Universidade Federal de Uberlândia

Faculdade de Matemática - FAMAT

Licenciatura em Matemática

O Cálculo Fracionário aplicado à modelos matemáticos clássicos

Fernanda de Andrade Flor

Trabalho de Conclusão de Curso - Uberlândia, MG - 2023

Prof. Dr. **Rafael Antônio Rossato**

Orientador

FERNANDA DE ANDRADE FLOR

O Cálculo Fracionário aplicado à modelos matemáticos clássicos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciada em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Rafael Antônio Rossato, UFU.

Este trabalho foi julgado adequado para a obtenção do título de licenciatura em Matemática, sendo aprovado em sua forma final pela banca examinadora:

Profa. Dra. Elisa Regina dos Santos, UFU
Prof. Dr. Santos Alberto Enriquez Remigio, UFU
Prof. Dr. Rafael Antônio Rossato, UFU.

Uberlândia, 07 de Novembro de 2023.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Faculdade de Matemática
Av. João Naves de Àvila, 2121, Bloco 1F - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: +55 (34) 3239-4158/4156/4126 - www.famat.ufu.br - famat@ufu.br

ATA DE DEFESA - GRADUAÇÃO

Curso de Graduação em:	Matemática				
Defesa de:	Trabalho de Conclusão de Curso 2 (FAMAT31804)				
Data:	01/12/2023	Hora de início:	09h00min	Hora de encerramento:	10h45min
Matrícula do Discente:	11911MAT002				
Nome do Discente:	Fernanda de Andrade Flor				
Título do Trabalho:	**O Cálculo Fracionário aplicado à modelos matemáticos clássicos**				
A carga horária curricular foi cumprida integralmente?	(x) Sim ( ) Não				

Reuniu-se na Sala 1F119, Campus Santa Mônica, da Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Curso de Graduação em Matemática, assim composta pelos Professores: Profa. Dra. Elisa Regina dos Santos – FAMAT/UFU, Prof. Dr. Santos Alberto Enriquez Remigio - FAMAT/UFU e o Prof. Dr. Rafael Antônio Rossato – FAMAT/UFU, orientador da candidata.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Prof. Dr. Rafael Antônio Rossato, apresentou a Comissão Examinadora e a candidata, agradeceu a presença do público, e concedeu à discente a palavra, para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação da discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do curso.

A seguir o senhor presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir a candidata. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando a candidata:

(X) Aprovada ( ) Reprovada

Nota: 100

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

Documento assinado eletronicamente por **Rafael Antonio Rossato**, **Presidente**, em 01/12/2023, às 10:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Elisa Regina dos Santos**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 01/12/2023, às 10:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Santos Alberto Enriquez Remigio**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 01/12/2023, às 11:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5007184** e o código CRC **C7BC1626**.

Referência: Processo nº 23117.080371/2023-50 SEI nº 5007184

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus e à vida por todas as oportunidades que me foram concedidas até aqui. Aos meus pais, minhas irmãs, minha avó e minha família, quero agradecer por todo o apoio, incentivo e palavras de encorajamento recebidas. Mesmo à distância, se esforçaram, e muito, para que eu pudesse alcançar meus sonhos e sempre colocaram a educação em primeiro lugar.

Ao meu orientador, Rafael Rossato, agradeço pela oportunidade de orientação em duas Iniciações Científicas e no Trabalho de Conclusão de Curso. Agradeço por cada correção e por todo o apoio prestado durante minha graduação. Levarei seus ensinamentos para toda minha vida acadêmica e profissional.

Aos meus colegas de turma, quero agradecer por sempre nos apoiarmos, pelas intermináveis noites de estudo na sala do PET, além de videochamadas durante o ensino remoto e todas as nossas vivências juntos, tornando a graduação mais leve, em especial, Dhara, Gabriel, Laura, Matheus e Victor. Sou muito grata por ter tido a oportunidade de vivenciar uma graduação ao lado de vocês.

Às pessoas que tornaram Uberlândia minha casa, se tornando minha segunda família, me acolhendo independentemente da situação, quero agradecer do fundo do meu coração. Muito obrigada, Lívia, Lutielle, Samara, Pâmella e Vanessa.

Aos meus tutores, Elisa e Bronzi, e colegas do Programa de Educação Tutorial, demostro minha gratidão pelas experiências e grandes ensinamentos. Todos vocês contribuíram significativamente para nosso crescimento.

Agradeço ao Programa de Educação Tutorial pela oportunidade de ser petiana e por todas as experiências enriquecedoras que contribuíram para meu desenvolvimento acadêmico, pessoal e profissional. Uma vez petiano, sempre petiano.

A todos meus professores e professoras que tive durante minha vida, por fazer me apaixonar pela profissão. Em especial, Raquel Bodart, Rosana Jafelice, Fabiana Fiorezzi, Ana Cláudia Zaqueu, Luís Renato e Marcos Câmara, sou extremamente grata por ter tido a oportunidade de ser aluna de vocês, por me ensinarem não apenas a matemática, mas também o que é ser professor.

Aos membros da banca examinadora, agradeço por aceitarem fazer parte deste processo e por suas valiosas correções e contribuições ao meu trabalho.

Por fim, quero expressar minha gratidão a todas as pessoas que passaram por minha vida, deixando uma marca e contribuindo para o meu crescimento. Obrigada a todos!

Resumo

Neste trabalho, é apresentado um estudo sobre o cálculo de ordem não inteira, conhecido como Cálculo Fracionário, aplicado à modelos matemáticos clássicos. Foi observado que, ao substituir a derivada usual de uma equação diferencial ordinária por uma derivada fracionária segundo Caputo de ordem menor que a do problema original, o comportamento da solução de três dos quatro modelos estudados apresentou uma diminuição na taxa de variação. Por outro lado, o último modelo estudado, a saber o modelo de Crescimento Populacional de Malthus, a redução da ordem do problema implicou numa solução com maior taxa de variação.

Palavras-chave: Cálculo Fracionário. Funções de Mittag-Leffler. Derivada Fracionária segundo Caputo. Equações Diferenciais Fracionárias.

Abstract

This work presents a study on non-integer order calculus, known as Fractional Calculus, applied to classical mathematical models. It was observed that replacing the usual derivative of an ordinary differential equation by a fractional derivative according to Caputo of lower order than the original problem, the solution behavior of three of the four models studied showed a decrease in the rate of variation. On the other hand, for the last model examined, namely the Malthusian Population Growth model, reducing the order of the problem resulted in a solution with a higher rate of change.

Key-words: Fractional Calculus. Mittag-Leffler Functions. Caputo Fractional Derivative. Fractional Differential Equations.

Sumário

Introdução

Inicialmente conhecido por integração e diferenciação de ordens arbitrárias, o Cálculo Fracionário surgiu através da seguinte dúvida “O significado da derivada de ordem inteira $\frac{d^n y}{dx^n}$ pode ser extendido para ter um significado quando n é uma fração?”. De acordo com [Miller e Ross 1993] e [Oliveira 2010], uma das primeiras evidências surgiu através de uma troca de cartas onde L'Hôpital questiona Leibniz “E se n fosse $\frac{1}{2}$?”, em 1695, após ele desenvolver a notação mais utilizada para a derivada $\frac{d^n y}{dx^n}$. Leibniz levantou algumas hipóteses e respondeu “Isso é um aparente paradoxo, e, um dia, consequências úteis serão traçadas.”.

Certamente, a realização desses levantamentos abriu caminho para um solo fértil de estudo e conjecturas. Depois de L'Hôpital e Leibniz grandes matemáticos se aventuraram no Cálculo Fracionário, Euler expressou seu questionamento ao associar a razão $\frac{d^2 x^3}{dx^2}$ algebricamente a $\frac{6x}{1}$, se perguntando que tipo de razão pode ser associada se n for uma fração. A primeira definição de um conceito da análise com ordem arbitrária veio em 1819, com Lacroix definindo uma derivada fracionária da função x^m, onde m é um inteiro positivo. Sua ideia foi desenvolver uma expressão para a n-ésima derivada

$$\frac{d^n(x^m)}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}, \quad m \geq n,$$

e estender a ordem de derivação para uma ordem arbitrária utilizando a Função Gama, generalização do conceito de fatorial, obtendo

$$\frac{d^n(x^m)}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n}.$$

Resolvendo a última expressão para o caso $m = 1$ e $n = \frac{1}{2}$, obtém-se

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}(x)}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}},$$

curiosamente o resultado acima coincide com a derivada $\frac{d^{\frac{1}{2}}x}{dx^{\frac{1}{2}}}$ na definição segundo Riemann-Liouville [Miller e Ross 1993], que será vista no Capítulo 2 e sua primeira aparição foi em 1869.

Atualmente, o estudo do Cálculo Fracionário tem se tornado cada vez mais presente, em consequência do assunto possuir uma grande aplicabilidade, principalmente nas áreas de física e engenharia [Oliveira 2010]. Neste trabalho, serão exploradas aplicações do Cálculo Fracionário em modelos matemáticos clássicos que originalmente são descritos por equações diferenciais ordinárias. O procedimento envolve substituir a ordem inteira da equação diferencial por um número não inteiro, resultando em uma equação diferencial fracionária [Kuroda et al. 2017]. Vale ressaltar que em todos os modelos apresentados, a mudança para uma ordem fracionária é realizada de tal maneira que a solução original se torna um caso particular da solução fracionária. Será utilizado o método da Transformada de Laplace para encontrar as soluções das equações diferenciais fracionárias.

Para isso é necessário introduzir no Capítulo 1 alguns conceitos preliminares de fundamental importância para o estudo do Cálculo Fracionário. Em seguida, no Capítulo 2, são estudados os conceitos de integral e derivada fracionária. Por fim, no Capítulo 3, são abordados a versão fracionária de 4 modelos matemáticos clássicos, a saber, Oscilador Harmônico, Equação Logística de Verhulst, Lei do Resfriamento de Newton e o Crescimento Populacional de Malthus. O objetivo é discutir os comportamentos das soluções desses problemas na versão fracionária, visando alcançar um entendimento de qual o efeito do uso da abordagem fracionária em relação ao problema clássico.

Considerando que não há na literatura conhecimento do significado físico e geométrico das derivadas fracionárias, as observações realizadas neste trabalho através do estudo dos modelos citados, contribuem com o avanço das pesquisas científicas envolvendo o cálculo de ordem não inteira.

