



**Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática**

Licenciatura em Matemática

**POLIEDROS REGULARES E
SEMIRREGULARES**

Luana Pimenta Muniz de Resende

**Uberlândia-MG
2023**

Luana Pimenta Muniz de Resende

**POLIEDROS REGULARES E
SEMIRREGULARES**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientador: Edson Agustini

Uberlândia-MG

2023



**Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática**

Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática

A banca examinadora, conforme abaixo assinado, certifica a adequação deste trabalho de conclusão de curso para obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Uberlândia-MG, 01 de dezembro de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Edson Agustini

Érika Maria Chioca Lopes

Douglas Marin

**Uberlândia-MG
2023**

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço à Deus pela minha vida, e por me permitir ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo da realização deste trabalho e ao longo do curso. Agradeço pelo que conquistei até agora, mas peço a Ele para me dar sabedoria para conquistar muito mais.

Sou muito grata ao meu namorado Luis Felipe que nunca me deixou na mão ou desacreditou do meu potencial. Obrigada pela paciência e compreensão com os inúmeros momentos de ansiedade e estresse, que eu sei que foram muitos. Você passou por muitos momentos durante toda a minha graduação, por choros e muitas crises em que eu duvidava de mim. Sem o seu suporte, todo o processo seria mais desafiador e não conseguiria passar por todas as disciplinas da forma que passei. Não há palavras para descrever minha gratidão à você.

Aos meus colegas de curso, com quem convivi durante os últimos anos, de maneira remota e presencial, pelo companheirismo e pela troca de experiências que me permitiram crescer como pessoa e formanda. Sou muito feliz pelos amizades que criei e que quero levar para minha vida. Em especial, gostaria de citar as três amigas que colaboraram durante os quatro anos em que nos tornamos inseparáveis, Maria Eduarda, Brenda e Tamiris. Vocês três sempre estiveram ao meu lado, muito obrigada pela amizade e pelo apoio demonstrado ao longo de todo o período de tempo em que me dediquei a faculdade. Agradeço pelas risadas que compartilhei nos momentos difíceis da faculdade e por todos os conselhos úteis, bem como palavras motivacionais e puxões de orelha.

Gratidão em especial à minha amiga Tamiris, que se tornou minha melhor amiga nesses quatro anos de faculdade. Acredito que sem o ensino remoto, talvez nem seríamos tão próximas. Não há texto que descreva meu sentimento por você, o tanto que você me ajudou nesse tempo e por tudo que passamos juntas. Confio em você de olhos fechados e tenho certeza que a amizade começou em 2020 e vai durar para todo o sempre. Nunca irei esquecer que no primeiro dia tivemos o trote e nós duas andamos de mãos dadas pela UFU. Nunca imaginei que essa seria minha melhor amiga. Obrigada por todas as vezes que limpou minhas lágrimas, que puxou minha orelha por não estudar, por me ligar e me obrigar a estudar com você ou ao mínimo ficar na ligação para garantir que estudássemos. Compartilhamos tantos momentos, tantas conquistas e tantos perrengues que perdi a conta. Mas a faculdade não faria sentido sem você. Pode ter certeza que a cada conquista sua estarei de pé aplaudindo. Obrigada!

Ao meu orientador, professor doutor Edson Agustini que me garantiu total suporte e auxílio. Obrigada por me apresentar esse tema que me encantou e por toda a paciência com a qual guiou o meu aprendizado. Você é um excelente orientador e sou muito grata por ter te escolhido. Obrigada pela maestria que conduziu meu TCC e por ter garantido toda a beleza dele com seu suporte.

À todos os professores, em especial às professoras Ana Cláudia e Fabiana pelas correções e ensinamentos que me permitiram apresentar um melhor desempenho no meu processo de

formação profissional ao longo do curso. Obrigada por todo apoio emocional, pois sem vocês duas não teria saúde mental para todas as disciplinas desafiadoras. Vocês me deram força e me apoiaram, mostrando minha capacidade que muitas vezes duvidava. Tive inúmeros professores bons, inclusive os professores Arlindo e Douglas e a professora Érika. Esses cinco professores foram essenciais para minha formação como pessoa e professora, ao ensinar como ensinar. Foi muito bonito todo o meu processo de formação em licenciatura e me apaixonei nessa área por eles.

À instituição de ensino UFU, essencial no meu processo de formação profissional, pela dedicação, e por tudo o que aprendi ao longo dos anos do curso.

Ao meu pai Jair, meus tios, padrinhos, avós e minha sogra que me incentivaram nos momentos difíceis e compreenderam a minha ausência. Eles aplaudiram de pé meu TCC e participaram ativamente desse momento me alegrando e comemorando comigo. Agradeço todo o apoio à minha escolha e ao meu processo. Sem vocês, nada disso seria possível. Obrigada pai, por pagar uma escola particular durante muitos anos para um processo de aprendizado melhor. Obrigada tia Tatinha por ter me ajudado tanto emocional e financeiramente nessa reta final. Não conseguiria nada sem essa ajuda.

Por fim, à todos com quem convivi durante os anos de curso, que me encorajaram e que certamente impactaram positivamente na minha formação acadêmica.

RESUMO

Neste Trabalho de Conclusão de Curso apresentamos um estudo dos cinco poliedros regulares (ou Poliedros de Platão) e dos treze poliedros semirregulares (ou Poliedros de Arquimedes). Tal estudo foi dividido em duas partes: parte teórica, com deduções de fórmulas e classificação dos referidos poliedros e; parte prática, com a construção dinâmica dos poliedros semirregulares a partir dos poliedros regulares utilizando o software GeoGebra.

É importante enfatizar a impossibilidade de se construir dinamicamente os poliedros semirregulares no GeoGebra sem algumas das fórmulas relacionadas aos poliedros regulares que foram deduzidas na parte teórica. As fórmulas deduzidas foram: (i) Relação de Euler para poliedros convexos; (ii) medidas dos ângulos central e diedral de poliedro regular em função de seu gênero de faces e de seu gênero de vértices; (iii) raios de esferas inscrita e circunscrita a poliedro regular em função de seu gênero de faces, de seu gênero de vértices e de seu comprimento de arestas; (iv) apótema e raio de círculo circunscrito à face de poliedro regular em função de seu gênero de faces e de seu comprimento de arestas e; (v) área e volume de poliedro regular em função de seu gênero de faces, de seu gênero de vértices, de seu número de faces e de seu comprimento de arestas.

Também é importante ressaltar que as construções dos poliedros semirregulares foram feitas por meio de três operações geométricas sobre os poliedros regulares: (1) truncamento simples; (2) truncamento composto e; (3) snubificação.

Neste trabalho temos a expectativa de poder contribuir na teoria dos poliedros regulares e semirregulares, bem como nas construções geométricas dinâmicas de tais poliedros no software GeoGebra.

Palavras-chave: Classificação de Poliedros, GeoGebra, Geometria Dinâmica, Truncamento.

ABSTRACT

In this Undergraduate Final Project we present a study of the five regular polyhedra (or Platonic Solids) and the thirteen semi-regular polyhedra (or Archimedean Solids). This study was divided into two parts: theoretical part, with deductions from formulas and classification of above polyhedra and; practical part, with the dynamic construction of semi-regular polyhedra from regular polyhedra using the GeoGebra software.

It is important to emphasize the impossibility of dynamically constructing semi-regular polyhedra in GeoGebra without some of the formulas related to regular polyhedra that were deduced in the theoretical part. The formulas deduced were: (i) Euler Relation for convex polyhedra; (ii) measurements of the central and dihedral angles of a regular polyhedron depending on its genus of faces and its genus of vertices; (iii) radii of spheres inscribed and circumscribed by a regular polyhedron depending on the genus of faces, the genus of vertices and the length of the edges; (iv) apothem and radius of the circle circumscribed to the face of a regular polyhedron depending on its genus of faces and its edge length and; (v) area and volume of a regular polyhedron as a function of its genus of faces, its genus of vertices, its number of faces and its edge length.

It is also important to highlight that the constructions of semi-regular polyhedra were made through three geometric operations on regular polyhedra: (1) simple truncation; (2) composite truncation and; (3) snubification.

In this work we hope to be able to contribute to the theory of regular and semi-regular polyhedra, as well as the dynamic geometric constructions of such polyhedra in the GeoGebra software.

Keywords: Classification of Polyhedra, GeoGebra, Dynamic Geometry, Truncation.

SUMÁRIO

Lista de Figuras	I
Lista de Tabelas	II
1 Introdução	1
1.1 Definindo Poliedro Regular e Semirregular	1
1.2 Definindo Polígono	4
1.3 Definindo Poliedro	5
1.4 A Relação de Euler	7
1.5 O GeoGebra Ajudando a Superar as Dificuldades de Visualização	9
2 Poliedros Regulares	11
2.1 Pequena Introdução Histórica aos Poliedros Regulares	11
2.2 Classificação dos Poliedros Regulares	12
2.3 Fórmulas do Ângulo Central e do Ângulo Diedral em Poliedros Regulares	16
2.4 Fórmulas Para Três Raios e Apótema em Poliedros Regulares	24
2.5 Fórmulas de Área e Volume em Poliedros Regulares	29
3 Poliedros Semirregulares	33
3.1 Introdução Histórica	33
3.2 Classificação dos Poliedros Semirregulares	34
4 Roteiro de uma das Construções no GeoGebra	44
5 Links Para as Construções dos Poliedros Semirregulares	81
6 Conclusões	86
Referências Bibliográficas	87

LISTA DE FIGURAS

1.1	Os cinco poliedros regulares. Fonte: a autora.	2
1.2	Os treze poliedros semirregulares. Fonte: a autora.	3
1.3	Representação de truncamento e snubificação. Fonte: a autora.	3
1.4	Polígono plano e polígono enviesado. Fonte: a autora.	4
1.5	Polígonos regulares. Fonte: a autora.	5
1.6	Reunião de polígonos que não são poliedros. Fonte: [1].	6
1.7	Poliedro convexo e não convexo. Fonte:[1].	6
1.8	Poliedro convexo com projeções no plano. Fonte: a autora.	8
1.9	Platão, Arquimedes, Euler e Cauchy. Fonte: [10].	9
2.1	Euclides, Kepler e seu modelo. Fonte: [10].	12
2.2	Figura de apoio às notações. Fonte: a autora.	17
2.3	Figura de apoio à dedução da primeira fórmula. Fonte: a autora.	18
2.4	Figura de apoio à dedução da segunda fórmula. Fonte: a autora.	22
2.5	Figura de apoio à dedução do raio de esfera circunscrita. Fonte: a autora.	25
2.6	Figura de apoio à dedução do raio do círculo circunscrito à face. Fonte: a autora.	26
2.7	Figura de apoio à dedução da apótema da face. Fonte: a autora.	27
2.8	Figura de apoio à dedução do raio da esfera inscrita ao poliedro. Fonte: a autora.	27
2.9	Figura de apoio à dedução da área do poliedro. Fonte: a autora.	30
2.10	Figura de apoio à dedução do volume do poliedro. Fonte: a autora.	31
3.1	Mapeamento dos Poliedros Arquimedianos. Fonte: a autora.	34
3.2	Prisma e antiprisma. Fonte: a autora.	35
3.3	Igualdade $s = t$ quando r é ímpar. Fonte: a autora.	37
3.4	Se há dois triângulos adjacentes, então há três triângulos em cada vértice. Fonte: a autora.	38
3.5	Cúpula quadrangular. Fonte: a autora.	40
3.6	Cúpula quadrangular. Fonte: a autora.	40
3.7	Rombicuboctaedro tipo “um” e Rombicuboctaedro tipo “dois”. Fonte: a autora.	41
3.8	Cuboctaedro como intersecção de cubo com octaedro. Fonte: a autora.	41
3.9	Cubo snub com giros horários e anti-horários. Fonte: a autora.	43
4.1	Etapas de construção do cubo truncado. Fonte: a autora.	45
5.1	Tetraedro - Tetraedro Truncado - Octaedro. Fonte: a autora.	81
5.2	Cubo - Cubo truncado - Cuboctaedro. Fonte: a autora.	82
5.3	Octaedro - Octaedro truncado - Cuboctaedro. Fonte: a autora.	82
5.4	Dodecaedro - Dodecaedro truncado - Icosidodecaedro. Fonte: a autora.	83
5.5	Icosaedro - Icosaedro truncado - Icosidodecaedro. Fonte: a autora.	83
5.6	Cuboctaedro - Cuboctaedro truncado - Rombicuboctaedro. Fonte: a autora.	84

