9. *A função $\pi_n^* : \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \to \pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n))$ é um isomorfismo topológico.*

Demonstração. Já vimos que π_n^* é linear e contínua. Para provar que é um homeomorfismo, só resta provar que sua inversa é contínua. Vimos em (3.1) que $J_n^* \circ \pi_n^* = Id_{\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)}$ e disso segue que π_n^* é uma bijeção, cuja inversa é $J_n^*|_{\pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n))}$. Da proposição anterior, segue que $J_n^*|_{\pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n))}$ é contínua, concluindo assim a demonstração. □

Observação 3.1.10. Seja $n \in \mathbb{N}$. Pela Proposição 1.2.17, pelo Corolário 3.1.9 e por (3.1) segue que $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ é topologicamente isomorfo ao subespaço complementado $\pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n))$. Pela Proposição 1.2.16, segue que $\pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n))$ é um subespaço fechado (e próprio como havíamos visto anteriormente).

A próxima proposição nos dá a resposta do porquê foi necessário estudar ambientes mais gerais, tais como os espaços uniformes, em busca de caracterizações de certas noções de caos para os EVT's em geral. A mesma nos diz que o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ não é metrizável.

Proposição 3.1.11. *O espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ não é metrizável.*

Prova: Por [7, Proposição 4.1.12 a)] temos que o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ é completo. Pela Observação 3.1.10 para cada $n \in \mathbb{N}$, $\pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n))$ é um subespaço fechado e próprio, portanto com interior vazio. Pela Proposição 3.1.7 temos que

$$\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)). \tag{3.2}$$

Se $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ fosse metrizável, como o mesmo é completo, pelo Teorema de Baire e por (3.2), existiria $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\text{Int}\left(\pi_{n_0}^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{n_0}))\right) \neq \emptyset$, o que é uma contradição. Portanto $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ não é metrizável. ■

3.2 Propriedades dos operadores de convolução sobre $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$

Nesta seção estudaremos alguns resultados técnicos sobre os operadores de convolução definidos em $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$. Veremos que há uma relação entre os operadores de convolução sobre $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{n}\right)$ e os operadores de convolução sobre $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$. Estes resultados serão de grande utilidade para provarmos algumas propriedades dinâmicas desses operadores nas seguintes seções. Novamente, utilizamos a referência [7] para a confecção dessa seção.

Lema 3.2.1. *a) Sejam $f \in \mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$, $k \in \mathbb{N}$ e T um operador sobre $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$. Então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$T^i f = \pi_N^*((T^i f) \circ J_N),$$

para todo $i = 0, \dots, k$.

b) Se $f = f_n \circ \pi_n$, com $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ e L é um operador de convolução sobre $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$, então

$$L^k f = \pi_n^* \circ J_n^*(L^k f) = \pi_n^*((L^k f) \circ J_n),$$

para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração. a) Pela Proposição 3.1.7, podemos escrever

$$f = f_{n_0} \circ \pi_{n_0}, Tf = f_{n_1} \circ \pi_{n_1}, \dots, T^k f = f_{n_k} \circ \pi_{n_k},$$

com $f_{n_i} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{n_i})$, para todo $i = 0, \dots, k$. Tome $N = \max\{n_0, \dots, n_k\}$ e $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tal que $\pi_N(z) = 0$. Assim, como $n_i \leq N$ para todo $i = 0, \dots, k$, segue que $\pi_{n_i}(z) = 0$ para todo $i = 0, \dots, k$.
Portanto

$$\tau_z(T^i f)(x) = T^i f(x - z) = f_{n_i} \circ \pi_{n_i}(x - z) = f_{n_i}(\pi_{n_i}(x) - \pi_{n_i}(z))$$

$$= f_{n_i}(\pi_{n_i}(x)) = f_{n_i} \circ \pi_{n_i}(x) = (T^i f)(x),$$

para todo $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ e $i = 0, \ldots, k$. Tome $x = (x_j) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Pondo $z = (0, \ldots, 0, x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots)$, nós temos

$$(T^i f)(x) = \tau_z (T^i f)(x) = (T^i f)(x - z) = (T^i f)(x_1, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots)$$

$$= (T^i f) \circ J_N \circ \pi_N(x).$$

Como $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ é qualquer, segue que $T^i f = \pi_N^*((T^i f) \circ J_N)$, para todo $i = 0, \ldots, k$.

