

Universidade Federal de Uberlândia

Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal

Curso de Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso

Geometria Projetiva: uma introdução geométrica e analítica

por

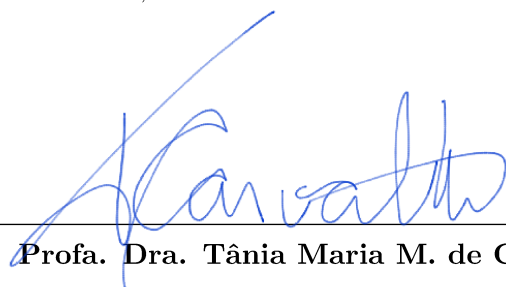
Matheus Felipe Calu Rocha †

Bacharelado em Matemática - Ituiutaba - MG

Orientador(a): Profa. Dra. Tânia M. Machado de Carvalho

Este exemplar corresponde à redação final do Trabalho de Conclusão de Curso devidamente corrigido e defendido por **Matheus Felipe Calu Rocha** e aprovado pela comissão julgadora.

Ituiutaba, 27 de novembro de 2023.



Prof. Dra. Tânia Maria M. de Carvalho

Banca examinadora:

Prof. Dra. Tânia Maria Machado de Carvalho

Prof. Dr. Alisson Rafael Aguiar Barbosa

Prof. Dr. Moisés Rodrigues Cirilo do Monte

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal, UFU como requisito parcial para obtenção do título de **Bacharel em Matemática**.

Aos meus pais

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar aos meus pais *Paulo Rogério Oliveira Rocha* e *Lucimeire Rodrigues Morais Rocha* pelo apoio, confiança e amor que sempre me proporcionaram ao longo da minha jornada.

A minha irmã *Isabella Morais Rocha* pela amizade constante e por estar presente em todos os instantes. Tudo o que sou ou venha a ser eu devo a vocês.

À minha orientadora, professora e amiga *Tânia Maria Machado de Carvalho*, por todo conhecimento compartilhado e pelos conselhos que enriqueceram não apenas minha jornada acadêmica, mas também minha formação como ser humano. Conselhos estes que levarei para toda vida.

Aos membros da banca avaliadora, Prof. *Alisson Rafael Aguiar Barbosa* e Prof. *Moisés Rodrigues Cirilo do Monte*, pela disponibilidade e contribuições em meu trabalho.

A todos os professores do *Curso de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal (ICENP)* da *Universidade Federal de Uberlândia (UFU)*, por todo auxílio e ensinamentos.

Expresso minha gratidão ao *Programa de Educação Tutorial (PET) Matemática Pontal e seus integrantes*, por todas as experiências e aprendizados que enriqueceram meu crescimento pessoal e acadêmico. Em especial, ao Prof. *Marcelo Gonçalves Vieira* e Profa. *Evaneide Alves Carneiro* pela tutoria.

A todas as amizades feitas durante a graduação, em especial aos integrantes do grupo “*Manga*”, por estarem sempre ao meu lado, compartilhando risos nos momentos descontraídos e apoio durante as adversidades.

À Universidade Federal de Uberlândia e ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal e a cada um dos seus funcionários, que tornaram possível a minha formação.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo apresentar uma introdução aos conceitos essenciais da geometria projetiva, tanto de forma geométrica quanto analítica. O escopo do trabalho inclui uma apresentação dos conceitos fundamentais, em ambas as perspectivas, destacando temas como projetividade, invariância, dualidade, modelos para a reta projetiva e o plano projetivo, entre outros. Esse trabalho teve por base uma pesquisa realizada no âmbito de um projeto de iniciação científica, dentro do Programa de Educação Tutorial (IC PET). A metodologia utilizada foi de caráter bibliográfico, sendo as principais referências para esta pesquisa os trabalhos [1], [2], [6]. A expectativa é que, da mesma forma que este trabalho contribuiu significativamente para a formação acadêmica do pesquisador/autor, contribua também com a formação de alunos de cursos de matemática e áreas afins, em nível de graduação.

Palavras chaves: Geometria projetiva; dualidade; teorema de Desargues; plano projetivo.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Feixe de pontos.	9
1.2	Feixe de retas.	10
1.3	O ponto P e o feixe de pontos r (reta r) do plano projetivo \mathcal{F} correspondem ao feixe de pontos r (reta r) e ao feixe de retas passando por P em \mathcal{F}^*	10
1.4	Perspectividade entre dois feixes de pontos.	11
1.5	Perspectividade entre dois feixes de retas.	11
1.6	Perspectividade entre um feixe de retas e um feixe de pontos.	12
1.7	Projetividade.	12
1.8	Os dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são perspectivos pelo ponto O e também pela reta PQ (teorema de Desargues).	13
1.9	Quadrângulo completo de vértices A, B, C, D e pontos diagonais P, Q e R	13
1.10	Quadrilátero completo de vértices A, B, C, D, E e F , e retas diagonais j, l e k (retas pontilhadas em vermelho).	14
1.11	Reta que passa pela origem corresponde a um ponto em α	16
1.12	Plano que passa pelo origem e determina uma reta em α	17
1.13	Dual do teorema de Desargues	20
1.14	Conjunto quadrangular com 6 pontos de interseção.	21
1.15	Conjunto harmônico $H = (AB, CD)$	21
1.16	O conjugado harmônico é único.	22
1.17	$H(AB, CD)$ existe, se e somente se, $H(CD, AB)$	23
1.18	Conjunto harmônico $H(ab, cd)$	24

1.19	Perspectividade entre o feixe de pontos r e s	25
1.20	Projetividade entre os feixes de pontos A, B, C e A'', B'', C'' respectivamente. Denotado por $ABC \wedge A''B''C''$	26
1.21	Projetividade entre os feixes de retas a, b, c e a'', b'', c'' respectivamente. Denotado por $abc \wedge a''b''c''$	26
1.22	Projetividade entre os feixes de retas a, b, c e um feixe de pontos A'', B'', C'' respectivamente. Denotado por $abc \wedge A''B''C''$	27
1.23	Teorema Fundamental	28
1.24	Se $H(AB, CD)$ e $ABCD \wedge A'B'C'D'$, então $H(A'B', C'D')$	30
1.25	A reta h contém as intersecções de todos cruzamentos transversais.	31
1.26	X tende ao infinito.	33
1.27	Razão cruzada: $AC/BC \div AD/BD = r$; $A'C'/B'C' \div A'D'/B'D' = r$; $(EG/FG)/(FD'/GD') = r$	36
1.28	AD e AE são a bissetriz interna e externa, respectivamente, do ângulo $B\hat{A}C$	37
1.29	Conjunto harmônico, com quadrângulo $AFGP_\infty$, com origem ideal P_∞	38
1.30	Exemplo de polaridade.	40
1.31	Polaridade no plano projetivo	40
1.32	Os pontos C e D dividem harmonicamente o segmento AB	41
2.1	Interpretação geométrica das coordenadas homogêneas $[x, y, t]$ do ponto $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$, vistas como sendo a reta r passando pela origem do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , com vetor diretor $v = (x, y, t)$, onde $x = tX$ e $y = tY$	45
2.2	Interpretação geométrica das coordenadas homogêneas $[tX, t]$ do ponto $X \in \mathbb{R}$, vistas como sendo a reta r passando pela origem do espaço euclidiano \mathbb{R}^2 , com vetor diretor $v = (x, t)$, onde $x = tX$	48
2.3	Interpretação geométrica das coordenadas homogêneas $[tx, ty, t]$ do ponto $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$, vistas como sendo a reta r passando pela origem do espaço euclidiano \mathbb{R}^2 , com vetor diretor $v = (x, y, t)$, onde $x = tX$ e $y = tY$ (repetimos aqui a figura para facilitar a leitura).	51
2.4	O vetor (a, b, c) é ortogonal ao vetor (x, y, z) , de forma que a reta projetiva pode ser entendida como sendo o plano euclidiano ortogonal ao vetor (a, b, c) e que passa pelo ponto (x, y, z) , acrescida de um ponto no infinito, o qual por sua vez, pode ser entendido como a direção no plano xOy determinada pela projeção usual $(x, y, 0)$ do vetor (x, y, z)	53

-
- 2.5 A reta projetiva $[u_1; u_2; u_3]$ representa um plano que passa pela origem de \mathbb{R}^3 , é ortogonal ao vetor (u_1, u_2, u_3) e passa pelo ponto euclidiano $(x_1, y_1, 1)$ de forma que, do ponto de vista euclidiano, o vetor $(x_1, y_1, 1)$ é ortogonal ao vetor (u_1, u_2, u_3) . 55
- 2.6 Interpretação geométrica de uma reta projetiva PQ definida por dois pontos projetivos P e Q 59
- 2.7 Se $Q = (q_1, q_2, q_3) \in X$ e $R = (r_1, r_2, r_3) \in Y$ são dois representantes das respectivas classes de equivalência X e Y , distintos, e \bar{P} um representante da classe de equivalência P (onde P pertence à reta definida por X e Y), existem números reais δ_1 e δ_2 , tais que $\bar{P} = \delta_1 Q + \delta_2 R$. Ou seja, \bar{P} tem coordenadas homogêneas $[p_1, p_2, p_3]$ onde $p_i = \delta_1 x_i + \delta_2 y_i$, $i = 1, 2, 3$; e $\delta_1^2 + \delta_2^2 = 0$ 61

CONTEÚDO

Resumo	iii
Lista de Figuras	v
Introdução	1
1 Modelo geométrico para o plano projetivo	7
1.1 O plano euclidiano estendido	7
1.2 O conceito de dualidade na geometria projetiva	8
1.3 Projetividade e perspetividade	10
1.4 Quadrângulo completo e quadrilátero completo	13
1.5 Sistema axiomático para a geometria projetiva	14
1.6 Um modelo geométrico para o plano projetivo	15
1.7 Propriedades do plano projetivo	19
1.7.1 Conjunto Harmônico	20
1.7.2 Razão cruzada X razão harmônica	31
1.7.3 Mais alguns resultados envolvendo a razão harmônica	34
1.7.4 A razão cruzada é um invariante da geometria projetiva	35
1.7.5 Razão harmônica	36
1.8 Polaridade e inversão	39

2	Modelo analítico para o plano projetivo	42
2.1	O plano euclidiano estendido	42
2.1.1	Coordenadas Homogêneas em espaços vetoriais	43
2.1.2	Espaços projetivos reais	45
2.1.3	O espaço projetivo unidimensional \mathbb{P}^1 (Reta Projetiva)	46
2.1.4	O espaço projetivo bidimensional \mathbb{P}^2 (Plano Projetivo)	48
2.1.5	Entendimento (informal) do conceito de pontos e retas no plano projetivo	52
2.1.6	O <i>princípio da dualidade</i> do ponto de vista analítico	54
2.1.7	Formalização algébrica do conceito de reta no plano projetivo	54
2.1.8	Modelo analítico do plano projetivo	56
2.2	Considerações finais	71
	Bibliografia	72

Introdução

A matemática é, em geral, dividida em três grandes áreas, conhecidas como os pilares que delineiam os modos de pensar em matemática. São elas a *geometria*, a *álgebra* e a *análise*, as quais, por sua vez, se ramificam em diversas subáreas que frequentemente se interconectam, de forma que os matemáticos são, geralmente, categorizados como algebristas, geômetras ou analistas. Alguns exemplos de geômetras que apareceram ao longo da história do desenvolvimento da matemática são Arquimedes, Isaac Newton, Bernhard Riemann, Henri Poincaré, Felix Klein, Michael Atiyah, Vladimir Arnold e Mikhail Gromov, entre muitos outros.

Problemas matemáticos podem ser apresentados em uma abordagem geométrica, algébrica ou analítica, sendo que a escolha, em geral, depende de preferências pessoais, bastante subjetivas, ou podem estar atreladas à natureza do problema.

Um exemplo fácil de se apresentar é o caso da geometria analítica, na qual usa-se principalmente a álgebra para resolver problemas geométricos; outro exemplo é a álgebra geométrica, onde faz-se o oposto, ou seja, interpretam-se entes algébricos geometricamente. Interpretações geométricas podem ser utilizadas para visualizar identidades algébricas e vice-versa.

A palavra *geometria* tem origem nos termos gregos *geo* (terra) e *métron* (medir). Em geral, é usada para referir-se a áreas da matemática dedicadas ao estudo de conceitos relacionados a formas, medidas e posições relativas entre figuras ou propriedades. Exemplos incluem geometrias planas e espaciais (conhecidas como *geometrias euclidianas*), geometria projetiva, geometria esférica e geometria hiperbólica (conhecidas como *geometrias*

não euclidianas).

Existe um ramo da geometria que se concentra na construção e estudo sintético (sem o uso de coordenadas) das formas e dos lugares geométricos denominada *geometria sintética* ou *geometria pura*. Este tipo de geometria se apoia na construção lógica a partir de axiomas e postulados básicos. Ela se preocupa em demonstrar teoremas e propriedades geométricas através de argumentos puramente geométricos, muitas vezes usando métodos de construção, congruência, semelhança e relações métricas, de forma a estabelecer uma cadeia lógica de raciocínios.

A principal diferença entre geometria analítica e geometria sintética reside no tratamento dado a elas. Por exemplo, na geometria analítica, o uso da álgebra é essencial, enquanto na geometria sintética, seu uso é opcional.

Após a publicação do livro *Elementos* de Euclides, muitos matemáticos suspeitaram que o quinto postulado (postulado das paralelas) poderia ser demonstrado a partir dos postulados anteriores. Em 1773, o matemático Giovanni Girolamo Saccheri publicou o livro *Euclides ab omni naevo vindicatus*, afirmando ter encontrado uma contradição no quinto postulado. Contudo, após sua publicação, Saccheri faleceu e sua obra foi esquecida. Somente em 1830 os matemáticos começaram a perceber que o quinto postulado não podia ser demonstrado, levando ao surgimento de um novo tipo de geometria, estabelecendo assim as bases para o que hoje é denominado por *geometrias não euclidianas*, que são geometrias que, *grosso modo*, substituem esse postulado por outro.

A geometria projetiva nasce na Itália, no século XV, época do Renascimento (entre 1400 a 1600), a partir da necessidade de aprimorar conceitos e técnicas de pinturas para uma melhor representação da realidade. Entretanto, demorou mais de dois séculos para que a geometria projetiva tomasse uma forma matemática, quando, em 1639 o matemático, arquiteto e engenheiro francês Girard Desargues (1591-1661) desenvolveu procedimentos matemáticos que correspondiam com o que os pintores produziram no Renascimento. Ele produziu diversos resultados importantes, como a técnica da perspectiva linear com a utilização do ponto de fuga, o famoso *Teorema de Desargues* e concepções sobre as cônicas e o plano projetivo. Alguns autores consideram que os trabalhos de Desargues foram pouco conhecidos devido ao uso de uma linguagem um pouco confusa, sendo que, após a sua morte seu trabalho permaneceu praticamente esquecido.

Outros nomes importantes no desenvolvimento da geometria projetiva foram Blaise Pascal (1623-1663), Philippe De La Hire (1640-1718), Johann Heinrich Lambert (1728-

1777), Gaspard Monge (1746-1818), Lazare Carnot (1753-1823), tendo todos eles contribuído de alguma forma com resultados sobre projeções. Contudo, foi Jean-Victor Poncelet que revolucionou os estudos sobre geometria projetiva, escrevendo, em 1822, o seu principal trabalho *Traité des Propriétés projectives des figures*, o qual foi um marco para a geometria projetiva. Ele revolucionou a forma de considerar as propriedades das figuras e também a forma como elas se relacionam no espaço.

O trabalho de Poncelet motivou diversos matemáticos a ingressarem nesse novo campo do conhecimento matemático, tais como Geogonne (1771-1859), Julian Brianchon (1785-1864), Chasles (1793-1880), Plucker (1801-1868), Steiner (1796-1863) e Cremona (1830-1903). Somente a partir de Poncelet é que os teoremas de Desargues, relativos a propriedades projetivas de triângulos, e também o *teorema de Pascal* sobre interseções de cônicas, ficaram completamente entendidos. Poncelet hoje é considerado o pai da geometria projetiva. Após Poncelet a geometria projetiva se tornou, de fato, uma área da matemática, com definições, teoremas e axiomas.

A geometria projetiva lida com o mundo que vemos, apresentando uma geometria sem qualquer tipo de medida (distância, ângulo, etc ...), divergindo de alguns conceitos da geometria euclidiana, como por exemplo a não existência, na geometria projetiva, de retas paralelas. Nesta Geometria, qualquer par de retas distintas é incidente em um ponto e por qualquer par de pontos distintos passa somente uma reta. Esta dualidade é uma das suas características fundamentais, permitindo associar a ela uma estrutura simétrica caracterizada pelo principio de dualidade. Para exemplificar a ideia de que duas retas sempre se intersectam, basta tomar como exemplo um trilho de trem em um trecho retilíneo. Sabe-se que as bordas dos trilhos são paralelas, porém, ao olhar para elas no horizonte é possível ver, ou imaginar, que a distância entre elas se afunila de forma a haver uma interseção entre elas.

Na matemática, um sistema axiomático é um conjunto de axiomas que se combinam logicamente para derivar teoremas. Uma teoria matemática consiste em um sistema axiomático e todos os seus teoremas. Um sistema axiomático completamente descrito é um tipo especial de sistema formal. Uma prova formal é uma representação completa de uma prova matemática dentro de um sistema formal.

Um sistema axiomático é dito consistente se não há contradição, ou seja, ele não pode derivar tanto uma afirmação quanto sua negação.

Dentro de um sistema axiomático, um axioma é chamado de independente se não

pode ser derivado a partir de outros axiomas do sistema. Um sistema é considerado independente se todos os seus axiomas forem independentes. No entanto, a independência não é uma exigência para que um sistema exista, ao contrário da consistência, que é fundamental.

Um sistema axiomático será completo se, para toda sentença, for possível derivar, sua afirmação ou sua negação.

Em uma teoria axiomática, os axiomas são estabelecidos sem dedução e tomados como ponto de partida para a dedução dos teoremas. Entretanto, os teoremas podem ser utilizados para a dedução de outros teoremas. Como condição adicional é geralmente colocado que o conjunto de axiomas seja decidível no sentido de ser um conjunto recursivo. Todo conjunto finito de axiomas é decidível e, portanto, aceitável com essa condição.

Apesar de sistemas axiomáticos existirem desde a antiguidade (por exemplo a geometria euclidiana do livro Elementos de Euclides), as teorias axiomáticas formalizadas baseiam-se nos desenvolvimentos da lógica matemática acontecidos a partir das últimas décadas do século XIX, devido aos trabalhos de Frege, Post, Russell, Whitehead, Hilbert, Skolem e outros.

No desenvolvimento das teorias axiomáticas no século XX, foi muito significativa a influência dos *Problemas de Hilbert*, no qual Hilbert propôs que as teorias matemáticas deveriam ser formalizadas como teorias axiomáticas, sendo as deduções realizadas de maneira puramente formal, utilizando regras lógicas formais previamente definidas. No sexto dos seus problemas, Hilbert propôs ainda que as teorias físicas também deveriam ser axiomatizadas à maneira das teorias matemáticas.

O método axiomático envolve substituir um corpo coerente de proposições (i.e. uma teoria matemática) por uma coleção mais simples de proposições (i.e. axiomas). Os axiomas são desenvolvidos de forma que o corpo original de proposições podem ser deduzidos dos axiomas.

As geometrias não euclidianas (Geometria Projetiva, Geometria Hiperbólica, Geometria Elíptica, entre outras) são geometrias baseadas num sistema axiomático, mas que admitem uma formulação analítica. Isso quer dizer que estas geometrias podem ser desenvolvidas com a utilização de procedimentos algébricos, por meio dos quais, os conceitos das geometrias axiomáticas podem ser compreendidos de uma forma inteiramente nova, com a inserção de novos métodos para as demonstrações e utilização das propriedades dos objetos.

Muito embora o estudo analítico se baseie na premissa de que cada ponto no plano ou espaço euclidiano, no plano projetivo ou hiperbólico pode ser representado por pares ou ternas de números reais ordenados ou de números reais que representam classes de equivalência, uma geometria pode ser desenvolvida sem a utilização de coordenadas. A Geometria Projetiva é uma geometria consistente, desenvolvida sem a noção de distância e uma de suas principais características é a inexistência de retas e planos paralelos.

Este trabalho tem como objetivo aprofundar o conhecimento no que tange aos fundamentos básicos da geometria projetiva, sua representação e manipulação geométrica e algébrica, por meio do estudo de alguns tópicos que auxiliem na compreensão de seus elementos, do modelo e das transformações no espaço projetivo. A ideia é estudar a apresentação dos elementos e o sistema de axiomas dessa geometria e, na sequência, analisar o modelo analítico e as transformações da geometria projetiva, com o objetivo de efetuar, no modelo analítico, verificações do sistema axiomático, por meio de procedimentos algébricos.

Vamos dividir este trabalho em duas partes da seguinte maneira:

- No *Capítulo 1*, são explorados os conceitos fundamentais da geometria projetiva, com ênfase na formulação de um modelo geométrico para o plano projetivo, regidos por axiomas previamente estabelecidos. Além disso, serão apresentadas algumas propriedades inerentes a esse modelo.
- No *Capítulo 2*, em sintonia com o Capítulo 1, é apresentada a formulação de um modelo algébrico para o plano projetivo por meio de *coordenadas homogêneas*. Mostra-se que as propriedades observadas no modelo geométrico, apresentado no primeiro capítulo, são verificadas neste novo contexto.

CAPÍTULO 1

Modelo geométrico para o plano projetivo

1.1 O plano euclidiano estendido

Como dito na introdução desse trabalho a *geometria projetiva* lida com o estudo das propriedades geométricas que são invariantes em relação a transformações projetivas.