5.7	Icosidodecaedro - Icosidodecaedro truncado - Rombicosidodecaedro. Fonte: a autora.	84
5.8	Cubo - Cubo snub. Fonte: a autora.	85
5.9	Dodecaedro - Dodecaedro snub. Fonte: a autora.	85

LISTA DE TABELAS

1.1	Nomenclatura de poliedros.	7
2.1	Classificação dos poliedros regulares.	16
2.2	Poliedros regulares com gêneros $\{p, q\}$	16
2.3	Fórmulas de medidas de ângulos centrais dos poliedros regulares.	21
2.4	Fórmulas de medidas de ângulos diedrais dos poliedros regulares.	24
2.5	Fórmulas dos raios das esferas circunscritas aos poliedros regulares.	25
2.6	Fórmulas dos raios dos círculos circunscritos às faces dos poliedros regulares	27
2.7	Fórmula de apótema de face dos poliedros regulares	28
2.8	Fórmulas de raios de esferas inscritas aos poliedros regulares	29
2.9	Fórmula de área dos poliedros regulares	30
2.10	Fórmulas dos volumes dos poliedros regulares	32
3.1	Vetores para o caso $k = 3$	38
3.2	Nomenclatura dos poliedros para o caso $k = 3$	39
3.3	Vetores para o caso $k = 4$	39
3.4	Nomenclatura dos poliedros para o caso $k = 4$	40
3.5	Vetores para o caso $k = 5$	42
3.6	Nomenclatura dos poliedros para o caso $k = 5$	42

1. INTRODUÇÃO

O estudo de objetos tridimensionais, como sólidos de faces curvadas ou sólidos de faces planas (poliedros) costuma ser difícil para estudantes de Ensino Básico e até mesmo para estudantes de Ensino Superior. De acordo com Rogenski e Pedroso (2009, p. 5), os alunos têm dificuldades com relação à visualização e representação, pois reconhecem poucos conceitos da geometria básica. Além da dificuldade visual, há também a dificuldade em termos de constatação de propriedades, como as métricas envolvendo os poliedros, ou seja, medidas de arestas, medidas de ângulos, cálculos de áreas de superfícies, cálculos de volumes, e assim por diante. As deduções de fórmulas também costumam trazer dificuldades, uma vez que é necessário utilizar pré-requisitos de natureza algébrica para um estudo eficiente. Modelos concretos e construções geométricas dinâmicas feitas em computador, com o auxílio de softwares destinados a esse fim, como o GeoGebra (referência [5]), por exemplo, têm ajudado muito no estudo dos poliedros. Entretanto, mesmo assim, as dificuldades costumam ser grandes.

Neste texto apresentamos um estudo, tanto do ponto de vista teórico, quanto do ponto de vista computacional, em termos de construções geométricas dinâmicas, utilizando o software GeoGebra, dos chamados *Poliedros Regulares* e, também, dos *Poliedros Semirregulares*, cujas definições seguem abaixo, baseadas na referência [8].

1.1 DEFININDO POLIEDRO REGULAR E SEMIRREGULAR

Poliedro Regular: Um *Poliedro Regular*, também chamado de *Poliedro de Platão ou Platônico*, é um poliedro convexo cujas faces são todas congruentes e regulares e, além disso, em todos os vértices incidem o mesmo número de arestas.

Como consequência imediata desta definição temos que todas as faces de um poliedro regular apresentam o mesmo número de lados. Também vale a chamada *Relação de Euler*: $V - A + F = 2$, sendo V o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces do poliedro. Mais adiante provaremos a *Relação de Euler*. Também provaremos, no Capítulo 2, que existem apenas cinco poliedros regulares, apresentados na Figura 1.1. São eles:

- (a) tetraedro regular;
- (b) hexaedro regular (mais conhecido como cubo);
- (c) octaedro regular;

- (d) dodecaedro regular e;
 (e) icosaedro regular.

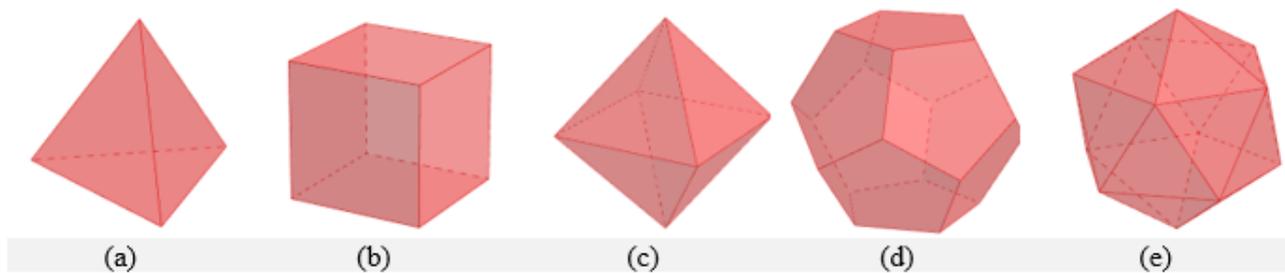


Figura 1.1: Os cinco poliedros regulares. Fonte: a autora.

Poliedro Semirregular: Um *Poliedro Semirregular*, ou *Poliedro de Arquimedes* ou *Arquimediano*, é um poliedro convexo, diferente de um prisma ou antiprisma, cujas faces são polígonos regulares de mais de um tipo e, em torno de cada vértice, a disposição de polígonos é sempre a mesma.

Como consequência desta definição, em poliedros semirregulares também vale a *Relação de Euler* e provaremos, no Capítulo 3, que existem apenas treze de tais poliedros, apresentados na Figura 1.2. São eles:

- (a) tetraedro truncado;
- (b) cubo truncado;
- (c) octaedro truncado;
- (d) dodecaedro truncado;
- (e) icosaedro truncado;
- (f) cuboctaedro;
- (g) cuboctaedro truncado;
- (h) rombicuboctaedro;
- (i) icosidodecaedro;
- (j) icosidodecaedro truncado;
- (k) rombicoidodecaedro;
- (l) cubo snub (também chamado de cubo romo) e;
- (m) dodecaedro snub (também chamado de dodecaedro romo).

Todos os treze poliedros semirregulares citados acima são obtidos por meio de três “operações geométricas” sobre os poliedros regulares. Tais operações são as seguintes:

Truncamento Simples: consiste em cortar e retirar pequenas pirâmides de cada vértice de um poliedro regular de tal modo que as faces resultantes sejam todas regulares (Figura 1.3-a).

Truncamento Composto: consiste aplicar duas vezes o truncamento simples em um poliedro regular e, em seguida, afastar determinadas faces do centro do poliedro de tal modo que as faces resultantes sejam todas regulares.

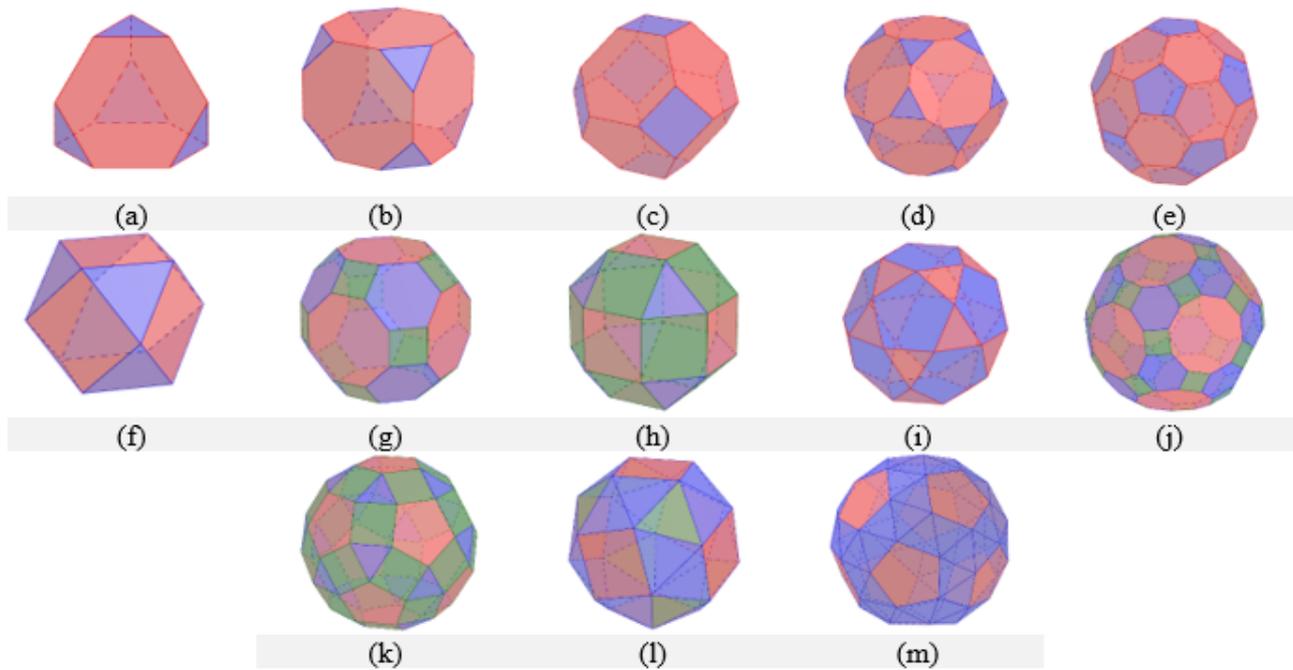


Figura 1.2: Os treze poliedros semirregulares. Fonte: a autora.

Snubificação: consiste em afastar as faces de um poliedro regular de seu centro, rotacioná-las e “preencher” os espaços vazios com triângulos regulares (Figura 1.3-b).

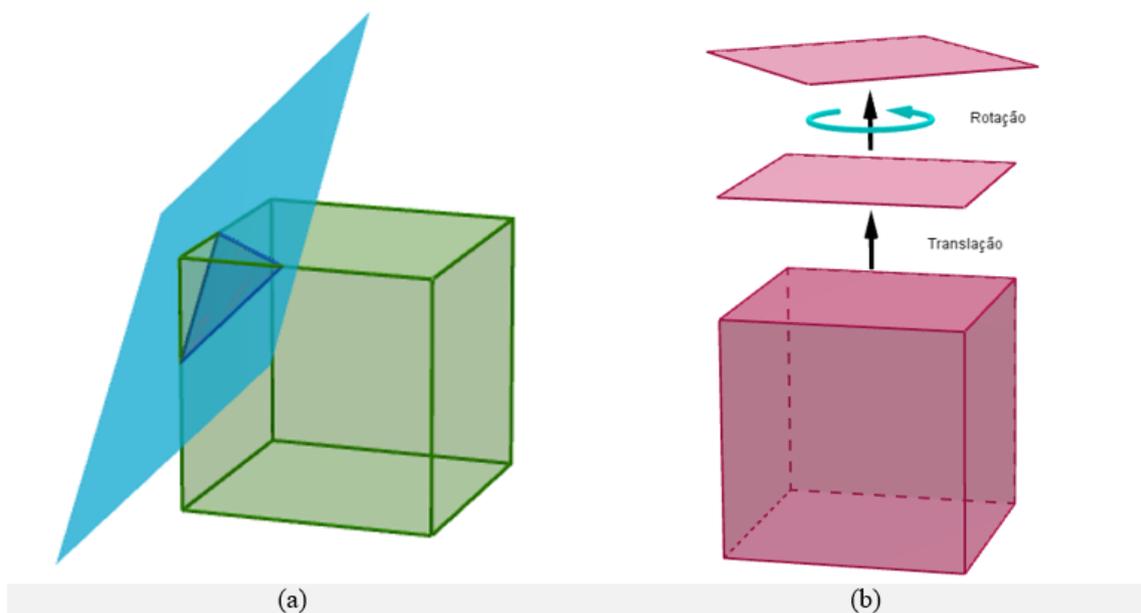


Figura 1.3: Representação de truncamento e snubificação. Fonte: a autora.