Objetivos

Este trabalho tem por objetivo estudar a teoria do Cálculo Fracionário, utilizando-o como ferramenta para o desenvolvimento de versões fracionárias para modelos matemáticos clássicos, substituindo a ordem da equação diferencial ordinária por uma ordem fracionária e analisando o comportamento das soluções em comparação com as soluções originais. Como objetivos específicos, cita-se:

- Compreender os conceitos preliminares para o entendimento do Cálculo Fracionário e sua teoria;
- Analisar as diferenças entre as definições das derivadas fracionárias, segundo Riemann-Liouville e segundo Caputo, com o intuito de utilizar a mais adequada de acordo com o objetivo geral do trabalho;
- Desenvolver versões fracionárias para modelos matemáticos clássicos envolvendo equações diferenciais fracionárias;
- Interpretar o comportamento das soluções dos modelos matemáticos fracionários;
- Produzir um texto introdutório porém com rigor científico como referência para estudantes de graduação que se interessem pelo tema.

Capítulo 1

Conceitos preliminares

Este capítulo é dedicado a apresentar os conceitos iniciais para o estudo do Cálculo Fracionário e das aplicações propostas nos capítulos seguintes. Inicia-se na Seção 1.1 com um estudo sobre Transformada de Laplace e convolução. As Seções 1.2 e 1.3 versam sobre funções Gama e Beta, essenciais para o estudo do Cálculo Fracionário. Por fim, as Seções 1.4 e 1.5 apresentam as funções de Gel'fand-Shilov e Mittag-Lefler, necessárias para o estudo dos modelos de equações diferenciais fracionárias.

As referências desse capítulo são [Boyce e Diprima 1930] (para a primeira seção), [Oliveira 2011], [Camargo, Oliveira e Chiacchio 2009] e [Varalta 2014].

1.1 Transformada de Laplace e Convolução

Antes de definir a Transformada de Laplace, será apresentada a definição de uma função contínua por partes.

Definição 1.1 *Uma função f é dita* ***contínua por partes*** *em um intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ se o intervalo puder ser dividido por um número finito de pontos $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$, tal que f seja contínua em cada subintervalo aberto $t_{i-t} < t < t_i$ e f tenda a um limite finito nos extremos de cada subintervalo por pontos no interior* *do intervalo. Ou seja, f é contínua por partes em um intervalo se for contínua nesse mesmo intervalo exceto por um número finito de descontinuidades do tipo salto.*

Definição 1.2 *Seja f uma função definida no intervalo $0 \leq t < \infty$. Define-se a* ***Transformada de Laplace*** *de f, denotada por $\mathscr{L}[f(t)]$ ou $F(s)$, como*

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] := \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt, \text{ para } s > 0,$$

se a integral existir. Nesse caso, s é chamado ***parâmetro da transformada****.*

Exemplo 1.3 *Seja $f(t) = 1$, $t \geq 0$. Então,*

$$\mathscr{L}[1] = \int_0^\infty e^{-st}dt = -\lim_{A\to\infty} \left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_0^A = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

Exemplo 1.4 *Seja $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$. Então,*

$$\mathscr{L}[e^{at}] = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt = \frac{1}{s-a}, \quad s > a.$$

Pela definição acima é possível provar a linearidade da Transformada de Laplace. De fato, para quaisquer valores α, $\beta \in \mathbb{R}$ e funções f, g cujas $\mathscr{L}[f(t)]$ e $\mathscr{L}[g(t)]$ existam, pela linearidade da integral, segue

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[\alpha f(t) + \beta g(t)\right] &= \int_0^\infty \left(\alpha f(t) + \beta g(t)\right) e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty \alpha f(t)e^{-st}dt + \int_0^\infty \beta g(t)e^{-st}dt \\
&= \alpha\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt + \beta\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt \\
&= \alpha\mathscr{L}\left[f(t)\right] + \beta\mathscr{L}\left[g(t)\right].
\end{aligned}$$

Tratando-se de problemas de valor inicial é necessário conhecer a Transformada de Laplace das derivadas da função f. Enuncia-se, no teorema abaixo, a propriedade de que a transformada da derivada de ordem n de uma função pode ser escrita em termos da transformada da função.

Teorema 1.5 *Sejam f uma função contínua e f' contínua por partes em qualquer intervalo $0 \leq t \leq A$. Supondo que f é de ordem exponencial, ou seja, existem constantes K, a e M tais que $|f(t)| \leq Ke^{at}$ para $t \geq M$, então $\mathscr{L}[f'(t)]$ existe para $s > a$ e*

$$\mathscr{L}[f'(t)] = s\mathscr{L}[f(t)] - f(0).$$

Demonstração. Considere a integral $\int_0^A e^{-st} f'(t)dt$, cujo limite quando $A \to \infty$, se existir, é a Transformada de Laplace da derivada de f. Caso f' tenha pontos de descontinuidade em $0 \leq t \leq A$, serão representados por $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Logo,

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)dt = \int_0^{t_1} e^{-st} f'(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f'(t)dt + \cdots + \int_{t_k}^{A} e^{-st} f'(t)dt.$$

Integrando por partes, tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^A e^{-st} f'(t)dt &= e^{-st} f(t)|_0^{t_1} + e^{-st} f(t)|_{t_1}^{t_2} + \cdots + e^{-st} f(t)|_{t_k}^{A} + \\ &+ s\left[\int_0^{t_1} e^{-st} f(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f(t)dt + \cdots + \int_{t_k}^{A} e^{-st} f(t)dt\right] \end{aligned}$$

Observe que no lado direito da igualdade acima, a soma das primeiras k parcelas pode ser simplificada. De fato,

$$e^{-st} f(t)|_0^{t_1} + e^{-st} f(t)|_{t_1}^{t_2} + \cdots + e^{-st} f(t)|_{t_k}^{A} = e^{-sA} f(A) - f(0).$$

Além disso, como f é contínua, vale

$$\int_0^{t_1} e^{-st} f(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f(t)dt + \cdots + \int_{t_k}^{A} e^{-st} f(t)dt = \int_0^A e^{-st} f(t)dt.$$

Segue disso que

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)dt = e^{-sA} f(A) - f(0) + s\int_0^A e^{-st} f(t)dt. \tag{1.1}$$

Com $A \to \infty$, tem-se que $\int_0^A e^{-st} f(t)dt$ tende a $\mathscr{L}[f(t)]$. Para $A \geq M$, segue que $|f(A)| \leq Ke^{aA}$, implicando que $|e^{-sA} f(A)| \leq Ke^{-(s-a)A}$. Portanto, $e^{-sA} f(A) \to 0$, quando $A \to \infty$, com $s > a$. Logo, a expressão à direita do sinal de igualdade na

Equação (1.1), tem limite igual a $s\mathscr{L}[f(t)] - f(0)$. Por outro lado, o lado esquerdo da igualdade tem limite $\mathscr{L}[f'(t)]$. Portanto,

$$\mathscr{L}[f'(t)] = s\mathscr{L}[f(t)] - f(0).$$

■

Observação 1.6 *Se f' e f'' satisfazem as mesmas condições impostas sobre f e f' no Teorema 1.5, respectivamente, então segue que $\mathscr{L}[f''(t)]$ também existirá para $s > a$ e*

$$\mathscr{L}[f''(t)] = s\mathscr{L}[f'(t)] - f'(0) = s(s\mathscr{L}[f(t)] - f(0)) - f'(0) = s^2\mathscr{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0).$$

Portanto, desde que f satisfaça algumas hipóteses, pode-se obter uma expressão para a Transformada de Laplace da n-ésima derivada de uma função.

Corolário 1.7 *Seja f uma função tal que $f, f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ são contínuas e $f^{(n)}$ é contínua por partes em qualquer intervalo $0 \leq t \leq A$. Além disso, suponha que f e todas as derivadas de ordem até $n-1$ sejam de ordem exponencial. Então, $\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]$ existe para $s > a$ e é dada por*

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^n\mathscr{L}[f(t)] - s^{n-1}f(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Demonstração. A demonstração segue por indução. Para $n = 1$, tem-se pelo Teorema 1.5 que dada f uma função nas condições acima é válido que

$$\mathscr{L}[f'(t)] = s\mathscr{L}[f(t)] - f(0).$$

Suponha por hipótese de indução, que o resultado seja válido para a n-ésima derivada, isto é

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^n\mathscr{L}[f(t)] - s^{n-1}f(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Considerando agora $f^{(n)}$ contínua e $f^{(n+1)}$ contínua por partes em qualquer intervalo $0 \leq t \leq A$, $f^{(n)}$ de ordem exponencial, e denotando $g(t) = f^{(n)}(t)$, tem-se que a função g e sua derivada cumprem as hipóteses do Teorema 1.5. Logo,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f^{(n+1)}(t)] &= \mathscr{L}[g'(t)] = s\mathscr{L}[g(t)] - g(0) = s\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] - f^{(n)}(0) \\
&= s[s^n\mathscr{L}[f(t)] - s^{n-1}f(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)] - f^{(n)}(0) \\
&= s^{n+1}\mathscr{L}[f(t)] - s^n f(0) - \cdots - s^2 f^{(n-2)}(0) - sf^{(n-1)}(0) - f^{(n)}(0),
\end{aligned}$$

mostrando que vale a afirmação para $f^{(n+1)}$. Pelo Princípio da Indução Finita, segue que o teorema é válido para toda n-ésima derivada de f. ∎

A Transformada de Laplace do produto de duas funções não necessariamente é igual ao produto das transformadas. Porém tal propriedade é válida para o produto de convolução definido abaixo.

Definição 1.8 *Sejam f e g duas funções contínuas por partes em todo intervalo da forma $[0, A]$. Define-se o **produto de convolução** de f e g, denotado por $(f * g)$, como sendo*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Proposição 1.9 *Sejam f e g duas funções contínuas por partes em todo intervalo da forma $[0, A]$ e que possuem Transformada de Laplace. Logo,*

$$\mathscr{L}[(f * g)(t)] = \mathscr{L}[f(t)] \cdot \mathscr{L}[g(t)].$$

Demonstração. Por definição, sejam $F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ e $G(s) = \mathscr{L}[g(\tau)] = \displaystyle\int_0^\infty e^{-s\tau}g(\tau)d\tau$. Logo, tem-se

$$\begin{aligned}
F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \int_0^\infty e^{-s\tau}g(\tau)d\tau \\
&= \int_0^\infty f(t) \int_0^\infty g(\tau)e^{-s(t+\tau)}d\tau dt.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $v = t + \tau$, com t fixado, obtém-se

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty f(t) \int_t^\infty g(v-t)e^{-sv} dv dt.$$

Invertendo a ordem de integração, tem-se

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^\infty \int_0^v f(t)g(v-t)e^{-sv} dt dv \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^v f(t)g(v-t)dt \right) e^{-sv} dv \\ &= \int_0^\infty (f * g)(v) e^{-sv} dv \\ &= \mathscr{L}[(f * g)(v)]. \end{aligned}$$

■

A Transformada de Laplace será utilizada na resolução de problemas de valores iniciais envolvendo equações diferenciais fracionárias propostas no Capítulo 3, obtendo assim equações algébricas. A fim de recuperar as soluções dos problemas de partida, pode-se aplicar a propriedade de que $\mathscr{L}[f(t)]$ admite inversa, denotada por $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$, cuja a fórmula geral é omitida, uma vez que envolve uma integral de função de variável complexa, que não é objeto de estudo deste trabalho. No entanto, pode ser provado que dada $f(t)$ uma função contínua com Transformada de Laplace $F(s)$, não existe outra função contínua possuindo a mesma transformada $F(s)$ (ver [Boyce e Diprima 1930], p. 247).