Existem várias formas de abordar o estudo da geometria projetiva. Em particular, a geometria projetiva plana pode ser desenvolvida sobre um *plano euclidiano estendido*, o qual pode ser obtido a partir do plano euclidiano da seguinte forma:

Considera-se uma reta no plano euclidiano e determina-se o conjunto de todas as retas paralelas a essa reta e chamamos esse conjunto de *feixe de retas paralelas*, de forma que a cada reta distinta obtém-se um feixe de retas paralelas distinto. Agora, para cada feixe de retas associe um conceito abstrato de *ponto no infinito*, tal que todas as retas que são paralelas se interceptam nesse ponto. Cada feixe de retas paralelas está associado a um único ponto no infinito, isto ficará claro ao longo deste capítulo.

Mas como no plano euclidiano existem infinitas possibilidades de direções de retas, é intuitivo pensar que teremos, para cada direção, um feixe de retas paralelas, e conseqüentemente, para cada direção existirá um ponto no infinito. Podemos então pensar (abstratamente) que o conjunto (com infinitos elementos) de todos os pontos no infi-

nito são “colineares” e, por conseguinte, determinam uma “reta” denominada *reta no infinito* ou *reta ideal*, ou *reta imprópria*. Denominando as retas que não são *ideais* por retas ordinárias (ou próprias), podemos então pensar em um plano euclidiano estendido constituído pela união entre o conjunto de todas as retas ordinárias com a reta no infinito.

A ideia principal da geometria projetiva reside em supor que qualquer par de retas paralelas possui um ponto de intersecção, o qual é exatamente o *ponto do infinito*. Desta forma, todas as retas paralelas se interceptam, e conseqüentemente, nessa geometria não existe o conceito de paralelismo.

Um ponto no infinito é também chamado de *ponto impróprio* ou *ponto ideal*, e é comumente denotado por P_∞ . Os pontos que não são pontos ideais são ditos pontos *próprios* ou *ordinários*.

Desse ponto de vista, o *plano projetivo* pode ser, considerado como a união de todas as retas do plano euclidiano com uma reta ideal (ou, equivalentemente o plano euclidiano acrescido do conjunto de todos os pontos ideais). Segundo essa abordagem um *plano projetivo* é também denominado *plano euclidiano estendido* ou *plano euclidiano aumentado*.

Uma importante observação a se fazer é que os pontos e reta impróprios (ou ideais), nesta geometria, são tratados como se fossem pontos e retas *próprios*, sem que se necessite fazer qualquer distinção entre pontos (retas) próprios e impróprios.

Nesse contexto, neste capítulo será apresentada uma formalização geométrica para a *geometria projetiva plana*. Para isso serão apresentados os principais conceitos e um sistema axiomático que, juntos, estruturam essa geometria. Para desenvolver este capítulo utilizou-se como base as referências [1], [2] e [8].

1.2 O conceito de dualidade na geometria projetiva

Nesta seção são apresentados alguns objetos da geometria projetiva com suas respectivas definições.

O conceito de *dualidade* foi introduzido por por Jean-Victor Poncelet (1788-1867), sendo este conceito uma das bases nas quais se fundamentam a Geometria projetiva. O conceito de dualidade permite construir um sistema geométrico no qual qualquer definição (ou teorema) da **geometria projetiva plana** dá origem a uma outra definição (ou um

outro teorema, respectivamente) denominada *definição dual* (*teorema dual, respectivamente*). Isso significa que o princípio da dualidade determina uma estrutura simétrica, na qual definições ou teoremas continuam válidos quando se trocam os termos *pontos* por *retas* (e vice-versa), *ligam* por *interceptam* (e vice-versa) e, *colineares* por *concorrentes* (e vice-versa). Isto torna possível a dualização de figuras geométricas, visto que uma figura é definida como um conjunto determinado por pontos e retas.

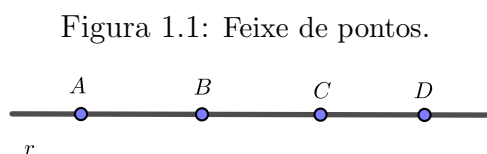
É importante ressaltar que a dualidade projetiva é uma característica da geometria projetiva plana, não sendo aplicável quando se introduzem questões métricas de distâncias e ângulos, ou noções de paralelismo e/ou proporção. A vantagem da aplicação do conceito de dualidade na geometria projetiva reside no fato de que, uma vez demonstrado um resultado, o seu dual não precisa ser demonstrado, sendo automaticamente considerado como válido, para mais informações consultar a referência [5].

Para entendermos melhor o conceito de dualidade veremos um série de definições.

No que segue, os termos ponto, reta, plano e pertence são considerados *conceitos primitivos da geometria projetiva*.

Definição 1.1. Uma figura em geometria projetiva é um conjunto definido por pontos e retas.

Definição 1.2. (*Feixe de pontos*) Um conjunto de pontos incidentes a uma reta r , é denominado *feixe de pontos* (ou *fileira de pontos*) com eixo r (ver Figura 1.1).

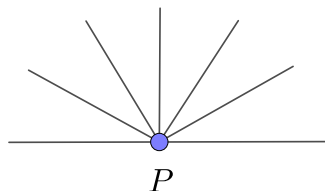


Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Definição 1.3. (*Feixe de retas - Definição dual do Feixe de pontos*) um conjunto de retas incidentes sobre um ponto P , é denominado um *feixe de retas* com centro P (ver Figura 1.2).

Observação 1.4. Quando não houver risco de ambiguidade, serão utilizados os termos reta r e plano π para indicar um feixe de pontos com eixo r ou um feixe de retas com centro em um ponto P , respectivamente.

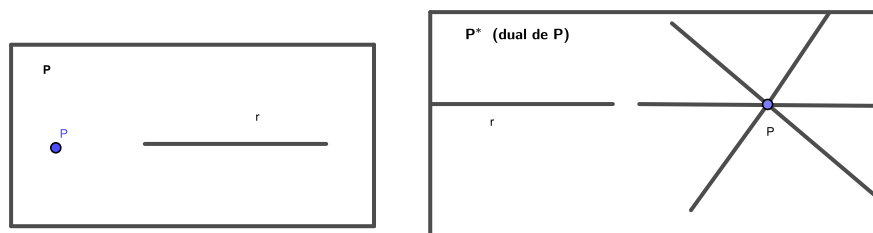
Figura 1.2: Feixe de retas.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

O plano projetivo pode ser definido axiomáticamente, de forma que se α é um plano projetivo, o princípio da dualidade garante a existência de outro plano projetivo \mathcal{F}^* , dual de \mathcal{F} , tal que os pontos e os feixes de pontos de \mathcal{F}^* são, respectivamente, as retas e os feixes de retas, incidentes ao ponto P (veja Figura 1.3).

Figura 1.3: O ponto P e o feixe de pontos r (reta r) do plano projetivo \mathcal{F} correspondem ao feixe de pontos r (reta r) e ao feixe de retas passando por P em \mathcal{F}^* .



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

1.3 Projetividade e perspectividade

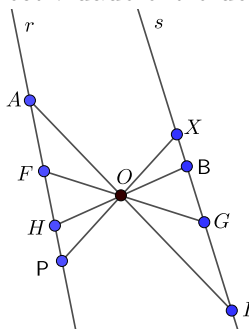
Dois exemplos que ilustram bem a questão da dualidade são os conceitos de *quadrângulo completo* e *quadrilátero completo*, sendo um o dual do outro. Porém, antes de serem apresentados estes conceitos será necessário introduzir mais algumas definições.

Definição 1.5. Denomina-se por *perspectividade* a relação biunívoca entre dois feixes quaisquer, ou seja, um elemento de um feixe corresponde a um, e somente um, elemento do outro.

A seguir vamos enumerar os tipos de perspectividade que podemos encontrar na geometria projetiva.

Definição 1.6. Dados dois feixes de pontos com eixos r e s , dizemos que os dois feixes estão relacionados perspectivamente, se cada reta que une o ponto P , sobre r , ao ponto correspondente X , sobre s , é incidente sobre um ponto fixado O , chamado de centro da perspectividade. Para essa perspectividade usaremos a notação $P \overset{O}{\wedge} X$ (ver Figura 1.4).

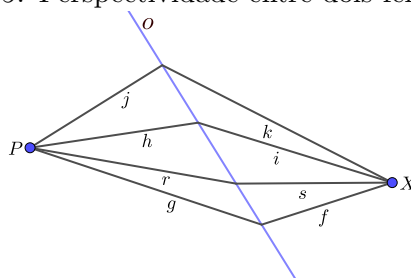
Figura 1.4: Perspectividade entre dois feixes de pontos.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Definição 1.7. Dados dois feixes de retas com centros P e X , dizemos que os feixes estão relacionados perspectivamente se, cada ponto de intersecção das retas r e s , incidentes aos pontos P e X , respectivamente, pertence a uma reta fixada o , chamada eixo da perspectividade. Para essa perspectividade usaremos a notação $r \overset{o}{\wedge} s$ (veja Figura 1.5).

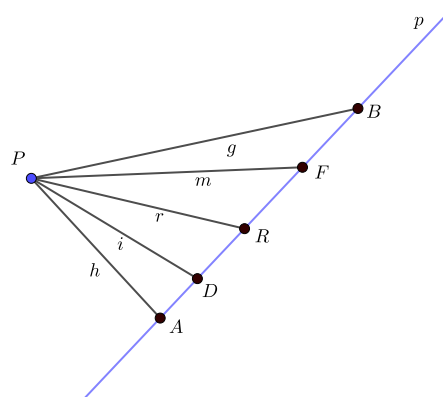
Figura 1.5: Perspectividade entre dois feixes de retas.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Definição 1.8. Dado um feixe de retas com centro em P e um feixe de pontos de eixo p , dizemos que estes feixes estão relacionados perspectivamente se, cada reta r incidente ao ponto P é incidente a um ponto R sobre o eixo p . Denotaremos tal perspectividade por $P \bar{\wedge} r$ ou $r \bar{\wedge} P$ (veja Figura 1.6).

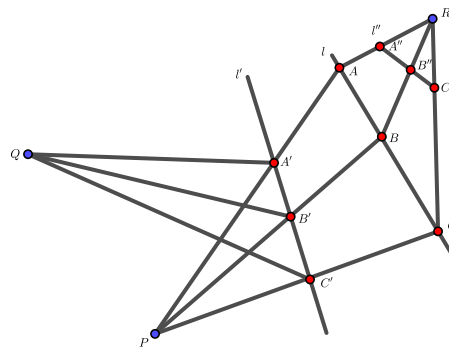
Figura 1.6: Perspectividade entre um feixe de retas e um feixe de pontos.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Definição 1.9. Uma *projetividade* é uma combinação finita de perspectividades, ou seja, dado um feixe de pontos (ou retas) e um feixe de retas (ou pontos), dizemos que eles estão relacionados projetivamente se, e somente se, o resultado da relação biunívoca entre os dois feixes for um número finito de perspectividades (veja Figura 1.7).

Figura 1.7: Projetividade.

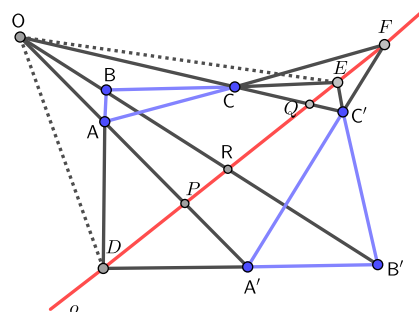


Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Observação 1.10. Quando existe uma projetividade entre dois feixes diz-se que os feixes estão *relacionados projetivamente*.

Definição 1.11. Duas figuras distintas, formadas de pontos e retas, são ditas *perspectivas* se todas as retas incidentes aos pares de pontos correspondentes concorrem em um ponto O (figuras perspectivas por um ponto, com O como centro de perspectividade), ou, se os pares de retas correspondentes incidem sobre uma mesma reta o (figuras perspectivas por uma reta, com o como o eixo de perspectividade)(veja Figura 1.8).

Figura 1.8: Os dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são perspectivos pelo ponto O e também pela reta PQ (teorema de Desargues).



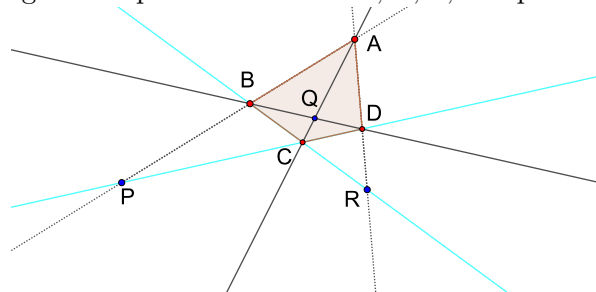
Fonte: Arquivo pessoal do autor.

1.4 Quadrângulo completo e quadrilátero completo

No que se segue vamos introduzir os conceitos de quadrângulo completo e quadrilátero completo. Veremos, a partir das respectivas definições, que uma definição é dual da outra.

Definição 1.12. Um *quadrângulo completo* é uma figura formada por 4 pontos coplanares, a cada três não colineares, e as 6 retas que unem estes pontos. Os 4 pontos são denominados *vértices* e as 6 retas são os *lados* do quadrângulo. Dois lados são denominados *opostos* se o ponto comum entre eles não é um vértice, e o ponto comum a dois lados opostos é chamado de *ponto diagonal*. Observe que um quadrângulo completo possui três pontos diagonais

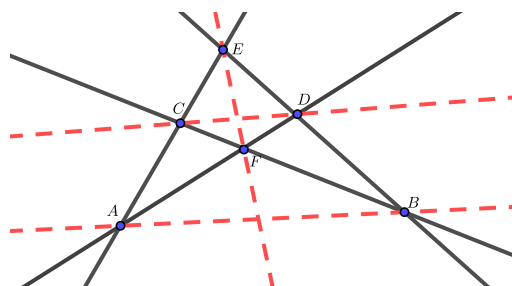
Figura 1.9: Quadrângulo completo de vértices A, B, C, D e pontos diagonais P, Q e R .



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Definição 1.13. Um *quadrilátero completo* é uma figura formada por 4 retas coplanares, e os 6 pontos de interseção determinados por estas retas. As quatro retas são denominadas *lados* e os 6 pontos de interseção são denominados *vértices* do quadrilátero. Dois vértices são ditos *opostos* se a reta que os une não é um lado, esta reta é denominada *reta diagonal*. Observe que um quadrilátero completo possui 3 retas diagonais.

Figura 1.10: Quadrilátero completo de vértices A, B, C, D, E e F , e retas diagonais j, l e k (retas pontilhadas em vermelho).



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Fica evidente que o quadrilátero completo é o dual do quadrângulo completo (e vice-versa), visto que, trocando-se pontos por retas e retas por pontos, em uma das definições, obtém-se a outra definição. Dizemos então que as duas figuras determinadas pelo quadrângulo e pelo quadrilátero são *figuras duais*.

O conceito de quadrângulo completo é um conceito necessário para a construção do arcabouço axiomático que virá a seguir. Após a introdução do sistema axiomático, serão retomados os estudos das propriedades projetivas.

1.5 Sistema axiomático para a geometria projetiva

Teorias baseadas em sistemas axiomáticos são teorias nas quais as deduções e/ou demonstrações sempre se apoiam em asserções anteriores (conceitos primitivos), denominadas *axiomas* (ou *postulados*). Ou seja, para se construir uma teoria baseada em um sistema axiomático é necessário que sejam introduzidas algumas asserções, as quais devem ser aceitas sem exigências de deduções e/ou demonstrações (tidas como *primeiras*), para que não se caia em um *regresso infinito*.

Pode-se, então, dizer que axiomas são informações e conclusões evidentes dos conceitos primitivos e um *sistema axiomático* é um conjunto de axiomas que utiliza conceitos pri-

mitivos para derivar definições e teoremas, por meio de formulações lógicas (veja o quadro a seguir).

conceitos primitivos \rightarrow axiomas \rightarrow definições e teoremas

Existem várias abordagens para o desenvolvimento da geometria projetiva. A abordagem aqui adotada será a de utilizar o *Teorema de Desargues* como axioma, visto que, para a demonstração desse teorema é necessário utilizar “um ponto fora do plano”, ou seja é necessário uma “fuga” do plano para que se obtenha sua demonstração, problema este que se resolve demonstrando o seu dual e utilizando o próprio teorema como um axioma.

- Axioma 1. Quaisquer dois pontos distintos são incidentes com exatamente uma reta.
- Axioma 2. Quaisquer duas retas distintas são incidentes com pelo menos um ponto.
- Axioma 3. Existem pelo menos quatro pontos, que a cada três não são colineares.
- Axioma 4. Os três pontos diagonais de um quadrângulo completo nunca são colineares.
- Axioma 5. Se dois triângulos são perspectivos por um ponto, eles são perspectivos por uma reta (Teorema de Desargues).
- Axioma 6. Se uma projetividade deixa invariante três pontos distintos de uma fileira, então ela deixa invariante toda a fileira.

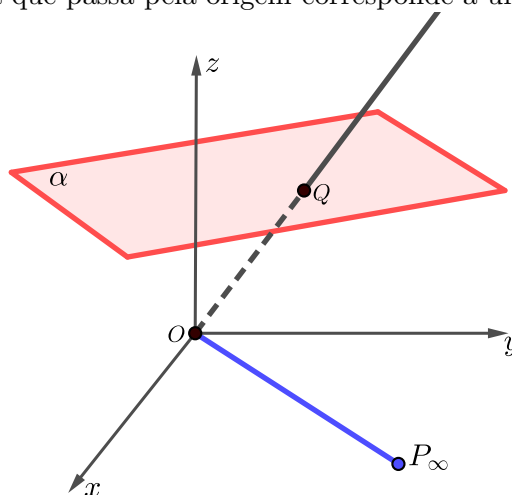
Observação 1.14. Neste contexto, optamos por não apresentar a demonstração do teorema de Desargues, uma vez que ela exigiria a aplicação de axiomas específicos da geometria projetiva no espaço. Dado que a explicação completa desses axiomas está além do escopo deste texto, tomamos a decisão de considerar o teorema de Desargues como um axioma em si, assim como a referência [4].

1.6 Um modelo geométrico para o plano projetivo

Para construir um modelo geométrico para o plano projetivo usaremos noções das geometrias Euclidiana e afim, em conjunto com o nosso sistema axiomático.

Considere um sistema cartesiano xyz com origem em um ponto O . Seja α um plano paralelo ao plano xOy (que daqui em diante será denotado por Π), interceptando o eixo z em $z \neq 0$. Considere as retas que partem da origem do sistema e intersectam o plano α (ver Figura 1.11). Estas retas são denominadas *retas ordinárias*. É imediato observar que existem retas que não intersectam o plano Π , pois são paralelas ao plano α . Porém, se associarmos a cada reta do plano Π , que passa pela origem, um único ponto denominado *ponto ideal* (ou *ponto no infinito*), como temos infinitas direções nesse plano, podemos pensar que o conjunto de todos os pontos no infinito determinam uma *reta ideal* (ou *reta no infinito*) r_∞ .

Figura 1.11: Reta que passa pela origem corresponde a um ponto em α .



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

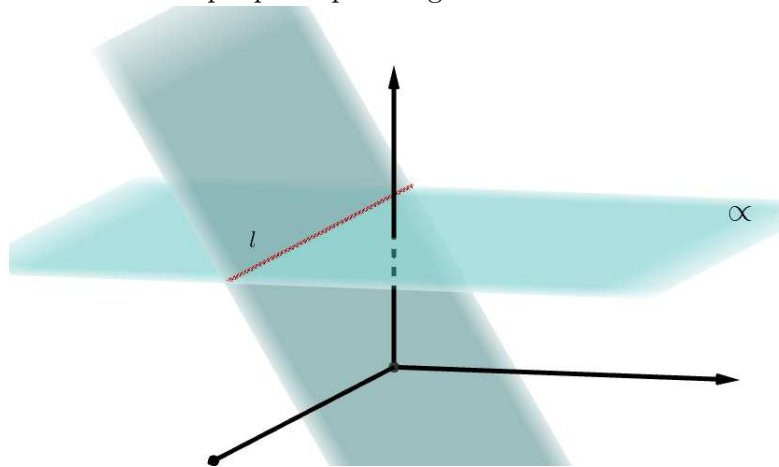
Observe que cada reta ordinária intersecta o plano α em um único ponto Q . Da mesma forma, cada plano que passa pela origem O e intersecta o plano α , determina uma única reta l nesse plano (ver Figura 1.12).

Note que é possível estabelecer uma aplicação injetora, entre os elementos do plano α e as retas do espaço euclidiano que passam pela origem $O(0, 0, 0)$, de forma que cada ponto corresponda a uma única reta.

Da mesma forma é possível estabelecer também uma aplicação injetora entre as retas em α e o conjunto dos planos do espaço euclidiano, passando pela origem O , visto que, cada plano passando pela origem determina uma única reta de interseção com o plano α .

Ou seja, é possível definir uma aplicação injetora \mathcal{F} entre o conjunto de pontos e/ou retas em α e o conjunto de retas e/ou planos passando por pela origem O de \mathbb{R}^3 , respec-

Figura 1.12: Plano que passa pelo origem e determina uma reta em α .



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

tivamente. Porém, esta aplicação não é sobrejetora, pois os elementos do plano Π não pertencem à imagem desta aplicação.

Podemos então estabelecer um modelo (geométrico) para o *plano projetivo* considerando a aplicação \mathcal{F} definida na união $\alpha \cup r_\infty$, a qual dessa forma, passa a ser bijetora. Veja que um tal *plano projetivo* é dado pela união do conjunto das retas (pontos) do plano α junto às retas (e o plano) que não interceptam o plano α , com os *pontos ideais* (*reta ideal*). Portanto, denotando por \mathcal{P} o plano projetivo definido dessa forma, temos $\mathcal{P} = \alpha \cup \text{pontos ideais}$ (*reta ideal*).

Afirmção 1.15. Um ponto P e uma reta r em \mathcal{P} são ditos incidentes se, e somente se, a reta correspondente ao ponto P (no sentido da aplicação \mathcal{F}), passando por O , pertence ao plano correspondente à reta r , passando por O . É fácil ver que, definindo dessa forma, obtém-se que os pontos ideais são incidentes às retas ideais.