Essas operações serão melhores entendidas nas construções geométricas dinâmicas que serão apresentadas nos Capítulos 4 e 5.

Dos treze poliedros semirregulares, sete são obtidos por truncamentos simples (Figura 1.2, (a), (b), (c), (d), (e), (f) e (i)); quatro são obtidos por truncamentos compostos (Figura 1.2, (g), (h), (j) e (k)) e dois são obtidos por snubificações (Figura 1.2, (l) e (m)).

1.2 DEFININDO POLÍGONO

Embora tenhamos apresentado as definições dos poliedros regulares e semirregulares, ficamos devendo a definição precisa do que estamos entendendo por poliedro. E é aqui que podemos resgatar um pouco da história dos poliedros e das descobertas de suas propriedades. Por incrível que possa parecer, a definição precisa de poliedro é algo que surgiu apenas no século XIX, portanto, recente na história milenar da Matemática (referência [10]). Esse “atraso histórico” na definição ocorreu devido à dificuldade de se delinear o que gostaríamos de chamar de “poliedro”. Para apresentá-la, precisamos definir antes o que entendemos por “polígono”.

Um **polígono** é um conjunto finito de segmentos de reta no espaço, que iremos denotar por $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$, com $n \geq 3$, unindo pares consecutivos de pontos A_1, A_2, \dots, A_n distintos dois a dois. Os segmentos não se auto-intersectam, exceto nos extremos; e um par de segmentos consecutivos nunca é colinear. Os segmentos são chamados de **lados** do polígono, enquanto que os extremos são os **vértices** do polígono.

Quando os vértices de um polígono estiverem em um mesmo plano, o chamamos de **polígono plano** (Figura 1.4-a). Caso contrário, o nomeamos de **polígono enviesado** (Figura 1.4-b). Todavia, neste trabalho, assumimos que ao utilizar a palavra polígono, estamos nos referindo a um polígono plano, conforme estamos habitualmente acostumados.



Figura 1.4: Polígono plano e polígono enviesado. Fonte: a autora.

Todo polígono divide o plano que o contém em duas regiões, a **interior**, limitada, e a **exterior**, não limitada. Vamos considerar que um polígono é constituído pelos seus lados, vértices e pelo seu interior.

Dizemos que um polígono é **convexo** quando qualquer segmento de reta definido por dois pontos do polígono está contido nesse polígono. Observamos também que qualquer polígono convexo é a interseção de semiplanos definidos pelas retas suporte dos lados do polígono.

Uma reta r no plano cartesiano é descrita por uma equação da forma $ax + by = c$, com a , b e c reais. Portanto, os dois semiplanos que r determina são definidos por $ax + by \leq c$ e por $ax + by \geq c$ (ou $(-a)x + (-b)y \leq (-c)$). Desta maneira, qualquer polígono pode ser visto como solução de um sistema de inequações da forma $ax + by \leq c$ e, portanto, cada inequação do sistema define um dos semiplanos determinado por uma reta suporte de lado do polígono.

Por isso, com esse enfoque, a quantidade de inequações do sistema será a quantidade de lados do polígono que estamos tratando.

Um polígono é classificado como **equilátero** quando tem todos os lados com a mesma medida e **equiangular** quando tiver todos os ângulos internos de mesma medida. Um polígono é dito **regular** quando for um polígono equilátero e equiangular ao mesmo tempo. A Figura 1.5 apresenta alguns exemplos.

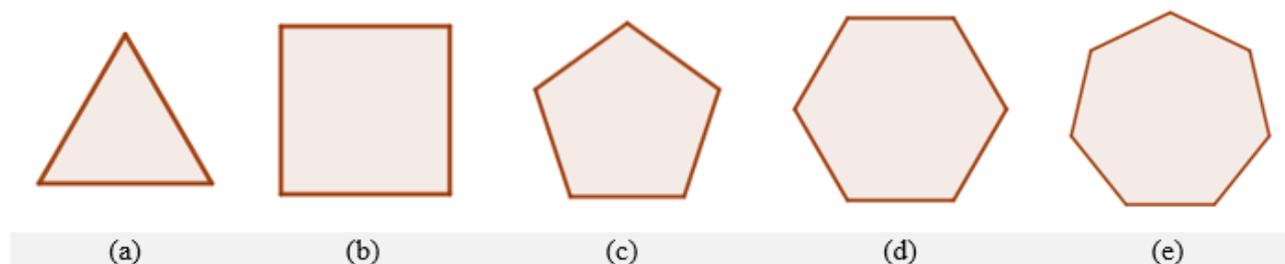


Figura 1.5: Polígonos regulares. Fonte: a autora.

1.3 DEFININDO POLIEDRO

Um **poliedro** é um conjunto finito P de polígonos planos, denominados **faces**, que cumpre três condições:

- (1) Cada lado de um desses polígonos é lado também de um, e apenas um, outro polígono.
- (2) A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice comum, ou é vazia.

Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado de **aresta** de P e cada vértice de uma face é um **vértice** de P .

- (3) Sejam $A, B \in P$ pontos distintos dos vértices de P . É sempre possível passar uma linha poligonal sobre P , ligando A a B , sem passar por vértices de P .

A definição de poliedro apresentada acima é relativamente restritiva. Objetos como os da Figura 1.6, por exemplo, não são considerados poliedros.

As faces de um poliedro que incidem em um vértice dão origem a pelo menos um ângulo poliédrico. Sendo o triedro o ângulo poliédrico mais simples que existe, então para que um poliedro exista, ele deve ter, no mínimo, quatro faces.

De modo análogo aos polígonos, todo poliedro determina duas regiões no espaço: uma limitada, em que a fronteira é o próprio poliedro, e outra não limitada. A região limitada é denominada **interior** do poliedro.

É importante entender que, de acordo com a definição acima, um poliedro é uma reunião de polígonos que cumpre determinadas condições. Isso significa que estamos considerando um

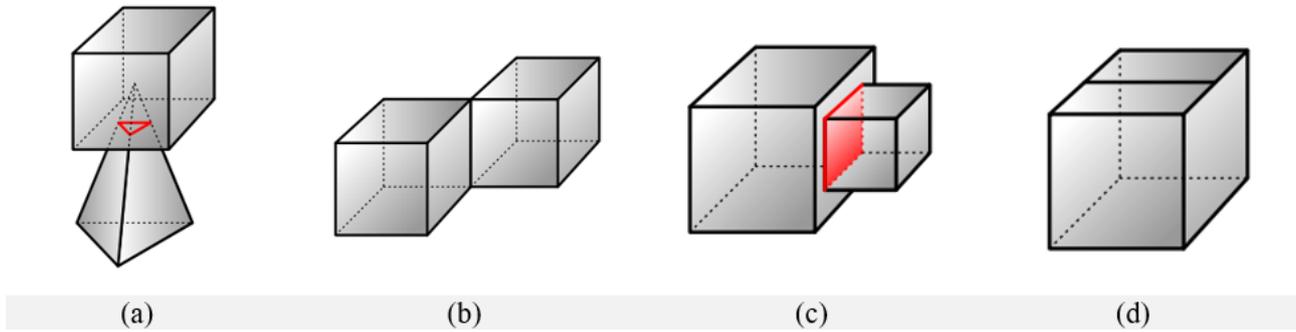


Figura 1.6: Reunião de polígonos que não são poliedros. Fonte: [1].

poliedro como sendo uma superfície. Logo, faz sentido falar, por exemplo, em área de poliedro. Entretanto, em muitos contextos, poliedro também pode ser considerado como sendo a reunião de seu interior com sua “superfície-fronteira”, o que permite falar, por exemplo, em volume de poliedro. Apesar desta dubiedade de sentidos para a palavra poliedro, o contexto é sempre claro.

Podemos classificar um poliedro como sendo **convexo** quando seu interior é uma região convexa, ou seja, uma região em que quaisquer pares de pontos determinam segmentos de reta contidos na própria região. A Figura 1.7-a apresenta um poliedro convexo, enquanto que a Figura 1.7-b apresenta um poliedro não convexo.

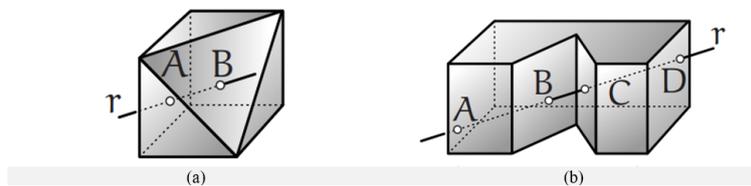


Figura 1.7: Poliedro convexo e não convexo. Fonte:[1].

A convexidade de um poliedro é uma propriedade muito significativa, já que estabelece uma família de poliedros muito utilizada em diversos contextos e, ao mesmo tempo, evita alguns casos de poliedros “estranhos”. Por esse motivo, vamos considerar uma propriedade equivalente a essa condição de convexidade que é muito útil para a demonstração da *Relação Euler para poliedros convexos* que será feita logo abaixo: um poliedro é **convexo** quando toda reta não paralela a qualquer de suas faces intersecta sua superfície em, no máximo, dois pontos.

Alguns poliedros são nomeados de acordo com as suas quantidades de faces, conforme a Tabela 1.1.

Uma análise interessante é que os poliedros tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro podem ser construídos somente com polígonos regulares.

Número de faces	Nomenclatura
4	Tetraedro
5	Pentaedro
6	Hexaedro
7	Heptaedro
8	Octaedro
9	Eneaedro
10	Decaedro
11	Undodecaedro
12	Dodecaedro
20	Icosaedro

Tabela 1.1: Nomenclatura de poliedros.

1.4 A RELAÇÃO DE EULER

Nesta seção abordaremos a *Relação de Euler*, que é uma igualdade importante envolvendo poliedros, e que relaciona o número de vértices, arestas e faces em poliedros convexos. A demonstração feita abaixo foi baseada na referência [6] e será importante para a classificação dos poliedros regulares que faremos no Capítulo 2.

Teorema 1. (*Relação de Euler*) *Em todo poliedro convexo vale que $V - A + F = 2$, sendo V , A e F o número de vértices, arestas e faces desse poliedro, respectivamente.*

Demonstração:

Considere n_1, n_2, \dots, n_F o número de lados de cada uma das F faces de um poliedro convexo.

A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n lados é $(n - 2) \cdot 180^\circ$. Por isso, temos que a soma S das medidas dos ângulos internos das faces do poliedro é:

$$\begin{aligned} S &= (n_1 - 2) \cdot 180^\circ + (n_2 - 2) \cdot 180^\circ + \dots + (n_F - 2) \cdot 180^\circ \\ &= ((n_1 + n_2 + \dots + n_F) - (2 + 2 + \dots + 2)) \cdot 180^\circ \end{aligned}$$

Como a soma da quantidade de lados é duas vezes a quantidade de arestas, temos que $(n_1 + n_2 + \dots + n_F) = 2A$, e como 2 está sendo repetido F vezes em $(2 + 2 + \dots + 2)$, temos que $(2 + 2 + \dots + 2) = 2F$, ou seja,

$$S = (2A - 2F) \cdot 180^\circ = (A - F) \cdot 360^\circ \quad (1.1)$$

Faremos a soma das medidas dos ângulos internos das faces do poliedro convexo de outra maneira.

