Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PADRÕES GEOMÉTRICOS ELEMENTARES E SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS

Herbert Rezende Siqueira

Uberlândia-MG
2024

Herbert Rezende Siqueira

PADRÕES GEOMÉTRICOS ELEMENTARES E SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção de título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de concentração: Matemática
Linha de pesquisa: Geometria e Topologia

Orientador(a): Marcus Augusto Bronzi

Uberlândia-MG
2024

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

S618
2023

Siqueira, Herbert Rezende, 1986-
PADRÕES GEOMÉTRICOS ELEMENTARES E SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS [recurso eletrônico] / Herbert Rezende Siqueira. - 2023.

Orientador: Marcus Augusto Bronzi.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2023.642
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Matemática. I. Bronzi, Marcus Augusto,1982-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3230-9452 - www.famat.ufu.br - profmat@famat.ufu.br

ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT UFU				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Profissional, 01, PROFMAT				
Data:	Dezenove de janeiro de dois mil e vinte e quatro	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:	16:00
Matrícula do Discente:	12212PFT007				
Nome do Discente:	Herbert Rezende Siqueira				
Título do Trabalho:	Padrões geométricos elementares e sistemas dinâmicos discretos.				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Geometria e Topologia				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Não há				

Reuniu-se em webconferência, pela plataforma *Google Meet,* a Banca Examinadora aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PPGMPMAT), assim composta pelos professores doutores: Tatiana Miguel Rodrigues - UNESP; Fábio José Bertoloto - FAMAT/UFU e Marcus Augusto Bronzi - FAMAT/UFU, orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Prof. Dr. Marcus Augusto Bronzi, apresentou a Comissão Examinadora e juntamente com o candidato agradeceram a presença de todos. Posteriormente, o presidente concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

Dando continuidade, o senhor presidente concedeu a palavra para os examinadores que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final considerando o candidato:

Aprovado

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

Documento assinado eletronicamente por **Tatiana Miguel Rodrigues**, **Usuário Externo**, em 19/01/2024, às 15:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Marcus Augusto Bronzi**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 19/01/2024, às 15:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Fabio José Bertoloto**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 19/01/2024, às 15:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5065077** e o código CRC **70B66DCC**.

Referência: Processo nº 23117.090430/2023-06 SEI nº 5065077

Dedico este trabalho à matemática, verdadeiro poder que ilumina os caminhos do conhecimento, desvenda os segredos do universo e nos guia rumo às soluções mais brilhantes.

Agradecimentos

Gostaria de começar este texto expressando minha profunda gratidão à minha família e a Deus por terem sido fundamentais na realização desta dissertação de mestrado. Sem o apoio incondicional deles, não seria possível chegar a este momento tão especial.

À minha amada esposa Morgana Silva dos Santos, sou imensamente grato pela inspiração constante e pelo apoio inabalável. Seu amor, paciência e compreensão foram essenciais em cada etapa desta jornada acadêmica. Sua presença ao meu lado, incentivando-me e acreditando em mim, fez toda a diferença. É imensurável o quanto seu encorajamento contribuiu para o meu sucesso.

Nesse percurso, também não posso deixar de expressar minha gratidão a Deus. A Ele dedico minha fé e minha eterna gratidão por todas as bênçãos concedidas. Foi com Sua orientação e força que superei os desafios, venci as dificuldades e pude alcançar cada uma das metas estabelecidas.

Agradeço, ainda, aos meus professores e orientadores, que não apenas compartilharam seu conhecimento, mas também seu tempo e dedicação. Suas contribuições foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho e para a minha formação como pesquisador.

Por fim, agradeço a todos os amigos e colegas que me apoiaram ao longo dessa jornada. Suas palavras de incentivo, suas trocas de experiências e suas contribuições foram inestimáveis.

Obrigado a todos que de alguma forma estiveram presentes nessa trajetória. Este momento é a concretização de um sonho que permeou minha vida por tanto tempo. A vocês, minha família, minha esposa Morgana Silva dos Santos, a Deus e a todos os que me acompanharam, meu mais profundo agradecimento.

SIQUEIRA, H. R. .***Padrões Geométricos Elementares e Sistemas Dinâmicos Discretos***. **2024**. **164p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.**

Resumo

O presente trabalho traz uma abordagem rápida de conceitos iniciais de cálculo, análise e sistemas dinâmicos discretos unidimensionais, apresentando diversos exemplos e aplicações. Com base nesses exemplos, foram desenvolvidas seis sequências didáticas que abordam sistemas dinâmicos e progressões geométricas, sendo uma delas adaptada às necessidades dos alunos das turmas de primeiro ano do Ensino Médio onde foram aplicadas. Relatamos os resultados obtidos na aplicação desta sequência didática, os quais foram notáveis, uma vez que houve melhoria na aprendizagem dos alunos, bem como estímulo ao envolvimento e interesse pela Matemática.

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos, Progressões Geométricas, Dinâmica Unidimensional, Estratégias Pedagógicas, Sequências Didáticas.

SIQUEIRA, H. R. .***Elementary Geometric Patterns and Discrete Dynamical Systems***. **2024**. **164p**. **M. Sc. Dissertation** , **Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.**

Abstract

This work provides a quick approach to initial concepts of calculus, analysis, and one-dimensional discrete dynamical systems, presenting various examples and applications. Based on these examples, six didactic sequences were developed that address dynamical systems and geometric progressions, one of which was adapted to the requirement of first-year high school students where it was applied. We report the results obtained from the application of this didactic sequence, which were remarkable as there was an improvement in student learning as well as incentive of their involvement and interest in Mathematics.

Keywords: Dynamic Systems, Geometric Progressions, One-dimensional Dynamics, Pedagogical Strategies, Didactic Sequences .

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

A teoria de Sistemas Dinâmicos tem como objetivo estudar o comportamento dos estados de um sistema ao longo do tempo, utilizando uma regra específica que geralmente está relacionada a uma única variável. Em alguns casos, esses sistemas podem exibir comportamentos complexos, porém, é possível simplificá-los para realizar estudos mais abrangentes. De um modo geral, para entender esses comportamentos, são utilizadas técnicas de análise das repetidas iterações da função que modela o sistema, além de conceitos e ferramentas de Cálculo Diferencial e Análise, Espaços Métricos, entre outros.

É possível também realizar estudos do ponto de vista computacional, em particular, em modelos unidimensionais. Uma referência relevante é Villate [18]. A dinâmica unidimensional é um tema muito relevante em Sistemas Dinâmicos, sendo amplamente explorada por inúmeros autores, dentre os quais destacamos Devaney [5], uma referência tradicionalmente utilizada, pois traz uma linguagem mais elementar da teoria. Nesse contexto, a chamada *família quadrática* (uma função polinomial de segundo grau) é um exemplo importante, pois apresenta diversas propriedades dinâmicas que variam de acordo com um determinado parâmetro. Essa abordagem torna o tema mais acessível até mesmo para estudantes no início de um curso de graduação. Além disso, existem trabalhos que visam uma abordagem mais intuitiva e elementar, com foco na aplicação dos conceitos em níveis de ensino básico, como os desenvolvidos por Cipolli [3] e Cardoso [2]. Essas produções acadêmicas são uma das motivações para o início do presente trabalho.

De forma concisa, nossa proposta consiste em utilizar algumas ideias e noções elementares dos Sistemas Dinâmicos Unidimensionais vinculadas a construções simples em geometria plana e, em algumas situações, utilizando Progressões Geométricas, propondo modelos e exemplos elementares que possam ser utilizados no Ensino Básico. As investigações sobre Sistemas Dinâmicos visam explicar como os estados de um sistema se desenvolvem ao longo do tempo, com base em uma regra específica que se relaciona apenas com uma única variável. Por vezes, esses sistemas exibem comportamentos extremamente complicados, como o comportamento caótico. Para pesquisar esses sistemas, são efetuadas repetidas iterações de funções e aplicados conhecimentos avançados de Cálculo Diferencial e Espaços Métricos.

No entanto, o ensino desses conceitos não é comum no Ensino Médio, pois não fazem parte do currículo estabelecido. Diante dessa lacuna, o presente trabalho propõe estratégias pedagógicas, como a utilização de sequências didáticas, para abordar os Sistemas Dinâmicos de forma acessível e interessante para os alunos. Ao adotar essa abordagem, são desenvolvidas seis sequências didáticas que exploram a aplicação de Sistemas Dinâmico sem Progressões Geométricas, com uma delas adaptada para alunos do primeiro ano do Ensino Médio. Durante a aplicação das sequências, espero identificar possíveis dificuldades dos alunos em compreender a relação entre séries geométricas e a área dos triângulos. No entanto, essas dificuldades podem ser superadas por meio de uma revisão detalhada da fórmula da série geométrica e do raciocínio por trás dela. Almejo resultados promissores com a aplicação das sequências didáticas, como uma melhoria na aprendizagem dos alunos, maior interesse e envolvimento com a Matemática. Ressalto que foi feita a escolha de utilizar cartolina no desenvolvimento da aplicação da sequência didática, no lugar de levar os alunos a um laboratório, no intuito de desenvolver suas habilidades psicomotoras, além de evitar a utilização de tela durante a aula.

Para alcançar esses objetivos, o **Capítulo 1** apresenta conceitos iniciais, como composição de funções, continuidade, derivada, Teorema do Valor Médio, Progressão Geométrica, método de Newton-Raphson, Teorema de Taylor de ordem 2 e Teorema da Sequência Monótona. O **Capítulo 2** aborda Sistemas Dinâmicos Discretos, incluindo iteração de funções, órbitas, pontos fixos e periódicos, comportamento assintótico das órbitas, representação gráfica e retrato de fase, e a relação entre a derivada e a dinâmica. Em seguida, no **Capítulo 3**, são apresentados exemplos de aplicações de Sistemas Dinâmicos Discretos. O **Capítulo 4** explora sequências didáticas para o Ensino Médio, fornecendo roteiros de aula para os exemplos apresentados no **Capítulo 3**. Com base na aplicação dessas sequências didáticas nas turmas, incluindo a realização de um questionário de opinião, discutimos os resultados no **Capítulo 5**. Em seguida, no **Capítulo** 6, apresentamos um relato detalhado do desenvolvimento das sequências didáticas e uma análise dos questionários de opinião. Finalmente, no **Capítulo 7**, apresentamos nossas considerações finais.

CAPÍTULO 1

Conceitos iniciais

A teoria de Sistemas Dinâmicos é muito ampla e possui diversas abordagens e modelos. Neste trabalho focaremos nossa atenção a uma dessas abordagens, a qual é geralmente denominada de Sistemas Dinâmicos Discretos. Estes são determinados modelos matemáticos que descrevem a evolução de um sistema ao longo do tempo de forma discreta, o que significa que as mudanças ocorrem em passos ou intervalos de tempo fixos, nesse caso, utiliza-se os números inteiros ou naturais como o tempo.

O conteúdo de Cálculo Diferencial, Integral de uma variável e Análise Real, para alunos do PROFMAT, é ministrado na disciplina de MA22 - Fundamentos de Cálculo, é de extrema importância para a estudo e compreensão dos Sistemas Dinâmicos Discretos. O livro [13], utilizado nesta disciplina, aborda conceitos essenciais como função, sequência, limite, continuidade, derivada e integral, assim como o Teorema do Valor Intermediário, Teorema do Valor Médio e Teorema Fundamental do Cálculo.

Essas ferramentas matemáticas são essenciais para o entendimento de certas propriedades dos Sistemas Dinâmicos Discretos, como estabilidade, periodicidade, convergência, entre outras. Através dessas técnicas e conceitos, é possível compreender e prever o comportamento desses sistemas, bem como buscar soluções para problemas específicos.

1.1 Composição de Funções

A base dos nossos estudos é o conceito de função. A seguir apresentamos uma definição elementar.

Definição 1.1

Uma função $f : X \to Y$ é uma lei que associa a cada elemento x do conjunto não vazio X um único elemento y do conjunto não vazio Y. Dizemos que x é um elemento do domínio de $f(x)$ e que y é um elemento da imagem de $f(x)$, a qual é um subconjunto de Y. Em outras palavras, para cada elemento x em X, a função f determina um correspondente único y em Y.

No estudo dos Sistemas Dinâmicos, a composição de funções é utilizada para analisar o comportamento ao longo do tempo de Sistemas Dinâmicos, como o crescimento populacional e a modelagem de sistemas físicos. Ela permite determinar como a população ou a posição de um objeto evolui de acordo com a taxa de crescimento ou a velocidade estabelecida. Assim, a composição de funções é uma ferramenta essencial na análise temporal de Sistemas Dinâmicos.

A composição de funções envolve a repetição de uma função várias vezes, o que é fundamental nessa teoria. Esse conceito de composição é utilizado de forma iterativa nos Sistemas Dinâmicos, onde a função é aplicada repetidamente aos resultados anteriores. Isso permite estudar como o sistema evolui ao longo do tempo, entendendo como cada iteração da função afeta os resultados subsequentes.

Definição 1.2

Dadas as funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$, a **Função Composta** de f e g é a função $g \circ f : A \to C$ que para cada $x \in A$ associa o ponto $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \in C$.

Exemplo 1.1

Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as funções dadas por $f(x) = 4x$ e $g(x) = x^2$. Podemos então obter as seguintes composições das funções:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (4x)^2 = 16x^2$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 4(x^2) = 4x^2$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 4(4x) = 16x$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = (x^2)^2 = x^4$$

1.2 Continuidade e Teorema do Valor Intermediário

Para o desenvolvimento deste trabalho, assumiremos alguns conceitos de Análise e de Cálculo, como limite e suas principais propriedades, que podem ser encontrados em [13], de modo que iniciaremos tratando brevemente de continuidade.

A continuidade de uma função em um intervalo implica que não há descontinuidades nesse intervalo. Além disso, o Teorema do Valor Intermediário garante que a função assume todos os valores pertencentes a um intervalo com extremidades em dois pontos de sua imagem.

Definição 1.3

Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é **contínua no ponto** a pertencente ao intervalo $I \subset \mathbb{R}$ quando o limite de $f(x)$, quando x tende para a existe e é igual a $f(a)$,ou seja, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Além disso, dizemos que f é **contínua** se for contínua em todos os pontos do seu domínio. Nesse caso, dizemos que não há **descontinuidades** no domínio da função.

Exemplo 1.2

Considere a função $f(x) = \frac{1}{x}$ definida no intervalo $(0, \infty)$. Podemos mostrar que esta função é contínua em todos os pontos do seu domínio utilizando o conceito de limite:

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$$

onde a é um número qualquer no intervalo $(0, \infty)$. Portanto, para qualquer valor escolhido em $(0, \infty)$, o limite desta função existe e é finito, o que implica que a função $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em todos os pontos do seu domínio.

Proposição 1.1

Se duas funções f e g são contínuas em um determinado ponto x que pertence a um intervalo $[a,b]$, então as funções resultantes da soma, subtração, multiplicação e divisão de f e g também serão contínuas em x, desde que $g(x)$ seja diferente de zero.

Demonstração. Omitiremos esta demonstração, ver em [13]. □

Algumas classes de funções têm a propriedade de serem contínuas em todos os pontos do seu domínio. Estas classes incluem funções polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas. Isso significa que essas funções não possuem descontinuidades em nenhum ponto do seu domínio, seja ele um intervalo fechado, aberto, semi-aberto ou infinito.

Uma consequência importante da continuidade de uma função f em um intervalo $[a,b]$, como veremos nos teoremas a seguir, é que todos os valores possíveis que f pode assumir estão contidos no intervalo $[c,d]$. Em outras palavras, se a função é contínua em um intervalo, ela não pode "escapar" desse intervalo e assumir valores fora dele.

Além disso, se uma função contínua f possui uma função inversa g, essa função inversa também será contínua no intervalo correspondente.

Essas propriedades são fundamentais para a análise e estudo de funções contínuas, pois permitem realizar operações matemáticas e estabelecer relações de continuidade entre diferentes funções.

Teorema 1.1: Teorema de Bolzano

Se f for uma função contínua em um intervalo fechado $[a,b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ possuírem sinais opostos, então existe pelo menos um ponto c em (a,b), tal que $f(c)=0$.

Demonstração: Suponha que f seja uma função contínua em um intervalo fechado $[a,b]$ e que $f(a)$ e $f(b)$ possuem sinais opostos. Queremos mostrar que existe pelo menos um ponto c em (a,b), tal que $f(c)=0$.

Podemos utilizar o método da bissecção para encontrar esse ponto. Dividimos o intervalo $[a,b]$ no meio, obtendo o ponto médio $c_1=\frac{a+b}{2}$.

Se $f(c_1)=0$, então encontramos o ponto $c=c_1$, que satisfaz a condição desejada.

Caso contrário, temos dois casos: ou $f(c_1)$ é positivo e $f(a)$ é negativo, ou $f(c_1)$ é negativo e $f(a)$ é positivo.

Se $f(c_1)$ é positivo e $f(a)$ é negativo, então pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um ponto c_2 em (a, c_1), tal que $f(c_2) = 0$. Podemos parar aqui, pois encontramos um ponto $c = c_2$ que satisfaz a condição desejada.

Se $f(c_1)$ é negativo e $f(a)$ é positivo, então pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um ponto c_2 em (c_1, b), tal que $f(c_2) = 0$. Mais uma vez, encontramos um ponto $c = c_2$ que satisfaz a condição desejada.

Podemos repetir esse processo infinitamente, dividindo o intervalo ao meio a cada passo e escolhendo sempre o subintervalo onde ocorre uma mudança de sinal. Como f é contínua, esses subintervalos ficarão cada vez menores, até que eventualmente encontraremos um ponto c em (a, b) onde $f(c) = 0$.

Portanto, concluímos que pelo menos um ponto c existe em (a, b), tal que $f(c) = 0$, provando o Teorema de Bolzano.

■

Teorema 1.2: Teorema do Valor Intermediário

Se f for uma função contínua em $[a, b]$ e γ for um número real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe pelo menos um ponto c em $[a, b]$, tal que $f(c) = \gamma$.

Demonstração: Para provar este teorema, vamos supor, sem perda de generalidade, que $f(a) < \gamma < f(b)$. Consideremos a função $g(x) = f(x) - \gamma$, com $x \in [a, b]$. Como f é contínua em $[a, b]$, pela propriedade de continuidade de funções, temos que g também é contínua. Além disso, temos que

$$g(a) = f(a) - \gamma < 0 \text{ e } g(b) = f(b) - \gamma > 0.$$

Pelo Teorema de Bolzano, sabemos que se uma função contínua assume valore negativo em um ponto de um intervalo e valor positivo em outro ponto do mesmo intervalo, então a função assume um valor igual a zero em algum ponto dentro desse intervalo. Portanto, existe um ponto $c \in [a, b]$, tal que $g(c) = 0$. Isso implica que $f(c) - \gamma = 0$, ou seja, $f(c) = \gamma$.

Dessa forma, com a aplicação do Teorema de Bolzano, demonstramos que existe pelo menos um ponto c em $[a, b]$, tal que $f(c) = \gamma$.

■

O próximo teorema é muito importante em Sistemas Dinâmicos, pois está relacionado à existência de pontos fixos, e traremos uma demonstração.

Teorema 1.3

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, tal que $f(a) \geq a$ e $f(b) \leq b$, então existe um ponto $x \in [a,b]$, tal que $f(x) = x$.

Demonstração: Para provar este teorema, consideramos a função auxiliar $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida como $h(x) = f(x) - x$.

Como f é uma função contínua em $[a,b]$, temos que h também é contínua. Além disso, sabemos que $f(a) \geq a$ e $f(b) \leq b$. Portanto, temos que $h(a) = f(a) - a \geq 0$ e $h(b) = f(b) - b \leq 0$.

Aplicando o Teorema do Valor Intermediário (TVI), sabemos que se uma função contínua assume valores de sinais opostos em um intervalo, então ela assume um valor igual a zero nesse intervalo.

Assim, pelo TVI, concluímos que existe um ponto $c \in [a,b]$, tal que $h(c) = 0$, ou seja, $f(c) - c = 0$. Portanto, $f(c) = c$.

Dessa forma, utilizando o Teorema do Valor Intermediário, provamos que existe pelo menos um ponto c em $[a,b]$, tal que $f(c) = c$. Esse ponto c também é denominado ponto fixo de f.

■

1.3 Derivada de uma Função

Nesta seção, vamos discutir a definição da derivada de uma função usando o conceito de limite, juntamente com sua interpretação geométrica, que é a definição da reta tangente a uma curva.

Definição 1.4

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é derivável em $x_0 \in I$ se o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe. Neste caso, denotamos esse limite por $f'(x_0)$.

Outra definição importante é a função derivada, que é a função $f' : I \to \mathbb{R}$ que associa a cada $x \in I$ o valor $f'(x)$. Uma função é considerada derivável se for possível calcular sua derivada em todos os pontos do intervalo aberto em que está definida.

Definição 1.5

A reta tangente ao gráfico de uma função $f : I \to \mathbb{R}$ no ponto $P = (x_0, f(x_0))$ é a reta que passa pelo ponto P e possui um coeficiente angular igual a $f'(x_0)$. Portanto, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto P é dada por:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Essa equação descreve a reta tangente ao gráfico de f no ponto P, onde x_0 é a coordenada do ponto P no eixo das abscissas, $f(x_0)$ é a coordenada do ponto P no eixo das ordenadas e $f'(x_0)$ é a derivada de f no ponto x_0.

1.4 Teorema do Valor Médio

O Teorema do Valor Médio é um resultado importante na teoria do cálculo que estabelece a existência de um ponto onde a taxa de variação média de uma função é igual à sua taxa de variação instantânea.

Teorema 1.4

Seja f uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e derivável em um intervalo aberto (a, b). Queremos mostrar que existe pelo menos um ponto c em (a, b), tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

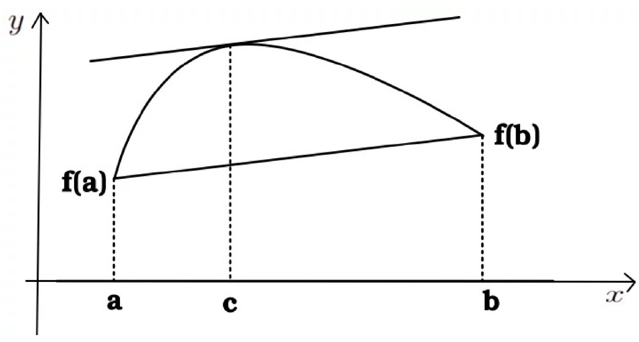


Figura 1.1: Representação geométrica do Teorema do Valor Médio [12]

Demonstração:

Consideremos a função auxiliar

$$s(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

A função s é uma reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Agora, definimos a função $g(x) = f(x) - s(x)$ para x em $[a, b]$. Note que

$$g(a) = f(a) - s(a) = f(a) - [f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a)] = f(a) - f(a) = 0$$

e

$$g(b) = f(b) - s(b) = f(b) - [f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a)] = f(b) - f(b) = 0.$$

Portanto, $g(a) = g(b) = 0$.

Agora, vamos mostrar que g é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b).

A função f é contínua em $[a, b]$, e s é uma reta. Portanto, a função $g(x) = f(x) - s(x)$ é a diferença de duas funções contínuas, o que implica que g é contínua em $[a, b]$.

Além disso, a função f é derivável em (a, b), e s é a representação de uma função derivável. Portanto, a função

$$g(x) = f(x) - s(x)$$

é a diferença de duas funções deriváveis, o que implica que g é derivável em (a, b).

De acordo com [13], o Teorema de Rolle estabelece uma condição necessária para a existência de pelo menos um ponto no intervalo aberto (a, b) onde a derivada de uma função $f(x)$ é igual a zero. Para isso, é necessário que a função seja contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b), além de satisfazer a condição de que $f(a) = f(b)$.

No caso da função g, que é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b), além de satisfazer $g(a) = g(b) = 0$, podemos aplicar o Teorema de Rolle. Portanto, pode-se concluir que existe pelo menos um ponto c em (a, b), tal que $g'(c) = 0$.

Calculando a derivada de $g(x)$, temos $g'(x) = f'(x) - s'(x)$. Já vimos que

$$s(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

então

$$s'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Portanto, temos

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Como $g'(c) = 0$, temos que

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

o que implica em

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Assim, fica demonstrado que existe pelo menos um ponto c em (a, b), tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

■

1.5 Método de Newton-Raphson

Veremos agora uma importante aplicação do conceito de derivada, o método de Newton-Raphson, o qual é um algoritmo utilizado para encontrar zeros de uma função não linear. Ele utiliza aproximações iniciais e atualizações iterativas para se aproximar do valor exato da raiz. Veremos uma interessante aplicação mais adiante na Seção 3.1.6.

Proposição 1.2: (Método de Newton-Raphson)

Seja $f: I \to \mathbb{R}$ um função real derivável no intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Dado um ponto inicial x_0, o método de Newton-Raphson atualiza a aproximação x_n do zero da função através da fórmula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

desde que $f'(x_n) \neq 0$ em todo $n \in \mathbb{N}$.

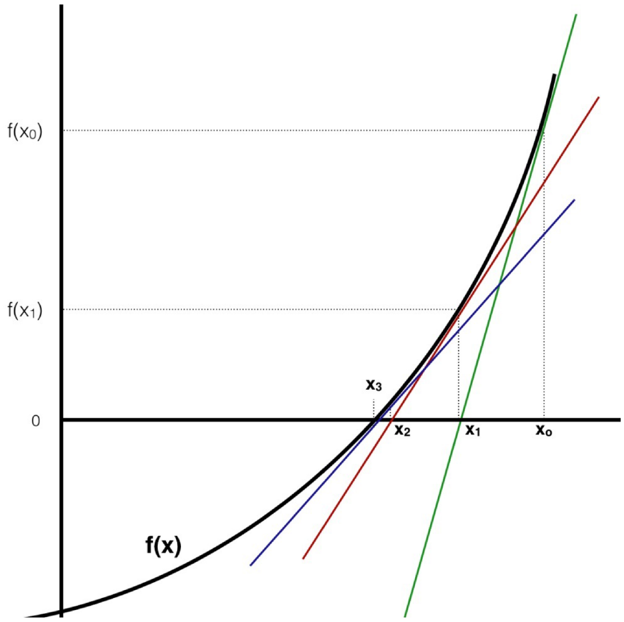


Figura 1.2: Método de Newton-Raphson [4]

Veremos a seguir uma breve dedução deste método. Na Seção 3.1.6 serão apresentados mais detalhes.

Dedução: Podemos explicar a fórmula de atualização do método de Newton-Raphson usando um exemplo. Suponhamos que tenhamos uma função $f(x)$ e desejamos encontrar uma raiz dessa função, ou seja, um valor de x em que $f(x) = 0$. Começamos com uma aproximação inicial x_0. Primeiro, calculamos o valor de $f(x)$ para essa aproximação inicial, ou seja, $f(x_0)$. Em seguida, determinamos a derivada da função $f(x)$ em relação a x e avaliamos essa derivada no ponto x_0, obtendo $f'(x_0)$.

A fórmula então é aplicada utilizando os valores de $f(x_0)$ e $f'(x_0)$ obtidos anteriormente:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Essa fórmula fornece a próxima aproximação da raiz, denotada por x_{n+1}, onde x_n representa a aproximação anterior.

Esse processo é repetido em cada iteração do método de Newton-Raphson até que um critério de parada seja atingido, como alcançar a precisão desejada ou um número máximo de iterações.

Essa fórmula é baseada no fato de que a inclinação da reta tangente à curva da função $f(x)$ em um ponto x_n é uma boa aproximação da inclinação da curva próxima a x_n, e que essa reta tangente intercepta o eixo x na raiz desejada.

Dessa forma, o método de Newton-Raphson utiliza essa propriedade para melhorar iterativamente as aproximações da raiz, utilizando as informações fornecidas pela função e sua derivada.

Exemplo 1.3

Suponhamos que queremos encontrar a raiz da função

$$f(x) = x^3 - 2x - 5.$$

Vamos começar com uma aproximação inicial de $x_0 = 2$.

Passo 1: Calculamos o valor de $f(x)$ para a aproximação inicial:

$$f(x_0) = f(2) = (2)^3 - 2(2) - 5 = 8 - 4 - 5 = -1.$$

Passo 2: Determinamos a derivada da função $f(x)$ em relação a x e a avaliamos no ponto x_0:

$$f'(x_0) = f'(2) = 3(2)^2 - 2 = 3(4) - 2 = 10.$$

Passo 3: Utilizamos a fórmula de atualização para obter a próxima aproximação da raiz, x_1:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{(-1)}{10} = 2,1.$$

Passo 4: Repetimos o processo até atingir o critério de parada desejado. Suponhamos que desejamos que a diferença entre as iterações subsequentes seja menor que $0,01$.

A próxima iteração seria:

$$f(x_1) = (2,1)^3 - 2(2,1) - 5 = 9,261 - 4,2 - 5 = 0,061$$

$$f'(x_1) = 3(2,1)^2 - 2 = 12,51 - 2 = 10,51$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2.1 - \frac{0,061}{10,51} = 2,1006.$$

Continuamos repetindo esse processo até que a diferença entre as iterações subsequentes seja menor que $0,01$. No nosso exemplo, a segunda iteração seria suficiente para satisfazer esse critério. Assim, a raiz aproximada da função $f(x)$ é $x \approx 2,1006$.

Vale ressaltar que o número de iterações necessárias pode variar dependendo da função e da aproximação inicial escolhida. Além disso, é importante ter cuidado com a escolha de aproximações iniciais que possam levar a divergência do método. Caso isso ocorra, pode ser necessário ajustar a aproximação inicial ou utilizar o Teorema do Valor Intermediário para encontrar a raiz de forma mais segura.

1.6 Teorema de Taylor de ordem 2

O Teorema de Taylor de ordem 2 é uma ferramenta fundamental na aproximação de funções por polinômios. Ele nos permite obter uma aproximação quadrática da função em torno de um ponto específico.

Teorema 1.5

O Teorema de Taylor de ordem 2 estabelece que se $f(x)$ é uma função duas vezes diferenciável em um intervalo contendo o ponto a, então a função pode ser aproximada por um polinômio de grau 2, chamado de polinômio de Taylor de ordem 2, dado pela seguinte expressão:

$$P_2 = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2.$$

Nessa expressão, $f(a)$ é o valor da função no ponto a, $f'(a)$ é a derivada de $f(x)$ em relação a x, avaliada no ponto a, e $f''(a)$ é a segunda derivada de $f(x)$ em relação a x, também avaliada no ponto a.

O polinômio de Taylor de ordem 2 fornece uma aproximação quadrática da função $f(x)$ em torno do ponto a. Quanto mais próximo x estiver de a, melhor será a aproximação proporcionada pelo polinômio de Taylor.

Demonstração: Seja $f(x)$ uma função duas vezes diferenciável em um intervalo contendo o ponto a. Queremos aproximar a função $f(x)$ utilizando um polinômio de grau 2, chamado de polinômio de Taylor de ordem 2.

A ideia é encontrar os coeficientes desse polinômio através da sua expansão em série de Taylor. A expansão de Taylor de $f(x)$ em torno do ponto a é dada por:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + R(x),$$

onde $R(x)$ é denominado erro da expansão em série de Taylor.

Vamos analisar esse termo. Pela fórmula do resto de Lagrange [11], temos que existe um ponto c

entre x e a tal que:

$$R(x) = \frac{1}{3!}f'''(c)(x-a)^3$$

Como estamos considerando apenas a expansão até a segunda derivada, temos que $f'''(c)$ é a derivada terceira de $f(x)$ avaliada no ponto c. Também, de $f(x)$ ser duas vezes diferenciável, temos que $f'''(c)$ existe e é contínua no intervalo contendo a e x, logo podemos escrever $f'''(c)$ como $f''(c')$ para algum ponto c'.

Substituindo o termo de erro na expansão de Taylor, temos:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f''(c')(x-a)^3$$

Agora, vamos reorganizar essa expressão de forma a obter o polinômio de Taylor de ordem 2:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f''(c')(x-a)^3$$

Observe que o último termo é o termo de erro que queremos descartar. Para isso, vamos considerar apenas a aproximação até a segunda derivada, ou seja, vamos fazer x se aproximar de a.

Quando x se aproxima de a, o termo $(x-a)$ se aproxima de 0, e podemos considerar que $(x-a)^3$ é próximo de 0 em relação aos outros termos. Assim, podemos desprezar esse termo e obtemos a aproximação do polinômio de Taylor de ordem 2:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

Portanto, o Teorema de Taylor de ordem 2 nos permite aproximar a função $f(x)$ utilizando um polinômio de grau 2.

■

Exemplo 1.4

Vamos supor que queremos aproximar a função $f(x) = \mathtt{sen}(x)$ em torno do ponto $a = \frac{\pi}{6}$ usando o polinômio de Taylor de ordem 2.

De acordo com o Teorema de Taylor de ordem 2, podemos escrever a aproximação como:

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}f''\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2$$

Agora, vamos calcular as derivadas necessárias:

Primeira derivada: $f'(x) = \cos(x)$.

Segunda derivada: $f''(x) = -\operatorname{sen}(x)$.

Avaliando as derivadas no ponto $a = \frac{\pi}{6}$, temos:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Substituindo esses valores na expressão do polinômio de Taylor de ordem 2, temos:

$$f(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2.$$

Essa é a aproximação quadrática da função $\operatorname{sen}(x)$ em torno do ponto $a = \frac{\pi}{6}$. Quanto mais próximo x estiver de $\frac{\pi}{6}$, melhor será a aproximação proporcionada pelo polinômio de Taylor de ordem 2.

Veremos na Seção 3.1.6 que o método de Newton-Raphson se baseia no polinômio de Taylor de ordem 2 para obter uma melhor aproximação da raiz da função $f(x)$.

1.7 Teorema da Sequência Monótona

Uma **sequência numérica** é uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Geralmente denotamos $f(n) = a_n$, assim, $a_1 = f(1), a_2 = f(2), \ldots$. Também denotamos $(a_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, em que a_1 é o primeiro termo e a_n é o termo geral da sequência.

Assumiremos conhecidos alguns conceitos, propriedades e teoremas relacionados a sequências numéricas, que podem ser encontrados por exemplo em [13].

O Teorema da Sequência Monótona é uma importante ferramenta da análise matemática que nos permite determinar se sequências monótonas crescentes ou decrescentes e limitadas têm limite. Ele afirma que se uma sequência é crescente e limitada superiormente, então ela é convergente e seu limite é o supremo desses termos. Por outro lado, se a sequência é decrescente e limitada inferiormente, ela também é convergente e seu limite é o ínfimo desses termos.

Teorema 1.6

O Teorema da Sequência Monótona afirma que uma sequência monotonicamente crescente (ou decrescente) e limitada é convergente, ou seja, possui um limite. De acordo com este teorema, se uma sequência $\{a_n\}$ é crescente e limitada superiormente, então ela é convergente e seu limite é o supremo desses termos. Por outro lado, se uma sequência $\{a_n\}$ é decrescente e limitada inferiormente, então ela também é convergente e seu limite é o ínfimo desses termos.

Demonstração: Omitiremos a demonstração (ver na referência [13])

■

Exemplo 1.5

A sequência

$$a_n = \frac{n}{n+1},$$

é monótona. Logo, podemos aplicar o Teorema 1.7 para concluir que esta sequência é convergente.

Para verificar isso, mostremos, pelo Método de Indução Finita, que a sequência é crescente, ou seja, que $a_n < a_{n+1}$, para todo inteiro $n \geq 1$.

Note que para $n = 1$, temos $a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ e, para $n = 2$, temos $a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$. Podemos concluir que $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$, então $a_1 < a_2$, ou seja, verificamos a propriedade para $n = 1$.

Agora, assumimos a Hipótese de Indução, isto é, "$a_n < a_{n+1}$ para algum $n \in \mathbb{N}$", e provemos que $a_{n+1} < a_{n+2}$.

De fato, assumindo $a_n < a_{n+1}$, temos:

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} \iff n(n+2) < (n+1)^2 \iff n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 \iff 0 < 1.$$

Portanto, $a_n < a_{n+1}$ é verdade para qualquer $n \in \mathbb{N}$, ou seja, a sequência $a_n = \frac{n}{n+1}$ é monótona crescente. Como $a_n \leq 1$, para todo inteiro $n \geq 1$, de acordo com o Teorema da Sequência Monótona a_n é convergente. Observe que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Exemplo 1.6

Vamos verificar que a sequência (a_n), com $a_1 = 1$ e definida recursivamente pela regra $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$, para $n \geq 1$, é monótona. Para isso, mostraremos por indução finita que ela é crescente, ou seja, $a_n \leq a_{n+1}$ para $n \geq 1$. Para $n = 1$, temos $a_2 = \sqrt{1+a_1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \geq a_1$. Portanto, a propriedade é válida para $n = 1$.

Assumindo a Hipótese de Indução, isto é, $a_n \leq a_{n+1}$ para algum $n \geq 1$, vamos mostrar que $a_{n+1} \leq a_{n+2}$.

De fato, temos:

$$a_n \leq a_{n+1} \implies 1+a_n \leq 1+a_{n+1} \implies \sqrt{1+a_{n-1}} \leq \sqrt{1+a_n} \implies a_{n+1} \leq a_{n+2}.$$

Portanto, a sequência (a_n) é monótona crescente.

Além disso, podemos observar que $a_n \leq 2$, para todo $n \in \mathbb{N}$, já que $a_1 = 1 < 2$ e, se $a_n \leq 2$, então $1+a_n \leq 3$ e, consequentemente, $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \leq \sqrt{3} < 2$. Portanto, podemos concluir pelo Teorema da Sequência Monótona que (a_n) é convergente.

Para determinar seu limite, suponhamos que existe um número real L tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Nesse caso, temos:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+a_n} = \sqrt{1+\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{1+L}.$$

Portanto, pela propriedade de limite de sequências convergentes, temos:

$$L = \sqrt{1+L}.$$

A equação em questão é:

$$L^2 - L - 1 = 0,$$

$$L = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Neste caso, a solução que interessa é:

$$L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Concluímos que a sequência (a_n) é monótona crescente e converge para o número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, conhecido como a razão áurea. Isso significa que, à medida que n aumenta, os termos da sequência se aproximam cada vez mais desse valor. A razão áurea possui diversas propriedades matemáticas interessantes e está presente em diversas áreas como arte, arquitetura e natureza.

1.8 Progressão Geométrica

Uma Progressão Geométrica é uma sequência numérica em que cada termo é obtido multiplicando o termo anterior por uma constante fixa chamada de razão q.

Definição 1.6

Uma **Progressão Geométrica** é uma sequência numérica em que cada termo é obtido multiplicando o termo anterior por uma constante fixa chamada de razão q. Podemos representar essa sequência com $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots$. A razão é calculada pela divisão do segundo termo a_2 pelo primeiro termo a_1, ou seja, $q = \frac{a_2}{a_1}$ desde que $a_1 \neq 0$.

Em uma Progressão Geométrica de razão q, qualquer termo pode ser expresso em função do primeiro termo, ou seja,

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}. \tag{1.1}$$

De fato:

- a_n é o termo geral da progressão;
- a_1 é o primeiro termo da progressão;
- q é a razão da progressão;
- n é a posição do termo na progressão.

Para demonstrar a fórmula 1.1, fazemos uma análise da relação entre os termos da Progressão Geométrica. Vamos começar com a fórmula do termo geral da progressão geral: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Sabemos que o primeiro termo é a_1 e, portanto, temos que:

$$a_1 = a_1 \cdot q^{1-1}$$

$$a_1 = a_1 \cdot q^0$$

$$a_1 = a_1 \cdot 1$$

$$a_1 = a_1$$

Concluímos que o primeiro termo da progressão é igual a si mesmo.

Agora, vamos analisar a relação entre dois termos consecutivos da progressão:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

Multiplicando os dois lados da equação por q, temos:

$$a_n \cdot q = a_{n-1} \cdot q^2$$

Substituindo o valor de a_{n-1}, na equação anterior, pela sua expressão em termos de a_1 e q, obtemos:

$$a_n \cdot q = (a_1 \cdot q^{n-1-1}) \cdot q^2$$

$$a_n \cdot q = a_1 \cdot q^{n-2} \cdot q^2$$

$$a_n \cdot q = a_1 \cdot q^{n-2+2}$$

$$a_n \cdot q = a_1 \cdot q^n$$

Dividindo ambos os lados da equação por q, temos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Os termos da Progressão Geométrica são obtidos a partir do primeiro termo, de acordo com a definição: $a_1 = a_1$, $a_2 = a_1 \cdot q$, $a_3 = a_2 \cdot q$. Dessa forma, podemos deduzir a expressão do termo geral, observando que o índice do termo é sempre uma unidade maior que o expoente da razão.Como por exemplo, temos as seguintes Progressões Geométricas:

- $\{1, 3, 9, 27, \ldots\}$, onde $a_1 = 1$ e $q = 3$
- $\{-10, -20, -40, -80, \ldots\}$, onde $a_1 = -10$ e $q = 2$

- $\{0.5, 0.25, 0.125, 0.0625, \dots\}$, onde $a_1 = 0.5$ e $q = 0.5$

A soma de uma Progressão Geométrica é o valor obtido ao somar todos os termos da sequência. Para calcular a soma de uma Progressão Geométrica Finita, utiliza-se a fórmula $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$, onde S_n é a soma dos n primeiros termos, a_1 é o primeiro termo, q é a razão da PG e n é o número total de termos. Essa fórmula é válida apenas quando $q \neq 1$. Se $q = 1$, a PG se torna uma sequência de termos iguais, e a soma é igual a $n \cdot a_1$.

Teorema 1.7

A soma de uma Progressão Geométrica, com primeiro termo a_1 e razão q, é $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$, quando $q \neq 1$.