Observação 1.16. A reta ideal e os pontos ideais são tratados como quaisquer outras retas ou pontos no plano projetivo \mathcal{P} .

No que se segue será mostrado que o plano projetivo \mathcal{P} que acabamos de definir satisfaz o sistema axiomático da seção anterior. Ou seja, verificaremos cada um dos quatro primeiros axiomas em termos da aplicação \mathcal{F} . A aplicação \mathcal{F} foi definida de modo a satisfazer os dois últimos axiomas.

A_1 . Justificativa do *Axioma 1*.

Existência: Dados dois pontos P_1 e P_2 no plano projetivo \mathcal{P} , devemos mostrar que existe uma reta r em \mathcal{P} tal que P_1 e P_2 são incidentes a esta.

De fato, observe que as imagens de P_1 e P_2 pela aplicação \mathcal{F} são retas r_1 e r_2 , com direções distintas, as quais determinam um único plano π no espaço euclidiano tridimensional. Segue da bijetividade de \mathcal{F} que existe uma única reta r em \mathcal{P} tal que $\mathcal{F}(r) = \pi$. Consequentemente, P_1 e P_2 são incidentes à reta r , já que as retas r_1 e r_2 são incidentes ao plano π .

Unicidade: Sejam R_1 e R_2 dois pontos distintos, arbitrários, em \mathcal{P} . Devemos mostrar que estes pontos são incidentes a exatamente uma reta.

Suponha que P_1 e P_2 são incidentes a duas retas r e s . Sejam r_1 e r_2 , as imagens de P_1 e P_2 pela aplicação \mathcal{F} , respectivamente, e π_r e π_s as respectivas imagens das retas r e s pela aplicação \mathcal{F} . Como P_1 e P_2 são incidentes à reta r , segue que as retas r_1 e r_2 são incidentes ao plano π_r . Como P_1 e P_2 são incidentes também à reta s , segue que as retas r_1 e r_2 são incidentes também ao plano π_s . Logo, π_r e π_s só podem ser planos coincidentes pois, no espaço euclidiano tridimensional, duas retas não paralelas determinam um único plano.

A_2 . Justificativa do *Axioma 2*.

Quaisquer duas retas distintas são incidentes com pelo menos um ponto.

Temos que mostrar que quaisquer duas retas distintas em \mathcal{P} são incidentes com pelo menos um ponto em \mathcal{P} .

De fato, sejam s_1 e s_2 retas distintas em \mathcal{P} . Denotamos por π_i as imagens de s_i , $i = 1, 2$, pela aplicação \mathcal{F} .

Vamos mostrar que π_1 e π_2 são planos concorrentes no espaço euclidiano.

Observe que π_1 e π_2 não podem ser coincidentes, pois s_1 e s_2 são distintas e a aplicação \mathcal{F} é injetora.

Suponha agora que π_1 e π_2 sejam planos paralelos no espaço euclidiano tridimensional. Vamos mostrar que isso não pode ocorrer.

De fato, tome dois pontos distintos, R_1 e R_2 , de \mathcal{P} tais que $\mathcal{F}(R_1) = r_1$ e $\mathcal{F}(R_2) = r_2$ onde r_1 e r_2 são retas de π_1 e π_2 , respectivamente (a existência dessas retas é garantida pela sobrejetividade da aplicação \mathcal{F}). Mas, segue do passo anterior que

R_1 e R_2 são incidentes com uma única reta s , e isto equivale a dizer que r_1 e r_2 (imagens de R_1 e R_2 , respectivamente) são retas incidentes a um único plano π no espaço euclidiano, o que nos diz que $\pi_1 = \pi = \pi_2$, porém isto contraria o fato de que π_1 e π_2 são planos paralelos.

Segue então que π_1 e π_2 são planos concorrentes no espaço euclidiano, e consequentemente, existe uma reta r gerada pela interseção de π_1 e π_2 . Mais uma vez, segue da sobrejetividade da aplicação \mathcal{F} , que existe um ponto R em \mathcal{P} tal que $\mathcal{F}(R) = r$. Mas este ponto necessariamente incide sobre as retas s_1 e s_2 em \mathcal{P} , pois a imagem de R pela \mathcal{F} é uma reta r incidente aos planos $\pi_1 = \mathcal{F}(s_1)$ e $\pi_2 = \mathcal{F}(s_2)$.

A_3 . Justificativa do *Axioma 3*.

Devemos mostrar que existem pelo menos quatro pontos, que a cada três são não colineares.

De fato, basta ver que, caso isso não ocorresse, o Axioma 1 não seria satisfeito, já que neste caso teríamos dois pontos distintos incidentes com pelo menos duas retas.

A_4 . Justificativa do *Axioma 4*.

Devemos mostrar que três pontos diagonais de um quadrângulo completo nunca são colineares.

Basta ver que os três pontos diagonais de um quadrângulo não podem ser colineares, pois, nesse caso teríamos quatro pontos a cada três colineares, determinando um quadrângulo, contradizendo o Axioma 3.

1.7 Propriedades do plano projetivo

Uma vez estabelecido um sistema axiomático que permite estabelecer um *modelo geométrico* para o plano projetivo, começamos a lidar com alguns outros elementos importantes da geometria projetiva.

Teorema 1.17. (Dual Desargues) Se dois triângulos são perspectivos por uma reta então, eles são perspectivos por um ponto.

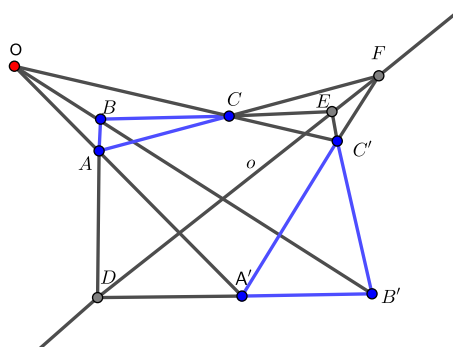
Demonstração. Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos perspectivos por uma reta o . Logo, os lados correspondentes AC e $A'C'$, BC e $B'C'$ e, AB e $A'B'$ se interceptam na reta o

nos pontos F , E e D respectivamente. Segue do Axioma 2 que existe um ponto denotado por $O = AA'.BB'$, que é o ponto de intersecção das retas AA' e BB' . Devemos mostrar que a reta CC' também passa por O .

Começemos analisando os triângulos $CC'E$ e $AA'D$. Note que, como D , E e F são colineares e $F = AC.A'C'$, então as retas AC , $A'C'$ e DE são concorrentes no ponto F (ver figura 1.13). Logo os triângulos $CC'E$ e $AA'D$ são perspectivos pelo ponto F . Então segue do Teorema de Desargues, que os triângulos $CC'E$ e $AA'D$ também são perspectivos por uma reta, logo os pontos $B = CE.AD$, $B' = EC'.DA'$ e $X = CC'.AA'$ são colineares.

Observe que X é incidente a AA' , porém X também é incidente a BB' , pois como já foi mostrado B , B' e X são colineares, então X só pode ser o ponto O . Portanto, temos que $O = CC'.AA'$, ou seja, a reta CC' também passa por O , como queríamos mostrar.

Figura 1.13: Dual do teorema de Desargues



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

□

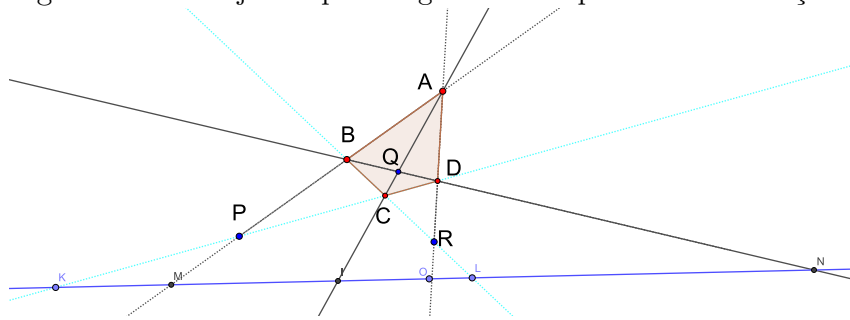
Definição 1.18. Sejam $ABCD$ um quadrângulo completo e r uma reta não incidente a nenhum dos vértices desse quadrângulo. Denomina-se por *conjunto quadrangular* ao conjunto determinado por todos os pontos de incidência dos lados do quadrângulo com a reta r (ver figura 1.14, à direita)

Observe que um conjunto quadrangular pode possuir 6, 5 ou 4 pontos de intersecção com a reta r , nesse caso diz-se que o conjunto quadrangular possui 6 ou 5 ou 4 elementos.

1.7.1 Conjunto Harmônico

Definição 1.19. Um *conjunto harmônico* é um conjunto quadrangular formado por 4 pontos.

Figura 1.14: Conjunto quadrangular com 6 pontos de interseção.

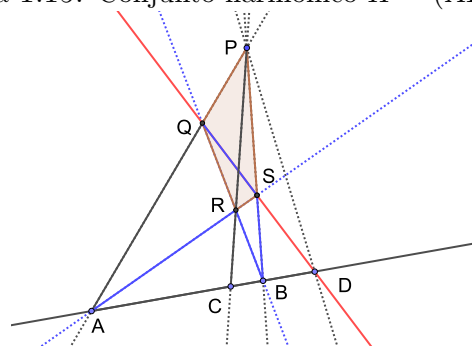


Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Observe que, de acordo com a definição 1.19, um conjunto harmônico ocorre quando a reta r da definição 1.18 é incidente a 2 pontos diagonais de um quadrângulo. Sejam A, B, C e D os quatro pontos da definição 1.19. Denotaremos um tal conjunto harmônico por $H(AB, CD)$, indicando que: dois lados opostos incidem no ponto A , outros dois lados opostos incidem no ponto C e os dois lados opostos restantes incidem nos pontos B e D respectivamente. Ou seja, A e B são pontos diagonais e C e D são as interseções da reta r com as retas que determinam os lados do quadrângulo que passam sobre o terceiro ponto diagonal (veja figura 1.15).

Com a notação anterior, o ponto D é denominado o *conjugado harmônico* do ponto C em relação a A e B e vice-versa.

Figura 1.15: Conjunto harmônico $H = (AB, CD)$.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Observe ainda que, no caso $H(AB, CD)$, o ponto C encontra-se entre o ponto A e o ponto B , e no caso $H(AB, DC)$ o ponto D encontra-se entre o ponto A e o ponto B , de forma que se considerarmos o sentido de A para B da reta AB , o segmento BC (BD respec.) terá sinal oposto ao dos demais segmentos AC, AD e BC . Isso será importante

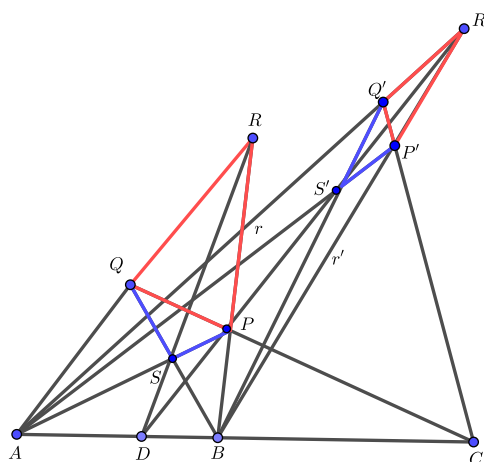
para o que vem a seguir.

Teorema 1.20. Se A, B e C são três pontos colineares e distintos, então existe um único conjugado harmônico D de C , com relação a A e B .

Demonstração. Existência: Seja Q um ponto qualquer, não pertencente a AB , e seja r uma reta que passa por B , distinta de AB , e que não contém Q . Agora considere $r.AQ = R, r.CQ = P$, e $AP.QB = S$. Note que os pontos $PQRS$ definem um quadrângulo tal que, dois lados opostos passam por A , dois lados opostos passam por B , um dos lados restantes passa por C e o outro passa por $RS.AB$. Portanto basta definirmos D como sendo o ponto $RS.AB$.

Unicidade: Mostraremos agora que o ponto D , conjugado harmônico de C , é único, construindo outro quadrângulo $P'Q'R'S'$, tal que $Q'R'.P'S' = A, Q'S'.R'P' = B, Q'P'.AB = C$ e provando que $D' = D$.

Figura 1.16: O conjugado harmônico é único.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

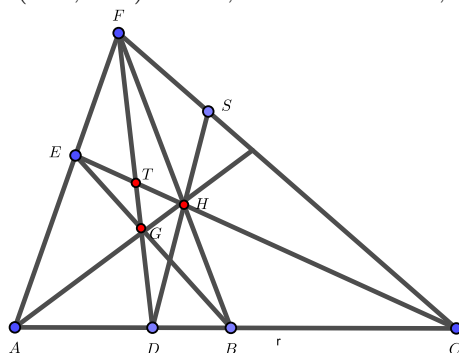
Note que os triângulos QRP e $Q'R'P'$ são perspectivos pela reta AB (ver Figura 1.16). Então pelo Teorema 1.17, eles são perspectivos por um ponto; isto é QQ', RR' e PP' são concorrentes. Analogamente os triângulos QPS e $Q'P'S'$ são perspectivos por AB , e, conseqüentemente, QQ', PP' e SS' são concorrentes. Portanto, as quatro retas PP', QQ', RR', SS' são todas concorrentes. Desta forma os triângulos RSP e $R'P'S'$ são perspectivos por um ponto. Logo, segue do Axioma 5, que eles são perspectivos por uma reta. Daí $RS.R'S', RP.R'P' = B, SP.S'P' = A$, são colineares. Mas $RS.AB = D, R'S'.AB = D'$. Portanto $D = D'$.

□

Teorema 1.21. O conjunto harmônico $H(AB, CD)$ existe se, e somente se, $H(CD, AB)$ existe.

Demonstração. Seja $H(AB, CD)$ um conjunto harmônico formado pelos pontos colineares A, B, C, D , então existe um quadrângulo completo $EFGH$ tal que $A = EF.GH$, $B = EH.FG$, $C = EG.AB$ e $D = FH.AB$.

Figura 1.17: $H(AB, CD)$ existe, se e somente se, $H(CD, AB)$.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Sejam $S = DG.FC$ e $T = GE.FH$ e considere o quadrângulo completo $TGSF$ (ver Figura 1.17). Observe que as retas $SF = FC$ e $TG = GE$ são ambas incidentes ao ponto C . Observe ainda que $GS = DG$ e $TF = FH$ são incidentes ao ponto D , e que a reta GF é incidente ao ponto B . Então para mostrar que o conjunto harmônico $H(CD, AB)$ de fato existe, basta mostrar que TS é incidente ao ponto $A = EF.GH$.

Considere os triângulos THE e SGF . Devemos mostrar que estes triângulos são perspectivos pelo ponto A , pois, nesse caso, o ponto A será incidente à reta TS .

De fato, veja que as intersecções dos lados correspondentes dos triângulos THE e SGF são $TE.SF = GE.FC = C$, $TH.SG = FH.DG = D$, $HE.GF = B$. Além disso temos por hipótese que C, D, B são colineares. Mais ainda, sabemos que estes pontos são incidentes com à reta AB . Logo, pelo teorema 1.17, os triângulos THE e SGF são perspectivos por um ponto X .

Agora iremos mostrar que o ponto X é na verdade o ponto A . Como $EF.GH = A$, então, $EF.TS = A$ e $TS.GH = A$, pois, caso contrário, as retas EF e GH teriam dois pontos em comum, sendo portanto coincidentes, o que não é caso. Ou seja, os triângulos THE e SGF são perspectivos pelo ponto A como queríamos mostrar.

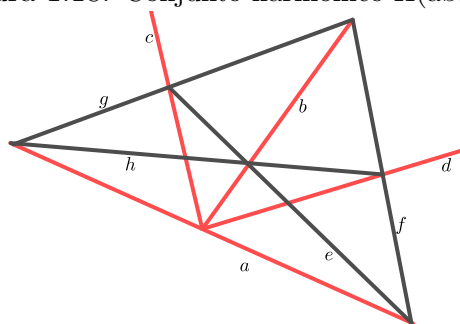
Portanto o conjunto harmônico $H(AB, CD)$ existe se, e somente se, $H(CD, AB)$ existe, sendo denotado por $H(AB, CD) \Leftrightarrow H(CD, AB)$. A demonstração da recíproca do teorema é análoga, partindo do quadrângulo $H(CD, AB)$. \square

Corolário 1.22.

$$\begin{aligned} H(AB, CD) &\Leftrightarrow H(AB, DC) \Leftrightarrow H(BA, CD) \Leftrightarrow H(BA, DC) \\ &\Leftrightarrow H(CD, AB) \Leftrightarrow H(CD, BA) \Leftrightarrow H(DC, AB) \\ &\Leftrightarrow H(DC, BA). \end{aligned}$$

Definição 1.23. (Dual do conjunto harmônico $H(AB, CD)$) Quatro retas concorrentes, a, b, c, d formam um conjunto harmônico $H(ab, cd)$, se existe um quadrilátero completo no qual dois vértices opostos pertencem a a , outros dois vértices opostos pertencem a b , enquanto os outros dois vértices restantes pertencem a c e d , respectivamente (veja figura 1.18). As retas e, f, g e h formam um quadrilátero tal que $H(ab, cd)$ é um conjunto harmônico.

Figura 1.18: Conjunto harmônico $H(ab, cd)$.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Teorema 1.24. Se retas a, b e c são concorrentes, então o conjugado harmônico d , de c com respeito a a e b , é único.

Teorema 1.25. $H(ab, cd) \Leftrightarrow H(cd, ab)$.

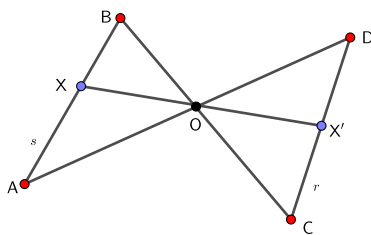
As demonstrações dos teoremas 1.24 e 1.25 são análogas dos teoremas 1.20 e 1.21 respectivamente, basta dualizar a demonstração.

Afirmção 1.26. Uma perspectividade entres dois feixes de pontos ou dois feixes de retas é unicamente determinada por dois pares de elementos correspondentes, desde que nenhum elemento desses dois pares estejam sobre ambos os feixes.

De fato, pelos axiomas 1 e 3 é possível determinar 4 pontos A, B, C e D , tais que AB e CD determinam um feixe de pontos com eixo s e outro com eixo r , respectivamente. Denotaremos por reta r e reta s aos eixos r e s . Por definição de perspectividade por um ponto, existe um ponto O , o qual é o centro da perspectividade. Podemos então gerar duas retas, uma a partir do ponto A e outra a partir do ponto B concorrentes no ponto O , incidindo nos pontos correspondentes D e C , incidentes à reta r , de forma que qualquer outro ponto incidente a reta a r também terá um correpondente incidente ao ponto O e à reta s (ver Figura 1.19). A unicidade do ponto onde as retas são concorrentes é garantida pelo Axioma 2, como os pontos estão em feixes distintos, o ponto de intersecção será único.

A demonstração para um feixe de retas segue da dualidade, e portanto, é imediata.

Figura 1.19: Perspectividade entre o feixe de pontos r e s .



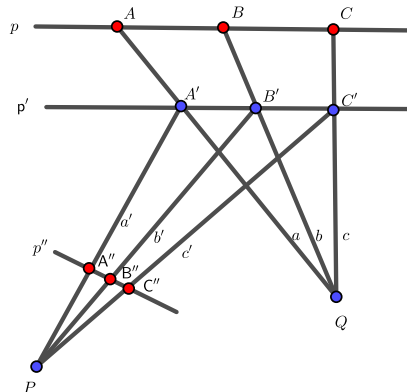
Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Para releembrar o conceito de projetividade, vejamos agora três exemplos de projetividade. Os exemplos apresentados são extraídos da referência [1].

Estudemos a projetividade \mathcal{P} , representada pela figura 1.20, observe que \mathcal{P} é representada pela composição das seguintes perspectividades $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ e \mathcal{P}_4 , onde: \mathcal{P}_1 é a perspectividade respresentada por $\mathcal{P}_1(A) = a = AA'$, $\mathcal{P}_1(B) = b = BB'$, $\mathcal{P}_1(C) = c = CC'$; \mathcal{P}_2 é a perspectividade definida por $\mathcal{P}_2(a) = A'$, $\mathcal{P}_2(b) = B'$, $\mathcal{P}_2(c) = C'$; \mathcal{P}_3 é a perspectividade definida por $\mathcal{P}_3(A') = a' = A'A''$, $\mathcal{P}_3(B') = b' = B'B''$, $\mathcal{P}_3(C') = c' = C'C''$ e \mathcal{P}_4 é a perspectividade definida por $\mathcal{P}_4(a') = A''$, $\mathcal{P}_4(b') = B''$ e $\mathcal{P}_4(c') = C''$. Por exemplo $\mathcal{P}(A) = (\mathcal{P}_4 \circ \mathcal{P}_3 \circ \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{P}_1)(A) = A''$.

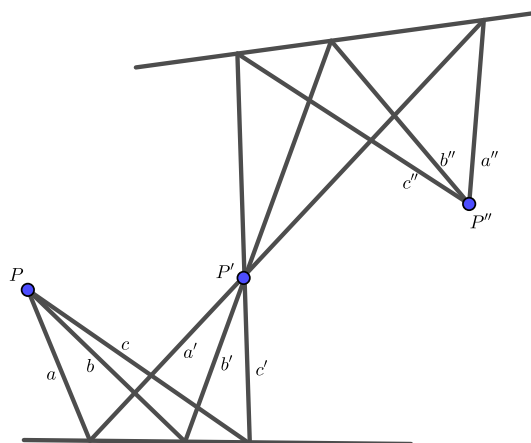
Uma projetividade não é obtida de forma única via perspectividade, por exemplo, a

Figura 1.20: Projetividade entre os feixes de pontos A, B, C e A'', B'', C'' respectivamente. Denotado por $ABC \wedge A''B''C''$.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Figura 1.21: Projetividade entre os feixes de retas a, b, c e a'', b'', c'' respectivamente. Denotado por $abc \wedge a''b''c''$.



