

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS E NATURAIS DO PONTAL

NATÁLIA OLIVEIRA DO NASCIMENTO

ABORDAGEM DA CURVA CATENÁRIA EM SALA DE AULA: um estudo sobre sua história, aplicações e uma proposta de atividade para o Ensino Médio e Superior

Ituiutaba

2023

NATÁLIA OLIVEIRA DO NASCIMENTO

ABORDAGEM DA CURVA CATENÁRIA EM SALA DE AULA: um estudo sobre sua história, aplicações e uma proposta de atividade para o Ensino Médio e Superior

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal (ICENP/UFU) como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rogério Fernando Pires

Ituiutaba

2023

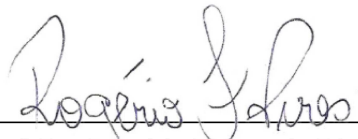
NATÁLIA OLIVEIRA DO NASCIMENTO

ABORDAGEM DA CURVA CATENÁRIA EM SALA DE AULA: um estudo sobre sua história, aplicações e uma proposta de atividade para o Ensino Médio e Superior

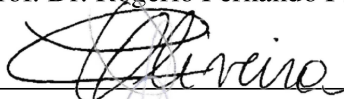
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal (ICENP/UFU) como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Ituiutaba, 15 de dezembro de 2023.

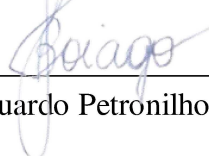
Banca Examinadora:



Orientador: Prof. Dr. Rogério Fernando Pires – ICENP/UFU



Prof. Dra. Cristiane Coppe de Oliveira – ICENP/ UFU



Prof. Dr. Carlos Eduardo Petronilho Boiago (ICENP/UFU)

Dedico este trabalho a minha família, em especial aos meus pais Ricardo Viera do Nascimento e Patrícia Elias de Oliveira, pelo apoio e incentivo, e a todos os meus colegas e professores que contribuíram durante a minha graduação .

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor Dr. Rogério Fernando Pires, por ter me apoiado desde o começo da graduação e por me orientar na elaboração deste trabalho, o incentivo do professor foi essencial para que eu pudesse finalizar o curso. Agradeço aos demais professores do curso por todo auxílio e pelos ensinamentos. Agradeço minha mãe Patrícia Elias de Oliveira, por ter me dado suporte e incentivado neste reta final da graduação. Agradeço meu pai Ricardo Vieira do Nascimento que sempre incentivou a buscar conhecimento, e é um dos responsáveis pela minha paixão por Matemática. E sei, de onde é que ele esteja, que ele também olhou por mim durante todo este processo. Agradeço a todos os meus familiares e amigos que contribuíram de alguma forma para a minha graduação, e suporte para desenvolvimento deste trabalho. Agradeço à Universidade Federal de Uberlândia, seu corpo docente, direção e administração pela oportunidade de realizar o curso.

“Matemática é a linguagem em que
Deus escreveu o universo.”

Galilei Galileu

RESUMO

A curva catenária pode ser observada desde pequenos detalhes do cotidiano, como as correntes de uma persiana, e até em grandes construções, como é caso das pontes pênsis. Essa curva também pode ser vista na natureza, a catenária está presente no ovo, na formação da teia de aranha e no perfil da barriga de uma grávida. A partir disso, a abordagem da catenária em sala de aula se torna relevante e pode levar os alunos a se aproximarem mais da Matemática através dessa curva que possui tantas aplicações. Com isso, o presente trabalho tem por objeto apresentar uma proposta de atividade para abordagem da catenária nos Ensinos Médio e Superior. Para isso, através da pesquisa bibliográfica, foi feito um estudo sobre o desenvolvimento histórico e acerca de abordagem que pudessem ser trabalhadas no ensino de Matemática. A atividade proposta no presente estudo, apresentará o contexto histórico, utilização da tecnologia em ambiente escolar e a importância da Modelagem Matemática no processo de ensino e aprendizagem. Com a finalidade de desenvolver o processo de Modelação da catenária, por meio de fotos de cenários reais da vida dos alunos, será feito o ajuste do gráfico da curva utilizando o *software* Geogebra, na tentativa de mostrar as diferentes aplicações da curva no cotidiano das pessoas, aproximar a Matemática da realidade e mostrar formas de abordar os conceitos envolvidos nesse objeto matemático que podem ser tratados tanto no Ensino Médio, quanto no Ensino Superior.

Palavras-chave: catenária; ensino de Matemática; Modelagem Matemática; Geogebra no ensino; tendências para o ensino de Matemática.

ABSTRACT

The catenary curve can be seen in small everyday details, such as the chains on a shutter, and even in large constructions, such as suspension bridges. This curve can also be seen in nature: the catenary is present in the egg, in the formation of a spider's web and in the profile of a pregnant woman's belly. From this point of view, the catenary approach in the classroom becomes relevant and can bring students closer to mathematics through this curve that has so many applications. With this in mind, the objective of this paper is to present a proposal for an activity to insert the catenary in secondary and higher education. To this end, bibliographical research was used to study the historical development and approaches that could be used to teach mathematics. The activity proposed in this search will present the historical context, the use of technology in the school environment and the importance of Mathematical Modeling in the teaching and learning process. In order to develop the catenary modeling process, with photos of real scenarios from the students' lives, the graph of the curve will be adjusted using Geogebra software, in an attempt to show the different applications of the curve in people's daily lives, bring mathematics closer to reality and show ways of approaching the concepts involved in this mathematical object that can be dealt with in both secondary and higher education.

Keywords: catenary; mathematics teaching; mathematical modeling; Geogebra in teaching; trends in mathematics education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 -	Sobreposição de uma catenária em uma parábola.....	17
Figura 2 -	Exemplo de uma curva catenária.....	18
Figura 3 -	Curva catenária a partir da função do cosseno hiperbólico.....	20
Figura 4 -	Gráfico da catenária.....	23
Figura 5 -	Tela inicial do <i>software</i> Geogebra.....	35
Figura 6 -	Página inicial do <i>site</i> do Geogebra.....	36
Figura 7 -	Objeto que representa a catenária.....	39
Figura 8 -	Descrição de vídeos online que abordam a catenária.....	42
Figura 9 -	Catenária no Geogebra.....	44
Figura 10 -	Variações da curva catenária.....	45
Figura 11 -	Comparação entre o objeto que representa a catenária.....	45
Figura 12 -	Gráfico da catenária no Geogebra e um demarcador de estacionamento	46
Figura 13 -	Passos do ajuste da catenária no Geogebra com a foto de um ovo..	47
Figura 14 -	Passos do ajuste da catenária no Geogebra com a foto de um ovo..	48
Figura 15 -	Os gráficos da catenária e da parábola em foto de fachada de um prédio.....	50
Figura 16 -	O semicírculo no Geogebra com foto da fachada de um prédio.....	50
Figura 17 -	Ajuste da catenária no Geogebra com fotos de cenários do cotidiano	51

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	12
1 A CURVA CATENÁRIA E SUAS ORIGENS HISTÓRICAS.....	16
2 USO DA MODELAGEM MATEMÁTICA EM SALA DE AULA.....	25
3 TECNOLOGIA EM SALA DE AULA E O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA....	31
4 A CATENÁRIA EM SALA DE AULA: TRÊS TENDÊNCIAS DE ABORDAGEM PARA O ENSINO	38
4.1 Contextualização histórica da catenária	39
4.2 Aplicações da Catenária.....	41
4.3 Modelação da curva catenária pelo Software Geogebra	43
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	53
REFERÊNCIA	55

INTRODUÇÃO

A curva catenária é uma das mais presentes no cotidiano, ela pode ser observada em pontes pênsis, fios condutores de corrente elétrica, iglus, alças de sacolas, arcos invertidos em forma de catenária em construções, túneis, domos de catedrais e inúmeras outras estruturas desenvolvidas pelo homem. Para quem não conhece a catenária, notar e compreender a presença dessa curva nos mais diversos cenários tão presentes no cotidiano já é relevante. Mas a catenária se mostra ainda mais importante quando aparece na natureza sem intervenção humana. A catenária está presente no ovo, na barriga de uma mulher grávida, em teias de aranha, cipós, extremidades das raízes de algumas plantas, dentre outras situações desenvolvidas pela natureza.

A princípio, não é imediato pensar que um ovo e a disposição dos fios elétricos suspensos na rua possuem os mesmos conceitos matemáticos por trás de sua estrutura. Esta ligação é explicada pela definição da catenária e por suas propriedades físicas, temas abordados ao decorrer deste trabalho. Apesar das inúmeras aplicações da catenária, geralmente não é uma curva trabalhada no Ensino Médio e quando apresentada em cursos do Ensino Superior, que têm disciplinas de Matemática em suas grades, em especial, o curso de Matemática, que nem oferece um estudo de suas aplicações.

A pouca abordagem dessa curva não está ligada ao conteúdo matemático envolvido, uma vez que sua expressão algébrica é determinada por meio do cosseno hiperbólico e, conseqüentemente, também pela função exponencial, ambas as funções citadas são muito trabalhadas ao decorrer do ensino superior. A expressão que representa a curva catenária é dado por

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a}),$$

onde a é a razão entre a tensão no ponto inicial e a densidade linear (peso/unidade de comprimento) da corda. Sendo assim, um pré-requisito para o trabalho dessa curva nas aulas de Matemática é que antes os alunos tenham tido contato com o cosseno hiperbólico.

Com o intuito de buscar apontamentos sobre a catenária nos documentos que orientam o ensino médio, foram escolhidos dois currículos. Ao observar dois materiais de estados diferentes, o Currículo Paulista Etapa Ensino Médio (publicado em 2020 e segue em vigor) e o os Planos de Curso do Currículo Referência de Minas Gerais de 2023, a catenária não é

apontada como objeto do conhecimento. No currículo do estado de São Paulo há a presença da função exponencial e da função cosseno, o que é favorável para a introdução do cosseno hiperbólico e, também, da catenária. No entanto, no currículo de Minas Gerais não é citado a função exponencial, o que não contribui para o estudo da curva catenária. Os currículos do Ensino Médio podem sofrer variações de estado para estado, assunto que merece um aprofundamento, mas não é o foco desta pesquisa no momento. Apesar de não ser um dos objetivos deste trabalho analisar esses materiais, é importante reconhecer que os conteúdos trabalhados em sala podem variar de acordo com o estado, cidade, escola e, inclusive, de acordo com o professor.

Por isso, para abordagem da catenária no Ensino Médio, é preciso avaliar com quais conteúdos esses alunos tiveram contato antes e se há a possibilidade de abordar a curva catenária. A abordagem dessa curva no Ensino Médio nem sempre será viável, uma vez que mesmo os conteúdos já programados enfrentam problemas com o tempo disponível. Com isso, é fundamental que o professor avalie a viabilidade de incluir a curva catenária ao decorrer do ano letivo. É importante ressaltar, que cada escola, e até mesmo turma de alunos, pode apresentar condições singulares que devem ser relevadas para a aplicação da atividade proposta neste trabalho, assim como as adaptações se necessárias.

No entanto, quando se volta o olhar para a graduação em Matemática, seja para os cursos de bacharelado ou licenciatura, não há empecilhos para realizar o estudo da catenária e suas aplicações em algum momento do curso. Em âmbito da graduação, a curva pode ser inserida como conteúdo no começo do curso como continuidade do cosseno hiperbólico e posteriormente a demonstração da expressão com o estudo de cálculo avançado. Assim como acontece nas escolas, os currículos das instituições que oferecem Ensino Superior podem apresentar diferenças significativas. Diante disso, este trabalho não irá propor um ano ou disciplina específica para abordar a catenária no Ensino Médio, a possibilidade da abordagem deste conteúdo fica por incumbência do docente.

Tendo em vista que a curva catenária possui muitas aplicações possíveis de serem observadas em cenários reais, como os exemplos citados no início desta introdução, acredita-se que essa curva e suas aplicações devem ser abordadas em cursos de graduação em Matemática ou em outros que tenham disciplinas relacionadas à Matemática e, sempre que possível, ser trabalhada com os alunos do Ensino Médio. A partir deste pensamento, o presente trabalho tem o seguinte objetivo: apresentar uma proposta de atividade para abordagem da catenária nos Ensinos Médio e Superior.

Além de buscar contribuir para o enriquecimento de materiais e propostas didáticas que abordem a catenária. A atividade desenvolvida, assim como os demais elementos da pesquisa, servirá como um guia norteador para o professor, sendo indicado que o professor faça alterações que respeitem as individualidades do público alvo. Aqui cabe ressaltar a importância da elaboração do plano de aula.

Qualquer atividade, para ter sucesso, necessita ser planejada. O planejamento é uma espécie de garantia dos resultados. E sendo a educação, especialmente a educação escolar, uma atividade sistemática, uma organização da situação de aprendizagem, ela necessita evidentemente de planejamento muito sério. Não se pode improvisar a educação, seja qual for o seu nível. (SCHMITZ, 2000, p.101 *apud* LOPES, 2014, p.24).

Neste sentido, espera-se que esta pesquisa possa de alguma forma inspirar no processo de elaboração de plano de aula para a catenária ou abordagem de outros conteúdos matemáticos.

Para o desenvolvimento deste trabalho e embasamento da elaboração da atividade, foi realizada uma pesquisa bibliográfica. Na pesquisa foram consultados artigos, dissertações, livros, revistas, documentos, dentre outros materiais, sendo alguns impressos e outros com acesso digital. A pesquisa bibliográfica é o levantamento ou revisão de obras publicadas a respeito do tema que direciona o trabalho científico, e tem por objetivo reunir e analisar esses textos para apoiar a pesquisa (SOUZA; OLIVEIRA; ALVES, 2021). A pesquisa bibliográfica é um meio de aprimorar e atualizar o conhecimento, além de possibilitar a união ou comparação de obras já publicadas. O estudo e utilização de materiais como referência devem ser utilizados com responsabilidade e sempre referenciar todos os autores. A pesquisa bibliográfica está presente de alguma forma em todos os trabalhos científicos, uma vez que o primeiro passo ao iniciar uma pesquisa é buscar obras prévias sobre o assunto abordado, assim como o estudo de conhecimentos que já foram desenvolvidos por outros autores (MACEDO, 1995).

Após realizar as pesquisas, sobre a curva catenária e algumas metodologias trabalhadas em sala de aula, foram escolhidas três formas diferentes de abordagem para o conteúdo. O estudo da Modelagem Matemática e o processo de Modelação foram essenciais para desenvolver este trabalho e, em específico, para a preparação da atividade. A Modelagem Matemática propõe transformar algum problema da realidade em problemas matemáticos e busca resoluções que podem ser aplicadas na vida real. Biembengut (2016) aponta a importância da Modelagem no processo de ensino e aprendizado, assim como a relevância de trazer aplicações dos conteúdos para sala de aula. A autora enfatiza também que ao realizar o processo de Modelação as chances de o aluno compreender o conteúdo aumentam, além de poder instigar os alunos para realizarem este processo posteriormente.

O trabalho foi dividido em quatro capítulos. O Capítulo 1 faz uma abordagem histórica da catenária, que é importante para contextualização e compreensão dos primeiros estudos registrados acerca da curva. Bassanezi (2009) defende a importância de estudar a história e origem do conteúdo abordado em sala de aula, além de trazer a origem histórica como uma possibilidade de abordagem da Modelagem Matemática, tema foco do Capítulo 2. Para desenvolver a Modelagem e mostrar as aplicabilidades da catenária, o uso da tecnologia será uma ferramenta essencial neste processo. Por isso, o Capítulo 3 discute a importância da tecnologia no processo de ensino e aprendizagem e faz a apresentação do Geogebra (software de matemática dinâmica).