Demonstração: Considere uma Progressão Geométrica com primeiro termo a e razão q. Podemos escrever os termos da progressão da seguinte forma:

$$a_1,\ a_1q,\ a_1q^2,\ a_1q^3,\ \dots,\ a_1q^{n-1}$$

Para calcular a soma dos termos dessa progressão, consideramos multiplicar cada termo por $(q-1)$ e depois somar:

$$S = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^{n-1}$$

$$qS = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^n$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos:

$$S - qS = a_1 - a_1q^n$$

$$S(1-q) = a_1(1-q^n)$$

Dividindo ambos os lados da equação por $(1-q)$, obtemos a fórmula da soma da Progressão Geométrica:

$$S = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Assim, a fórmula da soma da Progressão Geométrica foi demonstrada.

■

Observe que uma demonstração matematicamente mais completa para a proposição anterior utiliza a Indução Finita, porém, seria um pouco artificial e não traria a beleza e a motivação como a que decidimos apresentar anteriormente.

Exemplo 1.7

Por exemplo, vamos considerar um depósito de $R\$\ 500,00$ na poupança, com rendimento de 2% ao mês. Quanto teremos após 6 meses? Nesse caso, temos uma P.G. com $a_0 = 500$ e

$$q = 1 + i = 1 + 0,02 = 1,02,$$

em que $i = 2\%$. Após 6 meses, teremos

$$a_6 = a_0 \cdot q^6 = 500 \cdot 1,02^6 = R\$\ 543,96.$$

Portanto, podemos calcular o valor futuro de um montante inicial em uma P.G., conhecendo o primeiro termo, a razão e o período.

Exemplo 1.8

Imagine que você queira calcular o valor acumulado ao longo de 5 meses se você investir $R\$1000,00$ mensalmente e obtiver um retorno de 10% ao mês. Podemos modelar esse problema como uma Progressão Geométrica, com o primeiro termo sendo $R\$1000,00$ e a razão sendo $1,1$.

A fórmula geral de um termo de uma Progressão Geométrica é

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Aqui, a_n representa o n-ésimo termo, a_1 é o primeiro termo, q é a razão e n é a posição do termo na progressão. Para calcular o valor acumulado, precisamos somar todos os termos dessa progressão, ou seja,

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Aqui, S_n representa o valor acumulado até o $n-$ésimo termo. No nosso caso, queremos calcular o valor acumulado até o quinto termo, ou seja, S_5:

$$S_5 = 1000 \cdot \frac{(1,1)^5 - 1}{1,1-1} = 1000 \cdot \frac{1,61051-1}{0,1} = 1000 \cdot \frac{0,61051}{0,1} = 1000 \cdot 6,1051 = 6105,10$$

Portanto, se você investir $R\$ \ 1000,00$ mensalmente durante 5 meses com um retorno de 10% ao mês, você terá acumulado $R\$ \ 6105,10$ ao final desse período.

CAPÍTULO 2

Sistemas Dinâmicos Discretos

Neste capítulo, trabalharemos os conceitos básicos relacionados aos Sistemas Dinâmicos Discretos, que serão importantes para os entendimento das seções seguintes. Destacamos que as figuras utilizadas neste e nos capítulos posteriores foram elaboras pelo autor no aplicativo do GEOGEBRA [10] online, salvo menção contrária.

Sistemas Dinâmicos Discretos têm importância em diversas áreas das ciências, uma vez que permite representar fenômenos naturais e sociais que muitas vezes são imprevisíveis. Com essa representação, podemos compreender melhor e tentar prever o comportamento futuro desses fenômenos. Um Sistema Dinâmico discreto consiste em um conjunto de estados possíveis e uma regra que determina a mudança do estado ao longo do tempo. Essa regra define a evolução do sistema, ou seja, como o estado futuro é determinado a partir do estado atual. Essa característica diferencia a dinâmica discreta da dinâmica contínua, onde o estado do sistema pode mudar continuamente ao longo do tempo.

Definição 2.1

Um **Sistema Dinâmico Discreto** é uma função $f : X \to X$, em que X é um subconjunto de $\mathbb{R}$. No presente trabalho, assumimos que f é pelo menos de classe C^1, ou seja, que sua primeira derivada é contínua.

2.1 Iteração de uma função

A iteração em matemática consiste em repetir uma função várias vezes. Para isso, utilizamos o símbolo de composição de funções. Ao iterar uma função f sobre ela mesma, escrevemos

$$f^n = f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f.$$

Esse processo pode ser realizado infinitas vezes, resultando em f^n, onde n é o número de iterações.

Em particular, se f^{-1} existir, então denotamos:

$$f^{-1} \circ f^{-1} \circ \ldots \circ f^{-1}(x) = f^{-n}(x).$$

Definição 2.2

Considerando uma função (contínua) $f : X \to X$ e um ponto $x \in X$, podemos nos perguntar qual é a imagem do ponto x, a imagem de $f(x)$, a imagem de $f(f(x))$, e assim por diante. Esse processo é chamado de **iteração** da função f no ponto x.

Podemos interpretar cada iteração da função f como uma unidade de tempo discreta em que o sistema evolui. A segunda iteração é denotada por f^2, a terceira por f^3, e assim por diante. Ou seja, f^n representa a n-ésima iteração de f, que é a composição de f consigo por n vezes.

Exemplo 2.1

Vamos considerar a função $f(x) = 4x$. Ao aplicarmos essa função repetidamente a um valor inicial, obtemos uma sequência de resultados.

Na primeira iteração, temos $f(x) = 4x$. Na segunda iteração, aplicamos novamente a função f ao resultado da iteração anterior:

$$f^2(x) = f(f(x)) = 4(4x) = 16x.$$

Podemos continuar esse processo, obtendo resultados para cada iteração subsequente.

Na terceira iteração, temos

$$f^3(x) = f(f(f(x))) = 4(16x) = 64x.$$

Seguindo essa iteração, a função $f(x)$ é iterada mais n vezes, resultando em

$$f^n(x) = 4^n x.$$

Portanto, podemos afirmar que a iteração da função $f(x) = 4x$ produz uma sequência de valores em que cada termo é multiplicado por 4 em relação ao termo anterior. Esse padrão é expresso pela fórmula $f^n(x) = 4^n x$.

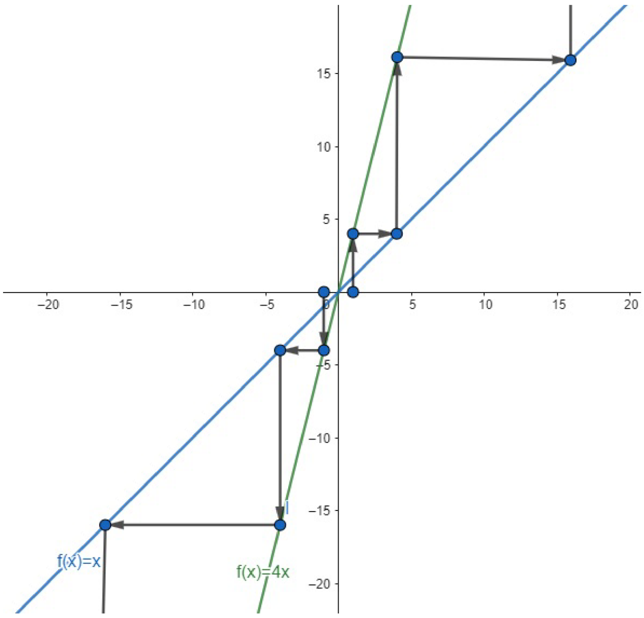


Figura 2.1: Representação gráfica da função $f(x) = 4x$.

Exemplo 2.2

Vamos considerar a função $f(x) = -8x$. Na primeira iteração, temos $f(x) = -8x$. Na segunda iteração, aplicamos novamente a função f ao resultado da iteração anterior:

$$f^2(x) = f(f(x)) = -8(-8x) = 64x.$$

Na terceira iteração, temos

$$f^3(x) = f(f(f(x))) = -8(64x) = -512x.$$

Seguindo essa sequência, a função $f(x)$ é iterada mais n vezes, resultando em

$$f^n(x) = (-8)^n x.$$

Portanto, podemos afirmar que a iteração da função $f(x) = -8x$ produz uma sequência de valores em que cada termo é multiplicado por -8 em relação ao termo anterior. Esse padrão é expresso pela fórmula $f^n(x) = (-8)^n x$.

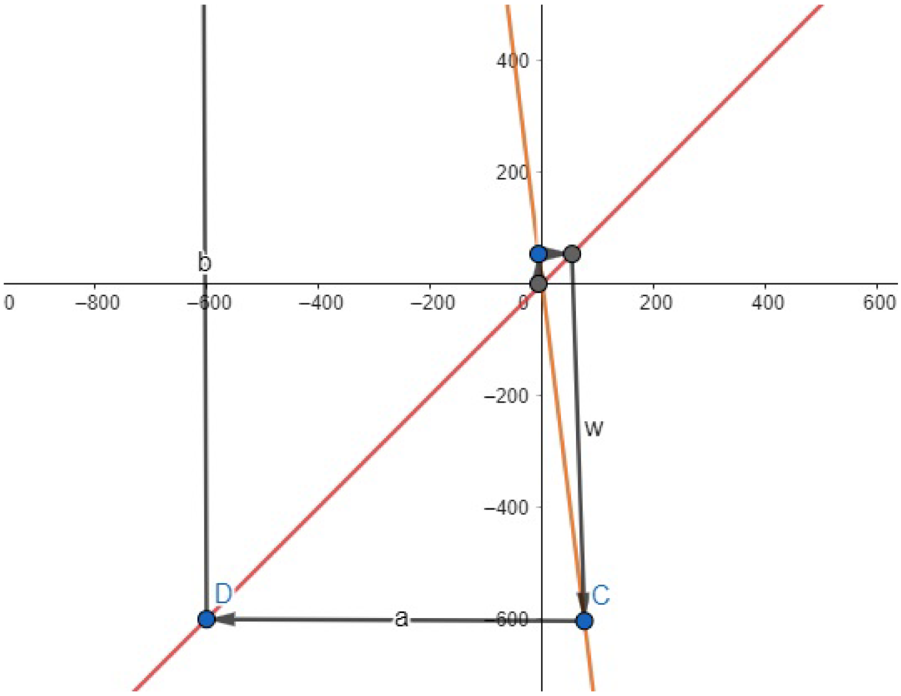


Figura 2.2: Representação gráfica da função $f(x) = -8x$.

Exemplo 2.3

Considere a função $f(x) = 2x^2$. Vamos realizar as iterações usando essa função:

$$f(x) = 2x^2$$

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(2x^2) = 2(2x^2)^2 = 8x^4.$$

$$f^3(x) = f(f(f(x))) = f(8x^4) = 2(8x^4)^2 = 128x^8.$$

$$\vdots$$

$$f^n(x) = 2^{2^n-1}x^{2^n}.$$

Portanto, fazendo a iteração da função $f(x) = 2x^2$. obtemos

$$f^n(x) = 2^{2^n-1}x^{2^n}.$$

Exemplo 2.4

Considere a função $f(x) = -x+7$. Vamos iterar essa função e observar o padrão que surge:

$$f(x) = -x+7.$$

$$f^2(x) = f(f(x)) = -(-x+7)+7 = x.$$

Podemos ver que após a segunda iteração, a função retorna ao valor original de x. Portanto, podemos concluir que:

$$f^n(x) = -x+7, \text{ para n ímpar.}$$

$$f^n(x) = x, \text{ para n par.}$$

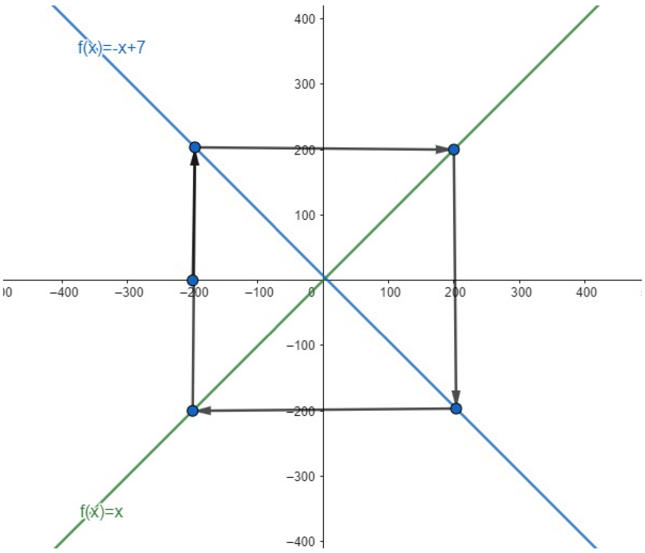


Figura 2.3: Representação gráfica da função $f(x) = -x+7$.

Exemplo 2.5

Considere a função $f(x) = x+7$. Vamos iterar essa função e observar o padrão que surge:

$$f(x) = x+7.$$

$$f^2(x) = f(f(x)) = (x+7)+7 = x+14.$$

$$f^3(x) = f(f(f(x))) = (x+14)+7 = x+21.$$

$$\vdots$$

$$f^n(x) = x + 7n.$$

Podemos identificar que, a cada iteração, o coeficiente de x se mantém, enquanto o número 7 se multiplica pelo valor de n. Dessa forma, podemos generalizar o padrão observado:
A função iterada $f^n(x)$ é dada por $x + 7n$, onde n representa o número de iterações realizadas.
Utilizando a notação de função iterada, podemos escrever de forma mais precisa:

$$f^n(x) = (f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f)(x) = x + 7n.$$

Essa regra geral nos permite determinar o valor da função para qualquer valor de n e x.

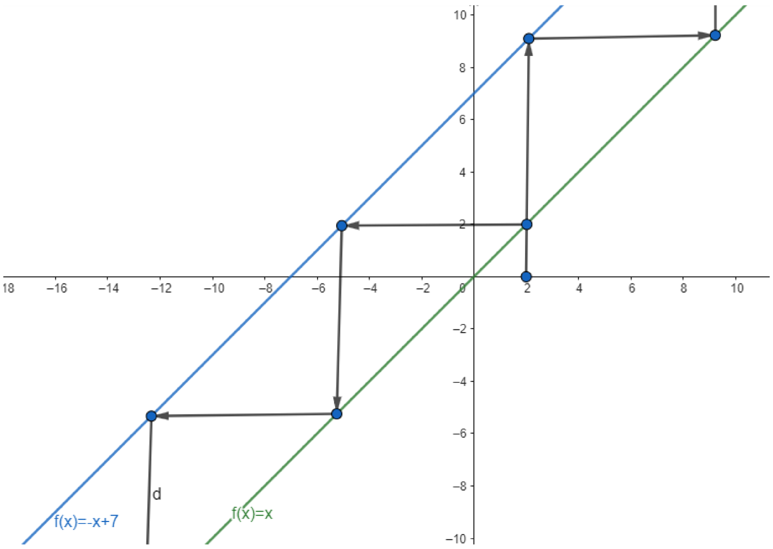


Figura 2.4: Representação gráfica da função $f(x) = x + 7$.

No próximo exemplo veremos como podemos aplicar um Sistema Dinâmico Discreto para calcular o montante de uma aplicação financeira ao longo dos anos, considerando uma taxa de juros fixa.

Exemplo 2.6

Um cliente fez uma aplicação financeira no valor de $R\$700,00$ a uma taxa de 8% capitalizada anualmente. Podemos encontrar o montante da aplicação financeira após n anos.
No término do primeiro ano, o cliente terá um aumento de 8% em seu capital inicial $M_0 = R\$700,00$. O montante M_1 será dado por:

$$M_1 = M_0 + 0,08M_0 = 1,08M_0.$$

Portanto, $M_1 =$ R$ 756,00.

A partir do segundo ano, podemos continuar aplicando a mesma lógica:

$$M_2 = 1,08M_1 = 1,08(1,08M_0) = (1,08)^2 M_0.$$

$$M_3 = 1,08M_2 = 1,08(1,08)^2 M_0 = (1,08)^3 M_0.$$

$$\dots$$

$$M_n = (1,08)^n M_0.$$

Assim, para determinar o valor do montante do cliente após n anos, usando a variável x, utilizamos a função $f(x) = 1,08^x$. Portanto, o valor do montante será dado por:

$$M_n = f^n(M_0) = (1,08)^n M_0.$$

Dessa forma, se considerarmos $n = 5$ anos, teremos:

$$M_5 = (1,08)^5 \times 700 = \text{R\$1.126,48}.$$

Portanto, o montante da aplicação financeira após 5 anos, com uma taxa de 8% e um valor de $R\$700,00$, será de $R\$1.126,48$.

Exemplo 2.7

Vamos considerar a função $f(x) = x^2 - 1$. Ao aplicá-la repetidamente a um valor inicial, obtemos uma sequência de resultados.
Na primeira iteração, temos $f(x) = x^2 - 1$. Na segunda iteração, aplicamos novamente a função f ao resultado da iteração anterior:

$$f^2(x) = f(f(x)) = (x^2 - 1)^2 - 1.$$

Podemos continuar esse processo, obtendo resultados para cada iteração subsequente.
Na terceira iteração, temos

$$f^3(x) = f(f(f(x))) = \left((x^2 - 1)^2 - 1\right)^2 - 1.$$

Seguindo essa sequência, a função $f(x)$ é iterada mais n vezes, resultando em $f^n(x) =$

$$\left(\left(\dots\left(\left(x^2-1\right)^2-1\right)^2-1\right)^2-1\dots\right)^2-1.$$

Portanto, podemos afirmar que a iteração da função $f(x)=x^2-1$ produz uma sequência de valores em que cada termo é obtido a partir do termo anterior aplicando-se a função f.

2.2 Órbita

O estudo de Sistemas Dinâmicos Discretos tem como objetivo compreender as trajetórias possíveis e determinar quais são periódicas ou pré-periódicas. Analisamos como essas trajetórias evoluem ao longo do tempo, representando a evolução do sistema em uma sequência discreta de passos.

Uma trajetória periódica é aquela que se repete após um certo número de passos, enquanto uma trajetória pré-periódica se aproxima de uma trajetória periódica, mas nunca se repete exatamente. O exemplo de um pêndulo simples ilustra essas definições, onde a trajetória será periódica se considerarmos apenas a força da gravidade, mas será pré-periódica se levarmos em conta imperfeições como a resistência do ar e o atrito na articulação.

A análise de trajetórias periódicas e pré-periódicas é fundamental para compreender o comportamento de Sistemas Dinâmicos Discretos ao longo do tempo e identificar padrões recorrentes.

Definição 2.3

Dado $x_0\in X$, definimos a **órbita** (ou **trajetória**) de x_0 sobre a função bijetora $f:X\to X$ como uma sequência (infinita) de pontos $\dots,x_{-1},x_0,x_1,x_2,\dots,x_n,\dots$, tal que $x_n=f^n(x_0)$, em que x_0 é o ponto de partida da órbita, também conhecido como **condição inicial**.

A sequência é gerada mediante a aplicação repetida da função f aos elementos anteriores da sequência:

$$x_1=f(x_0).$$

$$x_2=f(x_1)=f^2(x_0).$$

$$x_3=f(x_2)=f^3(x_0).$$

$$\vdots$$

$$x_n=f(x_{n-1})=f^n(x_0).$$

$$\vdots$$

Essa sequência representa a órbita do ponto x_0 sob a função f.

Definição 2.4

A **órbita positiva** de um ponto x é o conjunto de todos os pontos obtidos ao aplicar repetidamente a função f a partir do ponto inicial x. Formalmente, denotamos esse conjunto como

$$O^+(x) = \{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^n(x)\},$$

onde $f^n(x)$ representa a função f aplicada n vezes a x.

Se considerarmos uma função reversível, podemos definir a trajetória completa de x como o conjunto $O(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$, ou seja, inclui tanto os valores obtidos através das iterações positivas ($f^n(x)$ com $n \geq 0$) quanto as iterações negativas ($f^{-n}(x)$ com $n \geq 0$).

Por outro lado, a **órbita negativa** de um ponto x é o conjunto de todos os pontos obtidos ao aplicar repetidamente a função inversa f^{-1} a partir do ponto inicial x. Formalmente, denotamos esse conjunto como

$$O^-(x) = \{x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), \ldots, f^{-n}(x)\}.$$

Geralmente, nos referimos apenas à trajetória ascendente como “trajetória", especialmente quando a função f não é reversível.

A seguir apresentaremos uma série de exemplos de Sistemas Dinâmicos e de algumas de suas órbitas, tendo cada um com um comportamento específico.

Exemplo 2.8

Considere a função $f(x) = 4x$ e o valor inicial $x_0 = 2$. Podemos determinar a sequência de valores x_n aplicando repetidamente a função f ao valor anterior:

$$x_0 = 2.$$

$$x_1 = f(x_0) = 4 \cdot 2 = 8.$$

$$x_2 = f^2(x_0) = 4 \cdot 8 = 32.$$

$$x_3 = f^3(x_0) = 4 \cdot 32 = 128.$$

$$\cdots$$

$$x_n = f^n(x_0) = 4^n \cdot x_0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, a órbita positiva de 2 é$O^+(2) = \{2, 8, 32, 128, \dots\}$.

Como a função f é invertível, podemos definir a órbita negativa de f, que é obtida aplicando a função inversa de f :

$$O^-(2) = \left\{2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \dots\right\}.$$

Exemplo 2.9

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -8x$. Vamos fixar um valor de $x_0 \in \mathbb{R}$ e examinar o comportamento da função iterada $f^n(x_0)$, onde n é um número natural.

Começamos com $x_0 = 2$. Substituindo esse valor na função $f(x) = -8x$, temos:

$$x_1 = f(x_0) = -8 \cdot 2 = -16.$$

Agora, substituímos o valor de x_1 na função $f(x)$ para obter o próximo valor:

$$x_2 = f(x_1) = -8 \cdot (-16) = 128.$$

Procedendo dessa forma, podemos continuar calculando os próximos valores:

$$x_3 = f(x_2) = -8 \cdot 128 = -1024,$$

$$x_4 = f(x_3) = -8 \cdot (-1024) = 8192,$$

$$\vdots$$

Podemos generalizar essa sequência de valores obtidos aplicando a função f ao valor inicial:

$$x_n = f^n(x_0) = (-8)^n \cdot x_0,$$

onde n é um número natural e $f^n(x_0)$ indica a função f aplicada n vezes em x_0.Começamos calculando $f(x_0)$, que nos dá o valor de x_1. Em seguida, aplicamos novamente a função f, desta vez ao valor de x_1, obtendo assim x_2. Podemos repetir esse processo quantas vezes quisermos, gerando assim uma sequência de valores

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots.$$

Dessa forma, podemos escrever a sequência como

$$O^+(x_0) = \{x_0, -8x_0, \ldots, (-8)^n x_0, \ldots\}.$$

Portanto, a sequência de valores obtidos é

$$O^+(2) = \{2, -16, 128, -1024, \ldots\}.$$

Como a função f é invertível, podemos definir a órbita negativa de f, que é obtida aplicando a função inversa de f. Aplicando a função inversa $f^{-1}(x) = -\frac{1}{8}x$, temos:

$$O^-(2) = \left\{2, -\frac{1}{16}, \frac{1}{128}, -\frac{1}{1024}, \ldots\right\}.$$

Dessa forma, foram obtidas as sequências de valores a partir do valor inicial $x_0 = 2$ tanto pela aplicação da função f (sequência positiva) como pela aplicação da função inversa de f (sequência negativa).

Ao estudarmos o limite dessa sequência à medida que n tende ao infinito, notamos que o resultado depende do valor de x_0.

Se x_0 for um número positivo, ou seja, $x_0 > 0$, a sequência x_n crescerá infinitamente à medida que n aumenta, ou seja, $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = +\infty$.

Por outro lado, se x_0 for um número negativo, ou seja, $x_0 < 0$, a sequência x_n decrescerá infinitamente à medida que n aumenta, ou seja, $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = -\infty$.

Finalmente, se x_0 for igual a zero, teremos $x_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = 0$.

Assim, podemos concluir que o comportamento da dinâmica da função $f(x) = -8x$ depende do valor inicial x_0 escolhido.

Exemplo 2.10

Considerando a função $f(x) = 2x^2$. Primeiro, fixamos um valor de $x_0 \in \mathbb{R}$ e examinamos o comportamento da função iterada $f^n(x_0)$, onde n é um número natural.

Começamos com $x_0 = 1$. Substituindo esse valor na função $f(x) = 2x^2$, temos:

$$x_1 = f(x_0) = 2(1)^2 = 2.$$

Agora, substituímos o valor de x_1 na função $f(x)$ para obter o próximo valor:

$$x_2 = f(x_1) = 2(2)^2 = 8.$$

Podemos continuar calculando os próximos valores:

$$x_3 = f(x_2) = 2(8)^2 = 128,$$

$$x_4 = f(x_3) = 2(128)^2 = 32768,$$

$$\vdots$$

Podemos generalizar essa sequência de valores obtidos aplicando a função f ao valor inicial:

$$f^n(x) = 2^{2^n - 1} x^{2^n}$$

onde n é um número natural e $f^n(x_0)$ indica a função f aplicada n vezes em x_0.

Portanto, a sequência de valores obtidos em 2 é $O^+(1) = \{1, 2, 8, 128, \ldots\}$.

Agora, vamos calcular a órbita negativa de f, aplicando a função inversa $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$:

$O^-(1) = \left\{1, \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}}, \ldots\right\}$.

Dessa forma, foram obtidas as sequências de valores a partir do valor inicial $x_0 = 1$ tanto pela aplicação da função f (sequência positiva) como pela aplicação da função inversa de f (sequência negativa).

Ao estudarmos o limite dessa sequência à medida que n tende ao infinito, notamos que o resultado depende do valor de x_0.

Se x_0 for um número positivo, ou seja, $0 < x_0 > 1$, a sequência x_n crescerá infinitamente à medida que n aumenta, ou seja, $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = +\infty$.

Por outro lado, se x_0 for um número entre -1 e 0, ou seja, $-1 < x_0 < 0$, a sequência x_n decrescerá infinitamente à medida que n aumenta, ou seja, $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = 0$.

Finalmente, se x_0 for igual a zero, teremos $x_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = 0$.

Assim, podemos concluir que o comportamento da dinâmica da função $f(x) = 2x^2$ depende do valor inicial x_0 escolhido.

Exemplo 2.11

Considerando a função $f(x) = -x + 7$.

Começamos com $x_0 = 2$. Substituindo esse valor na função $f(x) = -x + 7$, temos:

$$x_1 = f(x_0) = -(2) + 7 = 5.$$

Agora, substituímos o valor de x_1 na função $f(x)$ para obter o próximo valor:

$$x_2 = f(x_1) = -(5) + 7 = 2.$$

Procedendo dessa forma, podemos continuar calculando os próximos valores:

$$x_3 = f(x_2) = -(2) + 7 = 5,$$

$$x_4 = f(x_3) = -(5) + 7 = 2,$$

$$\vdots$$

Podemos generalizar essa sequência de valores obtidos aplicando a função f ao valor inicial:

$$x_n = f^n(x_0),$$

onde n é um número natural e $f^n(x_0)$ indica a função f aplicada n vezes em x_0. Começamos calculando $f(x_0)$, que nos dá o valor de x_1. Em seguida, aplicamos novamente a função f, desta vez ao valor de x_1, obtendo assim x_2. Podemos repetir esse processo quantas vezes quisermos, gerando assim uma sequência de valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$.
Dessa forma, podemos escrever a sequência como $O^+(x_0) = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$.
Portanto, a sequência de valores obtidos é $O^+(2) = \{2, 5, 2, 5, \ldots\}$.
Como a função f é invertível, podemos definir a órbita negativa de f, que é obtida aplicando a função inversa de f. Aplicando a função inversa $f^{-1}(x) = -x + 7$, temos: $O^-(2) = \{2, 5, 2, 5, \ldots\}$. Dessa forma, foram obtidas as sequências de valores a partir do valor inicial $x_0 = 2$ tanto pela aplicação da função f (sequência positiva) como pela aplicação da função inversa de f (sequência negativa).

Exemplo 2.12

Considerando a função $f(x) = x + 7$. Novamente, vamos fixar um valor de $x_0 \in \mathbb{R}$ e examinar o comportamento da função iterada $f^n(x_0)$, onde n é um número natural.

Começamos com $x_0 = 2$. Substituindo esse valor na função $f(x) = x + 7$, temos:

$$x_1 = f(x_0) = 2 + 7 = 9.$$

Agora, substituímos o valor de x_1 na função $f(x)$ para obter o próximo valor:

$$x_2 = f(x_1) = 9 + 7 = 16.$$

Procedendo dessa forma, podemos continuar calculando os próximos valores:

$$x_3 = f(x_2) = 16 + 7 = 23,$$

$$x_4 = f(x_3) = 23 + 7 = 30,$$

$$\vdots$$

Podemos generalizar essa sequência de valores obtidos aplicando a função f ao valor inicial:

$$x_n = f^n(x_0) = n \cdot 7 + 2,$$

onde n é um número natural e $f^n(x_0)$ indica a função f aplicada n vezes em x_0.

Começamos calculando $f(x_0)$, que nos dá o valor de x_1. Em seguida, aplicamos novamente a função f, desta vez ao valor de x_1, obtendo assim x_2. Podemos repetir esse processo quantas vezes quisermos, gerando assim uma sequência de valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$

Dessa forma, podemos escrever a sequência como $O^+(x_0) = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Portanto, a sequência de valores obtidos é $O^+(2) = \{2, 9, 16, 23, \ldots\}$.

Agora, vamos calcular a órbita negativa de f, aplicando a função inversa $f^{-1}(x) = x - 7$:$O^-(2) = \{2, -5, -12, -19, \ldots\}$. Dessa forma, foram obtidas as sequências de valores a partir do valor inicial $x_0 = 2$ tanto pela aplicação da função f (sequência positiva) como pela aplicação da função inversa de f (sequência negativa).

Ao estudarmos o limite dessa sequência à medida que n tende ao infinito, notamos que o resultado não depende do valor de x_0.

A sequência x_n crescerá infinitamente à medida que n aumenta, ou seja, $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = +\infty$

para qualquer valor de $x_0 \in \mathbb{R}$.

Portanto, independentemente do valor inicial escolhido, a dinâmica da função $f(x) = x + 7$ resultará em uma sequência ilimitada.

Exemplo 2.13

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 1$. Vamos fixar um valor de $x_0 \in \mathbb{R}$ e examinar o comportamento da função iterada $f^n(x_0)$, onde n é um número natural.

Começamos com $x_0 = 0$. Substituindo esse valor na função $f(x) = x^2 - 1$, temos:

$$x_1 = f(x_0) = 0^2 - 1 = -1.$$

Agora, substituímos o valor de x_1 na função $f(x)$ para obter o próximo valor:

$$x_2 = f(x_1) = (-1)^2 - 1 = 0.$$

Procedendo dessa forma, podemos continuar calculando os próximos valores:

$$x_3 = f(x_2) = 0^2 - 1 = -1,$$

$$x_4 = f(x_3) = (-1)^2 - 1 = 0,$$

$$\vdots$$

Podemos generalizar essa sequência de valores obtidos aplicando a função f ao valor inicial:

$$x_n = f^n(x_0),$$

onde n é um número natural e $f^n(x_0)$ indica a função f aplicada n vezes em x_0.

Começamos calculando $f(x_0)$, que nos dá o valor de x_1. Em seguida, aplicamos novamente a função f, desta vez ao valor de x_1, obtendo assim x_2. Podemos repetir esse processo quantas vezes quisermos, gerando assim uma sequência de valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$.

Dessa forma, podemos escrever a sequência como $O^+(x_0) = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Portanto, a sequência de valores obtidos é $O^+(0) = \{0, -1, 0, -1, \ldots\}$.

Ao estudarmos o limite dessa sequência à medida que n tende ao infinito, notamos que a sequência alterna entre os valores 0 e -1. Assim, não há um valor fixo para o limite da sequência.

Portanto, podemos concluir que o comportamento da dinâmica da função $f(x) = x^2 - 1$ é periódica para o valor inicial $x_0 = 0$, assumindo os valores 0 e -1.

2.3 Pontos Fixos e Periódicos

Segundo [5] Pontos fixos são valores que uma variável assume, ao longo do tempo, e que não sofrem alterações quando aplicamos a função do sistema. Em outras palavras, são aqueles valores p para os quais $f(p) = p$. Esses pontos são importantes no estudo dos Sistemas Dinâmicos, pois representam estados de equilíbrio onde a dinâmica do sistema não muda. Os pontos fixos podem ser classificados como estáveis, instáveis ou neutros, dependendo do comportamento do sistema próximo a esses pontos.

Intuitivamente, quando um sistema sofre pequenas perturbações próximas a um ponto fixo estável, essas perturbações tendem a retornar ao próprio ponto fixo, sem se afastarem significativamente. Por outro lado, um ponto fixo instável é caracterizado por pequenas perturbações que se afastam do ponto fixo, cada vez mais. Já em relação aos pontos fixos neutros, perturbações próximas a esses pontos não causam alterações significativas na dinâmica do sistema.

Outros pontos importantes de um Sistema Dinâmico são os pontos periódicos, os quais podem ser pensados como cíclicos, ou seja, retornam ao mesmo lugar após um determinado tempo.

Definição 2.5

Seja $f : X \to X$ uma função. Um ponto $p \in X$ é um **ponto fixo** de f, quando $f(p) = p$. Denotamos por Fix(f) o conjunto de todos os pontos fixos de f. Um ponto $p \in X$ é um **ponto periódico** de f quando existe um inteiro positivo n, tal que $f^n(p) = p$. O menor inteiro positivo n com essa propriedade é chamado de **período** de p.

Além disso, definimos $Per_n(f)$ como o conjunto dos pontos periódicos de período n de f, ou seja,

$$Per_n(f) = \{x : f^n(x) = x\}.$$

E denotamos por $Fix(f)$ o conjunto dos pontos fixos de f, ou seja,

$$Fix(f) = \{x : f(x) = x\}.$$

Note que, se x é um ponto periódico de período n para f, então a órbita de x é dada por

$$O^+(x) = \{x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}.$$

No caso de um ponto fixo, teremos $O^+(x) = \{x\}$.

Uma forma de visualizar o ponto fixo é através da intersecção do gráfico da função f com a reta $y = x$, que representa a função identidade. Em outras palavras, se x é um ponto fixo de f, então $f(x)$ será igual a x. Isso significa que, ao aplicar a função f a x, obteremos novamente x como resultado. No contexto de Sistemas Dinâmicos, os pontos fixos representam estados estáveis, onde o sistema não sofre mudança.

Revisitaremos alguns exemplos apresentados anteriormente para analisar seus possíveis pontos fixos e periódicos.

Exemplo 2.14

Dada a função $f(x) = x$, podemos observar que qualquer valor de x que substituirmos na função resultará no mesmo valor. Portanto, todo número real x é um ponto fixo para essa função. Por exemplo, se escolhermos $x = 2$, temos $f(2) = 2$, e se escolhermos $x = -5$, temos $f(-5) = -5$. Assim, todos esses números são pontos fixos para a função $f(x) = x$.
Essa propriedade de ter todos os números reais como pontos fixos torna a função $f(x) = x$ uma função fixa universal.

Exemplo 2.15

A aplicação $g(x) = -8x$ possui o único ponto fixo $x = 0$. Para encontrar esse ponto fixo, devemos procurar os valores de x que satisfazem a equação $f(x) = x$. Substituindo $f(x)$ por sua expressão, temos $-8x = x$. Se procurarmos pontos periódicos de período 2, isto é, procurar os valores de x que satisfazem $f^2(x) = x$, obtemos a equação $64x = x$, ou seja, $64x - x = 0$. Esta tem apenas o valor de $x = 0$ como solução, que coincide com o ponto fixo.

Exemplo 2.16

A aplicação $f(x) = 2x^2$ possui como pontos fixos os valores $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$. Para encontrar esses pontos fixos, devemos procurar os valores de x que satisfazem a equação $f(x) = x$. Substituindo $f(x)$ por sua expressão, temos $2x^2 = x$. Além dos pontos fixos, a função $f(x)$ também possui pontos periódicos de período 2. Para encontrar esses pontos, devemos procurar os valores de x que satisfazem $f^2(x) = x$, onde $f^2(x)$ representa a aplicação sucessiva de $f(x)$ duas vezes.

Substituindo $f(x)$ por sua expressão, temos $f^2(x) = 2(2x^2)^2 = 2(4x^4) = 8x^4$. Portanto, devemos resolver a equação $8x^4 = x$ para encontrar os pontos periódicos de período 2.

Simplificando a equação, temos $8x^4 - x = 0$. Vamos primeiro fatorar a equação:

$$8x^4 - x = x(8x^3 - 1). \tag{2.1}$$

Agora, podemos fatorar o segundo termo utilizando a diferença de cubos:

$$8x^3 - 1 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1).$$

Portanto, como o discriminante $4x^2 + 2x + 1$ é negativo, temos duas soluções possíveis para a Equação (2.1), $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$, que são os pontos periódicos de período 2 da aplicação. É importante ressaltar que encontrar pontos periódicos de período 3 é uma tarefa bastante difícil e não faremos aqui, pois não se trata do objetivo do trabalho.

Exemplo 2.17

A aplicação $f(x) = -x + 7$ possui como ponto fixo o valor $x = \dfrac{7}{2}$. Para encontrar esse ponto fixo, devemos procurar o valor de x que satisfaz a equação $f(x) = x$, ou seja, $-x + 7 = x$. Resolvendo essa equação, encontramos $x = \dfrac{7}{2}$.

Além do ponto fixo, a função $f(x)$ também possui pontos periódicos de período 2. Para encontrá-los, devemos procurar os valores de x que satisfazem $f^2(x) = x$.

Como

$$f^2(x) = -(-x + 7) + 7 = x - 7 + 7 = x,$$

a equação $f^2(x) = x$ é verdadeira para qualquer valor de x. Portanto, todos os valores de x são pontos periódicos de período 2 da aplicação, exceto $x = \dfrac{7}{2}$ o qual é ponto fixo.

Exemplo 2.18

A aplicação $f(x) = x + 7$ não possui pontos fixos nem periódicos. Para ver isso, note que a equação $f(x) = x$, que equivale a $x + 7 = x$, não possui soluções reais. Além disso, como $f^2(x) = (x+7)+7 = x+14$ e, de um modo geral $f^n(x) = x + 7n$, então a equação $f^n(x) = x$, que equivale a $x + 7n = x$, não possui soluções reais.

Exemplo 2.19

Considere a função $f(x) = x^2 - 1$. Vamos encontrar os pontos fixos desta função, ou seja, os valores de x que satisfazem a equação $f(x) = x$. Substituindo $f(x)$ por sua expressão, temos:

$$x^2 - 1 = x \Longleftrightarrow x^2 - x - 1 = 0. \tag{2.2}$$

Esta equação tem soluções

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Portanto, os pontos fixos da função $f(x) = x^2 - 1$ são $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Agora vamos encontrar os pontos periódicos de período 2 desta função. Como a expressão de $f^2(x)$ é

$$f(f(x)) = f(x^2-1) = (x^2-1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2 + 1 - 1 = x^4 - 2x^2,$$

a equação $f^2(x) = x$ tem a forma

$$x^4 - 2x^2 - x = 0.$$

Fatorando a expressão acima obtemos

$$x^4 - 2x^2 - x = x(x^3 - 2x - 1) = 0,$$

que possui duas soluções $x = 0$ e $x = -1$. Fatorando mais uma vez, obtemos

$$x(x+1)(x^2 - x - 1) = 0.$$

Note que as raízes remanescentes são as mesmas obtidas na Equação (2.2), que fornecem os pontos fixos.

Logo, os pontos periódicos de período 2 da função $f(x) = x^2 - 1$ são $x = 0$ e $x = -1$.

Novamente, não iremos determinar os pontos periódicos de período 3, pois são raízes de equação de grau 8, o que se torna inviável.

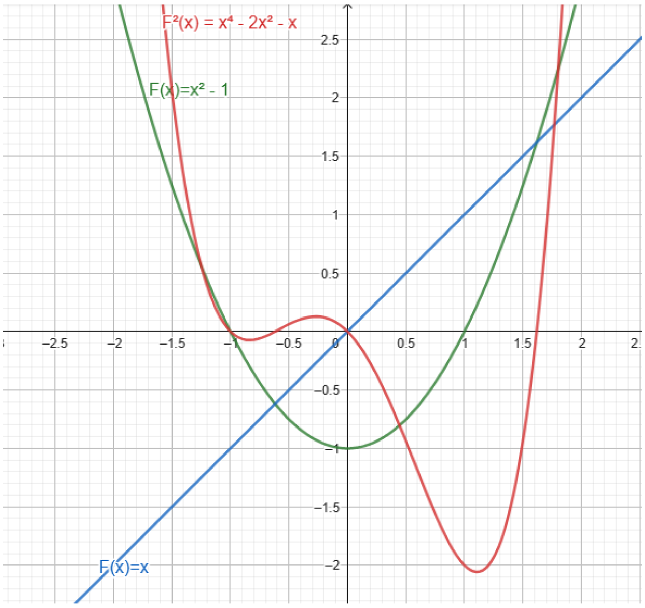


Figura 2.5: Representação gráfica dos pontos fixos e periódicos de período 2 da função $f(x) = x^2 - 1$.

2.4 Representação Gráfica e Retrato de Fase

Uma interessante maneira de visualizar o comportamento das órbitas de um Sistema Dinâmico é através de um retrato de fase. Essa representação gráfica permite observar como os pontos do domínio da função se movem ao longo do tempo e para onde estão convergindo, proporcionando uma visualização clara e completa do comportamento das órbitas. Essa forma de visualização é complementar ao gráfico da função, permitindo uma compreensão mais abrangente do Sistema Dinâmico.

Um retrato de fase é criado acompanhando a evolução dos pontos do domínio ao longo do tempo. Isso é feito traçando setas na reta que indicam a direção e a rapidez do movimento dos pontos. Ao observar o retrato de fase, é possível visualizar padrões e comportamentos recorrentes das órbitas, como pontos convergindo para um ponto de equilíbrio ou formando trajetórias fechadas indicando um comportamento cíclico. Veremos na seção seguinte o conceito formal de pontos fixo atrator e repulsor.

