UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA - MESTRADO PROFISSIONAL

BRUNO CASTILHO ROSA

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE CONCEITOS EM PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

DISSERTAÇÃO

UBERLÂNDIA
2023

BRUNO CASTILHO ROSA

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE CONCEITOS EM PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Dissertação apresentado(a) como requisito para obtenção do título de Mestre em ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática - MESTRADO PROFISSIONAL, da Universidade Federal de Uberlândia (UFU).

Orientador(a): Prof(a). Dr(a). Débora Coimbra

UBERLÂNDIA

2023

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).
n. 00/2023

R788 Rosa, Bruno Castilho - 1989 -
2023

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE CONCEITOS EM PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA / Bruno Castilho Rosa - 2023.

Orientador(a):Prof(a).Dr(a). DéboraCoimbra

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

Modo de acesso: Internet.
Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2023.500
Inclui bibliografia.

1. Ciência - Estudo ensino. I.Coimbra, Debora, 1972 -, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título

CDU: 50:37

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática
Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1A, Sala 207 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3230-9419 - www.ppgecm.ufu.br - secretaria@ppgecm.ufu.br

ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Ensino de Ciências e Matemática				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Profissional PPGECM				
Data:	21/06/2023	Hora de início:	18:00	Hora de encerramento:	19n40min
Matrícula do Discente:	11912ECM014				
Nome do Discente:	Bruno Castilho Rosa				
Título do Trabalho:	Uma Sequência Didática para o Ensino de Conceitos em Probabilidade e Estatística				
Área de concentração:	Ensino de Ciências e Matemática				
Linha de pesquisa:	Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática				
Projeto de Pesquisa de vinculação:					

Reuniu-se por meio de webconferência, na Plataforma MSTeams, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, assim composta pelas Professoras Doutoras: Débora Coimbra (ICENP/UFU) - orientadora, Rosana Sueli da Motta Jafelice (FAMAT/UFU), Marilena Bittar (UFMS).

Iniciando os trabalhos a presidente da mesa, Dra. Débora Coimbra, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir a senhora presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, às examinadoras, que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o candidato:

Aprovado

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

Documento assinado eletronicamente por **Debora Coimbra Martins**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 21/06/2023, às 19:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Rosana Sueli da Motta Jafelice**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 21/06/2023, às 21:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Marilena Bittar**, **Usuário Externo**, em 23/08/2023, às 18:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4585533** e o código CRC **2E3041EA**.

Referência: Processo nº 23117.043128/2023-51 SEI nº 4585533

Dedico este trabalho aos meus filhos Moises e Benjamin e a minha amada esposa Marisa, por ser minha fonte de inspiração e força em tudo.

Agradecimentos

A Deus, criador e formador de todas as coisas e a razão da minha existência, por permitir chegar até aqui, com vida, força, alegria e saúde.

À minha orientadora Profª. Dr. Debora Coimbra pelo carinho, incentivo e parceria em todo o período deste trabalho. Sou grato por sua disponibilidade nas reuniões, nos momentos que precisei, pelas sugestões, correções, conselhos e por sua competência e preparo profissional.

À minha mãe, Alice Castilho Pacheco Rosa, ao meu pai José Marcos Rosa, pelo apoio e amparo na realização deste sonho.

Às professoras Doutoras Marilena Bittar e Rosana Sueli da Motta Jafelice, integrantes da banca de qualificação, pelas orientações e sugestões essenciais que contribuíram para o desenvolvimento da pesquisa.

Ao meu irmão Profº. Eduardo Castilho Rosa, pelo incentivo, motivação, conselhos e contribuições neste trabalho.

À toda a equipe de profissionais do PPGECM pelo seu trabalho, dedicação e manutenção deste mestrado.

Aos meus alunos, pela contribuição e colaboração na efetivação da pesquisa.

RESUMO

ROSA, Bruno Castilho. **UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE CONCEITOS EM PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA**
2023. 85 f. Dissertação (Mestrado em ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA) – Universidade Federal de Uberlândia. Uberlândia, 2023.

O estudo de Probabilidade e Estatística na Educação Básica tem sido alvo de pesquisas realizadas por diversos educadores. Um dos desafios nesta área se refere às dificuldades enfrentadas pelos alunos no aprendizado dos conceitos básicos, embora o tema deva ser abordado desde as séries iniciais. Desta forma, este trabalho apresenta a elaboração de uma Sequência Didática envolvendo diversas atividades para a sistematização dos conceitos da probabilidade e estatística. Estas tarefas estão fundamentadas na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau. Para alcançar tal objetivo, o desafio foi como se daria a construção desta sequência. Para isso, foram propostas situações, organizadas em uma Sequência de Ensino-Aprendizagem, apoiada na metodologia baseada em *design* instrucional. Esta envolve um processo interativo de desenho, implementação e redesenho de sequência didática. As atividades foram organizadas no produto educacional intitulado *Ensino de Probabilidade e Estatística através de Experimentos* que aborda os conceitos como aleatoriedade, probabilidade clássica e frequentista, eventos equiprováveis, dependentes e independentes. A análise dos resultados obtidos permitiu, mediante a teoria adotada, identificar as dificuldades que os alunos demonstraram nos conceitos desenvolvidos. Os resultados mostraram que a sequência didática contribui para a compreensão e articulação, gradativamente, de alguns conceitos da Probabilidade e Estatística.

Palavras-chave: Sequência Didática. Sequência de Ensino-Aprendizagem. Pesquisa Baseada em Design. Teoria das Situações Didáticas.

ABSTRACT

The study of Probability and Statistics in both primary and secondary education has been the subject of research in recent years. One of the challenges for many students in this area is to learn basic concepts, although this topic is mandatory in the initial grades of the educational process. To solve this problem, we present in this work a didactic sequence based on Guy Brousseau's theory of didactic situations, which includes several activities related to the basic concepts of probability and statistics such as randomness, equiprobability, dependent and independent events, and so on. The proposed didactic sequence contemplates specific situations organized in a teaching-learning sequence based on the principle of instructional design (ID). This involves an iterative process of design, implementation and redesign of the didactic sequence. The proposed situations were included in an educational product entitled "Teaching of Probability and Statistics through Experiments". The results we obtained allowed us to identify the main difficulties faced by the test subjects. In addition, the results showed that the proposed didactic sequence contributed to the understanding and articulation of the concepts studied in the areas of probability and statistics.

Keywords: Didactic Sequence. Teaching-Learning Sequence. Search Based in Design. Theory of Didactic Situations.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Relação entre professor, aluno e saber. 36
Figura 2 – Losango didático. 40
Figura 3 – Representação do processo interativo entre o desenho e a implementação de SD. 41
Figura 4 – Representação dos dados pelos alunos. 45
Figura 5 – Representação dos dados em forma de tabela. 46
Figura 6 – Representação esquemática. 57
Figura 7 – Moedas sendo contadas pelos grupos. 57
Figura 8 – Bolinhas da urna sendo sorteadas. 60
Figura 9 – Representação esquemática de um dos grupos. 61
Figura 10 – Representação esquemática das bolinhas e alunos. 64
Figura 11 – Representação esquemática da média dos alunos. 65

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resultados do segundo lançamento das moedas. 55
Tabela 2 – Dados colhidos pelos alunos repetindo o experimento quatro vezes (dez sorteio em cada.) 61

LISTA DE QUADROS

1 Habilidades no Ensino Médio. 23

2 Situações seguindo as fases da TSD. 47

3 Fases da situação com moedas físicas. 50

4 Fases da situação com moedas virtuais. 50

5 Fases da situação com a urna de Bernoulli. 52

6 Fases da situação da proporção de alunos. 53

LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E ACRÔNIMOS

ACRÔNIMOS

ANPEd	Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
DES	*National Curriculum*
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
GILEE	Grupo de Investigação Latino- Americano de Educação Estatística
GT12	Grupo de Trabalho 12
IASE	*International Association for Statistical Education*
MEC	Ministério da Educação
NCTM	*National Council of Teachers of Mathematics*
OBM	Olimpíada Brasileira de Matemática
OCEM	Orientações Curriculares do Ensino Médio
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
SD	Sequência Didática
SEA	Sequência de Ensino-Aprendizagem
TIC	Tecnologias da Informação e Comunicação
TSD	Teoria das Situações Didáticas

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO . . . 14
1.1 MINHA TRAJETÓRIA . . . 14
1.2 JUSTIFICATIVA . . . 15
1.2.1 Finalidade da Educação Básica e articulação ao aprendizado de conceitos estatísticos e probabilísticos . . . 16
1.3 OBJETIVO E QUESTÃO DA PESQUISA . . . 24

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA . . . 26
2.1 UMA BREVE REVISÃO DA LITERATURA E AS DIFICULDADES DOS ESTUDANTES NO APRENDIZADO DOS CONCEITOS ESTATÍSTICOS E PROBABILÍSTICOS . . . 26
2.2 A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS . . . 35

3 METODOLOGIA E PRÉ-ANÁLISE DAS ATIVIDADES DA SD . . . 39
3.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA . . . 39
3.2 PESQUISA BASEADA EM DESIGN . . . 40
3.3 INTERVENÇÃO . . . 42
3.4 ELABORAÇÃO DA PROPOSTA DE INTERVENÇÃO . . . 42

4 RESULTADOS . . . 44
4.1 PRODUTO FINAL . . . 44
4.2 ESTUDO PILOTO . . . 44
4.3 ANÁLISE A *PRIORI* DAS SITUAÇÕES DA SD . . . 47
4.3.1 Situação 1 - Lançamento das moedas físicas e virtuais . . . 48
4.3.2 Situação 2 - Urna de Bernoulli . . . 50
4.3.3 Situação 3 - Proporção de alunos numa sala . . . 52
4.3.4 Situação 4 - Tarefas . . . 53
4.4 ANÁLISE DO ESTUDO FINAL . . . 54
4.4.1 Questionário . . . 67

5 CONCLUSÃO . . . 70

REFERÊNCIAS . . . 72

APÊNDICES 79

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA A PESQUISA . . . 80

APÊNDICE B – LISTA DE ATIVIDADES . . . 83

1 INTRODUÇÃO

1.1 MINHA TRAJETÓRIA

Foi no ano de 2004, quando cursava a oitava série, atualmente correspondente ao 9º ano do Ensino Fundamental, que me interessei pela Matemática e pelos problemas que a envolvem. Me encantei com a área e ingressei no curso de Licenciatura em Matemática em 2010. Durante a graduação, tive a oportunidade de participar das atividades de iniciação científica voluntária em dois projetos, ambos na área de Álgebra. Um deles envolveu a participação de estudantes da universidade para desenvolver Iniciação Científica e Estudo Dirigido, com foco inicial no *software* GAP[1] e em propriedades da Teoria de Grupos. O outro projeto foi dividido em três partes. Seminário Semanal de Álgebra (divulgacional, cujo foco eram os discentes), Seminário Semanal de Álgebra (temático, cujo foco eram os Grupos Sóficos) e o Workshop de Álgebra (com minicursos e palestras dos convidados).

No período da graduação, eu acreditava que minha pós-graduação seria na área da Matemática Pura, devido aos projetos e disciplinas realizados. No entanto, não enxergava essa área em suas outras perspectivas, como por exemplo, a dos processos de ensino e aprendizagem. Após a conclusão, iniciei um curso de mestrado em Matemática Pura, porém, não me interessou tanto quanto imaginava e logo desisti.

Alguns anos depois, após ter realizado uma pesquisa mais minuciosa, ingressei em um curso de Especialização em Ensino de Ciências e Matemática no ano de 2017. Nesse, tive o contato com pesquisas voltadas ao ensino e à aprendizagem da matemática. As disciplinas, as metodologias e os professores me fizeram perceber a necessidade de aprimorar minha prática docente e de avançar nos estudos posteriores e na busca de um mestrado na mesma área.

Meu trabalho final, relacionado às Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), visava introduzir o software Geogebra como recurso pedagógico para o estudo de funções do 1º e 2º grau, com o intuito de promover o desenvolvimento de metodologias alternativas no ensino de matemática. Nessa época, atuava como professor de Matemática no Ensino Fundamental e Médio na rede pública, porém, devido às dificuldades e à distância do local de trabalho, desenvolvi minha pesquisa no segundo ano do Ensino Médio em uma instituição federal.

[1] GAP é um sistema de álgebra computacional para álgebra discreta computacional, com ênfase particular na teoria computacional de grupos. A versão atual do *software* GAP pode ser encontrada no endereço https://www.gap-system.org/

Ao término da especialização, já convicto da área na qual iria me aprofundar, ou seja, voltada ao ensino da matemática, consegui ingressar no tão sonhado mestrado profissional. De início, pensava dar continuidade na pesquisa da especialização, utilizando novamente o *software* Geogebra, no entanto, o campo e a abrangência que o mestrado mostrava, abria-se um leque de possibilidades, o qual me fez refletir sobre novas ideias. No mestrado, tive maior contato com as teorias de aprendizagem e metodologias de ensino, as quais antes não conhecia. As disciplinas, bem como as conversas com professores do Programa, revisitaram os limites dos meus conhecimentos e o desejo de aprimorá-los.

No início do mestrado, passei a fazer parte do grupo de pesquisa da minha orientadora, professora Debora Coimbra. Este grupo se reúne, usualmente, de forma quinzenal e conta com a participação, eventualmente, de palestrantes convidados e e orientandos que realizam as leituras das pesquisas propostas em suas respectivas áreas do conhecimento (Biologia, Física e Matemática) para depois compartilhá-las com os demais do grupo. No contato com as diversas leituras voltadas ao ensino de matemática, pude escolher o tema de minha pesquisa, o ensino de probabilidade e estatística. Após leituras, participações no grupo de estudo e conversas com minha orientadora, optamos pelo uso da Teoria das Situações Didáticas (TSD) elaborada por Guy Brousseau para o desenvolvimento de alguns conceitos estatísticos e probabilísticos.

A escolha dessa área, probabilidade e estatística, se deu por sua relevância na vida das pessoas e pela prescrição na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que determina as competências gerais e específicas, as habilidades e as aprendizagens essenciais que os alunos devem desenvolver ao longo dos anos iniciais e finais do ensino fundamental e por todo o ensino médio na educação básica.

1.2 JUSTIFICATIVA

Esta seção apresenta as justificativas pela qual se deu o presente estudo, com a presença da educação básica nos documentos oficiais em articulação com os conceitos probabilísticos e estatísticos. Embora os documentos determinam as competências e habilidades essenciais, pesquisas apontam as dificuldades dos alunos em relação à aprendizagem destes conceitos.

1.2.1 Finalidade da Educação Básica e articulação ao aprendizado de conceitos estatísticos e probabilísticos

De acordo com o artigo 22 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação, a Educação Básica tem por finalidade “desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores”. Além disso, “poderá organizar-se em séries anuais, períodos semestrais, ciclos, alternância regular de períodos de estudos, grupos não-seriados, com base na idade, na competência e em outros critérios, ou por forma diversa de organização, sempre que o interesse do processo de aprendizagem assim o recomendar” (BRASIL, 1996).

A preparação para o exercício da cidadania também aparece nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), o primeiro nível de concretização curricular, uma referência nacional comum para o ensino (BRASIL, 1997) , do qual aponta para a necessidade de que:

> A educação possa atuar, decisivamente, no processo de construção da cidadania, tendo como meta o ideal de uma crescente igualdade de direitos entre os cidadãos, baseado nos princípios democráticos (BRASIL, 1997)

Os PCN foram elaborados como proposta do Ministério da Educação (MEC), inicialmente, em 1997 para o ensino fundamental de 1.ª a 4.ª Séries, depois em 1998 de 5.ª a 8.ª Séries, e em 2000 para o Ensino Médio (TEIXEIRA, 2000).

No entanto, diversas opiniões se manifestaram de forma crítica em relação ao processo de elaboração dos PCN. Principalmente, segundo Teixeira (2000), se o documento pretendia ser uma base comum nacional para o ensino fundamental, deveria ter contado com amplo processo de discussão na sua elaboração.

Antes da publicação final do documento, foi elaborada uma Versão Preliminar que deu início ao debate sobre os conteúdos dos PCN. O Parecer da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (ANPEd), sobre essa versão, mostra, conforme Teixeira (2000), uma visão diferente da oferecida pelo MEC com relação ao que teria sido o processo de formulação do documento.

Embora o MEC afirma ter havido participação de especialistas, técnicos e professores, através de pareceres inclusive, a ANPEd reclama da impossibilidade de dar um parecer mais elaborado, em virtude do limitado prazo de que dispôs para uma consulta a seus membros ANPEd (1996).

Falar de currículo escolar (consolidado hoje em documentos oficiais como os PCN) exige uma reconstrução da conexão currículo - política, e isso não ocorre de forma simples, natural ou imediata e sim de um esforço permanente de recontextualização histórica, de reconstrução dos seus laços com os interesses econômicos, políticos e culturais. (SANCHEZ, 2013). Para o autor,

> os verdadeiros fundamentos das políticas de reforma educacional no Brasil não derivam de puras ideias inovadoras no campo da Pedagogia, mas antes constituíram (e ainda constituem) uma estratégia de reforma educacional perfeitamente inserida no amplo processo de reestruturação do capitalismo brasileiro e sua adaptação passiva à lógica de acumulação do capitalismo globalizado (SANCHEZ, 2013).

Em Sanchez (2013), percebe-se a intenção dos PCN, no que se refere a necessidade do desenvolvimento das competências básicas tanto para o exercício da cidadania quanto para o desempenho de atividades profissionais.

Algumas dessas competências presentes no documento, como “capacidade de trabalhar em equipe” , “da disposição para procurar e aceitar críticas” , “ da disposição para o risco” e “da capacidade de pensar múltiplas alternativas para a solução de um problema”, são, na verdade, segundo o autor, exigências empresariais e não um passo na formação ética e científica de um cidadão. Quanto as leituras críticas dos documentos oficiais, Santos (2018) fala da importância e vantagens dos debates, dentre elas, a necessidade de mais autonomia para o professor realizar essas discussões na escola.

Foi a partir da publicação do PCN de 1997, conforme Walichinski *et al.* (2014), que os conteúdos de Estatística, Probabilidade e Combinatória foram inseridos na educação básica. Segundo os autores, diversos trabalhos abordam a necessidade de uma formação estatística e probabilística significativa para que os alunos venham a ter uma melhor condição de atuar na sociedade.

Em 1980, o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), conforme Lester (2007), sugeriu a ampliação de conteúdos da Educação Básica nos Estados Unidos da América como Probabilidade e Estatística, a serem desenvolvidos desde os anos iniciais. Borba *et al.* (2011) afirmam que este documento foi um dos primeiros do continente americano que indicou a Estatística como tópico essencial no Ensino Básico.

Nos anos seguintes, diversos países introduziram a Estatística e Probabilidade como tópicos em seus currículos nacionais no Ensino Fundamental, dentre eles, a Inglaterra e País de Gales pelo *National Curriculum* (DES) Daugherty (1995) e o Brasil pelos PCN (BRASIL,

1997) do qual introduziu um bloco de conteúdos intitulado “Tratamento da Informação” no Ensino Fundamental e “Análise de Dados e Probabilidade” no Ensino Médio, buscando integrar noções de Probabilidade, Estatística e Combinatória (BORBA *et al.*, 2011). Com relação ao bloco “Análise de Dados e Probabilidade” é esperado, segundo o NCTM, que os estudantes desenvolvam habilidades como:

- Formular questões que possam ser respondidas através de coleta, organização, e registro de dados;
- Selecionar e utilizar métodos estatísticos apropriados para a análise de dados;
- Desenvolver e avaliar inferências e predições baseadas em dados;
- Entender e aplicar conceitos básicos de probabilidade.

