

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
CAMPUS MONTE CARMELO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS AGRÁRIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM AGRICULTURA E INFORMAÇÕES
GEOESPACIAIS

JHONATTA WILLYAN MIATO ASSUNÇÃO

**APLICAÇÃO DO TESTE SEQUENCIAL DE RAZÃO DE
VEROSSIMILHANÇA PARA IDENTIFICAÇÃO DE PONTOS
INSTÁVEIS EM UMA REDE DE TRILATERAÇÃO**

Monte Carmelo

2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
CAMPUS MONTE CARMELO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS AGRÁRIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM AGRICULTURA E INFORMAÇÕES
GEOESPACIAIS

JHONATTA WILLYAN MIATO ASSUNÇÃO

**APLICAÇÃO DO TESTE SEQUENCIAL DE RAZÃO DE
VEROSSIMILHANÇA PARA IDENTIFICAÇÃO DE PONTOS
INSTÁVEIS EM UMA REDE DE TRILATERAÇÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Agricultura e Informações Geoespaciais da Universidade Federal de Uberlândia, campus Monte Carmelo, como requisito para a obtenção do título de Mestre, sob orientação do Prof. Dr. Marcelo Tomio Matsuoka e coorientação do Prof. Dr. Vinicius Francisco Rofatto.

Monte Carmelo

2024

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

A851
2024

Assunção, Jhonatta Willyan Miato, 1993-
Aplicação do teste sequencial de razão de
verossimilhança para identificação de pontos instáveis
em uma rede de trilateração [recurso eletrônico] /
Jhonatta Willyan Miato Assunção. - 2024.

Orientador: Marcelo Tomio Matsuoka.
Coorientador: Vinicius Francisco Rofatto .
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
Uberlândia, Pós-graduação em Agricultura e Informações
Geoespaciais.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2024.62>

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Agronomia. I. Matsuoka, Marcelo Tomio, 1978-,
(Orient.). II. , Vinicius Francisco Rofatto, 1986-,
(Coorient.). III. Universidade Federal de Uberlândia.
Pós-graduação em Agricultura e Informações Geoespaciais.
IV. Título.

CDU: 631

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
 Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Agricultura e Informações
 Geoespaciais
 Rodovia LMG 746, Km 01, s/nº, Bloco 1AMC, Sala 1A202, Monte Carmelo-MG, CEP 38.500-000
 Telefone: (34) 3810-1033 - ppgaig@iciag.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Agricultura e Informações Geoespaciais				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico				
Data:	26/01/2024	Hora de início:	14h00min	Hora de encerramento:	16h00min
Matrícula do Discente:	32122AIG007				
Nome do Discente:	Jhonatta Willyan Miato Assunção				
Título do Trabalho:	Aplicação do teste sequencial de razão de verossimilhança para identificação de pontos instáveis em uma rede de trilateração				
Área de concentração:	Informações geoespaciais e tecnologias aplicadas à produção agrícola				
Linha de pesquisa:	Aplicações e desenvolvimento de métodos em informações espaciais				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Mapeamento e análise de variáveis agrícolas a partir de dados georreferenciados utilizando métodos computacionais inteligentes				

Reuniu-se na sala virtual (<https://conferenciaweb.rnp.br/sala/marcelo-tomio-matsuoka>) a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Agricultura e Informações Geoespaciais, assim composta: Prof. Dr. Marcelo Tomio Matsuoka (Presidente - Universidade Federal de Uberlândia, Campus de Monte Carmelo), Prof. Dr. Gabriel do Nascimento Guimarães (Universidade Federal de Uberlândia, Campus Uberlândia) e Prof. Dr. Ivandro Klein (Instituto Federal de Santa Catarina). Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Marcelo Tomio Matsuoka, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o candidato:

Aprovado

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Ivandro Klein, Usuário Externo**, em 26/01/2024, às 16:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcelo Tomio Matsuoka, Professor(a) do Magistério Superior**, em 26/01/2024, às 16:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gabriel do Nascimento Guimarães, Professor(a) do Magistério Superior**, em 26/01/2024, às 16:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5137934** e o código CRC **F9B146B5**.

À minha tão amada e intercessora mãe, Dona Célia (*in memoriam*)

À minha amada esposa, carne de minha carne, Dayanne

Ao meu amado e zeloso pai, senhor Antônio,

dedico.

“É justo que muito custe o que muito vale”.
(Santa Teresa D’Ávila, doutora da Igreja)

AGRADECIMENTOS

A Deus Pai, Criador; a Deus Filho, Redentor; Ao Espírito Santo, Santificador, à materna intercessão da sempre Virgem Maria e à consolação do bondoso pai providente, São José.

À memória de minha amada mãe, Dona Célia Conceição Miato Prexede, por todo incentivo na persecução deste sonho, pelos conselhos valiosos e pela incondicional dedicação ao longo de três décadas de companhia.

À minha amada esposa, Dayanne Dias Miato Assunção e Silva, minha companheira de vida, com quem tudo divido e a quem tudo dedico, pelo companheirismo, apoio, amor e dedicação, de modo especial pelo incentivo demonstrado no decorrer desta pesquisa.

Aos meus orientadores: Professor Doutor Marcelo Tomio Matsuoka e Professor Doutor Vinicius Francisco Rofatto, pelo conhecimento transmitido, pelas dicas, pelos conselhos e, acima de tudo, por reforçarem, a cada conversa, o valor da ciência.

Ao meu amigo e companheiro de laboratório, Doutor Valdiney José da Silva, por todas as dicas, conhecimento compartilhado e, de modo especial, pela parceria na execução dos trabalhos de campo, sem os quais a conclusão deste projeto seria impossível.

Ao meu amigo e promissor cientista Lincon Rodrigues Silva, pela grandiosa colaboração neste projeto, sobretudo na geração dos experimentos e resultados.

À coordenação, secretaria e ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Agricultura e Informações Geoespaciais, pelas constantes demonstrações de humanidade e sensibilidade com os acontecimentos que acometeram minha vida pessoal, notadamente com a doença e posterior falecimento de minha mãe.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Agricultura e Informações Geoespaciais, por todo saber transmitido e pela notória dedicação à ciência, escancarada pelo impacto de suas pesquisas desenvolvidas, reconhecidas e premiadas a nível nacional e internacional.

Aos membros da banca examinadora, por dedicarem seu tempo e conhecimento à minuciosa avaliação deste trabalho, contribuindo de maneira valiosa para o aprimoramento desta dissertação.

BIOGRAFIA

Jhonatta Willyan Miato Assunção é natural da cidade de Monte Carmelo, Minas Gerais, Brasil, tendo nascido em 21 de novembro de 1993. Possui graduação em Engenharia de Agrimensura e Cartográfica pela Universidade Federal de Uberlândia, campus Monte Carmelo, concluída no ano de 2015. Atuou profissionalmente com levantamentos topográficos e geodésicos na iniciativa privada entre os anos de 2016 e 2018. Ingressou no Programa de Pós-Graduação em Agricultura e Informações Geoespaciais em julho de 2021, desenvolvendo estudos em Geodésia estatística, notadamente na aplicação de testes estatísticos sequenciais para análise de deformações geodésicas. É servidor público federal desde julho de 2022, atuando como técnico de laboratório/Geodésia no Laboratório de Topografia e Geodésia no campus Monte Carmelo da Universidade Federal de Uberlândia. Tem experiência acadêmica em estudos de Geodésia física, Geodésia espacial, controle de qualidade e sensoriamento remoto.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	JUSTIFICATIVA	14
3	REVISÃO DE LITERATURA	16
3.1	Considerações gerais sobre o ajustamento de observações com aplicações geodésicas e modelagem matemática	16
3.1.1	<i>O ajustamento pelo MMQ para modelos lineares</i>	17
3.1.2	<i>Problemas sobre modelos não lineares linearizados</i>	19
3.2	Testes estatísticos para detecção e identificação de anomalias	19
3.3	Estratégias para a análise de deformações geodésicas	20
3.3.1	Abordagem baseada nas variações das coordenadas	20
3.3.2	Abordagem baseada nas diferenças entre as observações	21
4	MATERIAIS E MÉTODO	23
4.1	Estabelecimento da geometria da rede de trilateração e campanhas de medição .	23
4.2	Definição do modelo	25
4.3	Teste Sequencial de Razão de Verossimilhança para Identificação de Pontos Instáveis (SLRTUPI)	28
4.4	Uso das simulações de Monte Carlo para controle de taxas de falsa detecção.....	33
5	RESULTADOS E DISCUSSÃO	34
5.1	Experimento 1: Testes que consideraram todos os pontos como potencialmente instáveis	34
5.2	Experimento 2: Testes que consideraram o conhecimento <i>a priori</i> de pontos de controle	35
6	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	37
	REFERÊNCIAS	39

RESUMO

O monitoramento de estruturas consiste em determinar, a certo nível de probabilidade, se pontos estrategicamente situados sobre a estrutura monitorada se movimentaram ou permaneceram estáveis, entre duas épocas. Tal questão é preocupação premente em obras de engenharia, tendo em vista que movimentações inesperadas e de magnitude acima da normalidade podem acarretar desastres de grandes proporções. Diante da importância do tema, uma classe de pesquisadores tem se dedicado a desenvolver e aprimorar estratégias de monitoramento. Costumeiramente, são consideradas as variações das coordenadas dos pontos que são os parâmetros incógnitos na maioria dos problemas matemáticos de análise de deformações geodésicas. Entretanto, tal abordagem requer a linearização do modelo, o que acarreta a redução da capacidade dos testes estatísticos. Por isso, os pesquisadores têm trabalhado em soluções que apresentem um modelo matemático essencialmente linear, baseado nas diferenças entre as observações (e não mais nas diferenças entre os parâmetros). Em muitos casos, entretanto, os testes estatísticos confrontam a hipótese nula – de que não houve deslocamentos – a uma única hipótese alternativa – de que, possivelmente, pontos se deslocaram. Como resultado, o controle da ocorrência de falsas detecções (Erro Tipo I) não é adequadamente realizado. Considerando as limitações das abordagens anteriormente apresentadas na literatura, esta pesquisa apresenta a aplicação de uma nova metodologia, baseada em testes sequenciais de razão de verossimilhança para identificação de pontos instáveis, que confronta a hipótese nula com múltiplas hipóteses alternativas, controlando adequadamente o Erro Tipo I. Ademais, a metodologia, aplicada neste trabalho em dados reais de uma rede de trilateração com 6 pontos situada no campus Monte Carmelo da Universidade Federal de Uberlândia, é rigorosa, no sentido de que permite a correta identificação de pontos deslocados independentemente de inunções de pontos de controle. Os resultados obtidos apontam para uma taxa de correta identificação de cerca de 74% para o caso da ausência de inunção de pontos de controle, com 100% de correta detecção nos casos identificados, a um nível de significância de $\alpha = 0,1$. Quando se considera a fixação de três pontos de controle, a taxa de correta identificação sobe para cerca de 96%. Os resultados obtidos mostram o potencial da técnica desenvolvida, trazendo a possibilidade de novas validações em cenários futuros, utilizando novas redes, novas geometrias e estudos de caso, por exemplo.