b) Suponha agora que $f = f_n \circ \pi_n$ com $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ e L é um operador de convolução sobre $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$. Portanto para todo $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ nós temos $\tau_z \circ L = L \circ \tau_z$. Portanto para todo $k \in \mathbb{N}_0$ nós temos

$$\tau_z(L^k f) = L^k(\tau_z f). \tag{3.3}$$

Tomando $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tal que $\pi_n(z) = 0$, segue que

$$(\tau_z f)(x) = f(x - z) = f_n \circ \pi_n(x - z) = f_n(\pi_n(x) - \pi_n(z)) = f_n(\pi_n(x)) = f(x).$$

Portanto $\tau_z f = f$. De (3.3) segue que $\tau_z(L^k f) = L^k f$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Repetindo o mesmo argumento feito em a), concluímos que

$$L^k f = \pi_n^* \circ J_n^*(L^k f) = \pi_n^*((L^k f) \circ J_n),$$

para todo $k \in \mathbb{N}_0$. □

Proposição 3.2.2. *Seja L um operador de convolução sobre $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$. Então:*

a) O operador contínuo

$$L_n := J_n^* \circ L \circ \pi_n^* : \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$$

é um operador de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$. Dizemos que L_n é o operador de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ associado a L.

b) $L(f_n \circ \pi_n) = (L_n f_n) \circ \pi_n$ para todo $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ e $n \in \mathbb{N}$.

c) L é um múltiplo escalar da identidade sobre $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ se, e somente se L_n é um múltiplo escalar da identidade sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. a) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, então

$$L_n f_n = (J_n^* \circ L \circ \pi_n^*)(f_n) = J_n^* \circ L(f) = Lf \circ J_n, \quad \text{onde} \quad f := f_n \circ \pi_n. \tag{3.4}$$

Seja $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Provaremos que $\tau_a \circ L_n = L_n \circ \tau_a$. Tomando $y \in \mathbb{C}^n$ e usando (3.4) temos que

$$[\tau_a \circ L_n](f_n)(y) = \tau_a(L_n(f_n))(y) = L_n f_n(y - a)$$

$$= [Lf \circ J_n](y - a) = Lf(J_n(y) - J_n(a)) = \tau_{J_n(a)}(Lf)(J_n(y)).$$

Como y é qualquer, segue que $[\tau_a \circ L_n](f_n) = [\tau_{J_n(a)}(Lf)] \circ J_n$. Como L é um operador de convolução segue que

$$[\tau_a \circ L_n](f_n) = [L(\tau_{J_n(a)} f)] \circ J_n = [L((\tau_a f_n) \circ \pi_n)] \circ J_n$$

$$= [L \circ \pi_n^*(\tau_a f_n)] \circ J_n = J_n^* \circ L \circ \pi_n^*(\tau_a f_n) = [L_n \circ \tau_a](f_n).$$

Como $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ é qualquer, concluímos a prova.

b) Tome $n \in \mathbb{N}$. Aplicando o Lema 3.2.1 para a função $f = f_n \circ \pi_n$, com $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ e utilizando (3.4) temos

$$L(f_n \circ \pi_n) = \pi_n^*((L(f_n \circ \pi_n)) \circ J_n) = \pi_n^*(Lf_n) = (Lf_n) \circ \pi_n. \tag{3.5}$$

c) $\Rightarrow$) Suponha que $L = \lambda Id$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. Tome $n \in \mathbb{N}$. Dada $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, escrevemos $f = f_n \circ \pi_n \in \mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$. Pelo item b) temos que

$$\pi_n^*(L_n f_n) = (L_n f_n) \circ \pi_n = Lf = \lambda f = (\lambda f_n) \circ \pi_n = \pi_n^*(\lambda f_n).$$

Pela injetividade de π_n^* e como $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ é qualquer, segue que $L_n f_n = \lambda f_n$.