De acordo com o NCTM essas habilidades poderão ser desenvolvidas a partir de situações familiares e experimentos, através de representações concretas e abstratas. Em relação aos tópicos de probabilidade presente no bloco, os alunos devem desenvolver habilidades como:

- Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científico-tecnológicos ou sociais, compreendendo o significado e a importância da probabilidade como meio de prever resultados;
- Quantificar e fazer previsões em situações aplicadas a diferentes áreas do conhecimento e da vida cotidiana que envolvam o pensamento probabilístico;
- Identificar em diferentes áreas científicas e outras atividades práticas modelos e problemas que recorrem a estatísticas e probabilidades.

Os PCN também ressaltam que o estudo da probabilidade tem por objetivo fazer com que os alunos percebam que através de experimentações e simulações possam perceber a possibilidade de ocorrência de um determinado evento. A tecnologia é apresentada no documento, no entanto, ela não permite mediar uma reflexão crítica e assim, há dificuldades em propor a “autonomia intelectual” e “pensamento crítico” propostos no documento (SANCHEZ, 2013).

Em relação à Estatística, mesmo integrando o currículo, esse ensino ainda não era prioridade na escola se comparado com as demais áreas da matemática e muitas vezes aparecia somente no final dos livros didáticos, fazendo com que muitos professores não mencionassem nas aulas de matemática.

Desta forma, diversas pesquisas foram realizadas envolvendo o ensino e a aprendizagem dos conceitos estatísticos a serem trabalhados na Educação Básica. Dentre os grupos podem ser citados a *International Association for Statistical Education* (IASE); o Grupo de Investigação Latino- Americano de Educação Estatística (GILEE) e o Grupo de Trabalho 12 (GT12) da SBEM [2], esse último formado por pesquisadores brasileiros. Dos pontos em comum desses grupos é o reconhecimento que para maior consolidação da Educação Estatística são necessários mais debates (BORBA *et al.*, 2011).

Assim como nos PCN, as Orientações Curriculares do Ensino Médio (OCEM) afirmam que ao estudar probabilidade e estatística, os estudantes precisam entender conceitos e palavras relacionadas às pesquisas, coleta de dados, incerteza e probabilidade presentes no cotidiano, mas não indicam quais são nem como trabalhar esses conceitos em sala de aula.

Após a implementação dos PCN, recentemente em 2017, veio a última versão do documento que norteia o cenário nacional, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A elaboração da BNCC cumpre uma exigência contida na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, no Plano Nacional de Educação de 2014 e prevista no Artigo 210 da Constituição de 1988. (PEREIRA; RODRIGUES, 2018). O Art. 26 da LDB (Lei n.9.394, de 20 de dezembro de 1996), estabelece que:

> Os currículos da educação infantil, do ensino fundamental e do ensino médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos. (BRASIL, 1996).

O Plano Nacional de Educação (Lei n.13.005, de 25 de junho de 2014), trata da BNCC, como estratégia para cumprimento de algumas metas como:

> Estratégia 7.1 - estabelecer e implantar, mediante pactuação interfederativa, diretrizes pedagógicas para a educação básica e a base nacional comum dos currículos, com direitos e objetivos de aprendizagem e desenvolvimento dos (as) alunos (as) para cada ano do ensino fundamental e médio, respeitada a diversidade regional, estadual e local (RUSSO; AZZI, 2016).

Na Constituição de 1988, o Art. 10 expressa que "Serão fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais."(BRASIL, 1988).

[2] http://http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/

No ano de 2014 é realizada a 2ª Conferência Nacional pela Educação (CONAE), organizada pelo Fórum Nacional de Educação (FNE) que resultou em um documento sobre propostas e reflexões. O documento é um importante referencial para o processo de mobilização para a BNCC.

A análise dos documentos disponíveis no site oficial [3] da BNCC permite a compreensão, segundo o Ministério da Educação (MEC), da trajetória percorrida na construção e publicação da Base em questão. A primeira versão da BNCC ocorre no ano de 2015, disponível para consulta pública até março de 2016. Segundo o MEC, após o recebimento de diversas contribuições de setores interessados uma segunda versão do documento foi publicada e discutida por milhares de professores, através de seminários organizados pelo CONSED (Conselho Nacional de Secretários de Educação) e UNDIME (União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação).

O resultado das contribuições e discussões baseadas nas duas primeiras versões propiciou a elaboração da versão final da BNCC, em 2018, que também foi revista por especialistas e gestores do MEC com base em diversos pareceres críticos recebidos e colocada em consulta pública.

De fato, as reflexões sobre um currículo nacional foram oficializadas no Brasil em 2017, a partir da BNCC, no entanto, autores como Santos (2018) e Silva (2019) apontam, dentre as críticas, que as vozes dos professores da educação básica não foram ouvidas durante o processo de elaboração do documento, embora para o MEC, a sociedade foi amplamente chamada para colaborar com a construção da BNCC. Conforme os autores, as políticas de currículo não devem somente dar voz aos professores, mas devem também ouvi-los, mas não é isso que ocorre:

> as escolas têm sido apenas o espaço de repositório de decisões das políticas públicas curriculares reguladas por um estado avaliador que se utiliza de regulamentos e argumentos para: (a) distribuição de bônus; e, (b) ranqueamento das escolas, com a finalidade de conter os professores rígidos controles, para garantir a efetividade das políticas públicas produzidas em instâncias administrativas que centralizam a educação (SANTOS, 2018).

Para Silva (2019), apesar da BNCC não ser vista como um currículo (listagem de conteúdos) comporta-se como se assim o fosse, pois, em seu título já traz a denominação "curricular"remetendo a ideia de currículo, além também do próprio texto indicar de forma prescritiva o que deve ser trabalhado a partir do documento nas escolas.

De acordo com Santos (2018), promover a equidade na educação, é preciso um currículo diferenciado, multiculturalista pensado pelos professores, pois um documento de caráter

[3] http://basenacionalcomum.mec.gov.br/

normativo e de base nacional não atende as especificidades e diversidade cultural de um país com profundas desigualdades sociais como o Brasil.

Em dezembro de 2017 a parte da BNCC que corresponde à Educação Infantil e Ensino Fundamental foi aprovada pelo Conselho Nacional de Educação e homologada pelo MEC. No entanto, referente ao Ensino Médio, o MEC sentiu a necessidade de mais debates, novas audiências, consultas públicas, mais professores, gestores, especialistas e demais interessados para a construção de uma versão final condizente com a realidade e necessidade do Ensino Médio. Assim, em dezembro de 2018, a versão final da BNCC – Etapa Ensino Médio, foi homologada e o Brasil passou a ter uma base nacional comum curricular para a educação básica.

A BNCC, conforme aponta o site oficial, traz hoje como principal finalidade "ser balizadora da qualidade da educação no País através de estabelecimento de um patamar de aprendizagem e desenvolvimento a que todos os alunos têm direto" (BRASIL, 2018). Ou seja, uma educação igualitária a todos os estudantes da educação básica.

No entanto, conforme Castro *et al.* (2020), já houve outros documentos de orientação curricular, por exemplo, os PCN, em que o grau de detalhamento se aproxima tanto quanto a BNCC coloca hoje. Desde a década de 1990 os PCN já visavam uma formação comum aos alunos do ensino básico:

> A abrangência nacional dos Parâmetros Curriculares Nacionais visa criar condições nas escolas para que se discutam formas de garantir, a toda criança ou jovem brasileiro, o acesso ao conjunto de conhecimentos socialmente elaborados e reconhecidos como necessários para o exercício da cidadania para deles poder usufruir. Se existem diferenças sociais e culturais marcantes, que determinam diferentes necessidades de aprendizagem, existe também aquilo que é comum a todos, que um aluno de qualquer lugar do Brasil, do interior ou do litoral, de uma grande cidade ou da zona rural, deve ter o direito de aprender e esse direito deve ser garantido pelo Estado. (BRASIL, 1998).

.

Assim, essa formação comum trazida pela BNCC não é nada recente e nem uma inovação trazida pelo próprio documento. Com a homologação da BNCC, em 2017, houve algumas mudanças, dentre elas referente as terminologias:

> os antigos eixos temáticos passam a se chamar unidades, os conteúdos foram substituídos por objetos de conhecimentos e os objetivos são agora habilidades (CASTRO *et al.*, 2020).

Cada unidade temática contempla uma gama maior ou menor de objetos de conhecimento, assim como cada objeto de conhecimento se relaciona a um número variável de habilidades (BRASIL, 2018).

Com relação à matemática o documento trouxe cinco unidades temáticas com seus respectivos objetos de conhecimentos, a saber. Números; Álgebra; Geometria; Grandezas, Medidas e Probabilidade; e Estatística, todos desenvolvidos ao longo do ensino fundamental e médio.

No que se refere a unidade temática “Probabilidade e Estatística” o ensino de Estatística passou a ser trabalhado dentro dessa unidade e o de Probabilidade, noções iniciais, passou a ser inserido desde o primeiro ano do Ensino Fundamental.

A BNCC conta com o desenvolvimento de competências que passa pela articulação de várias habilidades de maneira progressiva. Essas habilidades estão relacionadas a diferentes objetos de conhecimento, entendidos como conteúdos, conceitos e processos dos quais estão organizados em unidades temáticas. Assim, a cada ano escolar, em todas as unidades temáticas, a delimitação dos objetos de conhecimento e das habilidades considera que as noções matemáticas são retomadas, ampliadas e aprofundadas.

O Quadro da página 278 do documento oficial da BNCC (BRASIL, 2018), mostra, ano a ano, com relação à unidade temática “Probabilidade e Estatística” os objetos de conhecimento com as respectivas habilidades, nos anos iniciais do Ensino Fundamental. O Quadro mostra também as conexões entre as habilidades dos anos anteriores, bem como os conceitos que são ampliados e retomados ao longo do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

De acordo com a BNCC, com relação à Probabilidade nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, a finalidade é promover a compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos, de forma que os alunos compreendam que há eventos certos, eventos impossíveis e prováveis. O documento mostra que a habilidade em determinar a probabilidade é desenvolvida apenas no 5.º ano do Ensino Fundamental, onde o aluno já terá compreendido os conceitos anteriores

Com relação à Estatística, nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, os primeiros passos envolvem o trabalho com a coleta e a organização de dados de uma pesquisa de interesse dos alunos, de forma que a leitura, a interpretação e a construção de tabelas e gráficos tenham papel essencial. Já em relação aos Anos Finais do mesmo nível da Educação Básica, espera-se que os alunos usem as noções estatísticas anteriormente desenvolvidas para “planejar e construir relatórios de pesquisas estatísticas descritivas, incluindo medidas de tendência central”, além de “construção de tabelas e diversos tipos de gráficos” (BRASIL, 2018).

Em relação ao Ensino Fundamental - Anos Finais, considera-se que as habilidades relativas aos anos anteriores foram desenvolvidas no aluno e que agora, nessa etapa final, seja capaz de desenvolver e aprofundar demais outras habilidades como realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas através de frequência de ocorrências, que saiba diferenciar eventos dependentes e independentes. Uma mudança significativa foi essa abordagem frequentista de probabilidade presente na BNCC, mas não prevista nos PCN.

O Quadro da página 304 do documento oficial da BNCC apresenta, ano a ano, com relação à unidade temática "Probabilidade e Estatística" os objetos de conhecimento com as respectivas habilidades, nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Com relação à Probabilidade, no Ensino Fundamental, o aluno já deve saber estimar a probabilidade de um determinado evento ocorrer, construir espaço amostral de eventos equiprováveis e recorrer ao princípio multiplicativo, da árvore de possibilidades, e de simulações.

No entanto, no Ensino Médio, conforme o Quadro 1, o aluno necessita da mobilização dos conceitos e habilidades já desenvolvidas para a resolução e elaboração de problemas, bem como a utilização de métodos de contagem mais sofisticados para a construção do espaço amostral.

O Quadro 1 apresenta algumas das habilidades, referente à unidade "Probabilidade e Estatística" que serão desenvolvidas nos alunos.

Quadro 1 – Habilidades no Ensino Médio.

(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostra de pesquisas estatísticas
(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade
(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessívos
(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos.
(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (box-plot), de ramos e folhas, entre outros). reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

Fonte:adaptado da Base Nacional Comum Curricular – BNCC

A BNCC indica aliar os problemas de contagem com o intuito do aluno lidar com situações que envolvam a descrição de casos possíveis e diferentes tipos de agrupamentos possibilitando diversas estratégias.

Este trabalho tem por finalidade explorar e desenvolver as habilidades apresentadas no Quadro 1 por meio da elaboração de uma Sequência Didática (SD) baseada na Teoria das Situações Didáticas (TSD) envolvendo alguns conceitos da Probabilidade e Estatística. Cada situação vai requerer certas habilidades referentes à essa unidade temática. Essas situações vão sendo ampliadas e avançadas no grau de dificuldades para proporcionar o aprofundamento e ampliação dos conhecimentos.

Segundo Lopes (2008), para que o ensino da estatística e da probabilidade contribua significativamente é importante que se possibilite aos alunos lidarem com uma variedade de problemas do mundo real e que tenham possibilidades de escolherem suas próprias estratégias para solucioná-las. A pesquisadora também defende, conforme sugere a BNCC, que os conceitos probabilísticos e estatísticos devam ser trabalhados desde os anos iniciais da educação básica de modo a não privá-los de um entendimento dos problemas mais amplo dos problemas que ocorrem em sua realidade.

Para Mendoza e Swit (2015), há a necessidade do ensino de Probabilidade e Estatística ser tratado na escola para ajudar nas tomadas de decisões inerentes às situações da vida social e econômica por meio de análises, comparações, sondagens e escolhas amostrais.

A presente pesquisa envolve um estudo sobre a aprendizagem de alguns conceitos da estatística e da probabilidade em situações de ensino recorrendo à experimentação e simulação. Diversos estudos têm sido realizados e apontam dificuldades dos alunos e também de professores em relação à aprendizagem dos conceitos de probabilidade e estatística, bem como as conexões entre essas áreas.

Considerando a inserção da probabilidade e estatística na BNCC, desde as séries iniciais, as abordagens frequentista e clássica desta unidade temática, bem como a relevância no ensino e aprendizagem, percebe-se a necessidade de pesquisas que busquem analisar propostas de ensino que abordem alguns conceitos.

As dificuldades apresentadas pelos alunos em aprender os conceitos básicos e as dificuldades dos professores em ensiná-los, conforme em Jones e Thornton (2005), foram outro fator importante nessa escolha, inspirando a necessidade de elaborarmos uma Sequência Didática (SD) organizando diversas situações para a sistematização dos conceitos básicos da probabilidade e estatística propostos nesse trabalho.

1.3 OBJETIVO E QUESTÃO DA PESQUISA

Esta dissertação tem por finalidade a elaboração e análise de uma SD, baseada na TSD nas quais o aluno, através da resolução de problemas, poderá compreender e articular, gradativamente, alguns conceitos da Probabilidade e Estatística.

No intuito de alcançar tal objetivo, a proposta é responder à seguinte questão de pesquisa.

Como elaborar uma SD subsidiada na TSD, para abordar alguns conceitos da Probabilidade e Estatística envolvendo problemas experimentais?

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 UMA BREVE REVISÃO DA LITERATURA E AS DIFICULDADES DOS ESTUDANTES NO APRENDIZADO DOS CONCEITOS ESTATÍSTICOS E PROBABILÍSTICOS

A Probabilidade e a Estatística têm ganhado espaço dentre os conteúdos que devem ser ensinados na educação básica, como a Álgebra, a Aritmética e a Geometria. Essa temática tem sido alvo de pesquisas em diversos países devido sua relevância no âmbito social e educacional.

Dentre as pesquisas que envolvem o Ensino de Probabilidade e Estatística na Educação Básica, encontra-se, conforme já citado, o grupo GT12 em que os trabalhos realizados têm sido bem elaborados conforme Meneghetti *et al.* (2011). Pesquisadores desse grupo se reúnem para dialogar sobre suas investigações, refletir sobre as ações antes realizadas e planejar as ações futuras.

De acordo com Sama (2019), em seu estudo sobre os caminhos trilhados pelo GT12 nas pesquisas brasileiras no período 2016 - 2018, foram identificados quatro focos de investigação: currículo e livros didáticos; formação de professores; estratégias didáticas; e processos avaliativos, escalas de atitude e autoeficácia. Em sua análise, identificou a preocupação dos pesquisadores em relação à necessária reflexão sobre o currículo de Matemática da Educação Básica de forma a alcançar os objetivos da aprendizagem dos conceitos de Estatística previstos para este nível de ensino.

Em relação ao foco Processos avaliativos um aspecto avaliado diz respeito à presença de questões com conceitos de Estatística em provas como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM). Segundo Sama (2019) estas:

> apresentam poucas questões com conceitos de Estatística, as quais abordam, sobretudo, interpretação de gráficos e resolução de cálculos e raramente questões envolvendo a variabilidade e a interpretação dos conceitos (SAMA, 2019).

O estudo desses temas, principalmente probabilidade e estatística (foco desse trabalho), conforme Lopes (2008), torna-se indispensável seja atualmente e em tempos futuros, concedendo assim ao ensino de matemática, não somente o domínio dos números, mas também a organização dos dados, leitura de gráficos e análise estatísticas.

Assim, de acordo com a autora, incluir a estocástica apenas como um tópico a mais a ser estudado, enfatizando apenas a parte da estatística descritiva, seus cálculos e fórmulas não levarão o estudante ao desenvolvimento do pensamento probabilístico e estatístico, os quais envolvem desde uma estratégia de resolução de problemas a uma análise sobre os resultados obtidos.

Na década de 1980 já destacavam que a probabilidade e a estatística deveriam ser ensinadas para que todos os indivíduos pudessem dominar conhecimentos básicos dessa temática para atuarem na sociedade (MENDOZA; SWIT, 2015). Hoje, as propostas curriculares de matemática, em diversos países, dedicam atenção especial a esses temas, dos quais enfatizam que o estudo dos mesmos é indispensável para que as pessoas, conforme Lopes (2008), possam analisar índices de custo de vida, escolher amostras e tomar decisões em várias situações do cotidiano. Além disso,

> ao considerarmos o mundo em rápida mudança como o que estamos vivendo, é imprescindível o conhecimento da probabilidade de ocorrência de acontecimentos para agilizarmos a tomada de decisão e fazermos previsões (LOPES, 2008).

Um dos conhecimentos de base para a compreensão do conceito de probabilidade está nos alunos apreender o acaso (imprevisibilidade) de um determinado evento, e da explicitação da experiência aleatória que vai gerar o evento do qual a probabilidade será estudada (CABERLIM, 2015). Coutinho (2001) explicita os elementos que caracterizam um experimento aleatório e que devem ser trabalhados com os alunos:

- Existência de um protocolo experimental, que permite a descrição completa das condições para a realização de um experimento, e consequentemente a sua reprodução com as mesmas condições, ou seja, garantia de reprodutibilidade;
- A identificação da imprevisibilidade, que impossibilita a determinação do resultado final do experimento, ou seja, ação do acaso;
- A descrição com precisão de um conjunto de resultados possíveis do experimento, a partir de um protocolo experimental, ou seja, explicitação do espaço amostral.(COUTINHO, 2001).

Nas escolas, as atividades que envolvem probabilidade devem, de acordo com Bayer *et al.* (2021), iniciar com atividades construtivistas de forma que o estudante tenha interesse e curiosidade na resolução dos problemas propostos os quais envolvem materiais concretos como urnas, moedas, bolas, dados, que são formas eficazes que familiarizam o aluno com questões envolvendo aleatoriedade de um experimento, eventos possíveis, impossíveis, prováveis, muito prováveis, certos.

Coimbra (2021) investigou a aleatoriedade e a natureza probabilística da medida individual através de um jogo de dados de 20 faces, para dois jogadores de caráter competitivo; e outro, colaborativo por equipes, usando moedas, ambos através da resolução de problemas de acordo a TSD. Os resultados da autora mostraram a importância do papel da experimentação em probabilidade, que leva à conclusão de que a formação didática dos professores deve oportunizar situações que evidenciem como realizar a análise didática do conteúdo, não apenas em perspectivas teóricas ou procedimentais, o papel da mediação e da interação são decisivos.