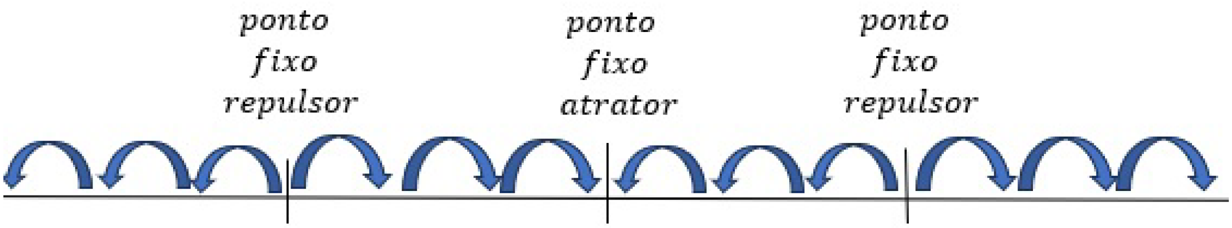


Figura 2.6: Retrato de fase

No caso da representação gráfica, para traçar a órbita de um ponto dado x_0 em uma função f, efetuamos os seguintes passos:

1. Traçamos a bissetriz do primeiro e terceiro quadrante, ou seja, a reta $y = x$, junto ao gráfico da função f. Consideramos o ponto (x_0, x_0) na reta $y = x$.
2. A partir desse ponto, traçamos uma reta vertical que intercepta o gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$.
3. Partindo desse ponto, traçamos uma reta horizontal que encontra a reta $y = x$ no ponto $(f(x_0), f(x_0))$.
4. Em seguida, traçamos novamente uma reta vertical que intercepta o gráfico de f no ponto de coordenadas $(f(x_0), f^2(x_0))$.
5. Prosseguimos com esse processo para obter o ponto $(f^2(x_0), f^2(x_0))$ e assim sucessivamente.

Exemplo 2.20

Temos o gráfico da função $f(x) = 2x^2$, com $x \in \mathbb{R}$, e a representação das órbitas de dois pontos. Note que 0 e $\frac{1}{2}$ são pontos fixos e podemos observar, analisando as órbitas traçadas e o gráfico, que todos os pontos que estão no intervalo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ convergem para 0, e os pontos que são menores que $-\frac{1}{2}$ e maiores que $\frac{1}{2}$ possuem órbitas que convergem para ∞. Uma análise algébrica se faz necessária e fornece o seguintes padrão para os iterados de uma dada condição inicial $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = 2x^2 = \frac{1}{2}(2x)^2, \;\; f^2(x) = 2\left(\frac{1}{2}(2x)^2\right)^2 = \frac{1}{2}(2x)^{2^2}, \;\; \dots, \;\; x_n = \frac{1}{2}(2x)^{2^n}, \; n \geq 1.$$

Assim, se $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, então $|2x| < 1$ e $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = 0$. Por outro lado, para $x < -\frac{1}{2}$ ou $x > \frac{1}{2}$, resulta $|2x| > 1$, logo $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \infty$. Desse modo, $x_0 = 0$ é um ponto fixo que de certa forma atrai pontos próximos e $x_0 = \frac{1}{2}$ é um ponto fixo que repele pontos próximos a ele.

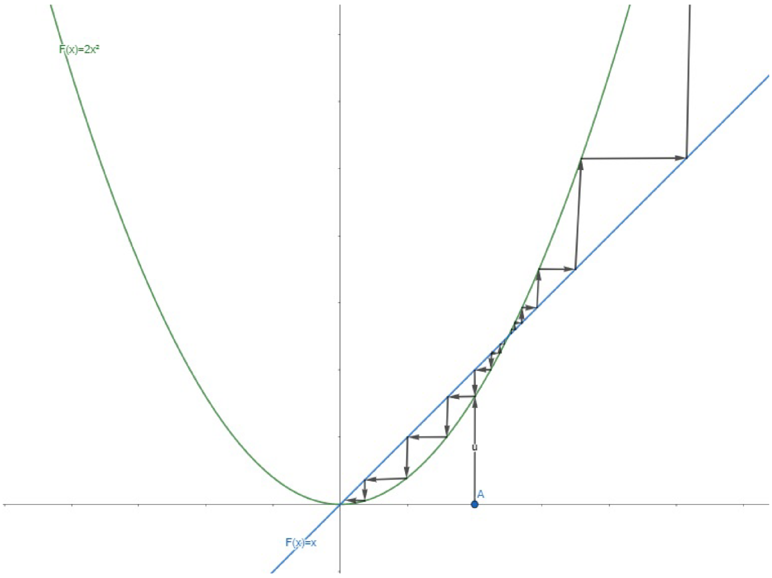


Figura 2.7: Representação gráfica de órbitas para a função $f(x) = 2x^2$.

Essa análise geométrica e algébrica nos ajuda a compreender melhor o comportamento de todas as órbitas da função $f(x) = 2x^2$ e é frequentemente utilizada no estudos de diversos modelos de Sistemas Dinâmicos unidimensionais.

Outra maneira de se visualizar e inferir sobre o comportamento das órbitas desta função é utilizando a representação de um tipo diagrama comumente chamado de *retrato de fase*, como na Figura (2.8).

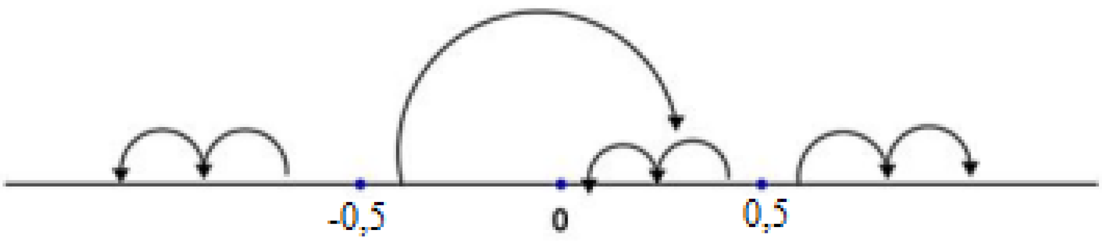


Figura 2.8: Representação gráfica do comportamento das órbitas para a função $f(x) = 2x^2$.

A setas curvadas representam os iterados de uma dada condição inicial, ou seja, representa a evolução de uma dada órbita.

2.5 Relação entre a Derivada e a Dinâmica

Segundo [11] a derivada é um conceito fundamental na matemática que descreve a taxa de variação de uma função em relação a uma variável específica e nos fornece informações sobre a inclinação de uma curva em um ponto específico. Nesta seção, iremos explorar alguns conceitos de Sistemas Dinâmicos relacionados ao comportamento da derivada de uma função diferenciável. A ideia central é que a derivada tem um impacto direto na análise de pontos específicos no Sistema Dinâmico, considerando uma função $f : X \to X$, com X sendo um subconjunto dos números reais.

Além disso, vamos usar a notação $V_\epsilon(p)$ para representar a vizinhança do ponto p com raio ϵ no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Em outras palavras, $V_\epsilon(p) = x \in \mathbb{R}; |x-p| < \epsilon = (p-\epsilon, p+\epsilon)$. O conceito de vizinhança está sendo aplicado no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

Definição 2.6

Seja p um ponto fixo para f. O ponto p é chamado de ponto fixo **atrator** se existe uma vizinhança $V_\epsilon(p)$ de p, tal que para todo $x \in V_\epsilon(p)$, temos que $f^n(x) \in V_\epsilon(p)$ para qualquer $n \geq 0$, e além disso, $f^n(x)$ converge para p quando n tende ao infinito. Um ponto periódico p de período n é um ponto **periódico atrator** se p for um ponto fixo atrator para f^n.

Teorema 2.1

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. (a) Suponha que p é um ponto fixo de f, tal que $|f'(p)| < 1$. Então p é um ponto fixo atrator. (b) Suponha que p é um ponto periódico de período n para f, tal que $|(f^n)'(p)| < 1$. Então p é um ponto periódico atrator.

No item (a), dizemos que um ponto fixo p é um ponto fixo atrator se, ao aplicar repetidamente a função f a partir de uma condição inicial próxima a p, os valores convergem para p. A condição $|f'(p)| < 1$ significa que a derivada de f no ponto p é menor que 1, o que indica que a função f está se "aproximando"de p nesse ponto. Portanto, se a derivada for menor que 1, o ponto fixo p é um ponto fixo atrator.

No item (b), dizemos que um ponto periódico p de período n é um ponto periódico atrator se, ao aplicar repetidamente a função f a partir de uma condição inicial próxima a p, os valores convergem para p. A condição $|(f^n)'(p)| < 1$ significa que a derivada de f^n (a função composta f n vezes) no ponto p é menor que 1. Tal fata assegura que, ao iterar a função f em p, os valores próximos a p se aproximem de p ainda mais a cada n iterações. Portanto, se a derivada de f^n for menor que 1, o ponto periódico p é um ponto periódico atrator.

Demonstração: (a) Seja f uma função contínua em um intervalo aberto $V_\epsilon(p)$ contendo o ponto p. Pela hipótese, podemos supor que exista um valor $0 < \lambda < 1$, tal que $|f'(x)| \leq \lambda$ para todo $x \in V_\epsilon(p)$.

Pelo Teorema 1.3, para cada $x \in V_\epsilon(p)$ existe um ponto y entre x e p, tal que

$$|f(x) - f(p)| = |f'(y)||x - p|.$$

Como $|f'(y)| \leq \lambda$, então temos

$$|f(x) - f(p)| \leq \lambda|x - p| < |x - p|.$$

Portanto, podemos concluir que $f(x) \in (p - \epsilon, p + \epsilon)$ para todo $x \in V_\epsilon(p)$. Da mesma forma, podemos mostrar que $|f^k(x) - p| \leq \lambda^k|x - p|$ para todo inteiro positivo k. Como $0 < \lambda < 1$, temos que $|f^k(x) - p|$ tende a zero quando k tende ao infinito.

Assim, podemos concluir que o ponto p é um ponto atrator.

(b) Suponha que p seja um ponto periódico de período n para a função f, e seja $h = f^n$. Nesse caso, podemos observar o seguinte:

(i) $h(p) = p$;

(ii) $|h'(p)| < 1$;

A partir do item (i), sabemos que $h^k(x) \to p$ quando x se aproxima de p e k tende ao infinito.

Note que pelo que vimos no item (i), então $|f^j(x) - f^j(p)| \to 0$ quando $j \to \infty$, mesmo que j não seja múltiplo de n.

Portanto, podemos concluir que p é um ponto periódico atrator.

■

Definição 2.7

Seja p um ponto fixo para uma função f. O ponto p é chamado de ponto fixo **repulsor** (ou **fonte**) se, para qualquer ponto x que não seja igual a p, a órbita de x sai da vizinhança $V_\epsilon(p)$ sob iteração de f. Um ponto periódico p de período n é um ponto **periódico repulsor** se p for um ponto fixo repulsor para f^n.

Isso implica que, ao aplicarmos repetidamente a função f a um ponto x diferente de p, a sequência de valores resultantes se distancia cada vez mais de p conforme o número de iterações aumenta. Podemos visualizar isso de forma geométrica, considerando p como um "ponto de fuga" ou "ponto de repulsão", pois as órbitas de outros pontos nunca se aproximam ou convergem para p, mas sim se afastam continuamente.

Teorema 2.2

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Suponha p um ponto fixo para f com $|f'(p)| > 1$. Então p é um ponto fixo repulsor.

Demonstração: Omitiremos esta demonstração (ver [5]).

■

Observação 2.1

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Se p é um ponto fixo para f com $|f'(p)| = 1$, então nada pode ser afirmado sobre a função. Por exemplo, $f(x) = x^2 + x$ possui $p = 0$ como ponto fixo e vale $f'(0) = 1$ (pois $f'(x) = 2x + 1$). No entanto, pode-se observar via GEOGEBRA que para $x < 0$ tem-se $f^n(x) \to 0$, enquanto para $x > 0$ tem-se $f^n(x) \to \infty$.

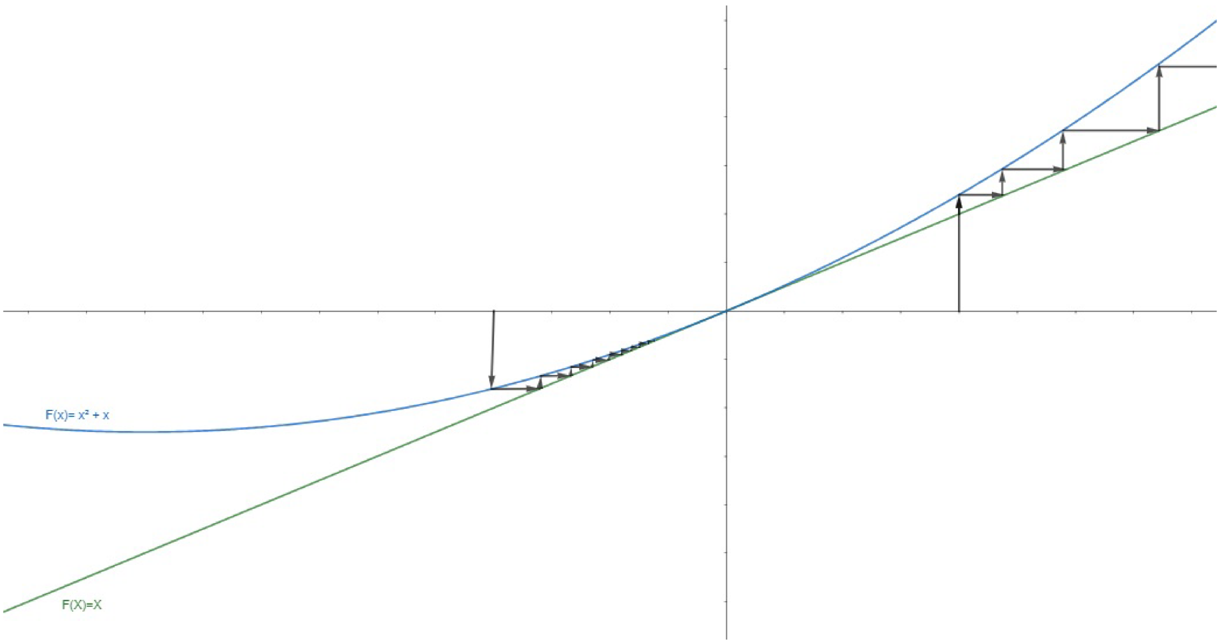


Figura 2.9: Representação gráfica de órbitas para a função $f(x) = x^2 + x$.

Definição 2.8

Seja p um ponto periódico de período n. O ponto p é **hiperbólico** se o módulo da derivada da iterada f^n no ponto p é diferente de 1, ou seja, $|(f^n)'(p)| \neq 1$.

Note que todo ponto fixo ou periódico atrator ou repulsor é um ponto hiperbólico.

Exemplo 2.21

A função $f(x) = 4x$. Vamos analisar se $x = 0$ é um ponto fixo e se é um ponto fixo hiperbólico.

Já vimos anteriormente que $x = 0$ é um ponto fixo, ou seja, se $f(0) = 0$.

Agora, calculemos $f'(x)$, a derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = 4.$$

Avaliando a derivada no ponto fixo, temos:

$$f'(0) = 4.$$

Como $|f'(0)| = |4| = 4 \neq 1$, temos que $x = 0$ é um ponto fixo hiperbólico.

Agora, vamos analisar o comportamento de pontos próximos ao ponto fixo $x = 0$. Avaliemos $f(x)$ para alguns valores próximos de $x = 0$, tanto à esquerda quanto à direita:

Para $x = -1$, temos:

$$f(-1) = 4(-1) = -4.$$

Isso significa que $x = -1$ é repelido por $x = 0$ na primeira iterada.

Para $x = 1$, temos:

$$f(1) = 4(1) = 4.$$

Isso significa que $x = 1$ é repelido por $x = 0$ na primeira iterada.

Para entender o comportamento assintótico de um ponto $x \neq 0$, basta estudarmos o comportamento de $|f^n(x) - f^n(0)|$ quando $n \to \infty$. Note que

$$|f^n(x) - f^n(0)| = |4^n x - 4^n 0| = 4^n |x| \to \infty.$$

Portanto, 0 é um ponto hiperbólico repulsor.

Exemplo 2.22

Exemplo: Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{4}$. Note que se $x_0 = 4$, então $x_1 = f(x_0) = f(4) = 1$. Podemos continuar gerando os próximos termos da sequência através da recorrência $x_{n+1} = f(x_n) = \frac{x_n}{4}$. Assim,

$$x_2 = f(x_1) = f(1) = \frac{1}{4},$$

$$x_3 = f(x_2) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16},$$

e assim por diante. Observe que a sequência gerada é $4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \ldots$ e podemos perceber que cada termo é igual ao anterior dividido por 4. Portanto, a sequência pode ser escrita de forma geral como

$$x_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Além disso, podemos calcular o limite desta sequência à medida que n tende ao infinito. De fato, como $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$, é fácil concluir que a sequência dos iterados converge para o valor 0. Agora, se considerarmos a condição inicial $x_0 = 0$, teremos $f(x_0) = f(0) = 0$, ou seja, $x_0 = 0$ é um ponto fixo $x_0 = 0$. Mais que isso, $x_0 = 0$ é um atrator. Para ver isso, basta observar que, para um valor inicial $x \neq 0$ próximo a zero, temos seus iterados $f^n(x) = \frac{x}{4^n}$, que se aproximam de $x_0 = 0$ quando $n \to \infty$. De fato, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{4^n} = 0$.

Exemplo 2.23

Dada função $f(x) = -8x$, vamos analisar se $x = 0$ é um ponto fixo hiperbólico de f.

Vimos anteriormente $x = 0$ é um ponto fixo de f. Temos $f'(x) = -8$, então avaliando a derivada no ponto fixo, temos $f'(0) = -8$.

Como $|f'(0)| = |-8| = 8 > 1$, temos que $x = 0$ é um ponto fixo hiperbólico repulsor.

De fato, vamos analisar o comportamento de pontos próximos ao ponto fixo $x = 0$. Para $x \neq 0$, temos para $n \to \infty$

$$|f^n(x) - f^n(0)| = |(-8)^n x - (-8)^n 0| = 8^n|x| \to \infty,$$

logo 0 um ponto hiperbólico repulsor.

Exemplo 2.24

Considere função $f(x) = -x + 7$, que possui único ponto fixo $x = \frac{7}{2}$.

Agora, vamos analisar se esse ponto fixo é hiperbólico. A derivada de $f(x) = -x + 7$ é $f'(x) = -1$. Como $|f'\left(\frac{7}{2}\right)| = |-1| = 1$, concluímos que o ponto fixo $x = \frac{7}{2}$ não é um ponto fixo hiperbólico.

Além disso, como visto antes, todo $x \neq \dfrac{7}{2}$ é um ponto periódico de período 2. Agora, $f^2(x) = x$, então $(f^2)'(x) = 1$ e, portanto, todo ponto x não é hiperbólico relativo à f^2.

Exemplo 2.25

Como visto antes, a função $f(x) = x + 7$ não possui pontos fixos, nem periódicos, logo não faz sentido sentido perguntar sobre hiperbolicidade.

Exemplo 2.26

Considere a função $f(x) = x^2 - 1$. Vimos anteriormente os pontos fixos desta função são $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Agora, vamos analisar se esses pontos são hiperbólicos. Tomando um ponto fixo x_0, calcularemos o valor absoluto da derivada da função f em x_0, ou seja, $|f'(x_0)|$:

Para o ponto fixo $x_0 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$:

$$|f'(x_0)| = |2x_0| = \left|2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| = |\sqrt{5}+1| = \sqrt{5}+1.$$

Para o ponto fixo $x_0 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$:

$$|f'(x_0)| = |2x_0| = \left|2 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| = |\sqrt{5}-1| = \sqrt{5}-1.$$

Como $|\sqrt{5}+1| > 1$ e $|\sqrt{5}-1| > 1$, concluímos que ambos os pontos fixos são hiperbólicos.

Além disso, podemos concluir que $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ é um ponto fixo repulsor e $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ é um ponto fixo atrator.

Vimos também que os pontos periódicos de período 2 para f são 0 e -1. Como $f^2(x) = x^4 - 2x^2$, então $(f^2)'(x) = 4x^3 - 4x$. Assim, como $|f^2(0)| = 0 < 1$, então 0 é ponto periódico hiperbólico atrator relativamente a f^2. E como $|f^2(-1)| = 0 < 1$, então -1 é também ponto periódico hiperbólico atrator.

Exemplo 2.27

Considere a função $f(x) = 2x^3 - x$, onde $f'(x) = 6x^2 - 1$. Neste caso, os pontos fixos da função são encontrados quando $f(x) = x$, ou seja, $x^3 - x = x$. Resolvendo essa equação, encontramos os pontos fixos $x = 0$, $x = -1$ e $x = 1$.

Para determinar se esses pontos fixos são hiperbólicos repulsores, calculamos o valor absoluto da derivada da função no ponto fixo. Temos $|f'(x)| = |6x^2 - 1|$. No ponto fixo $x = -1$, temos $|f'(-1)| = 5$, de onde concluímos que é maior que 1. No ponto fixo $x = 1$, temos $|f'(1)| = 5$, que também é maior que 1. Portanto, os pontos fixos $x = -1$ e $x = 1$ são hiperbólicos repulsores. No entanto, para o ponto fixo $x = 0$ temos $|f'(0)| = |-1| = 1$, de onde não podemos concluir nada pelos teoremas anteriores.

Exemplo 2.28

A função $g(x) = x^3 - x$ tem três pontos fixos. Para ver isso, basta resolver a equação $g(x) = x$, ou seja, $x^3 - x = x$. Reordenando os termos:

$$x^3 - 2x = 0.$$

Fatorando x:

$$x(x^2 - 2) = 0.$$

Temos, então, duas possibilidades para os pontos fixos: $x = 0$ ou $x^2 - 2 = 0$. Resolvendo a segunda equação:

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Portanto, os pontos fixos da função $g(x)$ são $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{2}$.

Agora, vamos analisar se esses pontos fixos são hiperbólicos. Para isso, calculamos a derivada de $g(x)$:

$$g'(x) = 3x^2 - 1.$$

Avaliando a derivada nos pontos fixos, temos:

Para $x = 0$:

$$g'(0) = 3(0)^2 - 1 = -1.$$

Para $x = \pm\sqrt{2}$:

$$g'(\pm\sqrt{2}) = 3(\sqrt{2})^2 - 1 = 5.$$

Como $|g'(0)| = |-1| = 1$, então 0 é ponto fixo não hiperbólico.

Por outro lado, $|g'(\pm\sqrt{2})| = |5| = 5 > 1$, logo $\pm\sqrt{2}$ são hiperbólicos repulsores.

CAPÍTULO 3

Aplicações de Sistemas Dinâmicos

Ao longo dos séculos, a matemática tem sido uma ferramenta essencial para a compreensão e análise de fenômenos em diferentes áreas do conhecimento, incluindo o estudo das Progressões Geométricas. Essas sequências numéricas, obtidas multiplicando-se o termo anterior por uma constante chamada razão, apresentam propriedades matemáticas fascinantes. Sua aplicação em Sistemas Dinâmicos Discretos tem se mostrado extremamente relevante e, amplamente utilizada em diversas situações práticas.

Neste capítulo, vamos explorar exemplos que ilustram como os Sistemas Dinâmicos Discretos podem ser aplicados de maneira eficiente e precisa na análise de Progressões Geométricas. Com o auxílio de ferramentas matemáticas como o conceito de ponto fixo e análise de estabilidade, seremos capazes de compreender profundamente as características dessas progressões, prever seu comportamento futuro, estudar suas propriedades matemáticas e encontrar fórmulas que representam sua evolução ao longo do tempo. Esses conhecimentos serão úteis na solução de problemas práticos em áreas como economia, ciência de dados, engenharia e muitas outras, tornando este capítulo uma empolgante viagem pelo mundo das aplicações de Sistemas Dinâmicos Discretos em Progressões Geométricas. Esperamos proporcionar aos leitores uma compreensão abrangente e prática desse assunto tão relevante e fascinante.

3.1 Exemplos de aplicações de Sistemas Dinâmicos Discretos

A seguir, apresentaremos uma variedade de exemplos de aplicações de Sistemas Dinâmicos Discretos, com uma breve análise de cada um deles, para posteriormente selecionar uma sequência didática e escolher um exemplo específico para ser aplicado em sala de aula. Nosso objetivo é proporcionar uma experiência prática e enriquecedora aos alunos. E por isso ofereceremos opções semelhantes para que o professor possa escolher aquela que melhor se adequar à sua turma.

3.1.1 Exemplo de aplicação 1:

Suponha que tenhamos um triângulo equilátero de lado inicial a_0. Vamos denotar a área desse triângulo como A_0. Agora, vamos considerar uma sequência de triângulos equiláteros, onde o lado de cada triângulo é dado por uma PG de razão r. Portanto, o lado do n-ésimo triângulo será

$$a_n = a_0 \cdot r^{n-1}.$$

A área de um triângulo equilátero pode ser calculada pela fórmula

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l^2,$$

onde l é o lado do triângulo. Utilizando essa fórmula, podemos calcular a área de cada triângulo da sequência:

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (a_0 \cdot r^{n-1})^2.$$

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a_0^2 \cdot r^{2(n-1)}.$$

Agora, vamos analisar essa sequência utilizando Sistemas Dinâmicos. Para isso, precisamos definir um mapa iterativo que relacione dois termos consecutivos da sequência. Podemos definir o mapa da razão r como uma função que recebe um termo da sequência e retorna o próximo termo multiplicado pela razão r. Esse mapa é utilizado para prever o comportamento futuro da sequência com base em seu comportamento passado. Nesse caso, estamos usando um modelo de mapa iterativo baseado na razão r.

$$r_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Substituindo os valores de a_n na equação acima, temos:

$$r_{n+1} = \frac{a_0 \cdot r^n}{a_0 \cdot r^{n-1}} = r.$$

Portanto, o mapa da razão é constante e igual a r.

Podemos também analisar o crescimento da área dos triângulos. Para isso, vamos definir um mapa iterativo para a área:

$$A_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (a_0 \cdot r^n)^2.$$

$$A_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a_0^2 \cdot r^{2n}.$$

$$A_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot A_n \cdot r^2.$$

Para analisar o comportamento da área dos triângulos ao longo da sequência, vamos considerar uma função $f(r)$ que relaciona a razão r e a área A dos triângulos. Teremos que:

$$f(r) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot A \cdot r^2.$$

Podemos então utilizar essa função para gerar as iterações da sequência. Dado um triângulo inicial com área A_0, podemos calcular a área do próximo triângulo como:

$$A_1 = f(r) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot A_0 \cdot r^2.$$

Analogamente, a área do triângulo seguinte será:

$$A_2 = f(r) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot A_1 \cdot r^2.$$

Podemos generalizar esse cálculo para obter a área do n-ésimo triângulo:

$$A_n = f(r) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot A_{n-1} \cdot r^2.$$

Portanto, podemos representar a sequência das áreas dos triângulos como:

$$A_0, f(r), f(r, f(r)), f(r, f(r, f(r))), \ldots$$

Observamos que essa sequência pode convergir para um valor constante se a razão r estiver no intervalo $0 < r < 1$. Isso significa que, quanto menor a razão, mais rapidamente a sequência das áreas irá convergir para um valor constante. Por outro lado, se a razão r for maior do que 1, a sequência das áreas irá crescer indefinidamente.

Assim, podemos utilizar Sistemas Dinâmicos para analisar o comportamento da área dos triângulos equiláteros em uma sequência que segue uma PG.

3.1.2 Exemplo de aplicação 2:

Vamos construir uma sequência de triângulos de maneira recursiva. Considere um triângulo retângulo T_1 com catetos de comprimento l. Agora, ao dividirmos T_1 em quatro triângulos iguais observando o procedimento adotado na **Figura 3.1**, denominados T_2, T_3, T_4 e T_5 em seguida selecionamos o T_5. Repetimos essa construção, ou seja, dividimos T_2 em quatro triângulos congruentes e selecionamos um deles, denotado por T_9. Repetindo novamente dividimos T_6 e selecionamos o T_{13}. Prosseguindo deste modo, dividiremos os triângulos $T_2, T_6, T_{10}, \ldots$ e selecionaremos $T_5, T_9, T_{13}, \ldots$. Vamos determinar a soma das áreas de todos os triângulos selecionados utilizando conceitos de Progressão Geométrica.

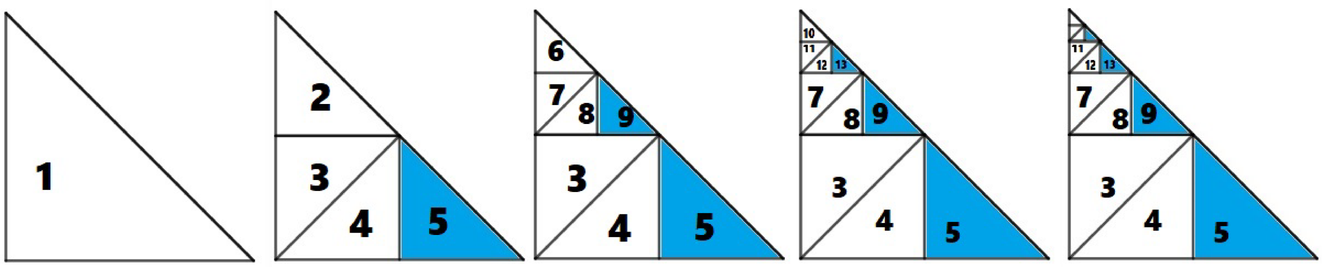


Figura 3.1: Triângulos retângulos divididos em 4 partes

A área de um triângulo retângulo é dada pela fórmula

$$A = \frac{base \cdot altura}{2}.$$

No nosso caso, considerando que os catetos de T_1 têm medida l, a área de T_1 será

$$A(T_1) = \frac{l \cdot l}{2} = \frac{l^2}{2}.$$

Agora, vamos analisar a área dos triângulos gerados a partir da divisão de T_1.

$$A(T_5) = \frac{A(T_1)}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{l^2}{2}\right) = \frac{l^2}{8}.$$

Podemos observar que o T_5 têm a mesma área, que é um quarto da área do triângulo original T_1.

Esse processo de divisão será repetido em um dos triângulos resultantes. Por exemplo, ao dividirmos T_2, teremos os triângulos T_6, T_7, T_8 e T_9. A área de T_9 será calculada usando a mesma lógica:

$$A(T_9) = \frac{A(T_5)}{4}.$$

Esse processo de divisão será repetido em um dos triângulos resultantes. Por exemplo, ao dividirmos T_6, teremos os triângulos T_{10}, T_{11}, T_{12} e T_{13}. A área de T_{13} será calculada do mesmo modo:

$$A(T_{13}) = \frac{A(T_9)}{4}.$$

Repetindo esse processo infinitamente percebemos que o triângulo formado pela nova divisão será sempre um quarto do tamanho do triangulo considerado anteriormente. Para calcular a soma das áreas dos triângulos resultantes, podemos utilizar o conceito de soma dos infinitos termos da Progressão Geométrica.

Vamos denotar a área de cada triângulo selecionado por $A_1, A_2, A_3, \ldots$, em que A_1 é a área de T_5, A_2 é a área de T_9, A_3 é a área de T_{13}, e assim por diante. Podemos observar que a sequência das áreas dos triângulos selecionados segue um padrão. A área de cada triângulo é dividida por 4 em relação ao triângulo anterior. Mais ainda, considerando a função $f(x) = \frac{x}{4}$, onde x representa a área do triângulo, esta sequência de áreas corresponde à órbita da condição inicial $x_0 = A_1$, por esta função f , isto é,

$$\mathcal{O}_f^+(x_0) = \{f^n(x_0); n \geq 0\} = \{A_1, A_2, \ldots\}.$$

Esta é a mesma função do **Exemplo 2.25**, de onde obtemos

$$A_1 = \frac{l^2}{8},$$

$$A_2 = \frac{A_1}{4},$$

$$A_3 = \frac{A_2}{4}.$$

$$\cdots$$

Como analisado no **Exemplo 2.25**, independentemente do lado l, as áreas dos triângulos irão ficar arbitrariamente pequenas e convergir para zero. Aqui podemos pensar que "o triângulo de área zero" é um ponto fixo atrator para f.

A partir dessa observação, podemos perceber que a área de cada triângulo selecionado é sempre dividida por 4 em relação ao triângulo anterior, o que significa que estamos diante de uma Progressão Geométrica de razão $\frac{1}{4}$. Para calcular a soma das áreas dos triângulos selecionados, podemos usar a fórmula da soma dos termos de uma Progressão Geométrica Finita:

$$S_n = \frac{a \cdot (1 - r^n)}{1 - r},$$

em que S_n é a soma dos termos da Progressão Geométrica, a é o primeiro termo da Progressão (no nosso caso, a área do primeiro triângulo selecionado, A_1), r é a razão da Progressão (no nosso caso $\frac{1}{4}$), n é o número de termos da Progressão (no nosso caso, o número de triângulos selecionados que queremos considerar). Aplicando essa fórmula, podemos obter a soma das áreas dos triângulos selecionados. Por exemplo, se quisermos calcular a soma das áreas dos n primeiros triângulos selecionados, teríamos:

$$S_n = A_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

$$S_n = \frac{l^2}{8} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}}.$$

Assim, podemos usar essa fórmula para calcular a soma das áreas dos triângulos selecionados, considerando o número de termos desejado.

Quando n tende ao infinito, obtemos a soma S das áreas de todos os triângulos selecionados na construção. Observe que, se n tende ao infinito, então $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ tende a zero, pois $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$. Portanto,

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{l^2}{8} \cdot \frac{1 - 0}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{l^2}{6}.$$

Este é um exemplo muito interessante, pois é possível encontrar essa soma infinita de áreas de outro modo, um tanto intuitivo, observando algumas simetrias na construção. Observe que, se denotamos por B_1 a área do triângulo T_4, por B_2 a área de T_8, assim por diante, como foram destacados em vermelho na **Figura 3.2** é imediato perceber que a soma infinita das áreas $B_1 + B_2 + B_3 + \ldots$ resulta no mesmo valor S, uma vez que $A_i = B_i$, para $i \geq 1$. E, do mesmo modo, a soma das áreas dos triângulos em branco também resulta em S. Assim, a soma das áreas de todos os triângulos resulta em $3S = \frac{1}{2} \cdot l \cdot l$, ou seja, $S = \frac{l^2}{6}$.

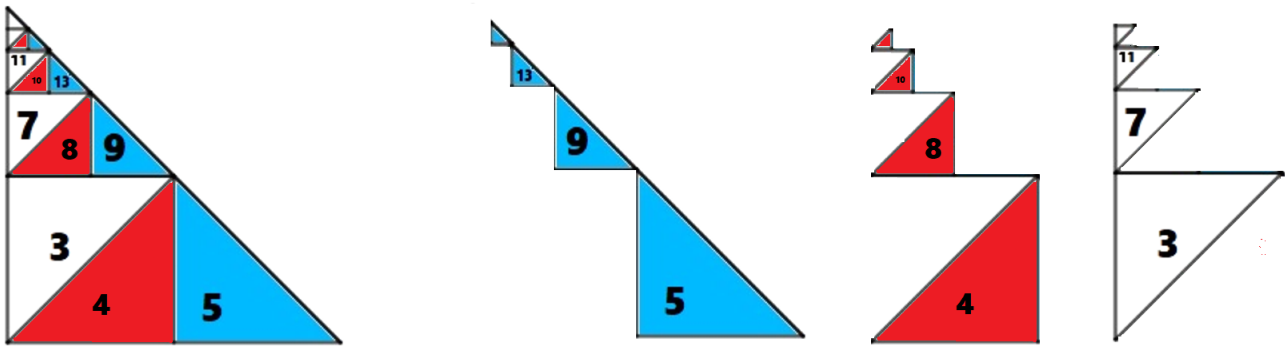


Figura 3.2: Triângulos: representação da área considerada

3.1.3 Exemplo de aplicação 3:

Esse exemplo é equivalente ao procedimento que foi feito no exemplo de aplicação 1, onde o exemplo de aplicação 1 é um triângulo equilátero e aqui temos um quadrado. Suponha que tenhamos um quadrado de lado inicial a_0 e vamos denotar a área desse quadrado como A_0. Agora, vamos considerar uma sequência de quadrados, onde o lado de cada quadrado é dado por uma Progressão Geométrica de razão r. Portanto, o lado do n-ésimo quadrado será:

$$a_n = a_0 \cdot r^{n-1}.$$

A área de um quadrado pode ser calculada pela fórmula $A = l^2$, onde l é o lado do quadrado. Utilizando essa fórmula, podemos calcular a área de cada quadrado da sequência:

$$A_n = (a_0 \cdot r^{n-1})^2 = a_0^2 \cdot r^{2(n-1)}.$$

Agora, vamos analisar essa sequência utilizando Sistemas Dinâmicos. Para isso, precisamos definir um que relacione dois termos consecutivos da sequência. Podemos definir o mapa da razão r como:

$$r_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Substituindo os valores de a_n na equação acima, temos:

$$r_{n+1} = \frac{a_0 \cdot r^n}{a_0 \cdot r^{n-1}} = r.$$

Portanto, o mapa da razão é constante e igual a r. Podemos também analisar o crescimento da área dos quadrados. Para isso, vamos definir um mapa iterativo para a área:

$$A_{n+1} = (a_0 \cdot r^n)^2 = a_0^2 \cdot r^{2n} = A_n \cdot r^2.$$

Vamos definir a função $f(x)$ como a função que gera as iterações da área dos quadrados da sequência. Portanto, temos:

$$f(x) = x \cdot r^2.$$

Agora, vamos aplicar o mapa iterativo para essa função. Assim, temos:

$$f^n(x) = f(f(\ldots f(x))) = x \cdot r^{2n}.$$

Ou seja, a função $f(x)$ eleva a área do quadrado ao quadrado a cada iteração n.

Portanto, temos um mapa iterativo para a área que depende da razão r. Dependendo do valor de r, podemos ter alguns comportamentos interessantes. Por exemplo, se $r > 1$, a área dos quadrados crescerá exponencialmente a cada iteração. Por outro lado, se $0 < r < 1$, a área dos quadrados diminuirá a cada iteração. Se $r = 1$, a área se manterá constante.

Assim, podemos utilizar Sistemas Dinâmicos para analisar o comportamento da área dos quadrados em uma sequência que segue uma PG.

3.1.4 Exemplo de aplicação 4:

Esse exemplo é equivalente ao procedimento que foi feito no exemplo de aplicação 2, onde o exemplo de aplicação 2 era um triângulo retângulo e agora é um quadrado. Vamos considerar um quadrado Q_1 de lado l. Se dividirmos esse quadrado em quatro quadrados iguais, denominados Q_2, Q_3, Q_4 e Q_5, podemos determinar a soma das áreas de todos os quadrados resultantes usando conceitos de Progressão Geométrica.

A área de um quadrado é dada pela fórmula $A = l^2$. Portanto, a área do quadrado Q_1 é

$$A(Q_1) = l^2.$$

Agora, vamos determinar a área dos quadrados gerados a partir da divisão de Q_1.

$$A(Q_5) = \frac{A(Q_1)}{4} = \frac{l^2}{4}.$$

Podemos observar que o Q_5 tem a mesma área que os outros quadrados gerados na primeira divisão, que é um quarto da área do quadrado original Q_1.

Esse processo de divisão será repetido em um dos quadrados resultantes. Por exemplo, ao dividirmos Q_2, teremos os quadrados Q_6, Q_7, Q_8 e Q_9. A área de Q_9 será calculada usando a mesma lógica:

$$A(Q_9) = \frac{A(Q_5)}{4}.$$

Esse processo de divisão pode ser repetido infinitamente, e podemos perceber que o quadrado formado pela nova divisão será sempre um quarto do tamanho do quadrado considerado anteriormente.

Agora, vamos calcular a soma das áreas dos quadrados resultantes usando o conceito de Progressões Geométricas Infinitas.

Vamos denotar a área de cada quadrado resultante como $A_1, A_2, A_3, \ldots$, onde A_1 é a área de Q_9, A_2 é a área de Q_5, A_3 é a área de Q_{13}, e assim por diante.

Podemos observar que a área de cada quadrado resultante é sempre dividida por 4 em relação ao quadrado anterior. Isso significa que estamos diante de uma Progressão Geométrica de razão $\frac{1}{4}$.

Podemos calcular a soma das áreas dos quadrados resultantes usando a fórmula da soma de uma Progressão Geométrica finita:

$$S_n = \frac{a \cdot (1 - r^n)}{1 - r},$$

onde: S_n: é a soma dos termos da Progressão Geométrica; a: é o primeiro termo da Progressão (no nosso caso, a área do primeiro quadrado resultante, A_1); r: é a razão da Progressão (no nosso caso, $\frac{1}{4}$); n: é o número de termos da Progressão (no nosso caso, o número de quadrados resultantes que queremos considerar).

Aplicando essa fórmula, podemos obter a soma das áreas dos quadrados resultantes. Por exemplo, se quisermos calcular a soma das áreas dos n primeiros quadrados resultantes, teríamos:

$$S_n = A_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{l^2}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}}.$$

Quando n tende ao infinito, podemos simplificar a expressão S_n para:

$$S_n = \frac{l^2}{4} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}.$$

Quando n tende ao infinito, $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ tende a zero, pois qualquer número elevado ao infinito é igual a zero. Portanto, a expressão se torna:

$$S_\infty = \frac{l^2}{4} \cdot \frac{1-0}{1-\frac{1}{4}}.$$

Simplificando:

$$S_\infty = \frac{l^2}{4} \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}}.$$

Multiplicando pelo inverso de $\frac{3}{4}$:

$$S_\infty = \frac{l^2}{4} \cdot \frac{4}{3}.$$

Simplificando:

$$S_\infty = \frac{l^2}{3}.$$

Portanto, quando n tende ao infinito, a expressão S_n se simplifica para $\frac{l^2}{3}$.