Sendo assim, tem-se três tendências de abordagem em sala de aula, a contextualização histórica, uso de recurso tecnológicos e a Modelagem Matemática. Fundamentado nessas abordagens, o Capítulo 4 se trata de uma atividade para ser aplicada no final do Ensino Médio na disciplina de Matemática ou no início da Graduação em Matemática, ou outros públicos que se possam beneficiar com este estudo e atendem os quesitos prévios citados no começo deste capítulo. Um exemplo seria a aplicação dessa atividade para alunos graduandos de Física, com o aprofundamento nas propriedades físicas na catenária. A proposta é que a atividade seja dividida em etapas, a primeira para fazer a introdução histórica da catenária, a segunda com o intuito de abordar as aplicações e a última para fazer a modelagem de fotos (tiradas pelos alunos) no software Geogebra. Espera-se que de posse desta proposta, o professor consiga elaborar um plano de aula com base na atividade proposta, e possa realizar as alterações e adaptações que julgar necessárias para melhor atender as necessidades do público com o qual trabalha.

1 A CURVA CATENÁRIA E SUAS ORIGENS HISTÓRICAS

Este capítulo trata do desenvolvimento da concepção da catenária ao longo da história, que consistiu em um processo de depuração de ideias até se chegar no entendimento que se tem nos dias atuais. A partir deste estudo histórico, será proposta uma atividade que aborda a história da catenária como ponto de partida para o desenvolvimento do conteúdo em sala de aula (proposta presente no Capítulo 4 deste trabalho).

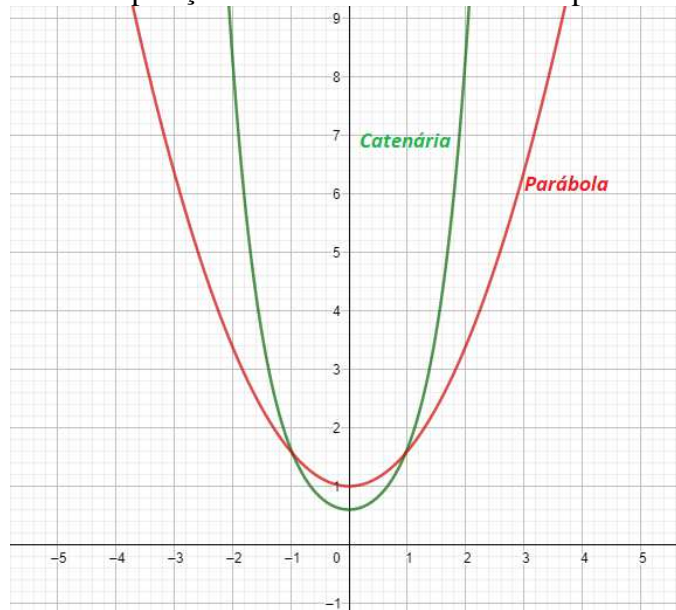
De acordo com Vasconcelos (2013a, p. 30) o estudo da curva catenária “teve início há mais de 2.500 anos. Pitágoras descobriu que um tom de um som depende do comprimento da corda que o produz, e que duas cordas tracionadas com a mesma força produzem tons diferentes”. Mas a questão se deu quando os estudiosos buscaram compreender a curva que uma corda estendida entre dois pontos elevados (suficientes para a corda não tocar o chão ou outra superfície) formava. A concepção desta mesma curva é possível ser observada a partir de uma corrente, fio, linha ou similares (todos flexíveis) desde que tenham o mesmo peso.

Mendes (2017) aponta que os primeiros registros de tal assunto surgiram por volta de 1452-1519 e 1564-1642 com Leonardo da Vinci e Galileu Galilei, respectivamente, que observaram a catenária, mas a confundiram com uma parábola. Sobre este assunto Galileu (SASSINE; BUSTILLOS, 2009 *apud* DIAS, 2019, p. 16) em seu *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze*, publicado em 1638 “observa a forma de uma corrente suspensa e conclui (erroneamente) que a curva formada era uma parábola em analogia com o voo de um projétil”. Ademais, ainda sobre este assunto Boyer (1974, p. 239) reitera que Galileu, supôs:

[...] ter encontrado outra aplicação da parábola na curva de suspensão de uma corda ou corrente (catena) flexível, mas mais tarde, ainda no mesmo século, os matemáticos demonstraram que essa curva, a catenária, não só não é uma parábola como nem sequer é álgebra.

Na Figura 1, a seguir observa-se que embora a curva catenária e a parábola sejam distintas do ponto de vista das expressões matemáticas que as descrevem, visualmente elas são muito similares.

Figura 1- Sobreposição de uma catenária em uma parábola



Fonte: Elaborado pela autora no *software* Geogebra.

Reiterando, Freitas (2015) e Lima e Araújo (2018) afirmam que ainda que à primeira vista a catenária aparenta a forma geral da parábola, esta não é descrita pela função cosseno hiperbólico. Nesta mesma linha de raciocínio, Pereira e Melo (2016, p. 4) alegam que a “curva catenária é muito semelhante, a olho nu, a uma parábola, porém a única maneira de distinguir uma da outra é por meio de suas equações, ou seja, a catenária é dada pela função hiperbólica, enquanto a parábola é uma função polinomial”. Destarte, nas palavras de Sowkowski (1994, p. 558 *apud* PEREIRA; MELO, 2016, p. 4).

A função cosseno hiperbólico pode ser usada para descrever a forma de um fio flexível suspenso pelas extremidades na mesma altura [...], as linhas de telefone ou de energia elétrica podem ser distendidas entre os postes dessa maneira. A forma do fio parece sugerir uma parábola, mas é, na realidade, uma catenária.

Em resumo, como pode ser observado a seguir, como dito anteriormente, a curva catenária e a parábola são duas curvas matemáticas que apesar de serem similares, elas possuem propriedades e características diferentes. Tal confusão entre as curvas fez com que os matemáticos da época levantassem diversos problemas sobre a curva que a princípio era considerada uma parábola, mas que foi facilmente provado o contrário. Com isso, a grande questão passou a ser encontrar a expressão que descreveria a curva,

Em 1675 Hooke, enunciado por Vasconcelos (2013a, p. 30), alegou que “na forma de anagrama que um arco incompreensível e livre de movimento, suportando seu próprio peso, poderia ser obtido invertendo-se a Catenária, qualquer que fosse a forma dela”. Neste contexto,

de acordo com Teixeira (2012), Mendes (2017) e Barbosa (2021), somente 44 anos mais tarde, com o lançamento do desafio para a comunidade matemática em 1690, divulgado por James Bernoulli que o problema proposto pelos estudiosos, que antes pensavam na catenária como uma parábola foi resolvido.

A solução desse problema foi um marco para diferenciar a catenária da parábola, que segundo Sassine e Bustillos (2009, p. 23), consistia em “descrever a função geradora da curva de um fio inextensível de comprimento e densidade conhecida, preso em suas extremidades e sujeito a ação do campo gravitacional” e que desde a época dos gregos era conjeturado tal problema. A solução desta problemática aconteceu como tantas outras soluções de problemas relacionados a ciência, que de acordo com Paulo (2014, p. 7) “antigamente incentivava-se a competição entre os matemáticos por meio de problemas propostos por eles mesmos, para comprovar quem seria o mais sábio”.

Assim, o problema da curva catenária foi proposto da seguinte maneira: “E agora vamos propor este problema: encontrar a curva formada por um fio pendente, livremente suspenso a partir de dois pontos fixos” (MAOR, 2008, p. 183). Nesta linha Jakob citado por Sassine e Bustillos (2009, p. 24) argumenta que “presumiu que o fio é flexível em todas as suas partes e que tem uma espessura constante e, portanto, uma densidade linear uniforme”. Tal problema pode ser mais bem visualizado a partir da Figura 2 a seguir:

Figura 2 – Exemplo de uma curva catenária



Fonte: Maor (2008, p. 184).

Com isso, devido ao interesse explosivo no estudo da curva catenária teve-se um grande avanço sobre esta e outras curvas no final do século VII (BOYER, 1974), essa fase da história ficou conhecida como época das curvas. Sabe-se que tal problema foi resolvido, por meio de

um incitamento lançado em que os “matemáticos Johann Bernoulli (1667-1748) - irmão de James, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e Christiaan Huygens (1629-1695)”, se sobressaíram (MENDES, 2017, p.15; BARBOSA, 2021).

Neste contexto, o período foi marcado por discussões e grandes desafios entre Newton, Leibniz e os irmãos Bernoulli. E para confirmar tal fato, é apresentado a seguir um trecho de uma carta que Johann Bernoulli fez a um amigo:

O senhor diz que meu irmão propôs esse problema; é verdade, mas será que isso significa que ele tinha a solução naquela oportunidade? Não. Quando ele propôs o problema, por minha sugestão, pois fui o primeiro a pensar nele, nenhum de nós dois era capaz de resolvê-lo; e, desesperados, achamos que era insolúvel. Até que o senhor Leibniz anúncio ao público, no jornal de Leipzig de 1690, p.360, que tinha resolvido o problema, mas não publicaria a solução, para dar tempo aos outros analistas. Foi isso que nos encorajou, a mim e a meu irmão, a atacarmos novamente o problema. Os esforços de meu irmão não tiveram sucesso; eu fui mais feliz, pois tive a habilidade (digo isso sem presunção, porque deveria eu esconder a verdade?) de resolver o problema e reduzi-lo à retificação da parábola. É verdade que isso me fez trabalhar durante toda uma noite. Isso representou muito naqueles dias e para minha pouca idade e experiência, mas na manhã seguinte, transbordando de alegria, corri até meu irmão, que ainda estava lutando miseravelmente com o nó górdio sem chegar a lugar nenhum, sempre pensando como Galileu que a catenária era uma parábola. Pare! Pare! disse-lhe eu, não se torture mais tentando provar a identidade de uma catenária e de uma parábola, pois isso é inteiramente falso. A parábola serve na construção da catenária, mas as duas curvas são tão diferentes que uma é algébrica e a outra transcendente (SASSINE; BUSTILLOS, 2009, p. 24-25).

Aqui é importante ressaltar que Paulo (2014) reitera essa informação, ao afirmar que “em 1646, um cientista holandês chamado Christian Huygens, provou que esta curva não poderia ser uma parábola, isso quando ele tinha dezessete anos de idade”. Entretanto, ele também não encontrou a curva correta que representasse a catenária. Isto posto, observa-se então que esses estudiosos perceberam que a forma da curva não era uma parábola, como muitos acreditavam inicialmente, mas sim uma curva transcendental, que enquanto Huygens resolveu pelo método geométrico, Leibniz e Johann foram pelo analítico. Eles tiveram suas resoluções publicadas no “*Acta eruditorum*”¹ em 1691, um ano depois de o problema ter sido proposto” (PAULO, 2014, p. 19). Apesar das diferentes abordagens todos chegaram à mesma solução.

Assim, aqui cabe ressaltar que de acordo com Vainsencher (1979) uma curva algébrica é o lugar dos pontos cuja as coordenadas cartesianas satisfazem uma equação polinomial. Já uma curva transcendental será aquela cuja as coordenadas cartesianas não satisfazem uma

¹ *Acta eruditorum* era um periódico científico da época que Leibniz tinha fundado (PAULO, 2014; MENDES, 2017).

equação polinomial, sendo exemplos de curvas de tal natureza, as cicloides, as exponenciais, as logarítmicas, a própria catenária, entre outras.

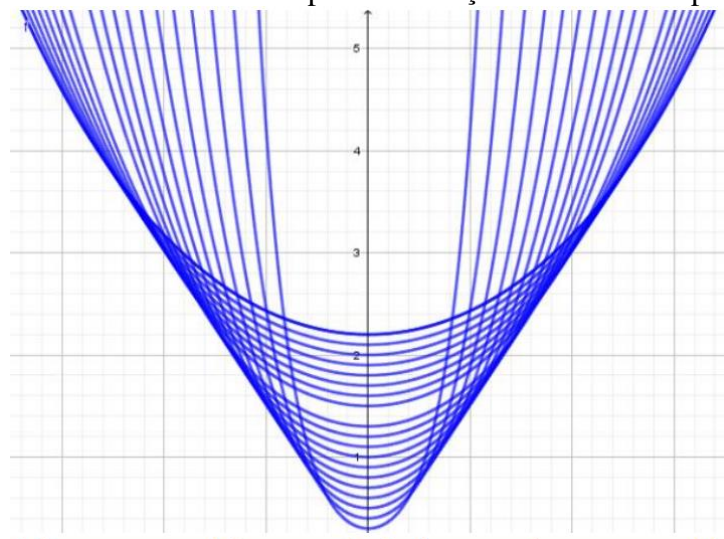
Nesta mesma linha, Mendes (2017, p. 19) reitera ainda que as peças do quebra-cabeça se encaixam perfeitamente, uma vez que “Jean Bernoulli conhecia e se comunicava com Leibniz, que por sua vez tinha como professor Huygens, que tinha Mersenne como pai e orientador, sendo este fascinado pelas obras de Galileu Galilei”. Ademais, outro ponto relevante sobre o referido assunto é em relação ao nome catenária, que foi utilizado pela primeira vez em 1690 por meio de carta endereçada a Leibniz que Huygens escreveu (ALHADAS, 2013).

A palavra *catena* tem origem no latim que significa cadeia ou correntes. Pereira e Melo (2016, p. 4) apontam a catenária como uma curva descrita por um cabo suspenso por suas extremidades, submetido apenas à força da gravidade. Isto posto, Alhadadas (2013, p. 46) em seu trabalho “Funções hiperbólicas no ensino médio”, define a catenária como uma “curva formada por um cabo flexível com densidade uniforme, pendurado entre dois pontos, sob a ação de seu próprio peso, onde o seu ponto que determina seu valor mínimo é $(0, a)$, onde $a > 0$ ”, tendo sua equação igual a:

$$y = a \cdot \cosh \frac{x}{a}$$

E sua representação gráfica, de acordo com Sousa, Alves e Souza (2022, p. 9) “é similar ao esboço apresentado na Figura 3:

Figura 3 - Curva catenária a partir da função do cosseno hiperbólico



Fonte: Sousa, Alves e Souza (2022, p. 9).

Na busca de outras concepções de catenária, O'connor e Robertson (2007 *apud* COELHO, 2008, p. 18), afirmam que a catenária “descreve uma família de curvas planas

semelhantes às que seriam geradas por uma corda suspensa pelas suas extremidades e sujeitas à ação da gravidade”. Corroborando, segundo Freitas (2015, p. 2) o estudo da catenária, descreve “uma família de curvas planas semelhantes às que seriam geradas por uma corda suspensa pelas suas extremidades e sujeitas a ação da gravidade”.

Sousa, Alves e Souza (2022, p. 7) afirmam que “a catenária, em um sentido estrito, não é uma curva, mas sim uma família de curvas, em que cada uma delas é determinada pelas coordenadas de seus extremos (x_0, y_0) , (x_1, y_1) e por seu comprimento L ”.

Pereira (2007 *apud* Brasil *et al.*, 2021, p. 70661), afirma que catenária é o nome dado “à curva formada quando um fio pesado, flexível, com densidade constante em todo seu comprimento e inextensível, é pendurado unicamente por suas extremidades, estando essas a uma mesma altura ou não”. Maor (2008, p. 185), define tal curva como:

A catenária revelou-se a curva cuja equação, na notação moderna, é $y = (e^{ax} + e^{-ax})/2a$, onde a é uma constante cujo valor depende dos parâmetros físicos da corrente – sua densidade linear (massa por unidade de comprimento) e a tensão com a qual ela é segura.

Ademais, Dias (2019, p. 16) define a catenária “como sendo uma curva feita por um fio flexível de densidade uniforme suspenso entre dois pontos e submetida a esforços oriundos do seu próprio peso”. Nesta mesma linha de raciocínio, Barbosa (2013, p. 68) reitera que o termo catenária advém da palavra “corda, porque a curva que descreve uma corda fixa pelas suas duas extremidades e que não se encontra submetida a outras forças diferentes do seu próprio peso forma esta curva”.