Palavras-chave: Deformação Geodésica; Deslocamento; Testes Estatísticos; Controle de Qualidade.

ABSTRACT

Structure monitoring consists of determining, at a certain level of probability, whether points strategically located on the monitored structure moved or kept stable, between two epochs. This issue is a pressing concern in engineering works, given that unexpected movements of a magnitude above normal can lead to major disasters. Given the importance of the topic, a class of researchers has dedicated themselves to developing and improving monitoring strategies. Typically, variations in the coordinates of points are considered, which are the unknown parameters in most mathematical problems analyzing geodetic deformations. However, this approach requires the linearization of the model, which leads to a reduction in the capacity of statistical tests. Therefore, researchers have been working on solutions that present an essentially linear mathematical model, based on the differences between observations (and no longer on the differences between parameters). In many cases, however, statistical tests confront the null hypothesis – that there were no displacements – to a single alternative hypothesis – that, possibly, points moved. As a result, control of the occurrence of false detections (Type I Error) is not adequately carried out. Considering the limitations of approaches previously presented in the literature, this research presents the application of a new methodology, based on sequential likelihood ratio tests to identify unstable points, which compares the null hypothesis to multiple alternative hypotheses, adequately controlling the Type I Error. Furthermore, the methodology, applied in this work on real data from a trilateration network with 6 points located on the Monte Carmelo campus of the Federal University of Uberlândia, is rigorous, in the sense that it allows the correct identification of displaced points regardless of injunctions of control points. The results obtained point to a correct identification rate of around 74% in the case of the absence of control point injunction, with 100% correct detection in the identified cases, at a significance level of $\alpha = 0.1$. When considering the setting of 3 control points, the correct identification rate rises to around 96%. The results obtained show the potential of the developed technique, bringing the possibility of new validations in future scenarios, using new networks, new geometries and case studies, for example.

Keywords: Geodetic Deformation; Displacement; Statistical Tests; Quality Control.

1. INTRODUÇÃO

O monitoramento de grandes estruturas, que envolve a investigação de mudanças de posição de pontos estrategicamente distribuídos sobre os monumentos e arredores, entre duas épocas, constitui um dos principais desafios da engenharia. Sabe-se que as próprias características geodinâmicas da superfície terrestre propiciam a movimentação de estruturas no decorrer do tempo (Jerke; Faggion, 2020).

Portanto, o cerne da questão está em definir limiares – de magnitude e tempo – a partir dos quais deve-se considerar tais movimentos como anômalos, devendo-se desenvolver técnicas eficazes para prever, detectar e identificar tais fenômenos, orientando tomadas de decisão que poderão mitigar os impactos negativos de grandes tragédias, como desmoronamentos e rupturas de barragens (Tanajura *et al.*, 2020).

As técnicas de monitoramento geodésico são aplicáveis também às estruturas naturais. Santos e Seixas (2021) apresentaram uma metodologia de monitoramento tridimensional para encostas susceptíveis a recalques e deslizamentos. Carvalho Júnior (2014) utilizou o procedimento de auscultação geodésica, também com a finalidade de monitoramento de uma encosta instável.

Dada a importância da questão, diversos pesquisadores têm empreendido esforços no desenvolvimento de novas técnicas de análise de deformação geodésica e no aprimoramento das técnicas já existentes. Tradicionalmente, são instalados campos de monitoramento que registram as coordenadas dos pontos de interesse, com periodicidade pré-estabelecida, e a variação nas coordenadas calculadas é avaliada. Even-Tzur (1999), Setan e Singh (2001) e Eteje (2020) são exemplos de pesquisas que utilizam essa abordagem, que neste trabalho será denominada como abordagem clássica.

O problema da abordagem clássica reside no fato de que a consideração da variação das coordenadas propicia uma relação não linear entre os parâmetros. Assim, a linearização de um modelo matemático inicialmente não linear leva à diminuição do poder do teste estatístico na detecção de deslocamentos (Erdogan; Hekimoglu; Durdag, 2021; Matsuoka *et al.*, 2023).

Para contornar os problemas de linearização do modelo matemático, outras abordagens têm avaliado a possibilidade da detecção de pontos instáveis a partir da análise das diferenças entre as observações, o que propicia um modelo sempre linear (Nowel; Kaminski, 2014).

Uma abordagem baseada nas diferenças das medidas foi apresentada também por Erdogan, Hekimoglu e Durdag (2021). No trabalho em questão, o modelo univariado é estabelecido a partir das equações de Gauss-Markov, e os deslocamentos são considerados erros do modelo. Entretanto, a proposta dos autores tem seus testes estatísticos baseados na confrontação de uma hipótese nula H_0 de que não houve deslocamento com uma única hipótese alternativa H_A (de que houve deslocamento de pelo menos um ponto) por vez. Como consequência, o controle da ocorrência de detecções de deslocamentos de pontos que, na verdade, permaneceram estáveis (ou seja, rejeitar H_0 quando verdadeira) – denominada como Erro Tipo I (Magalhães; Lima, 2005, p. 248) ou, vulgarmente, como “falso positivo” – não é realizado de maneira eficaz.

Para propiciar o controle eficiente do Erro Tipo I, no contexto de modelos matemáticos lineares, Matsuoka *et al.* (2023) apresentaram uma metodologia baseada em testes sequenciais de razão de verossimilhança que confrontam a hipótese nula a múltiplas hipóteses alternativas. Ademais, a proposta apresentada pelos autores busca garantir a correta identificação de pontos instáveis independentemente de sua injunção ou não ao modelo como pontos de controle.

A técnica desenvolvida por Matsuoka *et al.* (2023) foi denominada *Sequential Likelihood Ratio Test for Unstable Points Identification* (Teste Sequencial de Razão de Verossimilhança para Identificação de Pontos Instáveis) que, neste trabalho, será tratada pelo acrônimo SLRTUPI e consiste em uma classe específica de testes sequenciais de razão de verossimilhança para múltiplos *outliers* (em inglês – SLRTMO), apresentada em Klein *et al.* (2016).

Este trabalho propõe a aplicação da técnica SLRTUPI para detecção de deslocamentos em uma rede de trilatação real, projetada em um campo de testes no interior do campus Monte Carmelo da Universidade Federal de Uberlândia, simulando o monitoramento de uma estrutura fictícia.

O objetivo é avaliar a aplicabilidade e a eficácia no método em um conjunto de dados reais medidos em campo, estendendo sua utilização ao desenvolvimento de possíveis sistemas de baixo custo para monitoramento aplicável, por exemplo, em barragens particulares.

2. JUSTIFICATIVA

Os meios de comunicação têm frequentemente noticiado a ocorrência de tragédias decorrentes de colapsos de estruturas. No Brasil, os recentes casos dos rompimentos de barragens nas cidades mineiras de Mariana (Barragem do Fundão, da empresa de mineração *Samarco*, em 5 de novembro de 2015) e Brumadinho (Barragem da Mina Córrego do Feijão, da mineradora *Vale*, em 25 de janeiro de 2019) e a queda de um bloco rochoso nos cânions de Capitólio (MG) em 8 de janeiro de 2022 escancararam o potencial devastador com o qual tais tragédias podem impactar a vida das pessoas, o meio ambiente e a economia.

Não é possível afirmar que as técnicas de monitoramento de estruturas não tenham sido devidamente aplicadas nos episódios citados. Contudo sabe-se, por exemplo, que no caso de Brumadinho, o relatório do Centro Internacional de Métodos Numéricos em Engenharia da Universidade Politécnica da Catalunha (CIMNE/UPC) – órgão responsável pelo estudo das causas do desastre – apontou como causa do rompimento o fenômeno da liquefação (CIMNE, 2021).

De acordo com o documento, “a liquefação é um processo associado ao aumento da poropressão, pelo qual a resistência ao cisalhamento é reduzida à medida que a tensão efetiva no solo se aproxima de zero”. Com o auxílio de modelagem numérica e simulações computacionais de diversos cenários – a partir da reconstituição da barragem em *3D* –, os cientistas concluíram que o potencial gatilho para a liquefação, que culminou no rompimento, foi uma perfuração específica: a do furo B1-SM-13. Não obstante, o relatório final apontou que nenhum sinal de alerta foi emitido pelo sistema de monitoramento (CIMNE, 2021).

O dossiê mostrou ainda que perfurações similares, em outras regiões do entorno da estrutura, não surtiram o mesmo efeito potencializador do desastre. Ora, pode-se concluir que tal constatação não só elucida a importância da **detecção de pontos instáveis** em uma estrutura e na área que a circunda, como também a crucialidade de sua **identificação**.

Ademais, a importância do desenvolvimento de metodologias alternativas para monitoramento de estruturas passa também pela necessidade de universalização do acesso aos benefícios de sua utilização. É tradição no agronegócio brasileiro a construção de barramentos em cursos d’água (represas) ou de reservatórios para armazenamento de águas pluviais (“piscinões”) em propriedades que são dedicadas à agricultura irrigada.

Nesses casos, a simplificação das técnicas construtivas associada à falta de conhecimento técnico sobre geotecnia/geodinâmica e aos custos para a implantação de um sistema de monitoramento dedicado contribuem para o surgimento de um cenário de risco de colapsos que, embora de menor monta e com menor repercussão nos meios de comunicação, também acarretam sérios danos ambientais, econômicos e à vida.

É evidente, pois, que os mantenedores de estruturas dessa natureza se beneficiam do desenvolvimento de estratégias de monitoramento de menor custo. Para tais casos, a presença de um profissional que aplique as técnicas adequadas em visitas periódicas com equipamentos mais acessíveis pode ser suficiente para a identificação de uma situação de risco e orientação da tomada de decisão (evacuação, esvaziamento etc.).

A técnica aplicada nesta contribuição é abrangente: é válida tanto para o emprego como modelo de baixo custo em estruturas menores, quanto como substituta ou complemento para as metodologias tradicionais já aplicadas em grandes estruturas. Para o primeiro caso, os benefícios são aqueles apontados anteriormente; para ambos, a vantagem está no ganho estatístico propiciado pelo emprego de modelos lineares, apresentado na seção introdutória e que será devidamente descrito na seção de materiais e método.