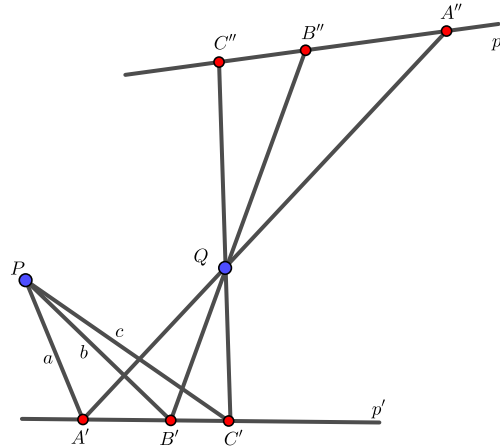
Fonte: Arquivo pessoal do autor.

projetividade \mathcal{P} também pode ser vista como a composição da perspectividade \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 , onde: \mathcal{T}_1 é a perspectividade definida por $\mathcal{T}_1(A) = A'$, $\mathcal{T}_1(B) = B'$ e $\mathcal{T}_1(C) = C'$; \mathcal{T}_2 é a perspectividade definida por $\mathcal{T}_2(A') = A''$, $\mathcal{T}_2(B') = B''$ e $\mathcal{T}_2(C') = C''$. Por exemplo, $\mathcal{P}(A) = (\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2)(A) = A''$.

Observação 1.27. *A partir da definição é possível definir que uma projetividade não tem um centro ou um eixo, exceto quando é corresponde a apenas uma perspectividade.*

Teorema 1.28. (Teorema Fundamental). Dados dois feixes quaisquer sempre existe uma

Figura 1.22: Projetividade entre os feixes de retas a, b, c e um feixe de pontos A'', B'', C'' respectivamente. Denotado por $abc \wedge A''B''C''$.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

projetividade entre estes. Além disso, esta projetividade é unicamente determinada por três pares de elementos correspondentes.

Demonstração. Caso 1. Dois feixes de pontos: Sejam A, B e C elementos do feixe com eixo p e A', B', C' seus elementos correspondentes do feixe com eixo p' , com $p \neq p'$. Agora construiremos a reta AA' e escolhemos um ponto $P \neq A$ sobre esta reta. Seja $m \neq p'$ uma reta qualquer passando por A' . Considere $B_1 = BP.m$ e $C_1 = CP.m$. Desta forma $ABC \overset{P}{\wedge} A'B_1C_1$. Agora, defina $Q = B_1B'.C_1C'$. Então $A'B_1C_1 \overset{Q}{\wedge} A'B'C'$ e portanto $ABC \wedge A'B'C'$ é a composição das duas perspectividades (ver figura 1.23).

Caso 2. Dois feixes de retas: Basta considerar a dualidade com o caso 1.

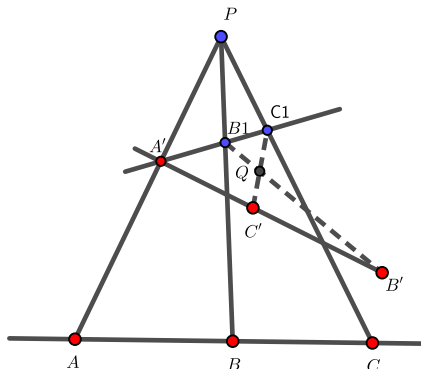
Caso 3. Um feixe de pontos e um feixe de retas: Segue da combinação dos casos anteriores.

□

Corolário 1.29. Uma projetividade entre duas fileiras em duas retas distintas é uma perspectividade se, e somente se, o ponto de interseção das retas for invariante pela projetividade.

Demonstração. Sejam r e s duas retas distintas, de modo que exista uma projetividade qualquer entre duas fileiras nessas retas. Suponhamos que essa projetividade se trata de uma perspectividade. Então, existe um centro O dessa perspectividade tal que, se P e P'

Figura 1.23: Teorema Fundamental .



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

são correspondentes (cada um pertencente a uma reta), PP' passa por O . Seja Q o ponto de interseção das retas r e s (a existência da interseção é garantida pelo Axioma 2).

Analisando, particularmente, Q em r , temos Q' como seu correspondente em s de modo que QQ' passa pelo ponto O . Desse modo, concluímos que Q é igual a Q' pois, caso contrário, teríamos duas retas distintas por Q e Q' (a reta s e a reta $OQ = OQ'$) contrariando o Axioma 1. Logo, o ponto de interseção das retas é invariante pela perspectividade dada.

Reciprocamente, seja uma projetividade qualquer entre duas fleras distintas em duas retas, r e s , também distintas. Seja P o ponto comum de r e s , de modo que P é invariante por essa projetividade. Podemos determinar, de maneira única, três pontos e seus respectivos correspondentes, de forma que $ABP \overset{X}{\underset{\wedge}{\sim}} A'B'P$, para algum ponto X .

Por outro lado, como O é ponto comum das retas AA' e BB' , então $ABP \overset{O}{\underset{\wedge}{\sim}} A'B'P$. Observe que o ponto P é invariante, e portanto, a reta OP passa também pelo seu correspondente, que é o próprio ponto P . Como o Teorema 1.23 garante que uma projetividade é unicamente determinada por três de seus pares de pontos correspondentes, temos que as projetividades $ABP \overset{X}{\underset{\wedge}{\sim}} A'B'P$ e $ABP \overset{O}{\underset{\wedge}{\sim}} A'B'P$ são, na verdade, a mesma. Ou seja, o ponto X é, na verdade, o ponto O . Logo, podemos concluir que essa projetividade se trata de uma perspectividade. \square

Corolário 1.30. Uma projetividade entre dois feixes é composta por no máximo três perspectividades distintas.

Demonstração. Pelo teorema 1.23 uma projetividade é unicamente determinada por três

pares de elementos correspondentes e pelo corolário 1.29 sabemos que se uma projetividade entre dois feixes distintos matém um elemento invariante, então essa projetividade é uma perspectividade, sendo assim temos apenas três perspectividades possíveis para compor essa projetividade, pela unicidade da projetividade. Veja que a composição com uma quarta perspectividade não é possível, pois esta última deveria manter os três pares correspondentes inalterados o que é impossível, pois não existe uma perspectividade com esta característica.

□

Teorema 1.31. Sejam A, B, C e D pontos que de definem o conjunto harmônico $H(AB, CD)$. Se $ABCD \wedge A'B'C'D'$, então os pontos A', B', C' e D' também definem um conjunto harmônico, ou seja, existe $H(A'B', C'D')$.

Demonstração. Como sabemos que a projetividade nada mais é do que uma composição de perspectividades e considerando a dualidade entre pontos e retas é suficiente mostrar que $H(AB, CD)$ implica $H(ab, cd)$ sempre que $ABCD \bar{\wedge} abcd$, onde a, b, c e d são as retas definidas por A e A' , B e B' , C e C' , D e D' , respectivamente.

Como $ABCD \bar{\wedge} abcd$ temos qu existe $O = a.b$ de forma que $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$ e $d = OD$.

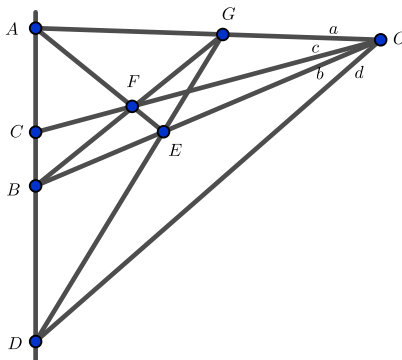
Ainda, $H(AB, CD)$ é um conjunto harmônico, logo existe um quadrângulo com um vértice em O , a saber $OEF G$, tal que A e B são pontos diagonais do quadrângulo, então C pertence a uma diagonal e D a outra. Veja que $A = EF.OG$, $B = OE.GF$, $C = OF.AB$ e $D = GE.AB$ (ver figura 1.24)

□

Agora considere o quadrilatero GF, GE, AE, AB , Assim $GF.GE = G$ e $AE.AB = A$ pertencem a a ; $GE.AE = E$ e $GF.AB = B$ pertencem a b ; $GE.AB = D$ pertence a d enquanto $GF.AE = F$ pertence a c . Portanto temos que as retas a, b, c e d formam o conjunto harmônico $H(ab, cd)$. Vejamos o resultado formal:

Teorema 1.32. Se quatro elementos de um feixe, A, B, C, D formam um conjunto harmônico, $H(AB, CD)$, e quatro elementos de um segundo feixe A', B', C', D' formam um segundo conjunto harmônico, $H(A'B', C'D')$, então existe uma projetividade que aplica A, B, C, D em A', B', C', D' , respectivamente.

Figura 1.24: Se $H(AB, CD)$ e $ABCD \wedge A'B'C'D'$, então $H(A'B', C'D')$.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Demonstração. Pelo teorema 1.23, existe uma projetividade tal que $ABC \wedge A'B'C'$. Seja D^* a imagem de D sob esta projetividade. Então pelo teorema 1.31 existe o conjunto harmônico $H(AB, CD^*)$. Por outro lado, por hipótese, temos também o conjunto harmônico $H(A'B', C'D')$. Mas pelo teorema 1.20 sabemos que o conjugado harmônico de C com relação a A e D é único, conseqüentemente $D^* = D$.

□

Observe que, no caso $H(AB, CD)$, o ponto C encontra-se entre o ponto A e o ponto B , e no caso $H(AB, DC)$ o ponto D encontra-se entre o ponto A e o ponto B , de forma que se considerarmos o sentido de A para B da reta AB , o segmento BC (BD respec.) terá sinal oposto ao dos demais segmentos AC, AD e BC . Isso será importante para o que vem a seguir.

Definição 1.33. Dados A e A' , B e B' pares de pontos correspondentes via uma projetividade, as retas AB' e BA' são chamadas de *ligações transversais* destes pares de pontos.

Teorema 1.34. Dada uma projetividade entre dois feixes distintos de pontos, existe uma única reta que contém as interseções dos cruzamentos transversais de todos os pares de pontos correspondentes.

Demonstração. Considere dois feixes de pontos com eixos p e p' . Suponha que $ABC \wedge A'B'C'$, onde $P = p.p'$ não é nenhum destes seis pontos.

Existência: Veja que $(A'A, A'B, A'C) \wedge ABC$ e $A'B'C' \wedge (AA', AB', AC')$. Logo $(A'A, A'B, A'C) \wedge (AA', AB', AC')$. Como $A'A$ é aplicado nele mesmo, segue pelo co-

rolário 1.29, que esta projetividade é na verdade uma perspectividade, digamos, $(A'A, A'B, A'C) \stackrel{h}{\lambda} (AA', AB', AC')$ para algum eixo h .

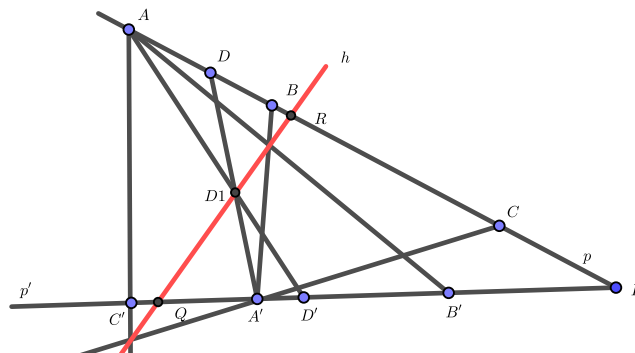
Observe que h contém as interseções dos cruzamentos transversais de todos os pares de pontos correspondentes. De fato, para mostrar isso é suficiente mostrar que via h é possível encontrar a imagem de um ponto D (diferente de A, B, C) sobre p . Para isso construa $A'D$ e considere $D_1 = A'D.h$, note que $D' = AD_1.p'$.

Unicidade: Para mostrar que h é único, é necessário mostrar que h é independente das escolhas dos centros dos feixes de retas (no nosso caso denotados por A e A') e portanto que as interseções dos cruzamentos transversais de todos os pares de pontos correspondentes sobre h .

Para fazer isto é suficiente encontrar dois pontos sobre h que sejam independentes destas escolhas. Seja $Q = h.p' \in R = h.p$.

Por outro lado, podemos mostrar que a imagem de P é Q . Porém, pelo teorema 1.23 a imagem e a pré-imagem de P são unicamente determinadas. Ainda veja que $Q \neq R$ pois esta projetividade não é uma perspectividade. Logo, $h = QR$ é unicamente determinada.

Figura 1.25: A reta h contém as intersecções de todos cruzamentos transversais.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

□

Definição 1.35. Nas condições acima, a reta h é chamada o *eixo de homologia* desta projetividade.

1.7.2 Razão cruzada X razão harmônica

Na Geometria Projetiva as propriedades que são invariantes com respeito a qualquer projeção são chamadas de propriedades projetivas. Por exemplo exemplo, o conceito de

colinearidade e *incidência*, são invariantes da geometria projetiva, visto que são preservados por quaisquer transformações projetivas.

A razão cruzada (ou razão dupla, ou razão anarmônica) é um número real r que define uma relação a qual é válida para quaisquer conjunto de quatro pontos A, B, C, D , obtidos pela interseção de um feixe de quatro retas (incidentes a um ponto O), com uma reta transversal t a essas quatro retas, de forma que $\frac{AC}{CB} \div \frac{AD}{DB} = r$, e de forma que, se A', B', C', D' são os pontos de interseção de outra transversal t' com o feixe de retas, então pontos

$$\frac{AC}{CB} \div \frac{AD}{DB} = \frac{A'C'}{C'B'} \div \frac{A'D'}{D'B'} = r,$$

Segue do teorema 1.34 que a *Razão Cruzada* é uma propriedade que também é preservada por transformações projetivas, sendo, portanto, um *invariante da geometria projetiva*.

Um caso particular da razão cruzada é a chamada *Razão Harmônica*, a qual ocorre quando $r = -1$. No que se segue, são introduzidos os dois conceitos e é estabelecida a relação entre eles.

Se A, B e C são três pontos distintos de uma reta, definimos a sua razão por $(A, B, C) = \frac{AC}{BC}$. Tal razão é dita positiva se as semi-retas AC e BC têm o mesmo sentido. Caso as duas semi-retas tenham sentidos opostos, dizemos que a razão é negativa.

Sejam agora A, B, C, D quatro pontos colineares distintos, denomina-se *razão cruzada* ou *razão anarmônica*, e denota-se por $(A, B; C, D)$ ao número real r que satisfaz,

$$(A, B; C, D) = \frac{(A, B, C)}{(A, B, D)} = \frac{AC}{BC} \div \frac{AD}{BD} = r \text{ ou } \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} = r,$$

onde AC, BC, AD e BD são as medidas dos respectivos segmentos orientados.

Observe que, na definição acima, as direções opostas são representadas pelo sinal negativo, ou seja, se BA é a medida do segmento \overline{BA} , então $-BA$ representa "a medida com sinal" do segmento \overline{AC} . Em geral, na maioria das vezes, considera-se o *módulo da razão cruzada*.

Na prática, a *razão cruzada* (ou *anarmônica*) de quatro pontos colineares A, B, C, D pode ser entendida como o quociente obtido pela divisão da razão das distâncias tomadas entre o primeiro ponto e os dois últimos, pela razão das distâncias tomadas do segundo ponto aos dois últimos.

Para deixar bem claro que os conceitos introduzidos fazem sentido no plano projetivo, vamos estender o conceito de razão cruzada para quaisquer quatro pontos ou retas no plano projetivo, incluindo assim os pontos ideais.

Denote por P_∞ o ponto no infinito da reta AB . Nesse caso escrevemos (A, B, C, P_∞) , onde

$$(A, B, C, P_\infty) = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{AC}{BC} \div \frac{BX}{CX} = \frac{AC}{BC} \div \frac{BP_\infty}{CP_\infty} = \frac{AC}{BC}. \quad (1.1)$$

Vamos mostrar que $\frac{XP_\infty}{YP_\infty} = 1$. Para isso temos que lançar mão de ferramentas do *curso de análise na reta*.

Como existe uma correspondência biunívoca entre qualquer reta do espaço euclidiano com a reta real, sem perda de generalidade, podemos supor que dois pontos distintos, A e B , de uma reta qualquer são pontos ordinários (não ideais) da reta real, com coordenadas a e b , respectivamente, tal que $a < b$. Seja \overline{AB} a medida do segmento AB . Assim $\overline{AB} = \overline{BA} = |b - a| = b - a$. Sejam ainda X um ponto ordinário arbitrário, com coordenada real x e P_∞ o *ponto ideal* (ou ponto no infinito) da reta AB .

Figura 1.26: X tende ao infinito.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Queremos mostrar que

$$\lim_{X \rightarrow P_\infty} \frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} = 1, \quad (1.2)$$

entendendo por $X \rightarrow P_\infty$ que X é um ponto ordinário que se afasta cada vez mais tanto de A , quanto de B , de forma que podemos escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - a}{x - b} = 1$, com $x > a$ e $x > b$.

A ideia é aplicar a definição usual de limite de função real, como veremos a seguir.

Segue da relação biunívoca entre pontos da reta real e o conjunto dos números reais que, dado um número real r existe um ponto R da reta real, tal que r é a coordenada do ponto R . E segue da definição de limite (ver referência [7]) que, dado $\varepsilon > 0$, existe um número real r , tal que se $x > r$, então

$$\left| \frac{x - a}{x - b} - 1 \right| < \varepsilon. \quad (1.3)$$

Observe que a desigualdade (1.3) é satisfeita para $r = \frac{b \cdot (\varepsilon + 1) - a}{\varepsilon}$.

Afirmamos que $r > b$, ou seja diferença $r - b > 0$. De fato,

$$r - b = \frac{b(\varepsilon + 1) - a}{\varepsilon} - b = \frac{b \cdot \varepsilon + b - a - b \cdot \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{b - a}{\varepsilon} > 0$$

Agora afirmamos que, se $x > r$, então $\left| \frac{x-a}{x-b} - 1 \right| < \varepsilon$. De fato,

$$\begin{aligned} x > r &\Rightarrow x > \frac{b \cdot (\varepsilon + 1) - a}{\varepsilon} \\ &\Rightarrow \varepsilon \cdot x > b \cdot \varepsilon + b - a \\ &\Rightarrow \varepsilon \cdot (x - b) > b - a \\ &\Rightarrow \frac{b - a}{x - b} < \varepsilon \\ &\Rightarrow \frac{b - a}{x - b} + 1 - 1 < \varepsilon \\ &\Rightarrow \frac{b - a + x - b}{x - b} - 1 < \varepsilon \\ &\Rightarrow \frac{x - a}{x - b} - 1 < \varepsilon, \text{ como afirmado.} \end{aligned}$$

Como $AX > BX$, tem-se que $x - a > x - b$, ou seja, $\frac{x-a}{x-b} - 1 > 0$, e, conseqüentemente, $\left| \frac{x-a}{x-b} - 1 \right| < \varepsilon$.

Podemos assim garantir a existência de um ponto R da reta AB , com coordenada r , tal que se $x > r$ (ou seja, se X estiver à direita de R) a razão das distâncias de X até A e X até B pode estar tão próxima do valor 1, quanto se deseje.

Procedendo da mesma forma quando $X \rightarrow -\infty$ (com X à esquerda de R obtém-se o mesmo resultado, de forma que os limites laterais coincidem. Entende-se por uma *reta projetiva* uma reta cujos ambos os lados tendem para o *ponto ideal* (no infinito).

1.7.3 Mais alguns resultados envolvendo a razão harmônica

É imediato ver que

$$(A, B, C, D) = (B, A, D, C) = (D, C, B, A) = (C, D, A, B),$$

daí, tomando $(A, B, C, D) = r$ é fácil mostrar que $(A, B, D, C) = \frac{1}{r}$, então, permutando a posição dos pontos obtém-se

$$(A, B, D, C) = (B, A, C, D) = (C, D, B, A) = (D, C, A, B) = \frac{1}{r}$$

Também,

$$\begin{aligned} (A, C, B, D) &= (C, A, D, B) = (D, B, C, A) = (B, D, A, C) = 1 - r; \\ (A, C, D, B) &= (C, A, B, D) = (B, D, C, A) = (D, B, A, C) = \frac{1}{1 - r}; \\ (A, D, C, B) &= (D, A, B, C) = (B, C, D, A) = (C, B, A, D) = \frac{r}{r - 1}; \\ (A, D, B, C) &= (D, A, C, B) = (C, B, D, A) = (B, C, A, D) = \frac{r - 1}{r}. \end{aligned}$$

Isso nos diz que as 24 combinações possíveis dos pontos A, B, C, D ficam reduzidas a 6, 5 ou 4, no caso em que $r = -1$.

Por meio da dualização, também pode-se pensar na razão cruzada do ponto de vista de um feixe de retas.

Qual é a importância da razão cruzada para a Geometria Projetiva? Para responder a essa pergunta primeiro precisamos fazer algumas considerações.

1.7.4 A razão cruzada é um invariante da geometria projetiva

Teorema 1.36. *A razão cruzada de quatro pontos é invariante sob projeções.*

O teorema 1.36 nos diz que se A, B, C, D e A', B', C', D' são pontos correspondentes sobre duas retas relacionadas por uma projetividade, então tem-se a igualdade

$$\frac{CA}{CB} \div \frac{DA}{DB} = \frac{C'A'}{C'B'} \div \frac{D'A'}{D'B'}.$$

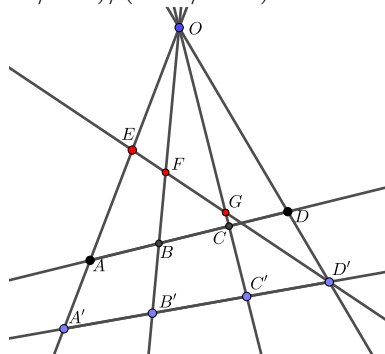
A demonstração desse teorema pode ser encontrada na referência [6] p. 24.