Isto posto, dizer que o cabo é flexível, significa que “a tensão é sempre no sentido da tangente, e inextensível significa que o cabo não pode ser estendido sem a aplicação de uma de força externa” (SOUZA; CAMARGO, 2018, p.5). Já Raposo (2013, p. 26) declara que:

A catenária é a curva que um cabo fixo pelos seus dois extremos assume quando está apenas sujeito à força da gravidade (o seu próprio peso). Qualquer força aplicada a um ponto da catenária divide-se igualmente por toda a sua extensão, proporcionando-lhe uma maior resistência e sustentação de peso.

Desta forma, verifica-se que uma característica marcante da catenária é sua simetria em relação ao eixo vertical, bem como sua suavidade contínua. Teixeira (2012, p. 80) afirma que outra característica da catenária “é que uma força aplicada em um ponto qualquer da curva é dividida igualmente por todo o material, isto é, é distribuída uniformemente ao longo da curva.”

Assim, devido esta razão tal curva é utilizada “para a fabricação de materiais como fundo de latas de refrigerante, iglus (casas de neve) e túneis.

Ademais, de acordo com Coelho (2008) a resolução de Bernoulli foi bastante útil, pois posteriormente trouxe grandes contribuições ao desenvolvimento do Cálculo, mais tarde chamado de Cálculo de variações. Sassine e Bustillos (2009), Faria (2011) e Sousa, Alves e Souza (2022) corroboram com tal informação ao alegar que a solução do problema relacionado à curva catenária foi uma das primeiras vitórias públicas (para aquela época) que influenciavam o Cálculo Diferencial e Integral, “além de ter marcado uma transição entre uma matemática desenvolvida por meio arquimedianos para uma nova matemática” (BRASIL *et al.*, 2021, p. 70662).

As soluções propostas pelos matemático, de acordo com Pereira e Melo (2016, p. 4) “marcaram o fim do estilo arquimediano da Matemática e um novo sucesso para o Cálculo”. A solução de tal demonstração, para Faria (2011, p. 16) consistia em três partes, a saber, “1) a dedução a partir de argumentação da mecânica clássica dos corpos em equilíbrio, 2) em seguida uma equação diferencial que deveria ser satisfeita pela curva, determinando a equação diferencial” como pode ser observado a seguir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{s}$$

Sendo a uma constante e s o comprimento do arco. Sabe-se que:

$$s = \int \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]} dy$$

Assim, observa-se que x e y aparecem implicitamente em s , e devido esse motivo a equação diferencial não pode ser resolvida diretamente, o que fez com que Bernoulli transforme a equação diferencial (FARIA, 2011).

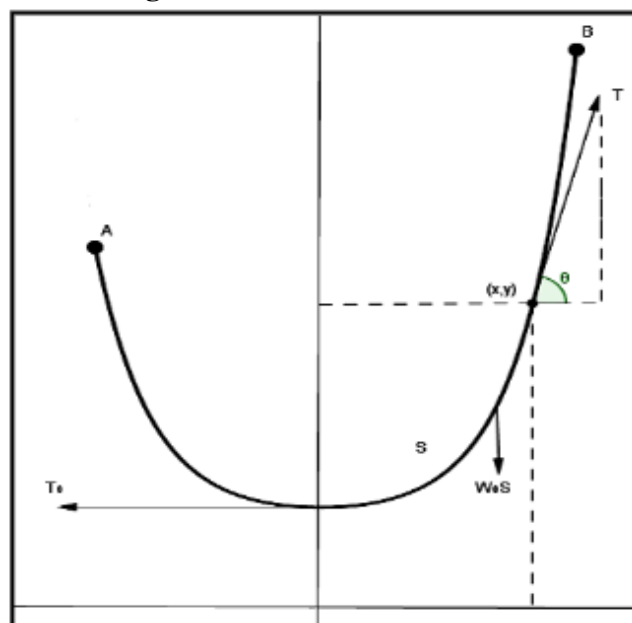
$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{s}$$

Em uma equação que envolva tanto o x quanto o y explicitamente obtendo assim a seguinte equação:

$$dy = \frac{adx}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}$$

Por fim, na terceira parte a equação é resolvida com determinação da curva que a satisfaz (FARIA, 2011). Isto posto, a partir desse breve relato histórico apresenta-se, de acordo com Lima e Miranda (2021, p. 44), a construção matemática da curva catenária, em que a notação moderna desta pode ser escrita tanto pela equação $y = \frac{(e^{ax} + e^{-ax})}{2a}$, quanto pela forma $y = \frac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax})$, cujo gráfico está representado na Figura 4 a seguir, que foi retirada da obra de Simmons.

Figura 4 – Gráfico da catenária



Fonte: Simmons (1987, p. 611).

Vale ressaltar que, existe outras formas de representar a catenária, entretanto para o intuito deste trabalho a que foi apresentada é suficiente. Ademais, é necessário salientar que Sousa, Alves e Souza (2022, p. 8) afirmam que “a equação hiperbólica que fornece a definição da curva catenária foi criada anos depois, em 1757, pelo matemático italiano Vincenzo Riccati (1707 – 1775)”. E a curva assume então uma correspondência:

$$y = \frac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax}) = a \operatorname{cosh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Isto posto, observa-se que no mundo moderno, a curva catenária desempenha um papel fundamental em uma variedade de aplicações práticas, de acordo com Paulo (2014, p. 7) tal curva exhibe uma série de propriedades notáveis que a tornam valiosa em vários campos servindo

para “engenharia e arquitetura, na construção de várias obras, como a linha telefônica entre dois postes, a Ponte Pensil, o aeroporto internacional dos Estados Unidos, entre outros”.

Nesta mesma linha de raciocínio, a tensão interna formada entre os dois pontos extremos possibilita condições para a construção de várias obras importantes, como por exemplo, a ponte Juscelino Kubitschek, em Brasília, no Brasil e o Gateway Arch, em St, Louis. A curva catenária é muito comum no nosso cotidiano e surge, naturalmente, em diversos cenários como, por exemplo, os fios pendurando por suas extremidades nos postes de energia. A formação da catenária é até mesmo possível ser observada na natureza, como no contorno de asas de borboletas, colmeias, teias de aranha, dentre outros desenvolvimentos naturais. Além disso Brasil et al., (2021, p. 70657-70658) afirma também que:

Ainda o formato ideal para a construção de arcos e abobadadas, sendo utilizada também em diversas obras arquitetônicas, como por exemplo, no templo expiatório da sagrada família projetada por Antoni Gaudí, entre outras obras arquitetônicas.

Pode-se afirmar que a descoberta da referida equação “pode ser considerada como uma importante solução dos problemas desafiadores da história do Cálculo” e de grande contribuição para a Matemática (MENDES, 2017, p. 21). Nas palavras de Maor (2008, p. 185) “a descoberta desta equação foi anunciada como um grande triunfo do novo Cálculo Diferencial, e os participantes aproveitaram o mais que podiam desta realização para aumentar suas reputações”.

Além disso, observa-se também que tal temática é importante de entender e compreender a história de como surgiram os estudos sobre essas curvas e como foi “construída”, uma vez que este é um abrangente campo de aplicações. Diante do contexto histórico apresentado, foi evidenciado que o processo de concepção da catenária consistiu em uma busca constante dos matemáticos envolvidos de um modelo que pudesse descrever matematicamente tal curva que se apresenta com bastante frequência na vida diária das pessoas.

Como todo processo de Modelagem, o problema a ser resolvido, muitas vezes, nasce de uma situação realística, que é transformada em um problema matemático, em que a interpretação da solução acontece na realidade que deu origem ao problema. Assim, as idas e vindas no processo de concepção dessa curva, faz parte do processo natural de obtenção de um modelo matemático. Diante de todo esse dinamismo que envolve a Modelagem de algum fenômeno no processo de construção de conceitos matemáticos ao longo da história, é interessante que ele esteja presente no processo de ensino e aprendizagem. Nesse sentido, o capítulo seguinte discutirá o emprego da Modelagem nesse processo.

2 USO DA MODELAGEM MATEMÁTICA EM SALA DE AULA

O termo ‘Modelagem Matemática’ como processo para descrever, formular, modelar e resolver uma situação problema de alguma área do conhecimento encontra-se já no início do século XX na literatura de Engenharia e Ciências Econômicas, segundo Biembengut (2009). Nos EUA é possível encontrar textos que abordam o tema de autoria entre 1958 e 1965, Biembengut (2009) cita trabalhos realizados pelo School Mathematics Study Group (SMSG), entre os anos de 1966 a 1970 e no *New Trends in Mathematics Teaching IV*. Por volta da década de 1960, surge um movimento “utilitarista”, definido como aplicação prática dos conhecimentos para a ciência e a sociedade. Com essa forte tendência, o debate sobre a Modelagem na Educação Matemática ganha força e a partir disso, os estudos continuaram fortes até os dias atuais.

No Brasil, Biembengut (2009) menciona Aristides C. Barreto, Ubiratan D’ Ambrosio, Rodney C. Bassanezi, João Frederico Mayer, Marineuza Gazzetta e Eduardo Sebastiani, como fundamentais no impulso e na consolidação da Modelagem na Educação Matemática no Brasil. Por obra desses percursoros, o estudo, análise, discussões e aplicações do desenvolvimento de modelos no ensino da Matemática emergiram na linha de pesquisa sobre Educação Matemática no Brasil. O movimento pela Modelagem promovido por estes escritores brasileiros começou no final dos anos 1970 e início dos anos 1980, ao decorrer do tempo ganhou adeptos por todo o país.

É notória a importância da Modelagem Matemática como metodologia de ensino em todos os níveis, desde o Ensino Fundamental até o Ensino Superior, pois ela estimula o senso crítico, a curiosidade e o espírito investigativo do aprendiz ao abordar situações que envolvem fenômenos realísticos. Nessa direção, Bassanezi (2006) afirma que o interesse pela Matemática, inicialmente, vem de estímulos externos a ela, vindos do “mundo real”. Para ele, a matemática aplicada é o caminho. Os conteúdos matemáticos apresentados, por si só, não são suficientemente interessantes para a maioria dos alunos de Ensino Fundamental, Médio e Superior. Conforme Bassanezi (2006, p.16) os professores devem valorizar o que ensinam, e completa: “... que o conhecimento seja ao mesmo tempo interessante, por ser útil, e estimulante, por ser fonte de prazer.”

Com o intuito de trazer esse pensamento para os estudantes e possibilitar o desenvolvimento na disciplina, surge o uso da Modelagem no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. A Modelagem Matemática é o processo de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e conseguir soluções que possam ser

aplicadas para o mundo real. Biembengut e Hein (2007) abordam a importância da reestruturação nos métodos de ensino que forneçam elementos que desenvolvam o pensamento crítico e independente. A partir disso, a Matemática atua como meio de emergir a criatividade, facilidade na resolução de problemas e a capacidade de modelar.

A Modelagem é por natureza interdisciplinar e é perfeitamente perceptível a sua presença no processo de pesquisas em outras ciências, possibilitando que um profissional que desfruta do conhecimento matemático consiga transitar com facilidade entre os campos de aplicabilidade das mais diversas ciências, como, por exemplo, a Física e a Química, de forma imediata. Na educação, o método possibilita aos alunos o vislumbre de aspectos lúdicos e aplicações dos conteúdos, aliando teoria e prática. Pode-se usar a Matemática como uma ferramenta que consegue sintetizar e generalizar ideias que tiveram suas origens a princípio de maneira empírica, em teorias sólidas. Cada vez mais teorias matemáticas são desenvolvidas, mas nem sempre apresentam uma aplicação imediata. Segundo Biembengut e Hein (2007) a Matemática e a realidade são conjuntos distintos e a Modelagem surge como uma ponte entre eles.

Fica evidente então que o processo de Modelagem visa a obtenção de modelos. O termo modelo, do latim *modelus*, se faz presente em várias áreas do conhecimento: nas Artes, na Cartografia, nas Ciências da Natureza e Humanas, na Filosofia, nas Tecnologias, dentre tantas outras. A expressão é comum no vocabulário cotidiano e permeia por diversos contextos, mas, na maior parte dos casos, é associada ao sentido de representação. No caso, modelo é a representação de algo que se pretende realizar, entender, explicar, inferir, imitar, alcançar. Biembengut (2016) aponta que a essência de modelo se mostra presente em nossos viveres devido a forma de como se processa nossa mente. Ao se deparar com algo novo, mesmo em pequenas situações cotidianas, a mente tenta compreender e assim, busca relacionar a nova situação com alguma referência anteriormente conhecida. Isso faz com que o pensamento faça o processo de Modelagem e busque modelos prévios conhecidos.

Este processo estimula novas ideias e compreensões a partir do processamento de novas informações. Com isso, o processo de Modelagem torna-se uma ferramenta importante para estimular o processo mental a produzir ou a criar algo. Porém, nem todas as percepções se transformam em conhecimento, ao decorrer do dia é possível receber várias informações diferentes. Biembengut (2016) aponta que para essas percepções gerarem aprendizado, é preciso antes, o desenvolvimento de interesse, o que reafirma as palavras de Bassanezi (2006). Por conseguinte, pode-se observar a relevância do modelo no processo de ensino e aprendizagem, assim como a importância de gerar o interesse do aluno ou público alvo de

alguma atividade. A partir do desenvolvimento do interesse e do processo de Modelagem para atingir um modelo, a chances de acontecer uma aprendizagem e gerar uma memória a longo prazo deste conhecimento, segundo Biembengut (2016), aumentam significativamente.

Biembengut e Hein (2007) traz uma divisão clara de três etapas do processo de Modelagem, a primeira é a interação, em seguida a matematização e por último o modelo matemático. A primeira etapa consiste no reconhecimento da situação-problema, estudo do assunto a ser trabalhado, análise das variáveis e outras situações, possibilitando o conhecimento em detalhes do problema a ser modelado. Após compreendida a situação, a segunda etapa, a matematização, trabalha a formulação do problema encontrado e sua resolução em termos do modelo. Para concluir, no modelo matemático, é feito uma interpretação da solução e a avaliação da confiabilidade do modelo. A partir dessa divisão, é esperado que o processo de Modelagem no ensino possa incentivar a pesquisa, promover a habilidade em formular e resolver problemas, aplicar o conteúdo matemático e desenvolver a criatividade.

Ao decorrer do processo de Modelagem, a partir dessas etapas, é possível observar interações entre elas, o que torna o método cíclico. Isto é, se trata de um processo iterativo de avaliação e validação, o que leva o modelador a observar diferenças entre o modelo em desenvolvimento e a realidade, conforme Biembengut (2016). É possível perceber que estas três etapas (interação, matematização, modelo matemático) são semelhantes às fases dos processos mentais que se realizam para construir o modelo de algo novo. Neste caso, pode-se associar a matematização à compreensão da situação a ser percebida, estudada ou analisada. Desta forma, essas fases são observadas na Modelagem Matemática, Modelagem em outras áreas do conhecimento, e até mesmo no cotidiano de forma natural e não intencional.

Com isso, é possível relacionar o uso da Modelagem em sala de aula não apenas como ferramenta para o conhecimento matemático, mas também, para o desenvolvimento de autonomia dos estudantes e a capacidade de reconhecer um problema e conduzir a uma solução ou modelo. Para ensinar a modelar, inicialmente, é preciso conhecer se há uma ementa ou programa curricular e o que se requer nesta ementa. Outro fator importante, levantado por Biembengut (2016), é conhecer os alunos (quantidade, cultura, conhecimentos prévios, interesses, dentre outros) e ainda buscar saber se algum deles já teve contato com Modelagem anteriormente. Em caso do uso da interdisciplinaridade, vale ressaltar a importância de saber os conhecimentos prévios dos alunos sobre o conteúdo da atividade.