$\Leftarrow$) Suponha que para todo $n \in \mathbb{N}$ exista $\lambda_n \in \mathbb{C}$ tal que $L_n f_n = \lambda_n Id$. Seja $f \in \mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$, digamos que $f \in \pi_m^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^m))$ para algum m natural. Então $Lf = \lambda_m f$. De fato, escrevendo $f = f_m \circ \pi_m$ para alguma $f_m \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^m)$), por (3.5) segue que

$$Lf = (L_m f_m) \circ \pi_m = (\lambda_m f_m) \circ \pi_m = \pi_m^*(\lambda_m f_m) = \lambda_m \pi_m^*(f_m) = \lambda_m f.$$

Se provarmos que $\lambda_m = \lambda_n$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, concluiremos a prova. Então tome $m, n \in \mathbb{N}$ com $n \leq m$. Tome $g \in \mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ tal que $g \neq 0$ e $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$). Pelo Lema 3.1.6, $g \in \pi_m^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^m)$, daí pelo que foi feito antes temos $\lambda_n g = \lambda_m g$. Como $g \neq 0$, segue que $\lambda_n = \lambda_m$. $\square$

Corolário 3.2.3. *Sejam L um operador de convolução sobre $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ e $f \in \pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n))$, digamos $f = f_n \circ \pi_n$. Seja L_n o operador de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ associado a L. Então*

$$L^k f = (L_n^k f_n) \circ \pi_n,$$

para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração. Provaremos por indução. O caso $k = 0$ é trivial. Suponha agora a validade da afirmação para algum inteiro $k \geq 0$, isto é

$$L^k f = (L_n^k f_n) \circ \pi_n. \tag{3.6}$$

Compondo com o operador L de ambos os lados de (3.6), obtemos $L^{k+1} f = L[(L_n^k f_n) \circ \pi_n]$. Pelo item b) da proposição anterior temos que

$$L[(L_n^k f_n)\circ\pi_n] = L_n(L_n^k f_n)\circ\pi_n = (L_n^{k+1} f_n)\circ\pi_n,$$

o que conclui a prova. □

Observação 3.2.4. Analisando a demonstração do item c) da Proposição 3.2.2, podemos enunciar o item c) da seguinte forma:

L é um múltiplo escalar da identidade sobre $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ se, e somente se L_n é um múltiplo escalar da identidade sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ para infinitos $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, temos que se L não é um múltiplo escalar da identidade, existem infinitos $n \in \mathbb{N}$ tal que L_n também não é um múltiplo escalar da identidade.

3.3 Hiperciclicidade para os operadores de convolução sobre $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$

Nesta seção apresentaremos alguns resultados sobre hiperciclicidade, n-superciclicidade e ciclicidade envolvendo os operadores de convolução sobre o espaço $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$. Começaremos apresentando o resultado provado em [12] sobre hiperciclicidade. Logo após, apresentaremos os resultados de ciclicidade e n-superciclicidade provados em [8], os quais melhoram o resultado de [12] sobre hiperciclicidade.

Cabe destacar aqui que o Teorema 3.3.1 é uma consequência imediata do Teorema 3.3.3, mas como os ingredientes necessários para sua prova já foram dados (com isso, a prova dele é curta) e para manter a cronologia dos resultados, optamos por incluir sua demonstração.

Vale também relembrar que este resultado contrasta com o clássico resultado de Godefroy e Shapiro [14] que todo operador de convolução não trivial sobre o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ é hipercíclico, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.3.1. *(Vide [12], Theorem 4.1) Nenhum operador de convolução sobre o espaço $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ é hipercíclico.*

Demonstração. Suponha por absurdo que exista um operador de convolução sobre o espaço $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ que seja hipercíclico. Portanto existe $f \in \mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ tal que

$$\overline{\{f, Lf, L^2 f, \dots\}} = \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}) \tag{3.7}$$

Pela Proposição 3.1.7 existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f = f_n \circ \pi_n$, com $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$. Pelo Lema 3.2.1, segue que

$$\left\{f, Lf, L^2 f, \cdots\right\} = \pi_n^*\left(\left\{f_n, (Lf)\circ J_n, (L^2 f)\circ J_n, \dots\right\}\right).$$

Portanto de (3.7), segue que

$$\overline{\pi_n^*\left(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)\right)} = \mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right),$$

o que é uma contradição, pois pela Observação 3.1.10 temos que o subespaço $\pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n))$ é fechado e próprio. □

Observação 3.3.2. Este resultado, em um primeiro momento, pode parecer estranho quando comparado ao resultado de Godefroy e Shapiro [14], já que vimos na Proposição 3.1.7 que uma função de $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ depende de apenas um número finito de suas coordenadas. Entretanto é justamente isso que garante que o resultado não vale para operadores de convolução em $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$, pois quando se realiza as iteradas com o operador de convolução, esse número de variáveis pode variar.

Este resultado também mostra diferenças que podem ocorrer quando se perde uma propriedade importante como a metrizabilidade.