Reforça-se ainda os ganhos do ponto de vista dos profissionais que trabalham com monitoramento de estruturas, tendo em vista que não existem softwares de monitoramento geodésico gratuitos e de ampla utilização. Atualmente, as únicas maneiras de se ter acesso a softwares é recorrer aos recursos pagos, que exigem alto investimento e, portanto, apenas se justificam em casos de grandes projetos ou implementando o próprio código: neste segundo caso, deve-se ressaltar os expressivos ganhos que existem na adoção de uma estratégia baseada em modelos essencialmente lineares, que não exigem a inserção de parâmetros iniciais aproximados, iterações e análises de convergência.

3. REVISÃO DE LITERATURA

3.1. Considerações gerais sobre o ajustamento de observações com aplicações geodésicas e modelagem matemática

A obtenção do valor verdadeiro de uma grandeza por meio de medições é tarefa impossível, dadas as flutuações probabilísticas inerentes ao sistema de medidas que decorrem, notadamente, das limitações do instrumento de medição e da técnica utilizada, bem como da própria natureza experimental do ato de medir. Tais incertezas, amplamente tratadas na literatura como erros aleatórios, são inevitáveis e requerem modelagem matemática adequada (Teunissen, 2006).

Para além da incidência dos erros aleatórios, existem ainda erros de natureza não aleatória, que estão subdivididos em duas classes: àqueles que decorrem, dentre outros, das características do fenômeno físico a partir do qual a medida é feita e das condições do ambiente em que o processo de medição ocorreu, dá-se o nome de erros sistemáticos; por outro lado, àqueles que decorrem da imperícia do operador ou de falhas instrumentais denomina-se como erro grosseiro (Gemael, 1994; Klein, 2011). Erros não aleatórios devem ser evitados ou devidamente identificados e tratados, caso ocorram.

Dada a inevitabilidade dos erros aleatórios e a necessidade de tratamento dos erros não aleatórios, o profissional que trabalha com medições recorre à redundância: são realizadas sucessivas medidas do mesmo fenômeno, com o objetivo de se determinar o valor mais provável para a grandeza, a um nível de probabilidade conhecido e pré-determinado (Gemael, 1994).

Todavia, a necessidade de redundância tem como implicação a inconsistência do sistema de equações que irá determinar o valor mais provável para os parâmetros, uma vez que o número de equações é superior ao de incógnitas. Assim, o sistema de equações não admitirá solução única. A adoção de uma solução para o sistema parte, então, do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) de Gauss-Legendre: toma-se por solução do sistema aquela que minimiza a soma ponderada dos quadrados dos resíduos das observações (Dalmolin, 2002).

O ajustamento das observações pelo MMQ é aplicável a sistemas lineares. Assim, deve-se adotar modelos matemáticos lineares quando possível (o que é estatisticamente vantajoso) ou, diante de problemas não lineares, recorrer à linearização (por exemplo, por séries de Taylor) (Ghilani, 2010; Koch, 1999).

3.1.1. O ajustamento pelo MMQ para modelos lineares

O ajustamento por mínimos quadrados parte de um sistema linear, matricialmente representado na Equação (1) (Klein, 2011):

$$y_{nx1} = A_{nxu} x_{ux1} + e_{nx1} \quad (1)$$

onde: y_{nx1} é o vetor das medidas, A_{nxu} é a matriz de coeficientes das equações, x_{ux1} é o vetor dos parâmetros incógnitos e e_{nx1} é o vetor dos erros aleatórios nas observações. O problema matemático está na busca pelo vetor x_{ux1} que minimize as somas dos quadrados dos resíduos, ou seja (Equação (2)):

$$(y_{nx1} - A_{nxu}x_{ux1})^T (y_{nx1} - A_{nxu}x_{ux1}) = \text{mínimo} \quad (2)$$

Agora, ponderando pelo peso das observações, insere-se matriz-peso “positivo-definida” W_{nxn} , e obtém-se a Equação (3):

$$(y_{nx1} - A_{nxu}x_{ux1})^T W_{nxn} (y_{nx1} - A_{nxu}x_{ux1}) = \text{mínimo} \quad (3)$$

Os pesos das observações refletirão a contribuição que cada uma delas trará para a estimação dos parâmetros e estão associados, via de regra, às precisões de cada medida, ou seja, à matriz de variância-covariância (MVC) das observações. As variâncias das observações devem ser propagadas para os parâmetros por meio da Lei de Propagação de Variância-Covariância. Isso significa que as incertezas associadas aos parâmetros ajustados estarão atreladas à precisão das medidas (Ghilani, 2010).

Agora, pode-se escrever a soma ponderada dos quadrados dos resíduos como uma função F dos parâmetros x_{ux1} que se quer determinar, resultando na Equação (4) (Klein, 2011):

$$F(x) = y^T W y - 2y^T W A x + A^T W A x^T x \quad (4)$$

Adotando-se valores estimados para os parâmetros, denotados por \hat{x} e sabendo que W é “positivo-definida”, $F(x)$ será mínima quando a derivada de primeira ordem de $F(x)$ avaliada em \hat{x} for igual a zero e a derivada de segunda ordem de $F(x)$ avaliada em \hat{x} for positiva (Koch, 1999). As Equações (5) e (6) elucidam a situação descrita:

$$\begin{cases} \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=\hat{x}} = 0 \\ \left. \frac{d^2F}{dx^2} \right|_{x=\hat{x}} > 0 \end{cases} \quad (5)$$

Ao aplicar-se as condições de (5) em (4), tem-se a Equação (6):

$$\begin{cases} \frac{dF}{dx}(\hat{x}) = -2A_{uxn}^T W_{n \times n} y_{n \times 1} 2A_{uxn}^T W_{n \times n} A_{n \times u} \hat{x}_{ux1} = 0_{ux1} \\ \frac{d^2F}{dx^2}(\hat{x}) = 2A_{uxn}^T W_{n \times n} A_{n \times u} > 0_{ux1} \end{cases} \quad (6)$$

Klein (2011) ilustrou geometricamente a obtenção do valor mínimo de F para o caso de um único parâmetro ($u = 1$), por meio da Figura 1.

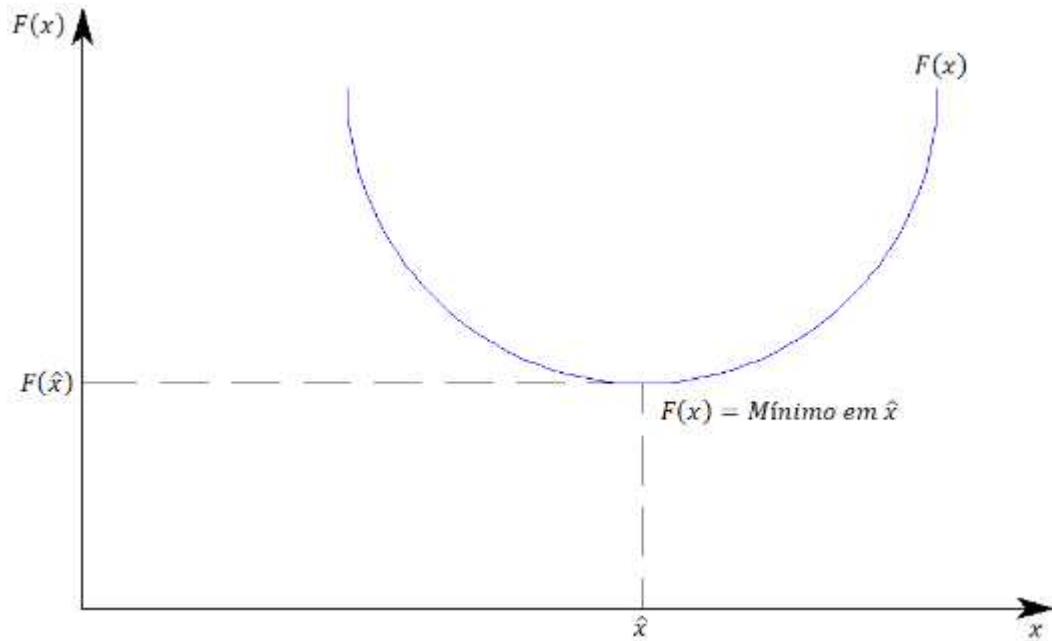


Figura 1 – Ponto de mínimo de F para $x = (\hat{x})$ (Klein, 2011).

Isolando o vetor dos parâmetros estimados \hat{x}_{ux1} na primeira condição expressa em (6), tem-se (Strang; Borre, 1997):

$$\hat{x}_{ux1} = (A_{uxn}^T W_{n \times n} A_{n \times u})^{-1} A_{uxn}^T W_{n \times n} y_{n \times 1} \quad (7)$$

O vetor das medidas ajustadas é obtido aplicando-se o modelo expresso em (1), resultando em:

$$\hat{y}_{n \times 1} = [A_{n \times u} (A_{uxn}^T W_{n \times n} A_{n \times u})^{-1} A_{uxn}^T W_{n \times n}] y_{n \times 1} \quad (8)$$

O vetor dos resíduos ajustados é obtido por meio da combinação entre (2) e (8). Assim, tem-se:

$$\hat{e}_{n \times 1} = y_{n \times 1} - \hat{y}_{n \times 1} \quad (9)$$

Para uma interpretação geométrica acerca do MMQ, sugere-se consulta a Teunissen (2003) e Klein (2011).

3.1.2. Problemas sobre modelos não lineares linearizados

Problemas de linearização surgem quando a associação (indireta) entre as observações e os parâmetros não pode ser modelada a partir de uma relação linear. Adota-se a linearização por séries de Taylor em torno de um vetor de parâmetros aproximados $x_{0_{ux1}}$, utilizando-se somente os dois primeiros termos da série (Dalmolin, 2002; Klein, 2011).

Todavia, a linearização com exclusão dos termos de maior ordem gera um erro de aproximação, que pode ser minimizado a partir de uma escolha adequada para $x_{0_{ux1}}$. Tomando o modelo funcional que relaciona os parâmetros às observações avaliado no vetor dos parâmetros ajustados $F(\hat{x})$, expandido em torno do vetor dos parâmetros aproximados, tem-se a Equação (10):

$$F(\hat{x}) = F(x_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_0} (\hat{x} - x_0) = y_0 + Ax \quad (10)$$

onde: $y_0 = F(x_0)$ são as equações de observação do sistema não linear avaliadas no vetor dos parâmetros aproximados; $A = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_0}$ é a avaliação da matriz das derivadas parciais A_{nxu} no vetor dos parâmetros aproximados e $\hat{x} - x_0$ é o vetor de correção dos parâmetros aproximados. O modelo linearizado será dado por (11) (Dalmolin, 2002; Klein, 2011):

$$e_{nx1} = l_{nx1} - A_{nxu}x_{ux1} \quad (11)$$

onde $l_{nx1} = y_{nx1} - y_{0_{nx1}}$. Maiores detalhes podem ser encontrados em Dalmolin (2002).