Ou seja, qualquer feixe de retas, partindo de um ponto O , quando cortado por uma reta transversal arbitrária, determina, nos pontos de incidência, a mesma *razão cruzada* (ver figura (1.27)).

No que se segue vamos utilizar a notação $O(A, B, C, D)$ para indicar a razão cruzada de um feixe de retas r_1, r_2, r_3, r_4 , concorrentes no ponto O , incidentes à reta AB nos pontos A, B, C, D , respectivamente.

Teorema 1.37. *Sejam A, B e C pontos distintos incidentes a uma reta t . Então, existe um único número real r e um único ponto X incidente a reta t tal que a razão cruzada $(A, B, C, X) = r$.*

Figura 1.27: Razão cruzada: $AC/BC \div AD/BD = r$;
 $A'C'/B'C' \div A'D'/B'D' = r$; $(EG/FG)/(FD'/GD') = r$.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

De fato,

$$(A, B, C, X) = (A, B, C, Y) \Leftrightarrow \frac{AC}{BC} \frac{BX}{AX} = \frac{AC}{BC} \frac{BY}{AY} \Leftrightarrow \frac{BX}{AX} = \frac{BY}{AY}.$$

Portanto, $r = (A, B, C, X) = (A, B, C, Y)$, se, e somente se $X = Y$.

1.7.5 Razão harmônica

A *razão harmônica* é um caso particular da *razão cruzada*, sendo que ela ocorre quando a reta r contém dois pontos diagonais do conjunto quadrangular. Ou seja, quando o conjunto quadrangular é um conjunto harmônico. Veja novamente a figura (1.30).

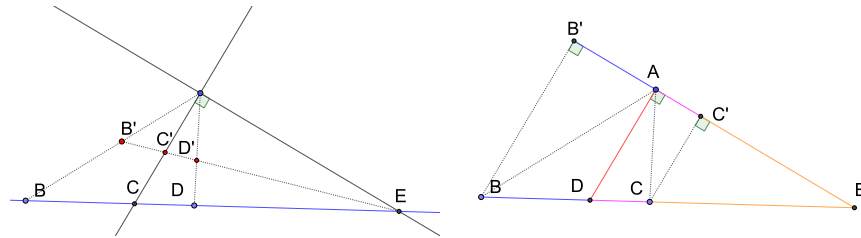
Para ajudar a enxergarmos que a razão harmônica pode ser vista como um conceito da geometria projetiva, vamos considerar um conjunto quadrangular determinado por um quadrângulo completo de vértices A, F, G e P_∞ e uma reta r , não incidente a nenhum vértice do quadrângulo.

O teorema a seguir fornece uma importante ferramenta para o processo de entendimento do que ocorre nesse caso.

Teorema 1.38. *Considere um triângulo ABC tal que a reta AD é a bissetriz interna e a reta AE é a bissetriz externa do ângulo $C\hat{A}B$. Nessas condições tem-se que $\frac{DC}{AC} = \frac{CE}{BE} = \frac{BD}{AB}$.*

Demonstração. Sejam B' e C' as projeções ortogonais dos pontos B e C sobre a reta AE , respectivamente (ver figura (1.28)). Observe que, desta forma, as retas CE e $C'E$ são duas transversais cortadas pelas retas paralelas $AD // BB' // CC'$.

Figura 1.28: AD e AE são a bissetriz interna e externa, respectivamente, do ângulo $B\hat{A}C$.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Segue então do Teorema fundamental da proporcionalidade, que:

$$\frac{DC}{AC'} = \frac{BD}{B'A} = \frac{BE}{B'E} = \frac{CE}{C'E} = \frac{DE}{AE},$$

em particular,

$$\frac{DC}{BD} = \frac{C'A}{AB'} \tag{1.4}$$

Observe agora que o triângulo $BB'A$ é retângulo em B' e o triângulo $CC'A$, é retângulo em C' . Como AD é a bissetriz do ângulo $C\hat{A}B$, segue que os ângulos $B\hat{A}B'$ e $C\hat{A}C'$ são congruentes, o que nos diz que os ângulos $A\hat{B}B'$ e $A\hat{C}C'$ também são congruentes. Ou seja, os triângulos $BB'A$ e $CC'A$ são semelhantes. Logo,

$$\frac{C'A}{AB'} = \frac{CC'}{BB'} = \frac{AC}{AB} \tag{1.5}$$

Segue portanto de (2.1) e (1.5), que:

$$\frac{DC}{BD} = \frac{AC}{AB} \tag{1.6}$$

e, de forma análoga, mostra-se que

$$\frac{CE}{BE} = \frac{AC}{AB} \tag{1.7}$$

Ou seja,

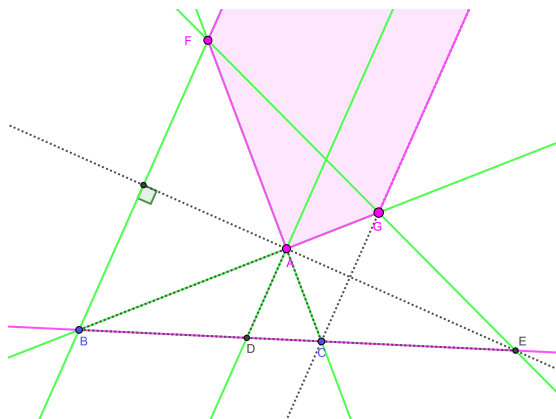
$$\frac{DC}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BE}, \tag{1.8}$$

como queríamos.

□

Baseado no que foi feito acima, considere a situação em que o ponto D está entre os pontos B e C , logo CD tem sentido oposto ao de AC , logo $CD = -DC$ e, portanto, $(B, C, D, E) = \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{BE} = \frac{BD}{CD} \cdot \frac{AC}{AB} = -1$. Esse é um caso particular de conjunto harmônico, onde o ponto P_∞ de origem do feixe é um ponto ideal (no infinito) (veja figura (1.29)). Isso mostra que a razão harmônica é, também, um conceito projetivo.

Figura 1.29: Conjunto harmônico, com quadrângulo $AFGP_\infty$, com origem ideal P_∞ .



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Lema 1.39. *Uma razão harmônica $(A, B; C, D) = 1$ se, e somente se, $A = B$ ou $C = D$.*

De fato, estabelecendo a correspondência biunívoca entre a reta AB e a reta real, e tomando a, b, c, d como as respectivas coordenadas dos pontos A, B, C, D , obtém-se que $(A, B; C, D) = \frac{AC}{BC} \frac{AD}{BD}$, se, e somente se, $\frac{(b-a)}{(c-b)} = \frac{(d-a)}{(b-d)} \Leftrightarrow (b-a)(d-c) = 0 \Leftrightarrow B = A$ ou $C = D$.

Lema 1.40. *Se $A \neq B$ e $C \neq D$ e $(A, B, C, D) = (A, B, D, C)$, então $(A, B, C, D) = -1$.*

De fato, sabemos que,

$(A, B, C, D) = (A, B, D, C) = \frac{1}{(A, B; C, D)}$, logo, $(A, B, C, D) = 1$ ou $(A, B; C, D) = -1$. Como, $A \neq B$ e $C \neq D$, segue que $(A, B; C, D) = -1$

Observação 1.41. *É importante observar que o sinal da razão cruzada não depende da orientação escolhida para a reta que contém os pontos A, B, C, D , já o valor só depende da posição dos pontos.*

Teorema 1.42. *Sejam A, B e C pontos distintos incidentes a uma reta t . Então, existe um único ponto D incidente a t tal que razão cruzada (A, B, C, D) é harmônica. O ponto D é chamado de conjugado harmônico de C em relação ao par de pontos (A, B) .*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 (A, B, C, D) &= (A, B, C, D') \Leftrightarrow \\
 (A, B, C, D) &= (AC/BC) \cdot (BD/AD) = (AC/BC) \cdot (BD'/AD') \Leftrightarrow \\
 &= (BD/AD) = (BD'/AD') \Leftrightarrow \\
 (A, B, C, D) &= (AC/BC) \cdot (BD/AD) = r \quad (1.9)
 \end{aligned}$$

Sabemos que $(A, B, D, C) = \frac{1}{r}$, logo,

$$\frac{1}{r} \stackrel{(1.9)}{=} \frac{1}{\frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD}} = \frac{1}{\frac{AC}{AD} \cdot \frac{BD}{BC}} = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AD}{BD} = \frac{AD}{BD} \cdot \frac{BC}{AC}.$$

□

1.8 Polaridade e inversão

Agora, abordaremos os conceitos de polaridade e inversão de um ponto em relação a uma circunferência. Esses conceitos estabelecem uma correspondência entre pontos e retas em um espaço projetivo e, desempenham um papel fundamental na compreensão da ideia de *razão harmônica*. Também, a introdução desses conceitos permitem uma outra interpretação para o conceito de ponto no infinito.

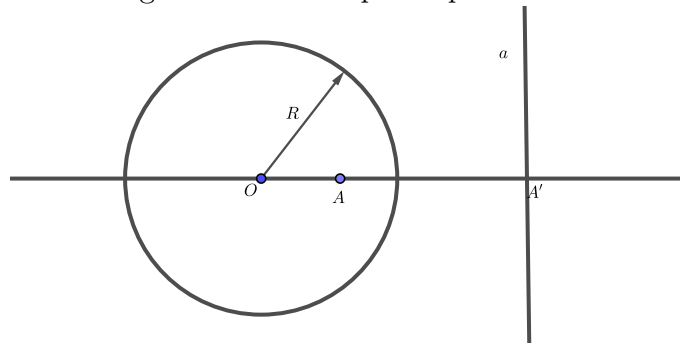
Antes de explorarmos esses conceitos na geometria projetiva, faremos uma introdução inicial na geometria euclidiana e, em seguida, estenderemos para a geometria projetiva.

A definição a seguir permite estabelecer uma associação entre pontos e retas do plano.

Definição 1.43. (*Polaridade*) Sejam C uma circunferência de centro O e raio r , A um ponto da circunferência, distinto de O e seja A' o ponto da semi-reta \overrightarrow{OA} que satisfaz $OA \cdot OA' = r^2$. A' é chamado *inverso* de A em relação a C . Seja a a reta perpendicular a \overrightarrow{OA} passando por A' . Dizemos que a é a reta polar de A , em relação a C , e que A é o pólo de a em relação a C . A transformação do plano que leva um ponto em sua polar e uma reta em seu pólo é chamada de *polaridade* (ver figura 1.30).

Definição 1.44 (*Polaridade no Plano Projetivo*). A polaridade da definição 1.43 sugere que pontos e retas têm comportamentos parecidos em relação à incidência. Há algumas falhas, porém. A transformação não está definida para o ponto O , centro da circunferência, nem tampouco para as retas que passam por O .

Figura 1.30: Exemplo de polaridade.

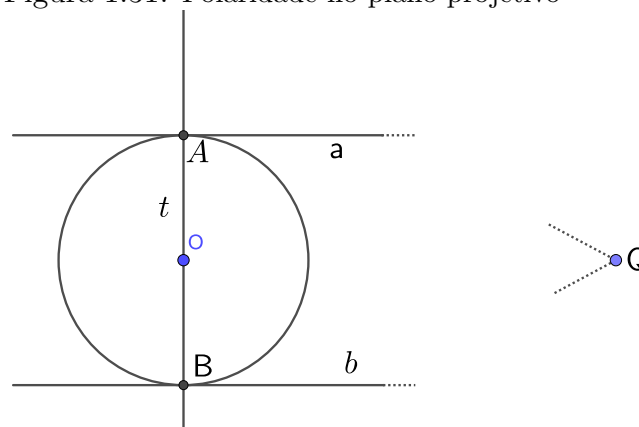


Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Este problema é resolvido quando se amplia o plano euclidiano, acrescentando a ele uma “reta no infinito” o . Esta reta é denominada a *polar do ponto* O .

Formalmente, os pontos de uma polar estão em correspondência biunívoca com os feixes de retas paralelas no plano euclidiano. Vejamos como a polaridade nos leva naturalmente a esta definição para os pontos do infinito.

Figura 1.31: Polaridade no plano projetivo



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

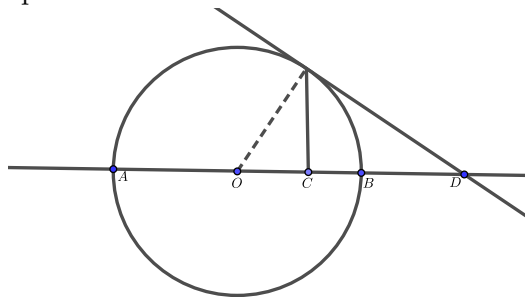
Por exemplo, vamos identificar o pólo de uma reta t que passa por O . Sejam A e B as pontos de contato de t com a circunferência. Como A e B estão sobre a reta t , suas retas polares a e b passam pelo pólo Q . Logo Q é o ponto de encontro das duas retas a e b , que no plano Euclidiano seriam paralelas. De fato, a reta polar de qualquer ponto de t será perpendicular a t no plano euclidiano. Estas retas passam a ser, no plano projetivo, um feixe de retas concorrentes (no ponto do infinito Q)(ver figura 1.31).

Esta é a maneira de trabalhar com a reta do infinito: cada um de seus pontos corres-

ponde a um único feixe de retas paralelas no plano euclidiano. E vice-versa a cada feixe de retas paralelas no plano euclidiano corresponde um único ponto da reta do infinito.

Proposição 1.45. *Sejam A, B, C, D , pontos colineares tal que $A - C - B$, ou seja, C está entre A e B . Os pontos C e D dividem harmonicamente o segmento AB se, e só se, D é o inverso de C , relativamente à circunferência de centro O e diâmetro AB .*

Figura 1.32: Os pontos C e D dividem harmonicamente o segmento AB .



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Demonstração. Vamos mostrar que:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} \Leftrightarrow CO \cdot DO = r^2, \text{ onde } r = OA = OB \text{ é o raio da circunferência.}$$

Sem perda de generalidade, vamos supor $O - C - B$ (Se $A - C - O$ a demonstração é análoga). Observe que:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{CO + r}{r - CO} = \frac{DA}{DB} = \frac{DO + r}{DO - r} \Rightarrow \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} \Leftrightarrow \frac{CO + r}{r - CO} = \frac{DO + r}{DO - r}$$

$$\Leftrightarrow (CO + r)(DO - r) = (DO + r)(r - CO)$$

$$\Leftrightarrow CODO - r \cdot CO + rDO - r^2 = r \cdot DO - DOCO + r^2 - rCO$$

$$\Leftrightarrow 2CO \cdot DO = 2r^2 \Leftrightarrow CO \cdot DO = r^2$$

Segue portanto $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} \Leftrightarrow CO \cdot DO = r^2$, mas $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} \Leftrightarrow \frac{CA \cdot DB}{CB \cdot DA} = 1$. Logo, considerando o sentido de B para A , temos que BC tem sentido oposto, e portanto $(A, B, C, D) = -1$ (ver figura 1.32). \square

CAPÍTULO 2

Modelo analítico para o plano projetivo

Ao longo deste capítulo pretende-se que o leitor tenha uma boa noção sobre o que se entende por *reta projetiva*, *plano projetivo* e *espaço projetivo*. A ideia por trás destes conceitos é a noção de perspectiva, no seguinte sentido: um espaço projetivo refere-se à forma como um olho (ou uma câmara) projeta um objeto do espaço tridimensional em uma imagem bidimensional, ou um objeto no espaço bidimensional em um espaço unidimensional.

2.1 O plano euclidiano estendido

Até o momento definimos um sistema axiomático para a geometria projetiva, estabelecemos um modelo geométrico de plano projetivo utilizando destes axiomas e a partir dele estabelecemos objetos pertencentes a geometria projetiva, do ponto de vista deste modelo. Neste capítulo é introduzido um modelo analítico que, de certa forma, valida o modelo geométrico apresentado.

O modelo analítico do plano projetivo apresentado ao longo deste capítulo baseia-se no modelo analítico usual para o plano euclidiano, acrescido do conceito de pontos e retas no infinito. Ou seja, nesse modelo o plano projetivo será visto como um plano euclidiano

extendido, no sentido de que, informalmente, ele pode ser interpretado como a união do plano \mathbb{R}^2 com o conjunto de todos os pontos no infinito.

Para introduzir o modelo analítico pretendido necessitamos de alguns conceitos auxiliares apresentados a seguir.

2.1.1 Coordenadas Homogêneas em espaços vetoriais

Nesta seção, será introduzido o conceito de *coordenadas homogêneas*, que é um sistema de coordenadas muito utilizado na *geometria computacional*, em particular na *geometria projetiva*, em substituição ao sistema de coordenadas cartesianas usual.

A ideia por trás do conceito de coordenadas homogêneas é que, em geral, objetos matemáticos em um espaço $(n - 1)$ -dimensional possuem equivalentes no espaço n -dimensional correspondente. Ocorre que, em alguns casos, resultados obtidos em um espaço n -dimensional são obtidos de maneira mais fácil do que em um espaço $(n - 1)$ -dimensional. Computam-se então os resultados no espaço n -dimensional para depois projetá-los de volta no espaço $(n - 1)$ -dimensional.

A representação de um ponto em um espaço $(n - 1)$ -dimensional em coordenadas homogêneas, é portanto, a representação desse mesmo ponto em um espaço n -dimensional.

As coordenadas homogêneas frequentemente são chamadas de *coordenadas projetivas*. A seguir este conceito é formulado, sendo que, para isso necessitamos de alguns pré-requisitos.

Proposição 2.1. *Sejam V um espaço vetorial e K um corpo. A relação binária dada por: $\forall u, v \in V, u \sim v \iff \exists k \in K \setminus \{0\} : u = kv$, definida em V , é uma relação de equivalência.*

Demonstração. A relação satisfaz as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva. De fato,

Reflexiva: Para todo $u \in V$: $u \sim v$, pois tomando $k = 1$, obtém-se que $u = 1v$.

Simétrica: Para todo $u, v \in V$: Se $u \sim v$ então, $v \sim u$.

Ou seja $u \sim v \Rightarrow \exists k \in K \setminus \{0\}$ tal que $u = kv$, se, e somente se, $\exists k' = \frac{1}{k}$, tal que $v = k'u$ e, conseqüentemente, $v \sim u$.

Transitiva: Sejam $u, v, w \in V$: Se $u \sim v$ e $v \sim w$ então $u \sim w$.

De fato, por hipótese sabemos que existem $k_1, k_2 \in K \setminus \{0\}$ tal que $v = k_1u$, e $w = k_2v$.

Assim, $w = k_2v = k_2(k_1u) = (k_2k_1)u$. Logo, considerando $k = k_2k_1$, temos que $u \sim w$.

□

Definição 2.2. Um ponto, distinto da origem, de coordenada $(X_1, X_2, \dots, X_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ é representado, em coordenadas homogêneas, pela n -upla ordenada $[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t]$, $t \neq 0$, onde $X_i = \frac{x_i}{t}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. O número real t é denominado *peso*, pois é ele que dita a proporcionalidade de uma coordenada homogênea.

Segue da definição 2.2 que para todo ponto $(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_{n-1}, \bar{X}_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, este é representado pela classe de equivalência $[x] = [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t]$, onde $[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t]$ são as coordenadas homogêneas do ponto $X = (X_1, X_2, \dots, X_{n-1})$.

Isto é, dado um ponto $(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_{n-1}, \bar{X}_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\exists t \in \mathbb{R} : (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_{n-1}, \bar{X}_n) = t(X_1, \dots, X_{n-1}, 1) = (x_1, \dots, x_{n-1}, t)$, onde $x_i = tX_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Coordenadas homogêneas em \mathbb{R}^2

Definição 2.3. Um ponto, distinto da origem, de coordenada X na reta real é representado, em coordenadas homogêneas, pelo par ordenado $[x, t]$, $t \neq 0$, onde $X = \frac{x}{t}$.

É fácil ver que cada coordenada X da reta real corresponde a infinitos pares ordenados $[x, t]$, incluindo o caso particular $[x, 1]$.

Coordenadas homogêneas em \mathbb{R}^3

Definição 2.4. Um ponto, distinto da origem, de coordenadas (X, Y) em \mathbb{R}^2 é representado, em coordenadas homogêneas, pela tripla ordenada $[x, y, t]$, $t \neq 0$, onde $X = \frac{x}{t}$ e $Y = \frac{y}{t}$.

É fácil ver que cada ponto cartesiano (X, Y) corresponde a infinitas triplas ordenadas $[x, y, t]$, incluindo o caso particular $[x, y, 1]$.

Exemplo 2.5. Tome $(X, Y) = (2, 3)$. Daí,

para $t = 1$, obtêm-se as coordenadas homogêneas $(2, 3, 1)$;

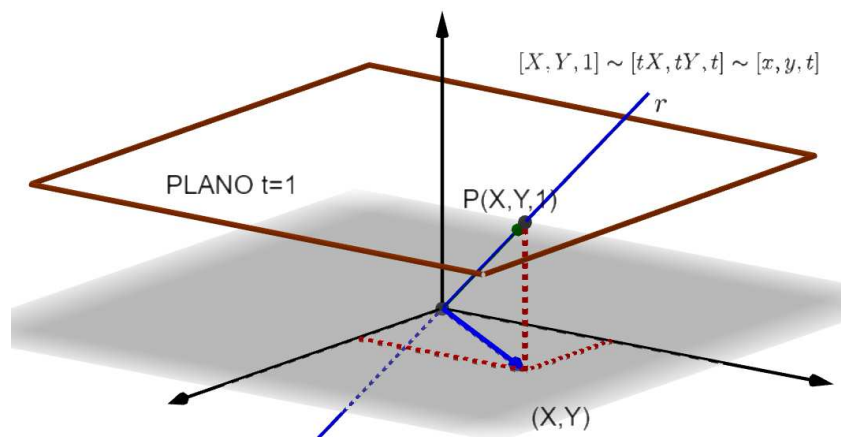
para $t = 2$, obtêm-se as coordenadas homogêneas $(4, 6, 2)$;

para $t = 3$, obtêm-se as coordenadas homogêneas $(6, 9, 3)$.