Em [8] os autores melhoraram o teorema acima provando o seguinte resultado:

Teorema 3.3.3. *(Vide [8], Theorem 3.1.) a) Nenhum operador de convolução sobre o espaço $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ é cíclico.*

b) Nenhum operador de convolução sobre o espaço $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ é n-supercíclico.

Demonstração. a) Suponha por absurdo que exista um operador de convolução sobre o espaço $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ que seja cíclico. Portanto existe $f \in \mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ tal que

$$\overline{\text{span}\{f, Lf, L^2f, \cdots\}} = \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}) \tag{3.8}$$

Pela Proposição 3.1.7 existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f = f_n \circ \pi_n$, com $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$. Pelo Lema 3.2.1, segue que

$$\text{span}\left\{f, Lf, L^2f, \cdots\right\} = \text{span}\left[\pi_n^*\left(\left\{f_n, (Lf)\circ J_n, (L^2f)\circ J_n, \cdots\right\}\right)\right].$$

Portanto de (3.8), segue que

$$\overline{\pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n))} = \mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right),$$

o que é uma contradição, pois pela Observação 3.1.10 temos que o subespaço $\pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C})^n)$ é fechado e próprio.

b) Sejam L um operador de convolução sobre $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ e V um subespaço de $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ de dimensão n, com geradores $f_1, \cdots, f_n$. Então $L^k(V)$ é um subespaço de dimensão menor ou igual a n com geradores $L^k f_1, \cdots, L^k f_n$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Se $f_1 = f_{m_1} \circ \pi_{m_1}, \cdots, f_n = f_{m_n} \circ \pi_{m_n}$ com $f_{m_i} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{m_i})$ para todo $i = 1, \cdots, n$. Portanto

$$L^k(V) \subset \pi_{m_1}^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{m_1})) + \cdots + \pi_{m_n}^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{m_n})) \subset \pi_m^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^m)),$$

para todo $k \in \mathbb{N}_0$, onde $m := \max\{m_1, \cdots, m_n\}$. Portanto

$$orb_L(V) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} L^k(V) \subset \pi_m^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^m)).$$

Logo $orb_L(V)$ não pode ser denso em $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$, pois pelo mesmo argumento utilizado no item a) $\pi_m^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^m))$ é um subespaço fechado e próprio. $\square$

Relembremos do Capítulo 1 que vale o seguinte diagrama de implicações de propriedades dinâmicas no contexto de operadores sobre espaços de Fréchet:

$$\begin{array}{ccc} \text{Mistura} & \Rightarrow & \text{Transitividade Topológica} \\ & & \Updownarrow \\ & & \text{Hiperciclicidade} \end{array}$$

Já no contexto de EVT's em geral, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \text{Mistura} & \Rightarrow & \text{Transitividade Topológica} \\ & & \Uparrow \\ & & \text{Hiperciclicidade} \end{array}$$

O próximo teorema, demonstrado em [8], confirma que não vale a implicação: Transitividade Topológica $\Rightarrow$ Hiperciclicidade. Visto que se valesse, pelo teorema abaixo, os operadores de convolução não triviais sobre $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ seriam hipercíclicos, o que contradiz o Teorema 3.3.1.

Para a prova deste resultado utilizaremos o resultado a seguir de Godefroy e Shapiro [14]. Na verdade, este resultado é o mesmo indicado no início da seção a respeito da hiperciclicidade dos operadores de convolução não triviais sobre $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^n\right)$. O fato é que a prova de Godefroy e Shapiro utiliza o clássico Critério de Hiperciclicidade obtido por Kitai [18], em 1982, mas nunca publicado. Cinco anos depois este critério foi redescoberto e publicado por Gethner e Shapiro [13]. Em 2004, Costakis e Sambarino [10] provaram que o clássico Critério de Hiperciclicidade de Kitai garante que o operador é de fato misturador.