Os conteúdos e teorias matemáticas, na maioria dos casos, são apresentados como acabados e completos, o que acaba conduzindo a um ensino desvinculado da realidade e do processo histórico de construção. Bassanezi (2006, p. 36) esquematiza a forma que um teorema

é ensinado, a apresentação segue a seguinte ordem: “enunciado – demonstração – aplicação”. De acordo com o autor, o processo deveria ser o inverso, semelhante ao que originou o teorema, ou seja, primeiro a motivação (externa ou não à matemática), formulação e validação das hipóteses acompanhadas de questionamentos, e por fim, seu enunciado. A apresentação da origem histórica, não precisa implicar em um ensino que propõe repetir todo o processo histórico para desenvolvimento do conceito. Mas, olhar para o processo histórico e analisar o pensamento do contexto na formação do conceito a ser estudado.

Saito e Dias (2013) trazem três pontos positivos do uso da história da Matemática no ensino. O primeiro ponto é a humanização da matemática, o que proporciona uma visão diferenciada aos educadores, neste caso a matemática deixa de ser vista apenas como um conjunto de técnicas de resolução de problemas. O estudo do processo histórico proporciona uma abordagem diferente dos objetivos da Matemática. Assim, o segundo aspecto aponta que a articulação de tópicos de história no ensino de matemática possibilita a reorientação da visão do mesmo objeto estudado. Para finalizar, os autores trazem a interdisciplinaridade como importante aspecto no processo de ensino da matemática. Por este ponto de vista, a história aborda contextos particulares, no desenvolvimento dos conceitos matemáticos, proporcionando relações com outras áreas do conhecimento científico, tecnológico e social.

Esses três pontos caminham para a ideia de que a apresentação da história pode proporcionar um importante recurso na formação do conceito matemático. Ao antepor os componentes que permitem a construção do conceito a ser ensinado, busca-se um meio que auxilie o desenvolvimento de um método que oriente o indivíduo a chegar no conceito. A partir dessa percepção, o estudo e a apresentação da história será importante na construção do modelo matemático proposto, tornando-se significativo no processo de desenvolvimento e aplicação da atividade. Na elaboração do Capítulo 1, A Curva Catenária e Suas Origens Históricas, os pontos apresentados por Saito e Dias (2013), e supracitados, podem ser notados. A princípio, com a humanização da matemática, ao apresentar as dúvidas e jornada dos matemáticos. Em seguida, o estudo do objeto a partir de uma perspectiva diferente, com o estudo da motivação do desenvolvimento do conceito. E por último, a interdisciplinaridade observada com a física em relação ao conceito das catenárias.

Uma forma de sanar essa deficiência presente no ensino, que em sua maioria utiliza apenas apresentação de conteúdo e listas de exercícios, seria a utilização da Modelagem Matemática de forma efetiva e prevista no processo. Apesar de seus inúmeros benefícios, a Modelagem encontra diversos obstáculos no ambiente escolar. Os obstáculos são variados e partem desde processos burocráticos até mais especificamente a resistência dos estudantes. Os

cursos regulares possuem orientações e cronogramas acerca dos conteúdos que devem ser trabalhados em sala de aula, tornando a prática da Modelagem muito trabalhosa, por requerer um tempo maior e, nem sempre, seguir o programa do curso, pois muitas vezes dependendo do assunto abordado, a matemática utilizada na construção do modelo não está prevista no plano de curso. Outro problema encontrado, é o possível desinteresse dos alunos ao se depararem com um novo método o qual não tiveram contato anterior.

Além disso, muitos professores não se sentem capacitados para desenvolver a Modelagem, isso acontece por não terem tido contato na sua formação ou até mesmo um receio em prejudicar o seguimento do curso. Ademais, existe a possibilidade de o aluno encontrar como solução conteúdos que ainda não possuem base matemática suficiente para buscarem novos conhecimentos mais específicos. No entanto, é possível reconhecer que as escolas e professores têm avançado no uso de metodologias diferentes em sala de aula, mas ainda assim, não são maioria. Um desses métodos, é a resolução de problemas, que segundo Romanatto (2012) este método propõe envolver-se em uma tarefa ou atividade, cujo método de solução não é conhecido imediatamente.

Para alguns educadores matemáticos, por exemplo, D'Ambrosio (2002), Pires (2009), Grande (2013), Pires (2014), a Matemática se torna mais atrativa e efetiva na sociedade quando se tem uma aplicabilidade de seu conteúdo, nesse sentido é indispensável proporcionar aos alunos momentos que possibilitam a interdisciplinaridade. Posto isso, surge a Modelação como solução. Biembengut e Hein (2007) consideram a Modelação matemática uma estratégia que abrange o conteúdo programático e consegue adaptá-lo a uma determinada situação. Inicialmente, é preciso que o professor tenha conhecimentos prévios de seus alunos, desde o domínio matemático até mesmo o contexto socioeconômico em que eles estão inseridos. Os objetivos gerais são semelhantes com a Modelagem Matemática, como despertar o interesse pela a Matemática e desenvolver habilidade para resolver problemas, estimular a criatividade e realizar pesquisas.

Uma vez que a Modelagem realiza o caminho da pesquisa científica e como apontado anteriormente o processo de Modelação pode acontecer de forma natural, a Modelagem pode ser utilizada em qualquer fase de escolaridade. No entanto, essa adaptação, que é a Modelação se faz necessária e fundamental neste processo. É importante ressaltar que quem faz Modelagem Matemática tem por objetivo resolver uma situação problema a partir do desenvolvimento de um modelo. Ao passo que o intuito da Modelação é promover conhecimento ao estudante em qualquer período de escolaridade. Biembengut (2016) define a Modelação como um método de

ensino com pesquisa nos limites e espaços escolares, em qualquer disciplina e fase de escolaridade.

Para ensinar o conteúdo é mais seguro que o professor utilize o mesmo tema/assunto e ou situação problema para toda a turma de alunos. E a partir do modelo da atividade extrair o conteúdo proposto, assim o modelo será um guia para ensinar a temática. Ao decorrer da atividade o professor será um importante mediador na orientação dos alunos no processo de Modelação, principalmente no caso em que os alunos não possuem o hábito de pesquisar ou ter autonomia. Um ponto negativo do uso desta metodologia é que requer mais tempo e disposição dos professores, o que pode dificultar ensinar o conteúdo através da Modelação e seguir o programa curricular proposto. Além disso, em caso de pesquisas, os estudantes podem levantar questionamentos e/ou chegar a conclusões que não incluem o conteúdo a ser estudado. Por isso, é fundamental uma elaboração de modelo e orientação por parte do professor durante a atividade, que estejam dentro da temática.

Com base nos referenciais citados, estudo do conteúdo e observações, este capítulo abrangeu a Modelagem Científica e a Modelação no ensino-aprendizado. A partir da relevância da utilização desse método em sala de aula, será apresentado no Capítulo 4 uma atividade com abordagens da Modelação na curva catenária, essa curva possui várias aplicações (como apontado no capítulo anterior). Para fazer a modelação da curva em cenários reais do cotidiano, a atividade irá utilizar o *software* Geogebra. A utilização de softwares no ensino da Matemática, assim como outras ferramentas tecnológicas, também contribui significativamente no processo de ensino e aprendizagem. No capítulo a seguir será abordado a importância da tecnologia e a utilização do Geogebra em sala de aula.

3 TECNOLOGIA EM SALA DE AULA E O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA

A princípio, quando o termo tecnologia é abordado é comum pensar nas tecnologias digitais (computadores, celulares, tablets, dentre outros), no entanto a palavra abrange um significado mais amplo. O ser humano desenvolve e faz o uso da tecnologia desde a pré-história, se considerado como tecnologia “[...] o conjunto de conhecimentos e princípios científicos que se aplicam ao planejamento, à construção e à utilização de um equipamento em um determinado tipo de atividade” (KENSKI, 2013, p. 24 *apud* ALMEIDA, 2015, p.226). Por este conceito, pode-se perceber que a tecnologia está presente em todos os lugares e atividades humanas.

Sendo assim, não é diferente com as novas tecnologias, em especial as tecnologias da informação e comunicação (TIC). Geraldi e Bizelli (2015) associam o termo tecnologia de informação com informática, rede de computadores, multimídia, Internet, banco de dados e demais recursos oferecidos por aparelhos digitais. Os autores abordam também o termo informação como elemento importante em todos os setores da atividade humana, compreendendo dados organizados e comunicados. Por conseguinte, o acesso a informação é fundamental na criação de conhecimentos e para atender as necessidades dos indivíduos diante da sociedade atual. Para além do uso de ferramentas facilitadoras que proporcionam o acesso a informação, Geraldi e Bizelli (2015) salientam que as TIC mudaram e continua influenciando na forma como a sociedade interage e se comunica.

Posto este contexto, é indiscutível o fato de que a sociedade atual é rodeada de informação e apoia-se no uso intensivo de novas tecnologias. Com os recursos tecnológicos e redes de comunicação muito desenvolvidos, o progresso da sociedade depende, hoje, da capacidade de gerar, transmitir, armazenar e recuperar informações de forma eficiente (GERALDI e BIZELLI, 2015). Diante dessa relevância, é natural que o uso da tecnologia digital se torne uma ferramenta importante, com aplicabilidade que facilita no processo de ensino e como meio de atrair o interesse dos alunos. Em função disso, a escola precisa ter oportunidades de acesso a essas ferramentas e apresentar competência para gerar e desenvolver conhecimentos utilizando as TIC.

O acesso às tecnologias digitais, em especial a Internet, pode gerar várias discussões em torno de aspectos culturais, contextos sociopolíticos, desigualdade social, jovens que utilizam a internet sem supervisão e orientação de um responsável, uso para acesso e/ou disseminação de informações falsas, crimes em ambientes virtuais, dentre outras problemáticas. Todas essas temáticas, dentre outras que podem ser levantadas, são muito relevantes para discussão e reflexão no uso das TIC, no entanto, este capítulo propões apresentar apenas os pontos que as

tecnologias podem auxiliar em sala de aula. Ainda assim, não se pode ignorar a falta de um acesso igualitário às tecnologias devido a desigualdade socioeconômica presente na maioria dos países, incluindo o Brasil.

Para inserir as TIC no processo de ensino e aprendizagem é necessário que as instituições de ensino proporcionem acesso a recursos digitais como, por exemplo, computadores com acesso à Internet, projetor, ambiente destinado para o uso de tecnologias, profissionais habilitados em informática, dentre outros. Os recursos tecnológicos existentes são diversos e possuem um rápido e crescente avanço, por isso vale enfatizar que não é necessário ter à disposição todos os recursos tecnológicos possíveis para proporcionar o uso dessa ferramenta no ambiente educacional. Assim como qualquer outra metodologia de ensino matemático, o uso das TIC deve ser aplicado e adequado de acordo com as condições que o ambiente oferece (equipamentos disponíveis), conhecimentos prévios dos alunos (contato com a tecnologia a ser trabalhada), adaptação do uso do material para fins pedagógicos, tempo disponível, e outras variáveis que podem ser relevantes de acordo com a particularidade de cada realidade.

Entretanto, apenas o acesso à tecnologia, em si, nas instituições de ensino não garante o uso pleno das TIC em sala de aula, é fundamental o preparo do professor para trabalhar com essas ferramentas. Neste sentido, tem-se a importância do assunto na formação de professores. A formação de professores acontece por meio de vários processos que mobiliza diferentes saberes (TARDIF, 2017 *apud* ARAÚJO, 2020, p.52), desde conteúdos matemáticos a conhecimentos pedagógicos a serem utilizados em sala de aula. Ao pensar no uso das TIC no processo formativo dos educadores matemáticos, entende-se que esta formação estará pautada no aprender matemático fazendo uso das TIC como ferramentas para auxílio na construção do conhecimento, de modo que essas tecnologias quando aplicadas pedagogicamente não seja uma pura virtualização do ensino (ARAÚJO, 2020).

Um marco importante na formação de professores foi a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional de 1996 – Ldben (Lei n.º 9.394/96). A lei tem por finalidade estabelecer:

... as Diretrizes da Educação Nacional abrangendo os diversos processos formativos, compreendendo, conforme seu artigo 4.º, desde a educação infantil (agora sendo obrigatória para crianças a partir de 4 anos); ensino fundamental; ensino médio (estendendo a obrigatoriedade da oferta pública e gratuita da educação básica para os jovens até os 17 anos, garantindo o acesso para os que não cursaram em idade apropriada) e as outras modalidades do ensino, como a educação especial, educação indígena, do campo, a educação de jovens e adultos e a educação a distância. (ARAÚJO, 2020, p. 56)

Para além disso, a Ldben aponta os princípios gerais da educação brasileira, suas finalidades, os recursos financeiros que deverão a ela ser destinados e a designação de quem são os

profissionais da educação (ARAÚJO, 2020). A formação dos professores em nível inicial e continuada, e as diretrizes para a carreira dos profissionais da educação, também são pautas da Ldben.

Com a aplicação dessa lei, a obrigatoriedade da formação superior em curso de licenciatura na área de atuação ganha evidência. Com isso, o Ministério da Educação, através do Conselho Nacional de Educação (CNE), passa a buscar melhorias na formação inicial de professores para atuar na Educação Básica, em curso de licenciatura, no âmbito das diversas instituições de Ensino Superior do país. A educação é uma das responsáveis pelas modificações sociais necessárias para a evolução da sociedade. Com as mudanças promovidas pelos avanços das TIC nos mais diversos setores, a tecnologia passa a ser necessária em sala de aula, no âmbito da Educação Básica e no Ensino Superior, em especial nos cursos de licenciatura.

Araújo (2020) traz a análise de um dos documentos que orientam os cursos de Licenciatura em Matemática: o Parecer CNE/CES n.º 1.302/2001. O documento propõe as Diretrizes Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. Uma das orientações do documento, apontado pelo autor, sobre o processo de ensino e aprendizagem da Matemática é a necessidade de superar a ideia de que Matemática é uma disciplina difícil. O intuito é reafirmar o seu componente essencial no processo formativo dos sujeitos, por contribuir diretamente com no exercício da cidadania em seu sentido mais amplo. Em relação às TIC, que faz referência direta às tecnologias, o documento faz menção a familiarização do futuro docente com o uso do computador como ferramenta de trabalho e sua utilização para o ensino de Matemática. O texto também aborda a importância do acesso a outras tecnologias que visem facilitar o processo de ensino da Matemática, mas não especifica como isso deve ser trabalhado e quais ferramentas utilizar no processo.

Cabe aqui ressaltar que as orientações para a formação docente de Matemática não foram atualizadas diante as novas demandas da formação de professores ao longo dos quase vinte anos desde a sua resolução. As TIC tiveram uma grande evolução na última década, especialmente em relação ao maior acesso da sociedade, como é o caso dos celulares, que hoje apresentam funções que antes só eram possíveis por meio do uso de computadores. Como mencionado no início deste capítulo, a sociedade moderna é rodeada de informação, que foi possibilitada com o crescimento da tecnologia digital. Diante desse aspecto, não se pode ignorar a importância de uma constante atualização de documentos e resoluções sobre educação, que acompanhem o desenvolvimento da sociedade.