Uma das formas de abordar os conceitos probabilísticos e estatísticos se dá através de uma SD que, conforme Gondim (2013), está intimamente ligada aos PCN, intitulados como "projetos" e "atividades sequenciadas". Diversas pesquisas foram realizadas utilizando as SD no processo ensino e aprendizagem em probabilidade e estatística na educação básica.

No trabalho encontrado em Júnior *et al.* (2013), foi desenvolvido uma SD, aplicada a uma turma do terceiro ano do Ensino Médio em duas escolas estaduais de Minas Gerais, utilizando conceitos da Geometria e a ludicidade do jogo da roleta com o objetivo de possibilitar aos alunos do Ensino Médio uma melhor apreensão dos conceitos básicos da probabilidade. Foi trabalhado o conceito de probabilidade frequentista articulada a conceitos geométricos elementares, como comprimento da circunferência, na chamada "Probabilidade Geométrica".

Para tal, utilizou-se o jogo da roleta para desenvolver nos alunos os conceitos iniciais de probabilidade e para facilitar o seu entendimento. Para os autores, a utilização de jogos em sala de aula pode se tornar uma maneira eficaz de familiarizar o aluno com o mundo probabilístico. Os resultados mostraram que a SD, embora acarrete mais trabalho ao professor, traz contribuições no aprendizado dos conceitos de Probabilidade, os estudantes se envolvem e, com a utilização de jogos, são motivados e seu interesse despertado.

Em Neto (2014), sua dissertação apresenta uma SD, desenvolvida em duas classes do 3.º ano do Ensino Médio, com problemas que relacionam os princípios elementares de Combinatória e Probabilidade aos conceitos básicos de Geometria Plana, Espacial e Analítica com o objetivo principal sugerir aos professores de Matemática uma SD cujo propósito é promover uma revisão geral dos conteúdos. A escolha dos tópicos Combinatória e Probabilidade aplicados em problemas geométricos, como eixos centrais da SD de revisão, foi motivada pela experiência prática desenvolvida, em turmas do 2º ano dessa etapa de ensino.

A avaliação realizada ao final da sequência registrou uma média superior a quase todas as outras avaliações realizadas ao longo de dois anos de trabalho com essas turmas. Segundo o autor, a aplicação desta SD despertou o interesse nos alunos bem como sua participação nas atividades. Perguntas relevantes foram levantadas, algumas falhas de aprendizado foram sanadas e conceitos relacionados a outros tópicos foram assimilados com rapidez incomum.

No trabalho de Ritter e Bulegon (2021), teve por objetivo a elaboração de uma SD, aplicada aos estudantes do segundo ano do Ensino Médio de uma escola de Santa Maria/RS, para construir, nos alunos, noções iniciais de Probabilidade. A SD possui atividades que utilizam jogos e vídeos que podem servir de estratégias para motivar e sensibilizar os alunos como também auxiliá-los a adquirir novos conhecimentos. Um dos jogos utilizado foi “Corrida de Cavalos” onde os alunos apostam nos cavalos que julgam ter mais chance de vencer a corrida.

Para isso, lançam dois dados simultaneamente, sendo que o resultado da soma corresponde ao cavalo que avança uma casa. O objetivo do jogo é fazer com que os alunos reflitam sobre as possibilidades que os cavalos têm de vencer a corrida. Neste trabalho é sugerido que o professor utilize o vídeo quiz “Futebol de domingo” que relaciona a probabilidade de chover em um dia de futebol.

Os resultados mostraram que a SD, explorando vídeos e jogos, evidenciou a compreensão dos alunos nos conceitos de probabilidade. Em relação ao vídeo sugerido, percebeu-se que os estudantes gostaram bastante do mesmo por se tratar de uma situação real de aplicação do conceito de Probabilidade, mostrando-se interessados e prestando atenção no seu conteúdo. Sobre o jogo, os estudantes perceberam que alguns cavalos avançavam mais porque algumas somas tinham mais chance de serem obtidas do que outras.

De acordo Jones e Thornton (2005), diversas pesquisas foram realizadas das quais os pesquisadores analisaram alguns elementos-chave para o currículo de probabilidade, dentre eles: o raciocínio combinatório e resolução de problemas, a percepção de aleatoriedade, equívocos de probabilidade, amostragem, inferência e simulação. Os resultados mostram as dificuldades encontradas pelos estudantes ao lidar com esses conceitos mesmo no ensino superior.

A noção sobre aleatoriedade, aquilo que ocorre ao acaso, de forma imprevisível, segundo Batanero *et al.* (2005), tem sido problemática tanto para professores quanto aos alunos de todas as idades. Em Silva (2021), professores têm apresentado equívocos quanto a aleatoriedade e espaços amostrais. Lopes (2008) já afirmava sobre essas dificuldades procederem da formação desses professores.

Segundo Batanero e Sanchez (2005), o percentual de alunos que reconhecem distribuições aleatórias pareceu diminuir com a idade. Muitos alunos têm raciocinado pela aplicação da heurística de julgamento, isto é, não fazem uso de um raciocínio probabilístico ou de leis de chances segundo os autores.

Conforme Bazerman e Moore (2012), a heurística da representatividade, um tipo de heurística de julgamento é:

> o julgamento por estereótipo, onde as bases do julgamento são modelos mentais de referência. [...] avaliam a probabilidade de ocorrência de um evento através da similaridade da mesma aos seus estereótipos de acontecimentos semelhantes. (BAZERMAN; MOORE, 2012).

Para o autor, em alguns casos quando sob controle, o uso dessa heurística pode ser uma boa aproximação preliminar, porém em outros casos, levam à equívoca. As heurísticas são úteis, mas, por vezes, podem levar a erros severos e sistemáticos (TVERSKY A; KAHNEMANAH, 2018).

De acordo com Jones e Thornton (2005) em uma pesquisa com cerca de 3000 alunos do ensino médio (01 a 16 anos) pesquisadores avaliaram o pensamento dos alunos em relação à alguns conceitos como: representações de aleatoriedade, espaço amostral, diagramas de árvore, eventos compostos e independência. Descobriram-se que os alunos em todos os níveis tiveram problemas de distinção entre distribuições aleatórias e não aleatórias e que eles não apreciavam as características de strings aleatórias.

Concluíram-se também que a maioria dos alunos não haviam atingido o estágio operacional formal de Piaget aos 16 anos e que mesmo a compreensão do jovem de 16 anos sobre aleatoriedade era estritamente limitada.

No que se refere ao conceito de equiprobabilidade, ou, probabilidades iguais a priori, os estudos também constataram que muitos estudantes que usam esse viés julgam os resultados igualmente prováveis quando suas probabilidades não são iguais (BATANERO; SANCHEZ, 2005). Este conceito, conforme Watson (2005), foi retido por pelo menos 50% dos assuntos que o envolvia, independentemente do contexto, histórico ou gênero da pessoa.

Na pesquisa de Watson (2005), pesquisadores fizeram a pergunta “o que é mais provável no lançamento de um dado, 1 ou 6, ou são igualmente provável?”, descobriram que embora 73% dos alunos da 6ª série e 87% dos alunos da 9ª série escolheram corretamente com a mesma probabilidade, muitos desses estudantes não conseguiram fornecer espontaneamente justificativas mais elaboradas (WATSON, 2005).

Com relação ao conceito de amostragem [1] esta não é apenas uma parte fundamental da alfabetização estatística, mas é um elemento chave em desenvolver ideias associadas à inferência estatística [2]. As informações sobre amostragem e pesquisas, aparecem em jornais e na televisão, mas nem sempre são interpretados corretamente, mesmo no ensino médio (PFANNKUCH, 2005).

Conforme Watson (2005) um estudo foi realizado por pesquisadores envolvendo entrevistas de crianças da 6ª série que estudaram probabilidade usando dados. Em um primeiro momento, os estudantes foram solicitados a entrevistarem 50 estudantes (de uma população de 400) para estimar quantos deles visitariam uma cabine divertida em uma feira escolar.

Em um segundo momento eles foram questionados para pesquisar 50 (de 400) alunos para estimar quantos meninos e meninas estavam a escola. Eles descobriram que estudantes foram mais propensos a usarem métodos aleatórios, tais como desenhar os nomes que aparecem em bonés, para estimar o gênero, e usar métodos baseados em inferência, tais como preencher planilhas de forma voluntária ou fazer perguntas a amigos, no caso do estande divertido. Os pesquisadores afirmaram que, ao pesquisar as opiniões de uma população, os alunos têm dificuldades em separar a opinião da pessoa e selecionam com base em uma opinião provável (WATSON, 2005).

Vários autores concordam que a conceituação de probabilidade não se dá de forma única e que existem diferentes abordagens (LOPES; SOUZA, 2016). Conforme Coutinho (2001), o entendimento do conceito de probabilidade pode se dar a partir de duas abordagens: a clássica (Laplaciana) e frequentista. A definição clássica surgiu através da resolução de problemas relacionados aos jogos de azar (BATANERO *et al.*, 2021). A definição atualmente e adotada nas escolas é:

> uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis (BATANERO *et al.*, 2021).

De acordo com Batanero *et al.* (2021) esta definição foi considerada circular desde a sua publicação, pois incluiu o termo "equiprovável"; além disso, ele só pode ser aplicado a experimentos com um número finito de possibilidades, negligenciando um grande campo de

[1] é o ato de analisar uma parte do evento observado com o intuito de saber como a população se comporta, sem necessariamente analisar a população como um todo. A versão atual pode ser encontrada no endereço https://pet-estatistica.github.io/site/download/posts/postJEOVA.html

[2] um ramo da Estatística cuja meta é fazer afirmações a partir de um conjunto de valores representativo (amostra) sobre um universo (população). A versão atual pode ser encontrada no endereço https://pt.wikipedia.org/wiki/Infer%C3%AAncia_estat%C3%ADstica

aplicações onde essas suposições não são válidas. Por exemplo, para um dado, a chance de sair o número 1 é $1/6$, onde o numerador 1 representa a quantidade de casos favoráveis e o 6 o número de casos possíveis.

A abordagem frequentista surgiu nos estudos de tabela de vida no Reino Unido, onde a coleta e análise abundantes de dados mostraram uma estabilização ao longo do tempo de cada evento para a frequência relativa (frequência que um determinado dado tem em relação ao todo) (BATANERO *et al.*, 2021). Nesta abordagem, por exemplo, se em muitos lançamentos de uma moeda a frequência de caras observadas se aproximar de 1/2, então a probabilidade da sair cara em um próximo lançamento será de 1/2.

Coube a Jacques Bernoulli a obtenção da probabilidade sob a abordagem frequentista. Ele deixou de lado os problemas relacionados aos jogos de azar destacando problemas na determinação de probabilidade através da simples contagem. E assim,

> J. Bernoulli propõe a determinação a posteriori da probabilidade de um evento esperado, após observação de um grande número de experiências semelhantes. Para esta determinação seria suficiente, segundo Bernoulli, estimar a probabilidade deste evento pela frequência estabilizada, observada experimentalmente (QUEIROZ, 2007).

Segundo Santana (2020), Bernoulli apresentou ao mundo um de seus principais trabalhos relacionados à Teoria da Probabilidade, a lei dos grandes números, na qual afirma que a probabilidade de ocorrência de um acontecimento A, de uma experiência aleatória, é associada à frequência relativa com que esse acontecimento é observado.

De acordo com Batanero *et al.* (2021), existem poucos estudos que analisam especificamente a relação entre as abordagens clássica e frequentista, embora em algumas pesquisas os autores tenham trabalhado essa ligação com pequenas amostras nas escolas.

Em um estudo encontrado em Batanero *et al.* (2021) foi analisado a compreensão de 130 futuros professores em relação à abordagem frequentista. Os resultados mostraram uma elevada proporção em que estes esperavam a convergência da frequência relativa para a probabilidade em pequenas amostras, ou seja, um raciocínio por meio da heurística de representatividade.

Outras dificuldades encontradas foram a incapacidades de futuros professores em estimar a composição de uma urna de Bernoulli [3] por interpretarem erroneamente a variabilidade da

[3] uma urna que contém bolas supostamente perfeitas, idênticas, com mesma possibilidade de serem sorteadas num sorteio aleatório. Serve para representar abstratamente uma experiência aleatória a duas saídas possíveis: sucesso (bolas brancas) ou fracasso (bolas pretas).Coutinho (2001)

amostragem ou demonstrarem o viés de equiprobabilidade, deixando de conectar as abordagens clássicas e frequentistas de probabilidade.

Já no trabalho de Rodrigues (2007), utilizou-se a urna de Bernoulli com um modelo fundamental no ensino de Probabilidade. Para a representação concreta da urna foi usada uma atividade denominada “Garrafa de Brousseau” [4]. que integrou uma sequência de ensino embasada na TSD de Guy Brousseau. Os resultados mostraram que o conceito de probabilidade por um modelo frequentista já estava sendo utilizada pelos alunos já na fase de validação da TSD, o que facilitou a situação de institucionalização por parte do professor.

As inferências, representações e interpretações que os alunos fazem em situações probabilísticas que envolvem a definição clássica e a abordagem frequêntista é influenciada, segundo Sanchez e Valdez (2017) com as ideias de aleatoriedade, variabilidade e independência. Para os autores, esses conceitos são cruciais no desenvolvimento do raciocínio probabilístico. Os níveis de raciocínio sobre a variabilidade, caracterizados em seus estudos, têm sido consistentes com alguns dos equívocos sobre este conceito em situações estatísticas já identificadas na literatura. A aplicação da heurística de representatividade também tem contribuído para o não favorecimento da independência.

Conforme Tarr e Lannin (2005), um estudo em relação ao pensamento dos alunos do ensino médio sobre a independência foi realizado com 618 alunos de 4ª à 8ª séries. Neste, foram pedido aos alunos que determinassem qual evento era mais provável: obter três "caras"jogando uma moeda três vezes ou jogando três moedas simultaneamente. 38% dos alunos do quarto ano e 30% do quinto ano do ensino fundamental, sem instrução prévia em probabilidade, responderam que as probabilidades não eram iguais.

Os alunos em cada nível de ensino acreditaram que a probabilidade de obter de três caras, jogando uma única moeda três vezes, era mais alta. Baseado em entrevistas de acompanhamento, foram descobertos que os alunos abrigavam uma crença generalizada de que os resultados de um lançamento de moeda podem ser controlados pelo Individuo. Os pesquisadores concluíram que tal crença é incompatível com a noção de independência, visto que a probabilidade de obter uma vantagem em cada tentativa permanece constante, isto é, 50%.

Equívocos semelhantes foram evidenciados na Avaliação Nacional dos EUA de Progresso Educacional em Matemática. Conforme Tarr e Lannin (2005) os alunos deveriam declarar

[4] é uma experiência concreta da urna de Bernoulli com o objetivo de transpor alguns obstáculos por ele observados com relação à urna de Bernoulli, como por exemplo, a possibilidade do aluno querer contar as bolas, coisa que é possível na urna, mas que é impossível na garrafa (RODRIGUES, 2007)

o resultado mais provável no próximo lance de uma moeda justa que obteve “CCCC” em quatro tentativas sucessivas. Os resultados indicaram que apenas 47% dos alunos da sétima série selecionaram a alternativa correta: cara e coroa são igualmente prováveis. Em outro estudo, usando a mesma situação, foi descoberto que apenas 70% dos alunos de graduação em um curso de Matemática responderam corretamente.

Conforme Watson (2005), uma pesquisa foi realizada sobre a variabilidade em vários experimentos aleatórios . Foi pedido aos alunos da 5.ª, 7.ª e 9.ª séries para prever a frequência dos seis resultados possíveis quando um dado é lançado 60 vezes e para explicarem porque os valores foram escolhidos.

Nas diferentes séries houve uma pequena alteração entre 16% e 23% de estudantes capazes de fornecerem uma variação apropriada em suas estimativas, uma explicação que mencionasse essa variabilidade, ou as duas coisas. Após os testes enfatizarem uma variação na chance de ocorrência e nos dados obtidos, os estudantes da 7ª e 9ª séries tiveram um melhor desempenho e explicação que incluía menção de variação, ou ambos. Depois das aulas enfatizando a variação no acaso e dados, o desempenho desses alunos melhoraram (WATSON, 2005).

Embora os alunos provavelmente reconhecem que o mesmo resultado não ocorre toda vez que uma moeda ou dado é lançado, eles possuem pouca bagagem, na visão de Watson (2005), para descrever a variação real que existe ao longo de muitas tentativas (abordagem frequentista). Portanto, diz o autor, pedir para estudantes criarem um conjunto de sequência de 50 lançamentos de moedas não é provável que mostre que os estudantes entendem a variação que ocorre entre muitos conjuntos de 50 lançamentos de moedas.

Muitos alunos, de acordo com Watson (2005), escolhem o número provável de resultados “bem-sucedidos” (perto de 25 caras) ao determinar uma sequência de 50 resultados, o que não é surpreendente pelo seu conhecimento em probabilidade. Para ter uma ideia melhor da compreensão dos alunos, perguntas sobre a distribuição de tentativas de 50 lançamentos de moeda por cada um dos 50 alunos hipotéticos, devem ser questionados.

Para um bom entendimento das características e diferenças entre as abordagens clássica e frequentista bem como a relação entre si, Batanero *et al.* (2021) aponta tal compreensão requer o conhecimento da Lei dos Grandes Números como também ideias de estocásticas fundamentais de aleatoriedade, variabilidade e independência.

Outro aspecto fundamental que pode contribuir na compreensão da aleatoriedade e da estabilização de frequências, de acordo com Coutinho *et al.* (2020), é o uso das simulações computacionais (simulação)[5]. Essas proporcionam a oportunidade de observação para amostras maiores e envolvem um número suficientemente grande de repetições do experimento aleatório em problemas experimentais de probabilidade, o que nem sempre é possível em ambientes escolares tradicionais. Além disso, a simulação, conforme Pfannkuch (2005), facilita o entendimento e a compreensão dos alunos da complementaridade das abordagens clássicas e frequentistas de probabilidades.

Embora o uso da simulação favoreça o ensino de probabilidade e estatística pode ocorrer algumas dificuldades por parte dos alunos dependendo do tipo de *software* que se usa. Na pesquisa realizada por, Batanero e Sanchez (2005), sobre o raciocínio e as crenças de nove estudantes do Ensino Médio, a meta era identificar como os alunos percebem as diferentes etapas do processo de simulação. Os alunos tinham que compreender que o gerador de probabilidade na simulação deveria corresponder a probabilidade dos resultados dados no problema real.

Segundo os autores, houve dificuldades na utilização de um *software* que simulava uma urna de Bernoulli, pelo fato dos alunos não terem familiaridade com a ferramenta. De forma geral, os alunos pareceram aprender a probabilidade e gostaram da atividade sugerida.

2.2 A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A teoria das situações didáticas (TSD) foi desenvolvida pelo pesquisador francês Guy Brousseau que permite trabalhar uma interação entre o aprendiz, o saber e o *milieu*. Conforme Almouloud (2007), a teoria tem por finalidade caracterizar um processo de aprendizagem por uma série de situações reprodutíveis, conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos dos alunos. Essa modificação, para o autor, é característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos, da presença de uma aprendizagem significativa.

Segundo Brousseau (2006), os conhecimentos são aquilo que um ser humano coloca mentalmente em funcionamento quando reage em circunstâncias precisas. Uma parte desses conhecimentos pode ser reformulada e traduzida como saber.