Lema 3.3.4. *Todo operador de convolução sobre o espaço $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^n\right)$, $n \in \mathbb{N}$, que não é múltiplo escalar da identidade, é misturador.*

Teorema 3.3.5. *(Vide [8], Theorem 3.3) Todo operador de convolução sobre o espaço $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$, que não é múltiplo escalar da identidade, é misturador.*

Demonstração. Seja L um operador de convolução, não trivial, sobre o espaço $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$. Tome $U, V \subset \mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ dois abertos não vazios. Como

$$\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)) \quad \text{e} \quad \pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)) \subset \pi_{n+1}^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{n+1})),\ \forall n \in \mathbb{N},$$

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap \pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)) \neq \emptyset$ e $V \cap \pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)) \neq \emptyset$ para todo $n \geq n_0$. Pela Observação 3.2.4, existe $n \geq n_0$ tal que L_n é um operador de convolução sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, que não é um múltiplo escalar da identidade. Pelo Lema 3.3.4, sabemos que L_n é misturador. Portanto como $(\pi_n^*)^{-1}(U)$ e $(\pi_n^*)^{-1}(V)$ são abertos não vazios em $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, segue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$L_n^k\left((\pi_n^*)^{-1}(U)\right) \cap (\pi_n^*)^{-1}(V) \neq \emptyset,$$

para todo $k \geq N$. Afirmamos que $L^k(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $k \geq N$. De fato, tome $k \geq N$. Tome $f_{n_k} \in (\pi_n^*)^{-1}(U)$ tal que $L_n^k f_{n_k} \in (\pi_n^*)^{-1}(V)$. Então $f_{n_k} \circ \pi_n \in U$ e, pelo Corolário 3.2.3, temos que

$$L^k(f_{n_k} \circ \pi_n) = (L^k f_{n_k}) \circ \pi_n = \pi_n^*(L^k f_{n_k}) \in V.$$

Portanto $L^k(U) \cap V \neq \emptyset$. □

3.4 Caos Li-Yorke para os operadores de convolução sobre $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$

Como vimos no primeiro capítulo, em [8], os autores adaptam a definição de caos Li-Yorke apresentada em [1] para o contexto de EVT's. Além disso, os mesmos provam a seguinte caracterização desse conceito de caos:

Lema 3.4.1. *(Vide [8], Theorem 3.4) Sejam E um EVT de Hausdorff e $T : E \to E$ um operador linear contínuo. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*
i) T é Li-Yorke caótica.
ii) T admite um par Li-Yorke.
iii) T admite um vetor semi-irregular.

Os autores utilizam a caracterização acima para provar o teorema abaixo, o qual diz que todo operador de convolução não trivial sobre $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ é Li-Yorke caótico.

Teorema 3.4.2. *(Vide [8], Theorem 3.6) Todo operador de convolução sobre o espaço $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$, que não é múltiplo escalar da identidade, é Li-Yorke caótico.*

Demonstração. Tome L um operador de convolução sobre o espaço $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$, que não é múltiplo escalar da identidade. Provaremos que L admite uma função semi-irregular e então, pelo lema acima, concluiremos a prova. Pela Proposição 3.2.2 (c) existe $n \in \mathbb{N}$ tal que o operador associado $L_n : \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ não é múltiplo escalar da identidade. Portanto pelo Teorema 1.6.6 e Corolário 1.6.16 segue que L_n é Li-Yorke caótico, logo, pelo lema acima, admite uma função semi-irregular $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$. Defina $f := f_n \circ \pi_n$. Provaremos que f é uma função semi-irregular para L.
Como f_n é semi-irregular para L_n, existe uma subrede de $(L_n^k f_n)_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a zero, digamos $(L_n^\lambda f_n)_{\lambda\in\Omega}$ com $L_n^\lambda f_n \xrightarrow{\lambda} 0$. Pela Proposição 3.2.2 e como π_n^* é contínua segue que

$$L^\lambda f = \pi_n^*(L_n^\lambda f_n) \xrightarrow{\lambda} 0,$$

isto é, existe uma subrede de $(L^k f)_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a zero. Resta mostrarmos que $L^k f \overset{k}{\nrightarrow} 0$. Suponha por absurdo que $L^k f \overset{k}{\to} 0$, então como J_n^* é contínuo, segue que

$$L_n^k f_n = J_n^* \circ \pi_n^*(L_n^k f_n) = J_n^*(L^k f) \xrightarrow{k} 0,$$

o que é uma contradição pois f_n é uma função semi-irregular para L_n. □

3.5 Resultado original: Caos distribucional para os operadores de convolução sobre $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$

Com base nas definições desenvolvidas no Capítulo 2, provaremos nesta seção que os operadores de convolução não triviais sobre o espaço $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$, satisfazem a definição de caos distribucional DC e, em particular, DC1 e DC2.