3.2. Testes estatísticos para detecção e identificação de anomalias

A aplicação do ajustamento das observações pelo MMQ requer que somente erros de natureza aleatória estejam presentes. Assim, torna-se necessária a aplicação de técnicas que detectem e identifiquem corretamente a presença de erros não aleatórios nas medidas (Kavouras, 1982). As observações contaminadas por erros não aleatórios são costumeiramente tratadas na literatura como *outliers* (ex.: Knight; Wang; Rizos, 2010).

A detecção e identificação de *outliers* no conjunto de dados dá-se mediante a aplicação de testes estatísticos e possui uma série de desprendimentos que, no contexto das observações geodésicas, estão basicamente relacionados a duas finalidades principais: a primeira diz

respeito ao ajustamento pelo MMQ combinado aos estudos de confiabilidade em Geodésia (Collischonn *et al.*, 2019; Even-Tzur, 1999; Monico; Matsuoka; Sapucci, 2006; Rofatto, 2020; Teunissen, 1998) (que incluem, dentre outros, a determinação do menor erro detectável/identificável e o projeto de redes resistentes a *outliers* (Baarda, 1977; Oliveira; Dalmolin, 2003; Klein *et al.*, 2012).

A segunda se refere à análise de deformações geodésicas, que consiste em determinar se um ponto, localizado sobre uma estrutura que está sendo monitorada, deslocou-se ou não entre duas épocas de interesse (Aydin, 2014; Even-Tzur, 2002; Matsuoka *et al.*, 2023; Nowel; Kaminski, 2014; Setan; Singh, 2001), sendo este o objeto de estudo desta pesquisa.

Diversas classes de testes estatísticos são aplicadas com a finalidade de detectar e identificar *outliers*. Destacam-se: o Teste Global do Ajustamento para detecção associado ao procedimento *data snooping* para identificação (Baarda, 1968); o teste *Tau* (Pope, 1976); *data snooping* iterativo (Baarda, 1968; Rofatto; Klein; Matsuoka, 2017) e testes sequenciais de razão de verossimilhança para múltiplos *outliers* – SLRTMO (Klein *et al.*, 2016).

3.3. Estratégias para a análise de deformações geodésicas

3.3.1. Abordagem baseada nas variações das coordenadas

Neste tópico será adotada notação matemática distinta daquela observada na formulação inserida na Seção 3 até então, para demonstrar que a variabilidade notacional não prejudica a compreensão do desenvolvimento matemático proposto.

A análise de deformações consiste, geralmente, em um conjunto de medidas de distâncias, coordenadas, azimutes e deflexões. Seja um modelo funcional l que relaciona as observações (medidas) aos parâmetros (neste caso, as coordenadas dos pontos monitorados) (Setan; Singh, 2001) tal Equação (12):

$$l = F(x) \quad (12)$$

tem-se a constatação de que se trata de um modelo não linear. O modelo que se baseia nas diferenças entre as coordenadas em duas épocas encontra-se descrito na Equação (13):

$$d'_{iP} + v_{d'_{iP}} = \sqrt{(X_P - X_i)^2 + (Y_P - Y_i)^2 + (Z_P - Z_i)^2} \quad (13)$$

onde: d'_{iP} é a diferença entre as coordenadas (parâmetros) nas duas épocas; $v_{d'_{iP}}$ é o resíduo da diferença entre as coordenadas nas duas épocas; $(X_P \ Y_P \ Z_P)$ são as coordenadas do ponto na

primeira época e $(X_i Y_i Z_i)$ são as coordenadas do ponto na i -ésima época, comparada com a época de referência (Ghilani, 2010).

A linearização do modelo por séries de Taylor seguida pela adoção da notação matricial resultam em (Setan; Singh, 2001) (14):

$$\hat{v} = A\hat{x} + b \quad (14)$$

onde \hat{v} é o vetor dos resíduos, A é a matriz dos coeficientes e $b = l - l_0$ é o vetor de diferenças entre as observações atuais l e as observações calculadas l_0 .

3.3.2. Abordagem baseada nas diferenças entre as observações

Como visto anteriormente, em análises de deformações geodésicas, o MMQ é usualmente empregado para estimar as coordenadas dos pontos para cada época e , quando um ponto é deslocado, suas coordenadas e a dos pontos vizinhos são sensivelmente modificadas (efeito *smearing*) (Hekimoglu *et al.*, 2011).

Como o algoritmo da análise convencional de deformações (baseada no MMQ) é iterativo, todos os pontos candidatos são excluídos da definição de *datum*, um por vez, e o impacto da exclusão sobre a hipótese nula é então testado. Quando um ponto deslocado contribui para a definição de *datum*, o resultado dessa contribuição pode se propagar para os demais pontos. Em razão disso, a magnitude verdadeira do deslocamento pode não ser determinada com exatidão, culminando na identificação errônea de pontos deslocados. Além disso, a sensibilidade dos testes estatísticos também pode conduzir a erros de decisão (Erdogan; Hekimoglu; Durdag, 2021).

Para além da redução do poder do teste estatístico e do problema de definição de *datum*, ainda deve-se considerar que a linearização acaba por inserir um *bias* nos parâmetros estimados que, embora seja desprezado em alguns casos, acaba tendo impacto em problemas específicos, como em posicionamentos de curta distância (Lösler *et al.*; 2021; Xue; Yang, 2017).

Uma alternativa para contornar os problemas de definição de *datum* e a perda de poder do teste estatístico em função da linearização de Taylor é apresentada por Erdogan (2014). Essa abordagem é linear, por considerar diretamente as diferenças entre as observações, e não as diferenças entre os parâmetros, como nas abordagens baseadas em diferenças de coordenadas exemplificadas no Tópico 3.3.1.

Em Geodésia, as grandezas relacionadas a uma rede são medidas ao menos duas vezes. Hekimoglu *et al.* (2014) mostraram que o sucesso da abordagem univariada é maior do que naquele caso em que o valor médio das medições é obtido na análise clássica de *outliers*. Tal consideração pode ser estendida para as análises de deformações.

A modelagem matemática da abordagem baseada nas diferenças entre as observações será apresentada na Seção 4, Tópico 4.2.

4. MATERIAIS E MÉTODO

4.1. Estabelecimento da geometria da rede de trilateração e campanhas de medição

A rede de trilateração foi estabelecida de maneira que pudesse simular um campo de monitoramento de uma estrutura imaginária. Os pontos A, B e C foram tomados como pontos de controle e, a partir de suas posições, foi fixado um sistema de coordenadas arbitrário com origem em A, orientado no sentido do alinhamento A-B, tomado como norte fictício e definida a posição do ponto C a partir do movimento do limbo horizontal do equipamento no sentido anti-horário, constituindo um sistema levógiro. Os pontos foram materializados por meio de piquetes de madeira que mediam aproximadamente 30 centímetros.

É válido ressaltar que a construção do dito sistema de coordenadas serviu para apoiar trabalhos desenvolvidos em paralelo sobre a mesma rede de trilateração e que, para a metodologia aplicada neste artigo, as distâncias entre os pontos constituintes da rede são suficientes.

Após a definição das posições dos pontos de controle, foram estabelecidas as posições de três pontos de monitoramento (D, E e F), localizados sobre a estrutura fictícia a ser monitorada.

A Figura 1 apresenta a estrutura da rede, com a localização dos pontos de controle e dos pontos de monitoramento.

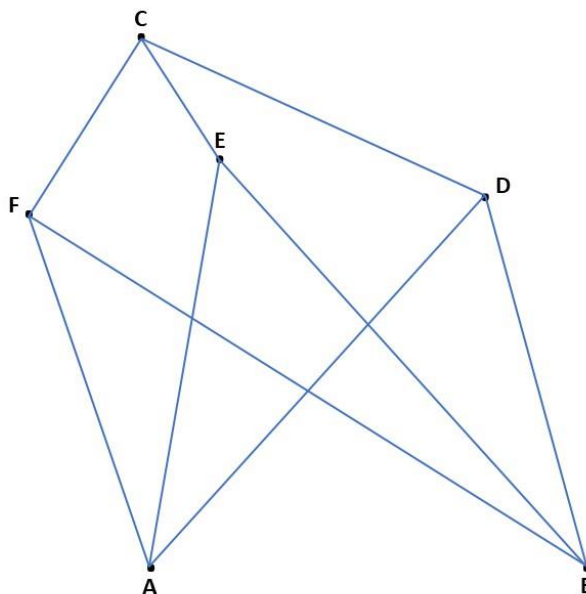


Figura 1 – Estrutura da rede de pontos.

Uma vez definidos os pontos da rede, as campanhas de medição consistiram na instalação de um medidor eletrônico de distâncias (estação total) sobre os pontos de controle, seguido por medições das distâncias horizontais do ponto de instalação em relação aos pontos monitorados e em relação aos demais pontos de controle. O equipamento utilizado é do modelo FOIF® OTS-685, com incerteza linear de $2 \text{ mm} \pm 2 \text{ ppm}$, conforme especificações do fabricante. Tanto a estação total quanto o prisma refletor foram instalados sobre cada ponto de interesse com o auxílio de um conjunto constituído por tripé e base nivelante, com o objetivo de garantir maior estabilidade.

As medições de distâncias sem deslocamentos foram consideradas como Época 1, enquanto, para a Época 2, vários padrões de deslocamentos foram testados. A cada teste, a centragem do conjunto nivelante do prisma refletor era propositalmente alterada para uma nova posição, grafada no topo do piquete, sempre de maneira radial, em diferentes direções e sentidos, considerando os quatro quadrantes, sendo o rigor da determinação dos ângulos a partir dos quais os deslocamentos se davam desprezível para as análises almejadas neste trabalho. Portanto, nenhum equipamento de medições angulares foi requerido.

A cada deslocamento testado, a centragem era refeita sobre a nova posição do ponto. Os deslocamentos utilizados nos experimentos tiveram a magnitude de 1 cm, sendo esse o comprimento total do segmento de reta formado entre as posições do ponto nas Épocas 1 e 2, medidos com o auxílio de uma trena em fibra de vidro.