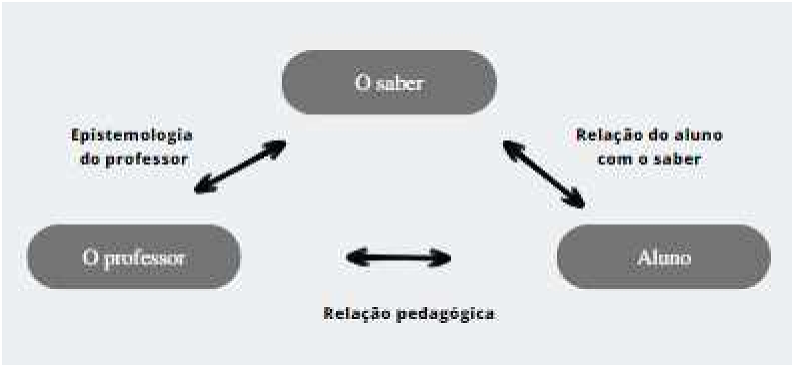
> Os saberes são formas culturais de conhecimentos que permitem a identificação, a expressão e a institucionalização dos conhecimentos espontâneos (BROUSSEAU, 2006)

A TSD tem como objeto central de estudo a situação didática na qual são identificadas

[5] um processo artificial de representar um fenômeno aleatório. A versão atual do *p*ode ser encontrada no endereço http://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=616&Itemid=1919&lang=pt

as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber, conforme a Figura 1.

Figura 1 – Relação entre professor, aluno e saber.



Fonte: adaptado de Almouloud (2007)

O papel do professor é fundamental, pois ele será o responsável por criar situações que provocarão nos alunos o interesse e, consequentemente, a aprendizagem. É importante que essas situações seja aceite pelos alunos de forma que eles venham agir, interagir, refletir sobre elas.

Neste contexto, conforme Brousseau (2006), o *milieu* se torna parte importante do processo, pois é o meio pelo qual o aluno vai interagir para a obtenção de novos saberes. Este *milieu* pode ser considerado como sendo um ambiente criado pelo próprio professor de forma que tenha o controle para produzir uma aprendizagem, ele é dinâmico e pode ir modificando a medida que o professor faz perguntas e questionamentos.

De acordo com Almouloud (2007), a TSD apoia-se em três hipóteses: A primeira infere que o aluno aprende adaptando-se a um *milieu* que é fator de desequilíbrio, contradições e dificuldades. Esse saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se pelas novas respostas, o que prova a aprendizagem. A segunda supõe que o *milieu* não munido de intenções didáticas, torna insuficiente para a aquisição de conhecimentos matemáticos.

Desta forma, para que haja a intencionalidade didática, o professor deve criar e organizar um *milieu* que desenvolverá situações suscetíveis que provocará aprendizagens. A terceira compreende que esse *milieu* e essas situações devem engajar os saberes matemáticos envolvidos no processo de ensino e aprendizagens.

Além disso, quando os alunos exploram o *milieu* sem a interferência do professor, tem-se uma situação adidática, uma parte essencial da situação didática. Nesta, conforme Almouloud (2007), a intenção de ensinar não é revelada aos alunos, mas imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar condições favoráveis ao novo saber que deseja ensinar.

Conforme Bittar (2017a), na situação adidática, as ações dos alunos não são motivadas pelo desejo de satisfazer a uma expectativa do professor, mas pelo desejo genuíno de resolver o desafio/problema posto pela situação. Assim, o aluno realiza investigações e é plenamente corresponsável pela construção do seu conhecimento.

De acordo com Nunes e Nunes (2019), a TSD concebe um modelo que analisa o processo de ensino e aprendizagem, bem como construir Sequências Didáticas. Tal modelo, decompõe-se em situações que potencializam um processo de investigação em sala de aula. Nestas situações, conforme Brousseau (2008), observa-se cinco fases: devolução, ação, formulação, validação e institucionalização.

A primeira fase, devolução, é o ponto de partida, o momento em que o professor apresenta o problema e explica as regras para resolvê-lo. É o ato pelo qual o professor faz com que o aluno aceite a responsabilidade de uma situação adidática de aprendizagem (BROUSSEAU, 2008). No entanto, conforme Bittar (2017b), ao aceitar a situação, o aluno deve ter condições de começar a pensar uma estratégia de resolução, caso contrário abandonará imediatamente o problema e assim, "sairá" da situação.

> a atividade proposta deve ser tal que o aluno consiga começar a tentar resolvê-la, mas não consiga fazê-lo de imediato: o problema deve exigir, para sua resolução, o conhecimento a ser construído pelo aluno. O papel do pesquisador (ou do professor) ao longo do trabalho dos alunos deve ser de mediador. (BITTAR, 2017b).

A segunda fase é a ação, modelo implícito em que o aluno toma suas decisões sem ter consciência delas, ou seja, um modo operacional de seu conhecimento. Nesta fase, de acordo com Azevedo (2008), o aluno não precisa identificar, explicitar ou explicar o conhecimento, mas exprime suas escolhas e decisões pelas ações sobre o meio, sem qualquer código linguístico.

Na terceira fase, formulação, os alunos vão apresentar o que fizeram na fase anterior. Requer repertórios linguísticos para formular uma informação ou um debate, ou seja, quando, na resolução do problema, o aluno utiliza-se de um esquema de natureza mais teórica e um raciocínio mais elaborado. A quarta fase é a validação, em que os alunos vão testar suas estratégias contra o meio, isto é, verificarão se suas hipóteses são viáveis ou não, aqui a responsabilidade continua do aluno.

Por fim, a quinta fase é a institucionalização que conforme Rodrigues (2007), é a fase em que o professor formaliza o conhecimento a ser ensinado. Nesta, o professor interfere diretamente visando estabelecer um caráter de universalidade e objetividade do conhecimento. O docente organiza a aprendizagem e avalia as produções dos alunos identificando o que foi aprendido e o que precisa ser retomado, de modo a ampliar o conhecimento construído. Desta forma, o conhecimento novo produzido pelo aluno torna-se socialmente aceito (NUNES; NUNES, 2019)

De acordo com Nunes e Nunes (2019) as fases ação, formulação e validação são consideradas como situação adidática enquanto as fases devolução e institucionalização situação didática. Conforme Teixeira e Passos (2013), o foco da TSD deve privilegiar os procedimentos adotados nas situações de devolução, de ação, de formulação, de validação e de institucionalização. Assim, o professor, obedecendo aos procedimentos, não fornece, ele mesmo, a resposta, o que faz com que o aluno participe efetivamente da elaboração da cognição. Desta maneira, conforme o autor, o aluno poderá desenvolver novos saberes com base em suas experiências pessoais, com sua própria interação com o meio.

3 METODOLOGIA E PRÉ-ANÁLISE DAS ATIVIDADES DA SD

3.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

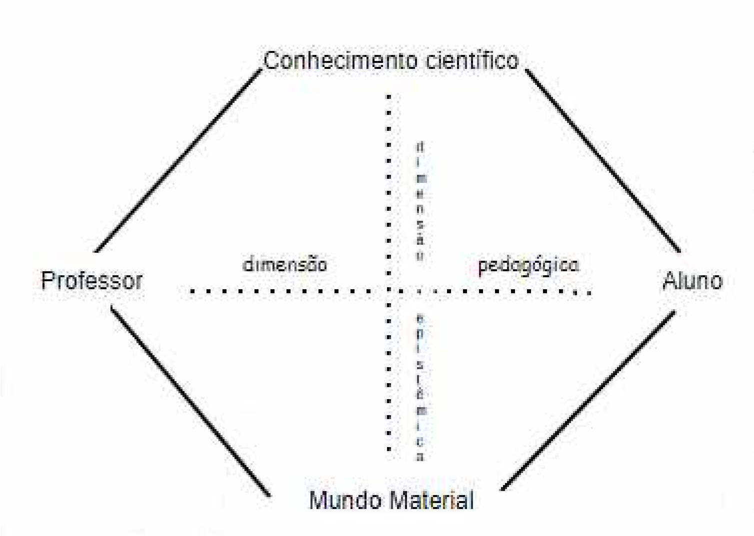
Buscando desenvolver alguns conceitos da probabilidade e estatística, foi elaborada uma sequência didática (SD) baseada em um processo interativo de desenho e implementação em conformidade a uma linha de pesquisa chamada Pesquisa Baseada em *Design* e, a sub-linha conhecida como Sequência de Ensino-Aprendizagem (SEA).

Segundo Cavalcanti *et al.* (2018), a SD é compreendida como planejamento de ensino elaborados por etapas, considerando os aspectos pedagógicos relativos ao ensino e aprendizagem, podendo ser uma maneira de minimizar a fragmentação de conteúdos. Desta forma, o desenho da SD na perspectiva de incorporar a pesquisa em ensino pretende transcender o ensino transmissivo, centrado no professor.

O termo SD foi introduzido nos anos 2000, denotando a relação entre os conhecimentos epistemológico e pedagógico, tendo como uma característica a elaboração de uma sequência orientada nas dificuldades de ensino e aprendizagem relatadas na literatura, em confronto com a realidade local da sala de aula (MEHEUT; PSILLOS, 2004).

Do ponto de vista de Meheut e Psillos (2004), algumas abordagens podem ser adotadas no planejamento da SD e, assim, propõe um modelo, figura 2, chamado Losango didático que define quatro elementos básicos: professor, aluno, mundo material e conhecimento científico que se relacionam entre si. Observa-se neste modelo o envolvimento de duas dimensões da qual a SD estará envolvida: a dimensão epistêmica e a dimensão pedagógica.

Figura 2 – Losango didático.



Fonte: adaptado de meheut (2005)

Na dimensão epistêmica, de acordo com Kneubil e Pietrocola (2017), são relacionados os conteúdos científicos da SD, os problemas oriundos do mundo material que fundamentaram a prática científica e o contexto histórico. Considera ainda os processos de elaboração, os métodos e a validação do conhecimento científico e sua significação com o mundo real.

Na dimensão pedagógica é considerado os aspectos relacionados ao papel do professor, às interações entre professor-aluno e aluno-aluno, bem como às restrições do próprio funcionamento da instituição de ensino através programas, cronogramas, dentre outros (KNEUBIL; PIETROCOLA, 2017).

Os autores enfatizam que no processo de *design* várias questões emergem sobre as situações de ensino-aprendizagem. Essas questões são importantes, pois motivam a pesquisa e geram resultados que fazem parte de conhecimentos pertencentes à dimensão didática.

3.2 PESQUISA BASEADA EM DESIGN

As pesquisas baseadas em *design*, de acordo com Kneubil e Pietrocola (2017), são uma tendência que surgiu na década de 1990, para o desenvolvimento de uma metodologia intervencionista. Segundo Costa e Poloni (2011), embora não tenham sido propostas para analisar especificamente o conhecimento matemático, foram aplicadas também para esse fim.

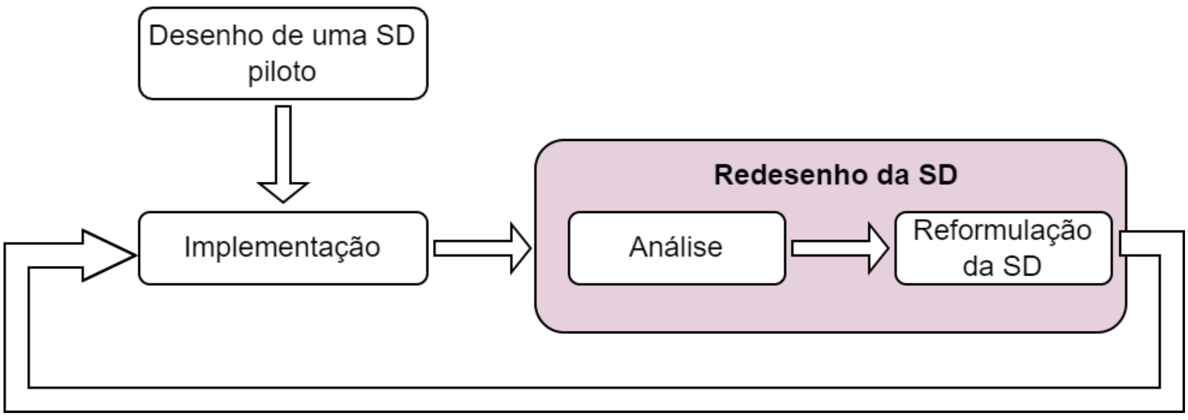
A pesquisa baseada em *design* é definida como uma metodologia de pesquisa capaz de associar a perspectiva teórica às aplicações educacionais práticas, sendo uma metodologia importante para a compreensão de como, quando e por que inovações educacionais funcionam (ou não) na prática (DBR-COLLECTIVE, 2003). Kneubil e Pietrocola (2017) apontam que a pesquisa baseada em *design* pode ser uma espécie de teoria sobre a metodologia, e organiza de maneira coerente o processo de levar à sala de aula uma inovação curricular e/ou pedagógica.

Sendo uma teoria sobre a metodologia, a pesquisa baseada em *design* presume uma análise tanto sobre o processo quanto o produto final (KNEUBIL; PIETROCOLA, 2017). Escolher essa linha para o desenvolvimento de algum produto, neste caso a SD, significou aprender sobre o processo e produzir, simultânea e consequentemente, o conhecimento.

Um conjunto de pesquisas na área de ensino de ciências, conforme Pessanha e Pietrocola (2016), tomou esta linha teórico-metodológica de modo a planejar, aplicar e avaliar as SD visando o ensino-aprendizagem de tópicos específicos. Os conjuntos de atividades desenvolvidos foram chamados de SEA (MEHEUT; PSILLOS, 2004) . Concordamos com Cavalcanti *et al.* (2018), quando os autores definem que a SEA é uma escolha teórica para a elaboração de sequências didáticas segundo a qual uma SD deve ser constituída por atividades que enfatizem a integração entre o currículo, o desenvolvimento de habilidades e a construção de conhecimentos dos alunos, de modo a aperfeiçoar o processo de ensino e aprendizagem.

Para Pessanha (2014), um ponto em comum entre alguns dos estudos nas linhas pesquisas baseadas em *design* e os estudos em SEA, é o fato de envolverem um processo interativo em que há uma SD bem definida, cujas etapas se sucedem de forma cíclica com o propósito de alcançar uma estabilidade condizente com os objetivos de aprendizagem que se pretende e com os resultados de investigação. Na Figura 3 é mostrada essa interação de desenho e implementação de SD.

Figura 3 – Representação do processo interativo entre o desenho e a implementação de SD.



Fonte: adaptado de Pessanha (2014)

Como podemos observar na Figura 3, uma SD é inicialmente desenhada, gerando uma versão piloto a ser implementada com os alunos. Após essa implementação, com base nos resultados de aprendizagem observados, uma análise é realizada e, essa etapa terá implicações que levarão à reformulação da SD. A sequência, uma vez reformulada, seguirá o processo cíclico de (re)implementações e redesenhos (PESSANHA, 2014).

Esse processo interativo permite o estudo sobre os processos e vai ao encontro de algumas das intenções desta pesquisa sobre o ensino e aprendizagem de conceitos probabilísticos e estatísticos. O presente trabalho envolveu o desenho, implementações e reformulações de uma SD, com a profundidade que as contingências que nosso contexto de aplicação permitiu.

3.3 INTERVENÇÃO

Este trabalho teve como ambiente uma escola pública do município de Três Ranchos, no estado de Goiás. Contou com a participação de 16 alunos, 7 do sexo feminino e 9 do sexo masculino. A sequência se estendeu ao longo de um bimestre letivo de uma turma regular de terceiro ano do Ensino Médio. Os procedimentos de ética em pesquisa foram cuidadosamente respeitados, o termo de consentimento, assinado pelos responsáveis, consta no Apêndice A.

O enfoque desta pesquisa é qualitativo. De acordo com Bogdan e Biklen (1994), nesse enfoque, os dados coletados através de registros escritos solicitados aos alunos e gravações em áudio e vídeo são analisados em toda sua riqueza. Neste trabalho, foram coletados áudios e os registros escritos pelos alunos, seus esquemas e representações que por meio da TSD foi elaborado a SD.

3.4 ELABORAÇÃO DA PROPOSTA DE INTERVENÇÃO

A proposta foi desenvolvida a partir do tema abordado, baseada na TSD e na metodologia em *design* na qual associa teoria e aplicações educacionais práticas. Inicialmente um estudo piloto foi implementado, abordando somente a situação das moedas físicas pelo fato da pandemia do (Covid-19) e também pelo intuito de testarmos o experimento e as ferramentas de modo a antever os resultados, como seria as fases da TSD nessa situação e o que poderia ser melhorado e aprimorado.

O objetivo era, nesta mesma turma, dar continuidade com as demais situações no ano seguinte, no entanto, o contrato com a instituição foi encerrado. Desta forma, a proposta deste trabalho foi iniciada e concluída em outra turma de outra escola da região.

Os registros do estudo piloto ajudaram na construção da SD e contribuíram nas pré

- análises da SD final que consta no capítulo de resultados. Na SD final, perguntas centrais foram adicionadas e direcionadas para averiguação do desenvolvimento ao longo do processo e maior aprendizado dos conceitos envolvidos, frente às fases da TSD. Por fim, um questionário foi aplicado com intenção de verificarmos o aprendizado dos conceitos envolvidos na SD. A proposta foi estruturada em 5 encontros, integralizando 09 aulas de 50 minutos. Cada um deles é composto de uma situação que perpassa as fases da TSD.

4 RESULTADOS

Este capítulo apresenta os resultados desta pesquisa com as análises e discussões da qual se produziu a SD, o questionário e o produto final deste trabalho. Para tanto, foi dividido em quatro seções: A seção 4.1 apresenta resumidamente o Produto Final. A seção 4.2, o estudo piloto com os resultados referente a uma única situação, do lançamento das moedas. A seção 4.3, a análise a *priori* das situações embasadas na TSD e a seção 4.4, a análise do estudo final.

4.1 PRODUTO FINAL

Procurando alcançar o objetivo deste trabalho, como também responder à questão da pesquisa, foi elaborado uma SD, composta por 4 atividades, organizadas no produto educacional intitulado *Ensino de Probabilidade e Estatística através de Experimentos*[1] que perpassam as fases da TSD. Não foi possível, devido ao tempo, as (re)implementações e redesenho da SD, ficando assim, para um próximo momento, aprimorá-lo.

4.2 ESTUDO PILOTO

Nesta seção, são apresentados os resultados referentes à aplicação da Situação 1, ocorrida em dezembro de 2021, junto a 24 alunos das turmas de segundo ano do Ensino Médio em uma escola pública do Estado de Goiás. Vale observar que os alunos já haviam vivenciado um contato com o cálculo de probabilidades anteriormente.

Para a realização da situação (T1), a turma foi dividida em 5 grupos, a critério dos alunos. O experimento foi realizado em uma única aula e repetido 3 vezes. A fase de devolução da TSD é a proposição das tarefas, em forma de pergunta. Antes de iniciar a execução prática, a discussão com o conjunto dos estudantes foi desencadeada pelo professor, perguntando a previsão do que sairia (quantas caras e coroas). Algumas respostas foram *"meio a meio"*, como também *"50 caras e 50 coroas"*. enquanto outras como:

> *Ep4: eu não sei, mas acho que vai sair mais caras.*

Após realizado o primeiro lançamento, os alunos notaram que o resultado não saiu conforme acreditavam. O pesquisador pediu para que alguém dos grupos fizesse os registros em

[1] Este produto está disponível na plataforma educapes, http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/736478

uma folha de papel para cada lançamento. Ao repetir o experimento, alguns ainda acreditavam que dessa vez sairia "meio a meio", resultado também observado por Caberlim (2015), já outros afirmaram que tanto poderia sair ou não.

Ao serem indagados pelo professor sobre a repetição do experimento e a obtenção dos mesmos resultados (ou, a não-obtenção de 50% de caras), um aluno insiste:

> *Ep2: depende, se eu jogar forte para cima pode ser que saia meio a meio.*

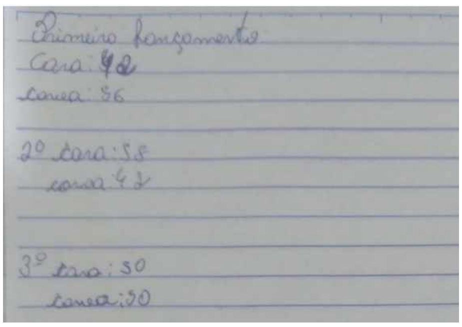
Isto confirma a heurística de julgamento, onde os alunos não usam um raciocínio probabilístico. Neste momento, o pesquisador pediu então que o próprio aluno jogasse da forma como queria para que pudesse observar a aleatoriedade.