Ao aplicar o uso das TIC em sala de aula, é interessante pensar no uso da tecnologia não apenas como uma ferramenta de apoio, mas como uma forma de introduzir a tecnologia e criar

autonomia nos alunos a partir da associação entre a ferramenta e o conteúdo a ser trabalhado. O intuito não é usar o recurso de forma isolada, mas instigar a curiosidade dos alunos a buscar mais informação e a fazer novas relações entre as TIC utilizadas e conhecimentos prévios e/ou futuros adquiridos pelos alunos. Outro ponto a ser observado são as possíveis experiências que os alunos já tiveram com esta ferramenta, este contato anterior será relevante na condução da aula. Um exemplo, é o uso de vídeos (disponibilizados em plataformas digitais), que provavelmente os estudantes já tiveram um contato anterior, mas que, em sua maioria, não foram utilizados necessariamente para fins acadêmicos. Nesse sentido, a abordagem do professor não precisará ter como foco apresentar a ferramenta, mas sim mostrar uma nova abordagem do recurso com possibilidades diferentes.

Não é possível, nos dias atuais, falar de tecnologia sem citar a Internet. Um dos maiores avanços tecnológicos dos últimos tempos foi sem dúvidas a Internet, seu desenvolvimento tem possibilitado mudanças importante nas ciências, no comportamento e na educação, como por exemplo, o ensino remoto durante parte do período pandêmico da COVID-19. Sobre a Internet pode-se dizer que:

A partir do desenvolvimento tecnológico e científico propiciou-se a integração das potencialidades de recursos que resultaram na Internet, uma estrutura global que interliga os computadores e outros equipamentos para possibilitar o registro, produção, transmissão e recepção de informações e a comunicação entre indivíduos independentemente da posição geográfica. (CAPOBIANCO, 2010 *apud* ALMEIDA, 2015, p.234).

As ideias de Almeida (2015) e Geraldi e Bizelli (2015) convergem para uso positivo da Internet em sala de aula, o seu uso pode promover: experiências de aprendizagem significativas; maior autonomia e responsabilidade aos alunos pela própria aprendizagem; colaboração dos alunos fora da sala de aula; possibilidade de receber apoio individualizado; dentre outros (ALMEIDA, 2015).

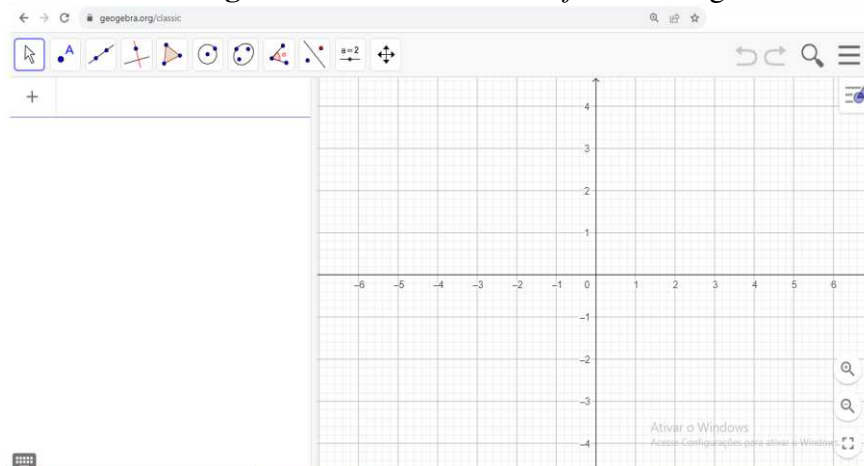
Com o advento da Internet, o uso de vídeos com fins pedagógicos em sala de aula passou a ser um recurso mais acessível tanto para o docente quanto para o discente. Conforme mencionado anteriormente, citado como exemplo, os vídeos acessados na Internet pela maioria dos alunos têm por finalidade o entretenimento. E é por esta proximidade que o uso de vídeos é uma possibilidade no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Gomes (2019) explica que essa facilidade de propagação advém do uso de imagens, sons, interpretação, simulação e modelagens matemáticas, que, pela interdisciplinaridade, potencializa a construção do conhecimento da Matemática. O uso da tecnologia do vídeo, a partir de um planejamento pedagógico adequado, proporciona uma visualização dinâmica e contextualizada do conteúdo. Esse pensamento converge com as ideias de Biembengut (2016) e Bassanezi (2006) que

abordam a importância da Modelagem e a apresentação do conteúdo na prática, concepções aprofundadas no Capítulo 2 deste trabalho.

As novidades tecnológicas possibilitaram uma grande diversidade de *softwares*, que podem ser empregados para finalidades educativas e estão disponíveis na rede mundial de computadores. O uso desses *softwares* pode contribuir de forma expressiva no processo de ensino e aprendizagem de Matemática e propiciar aos professores e alunos novas experiências. Ademais, podem estimular o raciocínio lógico, a criatividade e autonomia dos alunos, ao passo que há a possibilidade de levantarem hipóteses, fazer questionamentos novos, associar a conhecimentos prévios e tirar conclusões. Um desses *softwares* é o Geogebra, que será proposto o uso no desenvolvimento de uma atividade apresentada no Capítulo 4 deste trabalho.

O Geogebra é um *software* de acesso livre, uma vez que é disponibilizado de forma gratuita na Internet, no site www.geogebra.org (acesso feito no Brasil), para vários tipos de sistemas operacionais. Desenvolvido pela linguagem Java, linguagem baseada na orientação a objetos, o Geogebra é mantido pela Universidade Atlântica da Flórida, o software foi criado em 2001 e desde então foi traduzido para várias línguas, inclusive português. O Geogebra é voltado para o estudo da Matemática Dinâmica e é definido como “um software de Matemática Dinâmica, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatísticas e cálculo em um único GUI (do inglês, Graphical User Interface, ou do português Interface Gráfica do Utilizador)” (BASNIAK e ESTEVAM, 2014, p. 13 *apud* SOUSA, 2018, p. 32). A interface é simples de visualizar e intuitiva para utilizar os comandos mais simples, como: inserir equações; adicionar objetos geométricos; trabalhar com ângulos; adicionar imagens; dentre outros. Segue na Figura 5 a seguir a interface do Geogebra Clássico, versão mais utilizada, (está disponível no site outras versões com foco em diferentes recursos).

Figura 5 – Tela inicial do *software* Geogebra



Fonte: Elaborado pela autora no *software* Geogebra.

Neste trabalho, a princípio será focado o uso do Geogebra com acesso online, na página inicial e há a opção de criar uma conta para salvar os projetos, mas vale ressaltar que é possível também baixar o software no computador opção disponível no site e que também será fundamental na realização da atividade. O site oferece também a possibilidade de instalar aplicativo no celular e, inclusive, usar de forma online no navegador do dispositivo móvel. Além disso, há a opção de criar espaços (que podem ser usados como salas de aula virtual), deixar projetos públicos na plataforma e, conseqüentemente, acessar projetos e páginas de outros usuários da plataforma. Além disso, na página inicial há uma barra de pesquisa, que possibilita buscar projetos de conteúdos matemáticos. A Figura 6 a seguir é um *print* da página inicial do site com entradas para barra de pesquisar recursos, botão para entrar no sistema, ver materiais, usar e/ou baixar os aplicativos do Geogebra, dentre outras opções.



Fonte: Elaborado pela autora no *software* Geogebra.

As interações entre os usuários dentro do *site* lembram o mecanismo das redes sociais, não é possível um contato direto dentro da plataforma, mas na descrição do perfil pode-se adicionar um endereço de *e-mail* para contato. Portanto, o Geogebra, aliado ao *site*, se trata de um *software* inovador na Educação Matemática, explorando diversos conceitos e ideias. A facilidade no acesso e no uso contribuem para que seja utilizado em sala de aula, como ferramenta para auxiliar no processo e ensino e aprendizagem. Ademais, os alunos, em sua maioria, não terão dificuldades em dar prosseguimento no uso da ferramenta, utilizando em conteúdos posteriores, mesmo sem o incentivo direto do professor naquele determinado momento.

Com base nos referenciais teóricos, pode-se então concluir a importância do uso da tecnologia em sala de aula e os benefícios do Geogebra. No Capítulo 4 deste trabalho, serão

sugeridos dois momentos com o uso da tecnologia para abordagem da curva catenária, a apresentação de vídeos com aplicações da curva e utilização do Geogebra como recurso didático.

4 A CATENÁRIA EM SALA DE AULA: TRÊS TENDÊNCIAS DE ABORDAGEM PARA O ENSINO

Com fundamento nos capítulos anteriores, este capítulo propõe uma atividade sobre as curvas para o terceiro ano do Ensino Médio ou para estudantes no início da Graduação em Matemática. Para abordar o tema, é necessário que os alunos tenham conhecimentos prévios de cosseno hiperbólico e seno hiperbólico, uma vez que são necessários na expressão que representa a curva catenária. O objetivo da atividade é que ao final, os alunos possam compreender a curva catenária, além de conhecer sobre a história, aplicações e visualização do gráfico dessa curva. Apesar de ser uma curva com muitas aplicações, presentes no cotidiano, nem sempre é abordada no Ensino Médio, e é pouco abordada no Ensino Superior.

Além de trazer a catenária como conteúdo, a atividade sugere elementos importantes a serem trabalhados em sala de aula que podem ser utilizados para outros conteúdos pelo professor e também estimular os alunos a fazer essas relações com outros conhecimentos prévios ou em conhecimentos posteriores. Neste sentido, pretende-se trazer para a aula a importância do estudo da história no processo de construção do conceito, da utilização de vídeos como ferramenta no processo de ensino e aprendizagem e do emprego do Geogebra. No âmbito do Ensino Superior, especialmente nos cursos de Licenciatura em Matemática, a atividade também pode ser uma forma de apresentar diferentes metodologias e recursos que os futuros docentes podem aplicar em suas aulas.

Para ser desenvolvida, a atividade será dividida em três etapas que serão trabalhadas ao decorrer de três aulas, apresentadas neste capítulo em três seções: 4.1 Contextualização Histórica da Catenária; 4.2 Aplicações da Catenária; 4.3 Ajuste da Catenária pelo Software Geogebra. Como sugerem os títulos das seções, cada aula será baseada nos conteúdos e referências teóricas abordados nos capítulos anteriores. Ao abordar ou aplicar uma atividade é necessário que o professor tenha conhecimento sobre as metodologias e ferramentas que pretende utilizar em sala de aula, além de domínio do conteúdo a ser trabalhado. Para o desenvolvimento da atividade serão necessários alguns recursos de tecnologia, como computadores com acesso à internet e projetor, a utilização dos computadores pelos alunos pode implicar em ter um espaço adequada para a utilização deste meio no ambiente escolar.

Um planejamento pedagógico adequado é fundamental antes de aplicar uma atividade. Neste capítulo será sugerido uma sequência de aulas, propondo a abordagem do conteúdo por meio de diferentes recursos, mas é importante ressaltar que cada turma de alunos apresenta suas particularidades. Por isso, é primordial que o docente conheça a infraestrutura da escola,

recursos tecnológicos dispostos, conhecimentos prévios dos alunos, tempo disponível para abordagem do conteúdo, presença de alunos com necessidades educacionais especiais e outras variáveis. O prosseguimento da atividade será influenciado também pela dinâmica da turma, se são alunos acostumados a trabalhar com tecnologia em sala de aula, com o trabalho em grupo, a realizar pesquisas fora do ambiente escolar, e outros. Esses assuntos são influenciados pelas condições socioeconômicas e pela estrutura e cultura escolar, fatores individuais que devem ser analisados e, caso necessário, adaptar a atividade a cada realidade.

4.1 Contextualização histórica da catenária

A apresentação da história será importante para que os alunos possam compreender a construção da Curva Catenária a partir do seu desenvolvimento histórico. A palavra catenária vem do latim *catena* que significa corrente e é denominada como uma curva formada por um fio ou corrente flexível, que é suspenso por suas extremidades, submetido exclusivamente à força da gravidade. Assim, pode-se usar a definição dessa curva para iniciar a apresentação aos alunos por meio do uso de uma corrente suspensa. Para fazer esta apresentação, o professor irá reproduzir uma catenária utilizando uma corrente, o uso da corrente será importante na associação do nome à curva. Se não for possível a representação física, sugere-se o uso de uma imagem projetada ou impressa em uma folha. Segue na Figura 7 um exemplo dessa representação.

Figura 7 – Objeto que representa a catenária



Fonte: Elaborado pela autora.

Para produção foram utilizadas duas garrafas plásticas iguais e uma corrente com densidade uniforme (aqui há diversas possibilidades para o professor realizar esta construção).

Como aponta Biembengut (2016), citado no Capítulo 2 deste trabalho, quando a mente se depara com algo novo ou algum questionamento é comum que o cérebro busque associação com algum conhecimento prévio. Neste momento, o pensamento faz o processo de Modelagem

em busca de um modelo como referência. Sendo assim, a princípio, os alunos podem associar a curva nova à parábola, curva que eles possuem conhecimento prévio e se assemelha à curva representada. Ainda sem falar o nome dessa curva e sua definição, o professor pode realizar uma interação com os alunos, a partir de alguns questionamentos como: “alguém conhece esta curva? ”, “sabem a equação que a representa? ”, “poderiam defini-la apenas observando a representação? ”, “conseguem associar esta mesma curva a outras representações no cotidiano?”, dentre outras.

Com base nos questionamentos e pela observação, o professor irá construir junto com os alunos a definição de uma curva catenária e então fazer a apresentação do nome. Neste momento, espera-se que os alunos consigam definir a curva pela representação, como sendo uma corrente suspensa pelas suas extremidades e submetida apenas à força da gravidade. Caso a resposta não seja desenvolvida de forma espontânea pelos alunos, o professor será um importante mediador para que eles construam esta relação. A correlação entre a concepção dos estudantes e o significado da curva está atrelado ao processo de Modelagem metal apontado por Biembengut (2016) que é inerente a percepção humana até mesmo de forma inconsciente e em pequenas situações cotidianas.

Em seguida, ainda na primeira aula, o professor poderá fazer a apresentação da história com o auxílio do *PowerPoint*, caso o professor não tenha acesso a este recurso, sugere-se o uso de um material impresso ou lousa, é importante se atentar ao recurso utilizado, uma vez que pode interferir diretamente no tempo disposto. O Capítulo 1 deste trabalho se refere a parte histórica da curva catenária, o que auxiliará na aula e no desenvolvimento do material. A introdução da parte histórica pode iniciar com a semelhança da catenária com a parábola, que possivelmente será apontada pelos alunos, e que também foram confundidas por Leonardo da Vinci e Galileu Galilei. Relacionar a interpretação dos alunos com a visão dos estudiosos da época aproxima os alunos da história, o que pode aumentar o interesse a respeito do conteúdo.

Com a introdução da parte histórica os três pontos mencionado por Saito e Dias (2013), percorridos no Capítulo 2 deste trabalho, que são a humanização da matemática, a reorientação da visão do mesmo objeto estudado e a interdisciplinaridade, serão atendidos neste primeiro momento. A humanização do conteúdo acontecerá com o contato do aluno a partir da representação da curva, sem que, a princípio, não haja uma formalização matemática, priorizando as percepções individuais e coletivas dos alunos. Por meio da apresentação histórica os alunos terão acesso a perspectivas diferentes sobre a curva estudada. E para finalizar, apesar de a proposta não trabalhar diretamente com uma aplicação da área de Física na atividade, a

catenária tem intrínseco em seu conceito conhecimentos prévios sobre força e gravidade, proporcionando a interdisciplinaridade, além a interdisciplinaridade explícita com a História.

A introdução aos estudos da parte histórica, aliado a apresentação e discussão prévia da curva, também proporciona um contato dos alunos com o processo de Modelagem desenvolvido pelos matemáticos. Outra relação com a Modelagem é o processamento mental que busca ligações com modelos prévios conhecidos, mesmo que os alunos não cheguem a uma conclusão de forma imediata. Ao final desta primeira aula, com foco na apresentação da curva catenária e sua construção histórica, espera-se que os alunos consigam assimilar a definição da catenária por uma de suas representações e compreendam a sua construção histórica.