Seja um plano α que não intersecta o poliedro e tal que se r é uma reta perpendicular a α , então r não é paralela a qualquer face do poliedro. Este plano α e essa reta perpendicular r sempre existem devido ao fato do poliedro ter um número finito de faces. Portanto, a reta

r deve ser escolhida de tal modo a não ser perpendicular às retas perpendiculares aos planos que passam pelas faces do poliedro. Isso equivale a escolher uma direção no espaço de tal modo que ela não seja perpendicular a um número finito de direções pré-fixadas (as direções representadas pelas retas perpendiculares às faces). Assim, sempre podemos escolher infinitas direções no espaço que podem ser representadas pela reta r .

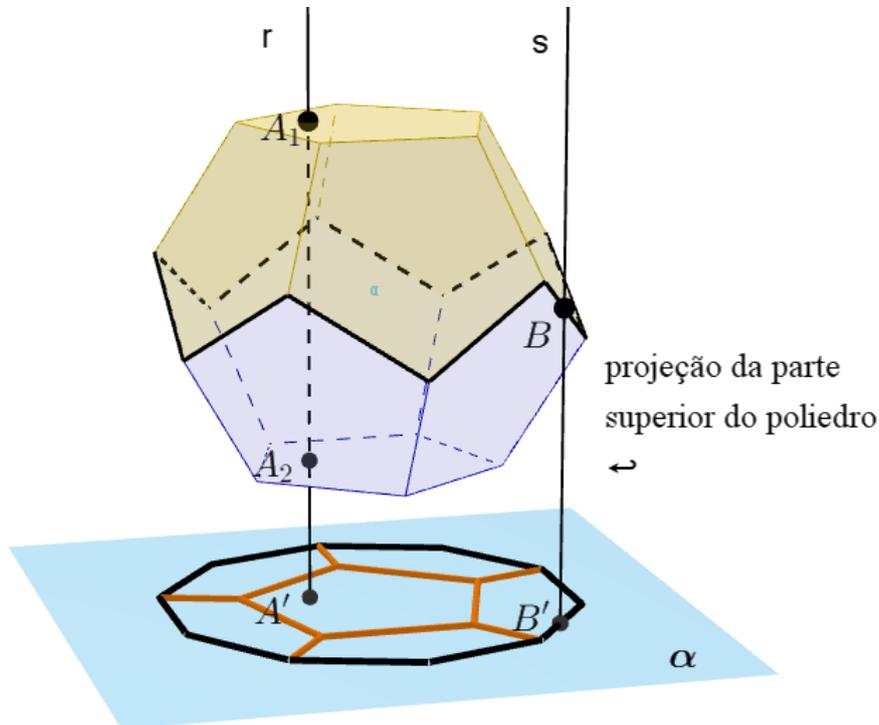


Figura 1.8: Poliedro convexo com projeções no plano. Fonte: a autora.

Vamos nomear os vértices que estão na “parte superior” do poliedro de

Sendo o poliedro convexo, qualquer reta $s//r$ intersecta a superfície do poliedro em 0 ou 1 ou 2 pontos. Quando a reta intersecta o poliedro em 2 pontos, um deles está na parte superior e outro na parte inferior. Já se a reta intersecta em apenas 1 ponto, este está naquilo que devinimos como sendo a *fronteira* das partes superior e inferior (Figura 1.8).

Fazendo uma projeção dos vértices superiores V_0 , inferiores V_1 e os vértices da fronteira V_2 no plano α , temos $V = V_0 + V_1 + V_2$.

Observemos que a projeção de um polígono (face) com n lados do poliedro em α é, também, um polígono com n lados. Portanto, a soma das medidas dos ângulos internos de uma face é o mesmo que a soma das medidas dos ângulos internos da projeção dessa face em α .

Assim, chegamos em:

$$\begin{aligned} S &= [V_0 \cdot 360^\circ + (V_2 - 2) \cdot 180^\circ] + [V_1 \cdot 360^\circ + (V_2 - 2) \cdot 180^\circ] \\ &= (V_0 + V_1 + V_2 - 2) \cdot 360^\circ \\ &= (V - 2) \cdot 360^\circ, \end{aligned} \tag{1.2}$$

sendo que o primeiro colchete refere-se à projeção da parte superior do poliedro com sua fronteira e o segundo colchete refere-se à projeção da parte inferior do poliedro com sua fronteira.

Por 1.1 e 1.2, temos:

$$(A - F).360^\circ = (V - 2).360^\circ \Rightarrow A - F = V - 2 \Rightarrow \boxed{V - A + F = 2},$$

o que prova a *Relação de Euler*. □

1.5 O GEOGEBRA AJUDANDO A SUPERAR AS DIFICULDADES DE VISUALIZAÇÃO

Talvez pelas dificuldades vinculadas ao estudo dos poliedros, a história dos poliedros regulares e semirregulares, em particular, tenha sido bastante conturbada ao longo dos séculos (referência [10]). Platão (428 – 348 a.C) já conhecia os cinco poliedros regulares e associou-os aos elementos fogo-terra-ar-universo-água, enquanto que nos trabalhos de Arquimedes de Siracusa (287 – 212 a.C) já havia referências aos treze poliedros semirregulares que hoje levam o seu nome. No entanto, as diversas propriedades e fórmulas relacionadas a tais poliedros apareceram somente muito tempo após os filósofos e matemáticos gregos antigos, já no século XVIII, com os trabalhos de matemáticos como Leonhard Euler (1707 – 1783) e Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857). A Figura 1.9 traz imagens desses matemáticos.



Figura 1.9: Platão, Arquimedes, Euler e Cauchy. Fonte: [10].

Tendo em vista as dificuldades citadas acima, ficamos motivados a utilizar o aplicativo GeoGebra para realizar as construções dinâmicas dos treze poliedros semirregulares a partir dos poliedros regulares. As construções ilustram os movimentos de corte (truncamentos) vinculados a cada um dos vértices dos poliedros regulares, como ilustrado no item (a) da Figura 1.3, bem como os afastamentos e giros das faces com acréscimo de novas faces regulares (snubificação), ilustrados no item (b) da mesma figura.

O GeoGebra pode ser um recurso importante no estudo e na aprendizagem de sólidos em Geometria Espacial. Um aspecto vinculado à essa disciplina é o pouco tempo que o professor de Ensino Básico possui para apresentá-los. Nesse sentido, construções geométricas, que podem ser manipuladas por meio de notebooks, tablets e mesmo smartphones, são recursos didáticos muito importantes que auxiliam na visualização de objetos tridimensionais. Pode-se confirmar isso pois Bairral e Barreira (2017, p. 52) afirmaram que a visualização e a representação são evidenciadas como uma das potencialidades dos ambientes de geometria dinâmica, como o Geogebra. Atualmente temos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), implantada em 2009, que recomenda a utilização de recursos tecnológicos, e por isso, a interação dos estudantes com recursos de informática que ajudem na visualização dinâmica (com movimentos) dos objetos tridimensionais são imprescindíveis para uma boa formação do aluno.

Estudar os poliedros semirregulares significa estudar profundamente os poliedros regulares, pois os primeiros são obtidos destes últimos. Sendo assim, no Capítulo 2 apresentamos a classificação dos poliedros regulares, bem como algumas fórmulas importantes envolvendo-os e que são muito úteis para as construções geométricas dinâmicas no GeoGebra. No Capítulo 3 apresentamos a classificação dos treze poliedros semirregulares. Além disso, duas pequenas cápsulas históricas sobre os poliedros regulares e semirregulares são apresentadas nos Capítulos 2 e 3. No Capítulo 4 apresentamos um roteiro de como foram construídos dois dos treze poliedros semirregulares no GeoGebra e, no Capítulo 5, disponibilizamos todos os links para as construções dinâmicas no GeoGebra de todos os treze poliedros semirregulares. Nestas construções dinâmicas é possível observar muito bem como os treze poliedros semirregulares foram gerados a partir dos cinco poliedros regulares por meio das operações geométricas de truncamento, afastamento e giro de faces. Por último, no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões do trabalho.

2. POLIEDROS REGULARES

2.1 PEQUENA INTRODUÇÃO HISTÓRICA AOS POLIEDROS REGULARES

Os poliedros regulares eram conhecidos e estudados desde a época dos gregos antigos e despertaram muito interesse ao longo da história, devido à grande quantidade de simetrias que possuem. A história dos poliedros regulares não é certa, porque não se sabe exatamente quando eles ficaram conhecidos (referência [10]). Entretanto, eles são associados a Platão (428 – 348 a.C.), visto que ele faz citação sobre esses poliedros em seu diálogo *Timaeus*, em que associou quatro dos cinco poliedros regulares já conhecidos aos quatro elementos, sendo eles, fogo (tetraedro), terra (cubo), ar (octaedro) e água (icosaedro). Parece que houve dificuldades para associar o quinto sólido, o dodecaedro, atribuindo-o ao universo. Acredita-se que por essa associação, os poliedros regulares são conhecidos como *Poliedros de Platão*.

Depois disso, no Livro XIII de *Os Elementos*¹, de Euclides (325 – 265 a.C.), ocorreu a descrição dos cinco poliedros regulares. E depois de muitos anos, já no século XVI, de acordo com Freitas [4], Kepler (1571 – 1630) explicou as associações de Platão, com as seguintes afirmações:

Intuitivamente ele assumiu que, desses sólidos, o tetraedro abarca o menor volume para sua superfície fechada, sendo o icosaedro o que tem o maior volume.

Agora, essas relações volume-superfície são qualidades de secura e umidade, respectivamente, e como o fogo é o mais seco dos quatro elementos e a água o mais úmido, assim o tetraedro deve representar o fogo e o icosaedro a água. Associa-se o cubo com a terra, devido à sua estabilidade.

O octaedro, pode rodopiar facilmente quando segurando dois de seus vértices opostos com apenas dois dedos (o indicador e o polegar), tendo assim a estabilidade do ar. Enfim, o dodecaedro foi associado com o Universo, devido o dodecaedro ter doze faces e serem doze os signos do zodíaco. (FREITAS 2020, p. 19)

Todavia, Kepler também associou um arranjo de seis esferas concêntricas, inscritas e circunscritas aos cinco poliedros regulares, aos seis planetas do sistema solar conhecidos na época.

¹Os Elementos foi traduzido dos originais do Grego para o Português pelo professor Irineu Bicudo, da Unesp de Rio Claro.

Estes planetas eram: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno. Ele acreditava que os planetas orbitavam na superfície dessas seis esferas concêntricas e que o Sol estaria no centro comum dessas esferas. Mas, ele abandonou essa ideia depois de um tempo.

Por fim, Euler (1707–1783), famoso matemático que contribuiu em muitas áreas, estudou os poliedros regulares e demonstrou a fórmula hoje conhecida como *Relação de Euler*, $V - A + F = 2$ (demonstrada no Capítulo 1), que se aplica não só aos poliedros regulares, mas a todos os poliedros homeomorfos à esfera (em particular os poliedros convexos), em que V é o número de vértices, A é o número de arestas e F o número de faces. Na Figura 2.1 temos as imagens de Kepler (e seu modelo) e Euler.