Observe que, olhando para o plano como um subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 , o ponto $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ é identificado com o ponto $(X, Y, 0) \in \mathbb{R}^3$, de forma que (abusando da notação) as coordenadas homogêneas do ponto (X, Y) podem ser interpretadas como

sendo os múltiplos escalares do vetor $(X, Y, 1)$, e conseqüentemente, qualquer vetor diretor da reta que passa pela origem e tem o vetor $(X, Y, 1)$ como vetor diretor determina uma tripla de coordenadas homogêneas para o ponto (X, Y) . Ou seja, cada coordenada homogênea $[x, y, t]$ representa uma direção em \mathbb{R}^3 (veja figura 2.1.1).

Figura 2.1: Interpretação geométrica das coordenadas homogêneas $[x, y, t]$ do ponto $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$, vistas como sendo a reta r passando pela origem do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , com vetor diretor $v = (x, y, t)$, onde $x = tX$ e $y = tY$.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

A escolha das coordenadas homogêneas para o desenvolvimento analítico da *geometria projetiva* deve-se ao fato de que este é um sistema de coordenadas que permite representar pontos no infinito (que na verdade são direções), que são os chamados *pontos impróprios* ou *pontos ideais*, se permitirmos o caso $t = 0$, com x, y não simultaneamente nulos. Nesse caso, as coordenadas homogêneas são chamadas de *coordenadas projetivas*. Na seção a seguir este conceito é formulado.

2.1.2 Espaços projetivos reais

Definição 2.6. Sejam V um espaço vetorial e K um corpo. Um espaço projetivo $\mathcal{P}(V)$, gerado por V é o espaço quociente $(V \setminus \{0\}) / \sim$, onde \sim é a relação de equivalência, $u \sim v \Leftrightarrow u = \lambda v$, para algum escalar $\lambda \in K$.

No que se segue, os elementos de $\mathcal{P}(V)$ serão chamados de *pontos*. Precisamos ter em mente que cada ponto de $\mathcal{P}(V)$ representa uma classe de equivalência de vetores de V pela relação \sim . Ou seja, dado $v \in V \setminus \{0\}$, a classe $[v]$, de cada vetor v , é na verdade, o

conjunto de todos os vetores não nulos que são múltiplos escalares de v (vetores paralelos ao vetor v).

Quando o espaço vetorial V tem dimensão finita n , diremos que $\mathcal{P}(V)$ tem dimensão $n-1$, de forma que podemos considerar $\mathcal{P}(V)$ como sendo o conjunto de todos os subespaços unidimensionais de V . Observe que se a dimensão de V é n , é possível definir uma aplicação natural $p : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{P}^{n-1}(V)$, que associa a cada vetor não nulo de V ao subespaço gerado por v .

No presente trabalho K será sempre o corpo dos números reais e, em particular, consideraremos os casos $V = \mathbb{R}^2$ e $V = \mathbb{R}^3$.

2.1.3 O espaço projetivo unidimensional \mathbb{P}^1 (Reta Projetiva)

Um espaço projetivo de dimensão 1 é geralmente chamado de *linha projetiva* ou *reta projetiva*, sendo um espaço projetivo sem relações de incidência interessantes, se comparado aos espaços projetivos de dimensões $n \geq 2$. Uma reta projetiva é dita *contínua* se for incidente a um conjunto de pontos da cardinalidade do contínuo (cardinalidade dos números reais); *discreta* se for incidente a um conjunto de pontos da cardinalidade enumerável, ou *finita* se for incidente a um conjunto de pontos de cardinalidade finita.

Vamos iniciar particularizando a definição 2.6 para o caso $V = \mathbb{R}$ e $K = \mathbb{R}$.

Definição 2.7. Um espaço projetivo $\mathcal{P}^1(\mathbb{R}^2)$, gerado por \mathbb{R}^2 é o espaço quociente $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) / \sim$, onde \sim é a relação de equivalência, $u \sim v \Leftrightarrow u = \lambda v$, para algum escalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{P}^1(\mathbb{R}^2)$ é denominado *reta projetiva real*, que é o conjunto de todas as retas de \mathbb{R}^2 que passam pela origem $(0,0)$. Será utilizada a notação \mathbb{P}^1 para indicar a *reta projetiva real* $\mathcal{P}^1(\mathbb{R}^2)$.

Observe que qualquer reta r de \mathbb{R}^2 , que passa pela origem $O(0,0)$, tem uma estrutura natural de subespaço vetorial unidimensional de \mathbb{R}^2 , obtida pela identificação de cada ponto X de r com um único vetor \overrightarrow{OX} do subespaço vetorial gerado pelo vetor diretor dessa reta, dado por

$$U_r = \left\{ \overrightarrow{OX} \in \mathbb{R}^2 : X \in r \right\}$$

Definição 2.8. As *cordenadas Homogêneas* de um ponto $X \in r$, são os pares ordenados $[x, y]$ de números reais onde, $y > 0$ e $X = x/y$.

Observe que existem elementos de $\mathbb{P}^1(U)$ que não estão representados pela definição 2.8.

Proposição 2.9. *A aplicação*

$$I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}^1 \\ x \rightarrow [x, 1],$$

é injetora e o conjunto $I_\infty = \{[a] \in \mathbb{P}^1 : a = [x, 0]\}$ é o complemento da imagem da aplicação I .

Demonstração. De fato,

$$I(x) = I(y) \Rightarrow [x, 1] = [y, 1] \\ \Rightarrow \exists t \neq 0 : (x, 1) = t(y, 1) \Rightarrow t = 1,$$

e consequentemente $x = y$.

Seja $[a] = [x, y] \in \mathbb{P}^1$. Se $y \neq 0$, então $[x, y] = [\frac{x}{y}, 1] = I(\frac{x}{y})$. Se $y = 0$ então $[a]$ está na reta projetiva determinada por $y = 0$. Além disso, como $1 \neq 0$, é fácil ver que a interseção da imagem da aplicação I com o conjunto I_∞ é vazia. Ou seja, $I_\infty = \{[a] \in \mathbb{P}^1 : a = [x, 0]\}$ é o complemento da imagem da aplicação I .

□

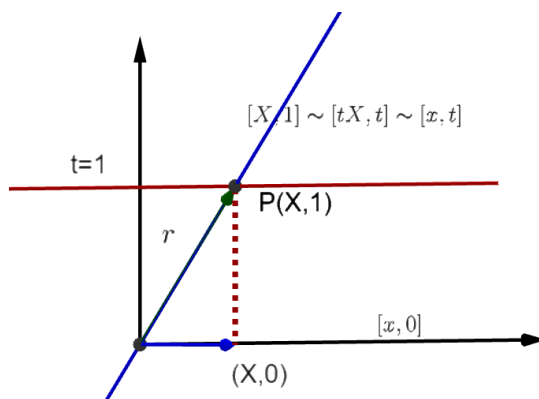
Exemplo 2.10. Seja $r : y = 1$, uma reta constante em \mathbb{R}^2 , que não passa pela origem. Como $y \neq 0$, cada reta passando pela origem, representada pelas coordenadas homogêneas $[x, t]$ (ponto projetivo em \mathbb{P}^1), intersecta r em um único ponto $(\frac{x}{t}, 1) = (X, 1)$, (onde $X = \frac{x}{t}$). Reciprocamente, todo ponto $(X, 1)$ da reta r pertence a uma única classe de equivalência $[x, t] \in \mathbb{P}^1$.

Considerando que, escolhida uma base para \mathbb{R}^2 , cada vetor não nulo $v = (x, t)$ possui coordenadas não simultaneamente nulas e, considerando também, que existe um único ponto P de \mathbb{P}^1 correspondente à classe de equivalência do vetor v , de forma que $[x, t]$ são as coordenadas projetivas de P , é imediato perceber que o vetor $(x, 0)$, $X \neq 0$ corresponde ao ponto projetivo $[x, 0]$. Porém, observe que nesse caso (para $t = 0$), para cada $x \neq 0$, o ponto $[x, t] = [x, 0]$ não possui representante sobre a reta r , pois $[x, 0] \neq [x, 1]$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (ver figura 2.1.3).

Dessa forma, considerando que o ponto $[x, 0] \in \mathbb{P}^1$ (em particular o ponto $[1, 0] \in \mathbb{P}^1$), definimos

$$\mathbb{P}^1 = \{[x, 1] : x \in \mathbb{R}\} \cup \{[1, 0]\}.$$

Figura 2.2: Interpretação geométrica das coordenadas homogêneas $[tX, t]$ do ponto $X \in \mathbb{R}$, vistas como sendo a reta r passando pela origem do espaço euclidiano \mathbb{R}^2 , com vetor diretor $v = (x, t)$, onde $x = tX$.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

A direção $(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, de coordenadas homogêneas $[tx, 0]$, $t \in \mathbb{R}$, é identificada com um *ponto ideal*, de forma que um ponto ideal é identificado com o eixo coordenado $y = 0$ (o eixo Ox).

Observe que o caso $[0, 0]$ não pode ocorrer, e devido a isto, é comum definir a *reta projetiva real* da seguinte forma:

$$\mathbb{P}^1 = \{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} / \sim\},$$

de forma que, dado um ponto $a = (x, t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, este é representado pela classe de equivalência $[a] = [X, 1]$, onde $[X, 1]$ são as coordenadas homogêneas do ponto $X = \frac{x}{t} \in \mathbb{R}$.

2.1.4 O espaço projetivo bidimensional \mathbb{P}^2 (Plano Projetivo)

Aqui também vamos iniciar particularizando a definição 2.6 para o caso $V = \mathbb{R}^3$ e $K = \mathbb{R}$.

Definição 2.11. Um espaço projetivo $\mathcal{P}^2(\mathbb{R}^3)$, gerado por \mathbb{R}^3 é o espaço quociente $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) / \sim$, onde \sim é a relação de equivalência, $u \sim v \Leftrightarrow u = \lambda v$, para algum escalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

Observe que, da mesma forma que ocorre em \mathbb{R}^2 , qualquer reta r de \mathbb{R}^3 , que passa pela origem $O(0, 0, 0)$, tem também uma estrutura natural de subespaço vetorial unidimensional de \mathbb{R}^3 . Basta identificar cada ponto X de r com um único vetor \overrightarrow{OX} do seguinte

subespaço vetorial,

$$U_r = \left\{ \overrightarrow{OX} \in \mathbb{R}^3 : X \in r \right\}$$

$\mathcal{P}^2(\mathbb{R}^3)$ é denominado *plano projetivo real*, que pode ser pensado como o conjunto de todas as retas de \mathbb{R}^3 que passam pela origem $(0, 0, 0)$. Será utilizada a notação \mathbb{P}^2 para indicar o *plano projetivo real* $\mathcal{P}^2(\mathbb{R}^3)$.

Devemos ter algum cuidado com a terminologia utilizada. Efetivamente, um “ponto” no *plano projetivo real* (ou na *reta projetiva real*) é uma reta em \mathbb{R}^3 (respec. \mathbb{R}^2) que passa pela origem e não deve ser confundido com um ponto no espaço (respec. no plano). Assim, para evitar este conflito de termos, quando julgarmos necessário, será utilizado o termo *ponto projetivo* para indicar uma classe de equivalência. Porém, quando não houver risco de ambiguidade, e estiver claro o contexto em que se está trabalhando, será utilizado o termo *ponto*, simplesmente, para representar a classe de equivalência a que ele pertence.

Definição 2.12. As *coordenadas Homogêneas* de um ponto $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$, são as triplas $[x, y, z]$ de números reais, onde $z > 0$ e $X = x/z$, e $Y = y/z$.

Cada ponto $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ determina um único ponto projetivo, cujas coordenadas homogêneas são $[x, y, 1]$, onde o subespaço vetorial que identifica esse plano é dado por

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\},$$

Observe que existem elementos de $\mathbb{P}^2(U)$ que não estão representados pela definição 2.12.

Proposição 2.13. *A aplicação*

$$\begin{aligned} I : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{P}^2 \\ (x, y) &\rightarrow [x, y, 1], \end{aligned}$$

é injetora e o conjunto $I_\infty = \{[a] \in \mathbb{P}^2 : a = [x, y, 0]\}$ é o complemento da imagem da aplicação I .

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} I((x, y)) = I((\bar{x}, \bar{y})) &\Rightarrow [x, y, 1] = [\bar{x}, \bar{y}, 1] \\ &\Rightarrow \exists t \neq 0 : (x, y, 1) = t(\bar{x}, \bar{y}, 1) \Rightarrow t = 1, \end{aligned}$$

e conseqüentemente $(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$.

Seja $[a] = [x, y, z] \in \mathbb{P}^2$. Se $(x, y) \neq (0, 0)$, então $[x, y] = [\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1] = I((\frac{x}{z}, \frac{y}{z}))$. Se $z = 0$ então $[a]$ está no plano projetivo determinado por $z = 0$. Além disso, como $1 \neq 0$, é fácil ver que a interseção da imagem da aplicação I com o conjunto I_∞ é vazia. Ou seja, $I_\infty = \{[a] \in \mathbb{P}^2 : a = [x, y, 0]\}$ é o complemento da imagem da aplicação I .

□

Exemplo 2.14. Seja $\pi : z = 1$ um plano de \mathbb{R}^3 que não passa pela origem $O(0, 0, 0)$. Como $z \neq 0$, cada ponto $[x, y, z] \in \mathbb{P}^2$ intersecta π em um único ponto $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1) = (X, Y, 1)$, (onde $X = \frac{x}{z}$ e $Y = \frac{y}{z}$). Reciprocamente, cada ponto $(X, Y, 1)$ do plano π pertence a uma única classe de equivalência $[x, y, z] \in \mathbb{P}^2$.

Fazendo $z = t$ e considerando que, escolhida uma base para \mathbb{R}^3 , cada vetor não nulo $v = (x, y, t)$ possui coordenadas não simultaneamente nulas e, considerando ainda, que existe um único ponto P de \mathbb{P}^2 correspondente à classe de equivalência do vetor v , de forma que $[x, y, t]$ são as coordenadas projetivas de P , é imediato perceber que o vetor $(X, Y, 0)$, $(X, Y) \neq (0, 0)$, corresponde ao ponto projetivo $[x, y, 0]$. Porém, observe que para $t = 0$, para cada $(x, y) \neq (0, 0)$, o ponto $[x, y, t] = [x, y, 0]$ não possui representante sobre a reta r , pois $[x, y, 0] \neq [x, y, 1]$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ (ver figura 2.14).

Considerando ainda que o ponto $[x, y, 0] \in \mathbb{P}^2$ (em particular o ponto $[1, 1, 0]$), definimos

$$\mathbb{P}^2 = \{[x, y, 1] : x, y \in \mathbb{R}\} \cup \{[1, 1, 0]\}.$$

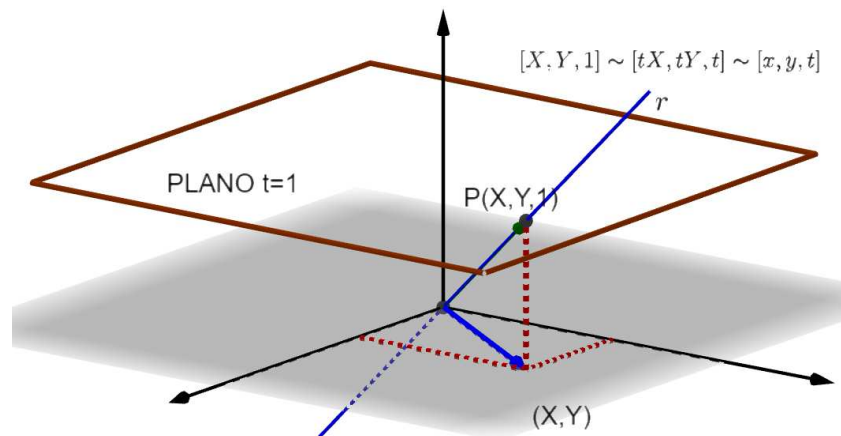
A direção $(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, de coordenadas homogêneas $[tx, ty, 0]$, $t \in \mathbb{R}$, é identificada com um *ponto ideal*, de forma que um ponto ideal é identificado com a direção da reta real que une o ponto $(x, y, 0)$ à origem. Observe que, definido dessa forma, o conjunto de todos os pontos ideais coincide com o plano $z = 0$, e nesse caso o plano $z = 0$ é identificado com uma reta ideal (ou reta no infinito).

Observe que o caso $[0, 0, 0]$ não pode ocorrer, e devido a isto, é comum definir o *plano projetivo real* da seguinte forma:

$$\mathbb{P}^2 = \{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \sim\},$$

de forma que, dado um ponto $a = (x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, este é representado pela classe de equivalência $[a] = [X, Y, 1]$, onde $[X, Y, 1]$ são as coordenadas homogêneas do ponto $(X, Y) = (\frac{x}{t}, \frac{y}{t}) \in \mathbb{R}^2$.

Figura 2.3: Interpretação geométrica das coordenadas homogêneas $[tx, ty, t]$ do ponto $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$, vistas como sendo a reta r passando pela origem do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , com vetor diretor $v = (x, y, t)$, onde $x = tX$ e $y = tY$ (repetimos aqui a figura para facilitar a leitura).



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Segue do exemplo anterior (exemplo 2.14) que, cada direção $(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, de coordenadas homogêneas $[x, y, 0]$, é identificado com um *ponto ideal*, e o conjunto de todos os pontos ideais determinam uma *reta ideal*, a qual corresponde ao plano $z = 0$ (plano xOy). Ou seja, intuitivamente, pode-se pensar em pontos no infinito como correspondendo a direções em \mathbb{R}^2 , mas de forma que, para cada direção, ambos os sentidos geram o mesmo ponto no infinito.

Exemplo 2.15. As coordenadas homogêneas do ponto $(2, 7)$, podem ser $[2, 7, 1]$, $[4, 14, 2]$, $[6, 21, 3]$, ou seja, $[2n, 7n, n]$ com $n \in \mathbb{R}$.

Se $[x, y, z]$ são coordenadas homogêneas de um ponto, então $\exists \lambda \neq 0$ tal que $[\lambda x, \lambda y, \lambda z]$ também serão coordenadas homogêneas pois estão na mesma classe de equivalência.

Daqui em diante denotaremos com parêntesis e letras maiúsculas um ponto (X_1, X_2, X_3) em coordenadas cartesianas, com colchetes e vírgula $[x_1, x_2, x_3]$ as coordenadas homogêneas deste ponto e com colchetes e ponto e vírgula $[u_1; u_2; u_3]$ as coordenadas homogêneas de uma *reta no plano projetivo*, incidente ao ponto homogêneo $[x_1, x_2, x_3]$.

Vejamos mais alguns exemplos:

Exemplo 2.16. Passe as coordenadas cartesianas para coordenadas homogêneas:

a) $(5, 6)$

Com $z = 1$, $(5, 6, 1)$

Com $z = 2$, $(10, 12, 2)$

Com $z = 3$, $(15, 18, 3)$

...

Com $z = n$, $(5n, 6n, n)$

Exemplo 2.17. Passe as coordenadas homogêneas para coordenadas cartesianas:

$[5, 6, 2]$

Como o $z = 2$, temos $\frac{5}{2} = 2.5$ e $\frac{6}{2} = 3$, logo as coordenadas cartesianas são $(2.5, 3)$.

2.1.5 Entendimento (informal) do conceito de pontos e retas no plano projetivo

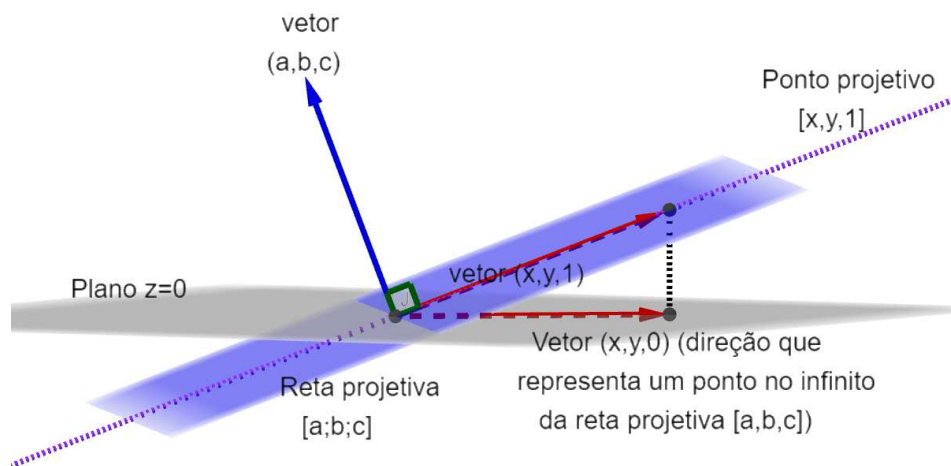
Podemos pensar nos pontos projetivos como retas através da origem em \mathbb{R}^3 , e correspondentemente, nas retas projetivas como planos, através da origem, em \mathbb{R}^3 , as quais são representadas, analiticamente, por todas as soluções $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ($x, y, z \neq 0$) da equação linear $ax + by + cz = 0$, com a, b, c não simultaneamente nulos. Desta forma, um ponto projetivo p pertence a uma reta projetiva l se a reta de \mathbb{R}^3 correspondente ao ponto projetivo p estiver contida no plano correspondente à reta projetiva l . Ou seja os pontos projetivos representam as direções em \mathbb{R}^3 , de forma que cada ponto $a = [x, y, z]$, $x, y, z \neq 0$ corresponde a uma única reta em \mathbb{R}^3 , a qual é determinada por todos os múltiplos escalares do vetor euclidiano (x, y, z) . Isso justifica a exigência de que $(x, y, z) \neq 0$, pois nesse caso não há como determinar uma direção em \mathbb{R}^3 .