Isso significa que a soma das áreas dos quadrados resultantes, quando consideramos um número infinito de quadrados, é um terço da área do quadrado original Q_1.

3.1.5 Exemplo de aplicação 5:

Neste caso, vamos aplicar conceitos de Sistemas Dinâmicos para analisar o crescimento de populações ao longo das gerações. Consideraremos uma população inicial de indivíduos, denotada por P_0, e uma taxa de crescimento r, que indica a proporção do aumento populacional a cada geração. Para calcular o número de indivíduos em diferentes gerações, utilizaremos a fórmula $P_n = r^n \cdot P_0$, onde P_n representa o número de indivíduos na geração n.

Vamos então em primeira análise supor que a taxa de crescimento seja $r = 1,2$ e a população inicial seja de $P_0 = 100$ indivíduos. Podemos calcular o número de indivíduos para diferentes gerações da seguinte forma:

Na primeira geração (geração 1): $P_1 = r \cdot P_0 = 1,2 \cdot 100 = 120$ indivíduos.

Na segunda geração (geração 2): $P_2 = r \cdot P_1 = 1,2 \cdot 120 = 144$ indivíduos.

Na terceira geração (geração 3): $P_3 = r \cdot P_2 = 1,2 \cdot 144 = 172,8$ indivíduos.

Podemos continuar calculando o número de indivíduos para cada geração sucessiva.

Essa é a ideia por trás de aplicar o limite infinito da Progressão. Ao considerarmos o limite da sequência conforme o número de gerações tende ao infinito, podemos obter uma estimativa para o comportamento a longo prazo da população.

Por exemplo, se quisermos saber a população em um tempo muito distante, quando n tende ao infinito, podemos usar o limite infinito da Progressão para encontrar esse valor: $\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} r^n \cdot P_0$.

Se a taxa de crescimento r for inferior a 1, a população tenderá a zero (extinção), pois a proporção de indivíduos na geração $n+1$ em relação à geração anterior diminuirá a cada geração. Por outro lado, se a taxa de crescimento r for maior que 1, a população crescerá indefinidamente.

Portanto, a análise de Sistemas Dinâmicos Discretos ,aplicada a uma Progressão Geométrica, pode nos ajudar a entender o comportamento do crescimento populacional ao longo do tempo e a estimar a população em um futuro muito distante.

Em segunda análise, consideraremos uma colônia de bactérias em que a população inicial seja de 100 indivíduos e que a cada hora cada bactéria se reproduza e dê origem a duas novas bactérias, ou seja, a taxa de crescimento seja constante. Nesse caso, temos uma Progressão Geométrica, onde o termo inicial a_0 é 100 e a razão r é 2.

Podemos calcular o número de bactérias após P horas utilizando a fórmula da Progressão Geométrica: $a_n = a_0 \cdot r^{n-1}$. Nesse caso, teríamos: $a_P = 100 \cdot 2^{P-1}$.

Se quisermos calcular o limite infinito da Progressão, ou seja, o número de bactérias após um tempo muito longo, podemos aplicar o limite: $\lim_{P\to\infty} a_P = \lim_{P\to\infty} 100 \cdot 2^{P-1}$.

Podemos observar que, à medida que P cresce, a expressão 2^{P-1} cresce exponencialmente, o que significa que a população de bactérias também crescerá de forma exponencial.

Resolvendo o limite infinito, teríamos: $\lim_{P\to\infty} 100 \cdot 2^{P-1} = \infty$.

Portanto, o número de bactérias tende ao infinito à medida que o tempo passa, indicando um crescimento populacional ilimitado.

Esse exemplo de Progressão Geométrica, aplicado a um caso prático de crescimento populacional, pode ser analisado por Sistemas Dinâmicos Discretos e resolvido aplicando o limite infinito da Progressão. Ele demonstra como um fenômeno natural, como o crescimento de uma colônia de bactérias, pode ser modelado e estudado utilizando conceitos matemáticos.

3.1.6 Exemplo de aplicação 6:

A matemática babilônica, uma das primeiras formas de matemática conhecidas na história, desenvolveu métodos interessantes para aproximar valores de raízes quadradas. Um dos exemplos mais emblemáticos é a aproximação de $\sqrt{2}$. (Ver mais detalhes em [9]).

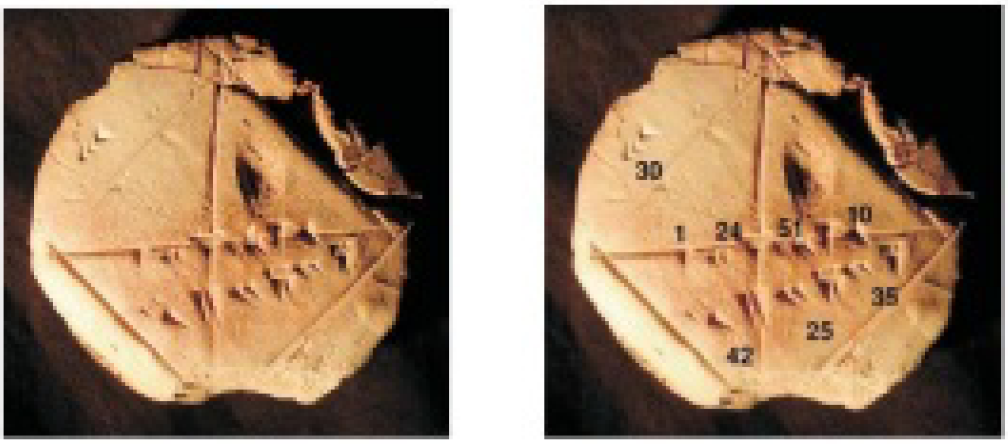


Figura 3.3: Esta tableta mostra que os babilônios sabiam que a diagonal de um quadrado é igual a $\sqrt{2}$ vezes seu lado. Trata-se, provavelmente, de um exercício escolar que emprega uma aproximação para a $\sqrt{2}$. [9]

Na Figura 3.3, à direita, os números correspondem à uma expressão na base 60, que pode ser interpretada como segue:

$$\frac{42.25,35}{30} = 1.24,51,10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1,414212963\ldots$$

a qual fornece um valor que é muito próximo de $\sqrt{2}$.

O método babilônio de extrair raízes quadradas, também conhecido como método de Herão, foi desenvolvido por Herão de Alexandria no século I d.C. Ele incluiu esse método em sua obra chamada "A Métrica". Ver mais detalhes em [1].

Esse método consiste em realizar uma série de aproximações sucessivas para encontrar a raiz quadrada de um número. Um palpite inicial é feito e, a partir dele, são feitas iterações para se chegar cada vez mais próximo do valor correto da raiz quadrada.

Essas iterações são baseadas em uma fórmula específica que envolve a média entre o palpite inicial e o número original. A cada iteração, o novo valor é recalculado com base nessa fórmula e o processo é repetido até que uma aproximação suficientemente precisa seja alcançada.

O método de Herão, portanto, permite a obtenção de raízes quadradas de números de forma eficiente, utilizando apenas operações básicas como adição, subtração, multiplicação e divisão. Ele constituiu uma contribuição significativa para a matemática na época e continua sendo utilizado até hoje.

Vamos inicialmente observar o método em prática, em seguida apresentaremos uma justificativa formal para sua validade. Para isso, seja x_1 o maior inteiro menor do que $\sqrt{R}$, onde R é o valor para o qual estamos procurando a raiz quadrada. Para $n = 2, 3, \ldots$, usamos a fórmula de recorrência

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{R}{x_n} \right).$$

Nesse caso, $x_1, x_2, x_3, \ldots$ é uma sequência de aproximações cada vez melhores para $\sqrt{R}$.

Calculemos a sequência aproximações para a raiz quadrada de $R = 2$ até x_5:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1 \text{(valor inicial)}, \\
x_1 &= \frac{x_0 + \frac{2}{x_0}}{2} = \frac{1 + \frac{2}{1}}{2} = \frac{3}{2} = 1.5, \\
x_2 &= \frac{x_1 + \frac{2}{x_1}}{2} = \frac{1.5 + \frac{2}{1.5}}{2} \approx 1.41667, \\
x_3 &= \frac{x_2 + \frac{2}{x_2}}{2} \approx 1.41422, \\
x_4 &= \frac{x_3 + \frac{2}{x_3}}{2} \approx 1.41421, \\
x_5 &= \frac{x_4 + \frac{2}{x_4}}{2} \approx 1.41421.
\end{aligned}$$

Portanto, chegamos à aproximação $x_5 \approx 1.41421$ para a raiz quadrada de 2. Observe que o valor dado por uma calculadora científica é $\sqrt{2} = 1,4142135623\ldots$, ou seja, o método fornece uma aproximação muito boa, diferenciando-se apenas na quinta casa decimal.

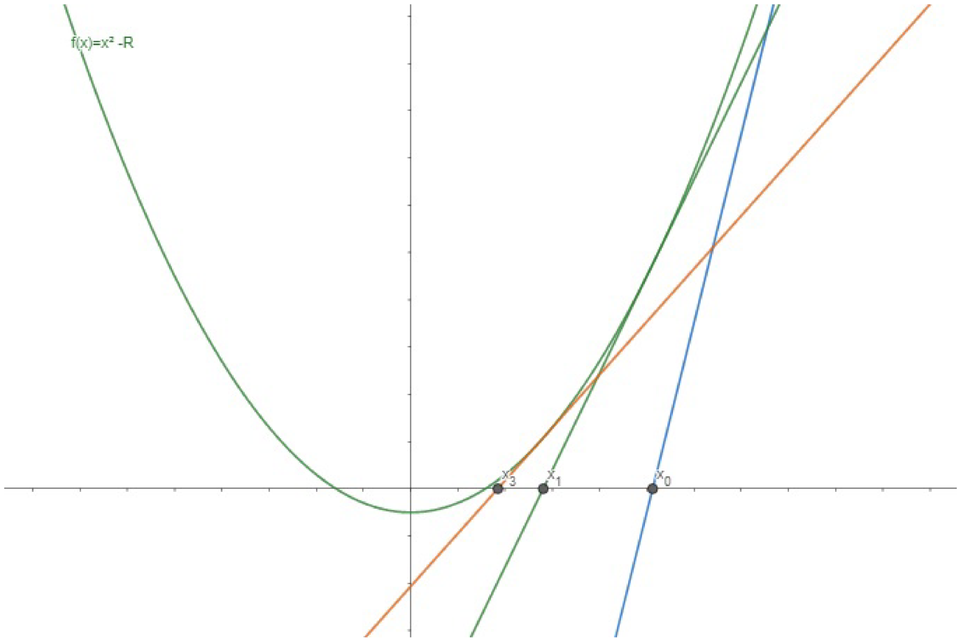


Figura 3.4: Método de aproximação da raiz quadrada

Vamos, agora, calcular as aproximações para a raiz quadrada de $R = 3$ até x_5:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1(\text{valor inicial}),\\
x_1 &= \frac{x_0 + \frac{3}{x_0}}{2} = \frac{1+\frac{3}{1}}{2} = \frac{4}{2} = 2,\\
x_2 &= \frac{x_1 + \frac{3}{x_1}}{2} = \frac{2+\frac{3}{2}}{2} = \frac{7}{4} = 1.75,\\
x_3 &= \frac{x_2 + \frac{3}{x_2}}{2} \approx 1.73214,\\
x_4 &= \frac{x_3 + \frac{3}{x_3}}{2} \approx 1.73205,\\
x_5 &= \frac{x_4 + \frac{3}{x_4}}{2} \approx 1.73205.
\end{aligned}
$$

Portanto, chegamos à aproximação $x_5 \approx 1.73205$ para a raiz quadrada de 3. Observe que $\sqrt{3} = 1,732050807\ldots$ e o método aproximou rapidamente.

Vamos calcular a raiz quadrada de $R = 5$ até x_5:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2\text{(valor inicial)},\\
x_1 &= \frac{x_0 + \frac{5}{x_0}}{2} = \frac{2 + \frac{5}{2}}{2} = \frac{9}{4} = 2.25,\\
x_2 &= \frac{x_1 + \frac{5}{x_1}}{2} = \frac{2.25 + \frac{5}{2.25}}{2} \approx 2.2381,\\
x_3 &= \frac{x_2 + \frac{5}{x_2}}{2} \approx 2.2361,\\
x_4 &= \frac{x_3 + \frac{5}{x_3}}{2} \approx 2.2361,\\
x_5 &= \frac{x_4 + \frac{5}{x_4}}{2} \approx 2.2361.
\end{aligned}$$

Portanto, chegamos à aproximação $x_5 \approx 2.2361$ para a raiz quadrada de 5.

Vamos calcular a raiz quadrada de $R = 7$ até x_5:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1\text{(valor inicial)},\\
x_1 &= \frac{x_0 + \frac{7}{x_0}}{2} = \frac{1 + \frac{7}{1}}{2} = \frac{8}{2} = 4,\\
x_2 &= \frac{x_1 + \frac{7}{x_1}}{2} = \frac{4 + \frac{7}{4}}{2} = \frac{21}{8} = 2.625,\\
x_3 &= \frac{x_2 + \frac{7}{x_2}}{2} = \frac{2.625 + \frac{7}{2.625}}{2} = \frac{376625}{143489} \approx 2.61985,\\
x_4 &= \frac{x_3 + \frac{7}{x_3}}{2} = \frac{2.61985 + \frac{7}{2.61985}}{2} \approx 2.64576,\\
x_5 &= \frac{x_4 + \frac{7}{x_4}}{2} = \frac{2.64576 + \frac{7}{2.64576}}{2} \approx 2.64575.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo método, chegamos à aproximação $x_5 \approx 2.64575$ para a raiz quadrada de 7.

Vamos calcular a raiz quadrada de $R = 4$ até x_5:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1 (\text{valor inicial}),\\
x_1 &= \frac{x_0 + \frac{4}{x_0}}{2} = \frac{1 + \frac{4}{1}}{2} = \frac{5}{2} = 2.5,\\
x_2 &= \frac{x_1 + \frac{4}{x_1}}{2} = \frac{2.5 + \frac{4}{2.5}}{2} \approx 2.05,\\
x_3 &= \frac{x_2 + \frac{4}{x_2}}{2} \approx 2.0122,\\
x_4 &= \frac{x_3 + \frac{4}{x_3}}{2} \approx 2.00061,\\
x_5 &= \frac{x_4 + \frac{4}{x_4}}{2} \approx 2.00001.
\end{aligned}
$$

Portanto, pelo método dos babilônios, chegamos à aproximação $x_5 \approx 2.00001$ para a raiz quadrada de 4. O algoritmo dos babilônios é conhecido por sua convergência quadrática, o que significa que a cada iteração, o número de dígitos corretos da raiz quadrada dobrará. Isso ocorre porque o algoritmo utiliza o método da média aritmética para melhorar a estimativa inicial da raiz quadrada, calculando uma nova média entre a estimativa anterior e o número original. Como resultado, a cada iteração, a aproximação se torna cada vez mais próxima da raiz quadrada verdadeira, resultando em uma redução exponencial do erro quadrado e dobrando a quantidade de dígitos corretos a cada iteração. Por exemplo, na primeira iteração, é possível obter uma aproximação com apenas um dígito correto, mas na segunda iteração, esse número pode dobrar para dois, e assim por diante.

Assim como o método dos babilônios, o método de Newton também possui convergência quadrática. Isso significa que a cada iteração, o número de dígitos corretos da raiz dobrará. No entanto, o método de Newton tem a vantagem de ser aplicável a qualquer função diferenciável, não apenas para a raiz quadrada. O método de Newton utiliza a reta tangente ao gráfico da função no ponto atual de iteração para encontrar uma aproximação melhor da raiz. Essa reta tangente intersecta o eixo x e esse novo ponto de interseção é utilizado como próximo valor de iteração. A fórmula recursiva do método de Newton nos permite calcular esses pontos de iteração de forma eficiente.

No entanto, é importante ressaltar que o método de Newton pode não convergir para a raiz correta se a função não satisfizer determinadas condições, como ter uma derivada contínua e um ponto inicial próximo o suficiente da raiz. Além disso, pode haver casos em que o método converge para uma raiz errada ou converge muito lentamente. Portanto, é necessário escolher cautelosamente as condições iniciais e verificar a convergência do método em cada caso específico.

Método de Newton-Raphson

Método recursivo de Newton-Raphson, ou simplesmente método de Newton, em linhas gerais é um algoritmo que utiliza a iteração para encontrar uma raiz de uma função, como foi apresentado no Capítulo 1. A fórmula geral do método é: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ onde x_{n+1} é o valor atualizado de x na $n-$ésima iteração, x_n é o valor atual de x na $n-$ésima iteração, $f(x_n)$ é o valor da função no ponto x_n e $f'(x_n)$ é a derivada da função no ponto x_n. O método inicia com um valor inicial de x e itera até encontrar uma aproximação suficientemente precisa da raiz da função. A cada iteração, é atualizado o valor de x de acordo com a fórmula acima. O método recursivo de Newton pode ser implementado de forma recursiva, ou seja, a própria função é chamada dentro dela mesma para realizar as iterações. A condição de parada da recursão geralmente é quando a diferença entre as iterações consecutivas é menor que uma tolerância pré-definida.

Vamos entender como o Método de Newton funciona geometricamente.

Seja x_1 a primeira aproximação para a raiz r. A reta tangente t_1 ao gráfico de f no ponto $(x_1, f(x_1))$ tem por equação $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$. Para encontrar a interseção x_2 dessa reta com o eixo x, fazemos $y = 0$ na equação da reta tangente:

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

Simplificando, obtemos:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Isso nos dá a segunda aproximação x_2. Notamos que para utilizar esse método, é necessário que $f'(x_1) \neq 0$. Veja a Figura 3.5.

Continuando o processo, consideramos a reta tangente t_2 que passa pelo ponto $(x_2, f(x_2))$. A equação dessa reta é $y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2)$. Para encontrar o próximo ponto de interseção x_3 dessa reta com o eixo x, fazemos $y = 0$:

$$0 - f(x_2) = f'(x_2)(x_3 - x_2).$$

Simplificando, temos:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

Podemos continuar esse processo de iteração utilizando a mesma lógica:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Sempre supomos $f'(x_n) \neq 0$. Essa fórmula de recorrência nos permite obter uma sequência de aproximações $x_1, x_2, x_3, \ldots$ que convergem para a raiz real de $f(x) = 0$, desde que as condições iniciais sejam satisfeitas.

Aplicando o Método de Newton para o cálculo de raízes quadradas

Podemos utilizar o Método de Newton para obter aproximações para raízes quadradas de R. Nesse caso obtemos a recorrência $x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (x_n + \frac{R}{x_n})$ tomando $f(x) = x^2 - R$, onde R é o radicando na raiz quadrada a ser aproximada.

Para verificar que o método $x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (x_n + \frac{R}{x_n})$ é um caso particular do método de Newton, vamos substituir $f(x) = x^2 - R$ na fórmula geral do método de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Calculando $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 - R) = 2x.$$

Agora substituindo $f(x)$ e $f'(x)$ na fórmula do método de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - R}{2x_n}.$$

Simplificando a expressão:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{R}{2x_n}.$$

Multiplicando por $\frac{1}{2}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (x_n + \frac{R}{x_n}).$$

Chegamos então na mesma fórmula do método dado, portanto, podemos concluir que o método

$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{R}{x_n}\right)$ é um caso particular do método de Newton tomando $f(x) = x^2 - R$.

A figura a seguir mostra a Geometria que caracteriza o Método de Newton. 3.5 Este procedimento de iteração consiste em usar as retas tangentes ao gráfico de f para obter aproximação para a raiz R.

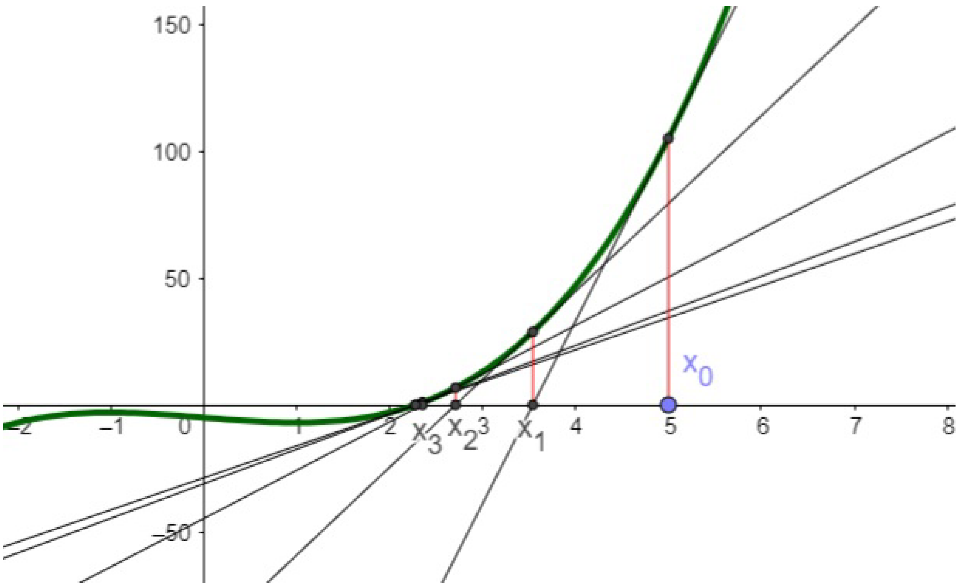


Figura 3.5: Observemos que a sequência x_n converge para r, isto é, $\lim_{n\to\infty} x_n = r$ [17]

Como discutido anteriormente, o método Newton-Raphson é aplicável para determinar o zero de funções reais com uma variável real. Supomos que a segunda derivada $f''(a)$ existe e é diferente de zero, e que tanto a primeira derivada f' quanto a segunda derivada f'' existe. Observando o Teorema de Taylor de segunda ordem, podemos utilizar esta aproximação para obter uma expressão que se aproxima do valor de $f(x)$ próximo ao ponto a. Considerando uma função $f(x)$ com derivadas até a segunda ordem em um intervalo aberto contendo o ponto a, podemos escrever a seguinte expressão:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(\bar{x})(x-a)^2.$$

Onde $f(a)$ representa o valor da função no ponto a, $f'(a)$ é a primeira derivada da função no ponto a, $f''(\bar{x})$ é a segunda derivada da função em um valor $\bar{x}$ entre x e a, e $(x-a)^2$ é o termo de correção de segunda ordem.

O método de Newton-Raphson é uma técnica iterativa utilizada para encontrar raízes de funções. A partir de um valor inicial x_0, podemos calcular uma sequência de valores x_n que se aproximam da raiz da função, utilizando a fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

No caso particular em que temos a função $f(x) = x^2 - R = 0$, utilizamos o método de Newton-Raphson de forma simplificada, com a fórmula

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{R}{x_n} \right).$$

Para justificar a convergência deste método para esse caso particular, podemos considerar a função auxiliar

$$g(x) = \frac{x}{2} + \frac{R}{2x}, x \neq 0$$

Utilizando o Teorema de Taylor em $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{R}{x}\right)$, com $p \in I$ (um intervalo onde $x > p > 0$), encontramos um ponto $\bar{x}$ entre p e x tal que

$$g(x) = g(p) + g'(p)(x-p) + \frac{1}{2} g''(\bar{x})(x-p)^2.$$

Note que nas hipóteses do método de Newton-Rapson, temos a função $f(x) = x^2 - R$ para o cálculo da raiz quadrada, sendo então $p \in \mathbf{R}$ tal que $f(p) = 0$. Por definição, temos

$$f(p) = 0 \iff p^2 - R = 0 \iff p = \sqrt{R}.$$

Além disso, para que o método de Newton-Raphson seja aplicável, precisamos ter

$$f'(p) \neq 0 \iff 2p \neq 0 \iff p \neq 0.$$

Agora, podemos calcular os valores de $g(p)$, $g'(p)$ e $g''(p)$ para o ponto p. Temos

$$g(p) = \frac{1}{2}\left(p + \frac{R}{p}\right) = \frac{1}{2}\left(p + \frac{p^2}{p}\right) = \frac{1}{2} \cdot 2p = p.$$

A derivada de $g(x)$ em relação a x é dada por $g'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{R}{x^2}\right), x \neq 0$.

Portanto, pela derivada de segunda ordem de $g(p)$ em relação a p, temos $g''(p) = \frac{R}{p^3}$. Substituindo os dados encontrados no Teorema de Taylor:

$$g(x) = g(p) + g'(p)(x-p) + \frac{1}{2} g''(\bar{x})(x-p)^2,$$

temos:

$$g(x) = p + 0 \cdot (x - p) + \frac{R}{\bar{x}} \cdot (x - p)^2.$$

Portanto,

$$g(x) = p + \frac{R}{\bar{x}} \cdot (x - p)^2, \tag{3.1}$$

onde $\bar{x}$ está entre x e p. Com isso, definimos a bacia de atração como o conjunto

$$B = \{x \in \mathbb{R} |\ |x - p| < \rho\},$$

onde $\rho > 0$ é tal que $K = \frac{R}{\bar{x}}\rho < 1$. Neste caso, a **bacia de atração** é o intervalo onde faremos o "chute" inicial. Para qualquer x_1 pertencente a B, temos $|x_1 - p| < \rho$. Então, como $x_2 = g(x_1)$, utilizando (3.1), obtemos

$$|x_2 - p| = \left| \frac{R}{\bar{x}} \cdot (x_1 - p)^2 \right| < \frac{R}{\bar{x}} \cdot \rho^2 = \left(\frac{R}{\bar{x}} \rho \right) \rho < \rho.$$

Portanto, podemos concluir que se $x_1 \in B$ e $|x_1 - p| < \rho$, então $x_2 \in B$, pois $|x_2 - p| < \rho$. Mais que isso, obtemos $|x_2 - p| < K|x_1 - p|$. De forma análoga, se $x_2 \in B$ e $|x_2 - p| < \rho$, então $x_3 \in B$ e $|x_3 - p| < K|x_2 - p|$.

Desse modo, observamos que a distância entre x_{n-1} e p é sempre menor que ρ. Podemos, então, demonstrar que a sequência x_n converge para $p = \sqrt{R}$ calculando a sequência de valores absolutos das diferenças. Temos que:

$$|x_{n+1} - p| < K|x_n - p|,$$

$$|x_{n+1} - p| < K^2|x_{n-1} - p|,$$

$$\vdots$$

$$|x_{n+1} - p| < K^n|x_1 - p|.$$

Como $K < 1$, temos que $K^n \longrightarrow 0$, o que implica em $K^n|x_1 - p| \longrightarrow 0$. Portanto, $|x_{n+1} - p| \longrightarrow 0$, o que nos leva a concluir que $x_{n+1} \longrightarrow p = \sqrt{R}$.

CAPÍTULO 4

Sequências didáticas para o Ensino Médio

A presença da Matemática em nosso entorno é amplamente perceptível. Ela se manifesta de diversas formas, como em padrões e proporções na arte, harmonia musical, estruturas arquitetônicas e organização da natureza. Além disso, a Matemática é fundamental em campos como Economia, Física, Engenharia e Arquitetura. Por meio do entendimento matemático, conseguimos compreender o mundo de forma mais profunda. No entanto, o ensino de Matemática na Educação Básica enfrenta desafios. Muitos alunos têm dificuldades em compreender os conceitos, comprometendo a sua visão de mundo. Essa problemática é especialmente evidente no Ensino Médio, onde os estudantes costumam ter dificuldades com funções e a linguagem algébrica.[16]

Na perspectiva de melhorar o ensino e aprendizagem da Matemática, é de extrema importância a busca por estratégias que proporcionem um aprendizado eficiente e envolvente. Dentre as alternativas promissoras, destaca-se a utilização de sequências didáticas, que constituem-se como um conjunto organizado de atividades relacionadas a um tema específico. Essa abordagem pretende facilitar a assimilação dos conteúdos pelos alunos, incentivando sua participação ativa, estimulando o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas e promovendo discussões em grupo. Ademais, as sequências didáticas auxiliam na conexão dos conceitos matemáticos com sua aplicação prática, conferindo ao aprendizado uma perspectiva interessante, significativa e duradoura.[8]

Com base nessa premissa, será apresentada uma seleção de seis sequências didáticas envolvendo Sistemas Dinâmicos aplicados em Progressões Geométricas, tema este que faz parte da Base Nacional Curricular Comum e é desenvolvido no primeiro ano do Ensino Médio de acordo com a sua orientação.Dentre essas sequências, será escolhida uma para ser aplicada em três turmas de primeiro ano do Ensino Médio. Essas sequências foram disponibilizadas de modo a representar vários tipos de aplicações, algumas das quais são análogas, a fim de possibilitar que o leitor, professor de Matemática, possa escolher livremente a que melhor se adequá à sua turma e realidade. A sequência selecionada reflete a realidade das turmas de primeiro ano do Ensino Médio onde será aplicada, levando em consideração as necessidades e dificuldades dos alunos. Além disso, buscou-se elaborar as seis sequências de forma que outros professores, mesmo diante de realidades de turmas diferentes, também possam aplicá-las.

4.1 Sequência didática do primeiro exemplo do Capítulo 3

Sequência Didática:

Tema: Sistemas Dinâmicos e Progressões Geométricas.

Objetivos:

- Compreender o conceito de Sistemas Dinâmicos aplicados a sequências;
- Explorar a relação entre Sistemas Dinâmicos e Progressões Geométricas;
- Utilizar a fórmula da área de um triângulo equilátero como exemplo concreto da relação entre Sistemas Dinâmicos e Progressões Geométricas.

Duração: 3 aulas de 50 minutos cada.

Recursos necessários:

- Quadro branco ou lousa;
- Marcadores;
- Exercícios impressos ou disponibilizados em folhas para os alunos;
- Calculadora (opcional).

Aula 1:

Introdução:

Iniciar a aula explicando que Sistemas Dinâmicos são uma forma poderosa de representar e analisar sequências matemáticas que evoluem ao longo do tempo. Para compreender e trabalhar com Sistemas Dinâmicos, é necessário estar familiarizado com o conceito de sequência matemática, que é uma lista ordenada de elementos que segue um padrão predefinido. As sequências podem ser representadas por meio de Sistemas Dinâmicos, usando uma ferramenta chamada mapa iterativo. Um mapa iterativo é uma função matemática que descreve como cada elemento da sequência evolui em relação ao elemento anterior.

Desenvolvimento:

Parte 1:

Em seguida, introduzir o conceito de Progressão Geométrica. Explicar que uma PG é uma sequência em que cada termo é obtido multiplicando-se um número chamado razão pelo termo anterior. Destacar as características de uma PG, como a relação de dependência entre os termos e a propriedade multiplicativa.

Parte 2:

Demonstrar as fórmulas para calcular o termo geral de uma PG e a soma dos termos de uma PG finita. Explicar como identificar a razão de uma PG e como calcular os termos da sequência utilizando essa razão. Para fixar o conteúdo, propor aos alunos a resolução de exercícios simples envolvendo PG. Os exercícios devem abranger tanto a identificação da razão e cálculo de termos específicos, quanto o cálculo da soma de uma sequência finita.

Parte 3:

Ao término da aula, reforçar a importância dos Sistemas Dinâmicos e das Progressões Geométricas como ferramentas fundamentais para a compreensão e modelagem de fenômenos matemáticos que evoluem ao longo do tempo.

Aula 2:

Introdução:

Explicar que na aula 2, são abordados os triângulos equiláteros, que são um caso especial de triângulos em que todos os três lados são iguais. Além disso, os três ângulos internos também são iguais e têm medida de 60 graus. Essas características tornam os triângulos equiláteros formas geométricas regulares e simétricas.

Desenvolvimento:

Parte 1:

Explicar que para calcular a área de um triângulo equilátero, utiliza-se a seguinte fórmula:

$$\text{Area} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{lado})^2,$$

em que "lado" representa o comprimento de qualquer um dos lados do triângulo. Essa fórmula é derivada do fato de que um triângulo equilátero pode ser subdividido em dois triângulos retângulos congruentes, com um ângulo interno de 60 graus. Para facilitar a compreensão e aplicação da fórmula, serão feitos alguns cálculos exemplificativos. Suponha um triângulo equilátero com um lado de comprimento de 6 cm. Para encontrar a área, substituímos "lado" na fórmula pelo valor dado:

$$\text{Area} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (6)^2.$$

Simplificando, temos:

$$\text{Area} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 36.$$

Agora, podemos calcular numericamente:

$$\text{Area} = \frac{\sqrt{3} \times 36}{4}.$$

$$\text{Area} = \sqrt{\frac{36 \times 3}{4}}.$$

$$\text{Area} = \sqrt{9 \times 3}.$$

$$\text{Area} = \sqrt{27}.$$

$$\text{Area} = 9\sqrt{3}cm.$$

Parte 2:

Agora, os estudantes são desafiados a calcular a área de alguns triângulos equiláteros dados, fornecendo o comprimento do lado. Por exemplo, se o lado medir 5 cm, qual seria a área? Eles devem utilizar a fórmula e simplificar o resultado. Além disso, os estudantes são incentivados a explorar diferentes triângulos equiláteros e comparar as áreas obtidas. Verificar se há algum padrão ou relação entre o lado e a área pode ser um exercício interessante para entender melhor essas formas geométricas.

Parte 3:

Nessa parte da aula, será analisada uma sequência de triângulos equiláteros. O objetivo é estudar a relação entre a razão de uma Progressão Geométrica e o lado e a área de cada triângulo. Para determinar o lado e a área de cada triângulo da sequência, utiliza-se a fórmula da área do triângulo equilátero mencionada anteriormente. Os estudantes devem acompanhar o raciocínio passo a passo e fazer anotações para resolver esse exemplo proposto.

Aula 3:

Introdução:

Explicar que nessa aula, será feita uma análise do mapa da razão. O mapa iterativo do exemplo proposto, relacionado à razão da Progressão Geométrica, será revisado. Será explicado como determinar a constância da razão por meio do mapa, mostrando que a razão deve permanecer a mesma para todos os triângulos da sequência. Será solicitado aos alunos que calculem a razão para alguns casos da sequência de triângulos equiláteros, fornecendo a área e o lado respectivo de cada triângulo.

Desenvolvimento:

Parte 1:

Em seguida, será feita a análise do mapa da área. O mapa iterativo do exemplo proposto, relacionado à área dos triângulos equiláteros, será relembrado. Os alunos serão estimulados a identificar padrões e comportamentos da área para diferentes valores da razão. Será solicitado que analisem os resultados obtidos e levantem hipóteses sobre o que acontece com a área quando a razão é maior que 1, quando é menor que 1 e quando é igual a 1. A resolução do exemplo proposto será realizada, utilizando os conceitos aprendidos. Será mostrado como determinar a razão, o lado e a área de cada triângulo da sequência. Os alunos serão incentivados a acompanhar o raciocínio e fazer anotações sobre cada passo realizado. Serão estimulados a levantar questionamentos sobre o exemplo e a compartilhar observações e conclusões.

Parte 2:

Em seguida, serão propostas atividades práticas relacionadas ao tema, para que os alunos possam praticar. Exercícios como calcular os termos de uma PG, determinar a área de triângulos equiláteros ou analisar o comportamento da área em uma sequência serão sugeridos. Será estimulado que criem outros exemplos e explorem diferentes comportamentos das sequências em Sistemas Dinâmicos, como variações na razão da PG ou na fórmula da área de um triângulo.

Avaliação:

No encerramento da aula, será feita uma revisão dos principais conceitos abordados, destacando a importância dos Sistemas Dinâmicos na análise e compreensão das sequências matemáticas. Serão tiradas as dúvidas dos alunos e eles serão incentivados a fazer uma síntese de tudo que aprenderam, desde os conceitos de Sistemas Dinâmicos e Progressões Geométricas até a aplicação desses conhecimentos na resolução do exemplo proposto. Serão encorajados a compartilhar com os colegas suas conclusões e observações sobre o comportamento das sequências estudadas.

4.2 Sequência didática do segundo exemplo do Capítulo 3

Sequência didática: Soma das áreas de triângulos - Progressões Geométricas.

Objetivos:

- Compreender o conceito de Sistemas Dinâmicos aplicados a sequências;
- Explorar a relação entre Sistemas Dinâmicos e Progressões Geométricas;
- Utilizar a fórmula da área de um triângulo equilátero como exemplo da relação entre Sistemas Dinâmicos e Progressões Geométricas.

Duração: 3 aulas de 50 minutos cada.

Recursos necessários:

- Quadro branco ou lousa;
- Marcadores;
- Exercícios impressos ou disponibilizados em folhas para os alunos;
- Calculadora (opcional).

Aula 1:

Introdução:

Apresente aos alunos o conceito de triângulo retângulo e suas características, enfatizando que possui um ângulo reto (90°) e dois lados perpendiculares chamados de catetos e um lado oposto ao ângulo reto chamado de hipotenusa. Explique a importância do estudo da área dos triângulos retângulos para resolver problemas geométricos e matemáticos em geral.

Apresente a fórmula da área do triângulo retângulo:

$$A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}.$$

Mostre um exemplo de aplicação da fórmula, calculando a área de um triângulo retângulo qualquer. Discuta com os alunos sobre a fórmula da área e suas aplicações em situações reais.

Desenvolvimento:

Parte 1:

Apresente o triângulo retângulo T_1 aos alunos, informando suas medidas de base (b) e altura (h). Explore com os alunos a possibilidade de dividir o triângulo em quatro partes iguais, mostrando um desenho na lousa que represente essa divisão (triângulos T_2, T_3, T_4 e T_5). Peça aos alunos para calcular a área do triângulo T_1 utilizando a fórmula da área do triângulo retângulo.

Parte 2:

Em seguida, peça para calcular a área de cada um dos triângulos resultantes (T_2, T_3, T_4 e T_5). Discuta as respostas com a turma e destaque que as áreas são todas iguais. Estimule os alunos a observarem a relação entre as medidas dos lados dos triângulos e suas áreas.

Avaliação:

Distribua uma atividade para os alunos, na qual eles devem calcular a área de triângulos retângulos com medidas diferentes. Corrija as atividades em sala de aula, tirando dúvidas dos alunos e reforçando o conceito de área de triângulos retângulos.

Aula 2:

Introdução:

Faça uma revisão rápida da aula anterior, relembrando o conceito de área do triângulo retângulo e a divisão do triângulo T_1 em quatro partes iguais. Recapitule com os alunos a relação entre as áreas dos triângulos resultantes.

Desenvolvimento:

Parte 1:

Explique aos alunos que podemos repetir o processo de divisão sucessiva em um dos triângulos resultantes, como no caso do triângulo T_2. Mostre a divisão do triângulo T_2 em quatro partes iguais (triângulos T_6, T_7, T_8 e T_9) utilizando um desenho na lousa. Para complementar a explicação sobre o processo de divisão sucessiva, é possível utilizar um software computacional, como o GeoGebra, para demonstrar de forma visual a divisão do triângulo.

Parte 2:

Peça aos alunos para calcular a área de cada um dos triângulos resultantes (triângulo T_9) utilizando a fórmula da área do triângulo retângulo. Discuta com a turma sobre os resultados e destaque que a área de cada triângulo é um quarto da área do triângulo anterior. Estimule os alunos a observarem a relação entre as áreas dos triângulos sucessivos.

Parte 3:

Distribua uma nova atividade para os alunos, na qual eles devem calcular a área de triângulos gerados pela divisão sucessiva. Incentive-os a fazer o desenho dos triângulos e a utilizar a fórmula da área para calcular as áreas.

Avaliação:

Realize uma atividade em que os alunos devem identificar a razão entre as áreas dos triângulos sucessivos de uma divisão. Corrija as atividades em sala de aula, tirando dúvidas dos alunos e reforçando o conceito de razão entre as áreas dos triângulos sucessivos.

Aula 3:

Introdução:

Faça uma revisão rápida das aulas anteriores, relembrando o conceito de divisão sucessiva do triângulo retângulo e a razão entre as áreas dos triângulos resultantes. Explique aos alunos que essa divisão segue um padrão e que podemos representar a soma das áreas como uma Progressão Geométrica.

Desenvolvimento:

Parte 1:

Apresente a fórmula da soma de uma Progressão Geométrica Finita:

$$S_n = a_1 \times \frac{(1-r^n)}{(1-r)},$$

explicando cada elemento da fórmula. Aplique a fórmula ao exemplo proposto, considerando o número de triângulos desejado. Mostre passo a passo o cálculo da fórmula, explicando cada etapa.

Parte 2:

Discuta com os alunos o resultado final e destaque que, quando n tende ao infinito, a fórmula se simplifica. Estimule os alunos a perceberem que a soma das áreas dos triângulos resultantes será sempre menor do que a área total do triângulo inicial.

Parte 3:

Distribua uma nova atividade para os alunos, na qual eles devem calcular a soma das áreas de triângulos gerados por uma divisão sucessiva. Incentive-os a utilizar a fórmula da soma de uma Progressão Geométrica Finita para calcular as somas.

Avaliação:

Realize uma atividade em que os alunos devem calcular a soma das áreas de uma divisão sucessiva com um número grande de triângulos. Corrija as atividades em sala de aula, tirando dúvidas dos alunos e enfatizando o uso da fórmula da soma de uma Progressão Geométrica. Faça uma revisão geral do conteúdo abordado ao longo das aulas. Esclareça eventuais dúvidas dos alunos. Reforce a importância do conceito de Progressões geométricas e sua aplicação em problemas práticos. Estimule os alunos a perceberem a relação entre a soma das áreas dos triângulos retângulos resultantes das divisões sucessivas do triângulo e a área do triângulo retângulo originalmente dado.

4.3 Sequência didática do terceiro exemplo do Capítulo 3

Sequência didática: Compreendendo a relação entre áreas e Progressões Geométricas.

Objetivos:

- Introduzir o conceito de PG;
- Entender a relação entre os termos de uma PG;
- Aplicar fórmulas para calcular termos de uma PG;
- Compreender o conceito de Sistemas Dinâmicos;
- Identificar os componentes de um Sistema Dinâmico;
- Aplicar o conceito de Sistemas Dinâmicos na resolução de problemas;
- Analisar o comportamento do crescimento da sequência de quadrados;
- Relacionar o valor da razão com o crescimento da sequência;

- Interpretar os resultados obtidos através de Sistemas Dinâmicos.