O resultado, no segundo lançamento, mostrou 42 caras e 58 coroas, que diferiu do primeiro lançamento. Após a realização do segundo lançamento das moedas, o pesquisador compartilhou os resultados dos demais grupos, proporcionando assim uma interação entre professor-aluno e aluno-aluno, que são aspectos da dimensão pedagógica do losango didático. Nesta interação foi possível observar em alguns alunos, fase da formulação, argumentos mais bem elaborados para um próximo lançamento, por exemplo, a afirmação de uma aluna:

> *Ep3: nem sempre vai dar meio a meio, pode sair cara, mas também pode sair coroa.*

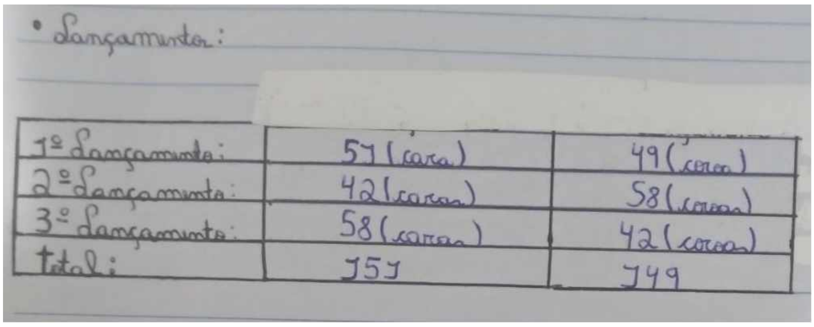
A fase de validação esteve presente no momento em que os alunos compararam os resultados diferentes entre os grupos, bem como a forma com que cada um registrou os dados, confirmando suas hipóteses. Dos cinco grupos, três utilizaram tabelas para representar os dados, enquanto os demais recorreram a outras representações como na Figura 4. Esse tipo de anotação não esquemática, dificultou a visualização dos dados e sua associação aos conceitos como a variabilidade, aleatoriedade e a aproximação das abordagens clássica e frequentista.

Figura 4 – Representação dos dados pelos alunos.



Fonte: o autor

Figura 5 – Representação dos dados em forma de tabela.


• Lançamentos:

1º lançamento:	51 (cara)	49 (coroa)
2º lançamento:	42 (caras)	58 (coroas)
3º lançamento:	58 (caras)	42 (coroas)
total:	151	149

Fonte: o autor

A Figura 5 mostra a organização dos dados através de uma tabela feita por um dos grupos, o que facilitou na compreensão da aleatoriedade e variabilidade após os três lançamentos das moedas. A forma com que os alunos organizaram os dados, conforme mostrado na Figura 5, possibilitou registrar também, por eles mesmos, ainda que não tenha sido pedido, a soma dos números de caras e coroas, permitindo assim a visualização da aproximação entre as quantidades, porém não explícito por parte dos alunos.

Na fase da institucionalização o professor reuniu as ideias dos alunos, explicando sobre o conceito de aleatoriedade no lançamento das moedas, que torcer para sair uma quantidade de "caras" ou "coroas", não influencia nos resultados, o que foi comprovado pelos registros e dados coletados pelos próprios alunos. Foi frisado também a importância de repetir muitas vezes o experimento para melhor clareza e para a compreensão da probabilidade frequentista.

Quanto ao lançamento de uma moeda honesta, não havia dúvidas nos alunos quanto ao conceito de equiprobabilidade, no entanto, em relação às 100 moedas lançadas simultaneamente, eles não a afirmaram de imediato. Na medida em que se repetia o experimento, e os dados eram coletados, houve a percepção desse conceito após o cálculo das médias.

Após as três repetições do experimento o pesquisador indagou os alunos sobre o que ocorreria, com as quantidades de faces da moeda, se eles continuassem a repetir o experimento. Alguns disseram "não tem como saber exato se vai sair mais caras ou coroas", indicando assim a percepção do fenômeno aleatório e da imprevisibilidade que é um dos conhecimentos básicos que Caberlim (2015) afirma para a compreensão do conceito de probabilidade. Outra aluna respondeu:

> *Ep1:Eu acho que vai aproximando da metade, mas que tem hora que vai dar meio a meio.*

Indicando assim uma percepção da conexão entre a abordagem clássica e frequentista.

Os resultados aqui apresentados são preliminares, em relação a uma única situação, devido o tempo e as condições que todos se encontravam no período da pandemia.

4.3 ANÁLISE A *PRIORI* DAS SITUAÇÕES DA SD

Esta seção apresenta uma análise a *priori* das situações da SD que se passam pelas fases da TSD.

No desenvolvimento deste trabalho, foi elaborada uma SD baseada em diversas atividades das quais cada uma passou pelas fases da TSD. O Quadro 2 mostra estas atividades.

Quadro 2 – Situações seguindo as fases da TSD.

Situações	Atividades
Situação 1 (lançar moedas)	A11. Ao lançar 82 moedas de 10 centavos simultaneamente sob um piso, quantas "caras"e "coroas"sairão? Repita o experimento ao menos três vezes e registre os dados em uma tabela. A12. Ao lançar uma moeda 1000 vezes em um software de simulação, quantas"caras"e "coroas"sairão? Repita o experimento dez vezes e registre os dados em uma tabela
Situação 2 (urna de Bernoulli)	A2. Um saco opaco contém 30 bolinhas nas cores brancas e amarelas. Retire 5 bolinhas deste saco, sem constatar a cor, coloque dentro de uma garrafa fechando o gargalo com material transparente. Ao entornar a garrafa, uma tampinha aparece e a cor pode ser observada e anotada em uma tabela. Assim, qual a proporção do número de bolinhas brancas e amarelas na garrafa? Qual é a chance de sair uma bolinha branca no gargalo da garrafa? E de uma bolinha amarela?
Situação 3 (proporção de alunos)	A3. Qual a proporção de meninos e meninas de uma determinada sala de aula de seu colégio? Para fazer isso, anote o número de meninos e meninas entre os 5 alunos que saem (ou entrem) da sala após a sirene da escola. Repita o experimento 3 vezes. Esse experimento é equivalente ao da atividade da urna? Justifique!
Situação 4 (Tarefas)	A4. Lista de Atividades

Fonte: o autor

Conforme o Quadro 2, em cada situação é feita uma pergunta de forma explícita aos alunos. Esse momento, em que o professor apresenta o problema, as regras, a pergunta, é a fase de devolução. É um momento em que os alunos se envolverão entre si, com o professor, com o problema, os elementos que compõem o Losango didático.

Na Situação 1, o experimento da primeira atividade (A11) será com moedas físicas, enquanto na atividade (A12), com moedas virtuais por meio do *software* [2] de simulação do qual mostrará a lei dos grandes números como também a aproximação da abordagem clássica com a frequentista.

A partir do momento em que os alunos começam a atuar sobre as situações, tabular seus resultados e fazerem previsões, inicia-se a fase da Ação. Em seguida, na fase Formulação,

[2] A versão atual pode ser encontrada no endereço http://digfir-published.macmillanusa.com/stats_applet/stats_applet_10_prob.html

os alunos vão apresentar o que fizeram utilizando um raciocínio mais elaborado. Na fase da validação, os alunos verificam suas hipóteses e comparam com os resultados dos demais colegas. Nesta, os raciocínios são justapostos e comparados.

Na última fase da TSD, a institucionalização, o conhecimento pessoal do aluno será articulado ao conhecimento institucional. Nessa fase, conforme Rotondo *et al.* (2021), o professor reúne as ideias e resume os pontos principais das estratégias exploradas pelos alunos. Nesse momento ocorrerá o envolvimento das dimensões epistêmica e pedagógica.

Na institucionalização, os conceitos de probabilidade e estatística serão formalizados. É esperado que o professor verifique o que os alunos fizeram ou não, o que aprenderam ou ainda precisam aprender, por exemplo, se houve a percepção dos conceitos de: aleatoriedade, dos fenômenos independentes e dependentes, da equiprobabilidade, variabilidade e da conexão entre abordagem clássica e frequentista, não somente nesta situação, mas em todas as demais (AZEVEDO, 2008). O professor, considerando o que o aluno ainda não aprendeu, identificará o que foi feito e o que deixou de fazer na resolução das atividades.

4.3.1 Situação 1 - Lançamento das moedas físicas e virtuais

A atividade proposta trata-se de um experimento com moedas físicas e virtuais em uma sala de aula, baseada nas fases da Teoria das Situações Didáticas, em que duas atividades experimentais são apresentadas e os estudantes as resolve. Inicialmente, o professor propôs aos estudantes que formassem grupos com base em um sorteio, por exemplo, pela lista da frequência da turma. Este grupo permaneceu em todas as situações. Após a formação dos grupos, o professor passou um vídeo [3] que apresentou exemplos de experimento aleatórios e não aleatórios para facilitar na compreensão das atividades.

Em um primeiro momento os estudantes realizaram o experimento das moedas físicas (A11), e posteriormente responderam às perguntas centrais, relacionadas à atividade em questão. Em um segundo momento, realizaram o experimento com as moedas virtuais de um simulador (A12), como uma extensão da primeira atividade. Em seguida, os estudantes responderam às perguntas centrais dessa atividade.

Foi necessário, em todas as situações (1 à 4), que os estudantes argumentassem, questionassem e discutissem sobre suas hipóteses como também o professor realizasse uma mediação a partir desses questionamentos e hipóteses, conduzindo a passagem da linguagem cotidiana para

[3] Disponível no endereço https://www.youtube.com/watch?v=KnXK3i448xg&t=51s

a científica.

O objetivo da atividade consistiu em fazer com que os estudantes compreendam a aleatoriedade, espaço amostral e a medida que o experimento é repetido, o número de caras e coroas, em média, cada vez mais se aproximam de 50.

A situação 1 consistiu em duas atividades experimentais. A primeira (A11) do lançamento das moedas físicas, e a segunda (A12) do lançamento das moedas virtuais, ambas juntamente com suas perguntas centrais (Pi) para cada atividade, conforme descrito a seguir:

A11. Ao lançar 82 moedas de 10 centavos simultaneamente sob um piso, quantas "caras" e "coroas" sairão? Repita o experimento ao menos três vezes e registre os dados em uma tabela.

P1 - E se lançarmos 83 moedas de 10 centavos simultaneamente, o que ocorreria?

P2 – O que ocorreria se, ao invés do lançamento de 82 moedas, fosse 82 lançamentos de uma única moeda?

A12. Ao lançar uma moeda 1000 vezes em um software de simulação, quantas caras e coroas sairão? Repita o experimento dez vezes e registre os dados em uma tabela.

P2 – E se lançarmos 1001 vezes o que ocorreria?

P3 – Qual a relação da Atividade Experimental 1 e da Atividade Experimental 2?

P4 – Lançar uma vez mil moedas é equivalente ao experimento lançar mil moedas simultaneamente?

P5 – Qual a sua conclusão nestes dois experimentos?

Os conceitos - chaves para a situação 1 foram. Aleatoriedade, Espaço Amostral e Probabilidade Frequentista.

A solução para a situação 1 é que não é possível prever a quantidade de caras e coroas, no entanto, a medida que se aumenta o número de repetições do experimento, haverá uma tendência, em média, de 50 % caras e 50% coroas. Assim, os alunos tiveram que calcular explicitamente a média para perceber essa aproximação. Exemplo: Consideremos que no lançamento das 82 moedas duas vezes tenha saído:

1º lançamento: 50 caras e 32 coroas

2º lançamento: 36 caras e 46 coroas

O cálculo da média seria:

- Média de caras: $(50 + 36)/2 = 43$
- Média de coroas: $(32 + 42)/2 = 39$

Quanto mais lançamentos ocorrerem, melhor a média aproximará de 50% caras e 50% coroas, isto é, neste caso, 41 caras e 41 coroas. Nos Quadros 3 e 4, são apresentadas as fases da TSD para a situação das moedas físicas e virtuais.

Quadro 3 – Fases da situação com moedas físicas.

Fases	**Papel do professor**	**Papel do aluno**	**Milieu**
Devolução	Apresentar o problema das moedas e manter o estudante envolvido na situação	Escutar a proposta e tomar o problema para si	Conjunto de moedas e as questões organizadas
Ação	Observar e mediar	Elaborar esquemas ou estratégias para a resolução da situação	Exploração das questões
Formulação	Coordenar e mediar as discussões	Apresentar as estratégias e procedimentos adotados	Discussão aberta
Validação	Escutar, Mediar e propor que os estudantes troquem seus resultados	Verificar se as estratégias utilizadas são viáveis ou se precisam de outra(s) estratégia(s)	Discussão guiada
Institucionalização	Reunir as ideias dos estudantes e resumir os pontos principais das estratégias exploradas pelos estudantes.	Escutar e refletir	-

Quadro 4 – Fases da situação com moedas virtuais.

Fases	Papel do professor	Papel do aluno	Milieu
Devolução	Apresentar o problema com o simulador e manter o estudante envolvido na situação	Aceitar o problema como sendo seu	Exposição virtual do simulador de moedas
Ação	Observar e mediar	Elaborar esquemas ou estratégias para a resolução da situação	Exploração das questões
Formulação	Coordenar e mediar as discussões	Apresentar as estratégias e procedimentos adotados	Discussão aberta
Validação	Escutar, Mediar e propor que os estudantes troquem seus resultados	Verificar se as estratégias utilizadas são viáveis ou se precisam de outra(s) estratégia(s)	Discussão guiada
Institucionalização	Reunir as ideias dos estudantes e resumir os pontos principais das estratégias exploradas pelos estudantes.	Escutar e refletir	Conhecimento institucionalizado

4.3.2 Situação 2 - Urna de Bernoulli

A atividade proposta trata-se de um experimento com bolinhas de gude e garrafas pet baseada nas fases da Teoria das Situações Didáticas, em que uma atividade experimental é apresentada e os estudantes deverão resolver. Inicialmente, o professor entrega para cada grupo um saco preto contendo 30 bolinhas (brancas e amarelas), uma garrafa pet não transparente, um pedaço de plástico transparente e um barbante. Os alunos construíram, sob mediação do professor, a urna com as garrafas.

O professor permite que os alunos tentem, inicialmente, estimar a proporção de bolinhas brancas e amarelas. Após diversas tentativas, o professor propõe essa atividade com algumas regras para que assim, os estudantes possam resolver a A2, como também responder às perguntas centrais. A seguir, a atividade:

A2. Um saco opaco contém 30 bolinhas nas cores brancas e amarelas. Retire 5 bolinhas deste saco, sem constatar a cor, coloque dentro de uma garrafa fechando o gargalo com material transparente. Ao entornar a garrafa, uma tampinha aparece e a cor pode ser observada e anotada em uma tabela. Assim, qual a proporção do número de bolinhas brancas e amarelas na garrafa? Qual é a chance de sair uma bolinha branca no gargalo da garrafa? E de uma bolinha amarela?

O objetivo dessa atividade consiste na construção do conceito de probabilidade por meio de um modelo concreto da urna de Bernoulli, estimando a proporção de bolas brancas e amarelas de uma urna para a compreensão da probabilidade clássica, frequentista, da aleatoriedade e de eventos independentes.

Para a A2 é entregue ao aluno as regras para sua resolução:

a) Faça 10 sorteios sucessivos e anote as respectivas cores das bolinhas que aparecerão no gargalo da garrafa. Anote os dados em uma folha de caderno. Use (B) para branca e (A) para amarela;

b) É permitido somente olhar as bolinhas uma a uma pelo gargalo transparente da garrafa;

c) Repita o experimento ao menos 4 vezes;

d) Registre o total de bolas brancas e amarelas em cada sorteio;

e) Calcule a média das quantidades de bolas brancas e amarelas;

f) Responda às perguntas da Atividade Experimental;

Após o processo de resolução da A2, o professor faz as perguntas centrais descritas a seguir:

P1 – Saiu qual cor no primeiro sorteio? Tem outra cor?

P2 – Se entornar novamente sairá qual cor?

P3 – Existe correlação entre um sorteio (uma entornada) e um próximo sorteio (entornada)? Justifique!

P4 - É possível saber a proporção do número de bolinhas brancas e amarelas sem repetir o experimento? Justifique!

Os conceitos-chave para a A2 foram: aleatoriedade, equiprobabilidade, probabilidade frequentista, probabilidade clássica, proporção e eventos independentes. O Quadro 5 a seguir consta as fases da TSD que foram aplicadas na situação 2.

A solução para a situação da urna é a não possibilidade de prever a proporção de bolas

Quadro 5 – Fases da situação com a urna de Bernoulli.

Fases	Papel do professor	Papel do aluno	Milieu
Devolução	Apresentar o problema da urna e manter o estudante envolvido na situação	Escultar e aceitar a proposta apresentada	Garrafa com as bolinhas
Ação	Observar e mediar	Elaborar esquemas ou estratégias para a resolução da situação	Exploração das questões e regras
Formulação	Coordenar e mediar as discussões	Apresentar as estratégias e procedimentos adotados	Discussão aberta
Validação	Escutar e Mediar	Verificar se as estratégias utilizadas são viáveis ou se precisam de outra(s) estratégia(s)	Discussão guiada
Institucionalização	Reunir as ideias dos estudantes e resumir os pontos principais das estratégias exploradas pelos estudantes.	Escutar e refletir	Conhecimento institucionalizado

brancas e amarelas de imediato, no entanto, a medida em que se aumenta o número de repetições do experimento, haverá uma proporção de bolas brancas e amarelas.

4.3.3 Situação 3 - Proporção de alunos numa sala

A atividade proposta trata-se de um experimento em que os estudantes indicam a proporção de meninos e meninas em uma sala de aula com base nos registros da saída (ou entrada) de alguns estudantes dessa sala; bem como relacionar este experimento com o anterior, da urna (garrafa com bolinhas). Essa atividade seguiu as fases da Teoria das Situações Didáticas. Inicialmente, o professor entregou para cada grupo a Atividade (A3) impressa e permitiu que os alunos tentassem estimar a proporção de meninos e meninas sem repetir o experimento. A seguir a Atividade:

A3: Qual a proporção de meninos e meninas de uma determinada sala de aula de seu colégio? Para fazer isso, anote o número de meninos e meninas entre os 5 alunos que saem (ou entrem) da sala após a sirene da escola. Repita o experimento 3 vezes. Esse experimento é equivalente ao da atividade da urna? Justifique!

Após diversas tentativas, o professor propôs essa atividade com algumas regras para que assim, os estudantes pudessem resolvê-la como também responder às perguntas centrais. Seguem as regras entregue aos alunos com as perguntas centrais:

a) Anote o número de meninos e meninas entre os 5 alunos, que sai (ou entra) de uma sala de aula após a sirene da escola;

b) Repita o experimento 3 vezes;

c) Com os dados anotados, calcule a média das quantidades de meninos e meninas registrados;

d) Responda às perguntas da Atividade Experimental 03.

Perguntas Centrais:

P1 – Sem repetir o experimento é possível estimar quantos meninos e meninas há na sala de aula? Justifique!

P2 – A saída de um estudante depende da saída anterior de outro estudante? Justifique!

P3 – Se associarmos as bolinhas brancas, do experimento da urna, ao número de meninas e as bolinhas amarelas ao número de meninos, os resultados obtidos no sorteio das bolinhas pode substituir a experiência real de observação dos meninos e meninas na sala de aula? Justifique!

P4 – Como você poderia propor a representação de uma urna de Bernoulli para representar as duas experiências, “saída da sala” e “bolinhas na garrafa”?