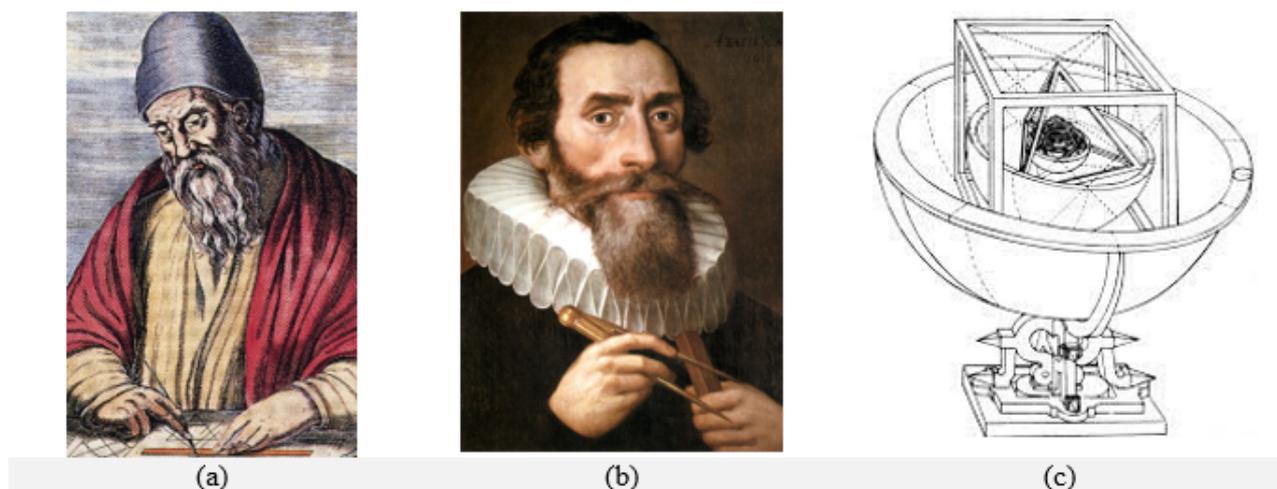


Figura 2.1: Euclides, Kepler e seu modelo. Fonte: [10].

2.2 CLASSIFICAÇÃO DOS POLIEDROS REGULARES

Os poliedros regulares são poliedros convexos cujas faces são todas congruentes e regulares e cujos vértices possuem o mesmo número de arestas incidentes. Como consequência desta definição, todas as faces de um poliedro regular apresentam o mesmo número de lados e vale a *Relação de Euler*, conforme já comentamos no Capítulo 2. Existem apenas cinco poliedros regulares e sua prova está feita abaixo, tendo por base a referência [3]. São eles: o tetraedro, o hexaedro (mais conhecido como cubo), o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro.

Teorema 2. *Existem apenas cinco poliedros regulares.*

Demonstração:

Seja A a quantidade de arestas, F a quantidade de faces e V a quantidade de vértices de um poliedro regular, considere n o número de lados de cada face. Logo:

$$n \geq 3 \tag{2.1}$$

Isso se dá pois cada face é representada por um polígono e o polígono com menor quantidade de lados é o triângulo, com $n = 3$. Sabemos que $nF = 2A$ porque cada aresta, sendo a quantidade de lados do polígono multiplicado à quantidade de faces, é comum a duas faces. Então:

$$A = \frac{nF}{2} \quad (2.2)$$

Seja m o número de arestas que incidem em cada vértice do poliedro regular. Para formar um poliedro, é necessário pelo menos três arestas ligadas a um vértice. Assim:

$$m \geq 3 \quad (2.3)$$

Sabemos que $mV = 2A$ pois multiplicando a quantidade de arestas que incidem em um vértice pela quantidade de vértices, acabamos levando em consideração o dobro de arestas. Então:

$$A = \frac{mV}{2} \quad (2.4)$$

Das igualdades 2.2 e 2.4, temos:

$$\frac{nF}{2} = \frac{mV}{2} \Rightarrow V = \frac{nF}{m} \quad (2.5)$$

Pela Relação de Euler: $V + F - A = 2$, podemos substituir o que achamos anteriormente nas igualdades 2.2 e 2.5, obtendo o seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{nF}{m} + F - \frac{nF}{2} &= 2 \Rightarrow F \left(\frac{n}{m} + 1 - \frac{n}{2} \right) = 2 \Rightarrow \\ F &= \frac{2}{\frac{2n+2m-nm}{2m}} \Rightarrow F = \frac{4m}{2n - nm + 2m}. \end{aligned}$$

Por fim:

$$F = \frac{4m}{2n + m(2 - n)} \quad (2.6)$$

Como $F > 0$ e $4m > 0$, já que F é a quantidade de faces de um poliedro e, pela desigualdade 2.3, $m \geq 3$, temos $2n + m(2 - n) > 0$. Logo, $2n > m(n - 2)$. Pela desigualdade 2.1, $n - 2 > 0$. Então:

$$m < \frac{2n}{n - 2} \quad (2.7)$$

Mas, pelas desigualdades 2.3 e 2.7, temos:

$$3 \leq m < \frac{2n}{n - 2} \Rightarrow \frac{2n}{n - 2} > 3 \Rightarrow 2n > 3n - 6 \Rightarrow n < 6 \quad (2.8)$$

Pelas desigualdades 2.1 e 2.8, temos:

$$3 \leq n < 6$$

Separemos em casos:

1º caso: $n = 3$ (faces triangulares). Pela desigualdade 2.7:

$$m < \frac{2n}{n-2} = \frac{2 \cdot 3}{3-2} = 6$$

e pela desigualdade 2.3,

$$3 \leq m < 6$$

Subcaso (i) $(m, n) = (3, 3)$ (vértices triédricos). Pela igualdade 2.6:

$$F = \frac{4m}{2n + m(2-n)} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 3 + 3(2-3)} = \frac{12}{6-3} = 4$$

Pela igualdade 2.2:

$$A = \frac{nF}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$

Finalmente, pela igualdade 2.4:

$$A = \frac{mV}{2} \Rightarrow V = \frac{6 \cdot 2}{3} = 4$$

Esse poliedro regular é conhecido por tetraedro.

Subcaso (ii) $(m, n) = (4, 3)$ (vértices quadriédricos). Pela igualdade 2.6:

$$F = \frac{4m}{2n + m(2-n)} = \frac{4 \cdot 4}{2 \cdot 3 + 4(2-3)} = \frac{16}{6-4} = 8$$

Pela igualdade 2.2:

$$A = \frac{nF}{2} = \frac{3 \cdot 8}{2} = 12$$

Finalmente, pela igualdade 2.4:

$$A = \frac{mV}{2} \Rightarrow V = \frac{12 \cdot 2}{4} = 6$$

Esse poliedro regular é conhecido por octaedro.

Subcaso (iii) $(m, n) = (5, 3)$ (vértices pentaédricos). Pela igualdade 2.6:

$$F = \frac{4m}{2n + m(2-n)} = \frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 3 + 5(2-3)} = \frac{20}{6-5} = 20$$

Pela igualdade 2.2:

$$A = \frac{nF}{2} = \frac{3 \cdot 20}{2} = 30$$

Finalmente, pela igualdade 2.4:

$$A = \frac{mV}{2} \Rightarrow V = \frac{30 \cdot 2}{5} = 12$$

Esse poliedro regular é conhecido por icosaedro.

2º caso: $n = 4$ (faces quadrangulares). Pela desigualdade 2.7:

$$m < \frac{2n}{n-2} = \frac{2 \cdot 4}{4-2} = 4$$

e pela desigualdade 2.3, $3 \leq m < 4$. Temos $(m, n) = (3, 4)$ (vértices triédricos). Pela igualdade 2.6:

$$F = \frac{4m}{2n + m(2-n)} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 4 + 3(2-4)} = \frac{12}{8-6} = 6$$

Pela igualdade 2.2:

$$A = \frac{nF}{2} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12$$

Finalmente, pela igualdade 2.4:

$$A = \frac{mV}{2} \Rightarrow V = \frac{12 \cdot 2}{3} = 8$$

Esse poliedro regular é conhecido por hexaedro, mais chamado de cubo.

3º caso: $n = 5$ (faces pentagonais). Pela desigualdade 2.7:

$$m < \frac{2n}{n-2} = \frac{2 \cdot 5}{5-2} = \frac{10}{3}$$

e pela desigualdade 2.3, $3 \leq m < \frac{10}{3}$. Temos $(m, n) = (3, 5)$ (vértices triédricos). Pela igualdade 2.6:

$$F = \frac{4m}{2n + m(2-n)} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 5 + 3(2-5)} = \frac{12}{10-9} = 12$$

Pela igualdade 2.2:

$$A = \frac{nF}{2} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$$

Finalmente, pela igualdade 2.4:

$$A = \frac{mV}{2} \Rightarrow V = \frac{30 \cdot 2}{3} = 20$$

Esse poliedro regular é conhecido por dodecaedro. □

Dessa forma, geramos a Tabela 2.1, com o número de lados n , tipos de faces, número de arestas incidentes nos vértices m , tipos de vértices, quantidade de vértices V , arestas A e faces F , e, por fim, o nome dos poliedros regulares.

n	Faces	m	Vértices	V	A	F	Nome
3	Triangulares	3	Triédricos	4	6	4	Tetraedro
3	Triangulares	4	Quadriédricos	6	12	8	Octaedro
3	Triangulares	5	Pentaédricos	12	30	20	Icosaedro
4	Quadrangulares	3	Triédricos	8	12	6	Hexaedro
5	Pentagonais	3	Triédricos	20	30	12	Dodecaedro

Tabela 2.1: Classificação dos poliedros regulares.

2.3 FÓRMULAS DO ÂNGULO CENTRAL E DO ÂNGULO DIEDRAL EM POLIEDROS REGULARES

Esta seção, bem como as duas próximas, foram baseadas na referência [9]. Conforme comentado no final do Capítulo 1, tais fórmulas são necessárias para as construções geométricas dos poliedros semirregulares que apresentamos nos Capítulos 4 e 5. Em particular, o fato de deduzirmos fórmulas de medidas de ângulo central e ângulo diedral para poliedros regulares em função apenas de seus gêneros de faces e gêneros de vértices (definidos abaixo) é algo, por si só, impressionante.

Faremos as deduções de duas fórmulas envolvendo duas medidas importantes de ângulos em poliedros regulares. Para isso, inicialmente, associa-se um poliedro regular a um par de números $\{p, q\}$, denominado como *Símbolo de Schläfli*, em que:

- O número p é o **gênero das faces**, isto é, a quantidade de lados de cada face do poliedro regular.
- O número q é o **gênero dos vértices**, isto é, a quantidade de arestas que incidem em cada vértice do poliedro regular.

Vamos considerar a denominação poliedro $\{p, q\}$ para um poliedro regular com p e q dados. Para os cinco poliedros regulares, temos os seguintes valores expressos na Tabela 2.2.

Poliedro Regular	p	q	$\{p, q\}$
Tetraedro	3	3	$\{3, 3\}$
Hexaedro ou Cubo	4	3	$\{4, 3\}$
Octaedro	3	4	$\{3, 4\}$
Dodecaedro	5	4	$\{5, 4\}$
Icosaedro	3	5	$\{3, 5\}$

Tabela 2.2: Poliedros regulares com gêneros $\{p, q\}$.

A partir dos gêneros $\{p, q\}$, seguimos com a dedução de duas fórmulas envolvendo ângulos. São as fórmulas que fornecem as medidas do:

- Ângulo α , que é o **ângulo central** do poliedro regular, com vértice no centro do poliedro $\{p, q\}$ e com seus dois lados passando pelas extremidades de uma aresta qualquer deste poliedro.
- Ângulo β , que é o **ângulo diedral** do poliedro regular, isto é, o ângulo entre duas faces adjacentes do poliedro $\{p, q\}$.

Essas duas fórmulas são deduzidas em função apenas dos gêneros p e q .

Para melhor compreensão, estabeleceremos as seguintes notações, que podem ser visualizadas na Figura 2.2:

- O_0 é um vértice qualquer do poliedro $\{p, q\}$;
- O_1 é o ponto médio de uma aresta qualquer que incide em O_0 ;
- O_2 é o centro de uma das faces que contém O_0 e O_1 ;
- O_3 é o centro do poliedro $\{p, q\}$;
- S é ponto médio da outra aresta que está na mesma face que O_2 e incide em O_0 , e por isso, $S \neq O_1$;
- Q é a projeção ortogonal de O_1 sobre o segmento O_0O_3 ;
- $l = \frac{a}{2}$ é o comprimento do segmento O_0O_1 e O_0S , pois é a metade da aresta;
- $\gamma = \frac{\alpha}{2}$ é a metade da medida do ângulo central com vértice em O_3 ;
- $\delta = \frac{\beta}{2}$ é a metade da medida do ângulo diedral entre duas faces.