1.2 Função Gama

Nesta seção, será introduzida a Função Gama, a qual desempenha um papel essencial no estudo do Cálculo Fracionário, estando presente na definição da Integral de ordem não inteira.

Definição 1.10 *Define-se a **Função Gama** pela a seguinte integral imprópria,*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad \forall x > 0.$$

A Função Gama é considerada uma generalização do fatorial para números reais em virtude da propriedade abaixo.

Teorema 1.11 *Para $n \in \mathbb{N}$, vale a igualdade*

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt = (n-1)!.$$

Demonstração. A demonstração segue por indução sobre n. Para $n = 1$,

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{1-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 = 0!.$$

Logo, a igualdade é válida para $n = 1$. Agora, suponha a igualdade válida para n. É possível mostrar a validade para $n+1$, ou seja, $\Gamma(n+1) = n!$. Para isso, utiliza-se integração por partes, obtendo

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^n dt = -e^{-t} t^n \big|_{t=0}^{t=\infty} + n \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!,$$

uma vez que $[-e^{-t} t^n]_{t=0}^{t=\infty} = -\lim_{t \to \infty} e^{-t} t^n = 0$. ∎

A propriedade acima pode ser generalizada para todos os números reais positivos.

Teorema 1.12 *Dado $x > 0$, tem-se a seguinte propriedade da Função Gama:*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{1.2}$$

Demonstração. Integrando por partes é possível obter

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt = -e^{-t} t^x \big|_{t=0}^{t=\infty} + x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x).$$

∎

Pelo teorema anterior, é possível estender o domínio da Função Gama para todos os reais não nulos, com excessão dos inteiros negativos. De fato, para $x > 0$, vale

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}.$$

O lado direito dessa equação está bem definido para valores de $-1 < x < 0$. Logo, pode-se definir o lado esquerdo também para valores obtidos do lado direito. Sendo assim, pode-se estender o domínio de Γ para $-1 < x < 0$. Realizando o mesmo raciocínio para os intervalos $-2 < x < -1$ e os próximos seguindo esse padrão, é obtida uma extensão do domínio dessa função para todos os reais não nulos, com excessão dos inteiros negativos.

1.3 Função Beta

Nesta seção, é definida a Função Beta e uma importante relação com a Função Gama.

Definição 1.13 *Denotada por $B(p,q)$, a **Função Beta** é definida pela seguinte integral,*

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt,$$

com $p > 0$, $q > 0$.

Observação 1.14 *Utilizando a mudança de variável $t = sen^2\theta$ é possível obter*

$$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2p-1}(\theta)\cos^{2q-1}(\theta)d\theta.$$

O teorema abaixo permite estabelecer uma importante relação entre as funções Gama e Beta, a qual é fundamental em demonstrações de resultados presentes no Cálculo Fracionário.

Teorema 1.15 *Dados $p > 0$ e $q > 0$, pode-se estabelecer a seguinte relação*

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Demonstração. Note que

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-u}u^{p-1}du \int_0^\infty e^{-v}v^{q-1}dv = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u-v}u^{p-1}v^{q-1}dudv.$$

Considerando a mudança de variáveis $u = x^2$ e $v = y^2$, tem-se

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}dxdy.$$

Por coordenadas polares $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$,

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \left[2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2p+2q-1}dr\right]\left[2\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}(\theta)\,\mathrm{sen}^{2q-1}(\theta)d\theta\right].$$

Pela Observação 1.14,

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \left[2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2p+2q-1}dr\right]B(p,q).$$

Agora, tomando $t = r^2$,

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = B(p,q)\int_0^\infty e^{-t}t^{p+q-1}dt.$$

E assim, $\Gamma(p)\Gamma(q) = B(p,q)\Gamma(p+q)$. Portanto,

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

■

1.4 Função de Gel'fand-Shilov

Com o intuito de desenvolver a integral fracionária no Capítulo 2, nesta seção, será definida a Função de Gel'fand-Shilov e calculda a sua respectiva Transformada de Laplace.

Definição 1.16 *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e α um número não inteiro. Define-se a **Função de Gel'fand-Shilov** de ordem n e α, respectivamente, por*

$$\phi_n(t) = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, & se\ t \geq 0 \\ 0, & se\ t < 0 \end{cases} \quad e \quad \phi_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & se\ t \geq 0 \\ 0, & se\ t < 0 \end{cases}.$$

Aplicando a Transformada de Laplace na Função Gel'fand Shilov,

$$\mathscr{L}[\phi_\alpha(t)] = \int_0^\infty e^{-st} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha-1} dt.$$

Introduzindo a mudança de variável $st = a$,

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[\phi_\alpha(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha-1} s dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-a} \left(\frac{a}{s}\right)^{\alpha-1} da \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha) s^\alpha} \int_0^\infty e^{-a} a^{\alpha-1} da \\ &= \frac{s^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-a} a^{\alpha-1} da. \end{aligned}$$

Portanto, pela Definição 1.10,

$$\mathscr{L}[\phi_\alpha(t)] = \frac{s^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha) = s^{-\alpha}. \tag{1.3}$$

1.5 Função de Mittag-Leffler

Para as soluções das equações diferenciais ordinárias presentes nos modelos fracionários abordados nas próximas seções, será utilizada a Transformada de Laplace da função $E_\alpha(\pm a t^\alpha)$, onde a é uma constante e $E_\alpha(t)$ é a Função de Mittag-Leffler de um parâmetro, definida a seguir.

Definição 1.17 *Denotada por $E_\alpha(t)$, com $\alpha > 0$ e $t > 0$, define-se a **Função de Mittag-Leffler** de um parâmetro pela seguinte série*

$$E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

A função acima é considerada uma generalização fracionária da função exponencial, uma vez que $E_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t$.

Definição 1.18 *Dados $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, define-se a **Função de Mittag-Leffler de dois parâmetros** pela série*

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

Note que a Função de Mittag-Leffler de um parâmetro é um caso particular da versão de dois parâmetros com $\beta = 1$, uma vez que $E_{\alpha,1}(t) = E_\alpha(t)$.

Teorema 1.19 *Dados $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, é possível relacionar as funções de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros pela igualdade*

$$E_{\alpha,\alpha+1}(-x^\alpha) = \frac{1 - E_\alpha(-x^\alpha)}{x^\alpha}.$$

Demonstração. Utilizando a definição da Função de Mittag-Leffler com dois parâmetros pode-se escrever

$$E_{\alpha,\alpha+1}(-x^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n + \alpha + 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^\alpha)^n}{\Gamma[\alpha(n+1)+1]}.$$

Na última equação, tem-se

$$E_{\alpha,\alpha+1}(-x^\alpha) = \frac{1}{-x^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^\alpha)^{n+1}}{\Gamma[\alpha(n+1)+1]}.$$

Expandindo a série:

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,\alpha+1}(-x^\alpha) &= -\frac{1}{x^\alpha}\left[-\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(x^\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{(x^\alpha)^3}{\Gamma(3\alpha+1)} + \cdots\right] \\
&= -\frac{1}{x^\alpha}\left[-1 + 1 - \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(x^\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{(x^\alpha)^3}{\Gamma(3\alpha+1)} + \cdots\right] \\
&= -\frac{1}{x^\alpha}\left[-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n+1)}\right].
\end{aligned}$$

Utilizando a definição da Função de Mittag-Leffler com um parâmetro:

$$E_{\alpha,\alpha+1}(-x^{\alpha}) = -\frac{1}{x^{\alpha}}[-1 + E_{\alpha}(-x^{\alpha})].$$

Portanto,

$$E_{\alpha,\alpha+1}(-x^{\alpha}) = \frac{1 - E_{\alpha}(-x^{\alpha})}{x^{\alpha}}.$$

■

A partir da definição da Função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, é possível obter as seguintes propriedades.

1. $E_{\alpha,\beta}(t)$, com $\alpha = 1$ e $\beta = 2$:

$$\begin{aligned} E_{1,2}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)!} = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= \frac{1}{t}\left[\left(\sum_{k=-1}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\right) - \frac{t^{1-1}}{(1-1)!}\right] = \frac{1}{t}\left[\left(\sum_{k+1=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\right) - 1\right] \\ &= \frac{e^t - 1}{t}. \end{aligned}$$

2. $E_{\alpha,\beta}(t)$, com $\alpha = 1$ e $\beta = 3$:

$$\begin{aligned} E_{1,3}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+2)!} = \frac{1}{t^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+2}}{(k+2)!} \\ &= \frac{1}{t^2}\left[\left(\sum_{k=-2}^{\infty} \frac{t^{k+2}}{(k+2)!}\right) - \frac{t^{2-1}}{(2-1)!} - \frac{t^{2-2}}{(2-2)!}\right] \\ &= \frac{1}{t^2}\left[\left(\sum_{k+2=0}^{\infty} \frac{t^{k+2}}{(k+2)!}\right) - t - 1\right] \\ &= \frac{e^t - t - 1}{t^2}. \end{aligned}$$

Generalizando os itens 1 e 2, obtém-se a Função de Mittag-Leffler de parâmetros $\alpha = 1$, $\beta = m$, $m \in \mathbb{N}$ e $m \geq 2$,

$$E_{1,m}(t) = \frac{1}{t^{m-1}}\left[e^t - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{t^k}{k!}\right].$$

Casos particulares

1. $E_{\alpha,\beta}$, com $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.

$$E_{2,1}(t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \cosh(t).$$

2. $E_{\alpha,\beta}$, com $\alpha = 2$ e $\beta = 2$.

$$E_{2,2}(t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\operatorname{senh}(t)}{t}.$$

3. $E_{\alpha,\beta}$, com $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.

$$E_{2,1}(-t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} = \cos(t).$$

4. $E_{\alpha,\beta}$, com $\alpha = 2$ e $\beta = 2$.

$$E_{2,2}(-t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}.$$

O teorema abaixo apresenta a Transformada de Laplace da Função de Mittag-Leffler, sendo um importante resultado utilizado no Capítulo 3 para recuperar as soluções dos problemas de valores iniciais.