Quatro casos foram testados para deslocamento de apenas um ponto por vez, conforme mostrado na Figura 2 (a, b, c, d); três cenários para 2 e 3 deslocamentos simultâneos, com os padrões mostrados na Figura 2 (e, f, g) e Figura 2 (h, i, j), respectivamente, totalizando 23 experimentos (12 para $p = 1$; 8 para $p = 2$ e 3 $p = 3$).

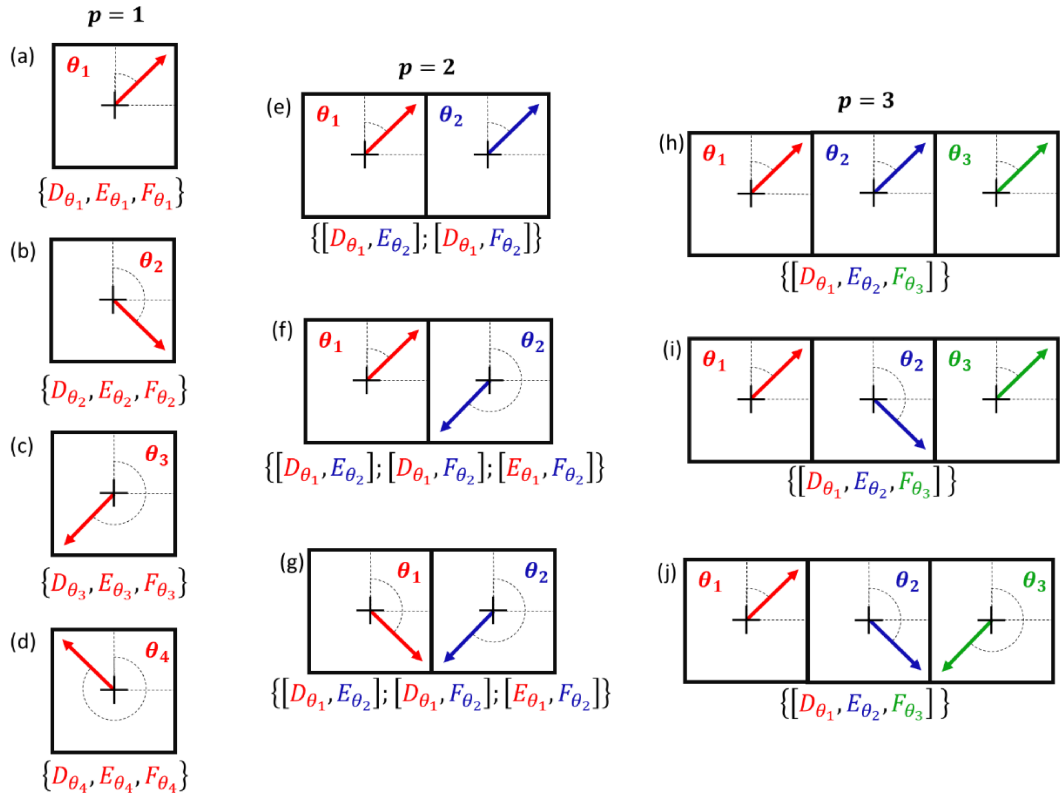


Figura 2 – Padrões de deslocamento aplicados no campo: (a) deslocamento para cada ponto individual por vez na direção θ_1 , denotado por $D_{\theta_1}, E_{\theta_1}, F_{\theta_1}$; (b) deslocamento para cada ponto individual por vez na direção θ_2 , denotado por $D_{\theta_2}, E_{\theta_2}, F_{\theta_2}$; (c) deslocamento para cada ponto individual por vez na direção θ_3 , denotado por $D_{\theta_3}, E_{\theta_3}, F_{\theta_3}$; (d) deslocamento para cada ponto individual por vez na direção θ_4 , denotado por $D_{\theta_4}, E_{\theta_4}, F_{\theta_4}$; (e, f, g) deslocamento simultâneo de dois pontos, com o primeiro ponto deslocado na direção θ_1 e o segundo na direção θ_2 ; (h, i, j) deslocamento simultâneo de três pontos, com o primeiro ponto deslocado na direção de θ_1 , segundo ponto na direção θ_2 e terceiro na direção θ_3 .

4.2. Definição do modelo

Conforme mencionado anteriormente, o modelo é estabelecido a partir das diferenças entre as medidas realizadas entre duas épocas distintas. Na primeira época, tem-se o estado original da rede (sem deslocamentos); na segunda época, tem-se duas situações possíveis: ou a estrutura permanece estável ou ocorreram descolamentos em um ou mais pontos.

Assim, a definição do modelo dá-se conforme a Equação (15):

$$\begin{aligned} y^{[1]} &= y_0^{[1]} + e^{[1]} \text{ para a Época 1} \\ y^{[2]} &= y_0^{[2]} + e^{[2]} \text{ para a Época 2} \end{aligned} \quad (15)$$

onde os vetores $y^{[j]} \in R^n \times 1$, que contêm as medidas $y_0^{[j]} \in R^n \times 1$ são os vetores dos valores verdadeiros das distâncias (que são desconhecidos) e $e^{[j]} \in R^n \times 1$ são os vetores dos erros nas medidas.

Subtraindo-se a equação da Época 1 da equação da Época 2 (16), tem-se (Equação 2):

$$y^{[2]} - y^{[1]} = y_0^{[2]} - y_0^{[1]} + e^{[2]} - e^{[1]} \quad (16)$$

e fazendo $y^{[2]} - y^{[1]} = \Delta y$, $e^{[2]} - e^{[1]} = e_{\Delta y}$ e $y_0^{[2]} - y_0^{[1]} = x$, tem-se (Equação (17)):

$$\Delta y = Ax + e_{\Delta y} \quad (17)$$

sendo $\Delta y \in R^{n \times 1}$ o vetor das diferenças entre as medidas nas duas épocas, $e_{\Delta y}$ o vetor dos erros desconhecidos nas diferenças entre as medidas e $A \in R^{n \times 1}$ a matriz jacobiana e rank cheio $u = 1$, que neste caso é um vetor coluna de valores 1 (por exemplo, $A = [1 \ 1 \ 1 \dots 1]^T$) e $x \in R^{1 \times 1}$ o parâmetro estimado, que é um escalar que representa a verdadeira diferença (desconhecida) entre as medidas nas duas épocas.

Uma vez definido o modelo, recorre-se aos testes de hipóteses para inferir sobre a estabilidade ou não dos pontos da rede. Para tanto, assume-se a hipótese nula H_0 de que nenhum deslocamento ocorreu entre as épocas. Considerando que os erros nas observações seguem uma distribuição normal com média igual a zero (Equação (18)):

$$e_{\Delta H_0} \sim N(0, \Sigma_{\Delta y}) \quad (18)$$

a hipótese nula para o modelo padrão de Gauss-Markov em sua forma linear é dada pela Equação (19):

$$H_0: E(\Delta y) = Ax, D(\Delta y) = \Sigma \Delta y = \Sigma^{[1]} y + \Sigma^{[2]} y \quad (19)$$

com $E(.)$ sendo o operador esperança matemática, $D(.)$ o operador dispersão e $\Sigma_{\Delta y} \in R^{n \times n}$ a matriz de variância “positivo-definida” de Δy , obtida da aplicação da lei de propagação das variâncias em Δy . Por sua vez, Δy é o resultado da soma das matrizes de variância das Épocas 1 e 2.

Quando se assume verdadeiro o modelo da hipótese nula (19), o escalar x pode ser estimado por meio do cálculo dos mínimos quadrados simples, a partir do modelo dado na Equação (20):

$$\hat{x}_{H_0} = (A^T W A)^{-1} A^T W \Delta y \quad (20)$$

e os erros estimados nas medidas são dados por (Equação (21)):

$$\hat{e}_{\Delta y_{H_0}} = A \hat{x} - \Delta y \quad (21)$$

onde $W \in R^{n \times n}$ é denominada matriz-peso e é dada por $W = \sigma_0^2 \Sigma_{\Delta y}^{-1}$, sendo σ_0^2 o fator de variância a priori. Os graus de liberdade (redundância) r do modelo de H_0 são dados por (Equação (22)):

$$\hat{e}_{\Delta y_{H_0}} r = \text{rank} \left(\Sigma_{\hat{e}_{\Delta y_{H_0}}} \right) = n - \text{rank}(A) = n - 1 \quad (22)$$

sendo que (Equação (23)):

$$\Sigma_{\hat{e}_{\Delta y_{H_0}}} = \sigma_0^2 W^{-1} - \sigma_0^2 A(A^T W A)^{-1} A^T \quad (23)$$

onde $\Sigma_{\hat{e}_{\Delta y_{H_0}}} \in R^{n \times n}$ é a matriz de variância dos erros das observações.

Uma vez apontada a hipótese nula, os modelos de hipóteses alternativas H_A devem ser propostos quando não há certeza sobre a estabilidade dos pontos entre as duas épocas. O modelo para as hipóteses alternativas estende o modelo anterior, adicionando um parâmetro $\nabla \in R^{p \times 1}$ que se refere às perturbações nas medidas em função de deslocamentos que possam ocorrer em um ou mais pontos da rede. O modelo para as hipóteses alternativas encontra-se descrito na Equação (24):

$$H_A: E(\Delta y) = Ax + G\nabla = (A \ G) \begin{pmatrix} x \\ \nabla \end{pmatrix}, D(\Delta y) = \Sigma_{\Delta y} = \Sigma_y^{\{1\}} + \Sigma_y^{\{2\}} \quad (24)$$

onde $G \in R^{n \times p}$ é a matriz que contém as relações entre os pontos deslocados e as mudanças nas medidas de distâncias a eles conectadas, denominada matriz *design* de deslocamento (Matsuoka *et al.*, 2023). Se a hipótese alternativa for verdadeira, então os parâmetros incógnitos serão obtidos da Equação (25):

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{\nabla} \end{pmatrix}_{(H_A)} = [(A \ G)^T W (A \ G)]^{-1} (A \ G)^T W \Delta y \quad (25)$$

A redundância do modelo de H_A é dada por $n - \text{rank}(A \ G)$ com os erros estimados das observações $\hat{e}_{\Delta y_{(H_A)}}$ e sua matriz de variância $\Sigma_{\hat{e}_{\Delta y_{(H_A)}}}$ dados, respectivamente, pela Equação (26) e pela Equação (27):

$$\hat{e}_{\Delta y_{(H_A)}} = (A \ G) \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{\nabla} \end{pmatrix} - \Delta y \quad (26)$$

$$\Sigma_{\hat{e}_{\Delta y_{(H_A)}}} = \sigma_0^2 W^{-1} - \sigma_0^2 (A \ G) [(A \ G)^T W (A \ G)]^{-1} (A \ G)^T \quad (27)$$

Maiores detalhes sobre o desenvolvimento dos modelos podem ser encontrados em Matsuoka *et al.* (2023).