Os conceitos chave para a A3 foram: aleatoriedade, equiprobabilidade, probabilidade frequentista, proporção e eventos independentes. O Quadro 6 a seguir consta as fases da TSD para a situação da proporção de alunos em sala de aula. Cada grupo escolheram uma determinada sala de aula para suas pesquisas.

Quadro 6 – Fases da situação da proporção de alunos.

Fases	Papel do professor	Papel do aluno	Milieu
Devolução	Apresentar a situação e manter o aluno envolvido nela	Escultar a proposta apresentada e tomar o problema para si	Questões organizadas na folha impressa
Ação	Observar e mediar	Elaborar esquemas ou estratégias para a resolução da situação	Questões sendo exploradas
Formulação	Coordenar e mediar as discussões	Apresentar as estratégias e procedimentos adotados	Discussão aberta
Validação	Escutar e Mediar	Verificar se as estratégias utilizadas são viáveis ou se precisam de outra(s) estratégia(s)	Discussão guiada
Institucionalização	Reunir as ideias dos estudantes e resumir os pontos principais das estratégias exploradas pelos estudantes.	Escutar e refletir	Conhecimento institucionalizado

A solução para a A3 consistiu na possibilidade de prever a proporção de meninos e meninas, com o aumento do número de repetições do experimento. Para que esse experimento fosse equivalente ao da atividade da urna, deve-se considerar este como um experimento com reposição e a hipótese de que todos os alunos têm a mesma chance de serem observados na saída (ou entrada) da sala.

4.3.4 Situação 4 - Tarefas

A atividade proposta trata-se da resolução de uma lista de questões teóricas e práticas, ainda em grupos, contida no Apêndice B, para a mobilização dos conceitos. Os itens da primeira atividade são para mobilizar os conceitos trabalhados. Os conceitos desenvolvidos são: Aleatoriedade, Equiprobabilidade, Princípio ergótico, Eventos dependentes e independentes.

4.4 ANÁLISE DO ESTUDO FINAL

Esta seção apresenta os resultados da experiência em sala de aula acompanhados de suas respectivas análises e discussão.

Na situação 1, A aula se inicia com um pequeno vídeo como motivação disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=KnXK3i448xgt=102s o qual apresenta exemplos de experimento aleatórios e não aleatórios para facilitar na compreensão das atividades.

Em seguida, o professor sugeriu à turma que se dividissem em 4 grupos de acordo com sorteio da lista de frequência. O professor coloca um número para cada aluno da lista e assim sorteia os números até completar os grupos. Dentro de cada grupo formado, os alunos, entre si, indicam aqueles que: lançam as moedas, contam as moedas, criem as tabelas e registrem os seus dados. Com os grupos formados, o professor apresenta o roteiro impresso no papel, que consta no produto, o qual abordará a aleatoriedade, espaço amostral e aproximação da probabilidade teórica e frequentista.

Este grupo formado permanecem em todos os encontros. Antes dos alunos tentarem resolver, o professor pergunta antecipadamente o quanto acham que serão os resultados:

> *E5: sairá 20 caras e 62 coroas.*

No estudo piloto dos lançamentos das 100 moedas, houve também respostas semelhantes como:

> *Ep1: Eu não sei, mas acho que vai sair mais caras.*

Os dados mostram que não houve abordagem do assunto no Ensino Fundamental II como também nas 1ª e 2ª séries do Ensino Médio. Ao repetir o experimento alguns alunos deram seus palpites os mesmos resultados do primeiro lançamento, imaginando que seriam idênticos, isso mostra a importância da repetição do experimento. O professor pede para registrar os dados obtidos em uma tabela. Ao indagar sobre a repetição do experimento e a obtenção dos mesmos resultados (ou, a não-obtenção de 50% de caras), no estudo piloto houve a persistência nos mesmos valores, isto é, metade cara e metade coroa:

> *Ep2: "depende, se eu jogar forte para cima pode ser que saia meio a meio"*

A grande parte dos alunos não consegue, sem repetir o experimento, compreender o papel da aleatoriedade e da independência dos eventos, o que confirma Coutinho *et al.* (2020).

Após a realização do segundo lançamento das moedas, com os registros dos alunos anotados, o professor coloca os resultados dos grupos na lousa, conforme a Tabela 1.

Tabela 1 – Resultados do segundo lançamento das moedas.

Grupos	Quantidade de caras	Quantidade de coroas
A	45	37
B	35	47
C	34	48
D	49	33

Fonte: o autor

Os alunos observam os dados dos demais, proporcionando assim uma interação entre professor-aluno e aluno-aluno, que são aspectos da dimensão pedagógica do losango didático. Nesta interação, poucos alunos começaram observar a aleatoriedade nos resultados, tanto no estudo piloto quanto na análise a *priori*, falas do tipo "nem sempre vai dar meio a meio" se torna comum entre alguns alunos. No entanto, a maioria não consegue ainda enxergar o conceito, mesmo após o terceiro lançamento, afirmando que se trata de sorte, que poderiam prever os resultados.

Nota-se que repetir o experimento três vezes é insuficiente para que os alunos, em geral, enxerguem a aleatoriedade, sendo necessário um número maior de repetição, o que necessitará de um software de simulação, sugerido por Coutinho *et al.* (2020), que será abordado posteriormente. Em seguida o professor pergunta para os grupos, a pergunta central *P1: "E se lançarmos 83 moedas de 10 centavos simultaneamente, o que ocorreria?"*.

> *E7: Ai não daria o resultado igual porque não dá para partir uma moeda no meio.*

Observa-se que este aluno, anteriormente, tinha a mesma concepção da maioria dos alunos do estudo piloto, que os resultados saem "meio a meio". Seguindo, o Professor indaga: "Daria o que então?"

> *E7: Ou vai dar mais caras, ou vai dar mais coroas, de qualquer jeito.*
> *E5: O número de caras seriam diferentes.*

Todos os grupos chegam na mesma conclusão de que o número de caras e coroas serão diferentes, porém não conseguem justificar seus raciocínios. Essa pergunta faz com que os alunos reflitam sobre a não possibilidade de sair metade caras e metade coroas como muitos acreditavam e afirmavam. Na pergunta central *P2: O que ocorreria se, ao invés do lançamento de 82 moedas, fosse 82 lançamentos de uma única moeda?* As repostas foram:

E8: Pode ser que dê a mesma coisa que antes.
E7: Daria resultados bem diferentes .

Alguns alunos acreditaram que se lançar várias vezes uma única moeda, o experimento é diferente. Isto pode ser explicado, conforme Tarr e Lannin (2005), que os alunos abrigam a crença generalizada de que os resultados de um lançamento de moeda podem ser controlados pelo indivíduo. Tal crença, segundo os pesquisadores, é incompatível com a noção de independência, visto que a probabilidade de obter uma vantagem em cada tentativa permanece constante, isto é, 50%.

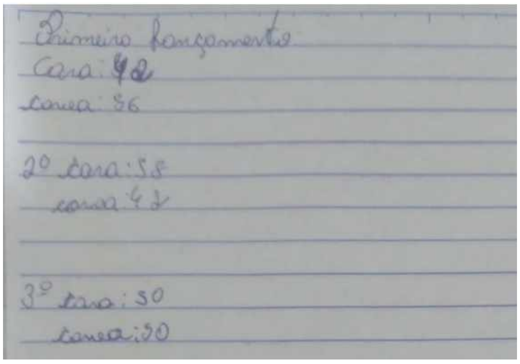
No terceiro lançamento, os alunos (incluindo do estudo piloto), perceberam a conservação do total do número de moedas, que não precisavam contar uma a uma o número de caras e coroas, visto ter o total das quantidades, no entanto, foi discutido a importância de conferir a contagem um a um para garantir o espaço amostral.

As repetições do experimento permitiu os alunos observarem melhor o espaço amostral, as quantidades de caras e coroas variavam, mas o total continuavam constante. Isto só puderam notar no terceiro lançamento. Embora, nesse aspecto, três lançamentos contribuiu para a compreensão do espaço amostral, não foi suficiente para a compreensão da aproximação da probabilidade clássica da frequentista. Na institucionalização, o professor, fala da importância da repetição do experimento e do cálculo da média e assim compreendem que a medida que aumenta o número do experimento o número de caras e coroa se aproximam, em média, 50% cada.

Por fim, o professor pergunta: *"E se lançarmos todas as 328 moedas, quantas caras e coroas vai sair?"*. As respostas foram diversas e todas estavam dentro da variância.

Quanto aos esquemas e tabelas construídas pelos alunos, dos cinco grupos, no estudo piloto, três utilizaram tabelas para representar os dados, enquanto os demais fizeram uso de outras representações como na Figura 6.

Figura 6 – Representação esquemática.



Fonte: o autor

Os tipos de anotações não esquemáticas, dificultou a visualização dos dados e sua associação aos conceitos como a variabilidade, aleatoriedade e a aproximação das abordagens clássica e frequentista. Uma aluna que não interessava nas aulas tradicionais de matemática, após a atividade A11, disse:

> *E9: Nossa professor, essa aula foi muito boa, assim a gente aprende muito mais.*

Isto mostra, conforme Coimbra (2021), a importância do papel da experimentação em probabilidade em sala de aula. A Figura 7 mostra cada grupo coletando a quantidade das moedas.

Figura 7 – Moedas sendo contadas pelos grupos.

Fonte: o autor

Após o experimento com as moedas físicas, inicia-se o experimento com as moedas virtuais, mediante um aplicativo. Inicialmente, o professor entrega a atividade (A12) e explica como deverá ser realizada. Em seguida, o professor pede para os alunos baixarem o *software* Rossman/Chance (www.rossmanchance.com/applet/2021/OneProp.htm?) em seus celulares e explica o seu funcionamento. Após a compreensão do *software* os alunos começam a simular os 10 lançamentos e registram os dados na folha de caderno. No decorrer dos lançamentos os alunos não associavam as aproximações à medida que aumentava o número de lançamentos. Em certo momento alguns estudantes se surpreendem com os resultados:

> *E6: O meu repetiu professor, saiu o mesmo número de caras e coroas!.*
>
> Professor: *É normal repetir?.*
>
> *E6: Depende.*

Assim como no estudo piloto, os alunos acreditam que podem influenciar nos resultados, dependendo, por exemplo, da força com que jogam as moedas, ou da forma com que são jogadas. Após os alunos terem realizados os 10 lançamentos no software bem como os registros no caderno, o professor diz:

> Professor: *Lembram que na atividade das moedas físicas fizemos somente 3 lançamentos e agora fizemos 10? O que ocorreu agora com as quantidades de caras e coroas, o que vocês esperavam dos resultados?*
>
> *E5: A gente não sabe os resultados, se vai dar mais caras ou mais coroas!.*
>
> Professor: *Por que não tem como saber os resultados?.*
>
> *E5: "Porque sairá tanto cara quanto coroa"*

Nesse momento os alunos começam a identificar o conceito de aleatoriedade, porém ainda não compreendem a probabilidade frequentista. Ainda não conseguem compreender a medida com que o experimento é repetido, o número de caras e coroas, em média, cada vez mais se aproximam de 50% cada. Posteriormente, o professor pede para os alunos calcularem a média dos números de caras e coroas nos 10 lançamentos.

Ao calcular as médias o professor pergunta. *"Qual a conclusão que vocês tiram dessa média?"* Os alunos não conseguiram responder. O professor retorna à pergunta inicial. *Ao lançar uma moeda 1000 vezes em um software de simulação, quantas caras e coroas sairão?* Eles ainda não conseguem associar a probabilidade frequentista, então o professor faz a pergunta central:

> *P4: Lançar uma vez mil moedas é equivalente ao experimento lançar mil moedas simultaneamente?*

Uma parte dos alunos disse ser equivalentes e outra afirmaram não ser, no entanto, ambas não conseguiram justificar suas afirmações. Em seguida o professor faz a pergunta central:

P2: E se lançarmos 1001 vezes o que ocorreria?
E5: Cairia uma a mais para coroa ou uma a mais para cara.

Assim, o Professor pede para que façam no simulador o lançamento de 1001 vezes para a verificação dos resultados. Em seguida o professor faz a pergunta central:

P3: Qual a relação da atividade A11 e da atividade A12?.

A maioria disseram que os experimentos são iguais, mas que no simulador é melhor de entender. Por fim, o professor faz a pergunta central:

P5: Qual a sua conclusão nestes dois experimentos?

As respostas foram:

E3: No software é bem mais rápido.
E5: Faz mais lançamentos com mais moedas.

Observa-se que o uso de softwares de simulação, conforme afirma Coutinho *et al.* (2020), proporcionam a oportunidade de observação para grandes amostras, como neste caso de lançar mil moedas ou lançar uma moeda mil vezes envolvem um número suficientemente grande de repetições do experimento aleatório em problemas experimentais de probabilidade, o que nem sempre é possível em sala de aula. Na institucionalização o professor frisa a importância de repetir diversas vezes um mesmo experimento e a equivalência entre lançar 1 moeda x vezes e lançar n moedas uma única vez.

Na situação 2, da Urna de Bernoulli, os alunos construíram o conceito de probabilidade por meio de um modelo concreto da urna de Bernoulli bem como estimar a proporção de bolas brancas e amarelas desta urna, para que pudessem compreender melhor a aleatoriedade, os eventos independentes e a probabilidade clássica e frequentista.

Inicialmente, o professor entregou a atividade A2, juntamente com os materiais utilizados pelos alunos. Após a leitura da atividade os alunos construíram a urna de Bernoulli, construída a partir de uma garrafa pet pintada de branco para não mostrar as cores das bolinhas dentro, conforme mostrada na Figura 8.

Figura 8 – Bolinhas da urna sendo sorteadas.

Fonte: o autor

Com a urna construída é feita a seguinte pergunta:

> Professor: *Qual a proporção do número de bolinhas brancas e amarelas na garrafa? Quantas têm de cada?*

As respostas dos alunos é que não dá para saber. O professor deixa eles entornarem diversas vezes a garrafa, sem dizer alguma estratégia. Uma aluna diz para ir anotando que dá para saber, mas não conseguiu associar a repetição do experimento, não conseguiu ir além do registro. Os alunos não conseguem nenhuma estratégia e continuam "chutando" os resultados conforme a situação anterior das moedas. O professor faz a pergunta central:

> *P1: Saiu qual cor no primeiro sorteio? Tem outra cor?*

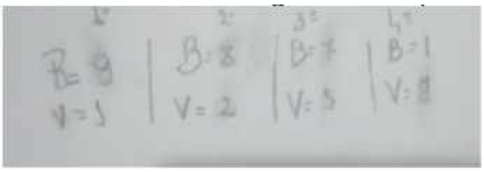
Os alunos disseram qual a cor que saiu, mas quanto à segunda pergunta eles "chutaram" com base na primeira cor que saiu, ou seja, para eles os eventos eram dependentes. Não associaram esta atividade com a anterior, das moedas, consequentemente, na pergunta central P2, muitos responderam que sairia a mesma cor, o que mostra a necessidade da repetição do experimento para chegarem à conclusão de que os eventos são independentes e aleatórios. Isto foi frisado pelo professor na institucionalização.

Ao fazer a pergunta central:

> *P3: Existe correlação entre um sorteio (entornada) e um próximo sorteio (entornada)? Justifique!.*

Alguns alunos não conseguiram enxergar se havia ou não a correlação. A partir daí o professor entrega as regras da atividade para facilitar na resolução. Cada grupo definiu aqueles que iriam: entornar a garrafa, registrar os dados e calcular a média. Os alunos, em geral, fizeram seus esquemas sem organizar os dados, o que dificultou na visibilidade e no cálculo da média. Outros, com base na forma como organizaram os dados, conseguiram calcular a média. A Figura 9 mostra o esquema feito por outro grupo.

Figura 9 – Representação esquemática de um dos grupos.



Fonte: o autor

Aqui mostra os dez sorteios em cada repetição do experimento. Este grupo calculou a média fazendo:

- Média bolas brancas: $25/4 = 6{,}25$
- Média bolas amarelas: $15/4 = 3{,}75$

No entanto, não conseguiram, a partir dos resultados, determinar a proporção de bolas brancas e amarelas dentre as cinco da garrafa. Quanto a pergunta central:

> *P4: É possível saber a proporção de número de bolinhas brancas e amarelas sem repetir o experimento?*

Embora alguns disseram não ser possível, não conseguiram justificar. Assim, na institucionalização o professor deu continuidade, mostrando resumidamente os registros dos alunos, como determinar a proporção com base na média e a ênfase na importância de repetir cada vez mais o experimento para aproximar da realidade.

A Tabela 2, mostra os dados dos alunos de forma agrupada e utilizada na fase da institucionalização.

Tabela 2 – Dados colhidos pelos alunos repetindo o experimento quatro vezes (dez sorteio em cada.)

	Quantidade bolas brancas nos quatro sorteios	Quantidade bolas amarelas nos quatro sorteios
Grupo A	25	15
Grupo B	24	16
Grupo C	40	0
Grupo D	32	8

Fonte: o autor

Somente o grupo C conseguiu estimar a proporção dentre as cinco bolas na garrafa, pois no primeiro sorteio de dez, constataram que saíram somente bolas brancas, afirmando ter 5 bolas brancas e 0 bolas amarelas.

Na institucionalização, o professor utiliza os dados do grupo A, bem como seu esquema na Figura 9, para determinar a proporção de bolas brancas e amarelas dentre as cinco na garrafa.

- Média bolas brancas: $25/4 = 6{,}25$
- Média de bolas amarelas: $15/4 = 3{,}75$

Isto significa que a cada sorteio de dez, sai, em média, 6 bolas brancas e 3 bolas amarelas. Calculando a proporção temos:

- Proporção de bolas brancas: $6{,}25/10 = 0{,}625 = 63\%$
- Proporção de bolas amarelas: $3{,}75/10 = 0{,}375 = 37\%$

Até aqui já estaria respondido à atividade A2, no entanto, o professor calcula a porcentagem, chegando na quantidade de bolas brancas e amarelas dentre as cinco da garrafa.

- quantidade bolas brancas: 63% de 5 = 3
- quantidade bolas amarelas: 37% de 5 = 2

Com uma regra de três é possível determinar desde que se sabe o total de bolas no saco. Como afirma no enunciado que há 30 bolas, fazendo a regra de três temos:

Total de bolas na garrafa	Quantidade de bolas brancas na garrafa
5	3
30	x

- 5x = 90
- x = 18

Logo, teríamos 18 bolas brancas e 12 bolas amarelas no saco. Sabendo das quantidades de bolas brancas e amarelas no saco e na garrafa, os alunos conseguiram calcular a probabilidade de sair uma bola branca (e amarela) no gargalo utilizando do conceito de probabilidade teórica, pois estava explícito os casos favoráveis e possíveis. Assim, a probabilidade encontrada, neste caso, foi P = 2 = 0,4 (40%).

Na institucionalização, o professor reúne as ideias dos alunos, o que entenderam e o que não conseguiram, como estimar a proporção dentre as cinco bolas na garrafa e, com eles, determinam esta proporção. É discutido com os alunos a aproximação da probabilidade frequentista da teórica e os conceitos envolvidos, como equiprobabilidade das saídas das bolinhas, a aleatoriedade dos sorteios, eventos independentes e a relação com a experiência das moedas.

Na situação 3, da proporção de alunos, com as regras em mãos, os alunos estimaram a proporção de meninos e meninas de uma determinada sala de aula e relacionaram este experimento ao da urna (garrafa com bolinhas).