Teorema 1.20 *Se $s^\alpha > |a|$, então*

$$\mathscr{L}[E_\alpha(\pm a t^\alpha)] = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha \mp a}. \tag{1.4}$$

Demonstração. Da definição de Transformada de Laplace e da Função de Mittag-Leffler, segue que

$$\mathscr{L}[E_\alpha(\pm a t^\alpha)] = \int_0^\infty e^{-st} E_\alpha(\pm a t^\alpha) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm a)^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha k} dt. \tag{1.5}$$

Fazendo a mudança de variável $u = st$, e pela definição de Função Gama,

$$\int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha k} dt = \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha k} \frac{du}{s} = \frac{1}{s^{\alpha k+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha k} du = \frac{1}{s^{\alpha k+1}} \Gamma(\alpha k+1).$$

Substituindo em (1.5), obtém-se

$$\mathscr{L}[E_\alpha(\pm a t^\alpha)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm a)^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \frac{1}{s^{\alpha k+1}} \Gamma(\alpha k+1) = \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\pm a}{s^\alpha}\right]^k = \frac{1}{s} \frac{1}{1 \mp \frac{a}{s^\alpha}} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha \mp a}.$$

■

Capítulo 2

Cálculo Fracionário

O cálculo de ordem não inteira, frequentemente mencionado por cálculo fracionário, é um campo que se dedica ao estudo de extensões dos conceitos de integração e diferenciação para ordens não inteiras. Neste trabalho, foi considerado o caso real, isto é, a ordem das derivadas e integrais fracionárias pode ser um número real. Na literatura, esses conceitos podem ser estendidos para ordem complexa.

Este capítulo possui duas seções. Na primeira delas, a Seção 2.1, define-se a Integral Fracionária, enquanto a Seção 2.2 é dedicada ao estudo das derivadas fracionárias segundo Riemann-Liouville e segundo Caputo. No final desta última seção, há uma breve discussão das principais diferenças entre essas duas derivadas e a motivação da adoção da derivada segundo Caputo para o capítulo seguinte.

As referências utilizadas para este capítulo foram [Camargo, Oliveira e Chiacchio 2009], [Podlubny 1998], [Rossato e Ferreira 2020] e [Varalta 2014].

2.1 Integral Fracionária

Com o intuito de definir a integral de ordem não inteira no sentido de Riemann-Liouville, será introduzido o operador integral de ordem inteira $n \in \mathbb{N}$ de uma função

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrável. Tal operador integral, de ordem inteira 1 e n, é definido como

$$If(t) = \int_0^t f(t_1)dt_1 \quad \text{e} \quad I^n f(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-2}} \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n dt_{n-1} \cdots dt_2 dt_1.$$

O teorema abaixo fornece uma fórmula geral para o operador integral de ordem inteira n, fundamental para a definição da integral fracionária.

Teorema 2.1 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrável. A integral de ordem $n \in \mathbb{N}$ da função f é dada por*

$$I^n f(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s)ds = \phi_n(t) * f(t).$$

Demonstração. A prova será feita por indução sobre n. Para $n = 1$,

$$I^1 f(t) = \int_0^t f(s)ds = \int_0^t \underbrace{\frac{(t-s)^{(1-1)}}{(1-1)!}}_{1} f(s)ds = \phi_1(t) * f(t),$$

na qual a última igualdade é consequência das Definições 1.8 e 1.16.

Considerando a igualdade válida para n será mostrado a validade para $n+1$. De fato, por definição do operador integral e invertendo a ordem de integração, tem-se

$$\begin{aligned} I^{n+1} f(t) &= I[I^n f(t)] = \int_0^t \int_0^u \frac{(u-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s)dsdu = \int_0^t \int_s^t \frac{(u-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s)duds \\ &= \int_0^t \frac{f(s)}{(n-1)!} \int_s^t (u-s)^{n-1} duds = \int_0^t \frac{f(s)}{(n-1)!} \left[\frac{(u-s)^n}{n} \right]_{u=s}^{u=t} ds \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!} f(s)ds = \phi_{n+1}(t) * f(t). \end{aligned}$$

■

A generalização do operador integral de ordem inteira para o de ordem não inteira é possível utilizando a generalização fracionária do conceito de fatorial através da Função Gama, discutida na Seção 1.2.

Definição 2.2 *Seja f uma função integrável. A **integral fracionária de Riemann-Liouville** de ordem $\alpha > 0$ de f, denotada por $I^\alpha f(t)$, é definida como*

$$I^\alpha f(t) = \phi_\alpha(t) * f(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s)ds.$$

Define-se também que $I^0 f(t) = f(t)$.

A partir da definição da Integral Fracionária pode-se calcular a integral de ordem não inteira de diversas funções afim de se obter fórmulas para regras de derivação, assim como no cálculo de ordem inteira. Seguem abaixo alguns exemplos.

Exemplo 2.3 (Integral fracionária de constante) *Considerando $f(t) = 1 = t^0$, para todo $\alpha > 0$, segue*

$$I^\alpha t^0 = \phi_\alpha(t) * t^0 = \int_0^t (t-s)^0 \left[\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right] ds = \left[\frac{s^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}\right]_{s=0}^{s=t} = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Exemplo 2.4 (Integral fracionária de um monômio) *Sejam $\alpha > 0$ e $f(x) = x^\mu$ com $\mu > -1$. Então*

$$I^\alpha x^\mu = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^\mu dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left[x\left(1-\frac{t}{x}\right)\right]^{\alpha-1} t^\mu dt.$$

Utilizando a mudança de variável $u = \frac{t}{x}$ e $du = \frac{dt}{x}$,

$$I^\alpha x^\mu = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 x^\alpha (1-u)^{\alpha-1} (xu)^\mu du = \frac{x^{\alpha+\mu}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 u^\mu (1-u)^{\alpha-1} du.$$

Pela definição da Função Beta,

$$I^\alpha x^\mu = \frac{x^{\alpha+\mu}}{\Gamma(\alpha)} B(\mu+1, \alpha).$$

Utilizando a relação entre as Funções Gama e Beta (Teorema 1.15),

$$I^\alpha x^\mu = \frac{x^{\alpha+\mu}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\mu+1+\alpha)} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)} x^{\alpha+\mu}.$$

Portanto,

$$I^\alpha x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)} x^{\alpha+\mu}.$$

A partir da definição da integral fracionária também é possível calcular sua Transformada de Laplace, utilizada no cálculo da Transformada de Laplace da Derivada Fracionária segundo Riemann-Liouville.

Teorema 2.5 *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\alpha \in \mathbb{R}_+$. A Transformada de Laplace da integral fracionária, caso exista, é dada pela expressão*

$$\mathscr{L}[I^\alpha f(t)] = s^{-\alpha}\mathscr{L}[f(t)], \quad s > 0.$$

Demonstração. Utilizando a Definição 2.2, tem-se que

$$\mathscr{L}[I^\alpha f(t)] = \mathscr{L}[\phi_\alpha(t) * f(t)].$$

Como a Transformada de Laplace do produto de convolução entre duas funções é o produto das Transformadas de Laplaces dessas funções (Teorema 1.9), é possível concluir que

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[I^\alpha f(t)] &= \mathscr{L}[\phi_\alpha(t)]\mathscr{L}[f(t)] \\ &= s^{-\alpha}\mathscr{L}[f(t)], \end{aligned}$$

onde a última igualdade é válida pela Equação (1.3). ∎

No cálculo de ordem inteira, existe a Lei dos Expoentes para o operador integral, a saber, para $m, n \in \mathbb{Z}$, tem-se $I^m I^n = I^{m+n}$. Essa propriedade também é válida para o operador integral fracionário definido na seção anterior, e está demonstrada no teorema abaixo.

Teorema 2.6 *Seja I o operador integral fracionário e α, $\beta \geq 0$. Então,*

$$I^\alpha I^\beta = I^{\alpha+\beta}.$$

Demonstração. Caso $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, a prova segue de modo trivial, uma vez que $I^0 f(t) = f(t)$. Para o caso em que α e β são ambos positivos, inicialmente será provada a seguinte igualdade

$$\phi_\alpha(t) * \phi_\beta(t) = \phi_{\alpha+\beta}(t). \tag{2.1}$$

De fato, pelas Definições 1.8 e 1.16,

$$\phi_\alpha(t) * \phi_\beta(t) = \int_0^t \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} ds = \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t s^{\alpha-1} \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{\beta-1} ds.$$

Realizando a mudança de váriável

$$u = \frac{s}{t} \;\Rightarrow\; du = \frac{ds}{t} \;\Rightarrow\; ds = tdu,$$

e utilizando a relação entre as funções Gama e Beta (Teorema 1.15),

$$\begin{aligned}
\phi_\alpha(t) * \phi_\beta(t) &= \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)} \int_0^1 (ut)^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} tdu \\
&= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)} \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} du \\
&= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)} B(\alpha,\beta) = \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \phi_{\alpha+\beta}(t).
\end{aligned}$$

Pela Definição 2.2 e pela Equação (2.1), segue que

$$I^\alpha I^\beta f(t) = \phi_\alpha(t) * I^\beta f(t) = \phi_\alpha(t) * \phi_\beta(t) * f(t) = \phi_{\alpha+\beta}(t) * f(t) = I^{\alpha+\beta} f(t),$$

provando o teorema. ■

Observe que, como consequência do teorema acima, o operador integral fracionário é comutativo uma vez que $I^\alpha I^\beta = I^{\alpha+\beta} = I^{\beta+\alpha} = I^\beta I^\alpha$.

2.2 Derivadas Fracionárias

No que segue, serão apresentadas as derivadas fracionárias segundo Riemann-Liouville e segundo Caputo. Na literatura existem diversos outros tipos de derivadas fracionárias com suas respectivas particularidades. Para mais detalhes, ver [Camargo, Oliveira e Chiacchio 2009] e [Podlubny 1998].

2.2.1 Derivada Fracionária segundo Riemann-Liouville

Com o intuito de definir a derivada segundo Riemann-Liouville, é necessário introduzir o operador derivada $D = \frac{d}{dx}$, sendo esse inverso à esquerda da integral fracionária, ou seja, $DIf(t) = f(t)$.

Definição 2.7 *Sejam $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ e n o menor inteiro maior que β, ou seja, $n-1 \leq \beta < n$. A* ***derivada de Riemann-Liouville*** *de ordem β de $f(x)$, com $x > 0$, denotada por $D^{\beta}_{RL}f(x)$, é definida como*

$$D^{\beta}_{RL}f(x) = D^n[I^{n-\beta}f(x)].$$

Observe que, se $\beta = n$, então

$$D^{\beta}_{RL}[f(x)] = D^{n+1}[I^{n+1-\beta}f(x)] = D^{n+1}[I^{n+1-n}f(x)] = D^{n+1}[If(x)] = D^n f(x).$$

Isto é, a derivada usual é um caso particular da derivada fracionária segundo Riemann-Liouville.