Lema 3.5.1. *(Vide [24] , Corolário 4.9) Se L é um operador de convolução sobre o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, que não é um múltiplo escalar da identidade, então L é DC.*

Teorema 3.5.2. *Se L é um operador de convolução sobre o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$, que não é um múltiplo escalar da identidade, então L é DC.*

Demonstração. Pela Proposição 3.2.2 , existe $n \in \mathbb{N}$ tal que L_n não é um múltiplo escalar da identidade, onde $L_n = J_n^* \circ L \circ \pi_n^*$ é o operador de convolução associado sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ que satisfaz

$$L^k f = (L_n^k f_n) \circ \pi_n$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e $f = f_n \circ \pi_n \in \pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n))$. Seja B_0 o conjunto de vizinhanças de 0 em $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ e B_1 o conjunto de vizinhanças de 0 em $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$. Pelo Lema 3.5.1 e pela Proposição 2.3.13, existe um subconjunto não enumerável $\Gamma_1 \subset \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ e $V_1 \in B_1$ tais que

$$F^*_{f_n g_n}(\Delta_U) = 1 \quad \text{e} \quad F_{f_n g_n}(\Delta_{V_1}) = 0 \quad \forall \Delta_U \in \mathcal{U}, \forall f_n, g_n \in \Gamma_1 \ (f_n \neq g_n).$$

Considere o conjunto $\Gamma := \pi_n^*(\Gamma_1) = \{f_n \circ \pi_n;\ f_n \in \Gamma_1\}$. Provaremos que Γ é um conjunto distribucionalmente misturado e não enumerável para L. A não enumerabilidade de Γ advém do fato de π_n^* ser injetora. Tome $U \in B_0$ e $f = f_n \circ \pi_n, g = g_n \circ \pi_n \in \Gamma$ e defina $U_1 := \pi_n^{*-1}(U)$. Então

$$\begin{aligned}
F^*_{fg}(\Delta_U) &= \limsup_k \tfrac{1}{k}\text{card}\left\{0 \le i \le k-1; (L^i f, L^i g) \in \Delta_U\right\} \\
&= \limsup_k \tfrac{1}{k}\text{card}\left\{0 \le i \le k-1; L^i f - L^i g \in U\right\} \\
&= \limsup_k \tfrac{1}{k}\text{card}\left\{0 \le i \le k-1; (L_n^i f_n - L_n^i g_n) \circ \pi_n \in U\right\} \\
&= \limsup_k \tfrac{1}{k}\text{card}\left\{0 \le i \le k-1; L_n^i f_n - L_n^i g_n \in \pi_n^{*-1}(U)\right\} \\
&= \limsup_k \tfrac{1}{k}\text{card}\left\{0 \le i \le k-1; L_n^i f_n - L_n^i g_n \in U_1\right\}
\end{aligned}$$

$$= \limsup_k \frac{1}{k}\text{card}\left\{0 \leq i \leq k-1; (L_n^i f_n, L_n^i g_n) \in \Delta_{U_1}\right\} = F^*_{f_n g_n}(\Delta_{U_1}) = 1,$$

Portanto $F^*_{fg}(\Delta_U) = 1$. Como $\pi_n^* : \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \to \pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n))$ é um homeomorfismo, então $\pi_n^*(V_1)$ é uma vizinhança de 0 em $\pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n))$. Portanto existe $V \in B_0$ tal que $\pi_n^*(V_1) = \pi_n^*(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)) \cap V$. Tomando $f = f_n \circ \pi_n, g = g_n \circ \pi_n \in \Gamma$, segue que

$$F_{fg}(\Delta_V) = \liminf_k \frac{1}{k}\text{card}\left\{0 \leq i \leq k-1; (L^i f, L^i g) \in \Delta_V\right\}$$

$$= \liminf_k \frac{1}{k}\text{card}\left\{0 \leq i \leq k-1; L^i f - L^i g \in V\right\}$$

$$= \liminf_k \frac{1}{k}\text{card}\left\{0 \leq i \leq k-1; (L_n^i f_n - L_n^i g_n) \circ \pi_n \in V\right\}$$

$$= \liminf_k \frac{1}{k}\text{card}\left\{0 \leq i \leq k-1; L_n^i f_n - L_n^i g_n \in \pi_n^{*-1}(V) = V_1\right\}$$

$$= \liminf_k \frac{1}{k}\text{card}\left\{0 \leq i \leq k-1; (L_n^i f_n, L_n^i g_n) \in \Delta_{V_1}\right\} = F_{f_n g_n}(\Delta_{V_1}) = 0.$$

Portanto L é distribucionalmente caótico. □

Pela Observação 2.3.11, segue o corolário abaixo.