4.3. Teste Sequencial de Razão de Verossimilhança para Identificação de Pontos Instáveis (SLRTUPI)

Na prática, não se sabe ao certo a quantidade e a localização dos pontos que podem potencialmente ter se movido, numa estrutura, entre duas épocas. Assim, baseado em princípios de prudência, considera-se que ao menos um dos pontos da rede se moveu ou permanece se movendo. Assim, tem-se n_p hipóteses alternativas para $p = 1$ a serem testadas contra a hipótese nula, de acordo com a Equação (28):

$$H_A^{(g_i)} : E(\Delta_y^{(g_i)}) = Ax + G_{p=1}^{(g_i)} \nabla_{p=1}^{(g_i)} \quad i=1, \dots, n_p \quad (28)$$

onde $G_{p=1}^{(g_i)}$ representa o i -ésimo vetor coluna da matriz design-deslocamento $G_{p=1}$. Para o caso da rede ilustrada na Figura 1, tem-se seis modelos alternativos, levando-se em conta que a rede possui, ao todo, $n_p = 6$ pontos. A hipótese nula deverá ser testada contra todas as hipóteses alternativas, conforme destacado na Equação (29):

$$\begin{aligned} H_0 \text{ vs } H_A^{(A)} : E(\Delta_y^{(A)}) &= Ax + G_{p=1}^{(A)} \nabla_{p=1}^{(A)} \\ H_0 \text{ vs } H_A^{(B)} : E(\Delta_y^{(B)}) &= Ax + G_{p=1}^{(B)} \nabla_{p=1}^{(B)} \\ H_0 \text{ vs } H_A^{(C)} : E(\Delta_y^{(C)}) &= Ax + G_{p=1}^{(C)} \nabla_{p=1}^{(C)} \\ H_0 \text{ vs } H_A^{(D)} : E(\Delta_y^{(D)}) &= Ax + G_{p=1}^{(D)} \nabla_{p=1}^{(D)} \\ H_0 \text{ vs } H_A^{(E)} : E(\Delta_y^{(E)}) &= Ax + G_{p=1}^{(E)} \nabla_{p=1}^{(E)} \\ H_0 \text{ vs } H_A^{(F)} : E(\Delta_y^{(F)}) &= Ax + G_{p=1}^{(F)} \nabla_{p=1}^{(F)} \end{aligned} \quad (29)$$

Neste problema de múltiplas hipóteses alternativas, quer-se determinar, a certo nível de probabilidade, qual dos modelos pode levar à rejeição da hipótese nula. Para tanto, deve-se calcular as estatísticas de teste para cada confronto $T_{p=1}^{(g_i)}$ e com elas preencher o vetor denotado por $T_{p=1}$. A estatística que irá prevalecer, neste caso, é aquela que fornecer o maior valor para o teste e que será calculada a partir da Equação (30):

$$H_A^{(g_i)} : E(\Delta_y^{(g_i)}) = Ax + G_{p=1}^{(g_i)} \nabla_{p=1}^{(g_i)}, \quad i = 1, \dots, n_p \quad (30)$$

O critério de decisão, neste caso, será o seguinte:

- Aceitar H_0 se $\max(T_{p=1}) \leq c$ ou

- Rejeitar H_0 , em quaisquer outras situações.

O critério de decisão apresentado aponta que, se $\max(T_{p=1})$ for maior que um valor crítico c , há a evidência de que ocorreu um deslocamento em algum ponto da estrutura. Assim, pode-se dizer que um deslocamento foi detectado, mas a identificação de um ou mais pontos deslocados requer o aprofundamento da análise.

A identificação de um deslocamento consiste em mostrar qual ponto produziu o máximo valor para a estatística de teste, cujo valor é superior ao valor crítico. Portanto, a identificação existe apenas quando a detecção existe, necessariamente; ou seja, a identificação somente será possível quando a hipótese nula for rejeitada. Isso significa que a correta detecção não necessariamente implica em correta identificação, estendendo a discussão para abranger as taxas de sucesso na detecção/identificação.

Deve-se considerar que os valores de $\max(T_{p=1})$ não derivam de distribuições de probabilidade bem definidas e que, portanto, o valor crítico não pode ser extraído de tabelas estatísticas. Assim, a determinação do valor crítico recorre a simulações pelo método de Monte Carlo.

O procedimento descrito até então importa na identificação de somente um único ponto. Considerando que existe a possibilidade de que mais de um ponto no sistema tenha se deslocado, a abordagem deve se estender à aplicação de testes sequenciais que permitam a identificação de múltiplos pontos instáveis. Assim, se a estatística de teste ultrapassar o valor crítico (para o nível de probabilidade considerado no problema), ou seja, se $\max(T_{p=1}) > c$, deve-se incrementar o índice e refazer o teste para $p = 2$ (dois pontos possivelmente deslocados) e assim sucessivamente, recalculando o valor crítico a cada iteração. Como, na prática, não se sabe qual conjunto de k pontos está de fato se deslocando, a estatística de teste deverá ser calculada para todas as combinações possíveis dos n pontos da rede tomados “ k a k ” (Equação (30)).

$$K_{n_p}^p = \binom{n_p}{p} = \frac{n_p!}{(n_p - p)! p!} \quad (30)$$

A estatística de testes retornará somente um ponto ou grupo de pontos como “deslocados”. Para o caso concreto da rede estabelecida nesta pesquisa, tem-se um total de pontos $n = 6$ que, se tomados dois a dois ($p = 2$), resulta em um total de 15 combinações, ou

seja, um total de 15 modelos para a hipótese alternativa são gerados. Para o caso geral, as hipóteses alternativas poderão ser expressas conforme exposto na Equação (31):

$$H_A^{(g_i)}: E(\Delta_y^{(g_i)}) = Ax + G_p^{(g_i)} \nabla_p^{(g_i)}, \quad i = 1, \dots, K_{n_p}^p \quad (31)$$

Caso o ponto identificado como $\max(T_{p=1})$ esteja também contido no caso do $\max(T_{p=2})$, a hipótese nula passa a ser definida a partir do modelo que produziu $\max(T_{p=1})$, e a hipótese alternativa passa a ser definida a partir do modelo que produziu $\max(T_{p=2})$. A situação descrita encontra-se elucidada na Equação (32):

$$\begin{aligned} H_0^{(g_i)}: E(\Delta_y^{(g_i)}) &= Ax + G_{p=1}^{(g_i)} \nabla_{p=1}^{(g_i)} \\ H_A^{(g_j)}: E(\Delta_y^{(g_j)}) &= Ax + G_{p=2}^{(g_j)} \nabla_{p=2}^{(g_j)}, \quad g_i \subset g_j \end{aligned} \quad (32)$$

Por exemplo, se $\max(T_{p=1}) > c$ e, para o caso da rede utilizada neste trabalho (Figura 1), o ponto B foi identificado, o modelo para a hipótese nula passará a ser $H_0^{(B)}: E(\Delta_y^{(B)}) = Ax + G_{p=1}^{(B)} \nabla_{p=1}^{(B)}$. Se, no passo seguinte ($T_{p=2}$), os pontos B e C forem identificados pelo $\max(T_{p=2})$, então a hipótese alternativa será $H_A^{(B,C)}: E(\Delta_y^{(B,C)}) = Ax + G_{p=2}^{(B,C)} \nabla_{p=2}^{(B,C)}$, sendo que $H_0^{(B)}$ é um subconjunto $H_A^{(B,C)}$. A decisão de qual modelo utilizar será tomada a partir do cálculo do teste estatístico baseado na razão de máxima verossimilhança entre H_0 e H_A , conforme exposto na Equação (33):

$$\Lambda_{MLR}(\Delta_y) = \hat{e}_{\Delta_y(H_0)}^T W \hat{e}_{\Delta_y(H_0)} - \hat{e}_{\Delta_y(H_A)}^T W \hat{e}_{\Delta_y(H_A)} \quad (33)$$

onde $\Lambda_{MLR}(\Delta_y)$ é a razão de máxima verossimilhança entre H_0 e H_A e \hat{e}_{H_0} e \hat{e}_{H_A} são os erros estimados por mínimos quadrados para o modelo sob as hipóteses nula e alternativa, respectivamente. Partindo disto, a decisão com relação à hipótese a ser aceita parte do seguinte:

- Aceitar H_0 se $\Lambda_{MLR}(\Delta_y) \leq c$;
- Rejeitar H_0 em quaisquer outras situações.

Para o caso exemplificado, tem-se $\hat{e}_{H_0} = A\hat{x} + G_{p=1}^{(B)} \hat{\nabla}_{p=1}^{(B)} - \Delta_y$ como modelo para a hipótese nula e $\hat{e}_{H_A} = A\hat{x} + G_{p=2}^{(B,C)} \hat{\nabla}_{p=2}^{(B,C)} - \Delta_y$ como modelo para a hipótese alternativa.

Caso a hipótese nula seja aceita, tem-se o fim do teste e apenas o ponto que forneceu o $\max(T_{p=1})$ é tido como deslocado. Em contrapartida, em caso de nova rejeição da hipótese nula, o teste é reiniciado, considerando agora que o modelo da hipótese alternativa do passo anterior será o novo modelo nulo.

O procedimento estatístico deverá ser reiniciado até que ao menos uma das seguintes condições seja satisfeita:

- O modelo nulo não pode ser rejeitado; ou
- Mais do que um subconjunto dos pontos foi identificado como fornecedor do $\max(T_p)$ para um dado valor de p , representando um caso de sobreposição estatística no qual as hipóteses nula e alternativa são consideradas inseparáveis; ou
- As iterações atingiram o número máximo de pontos possível de ser avaliado.

Em resumo, o procedimento SLRTUPI consiste em determinar se o subconjunto incremental de pontos deslocados, considerado a cada nova iteração, é estatisticamente significativo, no que diz respeito ao impacto que este exerce nos quadrados dos erros estimados para as observações. A Figura 3 apresenta o fluxograma que descreve o algoritmo de descrição do método.