Exemplo 2.8 (Derivada segundo Riemann-Liouville de um monômio) *Sejam $\beta > 0$, $f(x) = x^{\mu}$ com $\mu - \beta \notin \mathbb{Z}_-$ e $x > 0$. Por definição e pelo Exemplo 2.4, tem-se*

$$D^{\beta}_{RL}x^{\mu} = D^n[I^{n-\beta}x^{\mu}] = D^n\left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+n-\beta+1)}x^{\mu+n-\beta}\right].$$

Aplicando a derivada sucessivamente e utilizando a propriedade da Função Gama (1.2), obtém-se

$$\begin{aligned} D^n\left[\frac{\Gamma(\mu+1)\ x^{n-\beta+\mu}}{\Gamma(\mu+n-\beta+1)}\right] &= D^{n-1}\left[\frac{\Gamma(\mu+1)(\mu+n-\beta)}{(\mu+n-\beta)\Gamma(\mu+n-\beta)}x^{\mu+n-\beta-1}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)\cancel{(\mu+n-\beta)}\cancel{(\mu+n-\beta-1)}\ldots\cancel{(\mu-\beta+1)}}{\cancel{(\mu+n-\beta)}\cancel{(\mu+n-\beta-1)}\ldots\cancel{(\mu-\beta+1)}\Gamma(\mu-\beta+1)}x^{\mu-\beta}, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$D^{\beta}_{RL}x^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\beta+1)}x^{\mu-\beta}.$$

De modo diferente ao caso da integral fracionária, em geral a Lei dos Expoentes nem sempre é válida para a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville. Segue abaixo um exemplo ilustrando esse fato. Para mais detalhes sobre a comutatividade e Lei dos Expoentes para derivadas fracionárias, ver [Podlubny 1998] e [Rossato e Ferreira 2020].

Exemplo 2.9 *Considerando $f(t) = t^{\frac{1}{2}}$, será mostrado que $D_{RL}^{\frac{1}{2}} D_{RL}^{\frac{3}{2}} f(t) \neq D_{RL}^{2} f(t)$. De fato, por um lado*

$$D_{RL}^{\frac{3}{2}} t^{\frac{1}{2}} = D^2[I^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}] = D^2 \int_0^t \frac{(t-s)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} s^{\frac{1}{2}} ds = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} D^2 \int_0^t \frac{s^{\frac{1}{2}}}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds.$$

Utilizando a substituição de variável $s = tu$ e $ds = tdu$,

$$D_{RL}^{\frac{3}{2}} t^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} D^2 \int_0^1 \frac{(tu)^{\frac{1}{2}}}{(t-tu)^{\frac{1}{2}}} tdu = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{2}}}{(1-u)^{\frac{1}{2}}} du \cdot D^2(t) = 0.$$

Portanto,

$$D_{RL}^{\frac{1}{2}} \left(D_{RL}^{\frac{3}{2}} t^{\frac{1}{2}} \right) = D_{RL}^{\frac{1}{2}}(0) = 0.$$

Por outro lado, calculando agora a soma dos expoentes, segue

$$D_{RL}^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} t^{\frac{1}{2}} = D_{RL}^{2} t^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} t^{-\frac{3}{2}}.$$

Com isso, tem-se que

$$0 = D_{RL}^{\frac{1}{2}} D_{RL}^{\frac{3}{2}} t^{\frac{1}{2}} \neq D_{RL}^{2} t^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} t^{-\frac{3}{2}}.$$

O teorema abaixo apresenta a fórmula da Transformada de Laplace da derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de uma função. Embora tal resultado não será utilizado nas aplicações do Capítulo 3, ele contribuirá com a discussão comparativa entre as derivadas fraiconárias segundo Riemann-Liouville e segundo Caputo feita na Seção 2.3.

Teorema 2.10 *Sejam $\alpha > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, tais que $n-1 < \alpha < n$, e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^n. Então*

$$\mathscr{L}[D^{\alpha}_{RL} f(t)] = s^{\alpha} \mathscr{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} D^k I^{n-\alpha} f(0). \tag{2.2}$$

Demonstração. Utilizando a definição da derivada segundo Riemann-Liouville

$$\mathscr{L}[D^{\alpha}_{RL} f(t)] = \mathscr{L}[D^n I^{n-\alpha} f(t)] = \mathscr{L}[D^n g(t)],$$

denotando $I^{n-\alpha} f(t) = g(t)$. Pelo Corolário 1.7, segue

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[D^n g(t)] &= s^n \mathscr{L}[g(t)] - s^{n-1} g(0) - \cdots - s g^{(n-2)}(0) - g^{(n-1)}(0) \\ &= s^n \mathscr{L}[g(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} D^k g(0). \end{aligned}$$

Como $g(t) = I^{n-\alpha} f(t)$, é possível utilizar o Teorema 2.5, obtendo

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[D^n g(t)] &= s^n [s^{\alpha-n} \mathscr{L}[f(t)]] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} D^k g(0) \\ &= s^{\alpha} \mathscr{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} D^k g(0) \\ &= s^{\alpha} \mathscr{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} D^k I^{n-\alpha} f(t). \end{aligned}$$

■

Observe que a Transformada de Laplace obtida acima é muito difícil de ser aplicada na resolução de problemas físicos, uma vez que requer o conhecimento de condições iniciais em termos das suas derivadas de ordem $k = 1, 2, \ldots, n-1$ de integrais fracionárias da função f. Esse fenômeno não acontece para o conceito de derivada fracionária segundo Caputo, apresentado a seguir, em que sua respectiva Transformada de Laplace incorpora os valores iniciais da função e de suas derivadas de ordem inteira que tem interpretações físicas.

2.2.2 Derivada Fracionária segundo Caputo

Segundo Caputo, a derivada fracionária continua sendo uma integral fracionária de uma derivada de ordem inteira, assim como na definição de Riemann-Liouville, entretanto as definições se diferem na ordem dos operadores lineares.

Definição 2.11 *Sejam $\beta > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, tal que, $n-1 < \beta \leq n$. A* ***derivada segundo Caputo*** *de ordem β de $f(x)$, com $x > 0$, denotada por $D_C^{\beta} f(x)$, é definida como*

$$D_C^{\beta} f(x) = I^{n-\beta}[D^n f(x)] = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_0^x \frac{f^{(n)}(s)}{(x-s)^{\beta+1-n}} ds.$$

Observe que se $\beta = n$, então $D_C^{\beta}[f(x)] = I^{n-\beta}[D^n f(x)] = I^0[D^n f(x)] = D^n f(x)$. Isso é, a derivada usual é um caso particular da derivada fracionária segundo Caputo.

Exemplo 2.12 (Derivada segundo Caputo de um monômio) *Sejam $\beta > 0$, $f(x) = x^{\mu}$ com $\mu - \beta > -1$ e $x > 0$. Por definição e derivando n vezes, tem-se*

$$D_C^{\beta} x^{\mu} = I^{n-\beta}[D^n x^{\mu}] = I^{n-\beta}\left[\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-n+1)x^{\mu-n}\right].$$

Pela propriedade da Função Gama (Equação (1.2) e Exemplo 2.4), segue que

$$\begin{aligned} D_C^{\beta} x^{\mu} &= I^{n-\beta}\left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\cancel{\Gamma(\mu)}} \frac{\cancel{\Gamma(\mu)}}{\cancel{\Gamma(\mu-1)}} \cdots \frac{\cancel{\Gamma(\mu-n+2)}}{\Gamma(\mu-n+1)} x^{\mu-n}\right] = I^{n-\beta}\left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-n+1)} x^{\mu-n}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\cancel{\Gamma(\mu-n+1)}} \frac{\cancel{\Gamma(\mu-n+1)}}{\Gamma(\mu-n+n-\beta+1)} x^{\mu-n+n-\beta} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\beta+1)} x^{\mu-\beta}. \end{aligned}$$

Observe que o resultado do exemplo acima coincide com o Exemplo 2.8, ou seja, para o monômio x^{μ}, com as hipóteses colocadas satisfeitas, as derivadas segundo Riemann-Liouville e segundo Caputo coincidem.

Assim, como a Lei dos Expoentes não é válida para a derivada segundo Riemann-Liouville (ver Exemplo 2.9), a derivada segundo Caputo também não satisfaz tal propriedade. Segue abaixo um exemplo para ilustrar esse fato.

Exemplo 2.13 *Note que para $f(t) = t$, tem-se $D_C^{\frac{7}{10}} D_C^{\frac{7}{10}} f(t) \neq D_C^{\frac{7}{5}} f(t)$. De fato, calculando inicialmente $D_C^{\frac{7}{10}} t$, segue pelo Exemplo 2.12,*

$$D_C^{\frac{7}{10}} t = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma\left(1 - \frac{7}{10} + 1\right)} x^{1-\frac{7}{10}} = \frac{\Gamma(2) x^{\frac{3}{10}}}{\Gamma\left(\frac{13}{10}\right)} = \frac{x^{\frac{3}{10}}}{\Gamma\left(\frac{13}{10}\right)}.$$

Utilizando o Exemplo 2.12 novamente,

$$D_C^{\frac{7}{10}} [D_C^{\frac{7}{10}} t] = D_C^{\frac{7}{10}} \left[\frac{t^{\frac{3}{10}}}{\Gamma\left(\frac{13}{10}\right)} \right] = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{13}{10}\right)} D_C^{\frac{7}{10}} t^{\frac{3}{10}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{13}{10}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{13}{10}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{5}\right)} t^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{5}\right)} t^{-\frac{2}{5}}.$$

Calculando agora a soma dos expoentes,

$$D_C^{\frac{7}{10}+\frac{7}{10}} t = D_C^{\frac{7}{5}} t = I^{\frac{3}{5}} D^2 t = I^{\frac{3}{5}}(0) = 0.$$

Portanto,

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{5}\right)} t^{-\frac{2}{5}} = D_C^{\frac{7}{10}} D_C^{\frac{7}{10}} t \neq D_C^{\frac{7}{5}} t = 0.$$

No teorema abaixo é apresentado a fórmula da Transformada de Laplace da derivada de Caputo que será utilizada no Capítulo 3.

Teorema 2.14 *Sejam $\beta > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, tal que, $n - 1 < \beta \leq n$. Então*

$$\mathscr{L}[D_C^{\beta} f(t)] = s^{\beta - n} \mathscr{L}[D^n f(t)].$$

Demonstração. Pelas Definições 2.11 e 2.2, tem-se

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[D_C^{\beta} f(t)] &= \mathscr{L}[I^{n-\beta} D^n f(t)] \\ &= \mathscr{L}[\phi_{n-\beta}(t) * D^n f(t)]. \end{aligned}$$

Utilizando agora a Proposição 1.9 e a Equação (1.3),

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[D_C^{\beta} f(t)] &= \mathscr{L}[\phi_{n-\beta}(t)] \cdot \mathscr{L}[D^n f(t)] \\ &= s^{\beta - n} \mathscr{L}[D^n f(t)]. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Para calcular a Transformada de Laplace da derivada fracionária segundo Caputo, é utilizada a Equação 2.14. É importante ressaltar que essa equação oferece um cálculo mais direto e simplificado em comparação com a Equação 2.10, utilizada para calcular a Transformada de Laplace da derivada segundo Riemann-Liouville.