Duração: 3 aulas de 50 minutos cada.

Recursos necessários:

- Quadro branco ou lousa;
- Marcadores;
- Exercícios impressos ou disponibilizados em folhas para os alunos;
- Calculadora (opcional).

Aula 1:

Introdução:

Inicie a aula perguntando aos alunos se eles conhecem o conceito de sequência. Explique que uma sequência é uma lista ordenada de elementos.

Desenvolvimento:

Parte 1:

Introduza o conceito de Progressão Geométrica (PG), explicando que é uma Sequência Numérica onde cada termo é obtido multiplicando-se o termo anterior por uma constante chamada razão r

Parte 2:

Apresente a fórmula do termo geral de uma PG:

$$a_n = a_0 \cdot r^{n-1},$$

onde a_n é o termo n, a_0 é o primeiro termo e r é a razão.

Parte 3:

Resolva alguns exemplos no quadro, calculando termos de uma PG utilizando a fórmula. Faça exercícios em sala de aula para que os alunos pratiquem o cálculo de termos de PG.

Aula 2:

Introdução:

Apresente o conceito de Sistemas Dinâmicos, explicando que são modelos matemáticos que descrevem a evolução de um sistema ao longo do tempo.

Desenvolvimento:

Parte 1:

Explique os três componentes essenciais de um Sistema Dinâmico: conjunto de estados, conjunto de regras e mapa iterativo. Apresente o exemplo da sequência de quadrados, mostrando como podemos representar essa sequência como um Sistema Dinâmico. Explique como usar um mapa iterativo para relacionar dois termos consecutivos da sequência.

Parte 2:

Resolva o mapa da razão para a sequência de quadrados no quadro, mostrando que a razão é constante e igual a r.

Avaliação:

Faça exercícios em sala de aula onde os alunos devem encontrar os mapas iterativos para outras sequências numéricas.

Aula 3:

Introdução:

Revisite o exemplo da sequência de quadrados, lembrando que o lado e a área de cada quadrado podem ser calculados utilizando fórmulas.

Desenvolvimento:

Parte 1:

Explique os critérios para o crescimento da área dos quadrados: se $r > 1$, a área cresce exponencialmente; se $0 < r < 1$, a área diminui a cada iteração; se $r = 1$, a área se mantém constante.

Parte 2:

Resolva o mapa iterativo para a área dos quadrados, mostrando como o valor da razão afeta o crescimento da área.

Avaliação:

Faça outros exemplos em que os alunos devem analisar o crescimento de sequências utilizando Sistemas Dinâmicos. Encerre a aula reforçando a importância dos Sistemas Dinâmicos para a análise de problemas matemáticos e científicos.

4.4 Sequência didática do quarto exemplo do Capítulo 3

Sequência Didática: Explorando a Soma das Áreas dos Quadrados Resultantes.

Objetivos:

- Compreender o conceito de soma de uma Progessão Geométrica infinita;
- Entender os princípios da Progressão Geométrica aplicada às áreas dos quadrados resultantes;
- Resolver o exemplo prático de soma das áreas dos quadrados resultantes durante as aulas.

Duração: 3 aulas de 50 minutos cada.

Recursos necessários:

- Quadro branco ou lousa;
- Marcadores;
- Exercícios impressos ou disponibilizados em folhas para os alunos;
- Calculadora (opcional).

Aula 1:

Introdução:

Introduza o tema da aula: Explorando a Soma das Áreas dos Quadrados Resultantes. Explique o objetivo da sequência didática e como ela será desenvolvida ao longo das três aulas. Estabeleça as expectativas sobre o que os alunos irão aprender e alcançar ao final das aulas.

Desenvolvimento:

Parte 1:

Inicie relembrando a fórmula para calcular a área de um quadrado de comprimento l, $A = l^2$, e peça para os alunos escreverem essa fórmula em seus cadernos. Explore a relação entre a área do quadrado original, Q_1, e os quadrados resultantes, Q_5, Q_9, etc. Ilustre essa relação no quadro ou na lousa para melhor visualização. Pergunte aos alunos: "O que podemos dizer sobre a área de cada quadrado resultante em comparação com o quadrado anterior?". Certifique-se de que compreendam que a área de cada quadrado é um quarto da área do quadrado anterior.

Parte 2:

Introduza o conceito de Progressão Geométrica e explique que estamos diante de uma Progressão Geométrica com razão $\frac{1}{4}$. Explique o que é uma Progressão Geométrica de maneira geral e como podemos calcular sua soma para um número finito de termos usando a fórmula

$$S_n = \frac{a \cdot (1 - r^n)}{1 - r}.$$

Mostre exemplos numéricos de como calcular a soma de uma Progressão Geométrica Finita, usando os valores da razão, do primeiro termo e do número de termos. Peça para os alunos resolverem alguns exercícios relacionados à Progressão Geométrica em duplas ou individualmente.

Parte 3:

Explique a fórmula que usaremos para calcular a soma das áreas dos quadrados resultantes, usando a fórmula da soma de uma Progressão Geométrica Finita. Faça a analogia entre os termos da Progressão Geométrica e os quadrados resultantes. Demonstre como aplicar a fórmula para calcular a soma das áreas. Dê um exemplo de aplicação da fórmula considerando um número finito de quadrados resultantes. Incentive a participação dos alunos, permitindo que façam perguntas e esclareçam suas dúvidas.

Avaliação:

Peça aos alunos que estudem a fórmula da soma das áreas dos quadrados resultantes e que se preparem para resolver exercícios semelhantes durante a próxima aula.

Aula 2:

Introdução:

Faça uma revisão rápida do conteúdo abordado na aula anterior, resumindo os principais pontos discutidos e esclarecendo eventuais dúvidas dos alunos.

Desenvolvimento:

Parte 1:

Distribua exercícios impressos ou disponibilize-os em folhas para os alunos resolverem em duplas ou individualmente. Os exercícios devem ser focados na aplicação da fórmula da soma das áreas dos quadrados resultantes, considerando um número finito de quadrados. Circule pela sala, auxiliando os alunos que encontrarem dificuldades e tirando dúvidas individualmente.

Parte 2:

Proponha um problema mais complexo, que envolva a aplicação da fórmula da soma das áreas dos quadrados resultantes para um número maior de quadrados. Explique aos alunos como adaptar a fórmula para calcular a soma das áreas quando o número de quadrados tende ao infinito. Resolva o exemplo prático dado na questão inicial juntamente com os alunos, passo a passo, garantindo que todos compreendam o raciocínio necessário para chegar à resposta correta.

Parte 3:

Divida a turma em grupos para que discutam os resultados obtidos nos exercícios e no exemplo prático. Incentive-os a comparar suas soluções e raciocínios. Peça para cada grupo compartilhar seus resultados e estratégias com a classe, estimulando a troca de ideias e o debate.

Avaliação:

Peça aos alunos que revisem os conceitos discutidos nas aulas anteriores e que estejam preparados para a atividade final que será realizada na próxima aula.

Aula 3:

Introdução:

Faça uma breve revisão dos principais conceitos abordados nas aulas anteriores para garantir que todos os alunos tenham compreendido o material.

Desenvolvimento:

Parte 1:

Entregue uma atividade final para os alunos resolverem individualmente. Essa atividade deve abordar a aplicação dos conceitos aprendidos nas aulas anteriores, envolvendo a soma das áreas dos quadrados resultantes. Certifique-se de que a atividade proposta englobe diferentes níveis de dificuldade, desafiando os alunos a aplicarem os conhecimentos adquiridos. Observe e corrija as atividades enquanto os alunos as resolvem. Esteja disponível para esclarecer dúvidas individuais.

Parte 2:

Incentive os alunos a compartilharem suas respostas e soluções com a classe. Discuta cada questão da atividade final com a turma, esclarecendo dúvidas e reforçando os conceitos importantes relacionados à soma das áreas dos quadrados resultantes.

Avaliação:

Faça um resumo dos principais pontos discutidos nas aulas, enfatizando os conceitos aprendidos e sua relevância. Reforce a importância de compreender e aplicar corretamente a fórmula da soma das áreas dos quadrados resultantes.

4.5 Sequência didática do quinto exemplo do Capítulo 3

Sequência Didática: Introdução ao Crescimento Populacional Exponencial.

Objetivos:

- Introduzir o conceito de crescimento populacional exponencial;
- Entender o papel da taxa de crescimento na população;
- Apresentar a fórmula para calcular o número de indivíduos em diferentes gerações;
- Analisar o comportamento do crescimento populacional em diferentes taxas;
- Comparar o crescimento populacional com taxas menores e maiores que 1;
- Aplicar o conceito de limite infinito do termo geral da Progessão Geométrica para estimar o comportamento a longo prazo da população;
- Discutir as situações em que a população tende para a extinção ou crescimento indefinido.

Duração: 3 aulas de 50 minutos cada.

Recursos necessários:

- Quadro branco ou lousa;
- Marcadores;
- Exercícios impressos ou disponibilizados em folhas para os alunos;
- Calculadora (opcional).

Aula 1:

Introdução:

Iniciar a aula explicando que iremos estudar sobre o crescimento populacional exponencial, que é quando uma população aumenta em uma taxa constante a cada geração. Mostrar exemplos do dia a dia em que podemos observar esse tipo de crescimento, como o número de seguidores em redes sociais, o crescimento de uma população de bactérias, etc.

Desenvolvimento:

Parte1:

Explicar o conceito de taxa de crescimento, que é a proporção do aumento populacional a cada geração. Mostrar exemplos de diferentes taxas de crescimento, como 1.2, 1.5 e 2. Discutir as diferenças entre uma taxa de crescimento maior e uma taxa de crescimento menor. Apresentar a fórmula $P_n = r^n \cdot P_0$ e explicar cada termo: P_n representa o número de indivíduos na geração n, r é a taxa de crescimento e P_0 é a população inicial. Resolver alguns exemplos utilizando a fórmula, utilizando valores simples para fácil compreensão.

Parte 2:

Dividir a turma em grupos pequenos e fornecer exercícios simples envolvendo a fórmula do crescimento populacional. Circular pela sala, auxiliando os grupos que tiverem dúvidas e incentivando a participação de todos.

Aula 2:

Introdução:

Fazer uma breve revisão dos conceitos abordados na aula anterior, perguntando aos alunos o que eles lembram sobre crescimento populacional exponencial e a fórmula utilizada.

Desenvolvimento:

Parte 1:

Mostrar gráficos que representem o crescimento populacional com diferentes taxas (por exemplo, uma taxa inferior a 1 e outra superior a 1). Discutir as diferenças entre os gráficos, enfatizando que uma taxa inferior a 1 leva a um declínio populacional, enquanto uma taxa superior a 1 implica em crescimento indefinido.

Parte 2:

Dividir a turma em grupos e fornecer um problema prático relacionado ao crescimento populacional para cada grupo. Os grupos devem discutir e resolver o problema, utilizando a fórmula do crescimento populacional e registrando os passos utilizados.

Parte 3:

Solicitar que cada grupo apresente sua solução para a classe. Promover uma discussão sobre as diferentes abordagens utilizadas por cada grupo e as conclusões encontradas.

Aula 3:

Introdução:

Relembrar os conceitos principais estudados nas aulas anteriores, incentivando os alunos a explicarem o que eles aprenderam sobre crescimento populacional exponencial.

Desenvolvimento:

Parte 1:

Explicar o conceito de limite infinito do termo geral da Progessão Geométrica e como podemos utilizar esse conceito para estimar o comportamento a longo prazo da população. Dar exemplos de como calcular o limite infinito do termo geral da Progessão Geométrica, utilizando a fórmula

$$P_n = r^n \cdot P_0.$$

Parte 2:

Resolver um exemplo prático utilizando o limite infinito da Progessão Geométrica para estimar a população em um futuro muito distante. Explicar passo a passo como chegamos ao resultado e responder às dúvidas dos alunos.

Avaliação:

Perguntar aos alunos qual é a conclusão que podemos tirar desse exemplo prático. Discutir as situações em que a população tende para a extinção (taxa de crescimento inferior a 1) e as situações em que a população cresce indefinidamente (taxa de crescimento superior a 1).

4.6 Sequência didática do sexto exemplo do Capítulo 3

Sequência Didática: Aproximação da raiz quadrada utilizando o método babilônio.

Objetivos:

- Introduzir o conceito de aproximação da raiz quadrada;

- Entender o método babilônio de extrair raízes quadradas;
- Realizar as primeiras iterações do método em exemplos simples.

Duração: 1 aula de 50 minutos.

Recursos necessários:

- Quadro branco ou lousa;
- Marcadores;
- Exercícios impressos ou disponibilizados em folhas para os alunos;
- Calculadora (opcional).

Aula 1:

Introdução:

Iniciar a aula explicando que será estudado o método babilônio de aproximação da raiz quadrada. Destacar a importância dessa técnica no contexto histórico e sua relevância atualmente.

Desenvolvimento:

Parte 1:

Explicar detalhadamente o método babilônio de extrair raízes quadradas, destacando a fórmula de recorrência e como utilizar essa fórmula para realizar as iterações. Mostrar exemplos simples de aproximação da raiz quadrada de números inteiros.

Parte 2:

Dividir a turma em grupos e fornecer problemas simples envolvendo a aproximação da raiz quadrada do exemplo anterior. Os grupos devem utilizar o método babilônio para realizar as iterações necessárias e encontrar uma aproximação da raiz quadrada de cada problema.

Parte 3:

Após a atividade prática, reunir a turma para discutir as soluções encontradas pelos grupos. Conduzir uma discussão sobre as dificuldades encontradas e as estratégias utilizadas para realizar as aproximações. Reforçar o conceito de aproximação e a importância de realizar várias iterações para obter uma aproximação mais precisa.

Parte 4:

Dar como tarefa de casa a resolução de problemas mais complexos envolvendo a aproximação da raiz quadrada utilizando o método babilônio. Reforçar a importância de mostrar o processo de aproximação passo a passo.

Avaliação:

A avaliação será feita de forma contínua, observando a participação dos alunos na atividade prática e na discussão em grupo. Será avaliado também se os alunos compreenderam o método babilônio de aproximação da raiz quadrada e se conseguiram aplicá-lo corretamente nos problemas propostos.

CAPÍTULO 5

Uma sequência didática detalhada: Roteiro de Aula

No presente capítulo, será oferecido um detalhamento para a sequência didática apresentada anteriormente, mais especificamente o segundo exemplo mencionado. A escolha desse exemplo se deu em virtude das características particulares das turmas onde será aplicado. Durante o aprofundamento, foi constatado que seria necessário adicionar uma aula adicional, uma vez que uma análise mais aprofundada revelou que as três aulas planejadas inicialmente não seriam suficientes para abordar todo o conteúdo planejado, especialmente ao detalhar cada atividade que seria realizada. Para tanto, foram criadas fichas de atividades, uma para cada uma das quatro aulas, e, ao fazer isso, percebeu-se que as três aulas planejadas originalmente não seriam o bastante para abarcar tudo o que se planejava trabalhar. Concluiu-se, assim, que caso alguém decida adaptar um dos seis exemplos propostos, ajustes relacionados à quantidade de conteúdos a serem trabalhados e à realidade da turma, ou turmas em questão, serão provavelmente necessários.

5.1 Sequência didática aplicada nas turmas

Tema:

Sistemas Dinâmicos , soma das áreas de triângulos e Progressões Geométricas.

Público alvo:

Estudantes do 1º ano do Ensino Médio. A escolha deve-se ao fato de que neste ano, os discentes têm contato aprofundado com as funções polinomiais, a composição de funções, bem como os conteúdos de Progressão Aritmética e Geométrica, no segundo ciclo do ano letivo.

Objetivos:

- Apresentar de maneira intuitiva um sistema dinâmico por meio de um exemplo de situação real, utilizando a modelagem matemática como uma ferramenta;
- Explorar a relação entre Sistemas Dinâmicos e Progressões Geométricas;
- Utilizar o conceito de composição de funções e introduzir o conceito de órbita;
- Utilizar a fórmula da área de um triângulo equilátero como exemplo concreto da relação entre Sistemas Dinâmicos e Progressões Geométricas;
- Desenvolver a familiarização dos estudantes com as representações algébricas e gráficas, incentivando-os a identificar regularidades e avaliar diversas circunstâncias.
- Apresentar propostas de ações que visam atender às necessidades explicitadas na Base Nacional Comum Curricular.

Conteúdos:

- Sistemas Dinâmicos Discretos;
- Composição de função;
- Iteração;
- Órbitas;
- Pontos fixos;
- Pontos atratores e repulsores.

Pré-requisitos:

- Funções: conceito;
- Composição de função (definição e propriedades);
- Funções polinomiais (1º e 2º grau);
- Saber posicionar pontos no plano cartesiano;

- Progressão Aritmética e Progressão Geométrica.

Duração:

A duração estimada para essa sequência é de 3 aulas, sendo cada aula com duração de 50 minutos.

Recursos:

- Quadro branco ou quadro negro e giz;
- Material impresso com exercícios e problemas matemáticos;
- Cartolina

Metodologia:

- Modelagem Matemática
- Análise de problemas;
- Aprendizagem baseada em problemas.

Avaliação:

- A avaliação será realizada de forma contínua, seguindo o processo das atividades. Será analisado o material produzido pelos alunos;
- Além disso, será disponibilizado um formulário de opinião, no qual os participantes poderão expressar suas percepções e sugestões sobre o desenvolvimento da oficina;
- A análise do material produzido junto com o formulário de opinião tornará possível obter uma visão mais completa e abrangente do envolvimento dos participantes, bem como sua satisfação e nível de aproveitamento das atividades.

Dificuldades previstas:

Antecipamos que os alunos possam enfrentar desafios e uma falta de conhecimento com relação aos conceitos matemáticos essenciais.

Desenvolvimento da atividade

Aula 1:

Introdução:

Apresente aos alunos o conceito de triângulo retângulo e suas características, enfatizando que possui um ângulo reto (90°) e dois lados perpendiculares chamados de catetos e um lado oposto ao ângulo reto chamado de hipotenusa.

Explique a importância do estudo da área dos triângulos retângulos para resolver problemas geométricos e matemáticos em geral.

Apresente a fórmula da área do triângulo retângulo:

$$A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}.$$

Mostre um exemplo de aplicação da fórmula, calculando a área de um triângulo retângulo qualquer.

Discuta com os alunos sobre a fórmula da área e suas aplicações em situações reais.

Desenvolvimento

Disponha da folha de atividades na página seguinte (**Figura 5.1**). Em seguida, proceda as etapas abaixo.

Parte 1

Apresente o triângulo retângulo T_1 aos alunos, informando suas medidas de base (b) e altura (h).

Explore com os alunos a possibilidade de dividir o triângulo em quatro partes iguais, mostrando um desenho na lousa que represente essa divisão (triângulos T_2, T_3, T_4 e T_5).

Peça aos alunos para calcular a área do triângulo T_1 utilizando a fórmula da área do triângulo retângulo.

Em seguida, peça para calcular a área de cada um dos triângulos resultantes (T_2, T_3, T_4 e T_5).

Discuta as respostas com a turma e destaque que as áreas são todas iguais.

Uma forma de explorar a divisão do triângulo retângulo em quatro partes iguais é utilizando uma cartolina. Peça aos alunos para desenharem e recortarem um triângulo retângulo em uma cartolina. Em seguida, peça que cortem a cartolina ao longo de uma reta que divide o triângulo em quatro partes iguais, formando os triângulos T_2, T_3, T_4 e T_5.

Ao realizar essa atividade prática, os alunos poderão visualizar de forma concreta a divisão do triângulo retângulo em quatro partes iguais. Essa visualização pode ajudá-los a compreender melhor a relação entre as medidas dos lados dos triângulos e suas áreas.

Parte 2

Após a divisão da cartolina em quatro partes, peça aos alunos para medirem as bases e alturas dos triângulos T_2, T_3, T_4 e T_5. Em seguida, peça que calculem a área de cada um desses triângulos utilizando a fórmula da área do triângulo retângulo.

Ao discutir as respostas com a turma, enfatize que todas as áreas são iguais. Isso pode ser um ponto de partida para que os alunos observem a relação entre as medidas dos lados dos triângulos e suas áreas. Eles podem perceber que, mesmo tendo bases e alturas diferentes, os triângulos possuem áreas iguais, o que indica que existe uma relação entre as medidas dos lados e a área de um triângulo.

Parte 3

Recolha os materiais para serem utilizados na aula 2.

Escola Estadual Professor Inácio Castilho
Diretor: MARIA GORETH DOS SANTOS AGUIAR

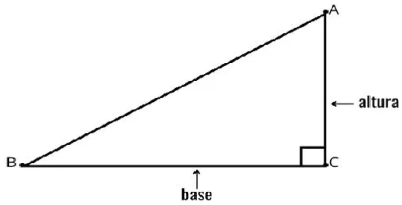
Aluno(a):____

Ano: 1° Regular Professor(a): HERBERT REZENDE SIQUEIRA Data: ___/___/___

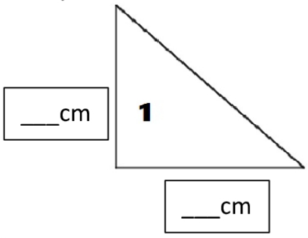
A fórmula da área do triângulo retângulo é a seguinte:

$$Área = \frac{base * altura}{2}$$

Considere o triângulo ABC, em que o ângulo C é igual a 90°. Podemos considerar o cateto BC como a base do triângulo e o cateto AC como a altura. Essa estratégia facilita o cálculo da área do triângulo retângulo quando os comprimentos dos lados são conhecidos.



Complete com base no triangulo de cartolina:



$$A_1 = \frac{(\quad)\times(\quad)}{2} = \frac{(\quad)}{2} =$$

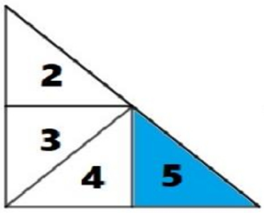
Complete com base na divisão feita com o triângulo de cartolina:

$$A_2 = \frac{(\quad)\times(\quad)}{2} = \frac{(\quad)}{2} =$$

$$A_3 = \frac{(\quad)\times(\quad)}{2} = \frac{(\quad)}{2} =$$

___cm

___cm



$$A_4 = \frac{(\quad)\times(\quad)}{2} = \frac{(\quad)}{2} =$$

___cm ___cm

$$A_5 = \frac{(\quad)\times(\quad)}{2} = \frac{(\quad)}{2} =$$

Suponha um terreno em formato de triângulo retângulo com uma das medidas dos catetos igual a 8 metros. Sabendo que a distância da frente até a extremidade dos fundos do terreno é de 15 metros, vamos determinar a área do terreno.

$$A_{terreno} = \frac{(\quad)\times(\quad)}{2} = \frac{(\quad)}{2} =$$

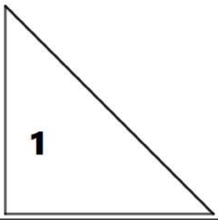
Suponha que exista um triângulo retângulo XYZ com catetos medindo y cm e (2y - 1) cm e hipotenusa de medida (y + 1) cm. Qual é a área desse triângulo?

$$A_{triângulo} = \frac{(\quad)\times(\quad)}{2} = \frac{(\quad)}{2} =$$

Complete agora usando o lado valendo l cm.

$$A_1 = \frac{(\quad)\times(\quad)}{2} = \frac{(\quad)}{2} =$$

$$A_5 = \frac{(\quad)\times(\quad)}{2} = \frac{(\quad)}{2} =$$



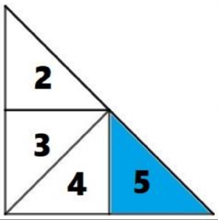


Figura 5.1: Ficha de atividades da primeira aula

Aula 2: Introdução:

Faça uma revisão rápida da aula anterior, relembrando o conceito de área do triângulo retângulo e a divisão do triângulo T_1 em quatro partes iguais.

Recapitule com os alunos a relação entre as áreas dos triângulos resultantes.

Trazer o material recolhido na aula anterior.

Desenvolvimento

Disponha da folha de atividades na página seguinte (**Figura 5.2**). Em seguida, proceda as etapas abaixo.

Parte 1

Explique aos alunos que podemos repetir o processo de divisão sucessiva em um dos triângulos resultantes, como no caso do triângulo T_2.

Distribua pedaços de cartolina para cada aluno e solicite que eles desenhem um triângulo T_2 nele. Explique que eles devem dividir esse triângulo em quatro partes iguais desenhando três linhas que vão do vértice do triângulo até a base, de forma a criar quatro triângulos menores dentro do triângulo T_2.

Peça aos alunos que recortem os triângulos resultantes, e escrevam o número correspondente a cada um deles (T_6, T_7, T_8 e T_9) em seus pedaços de cartolina.

Em seguida, solicite que os alunos utilizem a fórmula da área do triângulo retângulo para calcular a área de cada um dos triângulos resultantes do mesmo processo de divisão de triângulos feito no triângulo T_6. Lembrando que a fórmula da área do triângulo é base vezes altura dividido por dois.

Após os alunos realizarem os cálculos, peça que compartilhem seus resultados e comparem com o dos colegas. Discuta com a turma sobre os resultados e destaque que a área de cada triângulo é um quarto da área do triângulo anterior.

Estimule os alunos a observarem a relação entre as áreas dos triângulos sucessivos e reflitam sobre como cada triângulo novo é formado a partir da divisão do anterior.

Parte 2

Explique que uma Progressão Geométrica consiste em uma sequência de termos em que cada termo é obtido ao multiplicar o termo anterior por uma constante chamada de razão. Essa constante é representada por “r"e pode ser tanto positiva como negativa.

Cite um exemplo de Progressão Geométrica Crescente, onde a razão é um número entre maior que 1. Consideremos a sequência $(2,4,8,16,32)$. Nessa sequência, cada termo é obtido ao multiplicar o termo anterior por 2. Portanto, a razão dessa Progressão Geométrica é igual a 2.

Cite um exemplo de Progressão Geométrica Decrescente, onde a razão é um número entre 0 e 1. Por exemplo, na sequência $(100,\ 50,\ 25,\ 12{,}5,\ 6{,}25)$, cada termo é obtido ao multiplicar o termo anterior por 0.5. Assim, a razão dessa Progressão Geométrica é $0{,}5$.

É importante ressaltar que em uma Progressão Geométrica, a razão deve ser constante para todos os termos. Além disso, podemos calcular o "$n-$ésimo"termo de uma sequência geométrica através da fórmula $a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$, onde "$a_n$" representa o "$n-$ésimo" termo, "$a_1$" é o primeiro termo e "$n$"é a posição do termo que queremos encontrar.

Parte 3:

Comente que o caso da divisão de triângulos também é uma Progressão Geométrica e nesse caso, a razão é igual a $\frac{1}{4}$, pois cada triângulo resultante possui um quarto da área do triângulo anterior.

Imagine que queremos calcular a área do triângulo T_{17}, que ainda não dividimos. Podemos utilizar a fórmula da área do triângulo retângulo, considerando a base como a base do triângulo T_{13} e a altura como a altura do triângulo T_{13}.

$$T_{17} = \frac{\text{base}T_{13} \times \text{altura}T_{13}}{2} \times \frac{1}{4}.$$

Como a área do triângulo T_{13} é um quarto da área do triângulo T_9, podemos substituir os valores da base e altura do triângulo T_9 pela base e altura do triângulo T_9 multiplicados por $\frac{1}{4}$.

$$T_{17} = \frac{\text{base}T_9 \times \text{altura}T_9}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4},$$

$$T_{17} = \frac{\text{base}T_5 \times \text{altura}T_5}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4,}$$

$$T_{17} = \frac{\text{base}T_1 \times \text{altura}T_1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}.$$

Vamos denotar a área de cada triângulo selecionado por A_1,A_2,A_3,$\ldots$, em que A_1 é a área de T_5, A_2 é a área de T_9, A_3 é a área de T_{13}, e assim por diante.

Podemos observar que a sequência das áreas dos triângulos selecionados segue um padrão. A área de cada triângulo é dividida por 4 em relação ao triângulo anterior. Mais ainda, considerando a função

$$f(x) = \frac{x}{4}$$

onde obtemos

$$A_1 = \frac{l^2}{8},$$

$$A_2 = \frac{A_1}{4},$$

$$A_3 = \frac{A_2}{4},$$

$$\ldots.$$

Podemos generalizar isso para calcular a área do triângulo A_n, onde n representa o número do triângulo na sequência.

$$A_n = A_1 \cdot \frac{1}{4}^{n-1}.$$

Assim, podemos concluir que a divisão sucessiva dos triângulos forma uma Progressão Geométrica, onde a razão é igual a $\frac{1}{4}$.

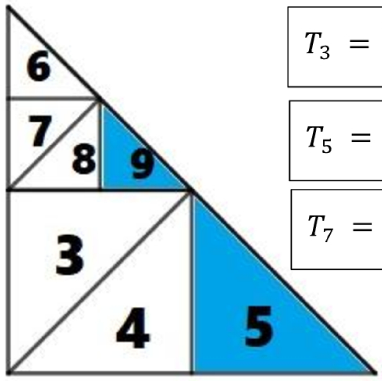
Estabelecida a fórmula da Progressão Geométrica peça para que os alunos calculem o quinto termo.

Escola Estadual Professor Inácio Castilho
Diretor: MARIA GORETH DOS SANTOS AGUIAR

Aluno(a):____

Ano: 1° Regular Professor(a): HERBERT REZENDE SIQUEIRA Data: ___/___/___

Complete com base na divisão feita com o triângulo de cartolina:



$T_3 = \frac{(\quad)\times(\quad)}{2} = \frac{(\quad)}{2} =$

$T_4 = \frac{(\quad)\times(\quad)}{2} = \frac{(\quad)}{2} =$

$T_5 = \frac{(\quad)\times(\quad)}{2} = \frac{(\quad)}{2} =$

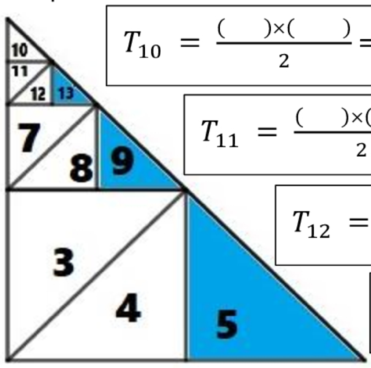
$T_6 = \frac{(\quad)\times(\quad)}{2} = \frac{(\quad)}{2} =$

$T_7 = \frac{(\quad)x(\quad)}{2} = \frac{(\quad)}{2} =$

$T_8 = \frac{(\quad)\times(\quad)}{2} = \frac{(\quad)}{2} =$

$T_9 = \frac{(\quad)\times(\quad)}{2} = \frac{(\quad)}{2} =$

Complete com base na divisão feita com o triângulo de cartolina:

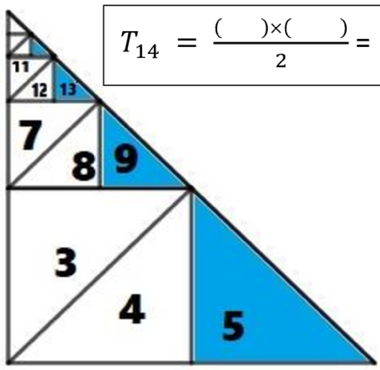


$T_{10} = \frac{(\quad)\times(\quad)}{2} =$

$T_{11} = \frac{(\quad)\times(\quad)}{2} =$

$T_{12} = \frac{(\quad)\times(\quad)}{2} =$

$T_{13} = \frac{(\quad)\times(\quad)}{2} =$



$T_{14} = \frac{(\quad)\times(\quad)}{2} =$

Uma progressão geométrica consiste em uma sequência de termos em que cada termo é obtido ao multiplicar o termo anterior por uma constante chamada de razão. Essa constante é representada por "r" e pode ser tanto positiva como negativa. Podemos calcular o "n-ésimo" termo de uma sequência geométrica através da fórmula $\boldsymbol{a_n = a_1 \times r^{(n-1)}}$, onde "$\boldsymbol{a_n}$" representa o "n-ésimo" termo, "$\boldsymbol{a_1}$" é o primeiro termo e "n" é a posição do termo que queremos encontrar.

Consideremos a sequência (2, 4, 8, 16, 32, __, __,...). Nessa sequência, cada termo é obtido ao multiplicar o termo anterior por 2. Portanto, a razão dessa progressão geométrica é igual a ___.

Progressão geométrica decrescente: onde a razão é um número entre 0 e 1. Por exemplo, na sequência (100, 50, 25, $\frac{25}{2}$, $\frac{25}{4}$,_____,____, ...), cada termo é obtido ao multiplicar o termo anterior por $\frac{1}{2}$. Assim, a razão dessa progressão geométrica é ______.

Complete: $T_{17} = T_{13} \times \left(\frac{1}{4}\right) = \_\_\_\_ \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) = \_\_\_ \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) = \_\_\_ \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right)$

$T_{17} = \frac{(\quad)\times(\quad)}{2} =$

Sequência: (____,______,_______,_______,_______)

Vamos denotar a área de cada triângulo selecionado por A_1, A_2, A_3,..., em que A_1 é a área de T_5, A_2 é a área de T_9, A_3 é a área de T_{13}, e assim por diante. Podemos observar que a sequência das áreas dos triângulos selecionados segue um padrão. A área de cada triângulo é dividida por 4 em relação 0ao triângulo anterior. Mais ainda, considerando a função $f(x)=\frac{x}{4}$ onde obtemos $A_1 = \frac{l^2}{8}$,$A_2 = \frac{A_1}{4}$,$A_3=\frac{A_2}{4}$ ... Podemos então generalizar: $A_n = A_1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{(n-1)}$

$A_5 = A_1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 =$

Figura 5.2: Ficha de atividades da segunda aula

Aula 3:

Introdução:

Faça uma revisão rápida das aulas anteriores, relembrando o conceito de divisão sucessiva do triângulo retângulo e a razão entre as áreas dos triângulos resultantes.

Explique aos alunos que essa divisão segue um padrão e que podemos representar a soma das áreas como uma Progressão Geométrica.

Desenvolvimento:

Disponha da folha de atividades na página seguinte (**Figura 5.3**). Em seguida, proceda as etapas abaixo.

Parte 1:

Apresente a fórmula da soma de uma Progressão Geométrica Finita:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - r^n)}{1 - r},$$

explicando cada elemento da fórmula.

Aplique a fórmula ao exemplo proposto, considerando o número de triângulos desejado.

Mostre passo a passo o cálculo da fórmula, explicando cada etapa.

Para calcular a soma das áreas dos triângulos selecionados, podemos usar a fórmula da soma dos termos de uma Progressão Geométrica Finita:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - r^n)}{1 - r},$$

em que S_n é a soma dos termos da Progressão Geométrica, a é o primeiro termo da Progressão Geométrica (no nosso caso, a área do primeiro triângulo selecionado, A_1), r é a razão da Progressão Geométrica (no nosso caso $\frac{1}{4}$), n é o número de termos da Progressão Geométrica (no nosso caso, o número de triângulos selecionados que queremos considerar). Aplicando essa fórmula, podemos obter a soma das áreas dos triângulos selecionados. Por exemplo, se quisermos calcular a soma das áreas dos n primeiros triângulos selecionados, teríamos:

$$S_n = A_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r},$$

$$S_n = \frac{l^2}{8} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}.$$

Assim, podemos usar essa fórmula para calcular a soma das áreas dos triângulos selecionados, considerando o número de termos desejado.

Discuta com os alunos o resultado final e destaque que, quando n tende ao infinito, a fórmula se simplifica.

Para resolver esse limite, é importante entender a sequência que está sendo considerada: $\left(\frac{1}{4}\right)^n$. Isso significa que estamos elevando $\frac{1}{4}$ à potência n, onde n é um número natural.

Parte 2:

Vamos analisar alguns valores dessa sequência:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{4},$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16},$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64},$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}.$$

Podemos notar que à medida que n aumenta, o resultado da potência vai diminuindo. Isso porque estamos elevando um número menor que 1 à potência n. Portanto, à medida que n tende ao infinito, a expressão $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ tende a zero.

Podemos compreender isso de forma mais clara ao analisar o valor da sequência para valores grandes de n, em que à direita apresentamos a simbologia representada na tela de uma calculadora cienfítica:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{10} = \frac{1}{1048576},$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)^{100} = \frac{1}{1.606938 \times 10^{60}},$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)^{1000} = \frac{1}{1.071509 \times 10^{301}},$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)^{10000} \approx 2.5225028 \times 10^{-6026},$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{10000} \approx 0.$$

Portanto, podemos concluir que o limite infinito dessa sequência é zero, ou seja:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n} = 0.$$

Parte 3 :

Quando n tende ao infinito, obtemos a soma S das áreas de todos os triângulos selecionados na construção. Observe que, se n tende ao infinito, então $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ tende a zero, pois $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$. Portanto,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{l^2}{8}\cdot\frac{1-0}{1-\frac{1}{4}} = \frac{l^2}{6}.$$

Estimule os alunos a perceberem que a soma das áreas dos triângulos resultantes será sempre menor do que a área total do triângulo inicial.

Parte 4 :

Realize uma atividade em que os alunos devem calcular a soma das áreas de uma divisão sucessiva com um número grande de triângulos. Corrija as atividades em sala de aula, tirando dúvidas dos alunos e enfatizando o uso da fórmula da soma de uma Progressão Geométrica.

Escola Estadual Professor Inácio Castilho
Diretor: MARIA GORETH DOS SANTOS AGUIAR

Aluno(a):____

Ano: 1° Regular Professor(a): HERBERT REZENDE SIQUEIRA Data: ___/___/___

Soma dos Termos de uma PG: Podemos utilizar a fórmula $a_n = a_1 \times q^{n-1}$ para encontrar o valor de um termo específico em uma progressão geométrica. Já para encontrar a soma dos termos, usamos a expressão

$$S_n = a_1 \times \frac{(1-q^n)}{(1-q)}$$

Determine a soma dos doze primeiros elementos da progressão geométrica (2, 8, 32, 128, ...).

a_1: 3; q (razão): 9 : 3 = _____; n= 12. Para determinar a soma dos doze primeiros elementos da progressão geométrica com a_1 = 3 e q = _____, podemos utilizar a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica:

$$S_n = a_1 \times \frac{(1-q^n)}{(1-q)}. \Rightarrow S_n = 3 \times \frac{(1-\_\_\_^{12})}{(1-\_\_\_)} \Rightarrow S_n = 3 \times \frac{(1-\_\_\_)}{(1-\_\_\_)} \Rightarrow S_n = 3 \times \frac{(\_\_\_\_)}{(-2)} => S_n = \_\_\_\_$$

Portanto, a soma dos doze primeiros elementos dessa progressão geométrica é igual a ________.

Complete considerando a divisão sucessiva de triângulos apresentada nas aulas anteriores

$a_1 = \frac{l^2}{8}$; q=(razão) = ¼; n=12

$$S_n = a_1 \times \frac{(1-q^n)}{(1-q)} \Rightarrow S_n = \frac{l^2}{8} \times \frac{(1-\_\_\_^{12})}{(1-\_\_\_\_)} \Rightarrow S_n = \frac{l^2}{8} \times \frac{(1-\_\_\_\_)}{(1-\_\_\_\_)} \Rightarrow S_n = \frac{l^2}{8} \times \frac{(\_\_\_\_)}{(\_\_\_\_)} \Rightarrow S_n = \_\_\_\_\_\_$$

Complete considerando a divisão sucessiva de triângulos apresentada nas aulas anteriores

$A_1 = \frac{l^2}{8}$; q=(razão) = ¼; n=n

$$S_n = a_1 \times \frac{(1-q^n)}{(1-q)} \Rightarrow S_n = \frac{l^2}{8} \times \frac{\left(1-\frac{1}{4}^n\right)}{(1-\_\_\_\_)} \Rightarrow S_n = \frac{l^2}{8} \times \frac{(1-\_\_\_\_)}{(\_\_\_\_)} \Rightarrow S_n = \frac{l^2}{8} \times \frac{\left(1-\frac{1}{4}^n\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)} \Rightarrow S_n = l^2 \times \frac{\left(1-\frac{1}{4}^n\right)}{6}$$

Complete:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{4}; \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{\_\_\_\_\_}; \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{\_\_\_\_\_}; \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{\_\_\_\_\_}$$

Podemos notar que à medida que n aumenta, o resultado da potência vai diminuindo. Isso porque estamos elevando um número menor que 1 à potência n. Portanto, à medida que n tende ao infinito, a expressão $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ tende a zero.

Podemos compreender isso de forma mais clara ao analisar o valor da sequência para valores grandes de n:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{10} = \frac{1}{\_\_\_\_\_}; \left(\frac{1}{4}\right)^{100} = \frac{1}{1.606938e}; \left(\frac{1}{4}\right)^{1000} = \frac{1}{1.071509e}; \left(\frac{1}{4}\right)^{10000} \approx 0$$

Portanto, podemos concluir que o limite infinito dessa sequência é zero, ou seja:

limite infinito de $\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

Sabendo que limite infinito de $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ = 0 podemos subistitur o n de $S_n = l^2 \times \frac{(1--\left(\frac{1}{4}\right)^n)}{6}$, e assim ficamos com:

$$S_n = l^2 \times \frac{(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n)}{6} \Rightarrow S_\infty = l^2 \times \frac{(1-\left(\frac{1}{4}\right)^\infty)}{6} \Rightarrow S_\infty = l^2 \times \frac{(1-\_\_\_)}{6} \Rightarrow S_\infty = \frac{(\_\_\_)}{6}$$

Figura 5.3: Ficha de atividades da terceira aula

Aula 4:

Introdução:

Os Sistemas Dinâmicos Discretos são representados usando a composição de uma função, onde essa função é repetidamente aplicada a um ponto de partida para gerar uma sequência de pontos. Esse processo de aplicação repetida é chamado de iteração. Os pontos visitados ao longo das iterações formam as órbitas do sistema. Um ponto fixo é aquele que, quando iterado apenas uma vez a função, retorna a ele mesmo. Além disso, existem os pontos atratores, que atraem pontos próximos a eles durante as iterações, e os pontos repulsores, que afastam pontos próximos a eles. Esses aspectos são essenciais para a compreensão do comportamento e da estabilidade dos Sistemas Dinâmicos Discretos.