Corolário 3.5.3. *Se L é um operador de convolução sobre o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$, que não é um múltiplo escalar da identidade, então L é DC1 e DC2.*

Como vimos no Corolário 2.3.15, a noção de caos distribucional é mais forte que a noção de caos Li-Yorke. Portanto o Teorema 3.5.2 melhora o resultado obtido no Teorema 3.4.1.

Índice de definições

Referências Bibliográficas

[1] T. Arai, *Devaney's and Li-Yorke's Chaos in Uniform Spaces*, J. Dyn. Control Syst. **24** (2018), 93–100.

[2] J. A. Barroso, *Introduction to Holomorphy,* North-Holland Math. Stud. 106, Amsterdam, 1985.

[3] J. A. Barroso and L. Nachbin, *Some topological properties of spaces of holomorphic mappings in infinitely many variables,* North-Holland Math. Stud. **34**, North-Holland, 1979, 67–91.

[4] N.C. Bernardes Jr, A. Bonilla, V. Müller and A. Peris, *Distributional chaos for linear operators*, J. Funct. Anal. **265** (2013), 2143-2163.

[5] N. C. Bernardes Jr, A. Bonilla, V. Müller and A. Peris, *Li-Yorke chaos in linear dynamics,* Ergod. Theory Dyn. Syst. **35** (2015), 1723–1745.

[6] N.C. Bernardes, A. Bonilla and A. Peris, *Mean Li-Yorke chaos in Banach spaces,* J. Funct. Anal. **278** (2020), 1-31.

[7] B. M. Caraballo, *Pré-duais de espaços de funções holomorfas e dinâmica linear dos operadores de convolução sobre certos espaços de funcões inteiras,* Tese (Doutorado), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2019.

[8] B. M. Caraballo and V. V. Fávaro, *Chaos for convolution operators on the space of entire functions of infinitely many complex variables,* Bull. Soc. Math. France **148** (2020), 189-203.

[9] T. Ceccherini-Silberstein and M. Coornaert, *Sensitivity and Devaney's chaos in uniform spaces,* J. Dyn. Control Syst. **19** (2013), 349–357.

[10] G. Costakis and M. Sambarino, *Topologically mixing operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 385-389.

[11] S. Dineen, *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces,* Springer, London, 1999.

[12] V. V. Fávaro and J. Mujica *Hypercyclic convolution operators on spaces of entire functions,* J. Operator Theory **76** (2016), 141–158.

[13] R. M. Gethner, J. H. Shapiro *Universal vector for operators on spaces of holomorphic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 281–288.

[14] G. Godefroy and J. H. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds,* J. Funct. Anal. **98** (1991), 229–269.

[15] K.-G. Grosse-Erdmann and A. Peris Manguillot, *Linear Chaos,* Springer, Berlin, 2011.

[16] J. Horváth, *Topological Vector Spaces and Distributions*, vol. I, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1966.

[17] J. Kelley, *General Topology*, Springer, New York, 1955.

[18] C. Kitai, Invariant closed sets for linear operators, Dissertation, University of Toronto, 1982.

[19] T. Li and J. Yorke, *Period three implies chaos,* Amer. Math. Mon. **82** (1975), 985–992.

[20] J. Mujica, *Notas de Topologia Geral,* IMECC-UNICAMP, 2005.

[21] J. Mujica, *Notas de Espaços Vetoriais Topológicos,* IMECC-UNICAMP, 2015.

[22] J. R. Munkres, *Topology,* Pearson, 2017.

[23] H. Shao, *Chaos and weak mixing on uniform spaces*, Topology and its Applications **336** (2023), article 108613.

[24] F. M. Vasconcelos, *Caos Distribucional para Operadores sobre Espaços de Fréchet*, Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

[25] H. Wang and X. He, *Devaney's chaos or 2-scattering implies Li–Yorke's chaos*, Topol. Appl. **117** (2002), 259–272.

[26] L. Wang , G. Huang and S. Huan *Distributional chaos in a sequence*, Nonlinear Anal. **67** (2007), 2131-2136.

[27] N. Yadav and S. Shah, *Li-Yorke chaos and topological distributional chaos in a sequence,* Turkish J. Math. **46** (2022), 1360–1368.