2.3 Riemann-Liouville x Caputo

As derivadas segundo Riemann-Liouville e segundo Caputo, em suas definições, diferem apenas pela ordem dos operadores derivada e integral. Desta forma, para o êxito da utilização do cálculo fracionário em problemas ou modelos matemáticos, é preciso fazer a melhor escolha do sentido da derivada a ser utilizada de acordo com a conveniência de cada questão. Seguem abaixo alguns comentários sobre duas importantes diferenças entre os dois sentidos de derivadas fracionárias, bem como a escolha pela adoção da derivada segundo Caputo nas aplicações do próximo capítulo.

Como visto nos Exemplos 2.8 e 2.12, as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e Caputo para polinômios não constantes são coincidentes, desde que satisfeitas as hipóteses apresentadas. No entanto, ao calcular essas derivadas para uma função constante, nota-se que a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de uma constante não é zero, enquanto que segundo Caputo sim. Esse fenômeno leva alguns autores a preferirem o uso da abordagem segundo Caputo, pelo entendimento de que existe aí a preservação do conceito de equilíbrio. Os cálculos das derivadas fracionárias de uma constante são exibidos nos exemplos abaixo.

Exemplo 2.15 (Derivada de constante segundo Riemann-Liouville) *Sejam $\beta > 0$ não inteiro, $k \in \mathbb{R}$ constante e $n \in \mathbb{N}$ tal que $n-1 < \beta < n$. Logo, pelas Definições 2.7 e 2.2, segue*

$$D_{RL}^{\beta} k = D^n [I^{n-\beta} k] = D^n \left[\frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_0^x (x-t)^{n-\beta-1} k \; dt \right] = D^n \left[\frac{k}{\Gamma(n-\beta)} \frac{x^{n-\beta}}{n-\beta} \right].$$

Calculando essa derivada n vezes e utilizando o Equação (1.2), tem-se

$$D_{RL}^{\beta} k = D^{n-1} \left[\frac{k}{\Gamma(n-\beta)} x^{n-\beta-1} \right] = D^{n-2} \left[\frac{k}{\Gamma(n-\beta-1)} x^{n-\beta-2} \right] = \cdots = \frac{x^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} k.$$

Exemplo 2.16 (Derivada de constante segundo Caputo) *Sejam $\beta > 0$ não inteiro, $k \in \mathbb{R}$ constante e $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 < \beta < n$. Logo, pelas Definições 2.11 e 2.2, segue*

$$D_C^{\beta} k = I^{n-\beta}[D^n k] = I^{n-\beta}(0) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_0^x (x-t)^{n-\beta-1} 0 \, dt = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_0^x 0 \, dt = 0.$$

Outra evidente diferença entre as derivadas fracionárias está nas suas respectivas Transformadas de Laplace. De fato, pelo Teorema 2.10, percebe-se que a Transformada de Laplace da derivada segundo Riemann Liouville requer o conhecimento de condições iniciais em termos das suas derivadas de ordem inteiras da integral fracionária $I^{n-\alpha}$. Por outro lado, pelo Teorema 2.14, é visto que a Transformada de Laplace da derivada segundo Caputo depende da Transformada de Laplace da derivada de ordem inteira. Esse comparativo ilustra claramente como a Transformada de Laplace segundo Riemann-Liouville é mais complexa de ser utilizada na resolução de problemas, em virtude de todas as hipóteses necessárias para conseguir aplicá-la. Por essa razão, os modelos do capítulo a seguir serão estudados segundo Caputo.

Capítulo 3

Modelos Matemáticos Fracionários

No cálculo fracionário, modelos matemáticos buscam representar de forma abstrata fenômenos e processos utilizando equações diferenciais que possuem derivadas de ordens não inteiras. A utilização de modelos fracionários auxilia na compreensão de fenômenos naturais como em mecânica dos fluídos, nas engenharias, biomatemática, probabilidade, sendo utilizado inclusive na área da saúde [Camargo, Oliveira e Chiacchio 2009]. Tais modelos possuem grande importância na pesquisa matemática visto que contribuem para o desenvolvimento de novos métodos e teorias na área.

Neste capítulo, são apresentados alguns modelos envolvendo equações diferenciais clássicas, mas com sua abordagem fracionária. O objetivo deste estudo é analisar o comportamente das soluções do modelo fracionário em comparação com o modelo clássico. Mais especificamente, na Seção 3.1, é discutido o Oscilador Harmônico Fracionário; na Seção 3.2, a Equação Logística de Verhulst na versão fracionária; na Seção 3.3, a Lei do Resfriamento de Newton Fracionário e; na Seção 3.4, o modelo de Crescimento Populacional de Malthus na versão fracionária.

Para o desenvolvimento dos modelos listados acima, será utilizada a Derivada Fracionária segundo Caputo, com notação simplificada D^{α} ao invés de D^{α}_{C}.

As referências deste capítulo são [Boyce e Diprima 1930], [Kuroda et al. 2017] e [Varalta 2014].

3.1 Oscilador Harmônico

Utilizando a 2º Lei do movimento de Newton aplicada a sistemas que se repetem no tempo, tem-se que a seguinte equação

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \mu\frac{d}{dt}x(t) + kx(t) = g(t)$$

descreve o deslocamento/alongamento de um corpo de massa m, desde a posição de equilíbrio até o instante t, com força elástica $-kx(t)$ (de acordo com a Lei de Hooke), força de amortecimento $-\mu\frac{d}{dt}x(t)$ e uma força externa $g(t)$, onde μ e k são constantes positivas, sendo k a constante elástica da mola.

Para o caso particular em que não há atrito ou forças que atuam no sistema massa-mola (oscilador harmônico simples) tem-se a seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \tag{3.1}$$

com condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = 0$, onde ω_0^2 é a razão entre a constante da mola e a massa.

Substituindo em 3.1 a derivada de ordem 2 pela derivada fracionária segundo Caputo de ordem $1 < \alpha \leq 2$, obtém-se o oscilador harmônico fracionário de equação

$$D^\alpha x(t) + \omega^\alpha x(t) = 0, \tag{3.2}$$

onde $\omega_0^2 = \omega^\alpha$, com condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = 0$. Aplicando a Transformada de Laplace e usando sua linearidade, segue que

$$\mathscr{L}[D^\alpha x(t)] + \omega^\alpha \mathscr{L}[x(t)] = 0.$$

Pelos Teorema 2.14 (com $n = 2$) e Corolário 1.7, tem-se

$$s^{\alpha-2}\mathscr{L}[D^2 x(t)] + \omega^\alpha \mathscr{L}[x(t)] = 0$$

$$\Rightarrow\ s^{\alpha-2}[s^2\mathscr{L}[x(t)] - sx(0) - x'(0)] + \omega^\alpha \mathscr{L}[x(t)] = 0$$

$$\Rightarrow s^\alpha \mathscr{L}[x(t)] - s^{\alpha-1}x(0) - s^{\alpha-2}x'(0) + \omega^2 \mathscr{L}[x(t)] = 0.$$

Denotando $X(s) = \mathscr{L}[x(t)]$, conclui-se

$$X(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \omega^2} x(0) + \frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha + \omega^2} x'(0).$$

Portanto, substituindo as condições iniciais,

$$X(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \omega^\alpha} x_0.$$

Assim, comparando o resultado obtido com a transformada de Laplace das Funções de Mittag-Lefler, indicado na Equação (1.4), pode-se concluir que a solução da equação diferencial fracionária (3.2), com condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = 0$, é

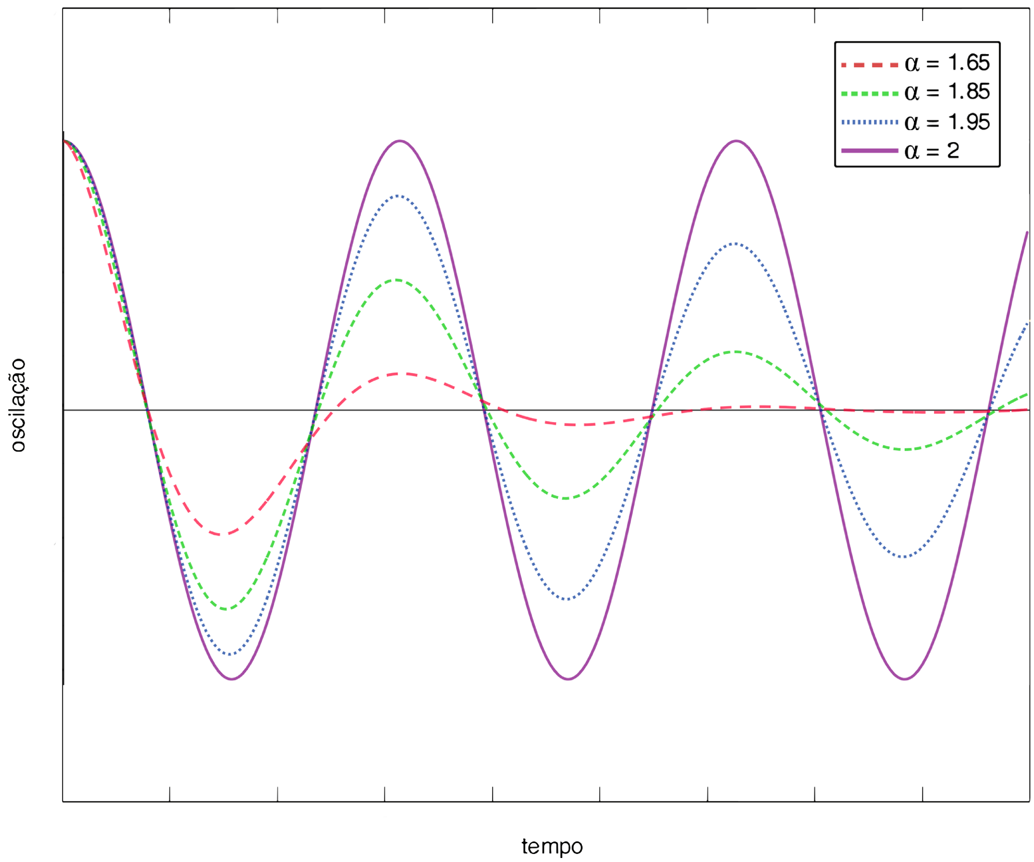
$$x(t) = x_0 E_\alpha(-\omega^\alpha t^\alpha).$$

Na Figura 3.1, estão representados alguns gráficos de $x(t)$ para diferentes valores da ordem α, onde é possível verificar que quando α tende a 2, a solução do oscilador harmônico fracionário tende para a solução do oscilador harmônico simples. De fato, basta ver que

$$\lim_{\alpha \to 2} x(t) = x_0 E_2(-\omega^2 t^2) = x_0 \cos(\omega t).$$

Um fenômeno que também pode ser observado pela Figura 3.1 é que ao diminuir a ordem da derivada do problema, obtém-se na solução uma função com comportamento semelhante a solução de um oscilador harmônico amortecido (com atrito).