4.2 Aplicações da Catenária

Bassanezi (2006) defende o ensino da matemática nas escolas a partir da aplicação, de forma a divergir do ensino tradicional adotado pela maioria dos professores. Para o autor a ordem enunciado, demonstração e aplicação, na maioria das vezes, é responsável pelo desinteresse dos alunos nos conteúdos matemáticos. Com isso, trazer elementos que envolvam o cotidiano antes de prosseguir com os conteúdos é uma forma de atrair o interesse e atenção dos alunos. A curva catenária pode ser encontrada tanto na natureza, quanto em elementos de arquitetura, construção e utensílios rotineiros. Como na primeira aula os alunos já tiveram o contato inicial com a curva e sua construção histórica, provavelmente conseguirão apontar alguns exemplos que se aproximam da catenária ou aproximações que podem inclusive serem de outras curvas, como por exemplo a parábola.

Então, sugere-se que no início desta segunda aula, o professor estimule através de perguntas que os alunos a pensarem em objetos cotidiano que podem representar a catenária. Neste momento, o uso do objeto ou imagem que representa a catenária, utilizado no encontro anterior, será de fundamental importância para a visualização e comparação com objetos que eles possuem memória. O significado da curva catenária, construído na primeira aula, também será fundamento no processo de assimilar a curva na prática. Os exemplos sugeridos pelos alunos deverão ser anotados na lousa, com o intuito de reunir o máximo de exemplos que os alunos consigam expressar. Em caso de a turma não conseguir apontar nenhum ou poucos exemplos, o professor pode iniciar com alguns exemplos para incentiva-los. É importante que neste primeiro momento, o professor não faça interferência afirmando se é ou não um exemplo de catenária, a interação e discussão entre os alunos poderão ser significativos.

Em seguida, propõe-se apresentar aos alunos dois ou mais vídeos que abordem aplicações da catenária. Os vídeos serão uma forma de melhor exemplificar a catenária em situações do dia-a-dia. Como abordado no Capítulo 3 deste trabalho, o uso da tecnologia no processo de ensino e aprendizagem em sala de aula traz diversos benéficos, o vídeo como recurso pedagógico é uma forma de trazer uma visualização dinâmica do conteúdo. Na Figura 8 está a descrição de dois vídeos sugeridos para este momento.

Figura 8 – Descrição de vídeos online que abordam a catenária

 <p>O arquiteto Pedro Deodato (canal do Youtube Viés Arquitetônico) no vídeo fala um pouco da história e inovações da catenária e como influenciam nas formas das construções. Vídeo disponível: https://youtu.be/yBH5ezzY_0?si=1R2XBr81zOAIOfmf (acesso em 10 de novembro de 2023).</p>	 <p>O matemático português Rogério Martins (canal do YouTube Sigma3web) fala da curva catenária. Para tal, visita uma ponte suspensa, uma pala e cabos de alta tensão e outros exemplos de catenária. Vídeo disponível: https://youtu.be/tFuxLQ3ip00?si=u6Ns_PLriGzjKiK3 (acesso em 10 de novembro de 2023).</p>
---	---

Fonte: Elaborado pela autora.

Os dois vídeos descritos na imagem anterior mostram exemplos da catenária presentes no cotidiano, para aproximar de forma visual o conteúdo com a realidade. O professor ao realizar a pesquisa *online* de vídeos sobre a catenária encontrará várias opções e deverá fazer a melhor escolha de acordo a proposta didática, se atendendo ao público alvo da atividade.

Após apresentar e comentar sobre os vídeos com os alunos, o professor pedirá para a turma se dividir em grupos de quatro ou cinco alunos cada. Em seguida, pedir para que cada grupo tire cinco ou mais fotos com o celular, aqui pode ser inserido outros meios de registro de imagem, de situações e/ou objetivos diferentes que eles observarem em suas rotinas, que eles acham que podem representar uma catenária, e levar essas fotos para a próxima aula de Matemática. Para evitar imprevistos com o acesso as fotos, o professor pode pedir o envio das imagens por e-mail ou alguma plataforma que os alunos podem anexar essas fotos no dia anterior à aula. O processo de pesquisa e investigação no cotidiano do aluno também será um fator importante no processo de Modelagem da mente, situação em que os alunos irão buscar

estabelecer comparações e criar padrões. Como ressaltado anteriormente, antes do desenvolvimento das atividades é fundamental analisar as condições de recursos da escola e dos alunos e só então, avaliar a aplicabilidade da atividade ou adaptações necessárias.

4.3 Modelação da curva catenária pelo Software Geogebra

Nesta aula é proposto que os alunos tenham contato com o Geogebra Clássico, versão do *software* mais utilizada e indicada para trabalhar o uso de gráficos e imagens, como esta é a versão mais conhecida e foi a primeira a ser lançada, será referido apenas como Geogebra ao decorrer deste capítulo. A atividade tem por objetivo a análise do gráfico da curva catenária e realização dos ajustes das imagens coletadas com a curva representada no *software*. A ideia é que a aula aconteça em um ambiente com computadores com acesso à Internet e disponibilidade de pelo menos um computador por grupo, este ambiente pode ser um laboratório de informática, por exemplo. Caso não seja possível, uma sugestão é o professor trabalhar com o Geogebra e projetar a imagem para os alunos e conseqüentemente fazer as mudanças necessárias. No começo da aula é interessante que os alunos tenham contato com o *site* para conhecerem as possibilidades e facilidades de trabalhar com o programa de forma online. Caso não tenha o acesso à internet, a utilização do Geogebra instalado no computador não será empecilho no andamento da atividade, salvo que o professor pense com antecedência em um meio de acessar as fotos pelo computador (*pendrive*, cabo de conexão, ...). Para o uso de imagens vale ressaltar que a ferramenta só está disponível no Geogebra instalado no computador (*download* simples e fácil pelo *site*).

Os alunos seguirão a divisão de grupos determinado na aula anterior e cada grupo terá acesso a pelo menos um computador. Se a turma estiver tendo o primeiro contato com o Geogebra, nesta aula é importante que o professor apresente algumas funções básicas, como mover a malha, adicionar pontos, inserir expressões, salvar arquivo e deletar objetos. Em seguida, pedir para que os grupos insiram a expressão que representa a curva catenária no *software* (expressão apresentada na primeira aula):

$$y = a \cdot \cosh \frac{x}{a}$$

Ou sua expressão equivalente:

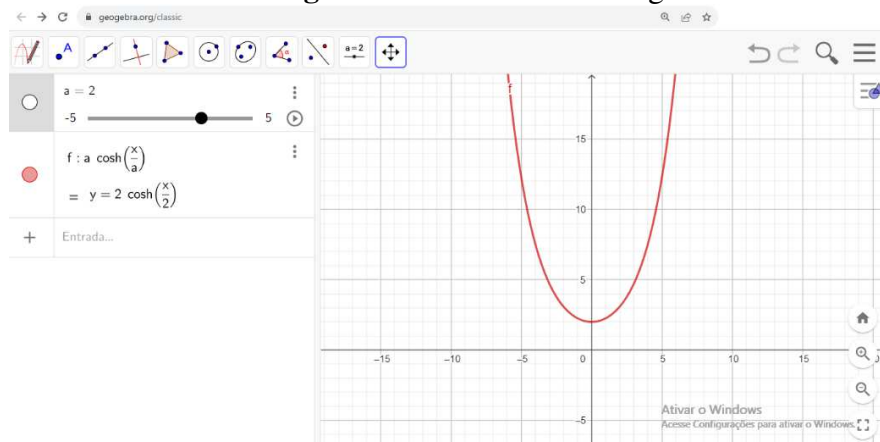
$$y = \frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a})$$

A expressão equivalente se dá pela definição de cosseno hiperbólico:

$$\cosh(i) = \frac{e^i + e^{-i}}{2}$$

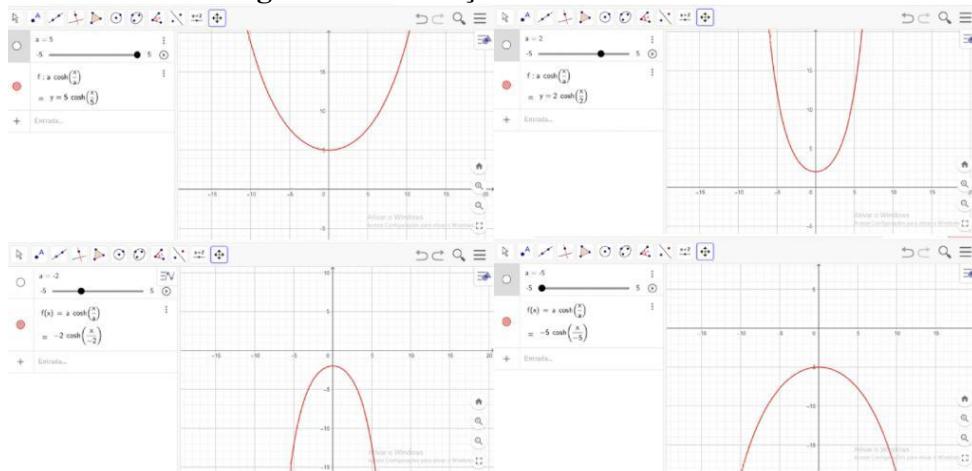
Ao inserir a expressão no Geogebra, o *software* irá mostrar o gráfico da curva e criará automaticamente um controle deslizante, ferramenta que tem por objetivo variar os valores de a da expressão. Na Figura 9 tem-se o gráfico no meio da tela, e no canto esquerdo o controle deslizante e a expressão da catenária.

Figura 9 – Catenária no Geogebra



Fonte: Elaborado pela autora no *software* Geogebra.

Na Figura 9 tem-se que o controle deslizante está em $a = 2$ e a expressão assume a forma particular de $y = 2 \cdot \cosh \frac{x}{2}$. É possível observar que o controle deslizante está variando em um intervalo entre -5 e 5 , mas há a possibilidade de alterar este intervalo para números maiores ou menores. É interessante aqui o professor perguntar aos alunos o que eles conseguem observar de acordo com os diferentes valores para a . Uma situação particular que o professor pode abordar com os alunos é o caso em que a assume o valor de 1 e a expressão da catenária se torna a expressão do cosseno hiperbólico. Então chega-se à conclusão de que o gráfico da função cosseno hiperbólico é uma catenária e que a catenária é uma aplicação do cosseno hiperbólico (como já propõe a expressão). Caso os alunos não consigam chegar a esta conclusão de forma algébrica observando a expressão, o professor pode pedir para os alunos inserir a função $w = \cosh(x)$ e observarem que o gráfico vai coincidir com o da catenária para $a = 1$. O controle deslizante é um recurso que auxilia na visualização do comportamento do gráfico, como mostra a Figura 10 a seguir.

Figura 10 – Variações da curva catenária

Fonte: Elaborado pela autora no *software* Geogebra.

No primeiro gráfico da Figura 10 anterior, o controle deslizante está apontando $a = 5$, no gráfico ao lado $a = 2$ e logo abaixo tem-se $a = -2$ e $a = -5$, consecutivamente.

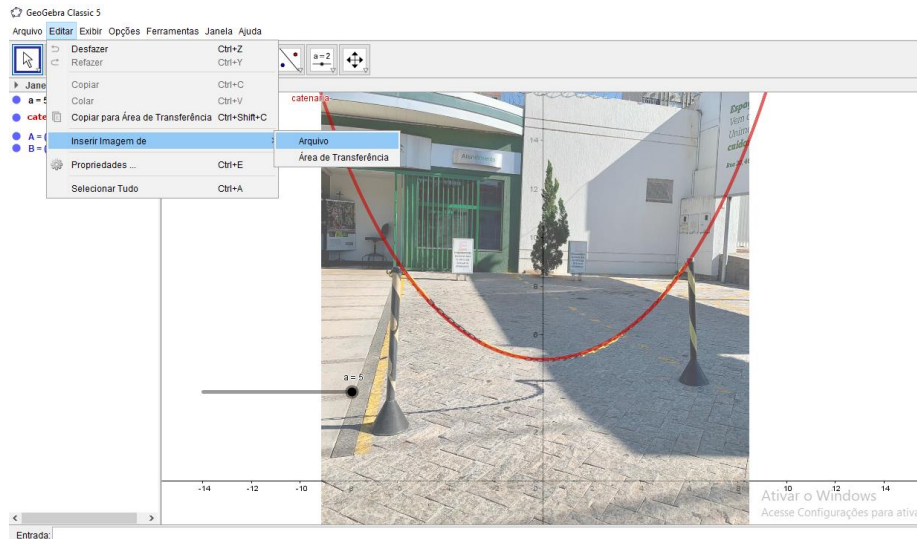
A partir da análise dos gráficos (presentes na Figura 10) espera-se que os alunos consigam observar que para $a > 0$ (números positivos) a concavidade da catenária fica voltada para cima e $a < 0$ (números negativos) a concavidade da catenária fica voltada para baixo. Assim como a localização do gráfico no plano cartesiano em relação ao eixo y (eixo das ordenadas) que acompanha os valores assumidos por a . Neste momento, é possível traçar um paralelo com o objeto apresentado na primeira aula para representar a catenária, à medida que as garrafas se afastam, Figura 11, a corrente afasta proporcionalmente da base em que as garrafas estão apoiadas. Esta análise também pode ser feita observando as fotos dos alunos. Tanto a comparação com o objeto da primeira aula quanto a observação das fotos devem ser adaptadas de acordo com o material utilizado pelo professor e imagens apresentadas pelos alunos.

Figura 11 – Comparação entre o objeto que representa a catenária

Fonte: Elaborado pela autora.

O próximo passo da atividade é a utilização das fotos no Geogebra. Para inserir a foto no Geogebra Clássico (*software* instalado no computador) na aba superior é preciso clicar em editar, inserir imagem e para finalizar escolher o local de acesso a imagem. Como ilustra a Figura 12.

Figura 12 – Gráfico da catenária no Geogebra e foto de um demarcador de estacionamento



Fonte: Elaborado pela autora no *software* Geogebra.

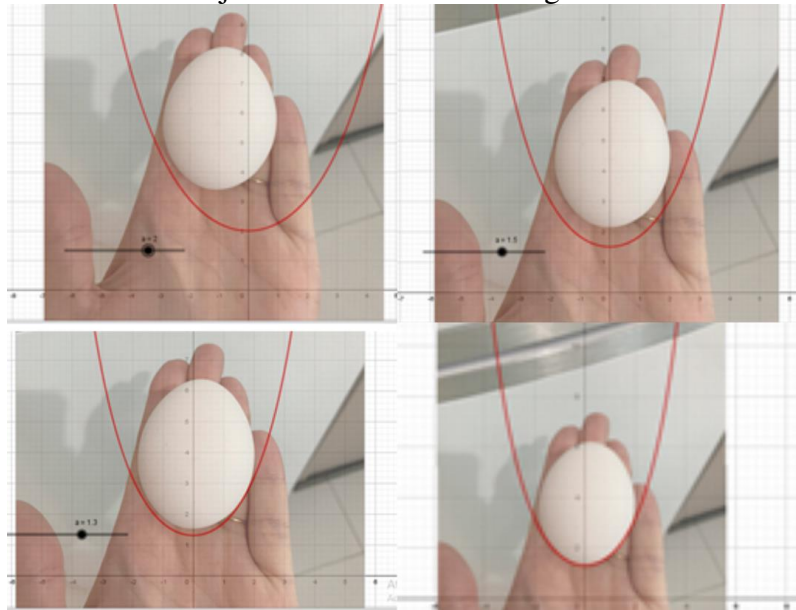
A expressão que representa o gráfico obtido pelo ajuste da imagem anterior foi:

$$y = 5 \cosh\left(\frac{x}{5}\right) = \frac{5}{2} (e^{x/5} + e^{-x/5})$$

O valor assumido por a pode variar de acordo com o tamanho que a imagem foi inserida no programa, assim como sofrer modificações com os ajustes. Por isso a expressão anterior não pode ser considerada como representação na vida real.