A atividade de caça-palavras proposta tem como objetivo estimular o conhecimento dos termos relacionados ao tema dos Sistemas Dinâmicos Discretos. Os participantes deverão encontrar palavras como "iteração", que representa uma repetição de um processo; "função", que indica uma relação entre um conjunto de entradas e um conjunto de saídas; e "órbita", que descreve um conjunto de pontos que um sistema percorre repetidamente em sua evolução. Além desses termos, outras palavras-chave relacionadas ao tema também podem ser incluídas na caça-palavras, de forma a aprofundar ainda mais o entendimento sobre os Sistemas Dinâmicos Discretos.

O caça-palavras 5.4 utilizado na folha de atividades foi elaborado pelo autor do presente trabalho utilizando como ferramenta o site [14].

E	A	V	E	K	S	A	E	F	S	A	T	I	B	R	Ó	O	L
T	F	A	N	P	D	I	E	T	E	D	N	T	R	E	E	O	N
P	N	C	V	A	B	N	O	S	Q	R	G	P	E	H	S	Ã	E
P	O	N	T	O	S	R	E	P	U	L	S	O	R	E	S	Ç	R
A	P	N	S	E	N	A	T	I	Ê	I	R	P	R	I	A	N	L
M	B	H	T	I	S	L	W	N	N	F	A	L	H	O	A	U	E
C	T	A	F	O	O	D	G	E	C	G	L	Y	N	S	L	F	B
A	T	U	C	U	F	N	M	A	I	O	N	I	E	R	T	T	E
V	K	I	O	E	I	I	N	C	A	S	E	E	O	E	E	E	S
E	S	O	H	Y	P	V	X	D	P	Y	I	T	C	M	G	V	I
L	U	G	K	L	U	T	A	O	Ã	Ç	A	R	E	T	I	B	N
O	P	O	N	T	O	S	A	T	R	A	T	O	R	E	S	T	O

Figura 5.4: Caça palavras

Desenvolvimento

Disponha da folha de atividades na página seguinte (**Figura 5.4**). Em seguida, proceda as etapas abaixo.

Parte 1

Introduzir a função $f(x) = \dfrac{x}{4}$ como exemplo de Sistema Dinâmico Discreto, explicando que ela representa uma regra que determina como o valor de x evolui a cada iteração.

Explicar o conceito de composição de funções, demonstrando como podemos aplicar a função $f(x)$ repetidamente para obter uma sequência de valores.

A função $f(x) = \dfrac{x}{4}$ pode ser introduzida como um exemplo de Sistema Dinâmico Discreto. Nesse contexto, um Sistema Dinâmico Discreto é composto por uma função que determina como o valor de uma variável evolui ao longo do tempo, através de iterações.

No caso da função $f(x) = \dfrac{x}{4}$, ela representa uma regra que determina como o valor de x evolui a cada iteração. Por exemplo, se começarmos com um valor de $x = 8$, podemos aplicar a função $f(x)$ para calcular o próximo valor de x. Assim, temos: $f(8) = \frac{8}{4} = 2$.

O próximo valor de x será igual a 2. Podemos então aplicar novamente a função $f(x)$ nesse novo valor de x, obtendo: $f(2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

E assim por diante. Podemos repetir esse processo para obter uma sequência de valores ao longo do tempo.

Esse processo de aplicar repetidamente uma função para obter uma sequência de valores é conhecido como composição de funções. No exemplo dado, a composição de funções consiste em repetir a aplicação da função $f(x)$ várias vezes, utilizando o valor obtido em uma iteração como entrada para a próxima iteração.

Dessa forma, podemos descrever a dinâmica do sistema representado pela função $f(x) = \frac{x}{4}$ como a composição de f consigo mesma várias vezes, gerando uma sequência de valores ao longo do tempo.

Parte 2

Explique aos alunos que eles irão realizar um experimento para explorar as iterações da função linear $f(x) = \frac{x}{4}$. Esta função é conhecida como uma função de taxa de crescimento constante, onde qualquer número multiplicado por $\frac{1}{4}$ será reduzido a $\frac{1}{4}$ do seu valor original.

Oriente escolher um valor inicial para x, que pode ser qualquer número inteiro ou decimal.

Peça aos alunos que apliquem a função $f(x) = \frac{x}{4}$ ao valor inicial selecionado e registrem o resultado.

Agora, peça aos grupos para realizar a segunda iteração, aplicando novamente a função $f(x) = \frac{x}{4}$ ao resultado da primeira iteração.

Repita o processo por mais 3 iterações, sempre tomando o resultado anterior e aplicando a função.

Após a conclusão das 5 iterações, incentive os alunos a observarem os padrões e variações nas sequências geradas.

Faça perguntas orientadoras para fomentar a discussão, como: Os valores estão aumentando ou diminuindo a cada iteração? Existe uma tendência na sequência gerada? São observados padrões na relação entre os valores iniciais e os resultados das iterações?

Para encerrar a atividade, desafie a realizar outras iterações com diferentes valores iniciais ou até explorar o que acontece quando valores negativos são utilizados.

Incentive os alunos a refletirem sobre como os padrões e variações observados nas iterações podem ser aplicados em situações do cotidiano.

Parte 3

Solicitar que os alunos descrevam a órbita da função após as 5 iterações realizadas na atividade anterior, indicando se os valores convergem (se aproximam) para um número específico, oscilam entre diferentes valores ou divergem para o infinito, isto é, fica cada vez maior.

Realizar uma sexta iteração para completar a descrição da órbita. Nessa etapa, é importante que os alunos prestem atenção aos padrões que estão se formando e identifiquem se há uma tendência ou comportamento específico.

Parte 4

Explorou a semelhança entre as iterações da função e uma Progressão Geométrica, ou seja, observar que ambas envolvem a repetição de uma regra para gerar uma sequência. Tanto a função, quanto a Progressão Geométrica são formas de representar uma sequência de números que segue um padrão específico.

Vamos comparar a iteração da função $f(x) = \frac{x}{4}$ com uma Progressão Geométrica. Para isso, vamos começar com um valor inicial de x, por exemplo, $x = 4096$.

Iniciando com o valor $x = 4096$ na função $f(x) = \frac{x}{4}$, temos:

$$f(4096) = \frac{4096}{4} = 1024.$$

Aplicando novamente a função a esse resultado, temos:

$$f(1024) = \frac{1024}{4} = 256.$$

Continuando esse processo, temos:

$$f(256) = \frac{256}{4} = 64.$$

E assim por diante.

Podemos observar que cada iteração da função gera um novo valor, e a sequência gerada seria:

$$4096, 1024, 256, 64, \ldots$$

Agora, vamos comparar com uma Progressão Geométrica com a mesma razão. Suponha que a razão da Progressão Geométrica seja $\frac{1}{4}$.

A Progressão Geométrica correspondente seria:

$$4096, 1024, 256, 64, \ldots$$

Podemos ver que a sequência gerada pela iteração da função $f(x) = \frac{x}{4}$ é exatamente a mesma sequência gerada pela Progressão Geométrica com a mesma razão.

Portanto, mesmo que haja diferenças na natureza discreta das iterações e na natureza contínua das Progressões Geométricas, é possível estabelecer uma relação entre esses dois conceitos ao analisar o comportamento de uma função específica e compará-la com uma Progressão Geométrica correspondente.

Parte 5

Retome o conceito de Progressão Geométrica: Uma Progressão Geométrica (PG) é uma sequência numérica em que cada termo é obtido multiplicando-se o termo anterior por uma constante chamada de razão r.

A fórmula geral de uma PG é dada por:

$$a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)},$$

onde:

- a_n representa o valor do $n-$ésimo termo da sequência;
- a_1 representa o valor do primeiro termo da sequência;
- r representa a razão da progressão;
- n representa o número de iterações, ou seja, o termo que desejamos obter na sequência.

No caso da função $f(x) = \dfrac{x}{4}$, podemos utilizar a fórmula geral da PG para descrever a sequência gerada da seguinte forma:

$$a_n = 4096 \cdot \frac{1}{4}^{(n-1)}$$

Essa fórmula nos permite calcular qualquer termo da sequência gerada pela iteração da função $f(x) = \dfrac{x}{4}$.

Além disso, se quisermos calcular a soma dos termos da PG quando n aumenta infinitamente, podemos utilizar o fato de que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ (calculado na aula anterior):

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - r^n)}{1 - r},$$

$$S_{\lim\limits_{n\to\infty}} = a_1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}},$$

$$S_{\lim\limits_{n\to\infty}} = \frac{a_1}{1 - \frac{1}{4}}.$$

Substituindo a_1 por 4096

$$S_{\lim\limits_{n\to\infty}} = \frac{4096}{1 - \frac{1}{4}},$$

$$S_{\lim\limits_{n\to\infty}} = \frac{4096}{\frac{3}{4}},$$

$$S_{\lim\limits_{n\to\infty}} = 4096 \cdot \frac{4}{3},$$

$$S_{\lim\limits_{n\to\infty}} = 5461,33.$$

Considerações finais:

Faça uma revisão geral do conteúdo abordado ao longo das aulas.

Esclareça eventuais dúvidas dos alunos.

Reforce a importância do conceito de Progressões Geométricas e sua aplicação em problemas práticos.

Estimule os alunos a perceberem a relação entre a área dos triângulos retângulos sucessivos e a soma das áreas de um triângulo retângulo originalmente dado.

Avaliação:

A avaliação da oficina será feita de forma contínua, acompanhando o processo de desenvolvimento das atividades. Será analisado o material produzido pelos alunos ao longo do curso, levando em consideração a qualidade, a criatividade e a aplicação dos conceitos aprendidos. Além disso, será disponibilizado aos participantes um formulário de opinião, no qual eles poderão expressar suas percepções e sugestões sobre o andamento da oficina. Essas informações são extremamente importantes, pois fornecerão elementos para avaliar não só a efetividade das atividades propostas, mas também a satisfação e o nível de aprendizagem dos participantes. Dessa forma, será possível obter uma visão mais completa e abrangente do envolvimento dos alunos, identificando os pontos fortes e fracos do curso e buscando melhorias para aprimorar futuras edições da oficina.

Escola Estadual Professor Inácio Castilho
Diretor: MARIA GORETH DOS SANTOS AGUIAR

Aluno(a):____

Ano: 1° Regular Professor(a): HERBERT REZENDE SIQUEIRA Data: ___/___/___

Resolva o caça palavras com base no texto a seguir: (As palavras deste caça palavras estão escondidas na horizontal, vertical e diagonal, com palavras ao contrário).

E	A	V	E	K	S	A	E	F	S	A	T	I	B	R	Ó	O	L
T	F	A	N	P	D	I	E	T	E	D	N	T	R	E	E	O	N
P	N	C	V	A	B	N	O	S	Q	R	G	P	E	H	S	Ã	E
P	O	N	T	O	S	R	E	P	U	L	S	O	R	E	S	Ç	R
A	P	N	S	E	N	A	T	I	Ê	I	R	P	R	I	A	N	L
M	B	H	T	I	S	L	W	N	N	F	A	L	H	O	A	U	E
C	T	A	F	O	O	D	G	E	C	G	L	Y	N	S	L	F	B
A	T	U	C	U	F	N	M	A	I	O	N	I	E	R	T	T	E
V	K	I	O	E	I	I	N	C	A	S	E	E	O	E	E	E	S
E	S	O	H	Y	P	V	X	D	P	Y	I	T	C	M	G	V	I
L	U	G	K	L	U	T	A	O	Ã	Ç	A	R	E	T	I	B	N
O	P	O	N	T	O	S	A	T	R	A	T	O	R	E	S	T	O

Os **sistemas dinâmicos discretos** são representados usando a composição de uma **função**, onde essa função é repetidamente aplicada a um ponto de partida para gerar uma **sequência** de pontos. Esse processo de aplicação repetida é chamado de **iteração**. Os pontos visitados ao longo das iterações formam as **órbitas** do sistema. Um **ponto fixo** é aquele que, quando iterado, retorna a ele mesmo. Além disso, existem os **pontos atratores**, que atraem pontos próximos a eles durante as iterações, e os **pontos repulsores**, que afastam pontos próximos a eles. Esses aspectos são essenciais para a compreensão do comportamento e da estabilidade dos sistemas dinâmicos discretos.

A iteração em matemática consiste em repetir uma função várias vezes. Para isso, utilizamos o símbolo de composição de funções, representado por "∘". Ao iterar uma função f sobre ela mesma, escrevemos $f \circ f \circ\circ \ldots \circ f$. Esse processo pode ser realizado infinitas vezes, resultando em f^n, onde n é o número de iterações. Dada a função $f(x) = \frac{x}{4}$ complete considerando o valor inicial igual a 8:

$x_0 = 8 \Rightarrow x_1 = f(x_0) = \frac{8}{4} = \_\_\_ \Rightarrow x_2 = f(x_1) = \frac{x_1}{4} = \_\_\_ \Rightarrow x_3 = f(x_2) = \frac{x_2}{4} = \_\_\_$

$\Rightarrow x_3 = f(x_2) = \frac{x_2}{4} = \_\_\_ \Rightarrow x_4 = f(x_3) = \frac{x_3}{4} = \_\_\_ \Rightarrow x_5 = f(x_4) = \frac{x_4}{4} = \_\_\_$

Agora faça o mesmo mas agora escolhendo um valor qualquer para x_0 este valor pode ser inteiro ou decimal.

$x_0 = \_\_\_ \Rightarrow x_1 = f(x_0) = \frac{x_0}{4} = \_\_\_ \Rightarrow x_2 = f(x_1) = \frac{x_1}{4} = \_\_\_ \Rightarrow x_3 = f(x_2) = \frac{x_2}{4} = \_\_\_$

$\Rightarrow x_3 = f(x_2) = \frac{x_2}{4} = \_\_\_ \Rightarrow x_4 = f(x_3) = \frac{x_3}{4} = \_\_\_ \Rightarrow x_5 = f(x_4) = \frac{x_4}{4} = \_\_\_$

Dado $x_0 \in X$, definimos a órbita de x_0 sobre a função f como uma sequência infinita de pontos x_0, x_1, x_2, …, x_n, … onde x_0 é o ponto de partida da órbita, também conhecido como condição inicial.

$O^+ = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), f^4(x), f^5(x), \ldots\} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} = \{\_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_\}$

____

Agora faça o mesmo que anteriormente para $x_0 = 4096$:

$x_0 = \_\_\_ \Rightarrow x_1 = f(x_0) = \frac{x_0}{4} = \_\_\_ \Rightarrow x_2 = f(x_1) = \frac{x_1}{4} = \_\_\_ \Rightarrow x_3 = f(x_2) = \frac{x_2}{4} = \_\_\_$

$\Rightarrow x_3 = f(x_2) = \frac{x_2}{4} = \_\_\_ \Rightarrow x_4 = f(x_3) = \frac{x_3}{4} = \_\_\_ \Rightarrow x_5 = f(x_4) = \frac{x_4}{4} = \_\_\_$

$O^+ = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), f^4(x), f^5(x), \ldots\} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} = \{\_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_\}$

Resolva as divisões abaixo para encontrar a razão da progressão geométrica equivalente a iteração da função

$$\frac{x_1}{x_0} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3} = \_\_\_ = r$$

Formula geral da progessão geométrica:

$a_n = a_1 \times r^{(n-1)} \Rightarrow a_n = 4096 \times \_\_\_^{n-1}$

Soma dos termos da progressão geométrica:

Lembre-se que Portanto, podemos concluir que o limite infinito dessa sequência é zero, ou seja:

limite infinito de $\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

$S_n = a_1 \times \frac{(1-q^n)}{(1-q)} \Rightarrow S_\infty = 4096 \times \frac{(1-\_\_\_^\infty)}{(1-\_\_\_)} \Rightarrow S_n = 4096 \times \frac{(1-\_\_\_)}{(\_\_\_)} \Rightarrow S_n = \frac{(\_\_\_)}{(\_\_\_)} \Rightarrow S_n = \_\_\_$

Figura 5.5: Ficha de atividades da quarta aula

5.2 Questionário de opinião

A oficina em questão trata sobre a Progressão Geométrica com triângulos e Sistemas Dinâmicos , e tem como objetivo fornecer uma abordagem clara e concisa sobre a relação entre esses conceitos. Com o intuito de avaliar a eficácia e a compreensão dos alunos em relação aos temas abordados, será aplicado um questionário composto por treze perguntas.

Espera-se que as respostas dos alunos reflitam suas percepções sobre a oficina e seus conteúdos, trazendo uma análise pessoal sobre o nível de interesse despertado pelo tema, a compreensão dos conceitos abordados, a aplicação prática das fórmulas e a relação percebida entre os diferentes elementos discutidos durante as aulas.

As respostas dos alunos serão cruciais para avaliar a efetividade da oficina em transmitir os conhecimentos propostos e identificar possíveis dificuldades encontradas pelos participantes. Essa análise possibilitará a identificação de lacunas na compreensão dos alunos e auxiliará na definição de estratégias para o aprimoramento dessa prática pedagógica.

Além disso, as respostas dos alunos também podem fornecer um panorama geral sobre a percepção da relação entre Sistemas Dinâmicos , Progressões Geométricas e a área dos triângulos retângulos. Dessa forma, a análise e interpretação dessas respostas permitirão verificar se os objetivos propostos foram alcançados pela oficina em relação ao entendimento desses conceitos e suas aplicações.

Ao combinar as respostas dos alunos com outras fontes de dados, como observações em sala de aula e o desempenho nas atividades propostas, a dissertação de mestrado poderá explorar em detalhes o impacto da oficina no aprendizado dos participantes, identificar pontos fortes e fracos e fornecer recomendações para futuras implementações e melhorias no ensino desses conteúdos.

1) O que você achou da oficina sobre a Progressão Geométrica com triângulos e Sistemas Dinâmicos ?

a) Muito interessante e esclarecedora.

b) Um pouco confusa, tive dificuldade em acompanhar.

c) Não despertou meu interesse, achei entediante.

d) Não entendi o objetivo da oficina.

e) Achei a abordagem superficial, poderia ter explorado mais os conceitos.

2) Você acredita que compreendeu bem o conceito de Sistemas Dinâmicos aplicados a sequências?

a) Sim, compreendi completamente.

b) Ainda tenho algumas dúvidas, mas entendi a ideia geral.

c) Tive muita dificuldade em entender os Sistemas Dinâmicos .

d) Não entendi como os Sistemas Dinâmicos são aplicados nas sequências.

e) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina.

3) Como você percebe a relação entre Sistemas Dinâmicos e Progressões Geométricas?

a) Percebo uma relação direta e clara entre os dois conceitos.

b) Tenho uma noção geral da relação, mas não sei explicar com detalhes.

c) Acredito que não há relação entre Sistemas Dinâmicos e Progressões Geométricas.

d) Não percebi nenhuma relação durante a oficina.

e) Não entendi a relação entre os dois conceitos.

4) Você conseguiu utilizar a fórmula da área de um triângulo equilátero como exemplo concreto da relação entre Sistemas Dinâmicos e Progressões Geométricas?

a) Sim, foi um ótimo exemplo para entender a relação entre os conceitos.

b) Tive dificuldade em aplicar a fórmula nas atividades propostas.

c) Não entendi como a fórmula está relacionada com Sistemas Dinâmicos e Progressões Geométricas.

d) Não percebi a utilização da fórmula durante a oficina.

e) Não prestei atenção nesse aspecto.

5) O que você achou das atividades propostas durante a oficina?

a) Muito desafiadoras e estimulantes.

b) Alguns exercícios foram confusos, mas no geral gostei.

c) Não gostei das atividades, achei muito simples.

d) Não entendi como as atividades se relacionam com o conteúdo.

e) Não prestei atenção nas atividades.

6) Você se sentiu seguro ao calcular a área dos triângulos retângulos?

a) Sim, me senti confiante nos cálculos.

b) Tive algumas dúvidas, mas consegui calcular corretamente.

c) Tive muita dificuldade em calcular as áreas.

d) Não entendi como realizar os cálculos.

e) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina.

7) Como você enxerga a importância do estudo da área dos triângulos retângulos para resolver problemas geométricos e matemáticos em geral?

a) Percebo que o estudo da área dos triângulos retângulos é fundamental para resolver diversos problemas matemáticos.

b) Acredito que o estudo da área dos triângulos retângulos não seja tão relevante para problemas matemáticos.

c) Não compreendi a importância do estudo da área dos triângulos retângulos.

d) Não percebi a relação entre a área dos triângulos retângulos e a resolução de problemas matemáticos.

e) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina.

8) Você se sentiu estimulado a observar a relação entre as medidas dos lados dos triângulos e suas áreas?

a) Sim, fiquei muito interessado em explorar essa relação.

b) Na verdade, não me interessei muito por essa relação.

c) Não percebi a relação entre as medidas dos lados e as áreas dos triângulos.

d) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina.

9) Você teve dificuldade em entender a razão entre as áreas dos triângulos sucessivos de uma divisão?

a) Não tive nenhuma dificuldade, compreendi facilmente.

b) Tive um pouco de dificuldade, mas consegui entender no final.

c) Tive muita dificuldade em entender essa razão.

d) Não entendi como calcular essa razão durante a oficina.

e) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina.

10) Você achou válida a utilização da fórmula da soma de uma Progressão Geométrica Finita durante a exploração do exemplo proposto?

a) Sim, achei muito válido e esclarecedor.

b) Tive dificuldade em entender como aplicar essa fórmula.

c) Não entendi como a fórmula está relacionada com o exemplo dado.

d) Não percebi a utilização da fórmula durante a oficina.

e) Não prestei atenção nesse aspecto.

11) Você se sentiu confortável ao aplicar a fórmula da soma de uma Progressão Geométrica Finita para calcular as somas das áreas dos triângulos gerados por uma divisão sucessiva?

a) Sim, me senti confiante em aplicar a fórmula corretamente.

b) Tive dificuldade em calcular corretamente as somas das áreas.

c) Não entendi como realizar os cálculos com a fórmula da soma de uma Progressão Geométrica.

d) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina.

12) Você conseguiu perceber a relação entre a área dos triângulos retângulos sucessivos e a soma das áreas de um triângulo retângulo originalmente dado?

a) Sim, percebi claramente essa relação.

b) Tive dificuldade em entender essa relação durante a oficina.

c) Não percebi nenhuma relação entre as áreas dos triângulos retângulos.

d) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina.

13) Você acredita que a oficina contribuiu para o seu aprendizado sobre a soma das áreas de triângulos e sua relação com Sistemas Dinâmicos e Progressões Geométricas?

a) Sim, contribuiu muito para o meu aprendizado.

b) Contribuiu um pouco, mas ainda tenho algumas dúvidas.

c) Não senti que a oficina contribuiu para o meu aprendizado.

d) Não percebi a relação entre os conceitos durante a oficina.

e) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina.

Escola Estadual Professor Inácio Castilho
Diretor: MARIA GORETH DOS SANTOS AGUIAR
Aluno(a):____
Ano: 1° Regular Professor(a): HERBERT REZENDE SIQUEIRA Data: ___/___/___

Questionário de opinião: exemplo de uma Progressão Geométrica com triângulos e sistemas dinâmicos

1) O que você achou da oficina sobre a Progressão Geométrica com triângulos e sistemas dinâmicos?
a) Muito interessante e esclarecedora.
b) Um pouco confusa, tive dificuldade em acompanhar.
c) Não despertou meu interesse, achei entediante.
d) Não entendi o objetivo da oficina.
e) Achei a abordagem superficial, poderia ter explorado mais os conceitos.

2) Você acredita que compreendeu bem o conceito de sistemas dinâmicos aplicados a sequências?
a) Sim, compreendi completamente.
b) Ainda tenho algumas dúvidas, mas entendi a ideia geral.
c) Tive muita dificuldade em entender os sistemas dinâmicos.
d) Não entendi como os sistemas dinâmicos são aplicados nas sequências.
e) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina.

3) Como você percebe a relação entre sistemas dinâmicos e progressões geométricas?
a) Percebo uma relação direta e clara entre os dois conceitos.
b) Tenho uma noção geral da relação, mas não sei explicar com detalhes.
c) Acredito que não há relação entre sistemas dinâmicos e progressões geométricas.
d) Não percebi nenhuma relação durante a oficina.
e) Não entendi a relação entre os dois conceitos.

4) Você conseguiu utilizar a fórmula da área de um triângulo equilátero como exemplo concreto da relação entre sistemas dinâmicos e progressões geométricas?
a) Sim, foi um ótimo exemplo para entender a relação entre os conceitos.
b) Tive dificuldade em aplicar a fórmula nas atividades propostas.
c) Não entendi como a fórmula está relacionada com sistemas dinâmicos e progressões geométricas.
d) Não percebi a utilização da fórmula durante a oficina.
e) Não prestei atenção nesse aspecto.

5) O que você achou das atividades propostas durante a oficina?
a) Muito desafiadoras e estimulantes.
b) Alguns exercícios foram confusos, mas no geral gostei.
c) Não gostei das atividades, achei muito simples.
d) Não entendi como as atividades se relacionam com o conteúdo.
e) Não prestei atenção nas atividades.

6) Você se sentiu seguro ao calcular a área dos triângulos retângulos?
a) Sim, me senti confiante nos cálculos.
b) Tive algumas dúvidas, mas consegui calcular corretamente.
c) Tive muita dificuldade em calcular as áreas.
d) Não entendi como realizar os cálculos.
e) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina.

7) Como você enxerga a importância do estudo da área dos triângulos retângulos para resolver problemas geométricos e matemáticos em geral?
a) Percebo que o estudo da área dos triângulos retângulos é fundamental para resolver diversos problemas matemáticos.
b) Acredito que o estudo da área dos triângulos retângulos não seja tão relevante para problemas matemáticos.
c) Não compreendi a importância do estudo da área dos triângulos retângulos.
d) Não percebi a relação entre a área dos triângulos retângulos e a resolução de problemas matemáticos.
e) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina.

Figura 5.6: Primeira página do questionário de avaliação

8) Você se sentiu estimulado a observar a relação entre as medidas dos lados dos triângulos e suas áreas?
a) Sim, fiquei muito interessado em explorar essa relação.
b) Na verdade, não me interessei muito por essa relação.
c) Não percebi a relação entre as medidas dos lados e as áreas dos triângulos.
d) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina.

9) Você teve dificuldade em entender a razão entre as áreas dos triângulos sucessivos de uma divisão?
a) Não tive nenhuma dificuldade, compreendi facilmente.
b) Tive um pouco de dificuldade, mas consegui entender no final.
c) Tive muita dificuldade em entender essa razão.
d) Não entendi como calcular essa razão durante a oficina.
e) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina.

10) Você achou válida a utilização da fórmula da soma de uma série geométrica finita durante a exploração do exemplo proposto?
a) Sim, achei muito válido e esclarecedor.
b) Tive dificuldade em entender como aplicar essa fórmula.
c) Não entendi como a fórmula está relacionada com o exemplo dado.
d) Não percebi a utilização da fórmula durante a oficina.
e) Não prestei atenção nesse aspecto.

11) Você se sentiu confortável ao aplicar a fórmula da soma de uma série geométrica finita para calcular as somas das áreas dos triângulos gerados por uma divisão sucessiva?
a) Sim, me senti confiante em aplicar a fórmula corretamente.
b) Tive dificuldade em calcular corretamente as somas das áreas.
c) Não entendi como realizar os cálculos com a fórmula da soma de uma série geométrica.
d) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina.

12) Você conseguiu perceber a relação entre a área dos triângulos retângulos sucessivos e a soma das áreas de um triângulo retângulo originalmente dado?

a) Sim, percebi claramente essa relação.
b) Tive dificuldade em entender essa relação durante a oficina.
c) Não percebi nenhuma relação entre as áreas dos triângulos retângulos.
d) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina.

13) Você acredita que a oficina contribuiu para o seu aprendizado sobre a soma das áreas de triângulos e sua relação com sistemas dinâmicos e progressões geométricas?

a) Sim, contribuiu muito para o meu aprendizado.
b) Contribuiu um pouco, mas ainda tenho algumas dúvidas.
c) Não senti que a oficina contribuiu para o meu aprendizado.
d) Não percebi a relação entre os conceitos durante a oficina.
e) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina.

Figura 5.7: Segunda página do questionário de avaliação

CAPÍTULO 6

Relato de aplicação em sala de aula

O presente capítulo tem como objetivo relatar a aplicação de uma sequência didática focada na abordagem de Sistemas Dinâmicos Discretos aplicados em Progressões Geométricas no Ensino Médio. Essa sequência foi planejada levando em consideração a realidade das turmas nas quais seria aplicada, buscando promover uma experiência diferenciada e enriquecedora para os alunos. A escolha de seis exemplos de aplicações permitiu selecionar um caso específico para a criação da oficina, a qual inicialmente estava planejada para três aulas de 50 minutos cada. No entanto, durante o desenvolvimento das atividades, percebeu-se a necessidade de estender o planejamento para quatro aulas, o que se mostrou de grande valia para a compreensão e assimilação dos conceitos pelos alunos.

Essa divisão do tempo evidencia a importância de um planejamento adequado e organização das atividades, permitindo otimizar o aprendizado dos alunos. Além disso, o relato detalhado dessa sequência didática busca destacar a importância de aproximar o ensino da matemática de situações concretas e aplicadas, tornando-o mais dinâmico e atrativo para os estudantes do Ensino Médio.

Pretende-se com essa proposta pedagógica, com a seleção de exemplo baseada na realidade das turmas e com a extensão do planejamento para quatro aulas, contribuir para a formação dos estudantes, desenvolvendo habilidades como o pensamento lógico, a capacidade de análise e a resolução de problemas. O relato da aplicação dessa sequência didática pode servir como inspiração e orientação para professores interessados em desenvolver abordagens pedagógicas inovadoras e eficazes, que estimulem a participação ativa dos alunos em seu próprio processo de aprendizagem.

6.1 Relato do desenvolvimento da sequência didática

Desenvolvimento da atividade

Aula 1:

Introdução:

A atividade de apresentar e discutir o conceito do triângulo retângulo e sua fórmula da área com os alunos foi muito proveitosa. Eles compreenderam facilmente as características desse tipo de triângulo e sua importância para a solução de problemas geométricos e matemáticos. Os alunos também entenderam que a fórmula da área do triângulo retângulo é obtida multiplicando a base pela altura e dividindo por dois, e que essa fórmula é uma generalização do cálculo da área de qualquer triângulo. Utilizamos exemplos práticos para demonstrar a aplicação da fórmula e discutimos situações da vida real em que ela poderia ser útil. Isso despertou o interesse dos alunos na Geometria e na importância da matemática na resolução de problemas práticos.

Desenvolvimento

Parte 1

A atividade com o triângulo retângulo foi realizada de forma positiva, despertando o interesse dos alunos. Introduzi o conceito de divisão do triângulo em quatro partes iguais, o que motivou a participação de todos na resolução dos cálculos exigidos. Apresentei o triângulo retângulo T_1 com suas medidas de base e altura de forma clara. Utilizei a lousa para criar um desenho representando a divisão em quatro partes iguais, denominadas triângulos T_2, T_3, T_4 e T_5, facilitando a compreensão dos alunos.

Solicitei aos alunos que calculassem a área do triângulo T_1 usando a fórmula da área do triângulo retângulo. A maioria realizou os cálculos corretamente, o que demonstra uma compreensão do conceito de área aplicado a triângulos retângulos.

Em seguida, os desafiei a calcular a área de outros triângulos resultantes (T_2, T_3, T_4 e T_5). Destaquei a curiosidade de todas as áreas serem iguais, independentemente da divisão feita. Essa observação incentivou os alunos a refletirem sobre a relação entre as medidas dos lados dos triângulos e suas áreas.

Para consolidar ainda mais o aprendizado, propusemos uma atividade prática, na qual os alunos desenharam e recortaram um triângulo retângulo em uma cartolina. Utilizando uma reta, eles dividiram o triângulo em quatro partes iguais, formando os triângulos T_2, T_3, T_4 e T_5. Essa abordagem concreta permitiu uma visualização mais tangível da divisão do triângulo retângulo e reforçou a compreensão alcançada anteriormente.

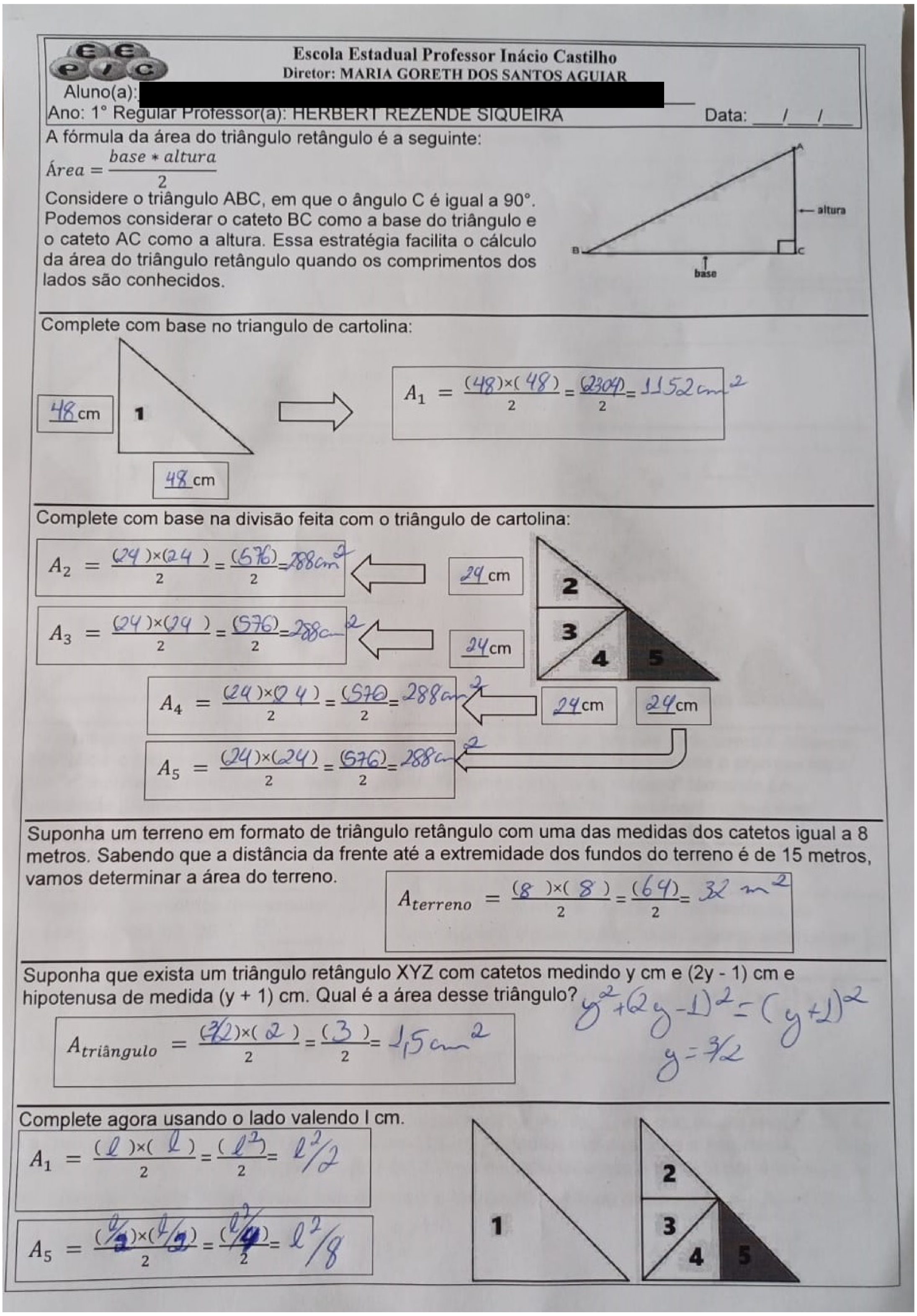
No geral, a aplicação desta atividade foi muito satisfatória, pois os alunos demonstraram interesse, participação ativa e compreensão sobre a divisão do triângulo retângulo em partes iguais. A utilização de elementos visuais, cálculos e a atividade prática contribuíram para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da percepção geométrica e da compreensão dos conceitos abordados.

Figura 6.1: Primeira foto de registro de aplicação da oficina

Parte 2

A atividade de medir as bases e alturas dos triângulos e calcular suas áreas proporcionou aos alunos uma vivência concreta do conceito de área de um triângulo e a relação entre as medidas dos lados e a área. A divisão da cartolina em partes permitiu que eles fizessem observações e conjecturas sobre essa relação. Durante a discussão dos resultados, enfatizou-se que todas as áreas obtidas eram iguais, o que despertou a curiosidade dos alunos. O envolvimento dos alunos e a abordagem lúdica e experimental da atividade contribuíram para tornar o conteúdo mais significativo e motivador para eles.

Essa atividade permitiu aos alunos compreender o conceito de área de um triângulo e desenvolver habilidades de medição, cálculo, interpretação e argumentação matemática. Eles puderam constatar que a área de um triângulo é encontrada pela multiplicação da base pela altura e dividindo por dois. Essa experiência enfatizou a importância de atividades práticas e contextualizadas para promover uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos. Os alunos demonstraram maior confiança em Geometria e fórmulas matemáticas, bem como habilidades de investigação e pensamento crítico.



Escola Estadual Professor Inácio Castilho
Diretor: MARIA GORETH DOS SANTOS AGUIAR
Aluno(a): [redacted]
Ano: 1° Regular Professor(a): HERBERT REZENDE SIQUEIRA Data: ___/___/___

A fórmula da área do triângulo retângulo é a seguinte:

$$Área = \frac{base * altura}{2}$$

Considere o triângulo ABC, em que o ângulo C é igual a 90°. Podemos considerar o cateto BC como a base do triângulo e o cateto AC como a altura. Essa estratégia facilita o cálculo da área do triângulo retângulo quando os comprimentos dos lados são conhecidos.

Complete com base no triangulo de cartolina:

48 cm
1
48 cm

$$A_1 = \frac{(48)\times(48)}{2} = \frac{(2304)}{2} = 1152\,cm^2$$

Complete com base na divisão feita com o triângulo de cartolina:

$$A_2 = \frac{(24)\times(24)}{2} = \frac{(576)}{2} = 288\,cm^2$$

$$A_3 = \frac{(24)\times(24)}{2} = \frac{(576)}{2} = 288\,cm^2$$

$$A_4 = \frac{(24)\times(24)}{2} = \frac{(576)}{2} = 288\,cm^2$$

$$A_5 = \frac{(24)\times(24)}{2} = \frac{(576)}{2} = 288\,cm^2$$

24 cm
24 cm
24 cm
24 cm
2
3
4
5

Suponha um terreno em formato de triângulo retângulo com uma das medidas dos catetos igual a 8 metros. Sabendo que a distância da frente até a extremidade dos fundos do terreno é de 15 metros, vamos determinar a área do terreno.

$$A_{terreno} = \frac{(8)\times(8)}{2} = \frac{(64)}{2} = 32\,m^2$$

Suponha que exista um triângulo retângulo XYZ com catetos medindo y cm e (2y - 1) cm e hipotenusa de medida (y + 1) cm. Qual é a área desse triângulo?

$$y^2+(2y-1)^2=(y+1)^2$$
$$y=3/2$$

$$A_{triângulo} = \frac{(3/2)\times(2)}{2} = \frac{(3)}{2} = 1,5\,cm^2$$

Complete agora usando o lado valendo l cm.

$$A_1 = \frac{(\ell)\times(\ell)}{2} = \frac{(\ell^2)}{2} = \ell^2/2$$

$$A_5 = \frac{(\ell/2)\times(\ell/2)}{2} = \frac{(\ell^2/4)}{2} = \ell^2/8$$

1
2
3
4
5

Figura 6.2: Exemplo de atividade resolvida da primeira aula

Aula 2:

Introdução:

Como introdução revisamos o conceito de área do triângulo retângulo e exploramos a divisão do triângulo T_1 em quatro partes iguais. Utilizamos recortes de papel para construir os triângulos resultantes e os alunos foram incentivados a comparar suas áreas. Durante a revisão, reforçamos a fórmula da área do triângulo retângulo e suas componentes: base e altura. Relembramos que a base é o segmento de reta que une os pontos médios dos lados não adjacentes ao ângulo reto, enquanto a altura é a perpendicular traçada do vértice do ângulo reto até a base. A atividade teve como objetivo permitir que os alunos visualizassem e manipulassem os triângulos resultantes da divisão de T_1 em quatro partes iguais. Utilizamos recortes de papel para que pudessem construir os triângulos e estimulamos a identificação e comparação das áreas desses triângulos.

Ao final da atividade, os alunos compreenderam claramente a relação entre as áreas dos triângulos resultantes. Eles perceberam que, apesar das diferentes formas e configurações, todos os triângulos possuíam áreas iguais. Também exploramos a simetria presente na divisão do triângulo, destacando que cada par de triângulos opostos possuía a mesma área.

Desenvolvimento

Parte 1

A atividade consistiu em explorar a relação entre as áreas dos triângulos resultantes da divisão sucessiva de um triângulo. Os alunos foram envolvidos de forma ativa na construção e análise dos triângulos. Cada aluno desenhou um triângulo em pedaços de cartolina e o dividiu em quatro partes iguais. Os triângulos resultantes foram recortados e numerados. Em seguida, os alunos utilizaram a fórmula da área do triângulo retângulo para calcular a área de cada um deles, sendo enfatizada a base vezes a altura dividido por dois como fórmula da área.