Figura 3.1: Gráficos da solução do oscilador harmônico fracionário para diferentes valores da ordem α.



Fonte: Elaboração própria.

3.2 Equação Logística de Verhulst

Em 1838, Pierre François Verhulst desenvolveu um modelo matemático de crescimento populacional que possui aplicação em ambientes caracterizados por restrições de recursos, utilizando de uma variável para representar a capacidade de suporte do local. Ao contrário do modelo malthusiano (estudado na Seção 3.4), o modelo de Verhulst prevê um crescimento populacional limitado, uma vez que, quando a população atinge a capacidade de suporte do ambiente, seu comportamento estabiliza (ver [Kot 2001], p. 7).

O modelo logístico possui a seguinte equação diferencial ordinária

$$\frac{d}{dt}v(t) = k\left(\frac{1}{r} - v(t)\right), \tag{3.3}$$

onde k é a taxa de crescimento, r é a capacidade de suporte, e $N(t) = v^{-1}(t)$ representa o número de indivíduos.

Substituindo em (3.3) a derivada de ordem 1 pela derivada fracionária segundo Caputo de ordem $0 < \alpha \leq 1$, obtém-se a equação do modelo logístico fracionário

$$D^{\alpha}v(t) = k\left(\frac{1}{r} - v(t)\right), \tag{3.4}$$

com $\alpha \in (0, 1]$. Aplicando a Transformada de Laplace, usando a sua linearidade, e os Teoremas 2.14 e 1.5,

$$\mathscr{L}[D^{\alpha}v(t)] = \frac{k}{r}\mathscr{L}[1] - k\mathscr{L}[v(t)]$$

$$\Rightarrow s^{\alpha-1}[sF(s) - v(0)] = k\left[\frac{1}{rs} - F(s)\right],$$

denotando $\mathscr{L}[v(t)] = F(s)$. Logo,

$$F(s) = \frac{1}{r}\left[\frac{ks^{-1}}{s^{\alpha} + k}\right] + v(0)\left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + k}\right].$$

Uma vez que $k\frac{s^{-1}}{s^{\alpha}+k} = \frac{1}{s} - \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+k}$, tem-se

$$F(s) = \frac{1}{rs} + \left(v(0) - \frac{1}{r}\right)\left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + k}\right].$$

Daí, segue da Equação (1.4) que a solução da equação diferencial fracionária (3.4) é

$$v(t) = \frac{1}{r} + \left[v(0) - \frac{1}{r}\right]E_{\alpha}(-kt^{\alpha}).$$

Portanto, o número de indivíduos em função do tempo é

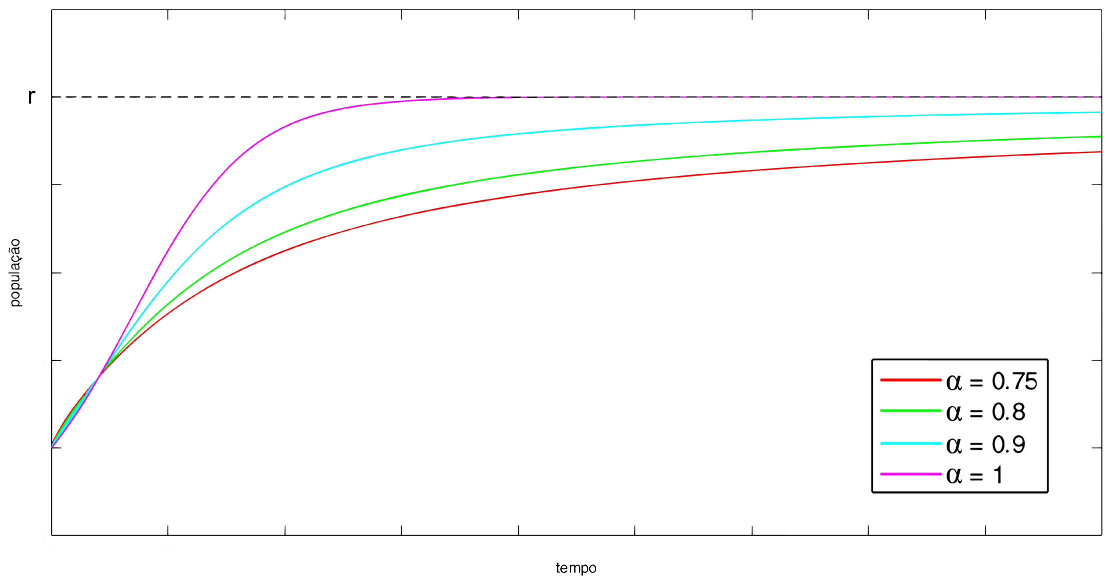
$$N(t) = \frac{1}{\frac{1}{r} + \left[v(0) - \frac{1}{r}\right]E_{\alpha}(-kt^{\alpha})}.$$

Na Figura 3.2, estão representados alguns gráficos de $N(t)$ para diferentes valores da ordem α, onde é possível verificar que quando a ordem α tende a 1, o caso inteiro é um caso particular do caso fracionário. De fato, basta ver que

$$\lim_{\alpha \to 1} N(t) = \frac{1}{\frac{1}{r} + \left[v(0) - \frac{1}{r}\right] e^{-kt}},$$

uma vez que a Função de Mittag-Leffler é uma generalização da função exponencial.

Figura 3.2: Gráficos da solução do modelo fracionário para difentes valores da ordem α



Fonte: Elaboração própria.

Outro fenômeno é que o problema fracionário apresenta o mesmo valor suporte do problema usual de ordem inteira. É possível provar que, se $0 < \alpha \leq 1$, então $\lim_{t \to \infty} E_\alpha(-kt^\alpha) = 0$ (ver [Podlubny 1998], p. 35), e portanto

$$\lim_{t \to \infty} N(t) = r,$$

ou seja, para qualquer valor de $0 < \alpha \leq 1$, todas as soluções convergem para o valor suporte r.

3.3 Lei do Resfriamento de Newton

No século XVII, o cientista britânico Isaac Newton desenvolveu um modelo para explicar a variação de temperatura, que hoje é reconhecido como a Lei do Resfriamento de Newton. De acordo com Newton, a variação da temperatura de um corpo no decorrer do tempo é proporcional a diferença de temperatura entre o corpo e o meio no qual ele se encontra. Matematicamente, é possível escrever a Lei do resfriamento de Newton pela seguinte equação diferencial ordinária

$$C'(t) = k(C(t) - a), \tag{3.5}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é a constante de proporcionalidade, $C(t)$ é a temperatura do objeto no instante $t > 0$ e $a \in \mathbb{R}$ é a temperatura do meio.

Substituindo em (3.5) a derivada de ordem 1 pela derivada fracionária segundo Caputo de ordem $0 < \alpha \leq 1$, obtém-se a equação do modelo de resfriamento de Newton fracionário,

$$D^\alpha C(t) = k(C(t) - a), \tag{3.6}$$

onde adota-se a condição inicial $C(0) = C_0$. Aplicando a Transformada de Laplace e usando a sua linearidade, segue que

$$\mathscr{L}[D^\alpha C(t)] - k\mathscr{L}[C(t)] + ak\mathscr{L}[1] = 0.$$

Pelos Teorema 2.14 (com $n = 1$) e Corolário 1.7,

$$\begin{aligned} & s^{\alpha-1}\mathscr{L}[DC(t)] - k\mathscr{L}[C(t)] + ak\mathscr{L}[1] = 0 \\ \Rightarrow\ & s^{\alpha-1}[s\mathscr{L}[C(t)] - C(0)] - k\mathscr{L}[C(t)] + \frac{ak}{s} = 0 \\ \Rightarrow\ & s^\alpha\mathscr{L}[C(t)] - s^{\alpha-1}C(0) - k\mathscr{L}[C(t)] + \frac{ak}{s} = 0. \end{aligned}$$

Denotando $F(s) = \mathscr{L}[C(t)]$, e substituindo as condições iniciais, obtém-se $F(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - k}C_0 - a\frac{k}{s(s^\alpha - k)}$. Observe que

$$F(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - k}C_0 + a\left(\frac{1}{s} - \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - k}\right) = (C_0 - a)\,\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - k} + \frac{a}{s}.$$

Portanto, segue pela Equação (1.4) que a solução da equação diferencial fracionária (3.6), com condição inicial $C(0) = C_0$, é

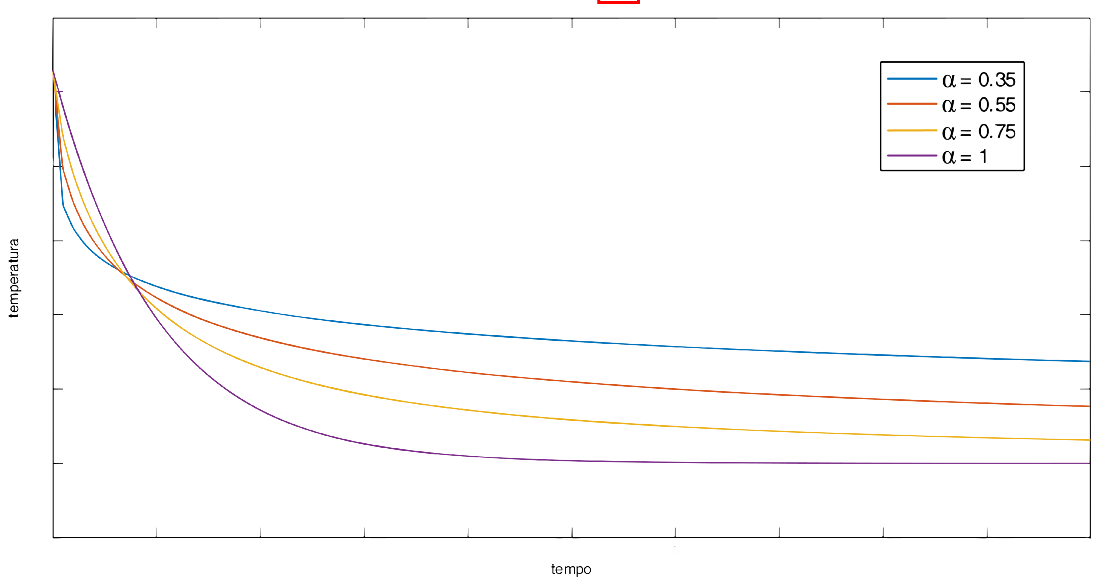
$$C(t) = (C_0 - a)E_\alpha(kt^\alpha) + a.$$

Na Figura 3.3, estão representados alguns gráficos de $C(t)$ para diferentes valores da ordem α, em que é possível verificar que quando a ordem α tende a 1, o caso inteiro é um caso particular do caso fracionário, assim como no oscilador harmônico. De fato, basta ver que

$$\lim_{\alpha\to 1} C(t) = (C_0 - a)E_1(kt) = (C_0 - a)e^{kt} + a.$$

Outro fenômeno que pode ser observado, semelhante aos modelos anteriores estudados, é que a redução da ordem da derivada do problema implicou numa diminuição da taxa de variação da solução.