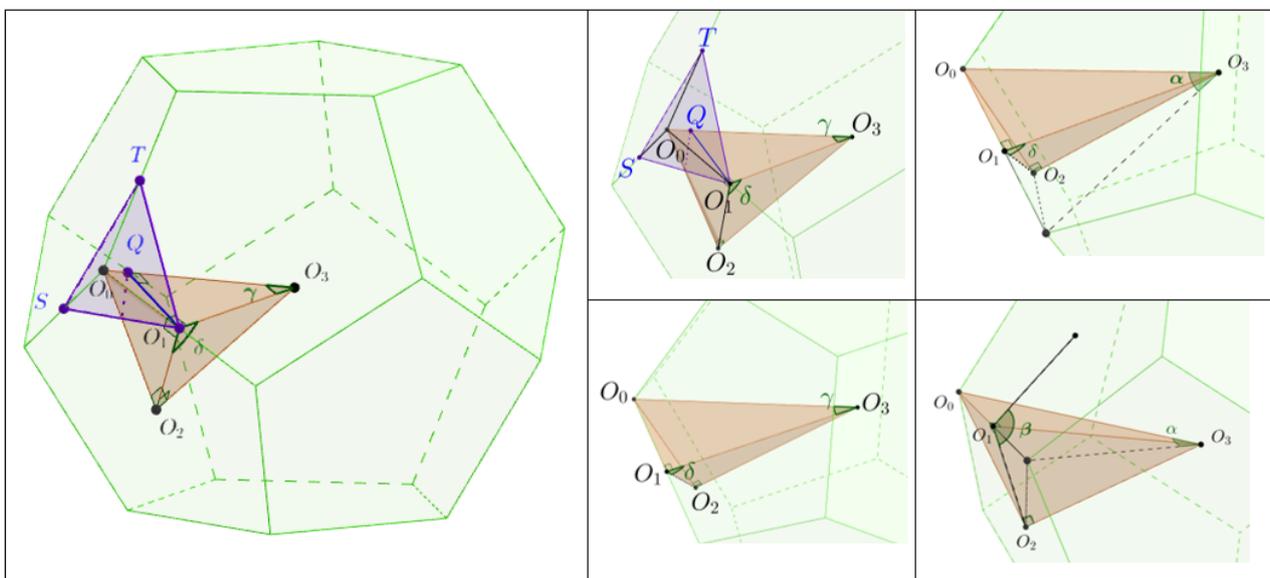


Figura 2.2: Figura de apoio às notações. Fonte: a autora.

Estabelecidas as notações, construímos o tetraedro $O_0O_1O_2O_3$ constituído por 4 triângulos retângulos em que O_0 está sobre a esfera de centro O_3 circunscrita ao poliedro $\{p, q\}$; O_1 está sobre a esfera de centro O_3 que passa por todos os pontos médios das arestas do poliedro $\{p, q\}$ e O_2 está sobre a esfera de centro O_3 inscrita ao poliedro $\{p, q\}$.

FÓRMULA DO ÂNGULO CENTRAL

Começemos pela dedução da primeira fórmula, ou seja, uma expressão para a medida do ângulo central que enxerga uma aresta de poliedro regular. A Figura 2.3 ajuda na compreensão da dedução.

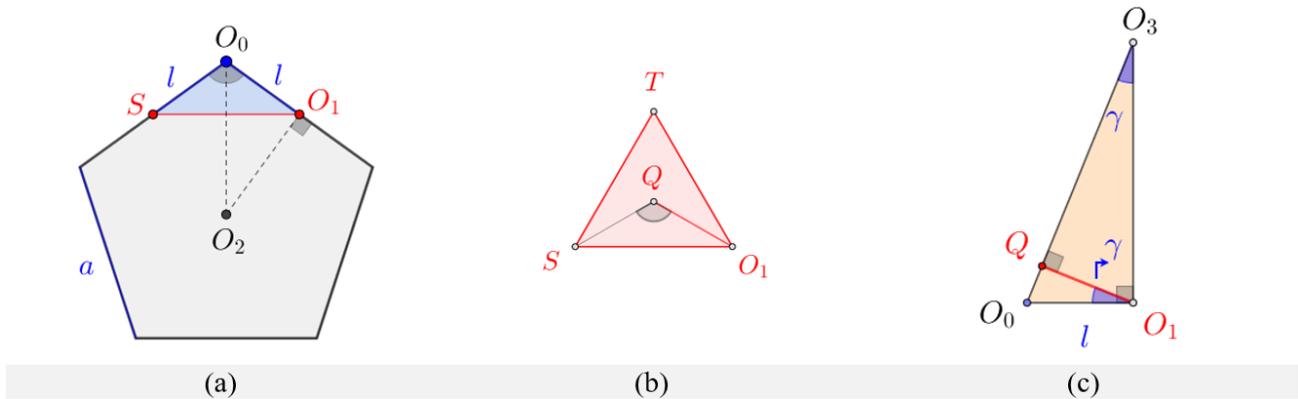


Figura 2.3: Figura de apoio à dedução da primeira fórmula. Fonte: a autora.

O triângulo O_0O_1S está na face que contém O_2 e é isósceles, pois $O_0O_1 = O_0S = l$, como definido nas notações, e $\widehat{O_1O_0S} = \frac{(p-2)\pi}{p}$, pois é a soma dos ângulos internos do polígono de p lados dividido pelo número de lados, o que gera a medida de cada ângulo desse polígono. Essa equação implica em $\widehat{O_1O_0S} = \pi - \frac{2\pi}{p}$.

Lembremos a *Lei dos Cossenos* para um triângulo qualquer:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\lambda) \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\mu) , \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta) \end{cases}$$

sendo λ , μ e θ medidas dos ângulos opostos aos lados de medidas a , b e c , respectivamente.

Assim:

$$\begin{aligned} (O_1S)^2 &= l^2 + l^2 - 2l \cdot l \cdot \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{p}\right) \\ &= 2l^2 - 2l^2 \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{p}\right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Pode-se perceber que $\cos\left(\pi - \frac{2\pi}{p}\right)$ é cosseno da diferença. Portanto:

$$\begin{aligned} \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{p}\right) &= \cos(\pi) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) - \text{sen}(\pi) \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{p}\right) \\ &= -\cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) \end{aligned}$$

e, pela fórmula do cosseno do arco duplo:

$$\begin{aligned} -\cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) &= -\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\right) \\ &= -\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{p}\right). \end{aligned}$$

Voltando à igualdade 2.9:

$$\begin{aligned} (\mathbf{O}_1\mathbf{S})^2 &= 2l^2 - 2l^2\left(-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\right) \\ &= 2l^2\left(1 - \left(-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\right)\right) \\ &= 2l^2\left(1 + \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\right). \end{aligned}$$

Pela *Relação Fundamental da Trigonometria*, $1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{p}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)$, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} 2l^2\left(1 + \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\right) &= 2l^2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\right) \\ &= 2l^2 \cdot 2\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) \\ &= 4l^2\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right). \end{aligned}$$

Então:

$$(\mathbf{O}_1\mathbf{S})^2 = 4l^2\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right),$$

ou seja,

$$\boxed{\mathbf{O}_1\mathbf{S} = 2l\cos\left(\frac{\pi}{p}\right).}$$

Considere o polígono \mathbf{P} formado pelos pontos médios das q arestas que saem do vértice \mathbf{O}_0 do poliedro. Este polígono é regular e possui q lados, sendo \mathbf{S} e \mathbf{O}_1 dois de seus vértices. É importante destacar que \mathbf{P} é plano pois seus vértices estão sobre um círculo obtido pela intersecção de duas esferas, a esfera de centro \mathbf{O}_3 e raio $\mathbf{O}_3\mathbf{O}_1$ e a esfera de centro \mathbf{O}_0 e raio $\mathbf{O}_0\mathbf{O}_1$. Além disso, usando congruência de triângulos, o polígono \mathbf{P} é ortogonal ao segmento $\mathbf{O}_0\mathbf{O}_3$ e $\mathbf{Q} \in \mathbf{P}$, \mathbf{Q} é o centro de \mathbf{P} . Pode-se calcular $\mathbf{O}_1\mathbf{Q}$ utilizando a Lei dos Cossenos no triângulo isósceles $\mathbf{QO}_1\mathbf{S}$, considerando que tem-se $\mathbf{O}_1\mathbf{S} = 2l\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)$ e que $\mathbf{O}_1\widehat{\mathbf{Q}}\mathbf{S}$ mede $\frac{2\pi}{q}$ radianos, já que \mathbf{P} é um polígono regular de q lados.

Então:

$$(\mathbf{O}_1\mathbf{S})^2 = (\mathbf{O}_1\mathbf{Q})^2 + (\mathbf{SQ})^2 - 2(\mathbf{O}_1\mathbf{Q})(\mathbf{SQ})\cos\left(\frac{2\pi}{q}\right),$$

Como $O_1Q = SQ$, temos:

$$4l^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{p} \right) = 2(O_1Q)^2 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi}{q} \right) \right) \Rightarrow 2(O_1Q)^2 = \frac{4l^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{p} \right)}{\left(1 - \cos \left(\frac{2\pi}{q} \right) \right)}.$$

Depois de simplificar o 2 com o 4, pode-se resolver o cosseno do arco duplo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} -\cos \left(\frac{2\pi}{q} \right) &= -\left(\cos^2 \left(\frac{\pi}{q} \right) - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{q} \right) \right) \\ &= -\cos^2 \left(\frac{\pi}{q} \right) + \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{q} \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$(O_1Q)^2 = \frac{2l^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{p} \right)}{1 - \cos^2 \left(\frac{\pi}{q} \right) + \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{q} \right)}.$$

Pela *Relação Fundamental Trigonométrica*, obtem-se:

$$(O_1Q)^2 = \frac{2l^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{p} \right)}{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{q} \right) + \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{q} \right)} \Rightarrow (O_1Q)^2 = \frac{2l^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{p} \right)}{2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{q} \right)}$$

,

ou seja,

$$\boxed{O_1Q = \frac{l \cos \left(\frac{\pi}{p} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{q} \right)}}. \quad (2.10)$$

Pode-se, ainda, calcular de outra forma o comprimento de O_1Q , saindo de P e considerando o segmento como altura relativa ao vértice O_1 , do triângulo retângulo $O_0O_1O_3$. Nesse contexto, pela semelhança de triângulos O_0O_1Q e O_1O_3Q , temos $O_0\widehat{O_1}Q = O_1\widehat{O_3}Q = \gamma$.

Então, olhando para o triângulo O_0O_1Q , tem-se,

$$\cos(\gamma) = \frac{O_1Q}{l},$$

o que significa, $\frac{\text{lado adjacente}}{\text{hipotenusa}}$ e, assim,

$$\boxed{O_1Q = l \cos(\gamma)}. \quad (2.11)$$

Nesse momento, basta igualar os valores de O_1Q obtidos em 2.10 e 2.11, gerando:

$$l \cos(\gamma) = \frac{l \cos \left(\frac{\pi}{p} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{q} \right)}.$$

Relembrando que $\gamma = \frac{\alpha}{2}$, obtem-se:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{q}\right)}, \quad (2.12)$$

isto é:

$$\alpha = 2 \arccos\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{q}\right)}\right). \quad (2.13)$$

Dessa forma, fizemos a dedução da primeira fórmula, em que achamos a medida do ângulo central do poliedro $\{p, q\}$. A Tabela 2.3 sintetiza os valores.