Os alunos procuraram responder inicialmente às perguntas centrais para depois a atividade experimental. Quanto a pergunta central:

> *P1: Sem repetir o experimento é possível estimar quantos meninos e meninas há na sala de aula? Justifique!*

A maioria dos alunos respondeu não haver possibilidade, com justificativas do tipo:

> *E6: Não, é necessário repetir o experimento ao menos uma vez para ter uma estimativa.*

Observa-se a pergunta *P1* sendo retomada novamente em uma situação semelhante à anterior para verificação se os alunos compreenderam a importância da repetição do experimento para que assim estimassem cada vez mais a quantidade real do número de alunos na sala. Ao verificar a compreensão do conceito de eventos independentes na pergunta central *P2: A saída de um estudante depende da saída anterior de outro estudante?* Todos responderam que não dependerá:

> *E7: Não, pois se sair um menino, não vai influenciar outra pessoa sair, pode sair tanto menino quanto menina.*

Houve uma melhora quanto à compreensão do conceito de eventos independentes, visto que o evento "sair um estudante da sala" não influencia a saída do próximo estudante. Isto mostra, conforme Lopes e Souza (2016), a importância de aplicar um mesmo conceito em situações diversas para que o aluno aproprie melhor e compreenda os conceitos.

Embora os alunos, a essa altura, começaram a compreender melhor os conceitos, não conseguiam ainda associar uma situação de outra. Na pergunta central *P3* grande parte responderam não ter como associar o experimento da urna com essa dos alunos em sala. A pergunta *P4* está relacionada com a pergunta *P3*, no entanto, esta última dá uma dica da possibilidade de uma representar a outra, bem como fazer:

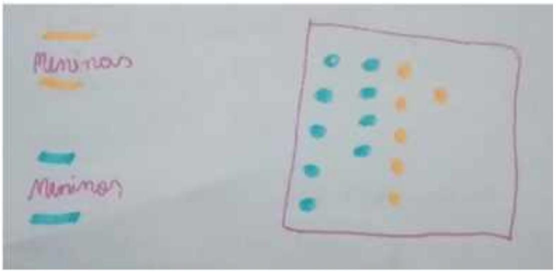
> *P4: Como você poderia propor a representação de uma urna de Bernoulli para representar as duas experiências, "saída da sala" e "bolinhas na garrafa?"*

Com a pergunta colocada desta forma houve respostas do tipo a seguir:

> *E4: Usaríamos uma cor de bolinha para representar as meninas e a outra cor para meninos.*

Outro grupo respondeu utilizando o mesmo raciocínio, porém, por meio de uma representação esquemática, conforme a Figura 10.

Figura 10 – Representação esquemática das bolinhas e alunos.



Fonte: o autor

Observa-se uma associação representada de forma esquemática, onde cada menina (cor laranja) representará bolinhas de uma só cor e os meninos (cor azul) bolinhas de outra cor. Assim, a parte da atividade experimental da qual pergunta da equivalência desta com a atividade da urna foi resolvida. Embora todos concordaram com a possível associação deste experimento com o da urna, os alunos não observaram que para os experimentos serem semelhantes, este deveria ser com reposição, assim como da urna. Uma observação importante que os alunos fizeram foi a do princípio da equiprobabilidade (chances iguais):

> *E7: Mas, se for à hora do recreio, pode sair mais meninos do que meninas, daí altera o resultado real.*

Os alunos percebiam, em suas salas de aula, que ao tocar a sirene para o recreio, sempre saíam os meninos primeiro. Esta observação foi pertinente, pois saindo sempre mais meninos o espaço amostral não será equiprovável, isto é, os alunos devem ter mesma chance de serem observados na saída (ou entrada) na sala após a sirene. No entanto, este fato não pode ser generalizado para todas as turmas, visto que há salas que saem ambos meninos e meninas, isso foi frisado pelo professor na institucionalização. Outra observação pertinente foi feita por um grupo:

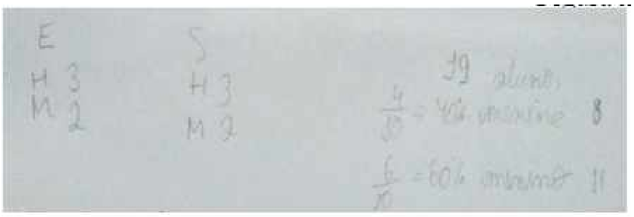
> *E3: Mas professor, no caso da urna nós sabíamos quantas bolinhas tinha no saco (30) e na garrafa (5) agora neste, não sabemos quantos alunos há na sala!*
>
> *Professor: Sim, mas conhecendo quantos meninos e meninas há dentre os cinco que saem/entrem é possível saber a proporção de*

> *alunos na sala, mas não a quantidade exata. Agora, para sabermos a quantidade exata de meninos e de meninas na sala, realmente precisaremos da quantidade total na sala, como no da urna.*

A partir dessa observação, o professor fornece a informação da quantidade de alunos que há em cada sala que farão o experimento, para que na institucionalização seja calculada quantos meninos e quantas meninas havia em cada sala além da proporção.

Retornando a pergunta inicial da atividade: Qual a proporção de meninos e meninas de uma determinada sala de aula de seu colégio? O professor auxilia para que os alunos, da mesma forma que foi feito no experimento da urna, calculem as médias do número de meninos e meninas que saem ou entrem nas salas. Desta forma, alguns conseguiram determinar a proporção. Veja alguns esquemas e suas resoluções, conforme a Figura 11.

Figura 11 – Representação esquemática da média dos alunos.



Fonte: o autor

Devido às condições, foi possível repetir o experimento somente uma vez. O professor expõe os dados e esquemas dos alunos e auxiliam na resolução da atividade. Na institucionalização, explica que se soubermos a quantidade total de alunos na sala, será possível saber não somente a proporção de alunos na sala, mas também a quantidade exata de meninos e meninas na sala, como foi feito nesta atividade. Ressalta a importância, dentro do possível, estar sempre repetindo o experimento para melhor representar a realidade.

Na situação 4, os itens da primeira questão são para mobilizar os conceitos trabalhados. No item (a) todos concordaram tratar de um experimento aleatório, justificando que não dá para saber os resultados. A informação deste item é do tipo classificatória, cobrando a informação. Quanto ao item (b), 3 grupos disseram que os resultados possíveis, no lançamento de um dado honesto, é 6, explicitando alguns, de forma organizada desses números.

Na questão 1 (c) todos concordaram se tratar do conceito de equiprobabilidade enquanto na questão 2, houve alguns que afirmaram que os eventos não são equiprováveis, justificando o fato do Evento B possuir mais moedas. Isto mostra a necessidade de trabalhar o mesmo conceito em demais situações distintas. Na institucionalização, o professor mostra aos alunos a equivalência dos eventos da questão 2 por meio dos lançamentos das moedas e a importância de cada vez mais, na medida do possível, repetir o experimento.

Em relação ao conceito de independência, no item (e), todos afirmaram que o resultado em um lançamento não tem relação com um próximo lançamento, pois se tratam de eventos independentes. Um grupo conseguiu demonstrar, na questão 7, os eventos dependentes e independentes, fazendo uso de representações como: (CKK), (CCK), etc, o que facilitou na compreensão. Observa-se a importância de ter boas representações para avaliar as situações.

Na questão 3, todos disseram ser possível identificar a quantidade de meninos e meninas na sala, onde 2 grupos justificaram apontando a condição necessária de repetir o experimento diversas vezes. Esses 2 grupos também demonstraram compreensão na relação do experimento da proporção de alunos na sala com o experimento da urna de Bernoulli.

Na questão 4, sobre a possibilidade de resolver a situação da proporção de alunos utilizando a urna de Bernoulli, as explicações em geral foram do tipo:

> *E5: Sim, utilizando a mesma quantidade de bolinhas que os alunos, usando uma cor para meninas e outra para meninos*

Embora o grupo não tenha percebido a relação de eventos com reposição (urna) e sem reposição (proporção de alunos), conseguiu associar os dois experimentos. Na questão 5, que se trata de eventos sem reposição, alguns alunos conseguiram identificar a cor da bolinha (vermelha) com maior chance:

> *E2: Vai ser a vermelha, porque na maioria dos casos a vermelha tem mais na urna 2.*
> Professor: *E se vier uma bola verde?*
> *E2: Ah, então é uma das duas.*

Após a pergunta do professor, os alunos ficam em dúvida se a resposta é vermelha ou verde. Assim, na institucionalização, é mostrado, sem uso de fórmulas, que ao retirar cada bolinha da Urna 1 para a Urna 2, a cor vermelha é a que mais aparece, confirmando o que alguns já tinham observados, mas não conseguiram justificar melhor.

Na questão 6 os alunos ficaram em dúvida quanto aos pares: (4 e 3); (3 e 4); (1 e 6); (6 e 1). Assim, o professor pede para que eles verifiquem todas as possibilidades. Os grupos que fizeram uso de representações do tipo (1 e 6), (6 e 1), ..., conseguiram resolver a questão, chegando à conclusão que José tem maior chance.

4.4.1 Questionário

Ao final da aplicação da SD, foi aplicado um questionário, composto por 8 questões, aos alunos de forma individual para verificação do aprendizado dos conceitos trabalhados.

1. Qual evento é mais provável:

Evento A: obter cinco "caras"jogando uma moeda dez vezes

Evento B: obter cinco "caras"jogando dez moedas simultaneamente

( ) Evento A

( ) Evento B

( ) Os dois eventos são igualmente prováveis

2. Ao lançar 2 moedas, simultaneamente, quatro vezes. Quantas são as possibilidades de resultados?

3. Realizamos o experimento da garrafa com as bolinhas de gude para determinarmos a proporção do número de bolinhas brancas e amarelas dentro da garrafa. Descreva como você pensava antes, como fazia as previsões e como pensa agora.

4. Uma caixa contém 20 bolas azuis e 20 bolas vermelhas. As bolas azuis possuem volume maior que as bolas vermelhas. Assim, podemos afirmar que a chance de retirar, aleatoriamente, 1 bola vermelha é a mesma de retirar uma bola azul:

( ) Sim, pois há mesma quantidade de bolas na caixa

( ) Não, pois os volumes são diferentes

5. Considere o lançamento de três moedas justas. Os eventos “caras em duas moedas” e “cara em três moedas” são dependentes? Justifique!

6. O experimento lançar uma única moeda 1000 vezes e lançar 1000 moedas idênticas são equivalentes?

( ) Sim

( ) Não

Justifique:

7. Se lançarmos 20 moedas de um real sobre um piso podemos afirmar que:

( ) Ocorreria 10 faces caras e 10 faces coroas

( ) Ocorreria mais faces caras do que coroas

( ) Ocorreria mais faces coroas do que caras

( ) Não tem como saber a quantidade exata de cada face

Explique a sua escolha:

8. Uma caixa contém 10 moedas de dez centavos e 10 moedas de um real. Assim, podemos afirmar que a chance de retirar, aleatoriamente, uma moeda de 10 centavos é a mesma de retirar uma moeda de um real.

( ) Sim, pois há mesma quantidade de moedas

( ) Não, pois os formatos são diferentes

Na questão 1, a atividade 2 da situação 4 foi retomada para a compreensão do conceito de equiprobabilidade. Com a institucionalização realizada, os alunos acertaram essa questão justificando o fato de se tratar de eventos semelhantes e, portanto, igualmente prováveis.

Da mesma forma, se tratando do mesmo conceito de eventos semelhantes, os alunos conseguiram acertar a questão 6 do questionário justificando que se trata de experimentos semelhantes, moedas semelhantes e, portanto, resultados semelhantes.

Na questão 2 do questionário, relacionada com a repetição do experimento, dois grupos usaram os esquemas para os resultados com duas moedas: (c,c), (k,k), (k,c), (c,k) com a seguinte estratégia: 2 moedas = 4 possibilidades, então 4.4 = 16. Estes grupos, que acertaram também a questão 1 mostraram uma melhor compreensão da equiprobabilidade que os demais.

Na questão 3, relacionadas ao experimento da urna de Bernoulli, os alunos descreveram como pensava antes e depois das instruções e mediações do professor:

> *E2: Eu pensava que era impossível determinarmos a proporção porque podia sair as mesmas bolinhas no gargalo, mas agora registrando os dados dá para ter uma média.*

E4: Eu pensava que não tinha como fazer a contagem de cada bolinha sem ver, mas percebi que tem, com a probabilidade.

Os alunos reconheceram a importância dos conceitos da estatística como registrar, coletar e analisar dados como também usar o cálculo da média e porcentagem para a obtenção da proporção.

Na questão 4, 80% dos alunos responderam que não seria a mesma probabilidade, o que mostra a mobilização do conceito de equiprobabilidade. Em relação ao conceito de dependência, mais de 50% dos alunos responderam corretamente à questão 5 que se trata de eventos dependentes, as respostas foram do tipo:

E5: Sim, porque se no 1º lançamento sair coroa, já vai dar tudo errado.
E7: Sim, pois é necessário que saia duas caras para ter três.

Na questão 7 todos, exceto um aluno, afirmaram tratar-se de um evento aleatório e que não era possível determinar exatamente quantas caras e coroas ocorreriam. A questão 8 trouxe o mesmo conceito de aleatoriedade e equiprobabilidade da questão 4. Nesta, 70% dos alunos responderam corretamente pelo fato de se tratar de formatos diferentes.

5 CONCLUSÃO

Estudos referentes ao ensino e aprendizagem de probabilidade e estatística são indispensáveis para todo cidadão. Estudar estes temas não consiste somente ao ensino e domínio dos números, mas também na habilidade do aluno em coletar dados, organizá-los, por exemplo, em formas de tabelas ou gráficos e, que seja capaz de fazer esquemas e análises sobre os dados coletados.

Ao longo dos anos, o ensino de probabilidade e estatística, presente hoje em documentos que norteiam a educação básica, foi sendo aprimorado, desenvolvendo competências e habilidades de maneira progressiva, onde conceitos devam ser desenvolvidos desde os anos iniciais, o que antes não ocorria. No entanto, diversos estudos sobre o ensino e a aprendizagem da probabilidade e estatística apontaram dificuldades apresentadas pelos alunos em aprender os conceitos básicos destes temas.

Desta forma, com o uso de uma SD, foi possível trabalhar os conceitos básicos por meio de situações experimentais baseados na TSD proposta por Brousseau. Foi possível elaborar o desenho da SD segundo a metodologia de pesquisa baseada em *design*, proposta por Kneubil e Pietrocola (2017), em que análises foram feitas tanto sobre o processo de elaboração da SD quanto sua finalização que corroborou no Produto Final deste trabalho.

No estudo piloto, dados mostraram não haver abordagem no Ensino Fundamental II como também nas 1ª e 2ª séries do Ensino Médio, em relação aos conceitos básicos como aleatoriedade e a aproximação, em média, de 50% em cada face da moeda. Os resultados também mostraram que repetir o experimento três vezes ainda é insuficiente para que os alunos enxerguem a aleatoriedade, sendo necessário um número maior de repetição, o que implica na utilização de softwares de simulação, sugerido por Coutinho *et al.* (2020).

Os resultados apontaram dificuldades dos alunos em articular os conceitos da probabilidade em situações estatísticas, confirmando as pesquisas realizadas na literatura. (SANCHEZ; VALDEZ, 2017). Alguns equívocos foram confirmados, conforme apontam pesquisadores, como a crença dos alunos de que os resultados dos lançamentos de moedas podem ser controlados por aquele que as lançam (TARR; LANNIN, 2005).

Desta forma, observou-se nesta pesquisa a importância de mais repetições dos experimentos como também da necessidade de explorar os mesmos conceitos em diversas outras situações distintas.

O uso de *softwares* de simulação, como na primeira situação (A12), contribui para o entendimento dos conceitos como aleatoriedade, variabilidade, independência e estabilização de frequências, que conforme Coutinho *et al.* (2020), proporcionam a oportunidade de observações para grandes amostras e várias repetições do mesmo experimento em um curto espaço de tempo. Os alunos gostaram muito dessa atividade de simulação e puderam compreender melhor os conceitos envolvidos.

O papel do professor mediador foi essencial, não contava as respostas, mas instigava os alunos com mais perguntas para chegar nas suas conclusões. Desta forma, seguindo as fases da TSD, foi possível boas discussões, diálogos e interações entre professor -aluno e aluno-aluno previsto na dimensão pedagógica do Losango didático, proposto por Meheut e Psillos (2004).

Na institucionalização de cada situação foi possível formalizar o conhecimento, organizando a aprendizagem, identificando o que foi aprendido e o que precisou ser retomado, neste caso, no questionário.

Algumas questões foram retomadas por meio de um questionário para melhor compreensão de alguns conceitos, como a aleatoriedade, equiprobabilidade, médias, porcentagem e proporção, que contribuíram no aprendizado destes conceitos trabalhados.

Como sugestões de melhoria da SD poderia ser proposto mais reformulações e (re)implementações, incluindo para cada situação um número maior de repetições nos experimentos. Além disso, o professor poderá inserir vídeos motivacionais antes de cada situação que aborda os temas que serão trabalhados, preparando os alunos para as atividades subsequentes.

Este trabalho ainda contribuiu para dar continuidade nos estudos referentes ao tema, valorizando o papel do professor como mediador e o aspecto de responder perguntas elaborando outras, de modo a instigar os alunos a chegarem nas respostas esperadas.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Edicao atualizada. Curitiba: Editora UFPR, 2007. ISBN 978-85-7335-190-3.

ANPED, Diretoria da. Parecer da anped sobre os parâmetros curriculares nacionais. **Revista Brasileira de Educação**, n. 2, p. 85–92, 1996.

AZEVEDO, Maria Cristina Paternostro Stella de. **Situações de ensino-aprendizagem: análise de uma seqüência didática de física a partir da teoria das situações de Brousseau.** 2008. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2008.

BATANERO, Carme; BEGUÉ, Nuria; ARROYO, Rocío álvarez; VALENZUELA-RUIZ, Silvia M. Prospective Mathematics Teachers Understanding of Classical and Frequentist Probability. **Mathematics**, v. 9, n. 19, p. 2526, jan. 2021. Number: 19 Publisher: Multidisciplinary Digital Publishing Institute. Disponível em: https://www.mdpi.com/2227-7390/9/19/2526.

BATANERO, Carmen; HENRY, Michel; PARZYSZ, Bernard. The nature of chance and probability. *In*: **Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning**. *[S.l.]*: Springer, 2005. p. 15–37.

BATANERO, Carmen; SANCHEZ, Ernesto. What is the Nature of High School Students' Conceptions and Misconceptions About Probability? *In*: JONES, Graham A. (Ed.). **Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning**. Boston, MA: Springer US, 2005, (Biblioteca de Educação Matemática). p. 241–266. ISBN 978-0-387-24530-0. Disponível em: https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_11.

BAYER, Arno; BITTENCOURT, H.R.; ROCHA, Josy; ECHEVESTE, Simone. PROBABILIDADE NA ESCOLA. dez. 2021.

BAZERMAN, Max H; MOORE, Don A. **Judgment in managerial decision making**. *[S.l.]*: John Wiley & Sons, 2012.

BITTAR, Marilena. Contribuições da teoria das situações didáticas e da engenharia didática para discutir o ensino de matemática. **Investigações em didática da matemática**, p. 101–132, 2017.

BITTAR, Marilena. A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. **Zetetike**, v. 25, n. 3, p. 364–387, dez. 2017. ISSN 2176-1744. Number: 3. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8648640.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos. *In*: . *[S.l.]*: Porto editora, 1994.

BORBA, Rute Elizabeth de Souza; MONTEIRO, Carlos Eduardo; GUIMARÃES, Gilda Lisboa; COUTINHO, Cileda; KATAOKA, Verônica Yumi. EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA NO ENSINO BÁSICO: CURRÍCULO, PESQUISA E PRÁTICA EM SALA DE AULA. **Em Teia | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana** , n. 2, 2011. ISSN 2177-9309. Number: 2. Disponível em: https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2153.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Básica**. 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm.

BRASIL, Base Nacional Comum Curricular. Ministério da educação. 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf.

BRASIL, Parâmetros Curriculares. introdução aos parâmetros curriculares nacionais. **Brasília: mec/SEF**, 1997.

BRASIL, Parâmetros Curriculares. Ministério da educação. **Secretaria da Educação Média e Tecnológica**, 1998.