Em analogia com a equação da reta em \mathbb{R}^3 , tem-se que o vetor (a, b, c) é ortogonal ao vetor (x, y, z) , de forma que a reta projetiva pode ser entendida como sendo o plano euclidiano ortogonal ao vetor (a, b, c) e que passa pelo ponto (x, y, z) , acrescida de um ponto no infinito, o qual por sua vez, pode ser entendido como a direção no plano xOy determinada pela projeção usual $(x, y, 0)$ do vetor (x, y, z) (veja figura (2.1.5)).

É possível estabelecer uma relação com a geometria euclidiana plana de (\mathbb{R}^2) fazendo as seguintes considerações:

- i) Se $(a, b) \neq (0, 0)$, então a reta projetiva associada consiste em pontos $[x, y, 1]$ que satisfazem a equação $ax + by + c = 0$ (observe que essa equação define uma reta ordinária \mathbb{R}^2 , “acrescida” de um ponto no infinito, o qual é dado pela única solução $[x, y, 0]$ da equação $ax + by = 0$. Dizemos que esta reta é o *complemento* de $ax + by + c = 0$.

Figura 2.4: O vetor (a, b, c) é ortogonal ao vetor (x, y, z) , de forma que a reta projetiva pode ser entendida como sendo o plano euclidiano ortogonal ao vetor (a, b, c) e que passa pelo ponto (x, y, z) , acrescida de um ponto no infinito, o qual por sua vez, pode ser entendido como a direção no plano xOy determinada pela projeção usual $(x, y, 0)$ do vetor (x, y, z) .



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

ii) Se $(a, b) = (0, 0)$, temos a *reta no infinito* $z = 0$, a qual consiste em todos os *pontos no infinito*.

Observe que:

- Quaisquer dois pontos projetivos distintos, determinam uma única reta projetiva. Isto segue do fato de que em \mathbb{R}^3 , se tomarmos duas retas distintas passando pela origem, ambas as retas estão em um mesmo plano, o qual é determinado de forma única.
- Quaisquer duas linhas projetivas (distintas) se intersectam em um único ponto projetivo.

Observe que, o item *ii)* pode ser interpretado, em termos de \mathbb{R}^3 , da seguinte forma: dados dois planos distintos, passando pela origem, a intersecção entre eles é uma reta que passa pela origem.

Comparando a geometria projetiva plana usual (euclidiana) com a geometria podemos fazer as seguintes considerações:

1. Dadas duas retas não paralelas em \mathbb{R}^2 , seus *complementos* projetivos terão pontos no infinito distintos. Portanto, a interseção dos *complementos* ainda consiste em um ponto de \mathbb{R}^2 .
2. Dadas duas retas paralelas em \mathbb{R}^2 , seus *complementos* projetivos terão o mesmo ponto no infinito, que é o ponto onde elas se intersectam.
3. Se tomarmos o *complemento* projetivo de qualquer reta em \mathbb{R}^2 , ela sempre intersectará a *reta no infinito* em um *ponto no infinito*.

2.1.6 O princípio da dualidade do ponto de vista analítico

O *princípio da dualidade*, introduzido no Capítulo I, o qual permite permutar os papéis de pontos e retas, pode ser introduzido analiticamente da seguinte forma:

Seja $l = ax + by + cz = 0$ uma reta projetiva, e $p = [a, b, c]$ um ponto projetivo. O princípio da dualidade permite que troquemos o ponto p pela reta l , e vice-versa. Vimos anteriormente que pontos e retas projetivos podem ser vistos como subespaços lineares de \mathbb{R}^3 . Consequentemente, aplicar o conceito de dualidade consiste em passar para o complemento ortogonal de cada subespaço. Desse ponto de vista podemos denotar a reta l por p^\perp e p por l^\perp , indicando que p é o dual da reta l e a reta l é o dual do ponto p , respectivamente, de forma que $p \in l \Leftrightarrow l^\perp \in p^\perp$.

Exemplo 2.18. Seja $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(a, b) \neq (0, 0)$, esse ponto corresponde ao ponto $p = [a, b, 1]$ no plano projetivo, o qual é identificado com a reta de \mathbb{R}^3 determinada pelos múltiplos da tripla ordenada $(a, b, 1)$. O dual desse ponto é a reta $l = \{(x, y, z) \neq (0, 0, 0) : ax + by + z = 0\}$, que é o *complemento projetivo* de $ax + by + 1 = 0$.

Observe que o dual da origem $(0, 0)$ de \mathbb{R}^2 é a reta no infinito $z = 0$.

2.1.7 Formalização algébrica do conceito de reta no plano projetivo

Utilizando a notação $a = u_1, b = u_2, c = u_3$ e $x = x_1, y = x_2, z = x_3$ utilizaremos a representação analítica de pontos e retas dada acima para realizar um estudo mais aprofundado desses conceitos no plano projetivo.

Será adotada a notação $[u_1; u_2; u_3]$ para indicar a reta projetiva $l = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$, consistida dos pontos $[x_1, x_2, 1]$ que satisfazem a equação $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3 = 0$, “acrescida” de seu respectivo ponto no infinito. Segue a definição formal:

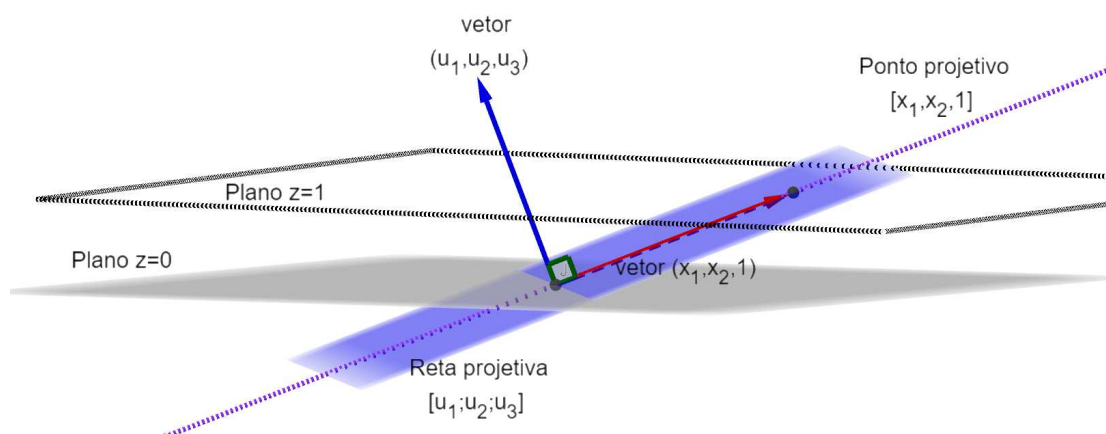
Definição 2.19. Dados u_1, u_2 números reais tais que $u_1^2 + u_2^2 \neq 0$, dizemos que o conjunto

$$\{u \in \mathbb{P}^2 : u = [u_1; u_2; u_3], \text{ com } u_1x_1 + u_2x_2 + u_3 = 0\}$$

é uma reta projetiva em \mathbb{P}^2 . Nesse caso diz-se que $[u_1, u_2, u_3]$, são as *coordenadas homogêneas da reta* l .

Observe que, do ponto de vista euclidiano a reta projetiva $[u_1; u_2; u_3]$ representa um plano que passa pela origem de \mathbb{R}^3 , é ortogonal ao vetor (u_1, u_2, u_3) e passa pelo ponto euclidiano $(x_1, y_1, 1)$ de forma que, do ponto de vista euclidiano, o vetor $(x_1, y_1, 1)$ é ortogonal ao vetor (u_1, u_2, u_3) . Ou seja, é o plano que passa pela origem e é incidente à reta que une o ponto $p = (x_1, y_1, 1)$ à origem do \mathbb{R}^3 , junto com o seu respectivo ponto no infinito. Do ponto de vista projetivo dizemos que o ponto projetivo de coordenadas homogêneas $[x_1, x_2, 1]$ é incidente com a reta $[u_1; u_2; u_3]$ (ver figura 2.1.7).

Figura 2.5: A reta projetiva $[u_1; u_2; u_3]$ representa um plano que passa pela origem de \mathbb{R}^3 , é ortogonal ao vetor (u_1, u_2, u_3) e passa pelo ponto euclidiano $(x_1, y_1, 1)$ de forma que, do ponto de vista euclidiano, o vetor $(x_1, y_1, 1)$ é ortogonal ao vetor (u_1, u_2, u_3) .



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Uma reta não é unicamente representada por suas coordenadas uma vez que, as equações $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3 = 0$ e $ku_1x_1 + ku_2x_2 + ku_3 = 0$ representam a mesma reta

para todo número real k diferente de zero. Porém, existe uma correspondência biunívoca entre as retas do plano euclidiano e as classes de equivalência definidas pela relação \sim da definição 2.11.

Definição 2.20. Cada tripla $[u_1; u_2; u_3]$, $u_1^2 + u_2^2 \neq 0$ de uma determinada classe de equivalência representa as *coordenadas homogêneas* de uma reta projetiva.

Ou seja, assim como acontece com as coordenadas homogêneas de um ponto, as coordenadas homogêneas da reta são classes de equivalência de triplas ordenadas $[u_1; u_2; u_3]$, onde $u_1^2 + u_2^2 \neq 0$.

Utilizando a notação matricial temos a seguinte definição:

Definição 2.21. Dizemos que um ponto de coordenadas homogêneas $[x_1, x_2, 1]$ é incidente com uma reta $[u_1; u_2; u_3]$ se, e somente se, $u \cdot X = 0$, onde u é a matriz linha

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}, X \text{ é a matriz coluna } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}, 0 \text{ representa a matriz coluna}$$

(3×1) identicamente nula e o ponto denota o produto de matrizes (ver figura 2.1.7). Observe que o produto matricial, nesse caso, coincide com o produto interno dos vetores u e X . No que segue será adotada a notação $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Por exemplo, se $u = [-3; 7; 2]$, então $\langle u, X \rangle = 0$ representa a equação $-3x_1 + 7x_2 + 2 = 0$

Observação: No que se segue será utilizado o termo *reta projetiva* para nos referirmos a uma *reta no plano projetivo*.

2.1.8 Modelo analítico do plano projetivo

O modelo analítico do plano projetivo apresentado a seguir é baseado no modelo analítico do plano euclidiano.

Sejam $X = (x_1, x_2, x_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ um ponto e um vetor de \mathbb{R}^3 , respectivamente. A reta l de \mathbb{R}^3 incidente ao ponto X passando pela origem, tem a direção do vetor v , se, e somente se, o vetor $x = OX = (x_1, x_2, x_3)$ é paralelo ao vetor v de forma que a reta l pode ser representada pela seguinte notação vetorial:

$$l : (x_1, x_2, x_3) = t(v_1, v_2, v_3), t \in \mathbb{R},$$

onde o parâmetro t é um número real que varia ao longo da reta e é usado para obter todos os pontos na reta. Como v é um vetor diretor para a reta, qualquer múltiplo escalar, não nulo, de v é também um vetor diretor para a mesma reta, ou seja, para qualquer reta que passa pela origem, existem infinitos vetores diretores possíveis que podem ser usados para descrevê-la na notação vetorial.

Da mesma forma um plano δ passando pela origem e passando pelo ponto X pode ser representado da seguinte forma:

$$\delta : \langle n, x \rangle = n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = 0,$$

onde $x = OX$ é um vetor definido pelo segmento orientado que une a origem a um ponto X , arbitrário, do plano δ e $n = (n_1, n_2, n_3)$ é um vetor normal a esse plano. Ou seja, n é perpendicular a todos os vetores desse plano.

Portanto, uma reta l passando pela origem, com vetor diretor v , pertence ao plano δ que passa pela origem e é ortogonal a um vetor n se, e somente se, $\langle n, v \rangle = 0$. Ou seja, n e v são perpendiculares.

Como visto anteriormente, cada ponto P do plano δ pode ser identificado com uma classe de equivalência em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, onde a classe de equivalência é definida como o conjunto de todos os possíveis vetores diretores para a reta que passa pela origem e intercepta δ no ponto P .

Observação 2.22. No que segue, $[p_1, p_2, p_3]$ são as coordenadas homogêneas de um ponto $P \in \mathbb{P}^2$, assim como $[u_1; u_2; u_3]$ são as coordenadas homogêneas da reta u em \mathbb{P}^2 .

Teorema 2.23. Três pontos, $X = [x_1, x_2, x_3]$, $Y = [y_1, y_2, y_3]$, $Z = [z_1, z_2, z_3]$ são colineares se, e somente se o determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstração. Sabemos que para que os pontos X, Y, Z sejam colineares deve existir uma reta de coordenadas homogêneas $[u_1; u_2; u_3]$ tal que

$$\begin{cases} u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \\ u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3 = 0 \\ u_1z_1 + u_2z_2 + u_3z_3 = 0 \end{cases}$$

Passando para notação matricial temos:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Supondo que

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

temos pela Regra de Cramer que a única solução possível é a solução trivial, o que é um absurdo, pois para isto deveríamos ter $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, ou seja, u_1, u_2, u_3 não definem uma reta. Logo,

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Mas como o determinante de uma matriz é igual ao determinante da sua transposta, podemos reescrever como

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

□

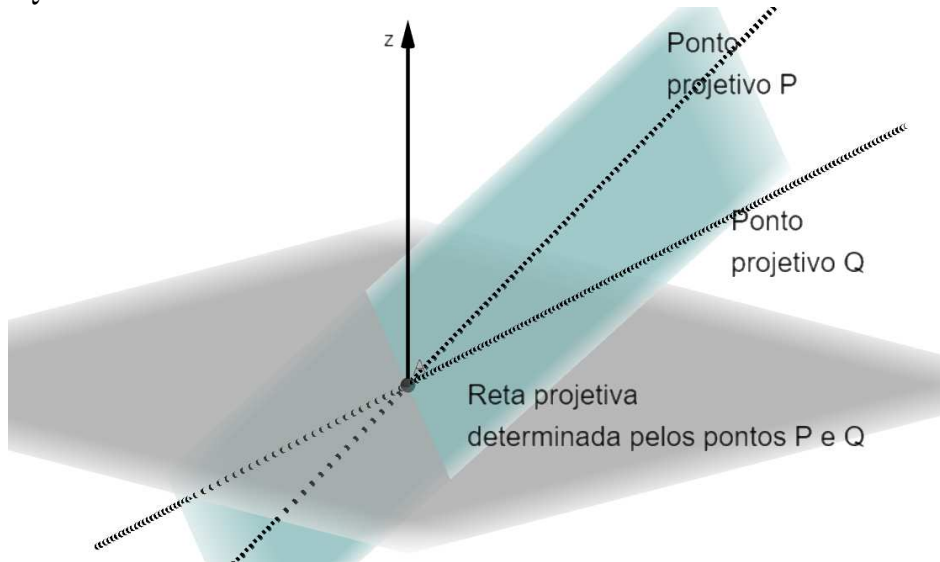
Corolário 2.24. Se $P = [p_1, p_2, p_3]$ e $Q = [q_1, q_2, q_3]$, então a equação da reta definida por P e Q pode ser escrita como:

$$\begin{vmatrix} x_1 & p_1 & q_1 \\ x_2 & p_2 & q_2 \\ x_3 & p_3 & q_3 \end{vmatrix} = 0$$

Na figura 2.6 abaixo é possível ver a interpretação geométrica de uma reta (projetiva) definida por dois pontos (projetivos).

Teorema 2.25. Três retas, u, v, w são concorrentes se, e somente se o determinante

Figura 2.6: Interpretação geométrica de uma reta projetiva PQ definida por dois pontos projetivos P e Q .



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstração. Supondo que u, v, w são concorrentes e o ponto de intersecção entre elas é $X(x_1, x_2, x_3)$. Conseqüentemente, considerando $[u_1, u_2, u_3]$, $[v_1, v_2, v_3]$ e $[w_1, w_2, w_3]$ as coordenadas homogêneas de u, v e w respectivamente, temos que este ponto é concorrente a três retas se, e somente se,

$$\begin{cases} u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \\ u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3 = 0 \\ u_1z_1 + u_2z_2 + u_3z_3 = 0 \end{cases}$$

ou em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

supondo que

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

segue pela Regra de Cramer que a única solução possível é a trivial, o que não pode ocorrer já que um ponto é uma classe de equivalência não nula.

Logo,

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

□

Teorema 2.26. *Se $X = [x_1, x_2, x_3]$ e $Y = [y_1, y_2, y_3]$ são dois pontos distintos, então qualquer ponto P da reta projetiva definida por X e Y tem coordenadas homogêneas $[p_1, p_2, p_3]$ onde $p_i = \delta_1 x_i + \delta_2 y_i$, $i = 1, 2, 3$; $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ e $\delta_1^2 + \delta_2^2 = 0$. Reciprocamente, qualquer ponto P com coordenadas homogêneas desta forma pertence à reta definida por X e Y .*

Demonstração. $[\Rightarrow]$ Se P pertence à reta definida por X e Y , então:

$$\begin{vmatrix} p_1 & x_1 & y_1 \\ p_2 & x_2 & y_2 \\ p_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0,$$

pois os vetores correspondente a estes três pontos são linearmente dependentes, então existe $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ não nulos tais que, $\delta_1 X + \delta_2 Y + \delta_3 P = 0$, $\delta_3 \neq 0$, já que X e Y são pontos distintos. Tomando $\delta_3 = -1$, temos $\delta_1 X + \delta_2 Y = P$.

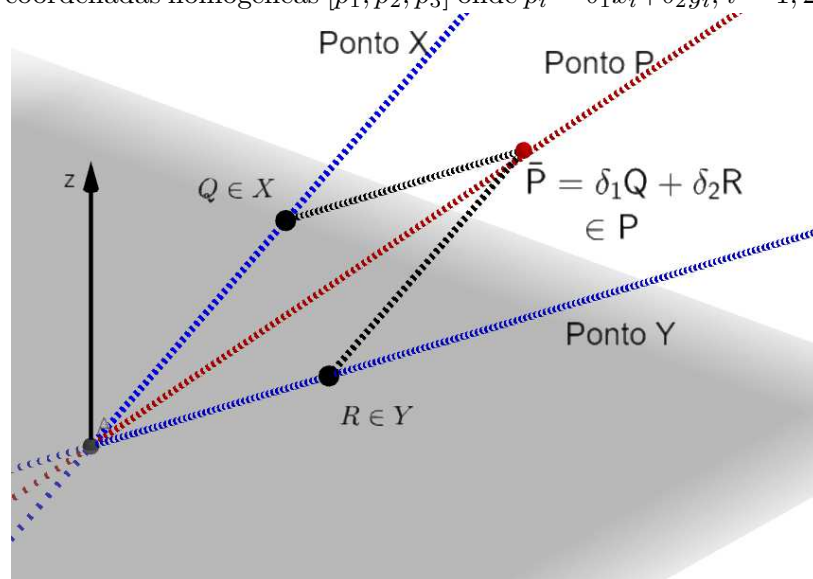
$[\Leftarrow]$ Reciprocamente, supondo que o ponto p tenha coordenadas homogêneas $(\delta_1 x_1 + \delta_2 y_1, \delta_1 x_2 + \delta_2 y_2, \delta_1 x_3 + \delta_2 y_3)$, com $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}^*$. Então:

$$\begin{vmatrix} p_1 & x_1 & y_1 \\ p_2 & x_2 & y_2 \\ p_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_1 x_1 + \delta_2 y_1 & x_1 & y_1 \\ \delta_1 x_2 + \delta_2 y_2 & x_2 & y_2 \\ \delta_1 x_3 + \delta_2 y_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Pelo teorema 2.23, X, Y e P são colineares.

□

Figura 2.7: Se $Q = (q_1, q_2, q_3) \in X$ e $R = (r_1, r_2, r_3) \in Y$ são dois representantes das respectivas classes de equivalência X e Y , distintos, e \bar{P} um representante da classe de equivalência P (onde P pertence à reta definida por X e Y), existem números reais δ_1 e δ_2 , tais que $\bar{P} = \delta_1 Q + \delta_2 R$. Ou seja, \bar{P} tem coordenadas homogêneas $[p_1, p_2, p_3]$ onde $p_i = \delta_1 x_i + \delta_2 y_i$, $i = 1, 2, 3$; e $\delta_1^2 + \delta_2^2 = 0$.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Definição 2.27. Os pontos X e Y são chamados pontos bases, enquanto que δ_1 e δ_2 são chamados de parâmetros homogêneos de P com relação a X e Y e escreve-se (δ_1, δ_2) .

Agora, algumas observações acerca dos pontos bases e dos parâmetros homogêneos.

Observação 2.28. Os parâmetros homogêneos de um par de pontos base, X e y , em relação a eles próprios, são $(1, 0)$ e $(0, 1)$, respectivamente. Em termos gerais, os parâmetros homogêneos de um ponto dependem das escolhas dos pontos base e de suas coordenadas homogêneas. Portanto, é necessário utilizar coordenadas homogêneas específicas para os pontos base em questão. No entanto, é importante notar que o conjunto de parâmetros homogêneos não é único, visto que $\delta_1 x_i + \delta_2 y_i$ e $k\delta_1 x_i + k\delta_2 y_i$ representam as coordenadas homogêneas do mesmo ponto (onde $k \neq 0$). No entanto, a razão $\delta = \delta_1/\delta_2$ é única, e essa razão é chamada de *parâmetro do ponto*.