Poliedro Regular	p	q	Ângulo α Central
Tetraedro	3	3	$2 \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ rad} \cong 109,47^\circ$
Hexaedro (cubo)	4	3	$2 \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \text{ rad} \cong 70,53^\circ$
Octaedro	3	4	$\frac{\pi}{2} \text{ rad} = 90^\circ$
Dodecaedro	5	3	$2 \arccos\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}\right) \text{ rad} \cong 41,81^\circ$
Icosaedro	3	5	$2 \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\right) \text{ rad} \cong 63,43^\circ$

Tabela 2.3: Fórmulas de medidas de ângulos centrais dos poliedros regulares.

FÓRMULA DO ÂNGULO DIEDRAL

Seguindo para a dedução da segunda fórmula, ou seja, uma expressão para a medida do ângulo entre duas faces adjacentes de poliedro regular.

Com o tetraedro $O_0O_1O_2O_3$, com o auxílio da Figura 2.4, chegamos às relações:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(\gamma) = \frac{l}{O_1O_3} \\ \operatorname{sen}(\delta) = \frac{O_2O_3}{O_1O_3} \end{cases}.$$

Com isso, podemos definir:

$$O_1O_3 = \frac{l}{\operatorname{tg}(\gamma)} \quad (2.14)$$

e

$$O_2O_3 = \frac{l \operatorname{sen}(\delta)}{\operatorname{tg}(\gamma)}. \quad (2.15)$$

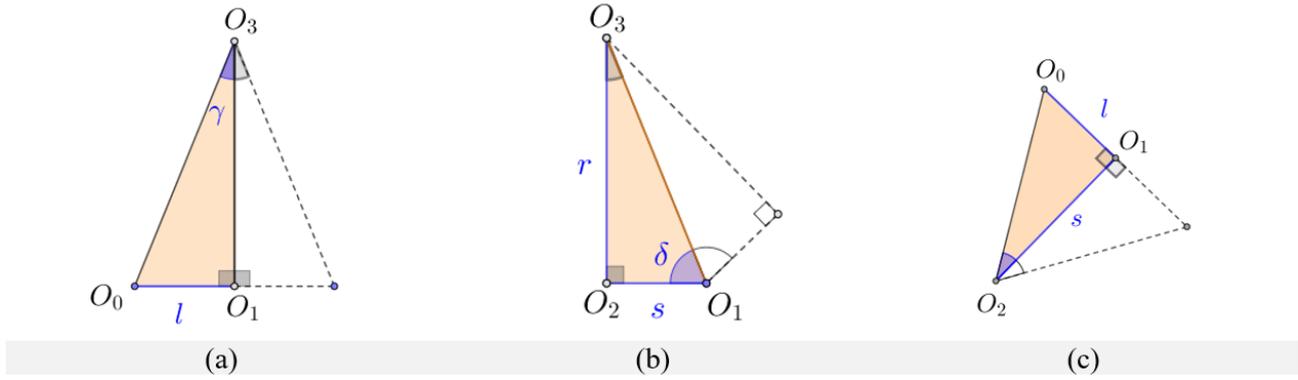


Figura 2.4: Figura de apoio à dedução da segunda fórmula. Fonte: a autora.

em que $r = O_2O_3$ é o raio da esfera inscrita no poliedro.

De $O_0\widehat{O}_2O_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{p} = \frac{\pi}{p}$, temos:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{p}\right) = \frac{l}{O_1O_2},$$

isto é:

$$\boxed{O_1O_2 = \frac{l}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{p}\right)}}, \quad (2.16)$$

sendo $s = O_1O_2$ o apótema da face do poliedro, ou seja, o segmento que liga o centro até um de seus lados perpendicularmente.

Sendo $O_3O_2O_1$ um triângulo retângulo com ângulo reto em O_2 , pelo Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} (O_1O_3)^2 &= (O_1O_2)^2 + (O_2O_3)^2 \Rightarrow \\ \frac{l^2}{\operatorname{tg}^2(\gamma)} &= \frac{l^2}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{p}\right)} + \frac{l^2 \operatorname{sen}^2(\delta)}{\operatorname{tg}^2(\gamma)} \Rightarrow \\ \frac{l^2}{\operatorname{tg}^2(\gamma)} - \frac{l^2 \operatorname{sen}^2(\delta)}{\operatorname{tg}^2(\gamma)} &= \frac{l^2}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{p}\right)} \Rightarrow \\ \frac{l^2}{\operatorname{tg}^2(\gamma)} (1 - \operatorname{sen}^2(\delta)) &= \frac{l^2}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}. \end{aligned}$$

Pela *Relação Fundamental Trigonométrica* temos $(1 - \operatorname{sen}^2(\delta)) = \operatorname{cos}^2(\delta)$ e, além disso, podemos cancelar l^2 pois está dos dois lados da igualdade. Então:

$$\frac{\operatorname{cos}^2(\delta)}{\operatorname{tg}^2(\gamma)} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{p}\right)} \Rightarrow \operatorname{cos}^2(\delta) = \frac{\operatorname{tg}^2(\gamma)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}.$$

Como $\operatorname{tg}^2(\gamma) = \sec^2(\gamma) - 1$, temos:

$$\cos^2(\delta) = \frac{\sec^2(\gamma) - 1}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}.$$

Considerando $\sec^2(\gamma) - 1 = \frac{1}{\cos^2(\gamma)} - 1$ e $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{p}\right) = \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}$, seguimos com:

$$\begin{aligned} \cos^2(\delta) &= \frac{\frac{1}{\cos^2(\gamma)} - 1}{\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)} - 1}{\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}} \Rightarrow \\ \cos^2(\delta) &= \frac{\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{q}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}}{\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}} \Rightarrow \\ \cos^2(\delta) &= \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{q}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}. \end{aligned}$$

Multiplicando -1 a ambos os lados e adicionando 1 , temos:

$$1 - \cos^2(\delta) = 1 - \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{q}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}.$$

Pela *Relação Fundamental Trigonométrica*, $1 - \cos^2(\delta) = \operatorname{sen}^2(\delta)$, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2(\delta) &= \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{p}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{q}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{p}\right)} \Rightarrow \\ \operatorname{sen}^2(\delta) &= \frac{1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}, \end{aligned}$$

já que $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{p}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) = 1$.

Como $1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{q}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)$, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2(\delta) &= \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{p}\right)} \Rightarrow \operatorname{sen}(\delta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{p}\right)} \Rightarrow \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{p}\right)}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Finalmente,

$$\beta = 2 \operatorname{arcsen} \left(\frac{\cos \left(\frac{\pi}{q} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{p} \right)} \right). \quad (2.18)$$

Na Tabela 2.4, apresentamos as medidas dos ângulos diedrais β de cada um dos cinco poliedros regulares, com medidas exatas em radianos e aproximadas em graus.

Poliedro Regular	p	q	Ângulo β Diedral
Tetraedro	3	3	$2 \operatorname{arcsen} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \operatorname{rad} \cong 70,53^\circ$
Hexaedro (cubo)	4	3	$\frac{\pi}{2} \operatorname{rad} = 90^\circ$
Octaedro	3	4	$2 \operatorname{arcsen} \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \right) \operatorname{rad} \cong 109,47^\circ$
Dodecaedro	5	3	$2 \operatorname{arcsen} \left(\frac{2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \right) \operatorname{rad} \cong 116,547^\circ$
Icosaedro	3	5	$2 \operatorname{arcsen} \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{3}} \right) \operatorname{rad} \cong 138,19^\circ$

Tabela 2.4: Fórmulas de medidas de ângulos diedrais dos poliedros regulares.

2.4 FÓRMULAS PARA TRÊS RAIOS E APÓTEMA EM POLIEDROS REGULARES

Com as mesmas notações da seção anterior, podemos deduzir a fórmula de raios importantes, como raio da esfera circunscrita ao poliedro, raio do círculo circunscrito a face do poliedro e raio da esfera inscrita no poliedro. Além disso, é possível definir a medida da apótema da face do poliedro. Vamos considerar α a medida das arestas do poliedro $\{p, q\}$.

RAIO DE ESFERA CIRCUNSCRITA

Começamos com a dedução do raio R da esfera circunscrita a um poliedro $\{p, q\}$. Pela Figura 2.5, $R = O_0O_3$.

No triângulo retângulo $O_0O_1O_3$, temos $\operatorname{sen}(\gamma) = \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{O_0O_1}{O_0O_3}$. Lembrando que $\alpha = 2O_0O_1$,

$$\operatorname{sen}(\gamma) = \frac{\frac{\alpha}{2}}{R} \Rightarrow \alpha = 2R \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

e, como $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, ou seja, $\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$, temos:

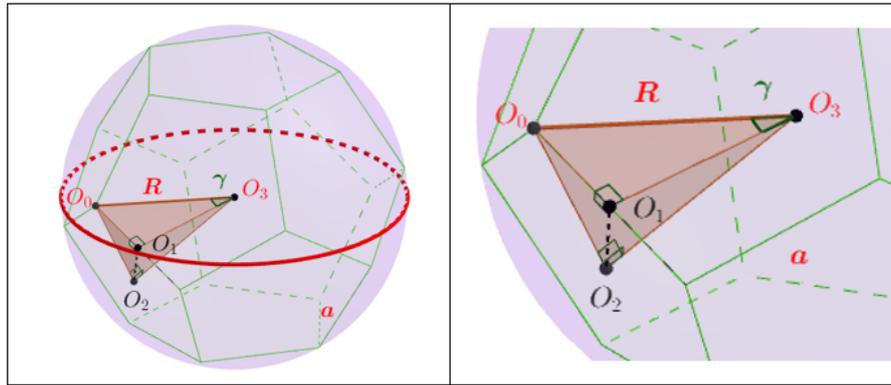


Figura 2.5: Figura de apoio à dedução do raio de esfera circunscrita. Fonte: a autora.

$$a = 2R\sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Utilizando a fórmula 2.12, chegamos a:

$$R = \frac{a}{2\sqrt{1 - \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}\right)^2}}. \tag{2.19}$$

Na Tabela 2.5 temos os valores dos raios das esferas circunscritas aos cinco poliedros regulares.

Poliedro Regular	p	q	Raio R da Esfera Circunscrita ao Poliedro Regular
Tetraedro	3	3	$R = \frac{a}{2\sqrt{1 - \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}a \cong 0,6124a$
Hexaedro (cubo)	4	3	$R = \frac{a}{2\sqrt{1 - \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a \cong 0,866a$
Octaedro	3	4	$R = \frac{a}{2\sqrt{1 - \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a \cong 0,7071a$
Dodecaedro	5	3	$R = \frac{a}{2\sqrt{1 - \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right)^2}} = \frac{\sqrt{3}(1 + \sqrt{5})}{4}a \cong 1,4013a$
Icosaedro	3	5	$R = \frac{a}{2\sqrt{1 - \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}\right)^2}} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}a \cong 0,9511a$

Tabela 2.5: Fórmulas dos raios das esferas circunscritas aos poliedros regulares.

RAIO DE CÍRCULO CIRCUNSCRITO À FACE

Agora, continuamos com o raio ρ do círculo circunscrito a face do poliedro $\{p, q\}$. Pela Figura 2.6, $\rho = O_0O_2$.