BROUSSEAU, Guy. A etnomatemática e a teoria das situações didáticas. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, n. 2, 2006.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. *[S.l.]*: ática, 2008. Google-Books-ID: fZR7PgAACAAJ. ISBN 978-85-08-11966-0.

CABERLIM, Cristiane Candido Luz. **letramento probabilístico no Ensino Médio: um estudo de invariantes operatórios mobilizados por alunos**. 2015.

CASTRO, George Anderson Macedo; SANTO, Cláudia Fernandes Andrade do Espárito; BARATA, Rouziclayde Castelo; ALMOULOUD, Saddo Ag. Desafios para o professor de ciências e matemática revelados pelo estudo da BNCC do ensino médio. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 15, n. 2, p. 1–32, jul. 2020. ISSN 1981-1322. Number: 2. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2020.e73147.

CAVALCANTI, Marcello Henrique da Silva; RIBEIRO, Matheus Marques; BARRO, Mario Roberto. Planejamento de uma sequência didática sobre energia elétrica na perspectiva CTS. **Ciência & Educação(Bauru)**, v. 24, p. 859–874, dez. 2018. ISSN 1516-7313, 1980-850X. Publisher: Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência, Universidade Estadual PauBasea (UNESP), Faculdade de Ciência, campus de Bauru. Disponível em: http://www.scielo.br/j/ciedu/a/jKSqG7L9hTcPbs3wPG44SPr/abstract/?lang=pt.

COIMBRA, Debora. Two Tasks to Teach Randomness and Probability Reasoning. *In*: BARQUERO, Berta; FLORENSA, Ignasi; NICOLÁS, Pedro; RUIZ-MUNZóN, Noemá (Ed.). **Extended Abstracts Spring 2019**. Cham: Springer International Publishing, 2021. (Trends in Mathematics), p. 195–202. ISBN 978-3-030-76413-5.

COSTA, Nielce Meneguelo Lobo da; POLONI, Marinês Yole. Design based research: uma metodologia para pesquisa em formação de professores que ensinam matemática (co). *In*: **XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática**. *[S.l.: s.n.]*, 2011.

COUTINHO, Cileda. **Introduction aux situations aléatoires dès le Collège:**: de la modélisation á la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géometre II. jun. 2001. Tese (Doutorado), jun. 2001.

COUTINHO, Cileda de Queiroz; FIGUEIREDO, Auriluci de Carvalho *et al.* Simulação computacional: aspectos do ensino da probabilidade frequentista. **ZETETIKÉ. Revista de Educação Matemática**, Universidade Estadual de Campinas, v. 28, p. 1–18, 2020.

DAUGHERTY, Richard. National curriculum assessment: A review of policy, 1987-1994. Psychology Press, 1995.

DBR-COLLECTIVE. Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry. **Educational Researcher**, v. 32, n. 1, p. 5–8, jan. 2003. ISSN 0013-189X, 1935-102X. Disponível em: http://journals.sagepub.com/doi/10.3102/0013189X032001005.

GONDIM, Hellen Fernandes. Probabilidade e probabilidade geométrica: conceitos e exemplos aplicáveis no ensino básico. 2013.

JONES, Graham A.; THORNTON, Carol A. An Overview of Research into the Teaching and Learning of Probability. *In*: JONES, Graham A. (Ed.). **Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning**. Boston, MA: Springer US, 2005, (Biblioteca de Educaááo Matemática). p. 65–92. ISBN 978-0-387-24530-0. Disponível em: https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_4.

JÚNIOR, Ailton Paulo de Oliveira; FERNANDES, José António; NETO, Gustavo Alves Caetano; PRATA, Alessandra Nepomuceno. O ensino de probabilidade a partir da geometria para alunos do ensino médio: o jogo da roleta. Sociedad de Educación Matemática Uruguaya, 2013.

KNEUBIL, Fabiana Botelho; PIETROCOLA, Maurácio. A PESQUISA BASEADA EM DESIGN: VISÃO GERAL E CONTRIBUICÕES PARA O ENSINO DE CIÊNCIAS. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 22, n. 2, p. 01–16, ago. 2017. ISSN 1518-8795. Number: 2. Disponível em: https://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/article/view/310.

LESTER, FK. National council of teachers of mathematics. **Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics. Charlotte, NC: Information Age Pub**, 2007.

LOPES, Celi Espasandin. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. **Cadernos Cedes**, SciELO Brasil, v. 28, p. 57–73, 2008.

LOPES, Celi Espasandin; SOUZA, Leandro de Oliveira. Aspectos filosóficos, psicológicos e políticos no estudo da Probabilidade e da Estatística na Educação Básica
 Philosofical, phisicological and political aspects in study of probability and statistics in Elemehentary, Middle and High School. **Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 18, n. 3, 2016. ISSN 1983-3156. Number: 3. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/31494.

MEHEUT, Martine. Teaching-Learning Sequences Tools for Learning and/or Research. *In*: BOERSMA, Kerst; GOEDHART, Martin; JONG, Onno de; EIJKELHOF, Harrie (Ed.). **Research and the Quality of Science Education**. Dordrecht: Springer Netherlands, 2005. p. 195–207. ISBN 978-1-4020-3673-6. Disponível em: https://doi.org/10.1007/1-4020-3673-6_16.

MEHEUT, Martine; PSILLOS, Dimitris. Teaching–learning sequences: aims and tools for science education research. **International Journal of Science Education**, v. 26, n. 5, p. 515–535, abr. 2004. ISSN 0950-0693. Publisher: Routledge _eprint: https://doi.org/10.1080/0950069032000097361. Disponível em: https://doi.org/10.1080/0950069032000097361.

MENDOZA, Pereira; SWIT, J. Text, **Why teach statistics and probability - a rationale**. 2015. Last Modified: 2015-09-30T09:26-04:00. Disponível em: https://causeweb.org/cause/research/literature/why-teach-statistics-and-probability-rationale.

MENEGHETTI, Renata C Geromel; BATISTELA, Rosemeire de Fátima; BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. A pesquisa sobre o ensino de probabilidade e estatística no brasil: um exercício de metacompreensão. **Bolema-Boletim de Educação Matemática**, v. 24, n. 40, p. 811–833, 2011.

NETO, Vicente Mastropaulo. **Combinatória e probabilidade com aplicações no ensino de geometria**. 2014. Tese (Doutorado) — [sn], 2014.

NUNES, Roberto da Silva; NUNES, José messildo Viana. Modelos constitutivos de sequências didáticas: enfoque na teoria das situações didáticas. **Revista Exitus**, v. 9, n. 1, p. 148–174, jan. 2019. Disponível em: http://www.ufopa.edu.br/portaldeperiodicos/index.php/revistaexitus/article/view/719.

PEREIRA, Nilton Mullet; RODRIGUES, Mara Cristina de Matos. BNCC e o passado prático: temporalidades e produção de identidades no ensino de história. **Education Policy Analysis Archives**, v. 26, p. 107–107, 2018.

PESSANHA, Márlon; PIETROCOLA, Maurício. O Ensino de Estrutura da Matéria e Aceleradores de Partículas: Uma Pesquisa Baseada em Design. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, v. 16, n. 2, p. 361–388, set. 2016. ISSN 1984-2686. Number: 2. Disponível em: https://periodicos.ufmg.br/index.php/rbpec/article/view/4379.

PESSANHA, Márlon Caetano Ramos. **Estrutura da matéria na educação secundária: obstáculos de aprendizagem e o uso de simulações computacionais**. fev. 2014. Tese (Doutorado em Ensino de Física) — Universidade de São Paulo, São Paulo, fev. 2014. Disponível em: http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/81/81131/tde-28042014-202005/.

PFANNKUCH, Maxine. Probability and Statistical Inference: How Can Teachers Enable Learners to Make the Connection? *In*: JONES, Graham A. (Ed.). **Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning**. Boston, MA: Springer US, 2005, (Biblioteca de Educação Matemática). p. 267–294. ISBN 978-0-387-24530-0. Disponível em: https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_12.

QUEIROZ, Cileda de. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? **REVEMAT-Revista Eletrônica de Matemática**, Universidade do Extremo Sul Catarinense, v. 2, n. 1, p. 50–67, 2007.

RITTER, Denise; BULEGON, Ana Marli. Sequência didática para o ensino de probabilidade. 2021.

RODRIGUES, Marcelo R. **A urna de Bernoulli como modelo fundamental no ensino de probabilidade**. 2007. Tese (Dissertação), 2007. Disponível em: http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do?select_action=&co_obra=78195.

ROTONDO, Márcio Leandro; COIMBRA, Débora; AUTH, Milton Antônio. UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA ABORDAR O SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES. **Caminhos da Educação Matemática em Revista (Online)**, v. 11, n. 4, p. 139–162, ago. 2021. ISSN 2358-4750. Number: 4. Disponível em: https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/1148.

RUSSO, Miguel Henrique; AZZI, Roberta Gurgel. Plano nacional de educação e qualidade de ensino: considerações sobre a autoeficácia dos agentes escolares. **EccoS–Revista Científica**, n. 39, p. 167–183, 2016.

SAMA, Suzi. Caminhos trilhados pelo GT12 nas pesquisas em Educação Estatística no Brasil, no período de 2016 a 2018. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 14, p. 1–18, set.

2019. ISSN 1981-1322. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2019.e62755.

SANCHEZ, Ernesto; VALDEZ, Julio. Las ideas fundamentales de probabilidad en el razonamiento de estudiantes de bachillerato. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, v. 11, p. 127–143, maio 2017. ISSN 2254-4313. Publisher: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Disponível em: http://www.aiem.es/index.php/aiem.

SANCHEZ, Mariano. O que propõe os PCNS? *In*: **O CURRÍCULO EM SUAS INTERFACES COM A EDUCACÃO BÁSICA E SUPERIOR**. EDITORA CRV, 2013. ISBN 978-85-8042-720-2. Disponível em: https://editoracrv.com.br/produtos/detalhes/3915-detalhes.

SANTANA, Giordane Lima. O RSTUDIO como suporte no ensino de probabilidade sob a abordagem frequentista. dez. 2020. Accepted: 2021-03-24T17:26:33Z Publisher: Universidade Federal do Tocantins. Disponível em: http://repositorio.uft.edu.br/handle/11612/2454.

SANTOS, Maria José Costa dos. O currículo de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental na base nacional comum curricular (BNCC): os subalternos falam? **Horizontes**, v. 36, n. 1, p. 132–143, abr. 2018. ISSN 2317-109X. Number: 1. Disponível em: https://revistahorizontes.usf.edu.br/horizontes/article/view/571.

SILVA, Lucenildo Elias da. EDUCACÃO MATEMÁTICA E A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC): UM DESAFIO PARA A EDUCACÃO BÁSICA. **Humanidades & Inovação**, v. 6, n. 6, p. 51–61, maio 2019. ISSN 2358-8322. Number: 6. Disponível em: https://revista.unitins.br/index.php/humanidadeseinovacao/article/view/1325.

SILVA, Rita de Cássia Batista da. doctoralThesis, **Justiça em jogos : compreensões de estudantes (crianças e adultos) e professores à luz de demandas cognitivas da probabilidade.** 2021. Accepted: 2021-10-13T19:25:26Z Publisher: Universidade Federal de Pernambuco. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/41317.

TARR, James E.; LANNIN, John K. How Can Teachers Build Notions of Conditional Probability and Independence? *In*: JONES, Graham A. (Ed.). **Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning**. Boston, MA: Springer US, 2005, (Biblioteca de Educação Matemática). p. 215–238. ISBN 978-0-387-24530-0. Disponível em: https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_10.

TEIXEIRA, Beatriz de Basto. Parâmetros curriculares nacionais, plano nacional de educação e a autonomia da escola. *In*: **23rd Annual Meeting of the National Association of Educational Research and Graduate Studies (ANPED), Caxambu, Brazil**. *[S.l.: s.n.]*, 2000. p. 24–28.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães; PASSOS, Claudio Cesar Manso. Um pouco da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau. **Zetetike**, v. 21, n. 1, p. 155–168, 2013. ISSN

2176-1744. Number: 1. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646602.

TVERSKY A; KAHNEMANAH, D. Curso De Tarot. **Julgamento sob incerteza: heurísticas e viéses, 1974 - uma análise**. 2018. Disponível em: https://geecomportameheutntal.com/2018/09/14/julgamento-sob-incerteza-heuristicas-e-vieses-1974-uma-analise/.

WALICHINSKI, Danieli; Santos Junior, Guataccara dos; ISHIKAWA, Eliana Claudia Mayumi. Educação estatística e parâmetros curriculares nacionais: algumas considerações. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, n. 3, dez. 2014. ISSN 1982-873X. Number: 3. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/1761.

WATSON, Jane. The Probabilistic Reasoning of Middle School Students. *In*: JONES, Graham A. (Ed.). **Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning**. Boston, MA: Springer US, 2005, (Biblioteca de Educaááo Matemática). p. 145–169. ISBN 978-0-387-24530-0. Disponível em: https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_7.

APÊNDICES

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA A PESQUISA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA PESQUISA NA ÁREA DE ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA DESTINADO AOS ALUNOS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA – UBERLÂNDIA - MINAS GERAIS

Título do Projeto: Uma sequencia didática para o ensino de conceitos em probabilidade e estatística

Pesquisadores responsáveis: Profa. Dra. Débora Coimbra e-mail: debora.coimbra@ufu.br Prof. Bruno Castilho Rosa e-mail: bruni_cast@hotmail.com (64) 981068003

1. Esta seção fornece informações acerca do estudo em que estará participando:

Você está sendo convidado(a) a participar em uma pesquisa que visa analisar uma proposta de ensino sobre a temática "Probabilidade e Estatística" no ensino médio, a partir da utilização de diversas estratégias didáticas diferentes (discussões entre os estudantes, realização de experimentos físicos e virtuais, resolução de problemas, e utilização de softwares didáticos). Os resultados deste estudo poderão contribuir para que professores aprimorem suas atividades em sala de aula, colaborando para a aprendizagem dos estudantes.

Em caso de dúvida, você pode entrar em contato com o pesquisador responsável através do telefone e endereço eletrônico fornecidos nesse termo.

Os procedimentos de pesquisa, caso haja consentimento dos envolvidos, estarão ligados à:

I. coleta e reprodução de tarefas realizadas nas aulas de matemática;

II. filmagem e gravação de áudio das atividades realizadas nas salas de aula para posterior transcrição e análise dos processos de ensino e aprendizagem.

Na comunicação de resultados da pesquisa, os nomes do professor e dos alunos serão retirados de todos os trabalhos e substituídos por nomes fictícios. Os pesquisadores se comprometem, ainda, a utilizar os dados aqui coletados apenas para fins desta pesquisa ou de outras, com propósitos semelhantes e com os mesmos cuidados éticos na preservação da identidade dos envolvidos.

2. Esta seção descreve os seus direitos como participante desta pesquisa:

Você pode fazer perguntas sobre a pesquisa a qualquer momento e tais questões serão respondidas.

A participação é confidencial. Apenas os pesquisadores responsáveis terão acesso à sua identidade. No caso de haver publicações ou apresentações relacionadas à pesquisa, nenhuma informação que permita a identificação será revelada.

A participação é confidencial. Você é livre para deixar de participar na pesquisa a qualquer momento. Este estudo envolverá gravação de áudio e vídeo. Apenas os pesquisadores responsáveis terão acesso a estes registros.

O material da pesquisa será arquivado no Banco de Dados do grupo de pesquisa e só poderão ser acessados por pesquisadores com interesses de pesquisa em questões de ensino e aprendizagem em Ciências e Matemática e que se comprometerem aos mesmos cuidados éticos aqui apresentados.

Este estudo não envolve qualquer risco à saúde mental ou física dos alunos e não irá interferir, senão positivamente, na qualidade do ensino e na atenção, a elas dispensada, em sala de aula. Este documento foi redigido em acordo com as normas constantes na Resolução CNS 466/2012.

3. Esta seção indica que você está dando seu consentimento para participar da pesquisa:

Responsável pelo(a) participante:

A pesquisadora Prof. Dra. Debora Coimbra do Grupo de Pesquisas em Campos Conceituais da UFU e do IFMG solicitou a minha participação neste estudo intitulado “Uma sequencia didática para o ensino de conceitos em probabilidade e estatística”.

Eu concordo em participar desta investigação, autorizo a utilização de trabalhos produzidos em aulas de Matemática e o registro em vídeo de atividades em sala de aula.

Estou ciente, ainda, de que os registros em áudio e vídeo farão parte de um banco de dados que poderão ser utilizados em outras pesquisas do grupo do qual a pesquisadora faz parte, para estudo e compreensão de processos de ensino e aprendizagem.

Eu li e compreendi as informações fornecidas. Eu entendi e concordo com as condições do estudo como descritas.

Eu entendo que este documento foi redigido em duas vias idênticas e que receberei uma cópia assinada deste formulário de consentimento.

Eu, voluntariamente, aceito participar desta pesquisa. Portanto, concordo com tudo que está escrito acima e dou meu consentimento.

Uberlândia, ______de _____________________ de 2021.

Nome legível do aluno(a):

____.

Assinatura do(a) aluno(a):

____.

Pesquisadora:

Eu garanto que este procedimento de consentimento foi seguido e que eu respondi todas as questões que o participante colocou da melhor maneira possível.

Uberlândia, 28 de Julho de 2021.

Assinatura da Orientadora da Pesquisa

Bruno Castilho Rosa

Assinatura do Professor

APÊNDICE B – LISTA DE ATIVIDADES

1) Considere o experimento do lançamento de um dado honesto e responda o que se pede:

a) O experimento é aleatório? Explique o que significa o termo e justifique!

b) Quantos e quais são os resultados possíveis?

c) A chance de sair, em um lançamento, o número 6 na face voltada para cima é maior do que sair o número 1? Justifique!

d) Lançar o dado dez vezes ou lançar dez dados simultaneamente são experimentos equivalentes?

e) O resultado em um lançamento tem relação com um próximo lançamento?

2) Qual evento é mais provável:

Evento A: obter três "caras"jogando uma moeda seis vezes

Evento B: obter três "caras"jogando seis moedas simultaneamente

( ) Evento A

( ) Evento B

( ) Os dois eventos são igualmente prováveis

Justifique

3) Uma sala de aula há 30 alunos. Se registrar os 5 primeiros alunos que saírem dessa sala é possível identificar quantos meninos e meninas há na sala? Justifique!

4) É possível resolver a situação anterior utilizando a urna de Bernoulli? Explique

5. (adaptado de ENEM 2012) Em um jogo há duas urnas com 10 bolas do mesmo tamanho e massa. A tabela a seguir indica a quantidade de bolas de cada cor em cada urna.

Cor	Urna 1	Urna 2
Amarela	4	0
Azul	3	1
Branca	2	2
Verde	1	3
Vermelha	0	4

Uma jogada consiste em:

1. o jogador apresenta um palpite sobre a cor da bola que será retirada por ele da urna 2;

2. ele retira, aleatoriamente, uma bola da urna 1 e a coloca na urna 2, misturando-a com as que lá estão;

3. em seguida ele retira, também aleatoriamente, uma bola da urna 2;

4. se a cor da bola retirada for a mesma do palpite inicial, ele ganha o jogo.

Qual cor deve ser escolhida pelo jogador para que ele tenha a maior probabilidade de ganhar?

6. (adaptado de ENEM 2012) José, Paulo e Antonio estão jogando dados não-viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultanea-mente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão a soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antonio acredita que sua soma será igual a 8. Com essa escolha, quem tem maior probabilidade de acertar sua respectiva soma? Justifique.

7. Três moedas são lançadas. Encontre a probabilidade de se obter:

a) nenhuma cara;

b) pelo menos uma cara;

c) mostre que os eventos “cara na primeira moeda” e “coroa nas duas últimas moedas” são independentes;

d) mostre que os eventos “cara em duas moedas” e “cara em três moedas” são dependentes.