Observação 2.29. O dual do Teorema 2.26 para retas, fica da seguinte forma: Se temos duas retas distintas e concorrentes, $s = [s_1; s_2; s_3]$ e $t = [t_1; t_2; t_3]$, então qualquer reta w pertencente ao plano definido por s e t possui coordenadas homogêneas $w = [w_1, w_2, w_3]$,

onde $w_i = \delta_1 s_i + \delta_2 t_i$ para $i = 1, 2$, e $\delta_1^2 + \delta_2^2 \neq 0$. Reciprocamente, qualquer reta com essas coordenadas pertence ao plano determinado pelas retas s e t . As retas s e t em questão são denominadas *retas base*, e os números reais δ_1 e δ_2 são chamados de *parâmetros homogêneos* de w em relação a s e t .

Teorema 2.30. *Uma projetividade entre dois feixes pode ser representada por uma equação matricial (real) da forma*

$$k \begin{bmatrix} \overline{\delta_1} \\ \overline{\delta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix},$$

com $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = |A| \neq 0$, $s \neq 0$, onde (δ_1, δ_2) são parâmetros homogêneos dos elementos originais e $(\overline{\delta_1}, \overline{\delta_2})$ são parâmetros homogêneos das imagens destes, respectivamente, com relação a uma base predeterminada de elementos.

Demonstração. Para esta demonstração, vamos tomar como exemplo um feixe de pontos e um feixe de retas. No entanto, é importante ressaltar que a demonstração pode ser realizada usando qualquer combinação de dois feixes quaisquer.

Sejam $P = [p_1, p_2, p_3]$ e $R = [r_1, r_2, r_3]$ pontos bases do feixe de pontos, e $s = [s_1; s_2; s_3]$ e $t = [t_1; t_2; t_3]$ as retas bases do feixe de retas.

Considere $X = [x_1, x_2, x_3]$ um ponto sobre a reta determinada pelos pontos P e R , distinto de P e R , com parâmetros homogêneos (δ_1, δ_2) ; suponha que a reta $\overline{x} = [\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}]$ de parâmetros homogêneos $\overline{\delta_1}$ e $\overline{\delta_2}$ seja a imagem de X sob esta perspectividade.

Pela definição de perspectividade \overline{x} é incidente a x , ou seja,

$$\begin{bmatrix} \overline{x_1} & \overline{x_2} & \overline{x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Logo,

$$\overline{x_1}x_1 + \overline{x_2}x_2 + \overline{x_3}x_3 = 0 \tag{2.1}$$

Reescrevendo a equação (2.1) em termos de componentes de acordo com o teorema 2.26, temos:

$$(\overline{\delta}_1 s_1 + \overline{\delta}_2 t_1) (\delta_1 p_1 + \delta_2 r_1) + (\overline{\delta}_1 s_2 + \overline{\delta}_2 t_2) (\delta_1 p_2 + \delta_2 r_2) + (\overline{\delta}_1 s_3 + \overline{\delta}_2 t_3) (\delta_1 p_3 + \delta_2 r_3) = 0. \quad (2.2)$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \overline{\delta}_1 \delta_1 (p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 s_3) + \overline{\delta}_1 \delta_2 (r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3) + \\ & \overline{\delta}_2 \delta_1 (p_1 t_1 + p_2 t_2 + p_3 t_3) + \overline{\delta}_1 \delta_2 (r_1 t_1 + r_2 t_2 + r_3 t_3) = 0 \end{aligned}$$

Definindo:

$$a_{21} = \sum_{i=1}^3 p_i s_i a_{22} = \sum_{m=1}^3 r_i s_i a_{13} = - \sum_{m=1}^3 p_i t_i a_{12} = - \sum_{m=1}^3 r_i t_i \quad (2.3)$$

Logo,

$$a_{21} \overline{\delta}_1 \delta_1 + a_{22} \overline{\delta}_1 \delta_2 - a_{11} \overline{\delta}_2 \delta_1 - a_{12} \overline{\delta}_2 \delta_2 = 0 \Leftrightarrow \overline{\delta}_1 (a_{21} \delta_1 + a_{22} \delta_2) = \overline{\delta}_2 (a_{11} \delta_1 + a_{12} \delta_2) = 0 \quad (2.4)$$

Disto resulta que,

$$\frac{\overline{\delta}_1}{\overline{\delta}_2} = \frac{a_{11} \delta_1 + a_{12} \delta_2}{a_{21} \delta_1 + a_{22} \delta_2},$$

mas isto significa que existe $k \neq 0$ tal que

$$\begin{aligned} k \overline{\delta}_1 &= a_{11} \delta_1 + a_{12} \delta_2; \\ k \overline{\delta}_2 &= a_{21} \delta_1 + a_{22} \delta_2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Colocando na forma matricial:

$$k \begin{bmatrix} \overline{\delta}_1 \\ \overline{\delta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

A equação $a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = |A| \neq 0$, se mantém válida, uma vez que a perspectividade é uma aplicação injetora.

Por fim, é importante lembrar que qualquer projetividade pode ser expressa como um produto finito de perspectividades, e o produto entre duas matrizes do tipo que aparece na equação (2.6) ainda segue a mesma forma dessas. \square

Exemplo 2.31. Exemplo retirado da referência [1].

Procuramos a matriz da projetividade que aplica pontos sobre uma reta p , com parâmetros homogêneos $(1, 3)$, $(1, 2)$ e $(2, 3)$, a pontos sobre uma outra reta \bar{p} com parâmetros homogêneos $(1, -4)$, $(0, 1)$ e $(-1, 1)$, respectivamente. Veja que pelo teorema 2.30, a projetividade pode ser representada por uma matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, onde:

$$k \begin{bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}.$$

O objetivo é determinar a, b, c e d . Para isto suponha que o par ordenado $(1, 2)$ é aplicado em $(0, 1)$, assim,

$$k_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

o que nos dá,

$$0 = a + 2b \quad e \quad (2.7)$$

$$k_1 = c + 2d. \quad (2.8)$$

Da equação (2.7), obtemos:

$$a = -2b \quad (2.9)$$

Agora considerando que o par ordenado $(1, 3)$ é aplicado em $(1, -4)$ obtemos a relação:

$$k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2b & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix};$$

$$k_2 = b \quad e; \quad (2.10)$$

$$-4k_2 = c + 3d. \quad (2.11)$$

Substituindo (2.10) em (2.11), obtemos:

$$c = -3d - 4b. \quad (2.12)$$

Agora considerando que o par ordenado $(2, 3)$ é aplicado em $(-1, 1)$ obtemos a relação:

$$k_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2b & b \\ -3d - 4b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

de forma que,

$$-k_3 = -b \quad e \quad (2.13)$$

$$k_3 = -3d - 8b \quad (2.14)$$

Tomando $k_3 = 1$ então da equação (2.13) temos que $b = 1$ e da equação (2.14) que $d = -3$. Desta maneira pelas equações (2.12) e (2.7) obtemos $c = 5$ e $a = -2$.

Portanto a matriz A , é a matriz $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$.

Observe que os escalares não precisam assumir os mesmos valores, neste caso, por exemplo, temos que $k_2 = 1 = k_3$ enquanto que $k_1 = 1$.

A seguir, apresentamos um teorema que comprova que a recíproca do teorema anterior também é válida.

Teorema 2.32. *Qualquer aplicação dada por uma equação matricial da forma*

$$k \begin{bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix},$$

tal que $ad - bc \neq 0$ e $k \neq 0$, é uma projetividade.

Demonstração. Para esta demonstração vamos utilizar dois feixes de retas (na referência [1] é exibida uma demonstração utilizando dois feixes de pontos).

Sejam $r(1, 0)$ (reta r com par parâmetros homogêneos $(1, 0)$) e $s(0, 1)$ (reta s com par parâmetros homogêneos $(0, 1)$) retas bases para o primeiro feixe de retas e $t(1, 1)$ a reta com parâmetros $(1, 1)$ com relação às retas r e s . Assim, a partir da aplicação da equação matricial A , podemos concluir que, $\bar{r}(a, c)$, $\bar{s}(b, d)$ e $\bar{t}(a + b, c + d)$, são elementos correspondentes, via aplicação, do segundo feixe de retas com uma base predeterminada. Pelo teorema 1.23 existe uma projetividade P tal que $P : rst \rightarrow \bar{r} \bar{s} \bar{t}$. Mas, pelo teorema 2.30, a projetividade P tem a seguinte equação matricial

$$k \begin{bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}.$$

Portanto basta mostrar que a matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

é múltiplo escalar da matriz da equação A .

Para determinar os valores de a , b , c e d , utilizaremos o fato de que r é aplicado a \bar{r} , s é aplicado a \bar{s} e t é aplicado a \bar{t} , via P . Visto que o escalar \bar{k} pode variar em cada situação, podemos permitir que k assumam diferentes valores em cada um dos casos. Portanto, temos as três seguintes equações matriciais:

$$\begin{aligned} k_1 \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ k_2 \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ k_3 \begin{bmatrix} a+b \\ c+d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Das equações matriciais obtemos:

$$\begin{aligned} k_1 a &= a_{11}; & k_2 b &= a_{12}; & k_3(a+b) &= a_{11} + a_{12}; \\ k_1 c &= a_{21}; & k_2 d &= a_{22}; & k_3(c+d) &= a_{21} + a_{22}; \end{aligned}$$

Tomando $k_3 = 1$, obtemos que:

$$\begin{aligned} a+b &= a_{11} + a_{12} = k_1 a + k_2 b; \\ c+d &= a_{21} + a_{22} = k_1 c + k_2 d; \end{aligned}$$

colocando em evidência,

$$\begin{aligned} a(1-k_1) + b(1-k_2) &= 0; \\ c(1-k_1) + d(1-k_2) &= 0; \end{aligned}$$

como $ad - bc \neq 0$, a solução $k_1 = 1$ e $k_2 = 1$ é única. Logo,

$$\begin{aligned} a &= a_{11}; \\ b &= a_{12}; \\ c &= a_{21}; \\ d &= a_{22}, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. \square

Teorema 2.33. *Uma projetividade sobre um feixe (que não seja a identidade) com matriz*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

tem dois elementos invariantes se $(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}a_{21} > 0$, tem um elemento invariante se $(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}a_{21} = 0$, ou nenhum elemento invariante se $(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}a_{21} < 0$.

Demonstração. Note que a invariância dos elementos dos feixes pode ser obtida se

$$k \begin{bmatrix} \overline{\delta_1} \\ \overline{\delta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix},$$

onde (δ_1, δ_2) é um *autovetor* da matriz da projetividade, isto acontece pois autovetores de uma matriz representam vetores que não mudam de direção por ação de uma transformação linear, já no contexto da geometria projetiva, esses autovetores correspondem a elementos que são preservados por ação de uma transformação projetiva.

Porém, existem autovetores associados aos respectivos autovalores se, e somente se, existe $k \neq 0$ tal que $|A - kI| = 0$. Ou seja,

$$\begin{aligned} 0 = |A - kI| &= \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} \\ &= (a_{11} - k)(a_{22} - k) - (a_{21}a_{12}) \\ &= k^2 - (a_{11} + a_{22})k - a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22}. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação do segundo grau determinamos o valor de k , dado por:

$$k = \frac{(a_{22} + a_{11}) \pm \sqrt{(a_{22} + a_{11})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2}. \quad (2.15)$$

Se a expressão dentro da raiz quadrada for positiva, isso implica na existência de duas soluções distintas para o valor de k , resultando em dois pontos invariantes distintos da projetividade. Se essa expressão for igual a zero, teremos exatamente uma solução para k e, portanto, exatamente um ponto invariante da projetividade. Por fim, se a expressão for negativa, não haverá soluções reais que determinem um valor para k , o que significa

que não existem pontos invariantes da projetividade nesse caso. Como a expressão 2.15 é algebricamente equivalente à equação do enunciado do teorema, o resultado é consequência direta. \square

Observação 2.34. Uma projetividade sobre um feixe é denominado *hiperbólica*, *parabólica*, ou *elíptica* se o número de elementos invariantes é 2, 1 ou 0, respectivamente.

Agora iremos definir o *raio transversal*, que é o correspondente algébrico da *razão cruzada* vista no capítulo anterior, sendo um objeto importante da geometria projetiva por ser invariante sob projetividades.

Definição 2.35. Se A, B, C e D são quatro elementos distintos de um feixe com parâmetros homogêneos (α_1, α_2) , (β_1, β_2) , (γ_1, γ_2) e (δ_1, δ_2) , respectivamente, em relação a uma base de pontos dada, então o raio transversal de a, b, c e d , denotado por $R(a, b, c, d)$, é calculado como um número real obtido através da seguinte expressão, dada em termos de determinantes:

$$R(A, B, C, D) = \frac{\begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} \div \frac{\begin{vmatrix} \delta_1 & \alpha_1 \\ \delta_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta_1 & \beta_1 \\ \delta_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}.$$

Observação 2.36. Na definição anterior, se nenhum dos elementos A, B, C ou D corresponde ao primeiro elemento da base de pontos considerada, então $(\alpha, 1)$, $(\beta, 1)$, $(\gamma, 1)$ e $(\delta, 1)$ também podem ser considerados como parâmetros homogêneos para esses pontos, respectivamente. Neste caso,

$$R(A, B, C, D) = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta} \div \frac{\delta - \alpha}{\delta - \beta}.$$

Teorema 2.37. *O raio transversal de quatro elementos distintos de um feixe é invariante sob uma projetividade.*

Demonstração. Temos que demonstrar que se A, B, C, D são elementos distintos de um feixe correspondendo a elementos distintos $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ de outro feixe, ou seja, $ABCD \wedge \bar{A}\bar{B}, \bar{C}\bar{D}$, então $R(A, B, C, D) = R(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$. Note que, se $M = [a_{ij}]$ é a matriz que

define a transformação projetiva, tal que $ABCD \wedge \overline{AB}, \overline{CD}$, segue que:

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} \overline{\gamma}_1 & \overline{\alpha}_1 \\ \overline{\gamma}_2 & \overline{\alpha}_2 \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_1 & \alpha_1 \end{array} \right| ; \\ \left| \begin{array}{cc} \overline{\gamma}_1 & \overline{\beta}_1 \\ \overline{\gamma}_2 & \overline{\beta}_2 \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \beta_1 \end{array} \right| ; \\ \left| \begin{array}{cc} \overline{\delta}_1 & \overline{\alpha}_1 \\ \overline{\delta}_2 & \overline{\alpha}_2 \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} \delta_1 & \alpha_1 \\ \delta_1 & \alpha_1 \end{array} \right| ; \\ \left| \begin{array}{cc} \overline{\delta}_1 & \overline{\beta}_1 \\ \overline{\delta}_2 & \overline{\beta}_2 \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} \delta_1 & \beta_1 \\ \delta_2 & \beta_2 \end{array} \right| , \end{aligned}$$

em que A tem parâmetros homogêneos (α_1, α_2) , \overline{A} tem parâmetros homogêneos $(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2)$, B tem parâmetros homogêneos (β_1, β_2) , \overline{B} tem parâmetros homogêneos $(\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2)$, C tem parâmetros homogêneos (γ_1, γ_2) , \overline{C} tem parâmetros homogêneos $(\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2)$, D tem parâmetros homogêneos (δ_1, δ_2) , \overline{D} tem parâmetros homogêneos $(\overline{\delta}_1, \overline{\delta}_2)$, com relação a uma base pre-determinada. Disto segue que

$$\begin{aligned} R(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}) &= \frac{\left| \begin{array}{cc} \overline{\gamma}_1 & \overline{\alpha}_1 \\ \overline{\gamma}_2 & \overline{\alpha}_2 \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} \overline{\gamma}_1 & \overline{\beta}_1 \\ \overline{\gamma}_2 & \overline{\beta}_2 \end{array} \right|} \div \frac{\left| \begin{array}{cc} \overline{\delta}_1 & \overline{\alpha}_1 \\ \overline{\delta}_2 & \overline{\alpha}_2 \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} \overline{\delta}_1 & \overline{\beta}_1 \\ \overline{\delta}_2 & \overline{\beta}_2 \end{array} \right|} \\ &= \frac{\left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{array} \right|} \div \frac{\left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} \delta_1 & \alpha_1 \\ \delta_2 & \alpha_2 \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} \delta_1 & \beta_1 \\ \delta_2 & \beta_2 \end{array} \right|} \\ &= \frac{\left| \begin{array}{cc} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{array} \right|} \div \frac{\left| \begin{array}{cc} \delta_1 & \alpha_1 \\ \delta_2 & \alpha_2 \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} \delta_1 & \beta_1 \\ \delta_2 & \beta_2 \end{array} \right|} = R(A, B, C, D). \end{aligned}$$

□

Teorema 2.38. *Se três elementos distintos de um feixe, A, B, C e um número real $r (r \neq 0, 1)$ são dados, então existe um único ponto D tal que $R(A, B, C, D) = r$.*

A demonstração se encontra na referência [1].

Teorema 2.39. *Se A, B, C, D são elementos distintos de um feixe e $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ são elementos distintos de outro feixe, e*

$$R(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}) = R(A, B, C, D),$$

então existe uma projetividade aplicando A, B, C, D em $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$, respectivamente.

Demonstração. Pelo teorema fundamental 1.23, existe uma projetividade tal que $ABC \wedge \overline{ABC}$, e seja D^* a única imagem de D por essa projetividade. Pelo teorema 2.37

$$R(A, B, C, D) = R(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, D^*).$$

Mas por hipótese,

$$R(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}) = R(A, B, C, D),$$

consequentemente,

$$R(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}) = R(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, D^*),$$

logo, segue pelo teorema anterior que $D^* = D$. □

Teorema 2.40. *Se A, B, C, D são elementos distintos de um feixe, então $R(A, B, C, D) = -1$ se, e somente se, os pontos colineares A, B, C, D formam o conjunto harmônico $H(AB, CD)$.*

Demonstração. [\Leftarrow] Dado que o conjunto harmônico $H(AB, CD)$ existe, podemos deduzir que $H(AB, DC)$ também existe, conforme o corolário 1.22. Agora, com base no teorema 1.32, sabemos que existe uma projetividade tal que $ABCD \wedge ABDC$. Nessas condições, pelo Teorema 2.37, temos $R(A, B, C, D) = R(A, B, D, C)$. No entanto, de acordo com o que foi visto no capítulo 1, sabemos que se $R(A, B, C, D) = r$, então $R(A, B, D, C) = 1/r$. Portanto, $r = 1/r$, o que implica $r^2 = 1$, como $r \neq 1$, isso nos leva à conclusão de que $r = -1$.

[\Rightarrow] Suponha que D^* seja um quarto elemento do feixe de modo que A, B, C e D formem o conjunto harmônico $H(AB, CD^*)$. A existência de D^* é garantida pelo Teorema 1.20. Seguindo o mesmo raciocínio da demonstração anterior, podemos concluir que

$R(A, B, C, D^*) = -1$. No entanto, pela hipótese, já sabemos que $R(A, B, C, D) = -1$. Ou seja, $R(A, B, C, D^*) = R(A, B, C, D)$. Portanto, de acordo com o teorema 2.38, concluímos que $D^* = D$. Conseqüentemente, o conjunto harmônico $H(AB, CD)$ existe. \square

2.2 Considerações finais

Em síntese, este trabalho buscou trazer os fundamentos da geometria projetiva por meio de uma linguagem acessível a alunos de graduação, numa tentativa de associar, de forma clara e objetiva, os conceitos algébricos e geométricos, o que em geral, não é encontrado em referências bibliográficas que envolvem a geometria projetiva. Espera-se que a exploração dos tópicos específicos apresentados, auxiliem na compreensão do assunto de forma que, havendo interesse, o leitor tenha condições de realizar estudos mais avançados.

Utilizando os conceitos apresentados no Capítulo 2 é possível abordar dois tipos de transformações lineares no plano projetivo: *colineações* e *correlações*. A colineação é identificada por mapear pontos colineares em pontos colineares, resultando na aplicação de retas em retas. Por outro lado, a correlação possui a propriedade de transformar pontos colineares em retas concorrentes. Essa transformação desempenha um papel crucial na dedução de equações analíticas das cônicas no plano projetivo. Fica a sugestão para trabalhos futuros.

Este trabalho, assim como a pesquisa desenvolvida, desempenharam um papel significativo na formação acadêmica do autor, proporcionando uma contribuição valiosa, especialmente devido a oportunidade de estudar um tópico que não consta na grade curricular regular do curso.

Espera-se que esta contribuição estimule novos questionamentos e inspire alunos de graduação a aprofundarem-se ainda mais nos estudos da geometria projetiva.

BIBLIOGRAFIA

- [1] CASTRO, R. B. de. **Tópicos da geometria projetiva**. 2012. 94 f. Dissertação - (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2012. Disponível em <http://hdl.handle.net/11449/94354>. Acesso em: 20 abr. 2022.
- [2] AUFFINGER, A. C. T. C.; VALENTIM, F. J. S. **Introdução à geometria projetiva**. 2003. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória, 2003. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~jardim/ma620/geoproj.pdf>. Acesso em: 20 abr. 2022.
- [3] AZEVEDO, E. Z. D. et al. **Geometria projetiva: um caminho axiomático ao estudo das cônicas**. 2008.
- [4] COXETER, H. S. M. **Projective geometry**. New York: Springer-Verlag, 1987.
- [5] DUALIDADE (matemática). [S. l.]:[s. n.], [2020?]. Portal: Japan Wiki. Disponível em: [https://hmn.wiki/pt/Duality_\(mathematics\)](https://hmn.wiki/pt/Duality_(mathematics)). Acesso em: 20 set. 2022.
- [6] LIMA, H. P. de. **Razão Cruzada: dos clássicos aos contemporâneos**. Disponível em: https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/48964/1/Disserta\unhbox\voidb@x\setbox\z@hbox{c}\accent24c~ao_Hellen.pdf. Acesso em: 18 set. 2023.

- [7] LIMA, L. E. **Análise Real**. Rio de Janeiro(Rj):Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2009.
- [8] ROCHA, M. F. C.; CARVALHO, T. M. M. O conceito de dualidade na geometria projetiva plana. [s.l: s.n.]. Disponível em: https://figshare.com/articles/book/XIII_Semana_de_Matem_tica_do_Pontal/22796003. Acesso em: 05 out. 2023.