Após os alunos realizarem os cálculos, eles compartilharam os resultados e compararam com os colegas. Promovi uma discussão em sala de aula sobre os resultados, destacando que a área de cada triângulo era um quarto da área do anterior. Para estimular a reflexão e o entendimento da relação entre as áreas dos triângulos sucessivos, incentivei-os a observarem como cada triângulo novo era formado a partir da divisão do anterior. Essa análise permitiu que os alunos compreendessem que a área de um triângulo era reduzida à medida que ele era dividido em partes menores.

A atividade foi muito positiva, pois os alunos se envolveram ativamente na construção e análise dos triângulos. Manifestaram interesse em compreender a relação entre as áreas dos triângulos sucessivos e participaram engajados nas discussões em sala de aula. Ao final, eles compreenderam o processo de divisão sucessiva dos triângulos e identificaram a relação de redução de um quarto da área a cada divisão. Isso demonstrou que a proposta foi efetiva no desenvolvimento da compreensão do tema.

Figura 6.3: Segunda foto de registro de aplicação da oficina

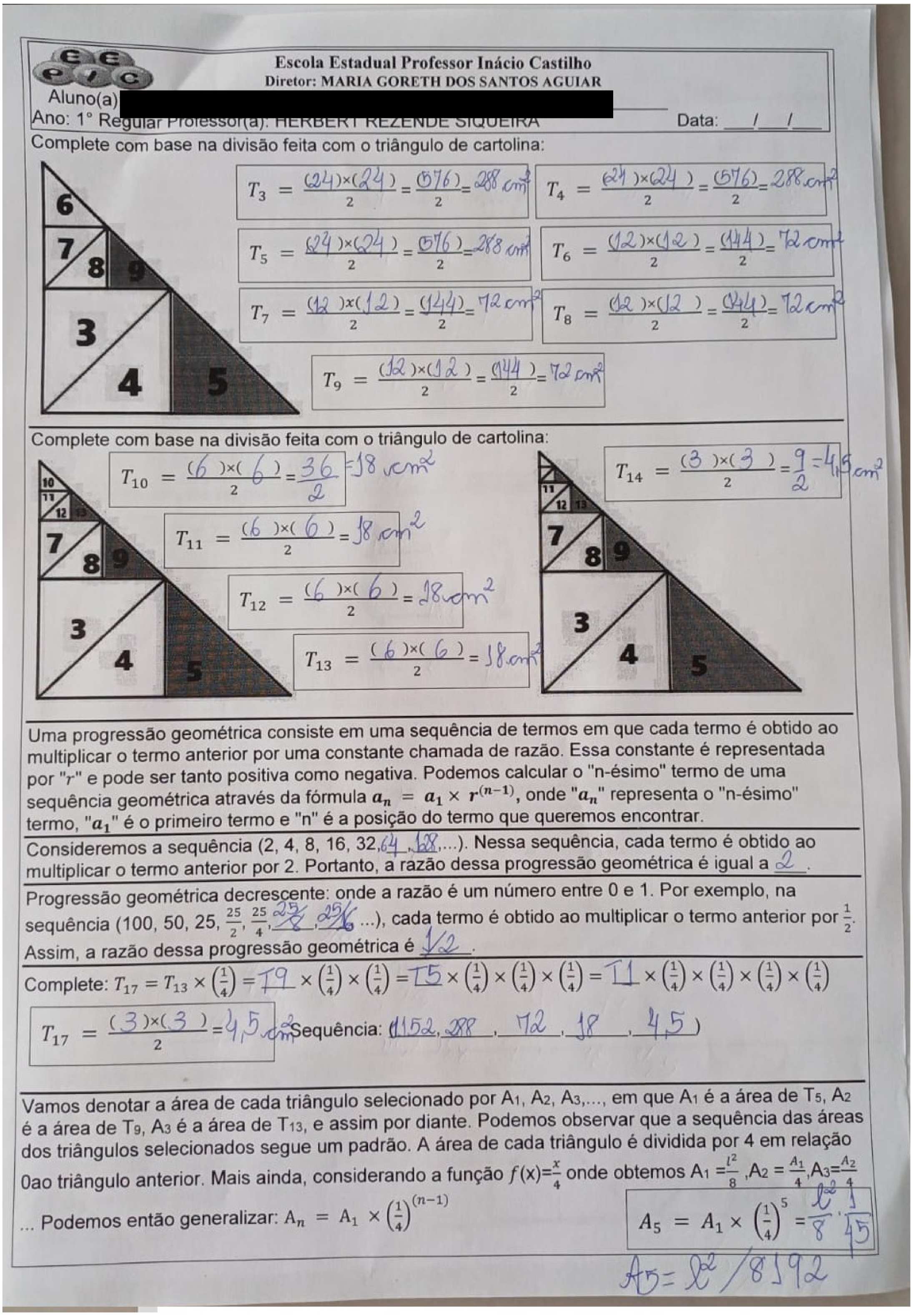
Parte 2:

A atividade proposta consistiu em explicar o conceito de Progressão Geométrica para os alunos, apresentando exemplos de sequências tanto crescentes quanto decrescentes. Foi destacado que a razão é uma constante que representa a multiplicação entre os termos da sequência.

Para ilustrar a Progressão Geométrica Crescente, foi considerada a sequência $(2,4,8,16,32)$, na qual cada termo é obtido ao multiplicar o termo anterior por 2. Com isso, os alunos puderam compreender que a razão dessa Progressão Geométrica é igual a 2.

Já para exemplificar a Progressão Geométrica Decrescente, foi apresentada a sequência $(100,50,25,12.5,6.25)$, em que cada termo é obtido ao multiplicar o termo anterior por 0.5. Os alunos puderam constatar que a razão dessa progressão é 0.5.

Durante a explicação, enfatizamos a importância da razão ser constante para todos os termos da sequência. Também ensinamos a fórmula para calcular o termo de posição n em uma Progressão Geométrica, utilizando o primeiro termo (a_1), a razão (r) e o número da posição do termo desejado (n). A aplicação desta atividade com os alunos resultou em uma compreensão clara e precisa do conceito de Progressão Geométrica. Os alunos conseguiram identificar a razão em diferentes exemplos de sequências, independentemente de serem crescentes ou decrescentes. A fórmula para encontrar o enésimo termo também foi facilmente assimilada pelos alunos, atingindo os objetivos de ensinar a Progressão Geométrica e suas propriedades de forma positiva e eficaz.



Escola Estadual Professor Inácio Castilho

Diretor: MARIA GORETH DOS SANTOS AGUIAR

Aluno(a) [redacted]

Ano: 1° Regular Professor(a): HERBERT REZENDE SIQUEIRA Data: ___/___/___

Complete com base na divisão feita com o triângulo de cartolina:

$T_3 = \frac{(24)\times(24)}{2} = \frac{(576)}{2} = 288\ cm^2$

$T_4 = \frac{(24)\times(24)}{2} = \frac{(576)}{2} = 288\ cm^2$

$T_5 = \frac{(24)\times(24)}{2} = \frac{(576)}{2} = 288\ cm^2$

$T_6 = \frac{(12)\times(12)}{2} = \frac{(144)}{2} = 72\ cm^2$

$T_7 = \frac{(12)\times(12)}{2} = \frac{(144)}{2} = 72\ cm^2$

$T_8 = \frac{(12)\times(12)}{2} = \frac{(144)}{2} = 72\ cm^2$

$T_9 = \frac{(12)\times(12)}{2} = \frac{(144)}{2} = 72\ cm^2$

Complete com base na divisão feita com o triângulo de cartolina:

$T_{10} = \frac{(6)\times(6)}{2} = \frac{36}{2} = 18\ cm^2$

$T_{11} = \frac{(6)\times(6)}{2} = 18\ cm^2$

$T_{12} = \frac{(6)\times(6)}{2} = 18\ cm^2$

$T_{13} = \frac{(6)\times(6)}{2} = 18\ cm^2$

$T_{14} = \frac{(3)\times(3)}{2} = \frac{9}{2} = 4,5\ cm^2$

Uma progressão geométrica consiste em uma sequência de termos em que cada termo é obtido ao multiplicar o termo anterior por uma constante chamada de razão. Essa constante é representada por "r" e pode ser tanto positiva como negativa. Podemos calcular o "n-ésimo" termo de uma sequência geométrica através da fórmula $a_n = a_1 \times r^{(n-1)}$, onde "$a_n$" representa o "n-ésimo" termo, "a_1" é o primeiro termo e "n" é a posição do termo que queremos encontrar.

Consideremos a sequência (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128,...). Nessa sequência, cada termo é obtido ao multiplicar o termo anterior por 2. Portanto, a razão dessa progressão geométrica é igual a 2.

Progressão geométrica decrescente: onde a razão é um número entre 0 e 1. Por exemplo, na sequência (100, 50, 25, $\frac{25}{2}$, $\frac{25}{4}$, $\frac{25}{8}$, $\frac{25}{16}$ ...), cada termo é obtido ao multiplicar o termo anterior por $\frac{1}{2}$. Assim, a razão dessa progressão geométrica é 1/2.

Complete: $T_{17} = T_{13} \times \left(\frac{1}{4}\right) = T_9 \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) = T_5 \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) = T_1 \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right)$

$T_{17} = \frac{(3)\times(3)}{2} = 4,5\ cm^2$ Sequência: (1152, 288, 72, 18, 4,5)

Vamos denotar a área de cada triângulo selecionado por A_1, A_2, A_3,..., em que A_1 é a área de T_5, A_2 é a área de T_9, A_3 é a área de T_{13}, e assim por diante. Podemos observar que a sequência das áreas dos triângulos selecionados segue um padrão. A área de cada triângulo é dividida por 4 em relação 0ao triângulo anterior. Mais ainda, considerando a função $f(x)=\frac{x}{4}$ onde obtemos $A_1 = \frac{l^2}{8}$, $A_2 = \frac{A_1}{4}$, $A_3 = \frac{A_2}{4}$ ... Podemos então generalizar: $A_n = A_1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{(n-1)}$

$A_5 = A_1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{l^2}{8} \cdot \frac{1}{4^5}$

$A_5 = l^2/8192$

Figura 6.4: Primeiro exemplo de atividade resolvida da segunda aula

Parte 3:

O caso da divisão de triângulos como uma Progressão Geométrica, com uma razão igual a $\frac{1}{4}$, foi introduzido aos alunos em sala de aula. Foi utilizado um método prático, começando com um triângulo não dividido e realizando sucessivas divisões para gerar uma sequência de triângulos. Foi explicado o conceito de Progressões Geométricas e como a sequência de triângulos resultantes segue um padrão, onde cada área de triângulo é um quarto da área do triângulo anterior.

Para exemplificar a fórmula da área do triângulo retângulo, foi escolhido calcular a área do triângulo T_{17} que ainda não havia sido dividido. Foi usada a fórmula tradicional da área do triângulo retângulo, considerando a base e altura do triângulo T_{13}. Em seguida, foi proposto aos alunos calcular a área do quinto termo da sequência utilizando a fórmula da Progressão Geométrica. Durante a resolução dos exercícios, os alunos demonstraram entendimento do conteúdo, aplicando corretamente a fórmula e realizando os cálculos necessários. A participação ativa dos alunos foi notável durante a atividade, engajando-se nas discussões em sala de aula e compartilhando seus raciocínios. Foi gratificante ver o envolvimento e a motivação dos alunos ao aprender sobre Progressões Geométricas aplicadas a triângulos.

Ao final da aula, os alunos compreenderam a relação entre a divisão de triângulos e uma Progressão Geométrica, assim como a noção de razão e sua aplicação na determinação de áreas de triângulos em sequência. A aplicação prática da atividade, por meio de exemplos e problemas, permitiu que visualizassem de forma concreta a aplicação desses conceitos matemáticos. Isso resultou em maior confiança e motivação dos alunos em aprender sobre Progressões Geométricas. A aplicação da atividade foi considerada um sucesso, uma vez que os alunos demonstraram boa compreensão dos conceitos apresentados.

Figura 6.5: Terceira foto de registro de aplicação da oficina

Aula 3:

Introdução:

A introdução começou com uma revisão dos conceitos anteriores, como a divisão sucessiva do triângulo retângulo e a razão entre as áreas dos triângulos resultantes. Foram recapitulados os passos envolvidos na divisão do triângulo, que consiste em traçar uma linha paralela à hipotenusa para dividir o triângulo em dois triângulos semelhantes. Foi explicado aos alunos que essa divisão segue um padrão, onde a razão entre as áreas dos triângulos resultantes é sempre a metade da razão entre os catetos do triângulo original. Exemplos numéricos foram utilizados para exemplificar essa relação.

Após a revisão, foi introduzido o conceito de Progressão Geométrica. Os alunos foram informados de que uma Progressão Geométrica é a soma de uma sequência infinita de termos, obtidos multiplicando-se o termo anterior por uma constante chamada de razão.

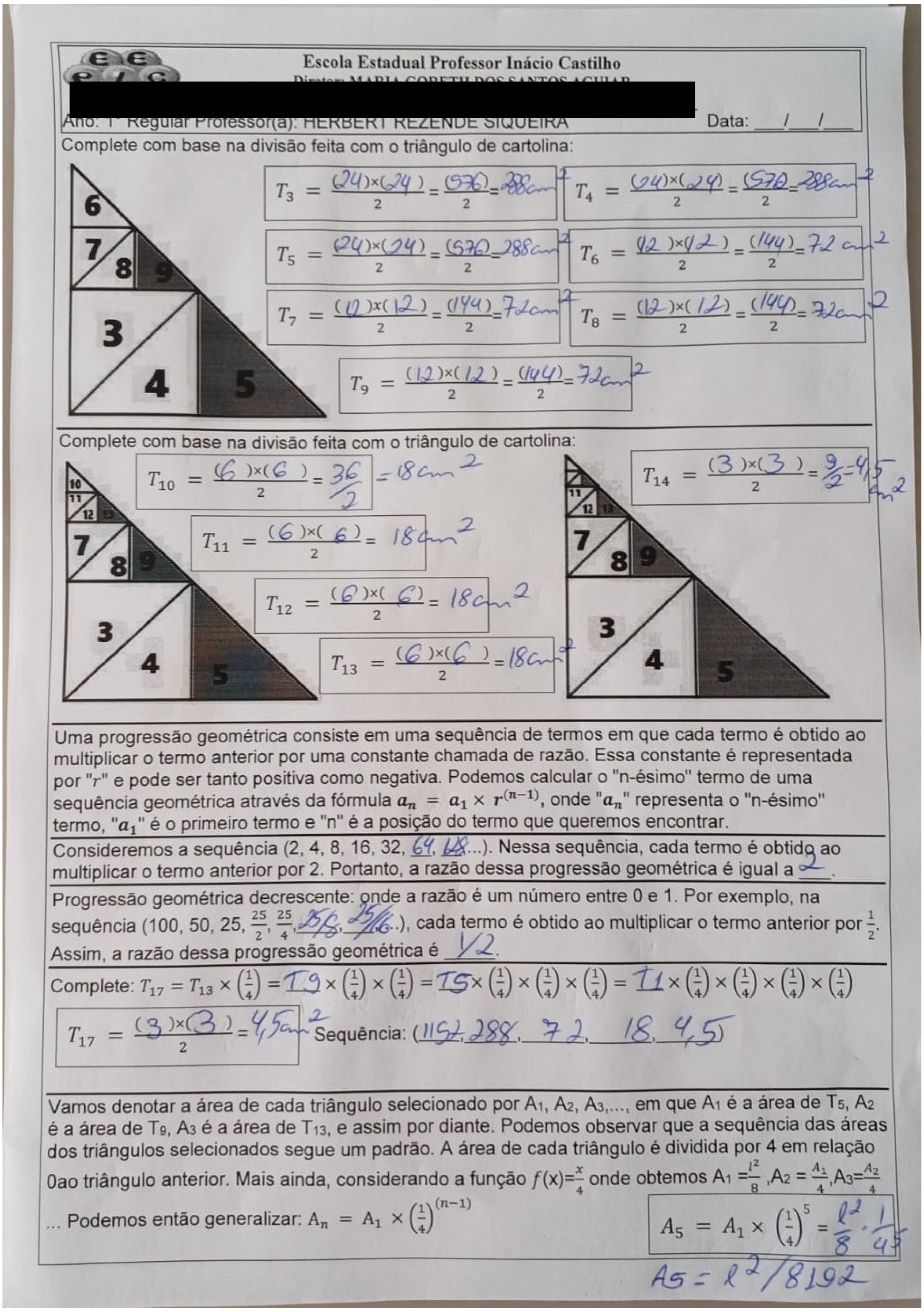
Em seguida, os alunos foram mostrados como a soma das áreas dos triângulos resultantes da divisão sucessiva pode ser representada como uma soma infinita de uma Progressão Geométrica. Para facilitar a compreensão dos alunos, realizamos exercícios práticos em que eles calcularam a soma das áreas de vários triângulos resultantes de uma divisão sucessiva. Eles aplicaram corretamente o conceito de Progressão Geométrica e obtiveram as respostas corretas. Os alunos demonstraram um bom entendimento dessa parte da aula, aplicando os conhecimentos adquiridos sobre a divisão sucessiva do triângulo retângulo e a razão entre as áreas dos triângulos resultantes. Além disso, entenderam como representar a soma das áreas como uma soma infinita de uma Progressão Geométrica e realizaram os cálculos necessários para obter as respostas corretas.

Desenvolvimento:

Parte 1:

Essa parte da aula foi clara e objetiva, apresentando a fórmula da soma de uma Progressão Geométrica Finita e explicando cada elemento dessa fórmula. Os alunos compreenderam os conceitos e entenderam a relevância da fórmula para o cálculo da soma das áreas dos triângulos selecionados. Durante a explicação, os alunos demonstraram interesse e fizeram questionamentos para esclarecer dúvidas. Exemplos práticos foram utilizados para exemplificar a aplicação da fórmula em situações reais. Depois disso, os alunos resolveram exercícios envolvendo o cálculo da soma das áreas dos triângulos selecionados com um número específico de termos. Alguns alunos tiveram dificuldade em compreender e aplicar corretamente a fórmula.

Para ajudar os alunos a superarem as dificuldades, foram realizados exercícios em conjunto com


Escola Estadual Professor Inácio Castilho

[redacted]

Ano: 1º Regular Professor(a): HERBERT REZENDE SIQUEIRA Data: ___/___/___

Complete com base na divisão feita com o triângulo de cartolina:

$T_3 = \frac{(24)\times(24)}{2} = \frac{(576)}{2} = 288cm^2$ $T_4 = \frac{(24)\times(24)}{2} = \frac{(576)}{2} = 288cm^2$

$T_5 = \frac{(24)\times(24)}{2} = \frac{(576)}{2} = 288cm^2$ $T_6 = \frac{(12)\times(12)}{2} = \frac{(144)}{2} = 72cm^2$

$T_7 = \frac{(12)\times(12)}{2} = \frac{(144)}{2} = 72cm^2$ $T_8 = \frac{(12)\times(12)}{2} = \frac{(144)}{2} = 72cm^2$

$T_9 = \frac{(12)\times(12)}{2} = \frac{(144)}{2} = 72cm^2$

Complete com base na divisão feita com o triângulo de cartolina:

$T_{10} = \frac{(6)\times(6)}{2} = \frac{36}{2} = 18cm^2$

$T_{11} = \frac{(6)\times(6)}{2} = 18cm^2$

$T_{12} = \frac{(6)\times(6)}{2} = 18cm^2$

$T_{13} = \frac{(6)\times(6)}{2} = 18cm^2$

$T_{14} = \frac{(3)\times(3)}{2} = \frac{9}{2} = 4,5cm^2$

Uma progressão geométrica consiste em uma sequência de termos em que cada termo é obtido ao multiplicar o termo anterior por uma constante chamada de razão. Essa constante é representada por "r" e pode ser tanto positiva como negativa. Podemos calcular o "n-ésimo" termo de uma sequência geométrica através da fórmula $a_n = a_1 \times r^{(n-1)}$, onde "$a_n$" representa o "n-ésimo" termo, "a_1" é o primeiro termo e "n" é a posição do termo que queremos encontrar.

Consideremos a sequência (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128...). Nessa sequência, cada termo é obtido ao multiplicar o termo anterior por 2. Portanto, a razão dessa progressão geométrica é igual a 2.

Progressão geométrica decrescente: onde a razão é um número entre 0 e 1. Por exemplo, na sequência (100, 50, 25, $\frac{25}{2}$, $\frac{25}{4}$, 25/8, 25/16...), cada termo é obtido ao multiplicar o termo anterior por $\frac{1}{2}$. Assim, a razão dessa progressão geométrica é 1/2.

Complete: $T_{17} = T_{13} \times \left(\frac{1}{4}\right) = T9 \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) = T5 \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) = T1 \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right)$

$T_{17} = \frac{(3)\times(3)}{2} = 4,5cm^2$ Sequência: (1152, 288, 72, 18, 4,5)

Vamos denotar a área de cada triângulo selecionado por $A_1, A_2, A_3, \ldots$, em que A_1 é a área de T_5, A_2 é a área de T_9, A_3 é a área de T_{13}, e assim por diante. Podemos observar que a sequência das áreas dos triângulos selecionados segue um padrão. A área de cada triângulo é dividida por 4 em relação 0ao triângulo anterior. Mais ainda, considerando a função $f(x)=\frac{x}{4}$ onde obtemos $A_1 = \frac{l^2}{8}$, $A_2 = \frac{A_1}{4}$, $A_3 = \frac{A_2}{4}$ ... Podemos então generalizar: $A_n = A_1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{(n-1)}$

$A_5 = A_1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{l^2}{8} \cdot \frac{1}{4^5}$

$A5 = l^2/8192$

Figura 6.6: Segundo exemplo de atividade resolvida da segunda aula

explicações passo a passo e discussões sobre as etapas de resolução. Exercícios extras foram fornecidos para a prática individual, com acompanhamento e orientação personalizados para aqueles que tiveram mais dificuldades.

No final da aula, os alunos foram capazes de aplicar corretamente a fórmula da soma de uma Progressão Geométrica finita e entender a sua importância para o cálculo da soma das áreas dos triângulos selecionados. A maioria dos alunos conseguiu superar suas dificuldades iniciais e teve sucesso na resolução dos exercícios propostos.

Parte 2:

Nessa parte da aula, comecei introduzindo a sequência $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ e fiz uma análise dos valores para diferentes valores de n. Expliquei que a sequência vai diminuindo à medida que n aumenta, devido ao fato de estarmos elevando um número menor que 1 à potência n. Em seguida, apresentei a conclusão de que à medida que n tende ao infinito, a expressão $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ tende a zero. Para facilitar a compreensão dos alunos, mostrei exemplos numéricos, utilizando uma calculadora científica para calcular o valor da sequência para valores grandes de n. Isso permitiu que eles visualizassem o padrão da sequência se aproximando de zero à medida que n aumenta.

No geral, os alunos foram bem-sucedidos na compreensão dessa parte da aula, mas alguns apresentaram um pouco de dificuldade no início. Para ajudá-los, fiz perguntas e pedi que eles tentassem explicar a tendência dos valores da sequência para diferentes valores de n. Também fiz questão de enfatizar que, quando um número menor que 1 é elevado a uma potência grande, o valor resultante se torna cada vez menor. Além disso, mostrei como simplificar a notação científica para facilitar a leitura dos valores da sequência para valores muito grandes de n.

Figura 6.7: Quarta foto de registro de aplicação da oficina

Parte 3 :

Nesta parte da aula, abordei o problema de construção de triângulos e apresentei aos alunos a fórmula para a soma das áreas dos triângulos obtidos. Destaquei a necessidade de utilizar o conceito de limite para calcular a soma das áreas quando n tende ao infinito. Solicitei aos alunos que calculassem essa soma, e muitos chegaram ao resultado correto de $\frac{l^2}{6}$. Em seguida, discuti o conceito de limite e sua importância nesse caso específico.

Muitos alunos tiveram dificuldade em entender como aplicar o limite nesse contexto. Para ajudá-los, expliquei detalhadamente o processo de simplificação da expressão usando a fórmula do limite, até chegar ao resultado final de $\frac{l^2}{6}$.

Enfatizei que, conforme a razão entre as áreas dos triângulos consecutivos é $\frac{1}{4}$, quanto maior o valor de n, mais os triângulos se aproximam de um valor limite, que é a soma total das áreas.

A maioria dos alunos compreendeu e aplicou corretamente o conceito de limite para encontrar a soma das áreas dos triângulos. Alguns alunos tiveram dúvidas, mas conseguiram entender com a explicação detalhada e chegaram às respostas corretas. Foi ressaltado aos alunos que a soma das áreas dos triângulos resultantes é sempre menor do que a área total do triângulo inicial, consolidando assim a importância do limite nesse caso específico.

Parte 4 :

Reforcei a fórmula da soma de uma Progressão Geométrica, que permite calcular a soma de uma sequência de termos multiplicados por uma constante. No nosso caso, essa constante é a razão das áreas dos triângulos. Mostrei como aplicar a fórmula para encontrar a soma das áreas dos triângulos. Em seguida, resolvi um exemplo no quadro, utilizando os valores das bases e alturas dos triângulos desenhados pelos alunos, explicando passo a passo como aplicar a fórmula e obter o resultado da soma.

Após explicar a fórmula da soma de uma Progressão Geométrica, dei um tempo para os alunos fazerem os cálculos. Durante esse tempo, circulei pela sala para tirar dúvidas e corrigir erros. A maioria dos alunos teve dificuldades, o que era esperado. Porém, com minha ajuda e orientação, eles conseguiram entender o processo e obter o valor correto da soma das áreas dos triângulos. No final da aula, fiz uma revisão dos principais pontos e resolvi mais exemplos no quadro para reforçar o uso da fórmula.

Apesar das dificuldades encontradas pelos alunos nessa parte específica da aula, considero que eles foram bem sucedidos no aprendizado do conteúdo. A maioria conseguiu compreender a fórmula da soma de uma Progressão Geométrica e aplicá-la corretamente nos exercícios propostos.

Figura 6.8: Quarta foto de registro de aplicação da oficina

Aula 4:

Introdução:

A atividade de caça-palavras foi aplicada em sala de aula para estimular o conhecimento sobre Sistemas Dinâmicos Discretos. A maioria dos alunos foi capaz de identificar corretamente os termos "iteração", "função" e "órbita". Para ajudar os alunos que tiveram dificuldades, foi feita uma revisão dos conceitos antes da atividade e incentivado o trabalho em grupo. Após a atividade, foi realizada uma discussão em classe para aprofundar a compreensão dos termos e sua importância na evolução dos Sistemas Dinâmicos Discretos. O uso da caça-palavras como estratégia de ensino foi eficiente na fixação dos termos estudados e promoveu a interação e construção coletiva do conhecimento entre os alunos.

Desenvolvimento

Parte 1

A atividade de introdução ao Sistema Dinâmico Discreto utilizando a função $f(x) = \frac{x}{4}$ foi bem-sucedida, porém alguns alunos tiveram dificuldades na compreensão do conceito de composição de funções. Inicialmente, expliquei aos alunos que a função $f(x)$ é uma regra matemática que determina a evolução do valor de x a cada iteração. Em seguida, apresentei um exemplo prático: começando com $x = 8$, pedi para os alunos aplicarem a função $f(x)$ para calcular o próximo valor de x.

Após um período de reflexão, a maioria dos alunos conseguiu calcular corretamente o próximo valor de x como 2. Reforcei que esse valor é obtido substituindo $x = 8$ na função $f(x) = \frac{x}{4}$.

Em seguida, discuti a ideia de compor funções, explicando que podemos repetir a aplicação da função $f(x)$ para obter uma sequência de valores de x ao longo do tempo. É importante destacar que a cada iteração, o valor obtido é utilizado como entrada na próxima iteração.

Para tornar esse conceito mais tangível, propus que os alunos calculassem manualmente os próximos valores de x aplicando repetidamente a função $f(x)$. Alguns tiveram dificuldade em entender que era necessário utilizar o resultado da iteração anterior como entrada para a próxima iteração.

No entanto, após orientação e dicas adicionais, a maioria dos alunos conseguiu avançar na resolução dos cálculos e obteve uma sequência de valores de x. Fiz questão de destacar que essa sequência é gerada pela composição da função $f(x)$ consigo mesma várias vezes.

Ao final da atividade, os alunos conseguiram compreender a dinâmica do sistema representado pela função $f(x) = \frac{x}{4}$ e como aplicar a função repetidamente para obter uma sequência de valores de x. Mesmo com a dificuldade inicial, o resultado geral foi satisfatório e os alunos mostraram-se engajados em compreender o conceito de composição de funções aplicado ao Sistema Dinâmico Discreto.

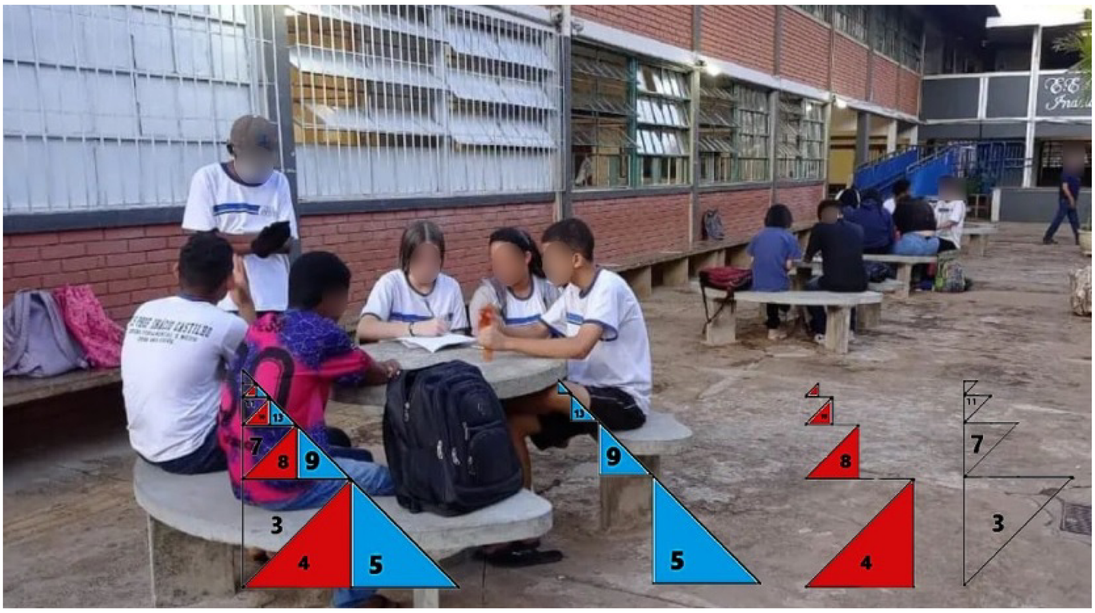


Figura 6.9: Sexta foto de registro de aplicação da oficina

Parte 2

Realizamos um experimento para explorar as iterações da função linear $f(x) = \frac{x}{4}$. Esta função é conhecida como uma função de taxa de (de)crescimento constante, onde qualquer número multiplicado por $\frac{1}{4}$ será reduzido a $\frac{1}{4}$ do seu valor original.

Os alunos foram orientados a escolher um valor inicial para x, que poderia ser qualquer número inteiro ou decimal. Diferentes valores foram selecionados, como 2, 5, 0.5 e até mesmo números negativos, como -3.

Em seguida, os alunos aplicaram a função $f(x) = \frac{x}{4}$ ao valor inicial selecionado e registraram o resultado. Eles utilizaram calculadora ou fizeram a operação manualmente para obter o resultado. Por exemplo, se o valor inicial fosse 2, aplicando a função teríamos $f(2) = \frac{2}{4} = 0.5$.

Na segunda parte do experimento, foi solicitado aos grupos que realizassem a segunda iteração, aplicando novamente a função $f(x) = \frac{x}{4}$ ao resultado da primeira iteração. Os estudantes conseguiram seguir as instruções com sucesso, demonstrando compreensão sobre a sequência de iterações.

O processo foi repetido por mais 3 iterações, sempre tomando o resultado anterior e aplicando a função. Após a conclusão das 5 iterações, os alunos foram incentivados a observarem os padrões e variações nas sequências geradas. Perguntas orientadoras foram feitas para promover a discussão, tais como: se os valores estão aumentando ou diminuindo a cada iteração, se existe uma tendência na sequência gerada e se são observados padrões na relação entre os valores iniciais e os resultados das iterações.

Os alunos debateram sobre a diminuição dos valores a cada iteração e a tendência de convergência para um valor próximo de zero. Eles também perceberam que independentemente do valor inicial escolhido, todos os resultados das iterações se aproximavam cada vez mais de zero. Desafiei-os a realizar mais iterações com diferentes valores iniciais e explorar o resultado de utilizar valores negativos. A ideia era refletir sobre como esses padrões e variações poderiam ser aplicados no cotidiano.

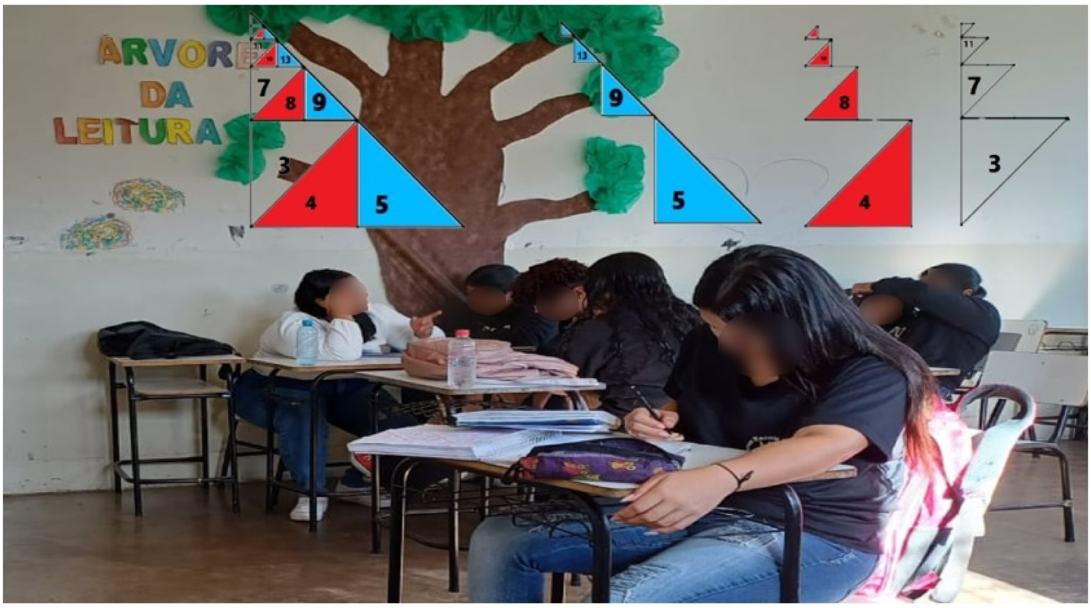


Figura 6.10: Sétima foto de registro de aplicação da oficina

Alguns alunos tiveram dificuldades em observar e analisar os padrões e variações das sequências geradas, então incentivamos a discussão em grupo e fornecemos orientações adicionais. A atividade permitiu praticar a aplicação de funções lineares e expandir a compreensão dos alunos sobre taxa de crescimento constante. Ao final, eles perceberam a utilidade desse tipo de função na análise de situações do cotidiano e na previsão de padrões.

Parte 3

A atividade foi realizada durante uma aula de matemática sobre funções iterativas. Foi feita uma revisão dos conceitos de função e iteração no início da aula. Os alunos foram instruídos a escolher um número inicial e calcular o valor resultante após a primeira iteração. Eles registraram os valores. Os alunos foram solicitados a descrever o comportamento da órbita até aquele ponto e muitos perceberam que os valores obtidos oscilavam entre diferentes números, sem se aproximar de um valor específico.

Em seguida, solicitei aos alunos realizar mais iterações para observar se algum padrão estava se formando. Alguns tiveram dificuldades nessa etapa, já que não estavam acostumados a pensar em padrões matemáticos. No entanto, com algumas dicas e exemplos adicionais, eles conseguiram completar as iterações. Após a sexta iteração, pedi aos alunos que descrevessem novamente o comportamento da órbita. Desta vez, a maioria deles percebeu que os valores pareciam estar se aproximando de um número específico.

Tivemos uma discussão em sala de aula sobre os padrões observados e a importância de identificar tendências em sequências matemáticas. Os alunos compreenderam que, mesmo que inicialmente os valores não convergissem para um número específico, após um determinado número de iterações, eles começavam a se aproximar de um valor fixo.

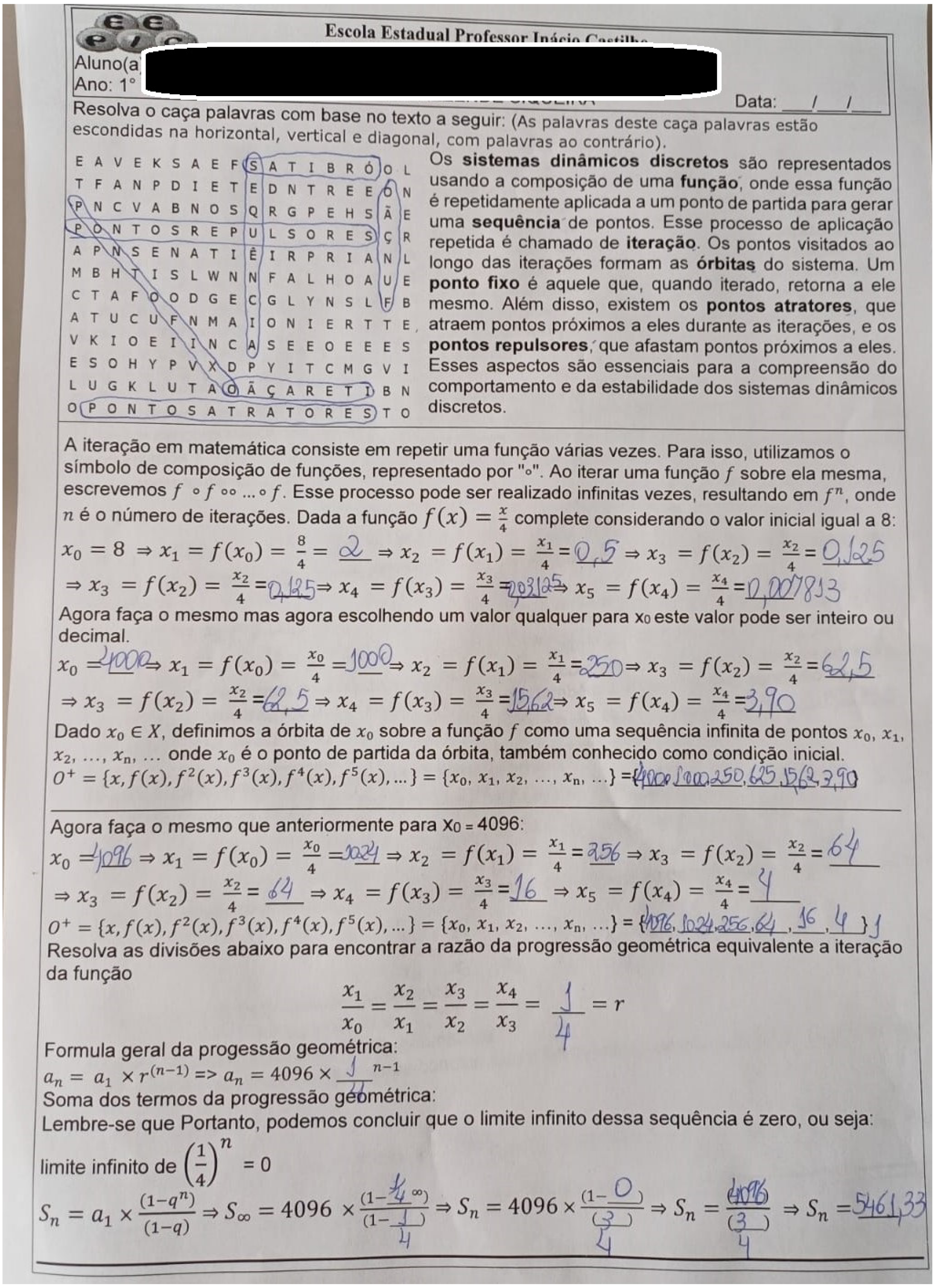
Apesar de algumas dificuldades iniciais, a atividade foi bem sucedida em promover a compreensão dos alunos sobre o comportamento das órbitas de funções iterativas.

Parte 4

Reforcei o conceito de iteração da função e Progressão Geométrica para os alunos. Expliquei que ambas são formas de representar sequências de números que seguem padrões específicos, mas diferem em relação à sua natureza discreta e contínua.

Exemplifiquei a iteração da função $f(x) = \frac{x}{4}$ usando o valor inicial de $x = 4096$. Mostrei passo a passo como aplicar a função a cada resultado gerado, obtendo assim uma sequência específica de números. Destaquei que cada iteração gera um novo valor na sequência.

Em seguida, apresentei aos alunos a Progressão Geométrica com razão $\frac{1}{4}$, que corresponde à mesma razão da função. Expliquei que essa progressão também segue um padrão específico, onde cada termo é obtido multiplicando o termo anterior pela razão. Destaquei que a sequência gerada pela iteração da função é exatamente a mesma sequência gerada pela Progressão Geométrica com a mesma razão.



Escola Estadual Professor Inácio Castilho

Aluno(a [redacted]
Ano: 1° [redacted]
Data: ___/___/___

Resolva o caça palavras com base no texto a seguir: (As palavras deste caça palavras estão escondidas na horizontal, vertical e diagonal, com palavras ao contrário).