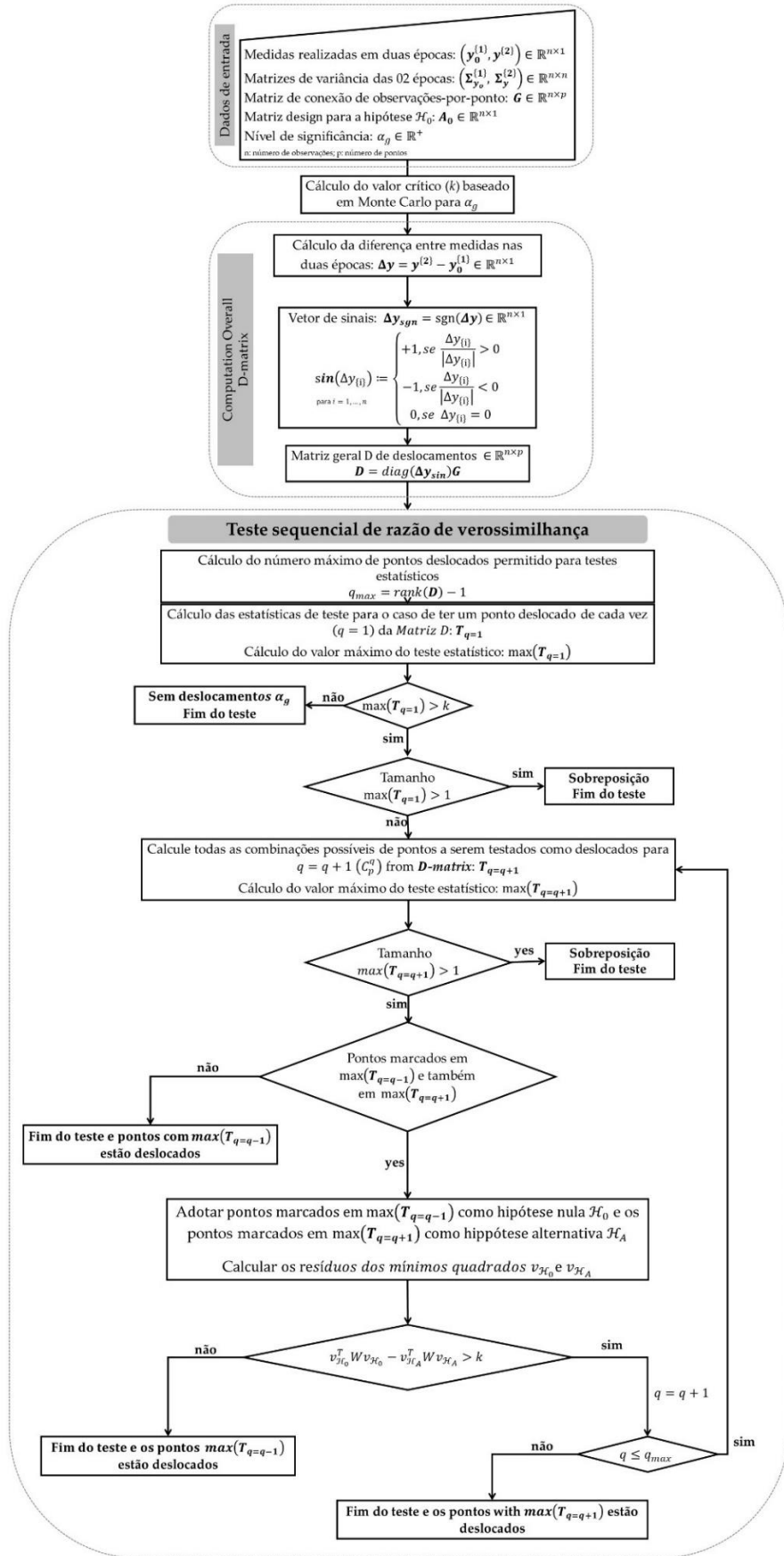


Figura 3 – Fluxograma de execução do SLRTUPI (Adaptado de Matsuoka *et al.*, 2023).

4.4. Uso das simulações de Monte Carlo para controle de taxas de falsa detecção

Sempre que são realizados múltiplos testes estatísticos, deve-se considerar a possibilidade de ocorrerem falsas descobertas. Nesse contexto, a descoberta de um falso positivo é denominada como Erro Tipo I. Para o caso específico do SLRTUPI, a comissão do Erro Tipo I significa apontar ao menos um ponto como deslocado quando, na verdade, não houve nenhum deslocamento. Na prática, significa que a hipótese nula H_0 foi rejeitada, sendo verdadeira.

A probabilidade de rejeição de uma hipótese nula em um teste de múltiplas hipóteses é denotada por (Equação (34)):

$$\alpha_t \approx \sum_{i=1}^{n_p} \alpha_i \quad (34)$$

O procedimento clássico de controle de α_t consiste na aplicação da Equação de Bonferroni, escolhendo (Equação (35)):

$$\alpha_i := \alpha_t/n_p \quad (35)$$

Ocorre que os testes estatísticos $T_{p=1}^{(g_i)}$ e o evento aleatório de rejeição da hipótese nula são estatisticamente dependentes, e a estatística extrema de $\max(T_{p=1})$ capta tal dependência. Deve-se ressaltar que, caso a dependência seja negligenciada no momento da determinação do valor crítico, resultará em um valor errôneo.

Como mencionado anteriormente, o cálculo do valor crítico não é possível a partir de testes com distribuição bem conhecida (como, por exemplo, o qui-quadrado), sendo necessário o emprego da técnica de Monte Carlo para que tal determinação seja possível. Detalhes sobre o passo a passo para determinação do valor crítico podem ser encontrados em Matsuoka *et al.* (2023).

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

5.1. Experimento 1: Testes que consideraram todos os pontos como potencialmente instáveis

Adotando-se um nível de significância $\alpha = 10\%$, o valor crítico obtido a partir das simulações de Monte Carlo foi $c = 7,62$. Com relação às métricas utilizadas para a interpretação dos resultados, tem-se as seguintes definições:

- **Correta detecção** significa que o algoritmo foi capaz de detectar corretamente os deslocamentos;
- **Correta identificação** significa que o algoritmo foi capaz de identificar corretamente quais foram os pontos deslocados;
- **Identificação incorreta** significa que o algoritmo não detectou (e, por consequência, não identificou) deslocamentos, sabendo que estes ocorreram ou que o algoritmo identificou como deslocados pontos que, na verdade, permaneceram estáveis;
- **Subidentificação positiva** significa que o algoritmo identificou um número inferior de pontos em relação à quantidade de pontos deslocados, porém acertou na identificação;
- **Subidentificação negativa** significa que o algoritmo identificou um número inferior de pontos em relação à quantidade de pontos deslocados e, quando identificado, errou na identificação.

Os resultados obtidos estão na Tabela 1. A taxa de sucesso na identificação foi de 74% e, em todos os casos, a detecção foi correta (100%). Dentre os 23 experimentos, em apenas um caso ocorreu erro de identificação; houve também um caso de subidentificação positiva e 4 casos de subidentificação negativa. A maioria dos experimentos resultou em $p_{máx} = 4$ (número máximo de pontos possível de ser avaliado), com algumas exceções, como [D, E, F] na Figura 2 resultou em $p_{máx} = 1$ e, conseqüentemente, a subidentificação já era esperada.

Tabela 1 – Resultados da avaliação de desempenho do algoritmo no Experimento 1

Padrões de deslocamento	Correta detecção	Correta identificação	Identificação incorreta	Subidentificação (+)	Subidentificação (-)
(a)	3	3	0	-	-
(b)	3	3	0	-	-
(c)	3	2	1	-	-
(d)	3	3	0	-	-
(e)	2	0	0	0	2
(f)	3	1	0	1	1
(g)	3	3	0	0	0
(h)	1	0	0	0	1
(i)	1	1	0	0	0
(j)	1	1	0	0	0
Total	23	17	1	1	4
Percentual (%)	100	73,91	4,35	4,35	17,39

5.2. Experimento 2: Testes que consideraram o conhecimento a priori de pontos de controle

Os testes realizados durante este experimento foram baseados no conhecimento a priori dos pontos A, B e C (configurando um caso de injeção). Como consequência de tal consideração, houve significativa mudança no modelo matemático em termos de redundância, uma vez que há três pontos a menos a serem monitorados do que no caso anterior. O valor crítico foi recalculado para $c = 6,64$ com nível de significância de $\alpha = 10\%$. Como resultado, os casos de correta identificação aumentaram de aproximadamente 74% para cerca de 96%, a partir da fixação dos pontos A, B e C.

Finalmente, o SLRTUPI foi aplicado em um cenário no qual não houve deslocamentos para verificar a eficiência no controle do Erro Tipo I. Para isso, novas medidas foram realizadas para que fossem utilizadas como observações na Época 2. Como resultado, não houve a detecção de deslocamentos nessas condições, o que permite concluir que o SLRTUPI controla adequadamente o Erro Tipo I em condições reais de uso. A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos no Experimento 2.

Tabela 2 – Resultados da avaliação de desempenho do algoritmo no Experimento 2

Padrões de deslocamento	Correta detecção	Correta identificação	Identificação incorreta	Subidentificação (+)	Subidentificação (-)
(a)	3	3	0	-	-
(b)	3	3	0	-	-
(c)	3	3	0	-	-
(d)	3	3	0	-	-
(e)	2	2	0	0	0
(f)	3	2	0	1	0
(g)	3	3	0	0	0
(h)	1	1	0	0	0
(i)	1	1	0	0	0
(j)	1	1	0	0	0
Total	23	19	0	1	0
Percentual (%)	100	95,65	0	4,35	0

6. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

A proposta desta pesquisa foi a de inovar ao validar a metodologia SLRTUPI para dados reais de campo, tanto no que diz respeito à identificação e detecção de deformações geodésicas, quanto no controle adequado da ocorrência de falsos positivos.

Os resultados demonstraram o potencial do algoritmo na detecção/identificação de pontos instáveis em duas diferentes zonas de uma estrutura fictícia, principalmente quando se considera a pequena magnitude dos deslocamentos simulados. O controle do Erro Tipo I foi eficiente, como verificado nos experimentos de repetição das medições sem deslocamentos.

A investigação da utilização prática do algoritmo, como técnica principal ou alternativa de detecção de movimentação em estruturas, poderá ser refinada se apoiada em estudos específicos de engenharia civil e geotecnia, com o objetivo de propor valores de deslocamentos que sejam “geodinamicamente toleráveis”, considerando os materiais, o tipo de solo e a funcionalidade da estrutura. A partir de então, novos trabalhos poderão aplicar a metodologia SLRTUPI para deslocamentos de magnitudes superiores a estes.