O programa possui algumas ferramentas para edição das fotos, uma das opções é deixar com transparência, o que facilita para fazer o ajuste e observar o comportamento da imagem em relação ao gráfico. Para ajustar a curva à imagem é preciso movimentar a foto e o controle deslizante (recurso que será essencial no ajuste). Na Figura 13 está ilustrado alguns passos até o gráfico encaixar na curva do ovo.

Figura 13 – Passos do ajuste da catenária no Geogebra com a foto de um ovo



Fonte: Elaborado pela autora no *software* Geogebra.

No ajuste da foto do ovo o controle deslizante assumiu $a = 1,7 = \frac{17}{10}$, assim a expressão que representa o gráfico obtido pelo ajuste da catenária no ovo foi:

$$y = 1,7 \cosh\left(\frac{x}{1,7}\right) = 1,7 (e^{x/1,7} + e^{-x/1,7}).$$

O programa mostra as expressões com os números decimais, o que é mais interessante neste momento para observar a expressão no gráfico. Porém, com manipulações algébricas simples, os alunos podem desenvolver as expressões equivalentes com a constante em sua forma fracionária. Assim, a expressão anterior apresentada pelo programa equivale a seguinte:

$$y = \frac{17}{10} \cosh\left(\frac{10x}{17}\right) = \frac{17}{20} (e^{10x/17} + e^{-10x/17}).$$

Se houver uma aplicação de força na catenária, ela está será distribuída igualmente por toda a curva. Esta característica da catenária, justifica o fato da curva estar presente nas extremidades de um ovo, assim como na barriga de uma grávida (SCIENCESOFWORLD, 2012 *apud* PIRES, 2022). Como mostrado na Figura 13, o perfil do ovo se trata de uma curva catenária (nas duas extremidades), sua estrutura está ligada com a melhor fluidodinâmica com o objetivo natural para facilitar o trabalho das aves no momento da expulsão. A catenária também é fundamental para conferir maior resistência aos avos, por isso é muito mais difícil quebrar um ovo pelas suas extremidades (a curva faz com que a força seja distribuída). O ovo

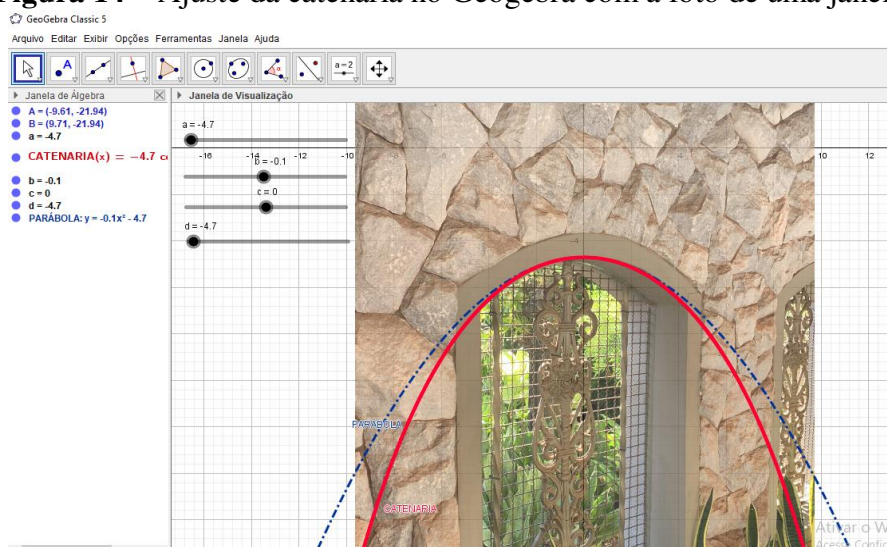
é um dos melhores exemplos da curva na natureza e não é óbvia a presença da catenária nas suas extremidades, além de que, está muito presente na realidade e consequentemente no dia a dia dos alunos. Caso nenhum grupo tenha a foto do ovo ou apresente o ajuste, seria relevante a abordagem pelo professor, bem como outros exemplos que achar pertinente. A análise da realidade de cada turma será fundamental na hora de propor os exemplos e trazer fotos para terceira aula, o professor pode observar se há presença da curva catenária na escola, cidade, sala de aula e demais pontos característicos do cotidiano do grupo de alunos.

Assim como aconteceu na história, e pode ter ocorrido no primeiro contato dos alunos com a curva catenária, ao tirar as fotos e até mesmo fazer os ajustes no Geogebra pode haver dúvidas se a curva observada se trata de uma catenária ou uma parábola. Para fazer a comparação entre as curvas no programa será preciso inserir a expressão da parábola:

$$y = bx^2 + cx + d.$$

Nesta situação vale se atentar ao controle deslizante, como a foi utilizado na expressão da curva catenária, os controles deslizantes (que representam as constantes) da parábola serão b , c e d respectivamente. A letra ou nome atribuído ao controle deslizante não influenciará no resultado, porém para fazer a comparação entre as curvas em relação às fotos é importante que sejam diferentes. O gráfico da parábola pode estar presente no ajuste de todas as imagens, uma vez que há a opção de expor ou não o gráfico na Janela de Visualização sem apagar a expressão numérica da Janela de Álgebra. Na Figura 14 a seguir é possível observar as duas curvas.

Figura 14 – Ajuste da catenária no Geogebra com a foto de uma janela



Fonte: Elaborado pela autora no software Geogebra.

O Geogebra oferece ferramentas que permitem fazer alterações no nome, cor, espessura, estilo e outras propriedades da representação do gráfico, para realizar essas mudanças é só clicar com o botão direito na expressão numérica e logo depois em propriedades. A utilização dessas ferramentas auxilia na visualização das diferenças entre as curvas. Na Figura 14 o gráfico da parábola está representado com pontilhados (cor azul) e o gráfico da catenária com linha preenchida (cor vermelha).

Na Figura 14, para obter a modelação, o controle deslizante associado a catenária assume $a = -4,7$, assim tem-se a seguinte expressão:

$$y = -4.7 \cosh\left(\frac{x}{-4.7}\right) = 4,7 (e^{-x/4.7} + e^{x/4.7}) .$$

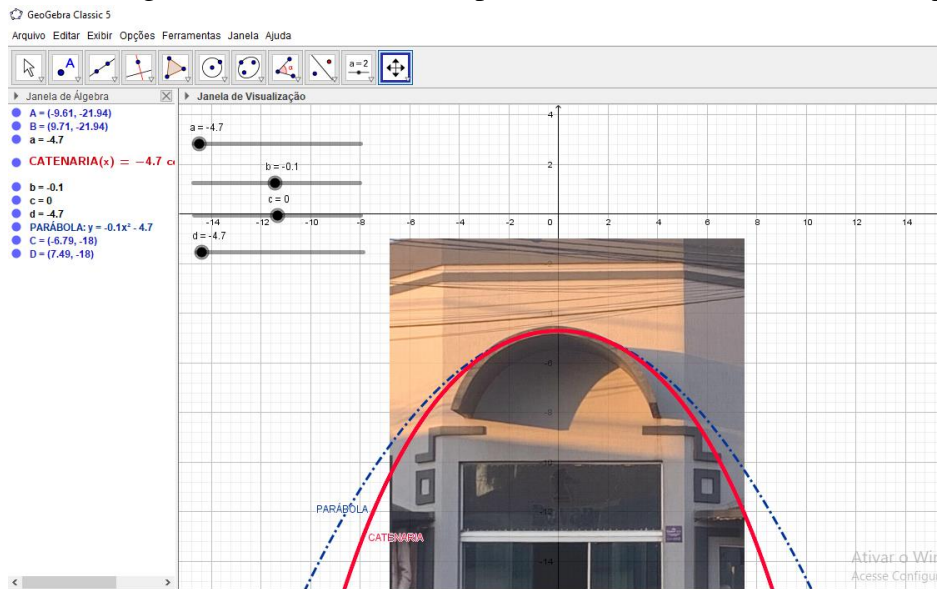
E a expressão que representa a parábola que mais se aproximou no processo de modelação, na janela, foi:

$$y = -0.1 x^2 - 4.7 .$$

É indiscutível o fato de que há muita semelhança entre a catenária e a parábola, como ilustrado na imagem anterior. No entanto é possível perceber que a catenária se ajusta melhor na curva formada pela estrutura da janela. Como mencionado anteriormente, a catenária distribui a força recebida igualmente por toda a curva, isso explica a sua utilização na janela da Figura 14. Para além de contribuir para estética, a curva pode ser uma das responsáveis por manter a estrutura da janela e distribuir o peso do muro e sua estabilidade. Não se pode afirmar com toda a certeza a função da curva para a estrutura desta janela em específica, uma vez que não ocorreu o acesso ao projeto de construção civil, porém a curva oferece esta propriedade.

Nem todas as fotos apresentadas pelos alunos vão necessariamente ser representações de catenárias. Na Figura 15 a seguir, tem-se um exemplo de uma curva que não se trata de uma catenária e nem de uma parábola.

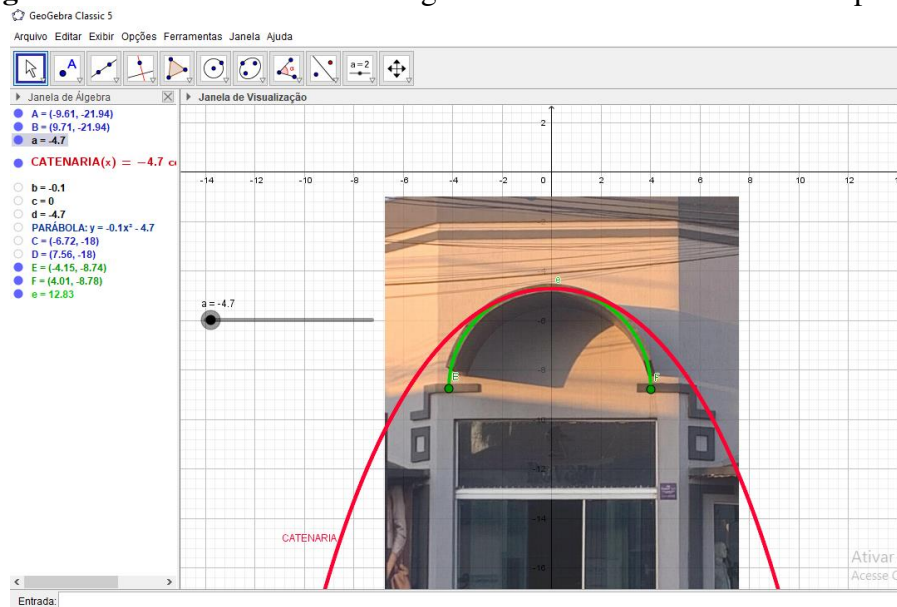
Figura 15 – Os gráficos da catenária e da parábola em foto de fachada de um prédio



Fonte: Elaborado pela autora no *software* Geogebra.

Na foto da imagem anterior é possível observar que a curva é um adorno para entrada do prédio, se tratando de um semicírculo. Ao observar a próxima Figura 16 a seguir pode-se ver que o semicírculo encaixou perfeitamente na curva da imagem.

Figura 16 – O semicírculo no Geogebra com foto da fachada de um prédio



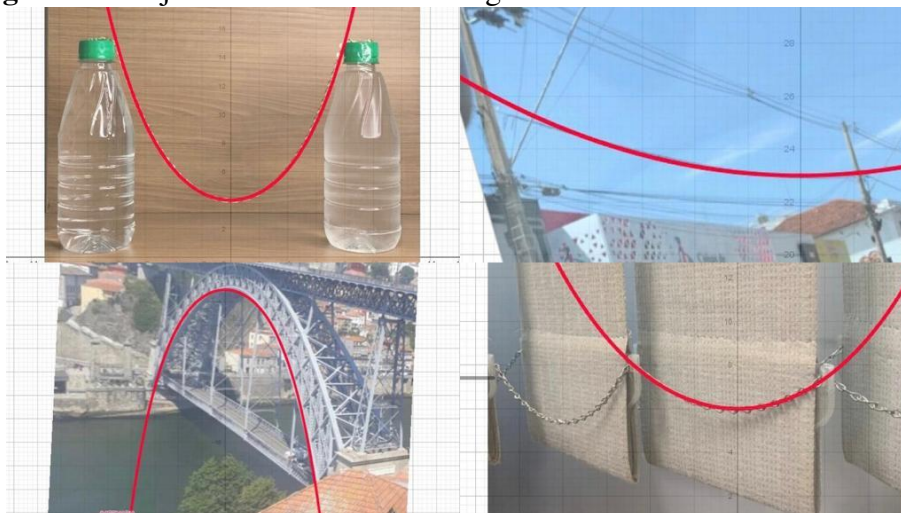
Fonte: Elaborado pela autora no *software* Geogebra.

O semicírculo foi desenvolvido por uma ferramenta do Geogebra posicionando os pontos E(-4.15, -8.74) e F(-4.01, -8.78), o programa aponta a medida do arco formado como $e = 12.83$. O semicírculo representa também toda a sua parte interna, mas como fica destacado o arco tem-se a visualização de uma semicircunferência.

No entanto, pode acontecer de nem todas as curvas encontradas pelos alunos serem representações de alguma curva conhecida, e é importante que eles saibam que nem sempre é possível determinar uma expressão algébrica ou fazer este ajuste pelo Geogebra. Alguns fatores também podem influenciar na hora do ajuste da curva, como por exemplo influência de meios externos (desgaste de tempo, interferência humana, falha humana na construção, interferência da natureza) que podem acontecer tanto em projetos humanos quanto formações da natureza. Outros fatores que podem influenciar no ajuste é o ângulo e a qualidade da imagem inserida no *software*.

A Figura 17 mostra outras fotos que foram ajustadas no Geogebra e são representações de curvas catenárias.

Figura 17 – Ajuste da catenária no Geogebra com fotos de cenários do cotidiano



Fonte: Elaborado pela autora no *software* Geogebra.

Na primeira imagem tem-se a foto do objeto trabalhado na primeira aula, esta análise no Geogebra aproxima ainda mais os alunos e faz a relação definição e construção do gráfico. No ajuste do fio elétrico é possível perceber que não ficou perfeito na extremidade da direita, isto se deu ao fato de que há um objeto exercendo uma força nesta parte. A presença de qualquer material ao longo do fio altera a densidade em pontos específicos, o que contraria a definição da catenária. Na foto da ponte (Ponte Don Luiz I localizada em Porto, Portugal), o formato da catenária é fundamental para a estrutura da construção. Por fim, a última imagem é de uma persiana e suas correntes formam curvas catenárias, neste caso as correntes auxiliam no movimento de abrir e fechar da cortina.

Devido a utilização do controle deslizante a cada imagem terá como correspondência uma equação diferente. A observação dessas equações pelos alunos é importante, para

associarem a parte algébrica ao gráfico. Porém, esses números não podem ser associados as medias reais, uma vez que o tamanho da imagem será feito sem o ajuste de escala e sem a conversão de medidas. Todas as fotos trabalhadas nesta seção no Geogebra são de arquivos pessoais da autora deste trabalho. Observar a catenária no cotidiano e realizar a modelação dessas curvas no *software* aproxima tanto o discente quando o docente da Matemática, associando conteúdo e aplicação. Abordagem importante no processo de Modelagem, citada no Capítulo 2 deste trabalho. Esta terceira aula, em específico, pode ser utilizada como referência para trabalhar as aplicações da catenária com os alunos do Ensino Superior em Matemática (Licenciatura e Bacharelado) em disciplinas mais avançadas do curso, como é o caso do estudo de equação diferencial ordinária (EDO). Neste caso, podem ser necessárias algumas alterações e o professor poderá aprofundar mais na equação da catenária, inclusive a utilização do Geogebra como ferramenta na explicação da demonstração dessa curva. Para finalizar a atividade, sugere-se que o professor peça a cada grupo para escolher uma modelação realizada e compartilhar com os demais alunos para uma discussão coletiva.