E A V E K S A E F S A T I B R Ó O L
T F A N P D I E T E D N T R E E O N
P N C V A B N O S Q R G P E H S Ã E
P O N T O S R E P U L S O R E S Ç R
A P N S E N A T I Ê I R P R I A N L
M B H T I S L W N N F A L H O A U E
C T A F O O D G E C G L Y N S L F B
A T U C U F N M A I O N I E R T T E
V K I O E I I N C A S E E O E E E S
E S O H Y P V X D P Y I T C M G V I
L U G K L U T A O Ã Ç A R E T I B N
O P O N T O S A T R A T O R E S T O

Os **sistemas dinâmicos discretos** são representados usando a composição de uma **função**, onde essa função é repetidamente aplicada a um ponto de partida para gerar uma **sequência** de pontos. Esse processo de aplicação repetida é chamado de **iteração**. Os pontos visitados ao longo das iterações formam as **órbitas** do sistema. Um **ponto fixo** é aquele que, quando iterado, retorna a ele mesmo. Além disso, existem os **pontos atratores**, que atraem pontos próximos a eles durante as iterações, e os **pontos repulsores**, que afastam pontos próximos a eles. Esses aspectos são essenciais para a compreensão do comportamento e da estabilidade dos sistemas dinâmicos discretos.

A iteração em matemática consiste em repetir uma função várias vezes. Para isso, utilizamos o símbolo de composição de funções, representado por "∘". Ao iterar uma função f sobre ela mesma, escrevemos $f \circ f \circ\circ \dots \circ f$. Esse processo pode ser realizado infinitas vezes, resultando em f^n, onde n é o número de iterações. Dada a função $f(x) = \frac{x}{4}$ complete considerando o valor inicial igual a 8:

$x_0 = 8 \Rightarrow x_1 = f(x_0) = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow x_2 = f(x_1) = \frac{x_1}{4} = 0{,}5 \Rightarrow x_3 = f(x_2) = \frac{x_2}{4} = 0{,}125$

$\Rightarrow x_3 = f(x_2) = \frac{x_2}{4} = 0{,}125 \Rightarrow x_4 = f(x_3) = \frac{x_3}{4} = 0{,}03125 \Rightarrow x_5 = f(x_4) = \frac{x_4}{4} = 0{,}007813$

Agora faça o mesmo mas agora escolhendo um valor qualquer para x_0 este valor pode ser inteiro ou decimal.

$x_0 = 4000 \Rightarrow x_1 = f(x_0) = \frac{x_0}{4} = 1000 \Rightarrow x_2 = f(x_1) = \frac{x_1}{4} = 250 \Rightarrow x_3 = f(x_2) = \frac{x_2}{4} = 62{,}5$

$\Rightarrow x_3 = f(x_2) = \frac{x_2}{4} = 62{,}5 \Rightarrow x_4 = f(x_3) = \frac{x_3}{4} = 15{,}62 \Rightarrow x_5 = f(x_4) = \frac{x_4}{4} = 3{,}90$

Dado $x_0 \in X$, definimos a órbita de x_0 sobre a função f como uma sequência infinita de pontos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ onde x_0 é o ponto de partida da órbita, também conhecido como condição inicial.

$O^+ = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), f^4(x), f^5(x), \dots\} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = \{4000, 1000, 250, 62{,}5, 15{,}62, 3{,}90\}$

Agora faça o mesmo que anteriormente para $x_0 = 4096$:

$x_0 = 4096 \Rightarrow x_1 = f(x_0) = \frac{x_0}{4} = 1024 \Rightarrow x_2 = f(x_1) = \frac{x_1}{4} = 256 \Rightarrow x_3 = f(x_2) = \frac{x_2}{4} = 64$

$\Rightarrow x_3 = f(x_2) = \frac{x_2}{4} = 64 \Rightarrow x_4 = f(x_3) = \frac{x_3}{4} = 16 \Rightarrow x_5 = f(x_4) = \frac{x_4}{4} = 4$

$O^+ = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), f^4(x), f^5(x), \dots\} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = \{4096, 1024, 256, 64, 16, 4\}$

Resolva as divisões abaixo para encontrar a razão da progressão geométrica equivalente a iteração da função

$$\frac{x_1}{x_0} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3} = \frac{1}{4} = r$$

Formula geral da progressão geométrica:

$a_n = a_1 \times r^{(n-1)} \Rightarrow a_n = 4096 \times \frac{1}{4}^{n-1}$

Soma dos termos da progressão geométrica:

Lembre-se que Portanto, podemos concluir que o limite infinito dessa sequência é zero, ou seja:

limite infinito de $\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

$S_n = a_1 \times \frac{(1-q^n)}{(1-q)} \Rightarrow S_\infty = 4096 \times \frac{(1-\frac{1}{4}^\infty)}{(1-\frac{1}{4})} \Rightarrow S_n = 4096 \times \frac{(1-0)}{(\frac{3}{4})} \Rightarrow S_n = \frac{4096}{(\frac{3}{4})} \Rightarrow S_n = 5461{,}33$

Figura 6.11: Primeiro exemplo de atividade resolvida da quarta aula

Em seguida, solicitei que eles identificassem a regra de formação dessa sequência e a comparassem com a Progressão Geométrica correspondente. Incentivei-os a discutirem entre si e compartilharem suas conclusões com toda a turma.

Durante essa parte da aula, a maioria dos alunos encontrou alguma dificuldade, principalmente em compreender a relação entre a função e a Progressão Geométrica. Alguns tiveram dificuldade em entender a natureza discreta das iterações da função, enquanto outros tiveram dificuldade em compreender a relação entre os termos da sequência gerada pela função e os da Progressão Geométrica.

Para ajudar a superar essas dificuldades, fiz questão de ir ao quadro explicar em detalhes passo a passo. Assim, os alunos puderam compreender melhor a sequência gerada pela função e sua correspondente Progressão Geométrica. Também fiz perguntas direcionadas e encorajei a participação ativa dos alunos nas discussões em grupo.

Com o tempo, os alunos compreenderam a semelhança entre as iterações da função e a Progressão Geométrica. Eles identificaram a relação entre os termos da sequência gerada pela função e os da Progressão Geométrica, demonstrando essa relação de forma numérica e gráfica. A maioria dos alunos entendeu a iteração da função e sua relação com a Progressão Geométrica, identificando a regra de formação da sequência gerada pela função e comparando-a com a Progressão Geométrica correspondente. Alguns alunos conseguiram aplicar esse conceito a outros exemplos além do apresentado em sala de aula.

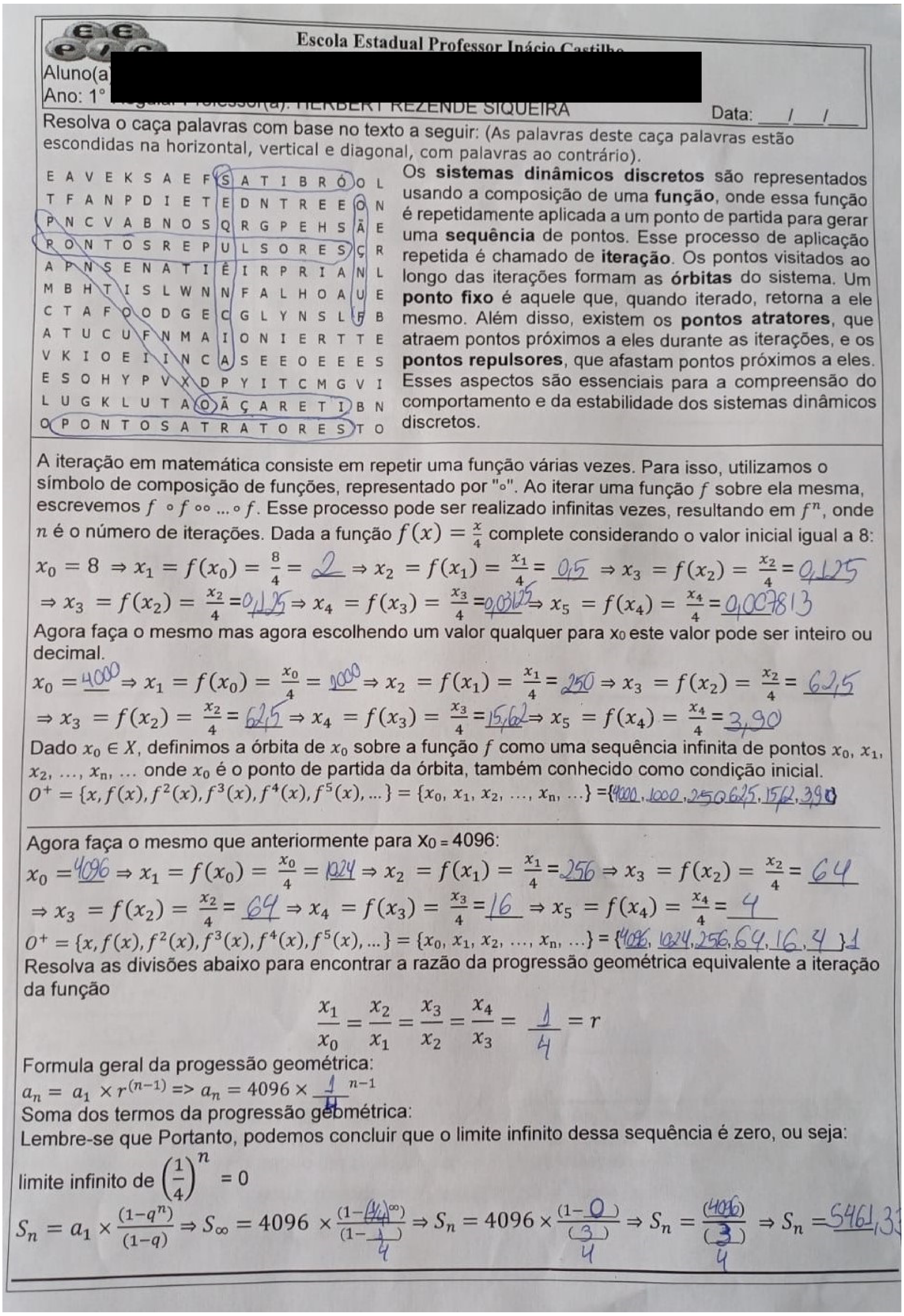
De modo geral, apesar das dificuldades iniciais, os alunos foram capazes de compreender e relacionar os conceitos de iteração da função e Progressão Geométrica. Eles demonstraram um bom nível de engajamento e participação durante a aula, o que contribuiu para o seu sucesso na atividade.

Parte 5

Iniciamos abordando o conceito de Progressão Geométrica (PG), que é uma sequência numérica em que cada termo é obtido multiplicando-se o termo anterior por uma constante chamada razão. Apresentamos a fórmula geral da PG, $a_n = a_1 \times r^{(n-1)}$, explicando o significado de cada elemento. Em seguida, aplicamos o conceito de PG à função $f(x) = \dfrac{x}{4}$, explicando como obter uma sequência de valores ao iterar a função e como descrever essa sequência usando a fórmula da PG. Calculamos também a soma dos termos da PG quando n tende ao infinito, utilizando a fórmula $S_\infty = a_1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}$. Utilizando o conceito de limite, simplificamos a fórmula e chegamos ao resultado final $S_\infty = 5461,33$.

Durante a explicação, foi proporcionado aos alunos a oportunidade de fazerem perguntas e esclarecerem suas dúvidas. A maioria dos alunos compreendeu o conceito de Progressão Geométrica e conseguiu aplicá-lo corretamente para descrever a sequência gerada pela função dada. Alguns alunos tiveram um pouco mais de dificuldade na parte do cálculo da soma dos termos da PG quando

n tende ao infinito, mostrando um pouco de confusão na manipulação dos termos e na aplicação dos limites. No entanto, com a explicação detalhada e exemplos adicionais, todos os alunos foram bem-sucedidos em entender o processo e chegar corretamente ao resultado final.



Escola Estadual Professor Inácio Castilho

Aluno(a [redacted]

Ano: 1° [redacted] HERBERT REZENDE SIQUEIRA Data: ___/___/___

Resolva o caça palavras com base no texto a seguir: (As palavras deste caça palavras estão escondidas na horizontal, vertical e diagonal, com palavras ao contrário).

E	A	V	E	K	S	A	E	F	S	A	T	I	B	R	Ó	O	L
T	F	A	N	P	D	I	E	T	E	D	N	T	R	E	E	O	N
P	N	C	V	A	B	N	O	S	Q	R	G	P	E	H	S	Ã	E
P	O	N	T	O	S	R	E	P	U	L	S	O	R	E	S	Ç	R
A	P	N	S	E	N	A	T	I	Ê	I	R	P	R	I	A	N	L
M	B	H	T	I	S	L	W	N	N	F	A	L	H	O	A	U	E
C	T	A	F	O	O	D	G	E	C	G	L	Y	N	S	L	F	B
A	T	U	C	U	F	N	M	A	I	O	N	I	E	R	T	T	E
V	K	I	O	E	I	I	N	C	A	S	E	E	O	E	E	E	S
E	S	O	H	Y	P	V	X	D	P	Y	I	T	C	M	G	V	I
L	U	G	K	L	U	T	A	O	Ã	Ç	A	R	E	T	I	B	N
O	P	O	N	T	O	S	A	T	R	A	T	O	R	E	S	T	O

Os **sistemas dinâmicos discretos** são representados usando a composição de uma **função**, onde essa função é repetidamente aplicada a um ponto de partida para gerar uma **sequência** de pontos. Esse processo de aplicação repetida é chamado de **iteração**. Os pontos visitados ao longo das iterações formam as **órbitas** do sistema. Um **ponto fixo** é aquele que, quando iterado, retorna a ele mesmo. Além disso, existem os **pontos atratores**, que atraem pontos próximos a eles durante as iterações, e os **pontos repulsores**, que afastam pontos próximos a eles. Esses aspectos são essenciais para a compreensão do comportamento e da estabilidade dos sistemas dinâmicos discretos.

A iteração em matemática consiste em repetir uma função várias vezes. Para isso, utilizamos o símbolo de composição de funções, representado por "∘". Ao iterar uma função f sobre ela mesma, escrevemos $f \circ f \circ\circ \ldots \circ f$. Esse processo pode ser realizado infinitas vezes, resultando em f^n, onde n é o número de iterações. Dada a função $f(x) = \frac{x}{4}$ complete considerando o valor inicial igual a 8:

$x_0 = 8 \Rightarrow x_1 = f(x_0) = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow x_2 = f(x_1) = \frac{x_1}{4} = 0{,}5 \Rightarrow x_3 = f(x_2) = \frac{x_2}{4} = 0{,}125$

$\Rightarrow x_3 = f(x_2) = \frac{x_2}{4} = 0{,}125 \Rightarrow x_4 = f(x_3) = \frac{x_3}{4} = 0{,}03125 \Rightarrow x_5 = f(x_4) = \frac{x_4}{4} = 0{,}007813$

Agora faça o mesmo mas agora escolhendo um valor qualquer para x_0 este valor pode ser inteiro ou decimal.

$x_0 = 4000 \Rightarrow x_1 = f(x_0) = \frac{x_0}{4} = 1000 \Rightarrow x_2 = f(x_1) = \frac{x_1}{4} = 250 \Rightarrow x_3 = f(x_2) = \frac{x_2}{4} = 62{,}5$

$\Rightarrow x_3 = f(x_2) = \frac{x_2}{4} = 62{,}5 \Rightarrow x_4 = f(x_3) = \frac{x_3}{4} = 15{,}62 \Rightarrow x_5 = f(x_4) = \frac{x_4}{4} = 3{,}90$

Dado $x_0 \in X$, definimos a órbita de x_0 sobre a função f como uma sequência infinita de pontos x_0, x_1, x_2, …, x_n, … onde x_0 é o ponto de partida da órbita, também conhecido como condição inicial.

$O^+ = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), f^4(x), f^5(x), \ldots\} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} = \{4000, 1000, 250, 62{,}5, 15{,}62, 3{,}90\}$

Agora faça o mesmo que anteriormente para $x_0 = 4096$:

$x_0 = 4096 \Rightarrow x_1 = f(x_0) = \frac{x_0}{4} = 1024 \Rightarrow x_2 = f(x_1) = \frac{x_1}{4} = 256 \Rightarrow x_3 = f(x_2) = \frac{x_2}{4} = 64$

$\Rightarrow x_3 = f(x_2) = \frac{x_2}{4} = 64 \Rightarrow x_4 = f(x_3) = \frac{x_3}{4} = 16 \Rightarrow x_5 = f(x_4) = \frac{x_4}{4} = 4$

$O^+ = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), f^4(x), f^5(x), \ldots\} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} = \{4096, 1024, 256, 64, 16, 4\}1$

Resolva as divisões abaixo para encontrar a razão da progressão geométrica equivalente a iteração da função

$$\frac{x_1}{x_0} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3} = \frac{1}{4} = r$$

Formula geral da progessão geométrica:

$a_n = a_1 \times r^{(n-1)} \Rightarrow a_n = 4096 \times \frac{1}{4}^{\,n-1}$

Soma dos termos da progressão geométrica:

Lembre-se que Portanto, podemos concluir que o limite infinito dessa sequência é zero, ou seja:

limite infinito de $\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

$S_n = a_1 \times \frac{(1-q^n)}{(1-q)} \Rightarrow S_\infty = 4096 \times \frac{(1-(1/4)^\infty)}{(1-\frac{1}{4})} \Rightarrow S_n = 4096 \times \frac{(1-0)}{(\frac{3}{4})} \Rightarrow S_n = \frac{(4096)}{(\frac{3}{4})} \Rightarrow S_n = 5461{,}33$

Figura 6.12: Segundo exemplo de atividade resolvida da quarta aula

Considerações gerais sobre a oficina:

Durante as aulas, abordamos o conceito de Progressões Geométricas e sua aplicação em problemas práticos com triângulos. Explicamos que uma Progressão Geométrica é uma soma infinita de termos, onde cada termo é obtido multiplicando-se o termo anterior por uma razão constante. Essa divisão pode ser repetida indefinidamente, gerando uma sequência infinita de triângulos retângulos com lados proporcionais. Isso permite calcular a soma das áreas de todos os triângulos através de uma fórmula específica.

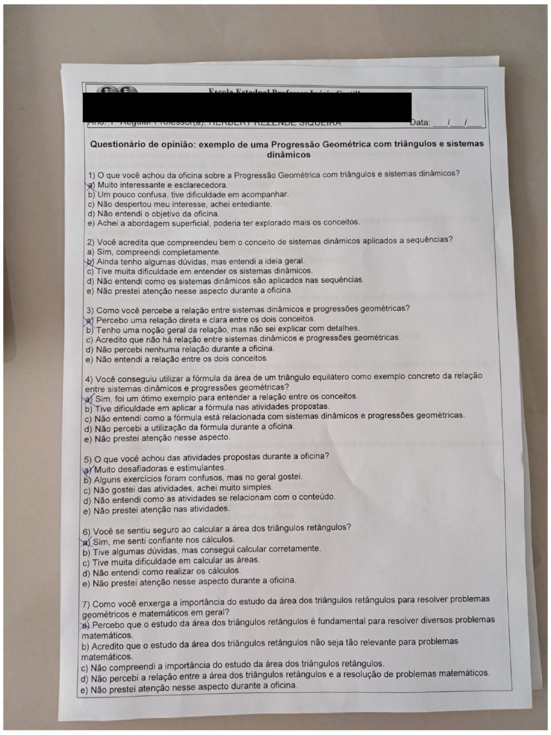
Alguns alunos enfrentaram dificuldades em entender como a área dos triângulos se relaciona com a Progressão Geométrica e como a fórmula calcula a soma de suas áreas. Fizemos uma revisão passo a passo da fórmula e enfatizamos a importância de compreender o conceito de razão e proporção na matemática. Utilizamos exemplos concretos e mostramos como a fórmula pode ser aplicada em diferentes situações.

Apesar das dificuldades iniciais, a maioria dos alunos conseguiu compreender a relação entre a área dos triângulos retângulos e a soma das áreas da Progressão Geométrica. Também conseguiram utilizar a fórmula corretamente, evidenciando sua compreensão do conteúdo. Reforçamos a importância do conceito de Progressões Geométricas e encorajamos a prática contínua para resolver problemas mais complexos com esse tema.

6.2 Análise do questionário de opinião

Analisamos um questionário de opinião aplicado a alunos do Ensino Médio que participaram de uma oficina sobre Sistemas Dinâmicos Discretos aplicados em Geometria Espacial. O questionário foi respondido por 55 alunos, distribuídos em três turmas do primeiro ano. Inicialmente, esperávamos que os alunos respondessem o questionário em 20 minutos, mas nos deparamos com um obstáculo inesperado. A linguagem matemática das perguntas dificultou a compreensão por parte dos alunos, exigindo uma explicação minuciosa das questões e suas alternativas. Esse processo tomou cerca de 50 minutos, excedendo o tempo planejado para a realização do questionário.

A necessidade de fornecer esclarecimentos detalhados sobre as perguntas destacou a importância da linguagem matemática na compreensão dos conceitos abordados na oficina. A partir dessa análise, podemos refletir sobre como adaptar a linguagem e melhorar a didática na elaboração de futuros questionários, tornando-os mais acessíveis aos alunos. Os resultados obtidos nos ajudarão a identificar as percepções e opiniões dos alunos em relação à oficina e ao conteúdo abordado, direcionando futuras ações e melhorias na abordagem de Sistemas Dinâmicos Discretos aplicados em Geometria Espacial para estudantes do Ensino Médio.



[redacted] Data: ___/___/___

Questionário de opinião: exemplo de uma Progressão Geométrica com triângulos e sistemas dinâmicos

1) O que você achou da oficina sobre a Progressão Geométrica com triângulos e sistemas dinâmicos?
a) Muito interessante e esclarecedora.
b) Um pouco confusa, tive dificuldade em acompanhar.
c) Não despertou meu interesse, achei entediante.
d) Não entendi o objetivo da oficina.
e) Achei a abordagem superficial, poderia ter explorado mais os conceitos.

2) Você acredita que compreendeu bem o conceito de sistemas dinâmicos aplicados a sequências?
a) Sim, compreendi completamente.
b) Ainda tenho algumas dúvidas, mas entendi a ideia geral.
c) Tive muita dificuldade em entender os sistemas dinâmicos.
d) Não entendi como os sistemas dinâmicos são aplicados nas sequências.
e) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina.

3) Como você percebe a relação entre sistemas dinâmicos e progressões geométricas?
a) Percebo uma relação direta e clara entre os dois conceitos.
b) Tenho uma noção geral da relação, mas não sei explicar com detalhes.
c) Acredito que não há relação entre sistemas dinâmicos e progressões geométricas.
d) Não percebi nenhuma relação durante a oficina.
e) Não entendi a relação entre os dois conceitos.

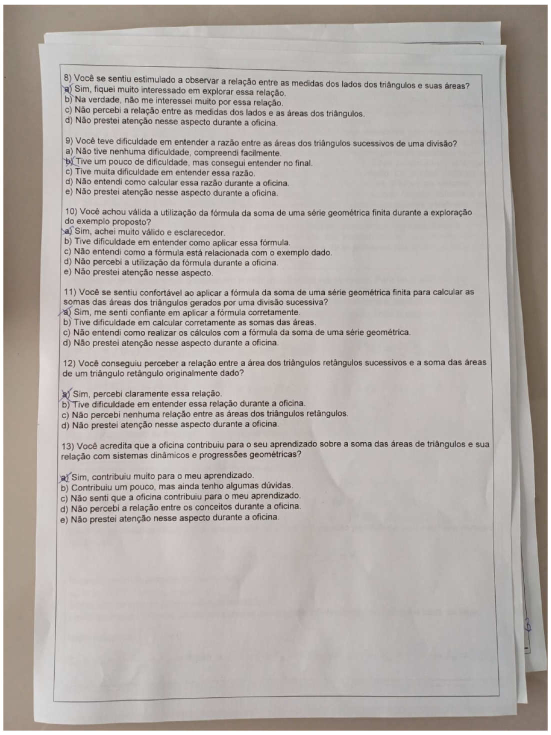
4) Você conseguiu utilizar a fórmula da área de um triângulo equilátero como exemplo concreto da relação entre sistemas dinâmicos e progressões geométricas?
a) Sim, foi um ótimo exemplo para entender a relação entre os conceitos.
b) Tive dificuldade em aplicar a fórmula nas atividades propostas.
c) Não entendi como a fórmula está relacionada com sistemas dinâmicos e progressões geométricas.
d) Não percebi a utilização da fórmula durante a oficina.
e) Não prestei atenção nesse aspecto.

5) O que você achou das atividades propostas durante a oficina?
a) Muito desafiadoras e estimulantes.
b) Alguns exercícios foram confusos, mas no geral gostei.
c) Não gostei das atividades, achei muito simples.
d) Não entendi como as atividades se relacionam com o conteúdo.
e) Não prestei atenção nas atividades.

6) Você se sentiu seguro ao calcular a área dos triângulos retângulos?
a) Sim, me senti confiante nos cálculos.
b) Tive algumas dúvidas, mas consegui calcular corretamente.
c) Tive muita dificuldade em calcular as áreas.
d) Não entendi como realizar os cálculos.
e) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina.

7) Como você enxerga a importância do estudo da área dos triângulos retângulos para resolver problemas geométricos e matemáticos em geral?
a) Percebo que o estudo da área dos triângulos retângulos é fundamental para resolver diversos problemas matemáticos.
b) Acredito que o estudo da área dos triângulos retângulos não seja tão relevante para problemas matemáticos.
c) Não compreendi a importância do estudo da área dos triângulos retângulos.
d) Não percebi a relação entre a área dos triângulos retângulos e a resolução de problemas matemáticos.
e) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina.

Figura 6.13: Exemplo da primeira página do questionário de opinião respondido



8) Você se sentiu estimulado a observar a relação entre as medidas dos lados dos triângulos e suas áreas?
a) Sim, fiquei muito interessado em explorar essa relação.
b) Na verdade, não me interessei muito por essa relação.
c) Não percebi a relação entre as medidas dos lados e as áreas dos triângulos.
d) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina.

9) Você teve dificuldade em entender a razão entre as áreas dos triângulos sucessivos de uma divisão?
a) Não tive nenhuma dificuldade, compreendi facilmente.
b) Tive um pouco de dificuldade, mas consegui entender no final.
c) Tive muita dificuldade em entender essa razão.
d) Não entendi como calcular essa razão durante a oficina.
e) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina.

10) Você achou válida a utilização da fórmula da soma de uma série geométrica finita durante a exploração do exemplo proposto?
a) Sim, achei muito válido e esclarecedor.
b) Tive dificuldade em entender como aplicar essa fórmula.
c) Não entendi como a fórmula está relacionada com o exemplo dado.
d) Não percebi a utilização da fórmula durante a oficina.
e) Não prestei atenção nesse aspecto.

11) Você se sentiu confortável ao aplicar a fórmula da soma de uma série geométrica finita para calcular as somas das áreas dos triângulos gerados por uma divisão sucessiva?
a) Sim, me senti confiante em aplicar a fórmula corretamente.
b) Tive dificuldade em calcular corretamente as somas das áreas.
c) Não entendi como realizar os cálculos com a fórmula da soma de uma série geométrica.
d) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina.

12) Você conseguiu perceber a relação entre a área dos triângulos retângulos sucessivos e a soma das áreas de um triângulo retângulo originalmente dado?

a) Sim, percebi claramente essa relação.
b) Tive dificuldade em entender essa relação durante a oficina.
c) Não percebi nenhuma relação entre as áreas dos triângulos retângulos.
d) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina.

13) Você acredita que a oficina contribuiu para o seu aprendizado sobre a soma das áreas de triângulos e sua relação com sistemas dinâmicos e progressões geométricas?

a) Sim, contribuiu muito para o meu aprendizado.
b) Contribuiu um pouco, mas ainda tenho algumas dúvidas.
c) Não senti que a oficina contribuiu para o meu aprendizado.
d) Não percebi a relação entre os conceitos durante a oficina.
e) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina.

Figura 6.14: Exemplo da segunda página do questionário de opinião respondido

1) O que você achou da oficina sobre a Progressão Geométrica com triângulos e Sistemas Dinâmicos?

Respostas	**Porcentagem**
a) Muito interessante e esclarecedora	60%
b) Um pouco confusa, tive dificuldade em acompanhar	18%
c) Não despertou meu interesse, achei entediante	15%
d) Não entendi o objetivo da oficina	4%
e) Achei a abordagem superficial, poderia ter explorado mais os conceitos	4%

Tabela 6.1: Respostas da primeira pergunta do questionário de opinião.

2) Você acredita que compreendeu bem o conceito de Sistemas Dinâmicos aplicados a sequências?

Respostas	**Porcentagem**
a) Sim, compreendi completamente	45%
b) Ainda tenho algumas dúvidas, mas entendi a ideia geral	36%
c) Tive muita dificuldade em entender os Sistemas Dinâmicos	11%
d) Não entendi como os Sistemas Dinâmicos são aplicados nas sequências	4%
e) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina	4%

Tabela 6.2: Respostas da segunda pergunta do questionário de opinião

3) Como você percebe a relação entre Sistemas Dinâmicos e Progressões Geométricas?

Respostas	**Porcentagem**
a) Percebo uma relação direta e clara entre os dois conceitos.	40%
b) Tenho uma noção geral da relação, mas não sei explicar com detalhes.	31%
c) Acredito que não há relação entre Sistemas Dinâmicos e Progressões Geométricas.	11%
d) Não percebi nenhuma relação durante a oficina.	9%
e) Não entendi a relação entre os dois conceitos.	9%

Tabela 6.3: Respostas da terceira pergunta do questionário de opinião

4) Você conseguiu utilizar a fórmula da área de um triângulo equilátero como exemplo concreto da relação entre Sistemas Dinâmicos e Progressões Geométricas?

Respostas	**Porcentagem**
a) Sim, foi um ótimo exemplo para entender a relação entre os conceitos.	40%
b) Tive dificuldade em aplicar a fórmula nas atividades propostas.	15%
c) Não entendi como a fórmula está relacionada com Sistemas Dinâmicos e Progressões Geométricas.	7%
d) Não percebi a utilização da fórmula durante a oficina.	11%
e) Não prestei atenção nesse aspecto.	27%

Tabela 6.4: Respostas da quarta pergunta do questionário de opinião

5) O que você achou das atividades propostas durante a oficina?

Respostas	**Porcentagem**
a) Muito desafiadoras e estimulantes	49%
b) Alguns exercícios foram confusos, mas no geral gostei	36%
c) Não gostei das atividades, achei muito simples	7%
d) Não entendi como as atividades se relacionam com o conteúdo	4%
e) Não prestei atenção nas atividades	4%

Tabela 6.5: Respostas da quinta pergunta do questionário de opinião

6) Você se sentiu seguro ao calcular a área dos triângulos retângulos?

Respostas	**Porcentagem**
a) Sim, me senti confiante nos cálculos	69%
b) Tive algumas dúvidas, mas consegui calcular corretamente	15%
c) Tive muita dificuldade em calcular as áreas	5%
d) Não entendi como realizar os cálculos	5%
e) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina	4%

Tabela 6.6: Respostas da sexta pergunta do questionário de opinião

7) Como você enxerga a importância do estudo da área dos triângulos retângulos para resolver problemas geométricos e matemáticos em geral?

Respostas	**Porcentagem**
a) Percebo o estudo da área dos triângulos retângulos é fundamental para resolver diversos problemas matemáticos.	80%
b) Acredito que o estudo da área dos triângulos retângulos não seja tão relevante para problemas matemáticos.	11%
c) Não compreendi a importância do estudo da área dos triângulos retângulos.	4%
d) Não percebi a relação entre a área dos triângulos retângulos e a resolução de problemas matemáticos.	4%
e) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina.	2%

Tabela 6.7: Respostas da sétima pergunta do questionário de opinião

8) Você se sentiu estimulado a observar a relação entre as medidas dos lados dos triângulos e suas áreas?

Respostas	**Porcentagem**
a) Sim, fiquei muito interessado em explorar essa relação.	80%
b) Na verdade, não me interessei muito por essa relação.	5%
c) Não percebi a relação entre as medidas dos lados e as áreas dos triângulos.	9%
d) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina.	5%

Tabela 6.8: Respostas da oitava pergunta do questionário de opinião

9) Você teve dificuldade em entender a razão entre as áreas dos triângulos sucessivos de uma divisão?

Respostas	**Porcentagem**
a) Não tive nenhuma dificuldade, compreendi facilmente	64%
b) Tive um pouco de dificuldade, mas consegui entender no final	22%
c) Tive muita dificuldade em entender essa razão	5%
d) Não entendi como calcular essa razão durante a oficina	5%
e) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina	4%

Tabela 6.9: Respostas da nona pergunta do questionário de opinião

10) Você achou válida a utilização da fórmula da soma de uma Progressão Geométrica Finita durante a exploração do exemplo proposto?

Respostas	**Porcentagem**
a) Sim, achei muito válido e esclarecedor.	55%
b) Tive dificuldade em entender como aplicar essa fórmula.	22%
c) Não entendi como a fórmula está relacionada com o exemplo dado.	15%
d) Não percebi a utilização da fórmula durante a oficina.	5%
e) Não prestei atenção nesse aspecto.	4%

Tabela 6.10: Respostas da décima pergunta do questionário de opinião

11) Você se sentiu confortável ao aplicar a fórmula da soma de uma Progressão Geométrica Finita para calcular as somas das áreas dos triângulos gerados por uma divisão sucessiva?

Respostas	**Porcentagem**
a) Sim, me senti confiante em aplicar a fórmula corretamente.	55%
b) Tive dificuldade em calcular corretamente as somas das áreas.	27%
c) Não entendi como realizar os cálculos com a fórmula da soma de uma Progressão Geométrica.	13%
d) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina.	5%

Tabela 6.11: Respostas da décima primeira pergunta do questionário de opinião

12) Você conseguiu perceber a relação entre a área dos triângulos retângulos sucessivos e a soma das áreas de um triângulo retângulos exatamente dados?

Respostas	**Porcentagem**
a) Muito interessante e esclarecedor	65%
b) Um pouco confuso, tive dificuldade em acompanhar	18%
c) Não despertou meu interesse, achei entediante	9%
d) Não entendi o objetivo da oficina	5%
e) Achei uma abordagem superficial, poderia ter explorado mais os conceitos	2%

Tabela 6.12: Respostas da décima segunda pergunta do questionário de opinião

13) Você acredita que a oficina contribuiu para o seu aprendizado sobre a soma das áreas de triângulos e sua relação com Sistemas Dinâmicos e Progressões Geométricas?

Respostas	Porcentagem
a) Sim, contribuiu muito para o meu aprendizado.	73%
b) Contribuiu um pouco, mas ainda tenho algumas dúvidas.	15%
c) Não sinto que a oficina contribuiu para o meu aprendizado.	7%
d) Não percebi a relação entre os conceitos durante a oficina.	4%
e) Não prestei atenção nesse aspecto durante a oficina.	2%

Tabela 6.13: Respostas da décima terceira pergunta do questionário de opinião

A oficina recebeu uma avaliação positiva pelos alunos, que expressaram uma boa percepção do conteúdo abordado. Eles destacaram a importância e aplicação prática do que foi aprendido, considerando as atividades desafiadoras e estimulantes. Além disso, a fórmula utilizada para calcular a soma de uma sequência geométrica foi mencionada como válida e clara. No entanto, alguns alunos relataram dificuldades na compreensão da relação entre Sistemas Dinâmicos e Progressões Geométricas, assim como no cálculo da área dos triângulos. Para melhorar essas áreas de dificuldade, sugere-se incluir mais exemplos concretos e atividades que explorem a relação entre Sistemas Dinâmicos e Progressões Geométricas, além de aumentar o número de exercícios para auxiliar no cálculo da área dos triângulos.

De maneira geral, a oficina foi eficaz na promoção da compreensão dos conceitos abordados. As sugestões dos alunos para melhoria incluem mais exemplos concretos, atividades mais aprofundadas sobre a relação entre Sistemas Dinâmicos e Progressões Geométricas, e mais exercícios para auxiliar no cálculo da área dos triângulos. Essas recomendações visam aprimorar a experiência de aprendizado dos alunos e fortalecer a compreensão dos conceitos apresentados na oficina.

CAPÍTULO 7

Considerações finais

O presente estudo visou investigar a aplicação de sequências didáticas para o ensino de Sistemas Dinâmicos Discretos associado a Progressões Geométricas. Foram revisados conceitos matemáticos como função, sequência, limite e derivada discretas, fundamentais para a compreensão das propriedades dos sistemas.

Durante a elaboração e discussão de exemplos para a utilização de sequências didáticas no ensino de Sistemas Dinâmicos Discretos relacionados a Progressões Geométricas, exploramos aplicações práticas, como o cálculo da área de triângulos equiláteros, triângulos retângulos e quadrados, além de abordar o crescimento de populações e a determinação de raízes quadradas. Levando em consideração o perfil das turmas às quais a sequência seria aplicada, escolhemos a sequência didática mais apropriada para promover uma aprendizagem significativa e adaptada às necessidades dos estudantes.

A sequência didática selecionada foi aplicada em três turmas do primeiro ano do Ensino Médio. Durante o processo, percebemos a necessidade de adicionar uma aula adicional, uma vez que uma análise mais aprofundada revelou que as três aulas planejadas inicialmente não seriam suficientes para explorar todo o conteúdo previsto. Foram criadas fichas de atividades para cada uma das quatro aulas, é importante ressaltar que a adaptação do material proposto requer ajustes relacionados à quantidade de conteúdo e à realidade da turma em questão.

A análise da eficácia das sequências didáticas desenvolvidas revelou resultados promissores na melhoria da aprendizagem dos alunos, oferecendo um ambiente estimulante e motivador para o ensino de Matemática. No entanto, identificamos algumas dificuldades, principalmente em relação à compreensão da relação entre a Progressão Geométrica e a área dos triângulos.

Para superar essas dificuldades, foi necessário revisar passo a passo o raciocínio por trás da fórmula da Progressão Geométrica, auxiliando os alunos a compreenderem a relação e a utilizar corretamente a fórmula. Sugere-se, no entanto, a inclusão de mais exemplos e atividades aprofundadas sobre a relação entre Sistemas Dinâmicos e Progressões Geométricas, além de oferecer um maior apoio no cálculo da área dos triângulos.

A percepção dos alunos em relação à oficina foi positiva, destacando a relevância dos conteúdos abordados e sua aplicação prática. Nesse sentido, é importante adaptar a linguagem e a didática em futuros questionários para tornar o conteúdo mais acessível aos alunos.

Os resultados positivos obtidos indicam que devemos continuar utilizando sequências didáticas, como uma estratégia pedagógica eficaz para introduzir conceitos básicos de Sistemas Dinâmicos Discretos no Ensino Médio.

Referências Bibliográficas

[1] BOYER, Carl. ***História da Matemática***. São Paulo: Editora Edgar Blucher, 1974 (citado na página 65).

[2] CARDOSO, Lísian Caroline L. A. “**Uma Introdução ao Estudo de Sistemas Dinâmicos no Ensino Médio**”. dissertation. Feira de Santana-Bahia: Universidade Estadual de Feira de Santana, 2022 (citado na página 1).

[3] CIPOLLI, Valéria Guedes. “**Sistemas dinâmicos discretos - análise de estabilidade**”. Tese de Doutorado. Rio Claro: Universidade Estadual Paulista, 2012 (citado na página 1).

[4] D. GUERHART. ***Nunca mais esqueça como formular Newton-Raphson***. https://dguerhart.wordpress.com/2017/05/16/nunca-mais-esqueca-como-formular-newton-raphson/. Acessado em 25 de setembro de 2023. 2017 (citado na página 12).

[5] DEVANEY, Robert L. ***An Introduction to Chaotic Dynamical Systems***. Addison-Wesley, 1989 (citado nas páginas 1, 39, 48).

[6] DOMINGUES, Hygino H. ***Espaços Métricos e Introdução a Topologia***. São Paulo: Editora Nobel, 1982.

[7] EVES, Howard. ***Introdução à história da matemática***. Editora da Unicamp, 2011.

[8] FERRAZ, Jéssica Klabunde. ***A importância da sequência didática como instrumento dinamizador no ensino da matemática***. https://repositorio.ifes.edu.br/handle/123456789/2430. Trabalho de conclusão de curso (Especialização em Práticas Pedagógicas). 2022 (citado na página 75).

[9] GAZETA SPM. ***Uma Breve História da Quinta Operação***. https://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=268. Acessado em 4 de dezembro de 2022. 2008 (citado na página 65).

[10] GEOGEBRA. ***Geogebra clássico***. Página inicial. Disponível em: <https://www.geogebra.org>. Acesso em: 05 de dez. de 2023. 2023 (citado na página 24).

[11] GUIDORIZZI, H.L. ***Um curso de cálculo***. LTC, 2013. ISBN: 9788521612803. URL: https://books.google.com.br/books?id=KUBROgAACAAJ (citado nas páginas 14, 46).

[12] MEU GURU. ***Teorema do Valor Médio Explicado***. https://www.blog.meuguru.net/teorema-do-valor-medio-explicado/. Acessado em 25 de setembro de 2023. 2023 (citado na página 9).

[13] NETO, Antônio C. M. ***Fundamentos de Cálculo***. 2a.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022 (citado nas páginas 3, 5, 6, 10, 16, 17).

[14] RACHA CUCA. ***Caça Palavras***. https://rachacuca.com.br/palavras/caca-palavras/criar/. Acessado em 25 de setembro de 2023. 2023 (citado na página 108).

[15] RPM - REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. ***Raiz quadrada utilizando médias***. https://rpm.org.br/cdrpm/45/4.htm. Acessado em 25 de setembro de 2023. 2001.

[16] SANTOS, Benerval Pinheiro. ***Etnomatemática e suas possibilidades pedagógicas: algumas indicações***. <http://www.mat.uc.pt/~mat1287/texto/etnomatematica.htm. Acesso em 20 de outubro de 2023. 2006 (citado na página 75).

[17] TTC, Rodrigo. ***Método de Newton-Raphson***. https://www.geogebra.org/m/hepx2wta. Acessado em 25 de setembro de 2023. 2019 (citado na página 72).

[18] VILLATE, Jaime E. ***Introdução aos sistemas dinâmicos: uma abordagem prática com Maxima***. Porto: Universidade do Porto, 2007 (citado na página 1).