É notório que, quanto maior o número de pontos deslocados simultaneamente, maior será a dificuldade na identificação. Não obstante, as taxas de sucesso são sobremaneira dependentes da geometria da rede e dos graus de liberdade do modelo. Ademais, as taxas de detecção serão sempre maiores que as de identificação e, embora a identificação seja crucial em determinadas tarefas, a detecção desempenha um papel determinante em tarefas que envolvem a detecção de instabilidade. A identificação é preterida à localização: mesmo que a identificação não ocorra, a detecção é, em muitos casos, suficiente para que os sistemas de monitoramento emitam alertas quanto a riscos de desastres, ainda que a posição exata dos pontos deslocados não seja bem conhecida.

Estudos futuros poderão investigar a potencialidade do método para outros níveis de significância, utilizando deslocamentos reais ou simulados, variando o tipo de equipamento utilizado na obtenção dos dados, variando as condições de medida para investigar os impactos dos erros sistemáticos, realizar testes em ambiente controlado e promover estudos de caso em estruturas com diversas composições.

Considera-se, ante os resultados obtidos e as conclusões que deles se despreendem, que a tarefa que se almejava com a metodologia proposta foi atingida, uma vez que a validação da técnica obteve êxito. A utilização em estruturas reais poderá, entretanto, ensejar maior

quantidade de testes em ambientes reais, para garantir a aplicabilidade, a segurança e a destreza técnica dos operadores, de modo que os padrões de qualidade exigidos para sistemas de monitoramento de estruturas possam ser atingidos.

REFERÊNCIAS

- AYDIN, C.. **Geodetic deformation analysis: short lectures for graduate students**. Istanbul, 2014, 51 p..
- BAARDA, W. **A testing procedure for use in geodetic networks**. Publications on Geodesy, New Series, v. 2, n. 5, Delft: Netherlands Geodetic Commission, 1968. DOI: <https://doi.org/10.54419/t8w4sg>.
- _____. Measures for the accuracy of geodetic networks. In: **Symposium on Optimization of Design and Computation of Control Networks**, p. 419-436, Sopron, Hungary, 1977.
- CARVALHO JÚNIOR, S. M.. **Auscultação geodésica de uma encosta para quantificação de movimentos**. Dissertação (mestrado). Universidade Federal de Viçosa, Viçosa (MG), 2014, 105f.
- CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA (UPC – Universidad Politécnica de Catalunya). **Análise computacional da ruptura da Barragem I na Mina do Córrego do Feijão, em Brumadinho**. Resumo executivo. 2021. Disponível em <https://www.conjur.com.br/wp-content/uploads/2023/09/relatorio-brumadinho.pdf>.
- COLLISCHONN, C.; MATSUOKA, M. T.; GUZATTO, M. P.; KLEIN, I.; DE LIMA, E. M.; DE SOUZA, S. F. Análise de confiabilidade de rede GNSS e repetição de linhas-base. **Revista Brasileira de Cartografia**, [S. l.], v. 67, p. 1683–1703, 2019. DOI: <https://doi.org/10.14393/rbcv67n0-49229>.
- DALMOLIN, Q.. **Ajustamento por mínimos quadrados**. Curitiba: Curso de Pós-Graduação em Ciência Geodésicas/UFPR, 2002. 175 p..
- ERDOGAN, B.. An outlier detection method in geodetic networks based on the original observations. **Boletim de Ciências Geodésicas**, v. 20, n. 3, p.578-589, jul-set, 2014, ISSN 1982-2170, DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/S1982-21702014000300033>.
- ERDOGAN, B.; HEKIMOGLU, S.; DURDAG, U. M.. A new univariate deformation analysis approach considering displacements as model errors. **Studia Geophysica et Geodaetica**. v. 65, 1-14, 2021, DOI <https://doi.org/10.1007/s11200-020-1024-y>.
- ETEJE, S. O.. Detailed geodetic technique procedures for structural deformation Monitoring and Analysis. **International Journal of Scientific and Technological Research**, v.6, n°.7, 2020, ISSN 2422-8702, DOI: <https://doi.org/10.7176/JSTR/6-07-02>.
- EVEN-TZUR, G.. Sensitivity design for monitoring deformation networks. **Bollettino di Geodesia et Scienze Affini**, n° 4, 1999.
- _____. GPS vector configuration design for monitoring deformation networks. **Journal of Geodesy**, 2002, 76(8):455-461, DOI: <https://doi.org/10.1007/s00190-002-0274-5>.
- GEMAEL, C.. **Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas**. Curitiba. Ed. UFPR, 1994. 319 p..
- Ghilani, C. D. 2010. **Adjustment Computations: Spatial Data Analysis**. 3 ed. Hoboken, John Wiley & Sons.

HEKIMOGLU, S; ERENOGLU, R. C.; SANLI, D. U.; ERDOGAN, B. 2011. Detecting Configuration Weaknesses in Geodetic Networks. **Survey Review**, 43 (323), pp.713-730. DOI: <https://doi.org/10.1179/003962611X13117748892632>.

JERKE, A.; FAGGION, P. L.. Análise do Monitoramento Geodésico de barragem com Equipamentos de Diferentes Precisões e Diferentes Softwares de Processamento. Rio de Janeiro, **Anuário do Instituto de Geociências – UFRJ**, Vol. 43 – 44, p. 310-318, e-ISSN 1982-390, 2020, DOI: http://dx.doi.org/10.11137/2020_4_310_318.

KAVOURAS, M.. **On the detection of outliers and the determination of reliability in geodetic networks**. 1982. M.Sc.E Thesis – Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, Fredericton, Canada, 1982.

KLEIN, I. **Controle de qualidade no ajustamento de observações geodésicas**. 2011. 316 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Sensoriamento Remoto, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

KLEIN, I.; MATSUOKA, M. T.; SOUZA, S. F.; COLLISCHONN, C.. Planejamento de redes geodésicas resistentes a múltiplos outliers. **Boletim de Ciências Geodésicas**, v. 18, nº 1, p.480-507, jul-set, 2012, <https://doi.org/10.1590/S1982-21702012000300008>.

KLEIN, I.; MATSUOKA, M. T.; GUZATTO, M. P.; NIEVINSKI, F. G.. An approach to identify multiple outliers based on sequential likelihood ratio tests. **Survey Review**, 2016, DOI: <https://doi.org/10.1080/00396265.2016.1212970>.

KNIGHT, N. L.; WANG, J.; RIZOS, C.. Generalized measures of reliability for multiple outliers. **Journal of Geodesy**. v. 84, 625–635, 2010, DOI <https://doi.org/10.1007/s00190-010-0392-4>.

KOCH, K. R.. **Parameter estimation and hypothesis testin in linear models**. 2. ed. Berlim: Springer, 1999. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-03976-2>.

LÖSLER, M.; LEHMANN, R.; NEITZEL, F.; ESCHELBACH, C.. Bias in Least-Squares Adjustment of Implicit Functional Models. **Survey Review** 53(378):223-234, 2021, DOI <https://doi.org/10.1080/00396265.2020.1715680>.

MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P.. **Noções de probabilidade e estatística**. 6. ed. São Paulo. Ed. USP, 2005. 392 p..

MATSUOKA, M. T.; ROFATTO, V. F.; ASSUNÇÃO, J. W. M.; SILVA, L. R.; KLEIN, I.; CAMARGO, P.. A New Sequential Statistical Test Procedure from Observation Differences for Geodetic Deformation Analysis. **Preprint**, 25 Dez. 2023, DOI 10.20944/preprints202312.1858.v1. Disponível em <https://www.preprints.org/manuscript/202312.1858/v1>. Acesso em 26 Dez. 2023.

MONICO, J. F. G.; MATSUOKA, M.T.; SAPUCCI, L. F.: Confiabilidade Interna e Externa em Aplicações Geodésicas: Exemplo de uma Rede de Nivelamento. **Geodésia online**, 2006.

NOWEL, K.; KAMINSKI, W.. Robust estimation of deformation from observation differences for free control networks. **Journal of Geodesy**, v. 88, 749-764, 2014, DOI <https://doi.org/10.1007/s00190-014-0719-7>.

OLIVEIRA, R.; DALMOLIN, Q.. Critérios para análise da geometria de redes geodésicas por componentes principais. **Boletim de Ciências Geodésicas**, v. 9, n. 1, p. 25-37, 2003.

POPE, A J. **The statistics of residuals and the outlier detection of outliers**. NOAA Technical Report, NOS 65, NGS 1, Rockville, MD, 1976.

ROFATTO, V. F.; KLEIN, I.; MATSUOKA, M. T.. An Attempt to Analyse Baarda's Iterative Data Snooping Procedure based on Monte Carlo Simulation. **South African Journal of Geomatics**, v. 6. No. 3, 2017, DOI: <https://doi.org/10.4314/sajg.v6i3.11>.

ROFATTO, V. F.. **Uma extensão à teoria da confiabilidade em Geodésia**. Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Centro Estadual de Pesquisas em Sensoriamento Remoto e Meteorologia, Programa de Pós-Graduação em Sensoriamento Remoto, Porto Alegre, BR-RS, 2020.

SANTOS, W. J.; SEIXAS, A.. Medições Geodésicas para Detecção de Movimentos em Terrenos Inclinados Susceptíveis a Recalques e Deslizamentos. **Anuário do Instituto de Geociências**, 2021, v. 44, UFRJ, DOI: https://doi.org/10.11137/1982-3908_2021_44_37543.

SETAN, H.; SINGH, R.. Deformation analysis of a geodetic monitoring network. **Geomatica**. v. 55, n° 3, 2001.

STRANG, G.; BORRE, K.. **Linear álgebra, geodesy and GPS**. Wellesley-Cambridge Press, 1997.

TANAJURA, E. L. X.; PACHECO, A. P.; DOMINGUEZ, J. M. L.; GUIMARÃES, J. K.. Rede geodésica para monitoramento de processos de subsidência na planície deltaica do Rio São Francisco. São Paulo, UNESP, **Geociências**, v. 39, n. 1, p. 77 - 396, ISSN: 1980-900X, 2020. DOI: <https://doi.org/10.5016/geociencias.v39i1.13818>.

TEUNISSEN, P. J. G.. **Quality control and GPS**. 1998. Faculty of Civil Engineering and Geosciences, section MGP. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-72011-6_7.

_____. **Adjustment Theory: an introduction**. Deft: Ed. Deft, 2003. 147 p..

_____. **Adjustment Theory: an introduction**. 2 ed. Deft: Ed. VSSD, 2006. 147 p..

XUE, S.; YANG, Y.. Unbiased nonlinear Least Squares Estimations of short-distance equations. **Journal of Navigation** 70(4):1-19, 2017, DOI <https://doi.org/10.1017/S0373463317000030>.