Figura 3.3: Gráficos da solução da Equação (3.6) para diferentes valores da ordem α.



Fonte: Elaboração própria.

3.4 Crescimento populacional de Malthus

O modelo de crescimento populacional Malthusiano, proposto por Malthus em 1798, é aplicado em problemas envolvendo uma dinâmica populacional e amplamente estudado na literatura. Pode ser utilizado, por exemplo, em populações de microrganismos, como bactérias e fungos [Bassanezi 2014].

De um modo geral, é considerada uma população cujo número de indivíduos no instante t varia em uma taxa de variação proprocional a esse número. Isso é, sendo $P(t)$ a população no instante t e $k \in \mathbb{R}$ a constante de proporcionalidade, é possível escrever a seguinte equação diferencial ordinária

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t). \tag{3.7}$$

Substituindo em (3.7) a derivada de ordem 1 pela derivada fracionária segundo Caputo de ordem $0 < \alpha \leq 1$, obtém-se a equação do modelo de crescimento populacional fracionário

$$D^\alpha P(t) = kP(t), \tag{3.8}$$

onde adota-se a condição inicial $P(0) = P_0$. Aplicando a Transformada de Laplace e usando sua linearidade, segue que

$$\mathscr{L}[D^\alpha P(t)] - k\mathscr{L}[P(t)] = 0.$$

Pelos Teorema 2.14 (com n=1) e Corolário 1.7,

$$s^{\alpha-1}\mathscr{L}[DP(t)] - k\mathscr{L}[P(t)] = 0$$

$$\Rightarrow s^{\alpha-1}[s\mathscr{L}[P(t)] - P(0)] - k\mathscr{L}[P(t)] = 0$$

$$\Rightarrow s^{\alpha}\mathscr{L}[P(t)] - s^{\alpha-1}P(0) - k\mathscr{L}[P(t)] = 0.$$

Denotando $F(s) = \mathscr{L}[P(t)]$, e substituindo a condição inicial, conclui-se que

$$F(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - k}P_0.$$

Portanto, pela Equação (1.4), conclui-se que a solução da equação diferencial fracionária (3.8), com condições iniciais $P(0) = P_0$, é

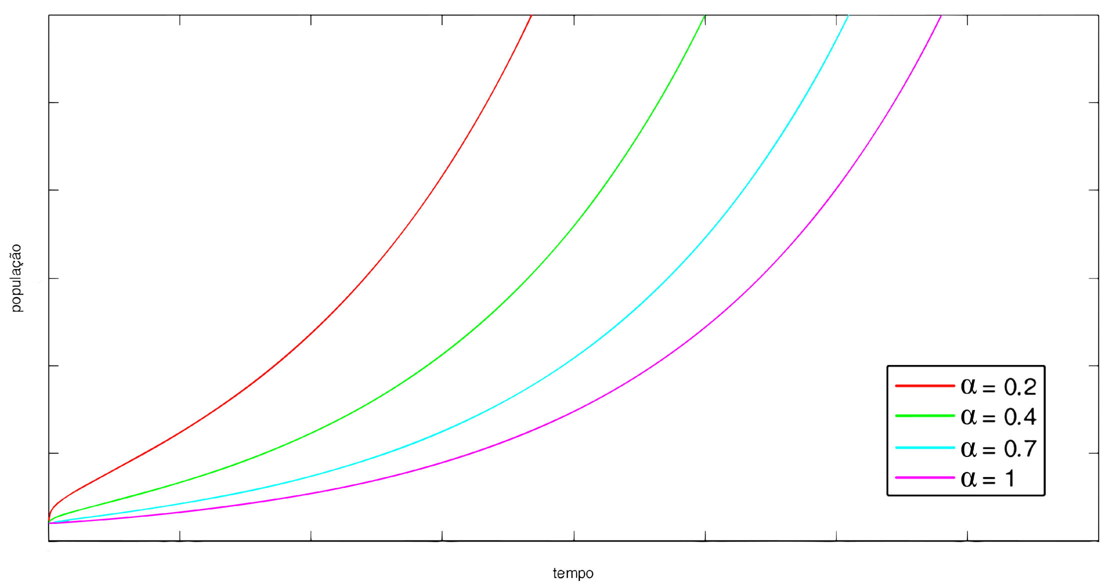
$$P(t) = P_0 E_\alpha(kt^\alpha). \tag{3.9}$$

Na Figura 3.4, estão representados alguns gráficos de $P(t)$ para diferentes valores da ordem α, em que é possível verificar que quando a ordem α tende a 1, o caso inteiro é um caso particular do caso fracionário, assim como no oscilador harmônico. De fato, basta ver que

$$\lim_{\alpha \to 1} P(t) = P_0 E_1(kt) = P_0 e^{kt}.$$

Neste modelo, nota-se um comportamento distindo do obtido nos três modelos já estudados neste capítulo. Mais especificamente, aqui encontra-se o efeito oposto uma vez que a redução da ordem da derivada implicou em solução com maior taxa de variação.

Figura 3.4: Gráficos da solução do modelo de crescimento populacional malthusiano fracionário para diferentes valores da ordem α.



Fonte: Elaboração própria.

Capítulo 4

Conclusão

No desenvolvimento de modelos matemáticos, o objetivo principal é se aproximar ao máximo do comportamento dos dados do fenômeno estudado. Nesse contexto, a utilização da abordagem fracionária na modelagem matemática busca aumentar a precisão dos resultados. Ao modelar um problema, frequentemente é necessário realizar simplificações para traduzir fenômenos complexos da vida real em uma representação matemática abstrata. Entretanto, essas simplificações, quando introduzidas no modelo, tendem a reduzir a taxa de variação do fenômeno. Portanto, em alguns casos, é possível estimar a influência desses fatores alterando a ordem da derivada, em vez de utilizar mais simplificações no modelo.

O Oscilador Harmônico Fracionário, visto na Seção 3.1, é um exemplo onde a alteração da ordem da derivada pode evitar o uso de simplificações no modelo. De fato, analisando graficamente a solução, ao substituir a ordem 2 da derivada do oscilador clássico para a ordem não inteira $1 < \alpha \leq 2$, é obtido um oscilador harmônico com amortecimento. É possível observar que com o decorrer do tempo, em ordens mais próximas a 1, a posição do oscilador tende a 0, sugerindo ser possível considerar todo o atrito do modelo, reduzindo a ordem da equação diferencial para um número não inteiro entre um e dois.

Um comportamento análogo é observado nos modelos fracionários logístico de Verhulst e resfriamento de Newton, presentes nas Seções 3.2 e 3.3. Ao substituir a ordem 1 da derivada do modelo original pela ordem não inteira $0 < \alpha \leq 1$, são obtidas soluções que decrescem mais lentamente que no caso clássico, sugerindo assim, um decrescimento na taxa de variação do modelo.

Por outro lado, no modelo de crescimento populacional de Malthus em sua versão fracionária, conforme discutido na Seção 3.4, é observado um comportamento distinto. Ao substituir a ordem da derivada de 1 por uma ordem não inteira $0 < \alpha \leq 1$, o resultado é um crescimento mais acelerado, o oposto do que se observa nos outros modelos apresentados neste estudo. Portanto, é possível concluir que a utilização de uma abordagem fracionária, através da redução de ordem das derivadas em relação às versões clássicas, influencia o comportamento de cada modelo de maneira distinta.

Outro ponto de extrema relevância é que, em todos os modelos, as soluções fracionárias convergem para as soluções originais do problema original. Isso implica que a solução clássica é, de fato, um caso particular da solução fracionária, tornando as versões fracionárias uma generalização do modelo clássico. Além disso, no caso do modelo logístico de Verhulst, assim como no modelo clássico, todas as soluções fracionárias, independentemente do valor da ordem $0 < \alpha \leq 1$, convergem para a capacidade suporte r, resgatando uma das principais características e vantagens do uso desse modelo em relação a outros modelos de crescimento populacional. Portanto, com este trabalho é possível reconhecer a importância da abordagem fracionária na área da modelagem matemática.

Uma vez que não há conhecimento do significado físico das derivadas fracionárias, os resultados obtidos com o presente trabalho contribuem para o avanço das pesquisas envolvendo Cálculo Fracionário e modelagem de problemas reais a partir de equações de ordem não inteira.

Referências Bibliográficas

[Bassanezi 2014]BASSANEZI, R. C. Malthus and the evolution of models. *Ciência e Natura*, v. 36, n. 3, p. 97–100, 2014.

[Boyce e Diprima 1930]BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. *Solvability of nonlinear equations and boundary value problems*. Berlim: Springer Dordrecht, 1930. v. 4. (Mathematics and its Applications, v. 4).

[Camargo, Oliveira e Chiacchio 2009]CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. C. de; CHIACCHIO, A. O. *Cálculo Fracionário e Aplicações*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

[Kot 2001]KOT, M. *Elements of Mathematical Ecology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[Kuroda et al. 2017]KURODA, L. K. B. et al. Unexpected behavior of Caputo fractional derivative. *Comput. Appl. Math.*, 2017.

[Miller e Ross 1993]MILLER, K. S.; ROSS, B. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. 1. ed. New York: John Wiley Sons, 1993.

[Oliveira 2011]OLIVEIRA, E. C. de. *Funções especiais com aplicações*. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

[Oliveira 2010]OLIVEIRA, H. S. *Introdução ao cálculo de ordem arbitrária*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, 2010.

[Podlubny 1998]PODLUBNY, I. *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. Amesterdã: Elsevier Science, 1998.

[Rossato e Ferreira 2020]ROSSATO, R. A.; FERREIRA, V. V. Lei dos expoentes envolvendo derivadas e integrais fracionárias segundo Riemann-Liouville. *Matemática e Estatística em Foco*, 2020.

[Varalta 2014]VARALTA, N. *Das transformadas integrais ao cálculo fracionário aplicado à equação logística*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, 2014.