No processo de ensino e aprendizagem é importante que os alunos sejam incentivados a observarem a Matemática no seu dia a dia. Com isso, ao final das etapas aulas (como citado no começo deste capítulo), espera-se que os alunos tenham compreendido a construção da catenária, o conceito e as aplicações dessa curva. Espera-se também que os alunos percebam a importância do estudo da história para compreensão do conteúdo, assim como a presença da Matemática no cotidiano. Com a apresentação e utilização do Geogebra com os alunos há a expectativa de que eles introduzam esta ferramenta nos estudos de outros conteúdos, uma vez que o *software* possibilita inúmeras manipulações gráficas. Aqui neste capítulo foi proposto uma atividade que reúne três diferentes tendências para abordagem da catenária no Ensino Médio e Ensino Superior, mas vale ressaltar que elas podem ser utilizadas de forma disjunta e adequadas as necessidades do professor e aluno.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho pretendeu desenvolver uma proposta de ensino para a abordagem da curva catenária em sala de aula. A partir da pesquisa bibliográfica e estudo de algumas tendências para o ensino de Matemática, foram escolhidas três abordagens para desenvolvimento da atividade: a história do conteúdo no processo de ensino e aprendizagem; Modelagem e Modelação Matemática; e utilização de tecnologias em sala de aula, em especial do *software* Geogebra. Apesar dessas tendências serem abordadas, na maioria das vezes, de forma isolada, foi possível estabelecer uma relação de continuidade entre elas durante o desenvolvimento da atividade.

Estabelecer conexão entre as aulas é importante para garantir que o processo de ensino e aprendizagem possa seguir de forma constante, ainda mais quando se trata do mesmo conteúdo. Na atividade proposta é possível observar a correlação entre a história e definição da curva catenária com a Modelagem, e entre o processo de Modelação com o uso de recursos tecnológicos, além de propor citar a todo momento as várias aplicações da catenária. Essas interações entre as aulas e as metodologias podem ser associadas as três etapas do processo de Modelagem (interação, matematização, modelo matemático), processo considerado como um método cíclico. Assim como todas as etapas da Modelagem são fundamentais para chegar a um modelo, todas as metodologias abordadas foram importantes no desenvolvimento da atividade.

Por ser muito presente no cotidiano, a curva catenária (com suas aplicações) deveria ser abordada no Ensino Médio e no Ensino Superior, mas isso, muitas vezes acontece. Assim, o presente trabalho e outros com temas similares, se fazem necessários como forma de propagar e trazer mais informações sobre a catenária e tendências para a abordagem dessa curva em sala de aula. Se no Ensino Médio a atividade proposta aproxima a Matemática do aluno, na graduação ela tem um objetivo ainda mais amplos. No âmbito do Ensino Superior, além de trazer o conteúdo para os alunos, a atividade pode servir como inspiração para a abordagem da catenária quando esses alunos forem professores, no caso dos curso de licenciatura. Percebe-se aqui que a atividade poderá ter esse efeito no curso de Licenciatura em Matemática e no curso de Bacharelado em Matemática, uma vez que os discentes de ambos os cursos podem vir a ser docentes um dia, seja no Ensino Fundamental, Ensino Médio ou Ensino Superior.

A pesquisa contribuiu de forma significativa na formação da autora deste trabalho, enquanto licencianda em Matemática e futura professora. A realização do estudo e apresentação da história proporcionou uma melhor compreensão da curva catenária, o que possibilitou o estudo da definição, demonstração e problemas enfrentados pelos matemáticos, além do estudo

de uma contextualização histórica da época. Os referenciais teóricos utilizados no capítulo sobre Modelação e Modelagem Matemática propuseram uma visão do tema voltada para o ensino, tal como a presença intrínseca da Modelação no processo mental em todas as ações humanas. Compreender a importância da tecnologia na sociedade e conseqüentemente, sua relevância no processo de ensino e aprendizagem é um fator importante na formação de futuros professores. Assim como conhecer o *software* de Matemática Dinâmica Geogebra, ou ter contato com novas ferramentas do programa, e como ele pode ser utilizado em sala de aula a partir da modelação de imagens. A experiência de observar os cenários reais, tirar as fotos e depois realizar o processo de modelar a curva, fez com que as curvas presentes no cotidiano recebessem um novo olhar. Acredita-se que quem viver este processo também poderá observar os pequenos detalhes em que a curva catenária se faz presente. De forma geral, espera-se que os professores e alunos se aproximem ainda mais da Matemática.

Ao observar a divisão do trabalho (abordagem da história, Modelagem Matemática, uso de tecnologia em sala de aula), assim como a divisão da atividade proposta, é possível perceber que as tendências e estrutura da atividade proposta podem ser adaptadas para outros conteúdos matemáticos. A estrutura pode ser adaptada para a parábola, função modular, função exponencial, o estudo da circunferência, hipérbole, elipse e demais conteúdos presentes no dia a dia, em que a modelação da imagem é possível por meio do gráfico no Geogebra.

Com isso, espera-se que este trabalho além contribuir para elaboração de um plano de aula sobre a catenária, também possa inspirar professores a desenvolver um plano de aula com as mesmas abordagens, mas com outro conteúdo. Que este trabalho também possa servir como um exemplo para abordagem diferentes em uma mesma proposta de ensino.

REFERÊNCIA

ALHADAS, Márcio de Castro. **Funções hiperbólicas no ensino médio**. 2013. 73 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro - Uenf, Campos dos Goytacazes-Rj, 2013. Disponível em: <https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wpcontent/uploads/sites/14/2017/08/21082013Marci-o-de-Castro-Alhadas.pdf>. Acesso em: 12 ago. 2023.

ALMEIDA, Helber Rangel Formiga Leite de. Das tecnologias às tecnologias digitais e seu uso na educação matemática. **Nuances: estudos sobre Educação**, [S.L.], v. 26, n. 2, p. 224-240, 6 jan. 2016.

ARAUJO, Wellington Alves de. **Tecnologias da informação e comunicação no ensino de matemática a partir dos egressos do curso de licenciatura – IFS/Aracaju**. 2020. 159 f. Tese (Doutorado) – Curso de Educação, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão – SE. 2020.

BARBOSA, Sandra Malta. Outra parábola na igreja? Ou uma catenária?. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, [S.L.], v.1, n. 2, p. 65- 70, 2013. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/12903>. Acesso em: 13 ago. 2023.

BARBOSA, Veruska Dolfini. **Funções hiperbólicas: Uma proposta de ensino**. 2021. 79 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Matemática, Universidade Federal de Jataí, Jataí-GO. 2021. Disponível em: <http://bdtd.ufj.edu.br:8080/handle/tede/67>. Acesso em: 13 ago. 2023.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2006.

BIEMBENGUT, Maria Sallet; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no ensino**. 4. ed. São Paulo: Editora Contexto, 2005.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem na educação matemática e na ciência**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Tradução: Elza F, Gomide. São Paulo. Editora: Edgard Bluche da Universidade de São Paulo. 1974. Disponível em: <https://doceru.com/doc/e81v8e>. Acesso em: 12 de agosto de 2023.

BRASIL, Gutemberg Leão **et al**. Catenária e a Parábola como tema para contextualização de aulas sobre função quadrática e parábolas. **Brazilian Journal Of Development**, [S.L.], v. 7, n. 7, p. 70656-70672, 13 jul. 2021. Disponível em: <https://ojs.brazilianjournals.com.br/ojs/index.php/BRJD/article/view/32862>. Acesso em: 13 ago. 2023.

BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, DF: Presidência da República. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/19394.htm. Acesso em: 13 ago. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Parecer CNE/CES n.º 1.302/2001: diretrizes curriculares nacionais dos cursos de graduação em matemática, bacharelado e licenciatura**. Aprovado em 6 nov. 2001. Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF, p. 15, 5 mar. 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>. Acesso em: 01 nov. 2023.

COELHO, Rejeane Alexandre. **A história dos problemas da tautócrona e da braquistócrona**. 2008. 106 f. Dissertação (mestrado) – Curso Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro- SP, 2008. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/91134>. Acesso em: 12 ago. 2023.

CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade; BALDINI, Loreni Aparecida Ferreira. O *software* geogebra na formação de professores de matemática – uma visão a partir de dissertações e teses. **Revista Paranaense de Educação matemática**, [S.L], v.1, n.1, p. 42 -61. 2012.

DIAS, Josiane Cristina. **Desenvolvimento Analítico e Soluções Numéricas para a Dinâmica de Cabos**. 2019. 52 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Curso Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Rio Grande, Rio Grande do Sul, 2019.

FARIA, Sirlene Resende de. **A Catenária**. 2011. 34 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Curso de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, 2011. Disponível em: https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/BUOS-94QMAZ/1/a_catenaria.pdf. Acesso em: 12 ago. 2023.

FREITAS, Maria do Bom Conselho da Silva Beserra. **As funções hiperbólicas e suas aplicações**. 2015. 61 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado) – Curso de matemática, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa – PB. 2015. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/7640/2/arquivototal.pdf>. Acesso em: 15 ago. 2023.

GERALDI, Luciana Maura Aquaroni; BIZELLI, José Luís. Tecnologias da informação e comunicação na educação: conceitos e definições. **Revista on line de Política e Gestão Educacional**, [S.L.], n. 18, p. 115-136. 2017.

GOMES, Amanda Colombo. **Planejamento da prática pedagógica utilizando o vídeo como recurso didático no ensino de matemática**. 2019. 117f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Educação Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora - MG. 2019.

LIMA, Lucas Antonio Mendes de; MIRANDA, Sandra Regina Figueiredo de. Problema da catenária: história, solução e aplicações. **Matemática e Ciência: construção, conhecimento e criatividade**, [S.L.], v. 4, n. 1, p. 37-51, 20 jul. 2021. Disponível em: <http://periodicos.pucminas.br/index.php/matematicaciencia/article/view/26814>. Acesso em: 15 ago. 2023.

LOPES, Ângela Tenilly Ribeiro Lopes. **A importância do planejamento para o sucesso escolar**. Universidade da Integração da Lusofonia Afro-Brasileira, 2014.

MACEDO, Neusa Dias de. **Iniciação à pesquisa bibliográfica: guia do estudante para a fundamentação do trabalho de pesquisa**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.

MAOR, Eli. **E: A história de um número**. Tradução: Jorge Caufe. 5º Ed. Rio de Janeiro. Editora: Record. 2008. Disponível em: <https://doceru.com/doc/n5x55>. Acesso em: 17 de agosto de 2023.

MENDES, Marlon de Freitas. **A curva catenária como aplicação da função exponencial**. 2017. 81 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas e Tecnologias, Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba. 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/9096/DissMFM.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 17 ago. 2023.

Minas Gerais. Secretaria de Estado de Educação. **Currículo de Referência do Estado de Minas Gerais: Ensino Fundamental e Médio**. Belo Horizonte: SEE/MG, 2023.

NASCIMENTO, Eimard Gomes Antunes do. Avaliação do uso do software geogebra no ensino de geometria: reflexão da prática na escola. In: **Actas de la Conferencia Latinoamericana de GeoGebra**. Uruguai, 2012.

PAULO, Stephany Glaucia de Oliveira. **Da Catenária a Trigonometria Hiperbólica**. 2014. 67 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade do Estado do Pará, Belém-PA. 2014. Disponível em: https://ccse.uepa.br/downloads/tcc/2013/paulo_2013.pdf. Acesso em: 14 ago. 2023.

PEREIRA, Caroline Conrado; MELO, Charles Bruno da Silva. Explorando curvas planas por meio da modelagem matemática e da geometria dinâmica: Uma experiência com um grupo de alunos. In: **XII Encontro Nacional de Educação Matemática**. São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016. Disponível em: https://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5681_4157_ID.pdf. Acesso em: 14 ago. 2023.

PIRES, Lilian Moreira. **Geometria da Curva Catenária Utilizando Conceitos de Cálculo Diferencial e Integral**. 2022. 56f. Trabalho de Curso (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Estadual de Goiás, Anápolis. 2022.

PRODUÇÃO DE SIGMA3WEB. **Isto é matemática - T04E09: A Catenária**. [S.L]: Youtube, 2013. (7 min.), son., color. Disponível em: https://youtu.be/yBH5ezzY_-0?si=1R2XBr81zOAlOImf. Acesso em: 12 ago. 2023.

PRODUÇÃO DE VIÉS ARQUITETÔNICO. **A curva que revolucionou as estruturas arquitetônicas - A catenária EP.16 S01.** [S.L.]: Youtube, 2021. (14 min.), son., color. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=tFuxLQ3ip00>. Acesso em: 12 ago. 2023.

RAPOSO, Cláudia Sofia Carrilho Morgado. **Curvas famosas e não só: teoria, histórias e atividades.** 2013. 260 f. Dissertação (Mestrado) – Curso em Matemática, Universidade de Lisboa, Lisboa. 2013. Disponível em: <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/10248>. Acesso em: 14 ago. 2023.

ROMANATTO, Mauro Carlos. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA. **Revista Eletrônica de Educação**, [S.L.], v. 6, n. 1, p. 299-311, 29 maio 2012.

SAITO, Fumikazu; DIAS, Marisa da Silva. Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século xvi. **Ciência & Educação (Bauru)**, [S.L.], v. 19, n. 1, p. 89-111, 2013.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. **Currículo Paulista, SEDUC/Undime SP.** São Paulo: SEDUC/SP, 2019.

SASSINE, André; BUSTILLOS, Oscar Veja. **A magia da curva cicloide - braquistócrona e tautócrona.** São Paulo: Editora Scortecci, 2009. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/341218708_A_MAGIA_DA_CURVA_CICLOIDE_-_BRAQUISTOCRONA_E_TAUTOCRONA. Acesso em: 08 de agosto de 2023.

SOUSA, Angélica Silva de; OLIVEIRA, Guilherme Saramago de; ALVES, Laís Hilário. **A pesquisa bibliográfica: princípios e fundamentos.** Cadernos da FUCAMP, v. 20, n. 43, 2021.

SOUSA, Renata Teófilo de; ALVES, Francisco Régis Vieira; SOUZA, Maria José Araújo. Aspectos da parábola e da catenária: um estudo à luz da geometria dinâmica. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, [S.L.], v. 17, p. 1-22, 21 nov. 2022. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/88156>. Acesso em: 16 ago. 2023.

TATTO, Franciele; SCAPIN, Ivone José. **Rejeição à matemática: causas e alternativas de intervenção**. Universidade regional Integrada do Alto Uruguai e da Missões-URI. Porto Alegre, 2003. Métodos de pesquisa / [organizado por] Tatiana Engel Gerhardt e Denise Tolfo Silveira; coordenado pela Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2003.

TEIXEIRA, Fernanda Luiz. **Modelos Descritos por Equações Diferenciais Ordinárias**. 2012.126 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de matemática, Universidade Estadual Paulista, Campus de Rio Claro - SP. 2012. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/94355>. Acesso em: 12 ago. 2023.

VAINSENER, Israel. **Introdução às Curvas Algébricas Planas**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

VASCONCELOS, Cleverton da Silva. **Uma abordagem de curvas no ensino médio**. 2013. 79 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2013. Disponível em: <https://www.repositorio.ufal.br/handle/riufal/6658>. Acesso em: 11 ago. 2023.

VASCONCELOS, Jerry Gleison Salgueiro Fidanza. **Funções hiperbólicas: História, conceito e aplicação**. 2013. 74f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2013.