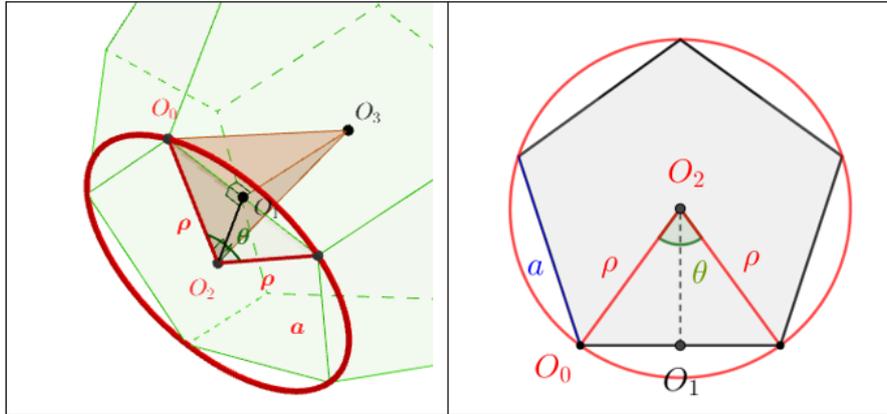


Figura 2.6: Figura de apoio à dedução do raio do círculo circunscrito à face. Fonte: a autora.

A face do poliedro é um polígono regular de p arestas, assim, $\theta = \frac{2\pi}{p}$ é a medida do ângulo que tem vértice no centro do polígono e lados passando por 2 vértices consecutivos. E, do triângulo $O_0O_1O_2$,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{O_0O_1}{O_0O_2} = \frac{\frac{a}{2}}{\rho}.$$

Assim,

$$\rho = \frac{a}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{p}\right)}. \quad (2.20)$$

Na Tabela 2.6 temos os valores dos raios dos círculos circunscritos às faces dos cinco poliedros regulares.

APÓTEMA DE FACE

Seja $s = O_1O_2$ o comprimento do apótema de face do poliedro $\{p, q\}$ (Figura 2.7). Como mostrado na fórmula 2.16,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{p}\right) = \frac{O_0O_1}{O_1O_2} = \frac{\frac{a}{2}}{s}.$$

Assim,

$$s = \frac{a}{2} \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{p}\right) \quad (2.21)$$

Poliedro Regular	p	Raio ρ do Círculo Cinscunscrito a Face do Poliedro Regular
Tetraedro	3	$\rho = \frac{a}{2 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{3})} = \frac{\sqrt{3}}{3} a \cong 0,5774a$
Hexaedro (cubo)	4	$\rho = \frac{a}{2 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cong 0,7071a$
Octaedro	3	$\rho = \frac{a}{2 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{3})} = \frac{\sqrt{3}}{3} a \cong 0,5774a$
Dodecaedro	5	$\rho = \frac{a}{2 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{5})} = \frac{\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}}{10} a \cong 0,8507a$
Icosaedro	3	$\rho = \frac{a}{2 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{3})} = \frac{\sqrt{3}}{3} a \cong 0,5774a$

Tabela 2.6: Fórmulas dos raios dos círculos cinscunscritos às faces dos poliedros regulares

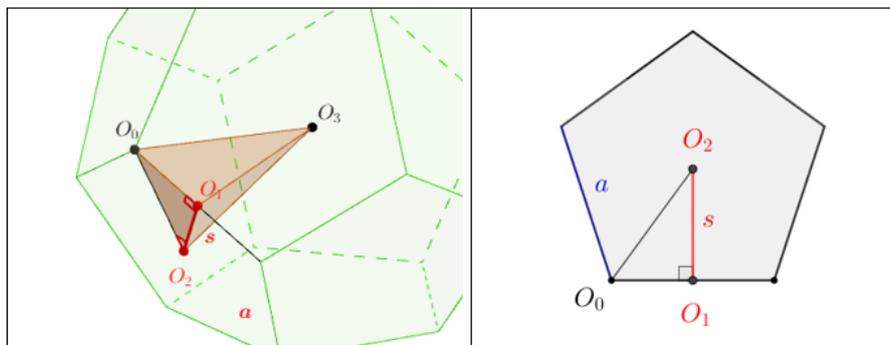


Figura 2.7: Figura de apoio à dedução da apótema da face. Fonte: a autora.

Dessa forma, na Tabela 2.7 sintetizamos os resultados.

RAIO DE ESFERA INSCRITA

Por último, seja $r = O_3O_2$ o raio da esfera inscrita ao poliedro $\{p, q\}$ (Figura 2.8).

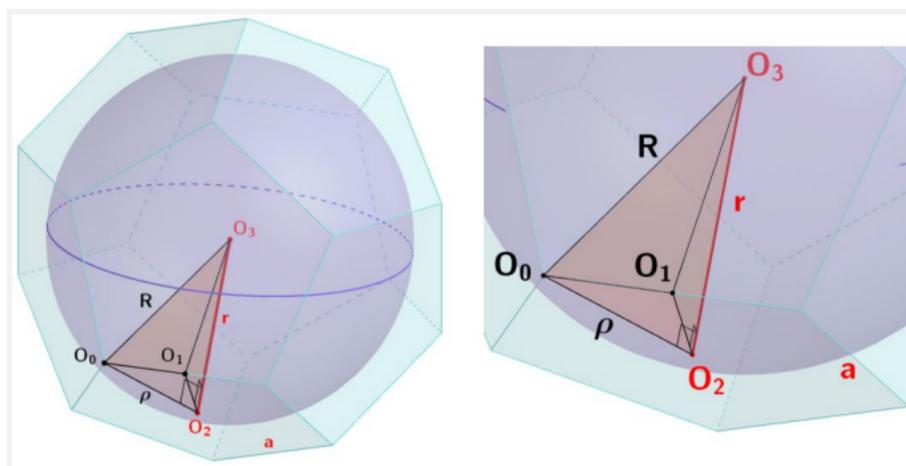


Figura 2.8: Figura de apoio à dedução do raio da esfera inscrita ao poliedro. Fonte: a autora.

Poliedro Regular	p	Apótema s de Face do Poliedro Regular
Tetraedro	3	$s = \frac{a}{2} \cotg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}a \cong 0,2887a$
Hexaedro (cubo)	4	$s = \frac{a}{2} \cotg\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}a = 0,5a$
Octaedro	3	$s = \frac{a}{2} \cotg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}a \cong 0,2887a$
Dodecaedro	5	$s = \frac{a}{2} \cotg\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{10}a \cong 0,6882a$
Icosaedro	3	$s = \frac{a}{2} \cotg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}a \cong 0,2887a$

Tabela 2.7: Fórmula de apótema de face dos poliedros regulares

Pelo Teorema de Pitágoras, no triângulo $O_0O_3O_2$, temos:

$$(O_3O_0)^2 = (O_3O_2)^2 + (O_2O_0)^2 \Rightarrow R^2 = r^2 + \rho^2 \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - \rho^2}.$$

Como temos R e ρ em função de a , p e q , r por 2.19 e 2.20, r também pode ser colocado em função desses parâmetros. Todavia, por 2.15, temos

$$r = \frac{a \operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Como p e q são em termos de α e β por meio das fórmulas 2.13 e 2.18, teremos r em função de a , p e q .

O numerador desta última fração é dado pela fórmula 2.17, a saber:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{p}\right)}. \quad (2.22)$$

Resolvendo agora, o denominador, lembremos o valor de $\cos(\alpha/2)$ pela fórmula 2.12. Temos, portanto, o seguinte:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{q}\right)}} = \frac{\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{q}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}}{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{q}\right)}}. \end{aligned}$$

Como $\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{q}\right)} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{q}\right)$, podemos cancelar com o que está no denominador, o que gera

o seguinte:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{q}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}}{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}. \quad (2.23)$$

Pelas fórmulas 2.22 e 2.23, temos:

$$r = \frac{a}{2} \frac{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{p}\right)}}{\frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{q}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}}{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}} = \frac{a}{2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{p}\right) \sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{q}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}}.$$

Finalmente:

$$r = \frac{a}{2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{q}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}}. \quad (2.24)$$

Assim, na Tabela 2.8 temos os valores procurados.

Poliedro Regular	p	q	Raio r da Esfera Inscrita ao Poliedro Regular
Tetraedro	3	3	$r = \frac{a}{2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}} = \frac{\sqrt{6}}{12} a \cong 0,2041a$
Hexaedro (cubo)	4	3	$r = \frac{a}{2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}} = \frac{1}{2} a = 0,5a$
Octaedro	3	4	$r = \frac{a}{2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}} = \frac{\sqrt{6}}{6} a \cong 0,4082a$
Dodecaedro	5	3	$r = \frac{a}{2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}} = \frac{\sqrt{250 + 110\sqrt{5}}}{20} a \cong 1,1135a$
Icosaedro	3	5	$r = \frac{a}{2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}} = \frac{\sqrt{3}(3 + \sqrt{5})}{12} a \cong 0,7558a$

Tabela 2.8: Fórmulas de raios de esferas inscritas aos poliedros regulares

2.5 FÓRMULAS DE ÁREA E VOLUME EM POLIEDROS REGULARES

Com as mesmas notações das seções anteriores, podemos deduzir a fórmula da área e do volume de poliedros regulares.

ÁREA

A fórmula da área de um poliedro regular pode ser colocada em função de seu número de faces, do comprimento de cada uma de suas arestas e de apenas um de seus dois valores de gênero: o gênero das faces. Pode parecer estranho, mas o gênero de vértices não é importante nesta fórmula.

Para o poliedro $\{p, q\}$, a área é dada por $A\{p, q\} = Fp \left(\frac{1}{2}as\right)$ (Figura 2.9), sendo s o apótema de cada uma das faces, a o comprimento de cada uma das arestas e F a quantidade de faces do poliedro. Nesta fórmula, $\frac{1}{2}as$ é a área de um triângulo com base a e altura s . Como cada face possui exatamente p desses triângulos e, pela fórmula 2.21, $s = \frac{a}{2} \cotg\left(\frac{\pi}{p}\right)$, então:

$$A\{p, q\} = Fp \frac{a^2}{4} \cotg\left(\frac{\pi}{p}\right). \quad (2.25)$$

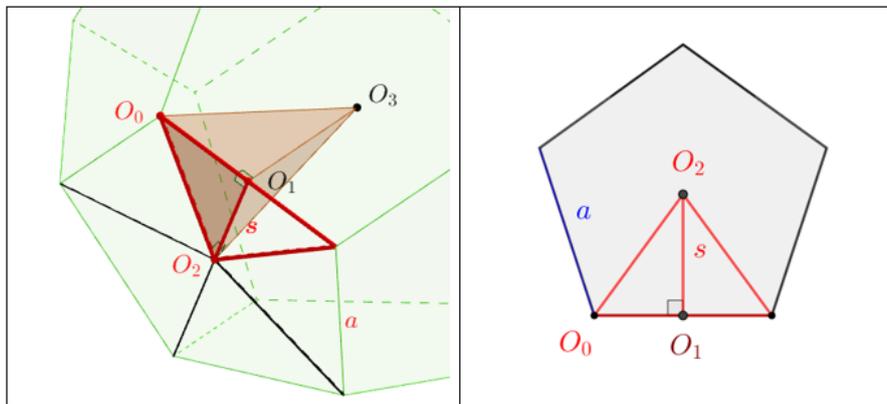


Figura 2.9: Figura de apoio à dedução da área do poliedro. Fonte: a autora.

Desta forma, na Tabela 2.9 temos os valores de áreas procurados.

Poliedro Regular	F	p	Área $A\{p, q\}$ dos Poliedros Regulares
Tetraedro	4	3	$3a^2 \cotg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}a^2 \cong 1,7321a^2$
Hexaedro (cubo)	6	4	$6a^2 \cotg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6a^2$
Octaedro	8	3	$6a^2 \cotg\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}a^2 \cong 3,4641a^2$
Dodecaedro	12	5	$15a^2 \cotg\left(\frac{\pi}{5}\right) = 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}a^2 \cong 20,6457a^2$
Icosaedro	20	3	$15a^2 \cotg\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5\sqrt{3}a^2 \cong 8,6603a^2$

Tabela 2.9: Fórmula de área dos poliedros regulares

VOLUME

Por último, deduziremos o volume de um poliedro regular em função de seu número de faces, do comprimento de cada uma de suas arestas e dos gêneros de face e vértice.

Lembremos que a fórmula do volume de uma pirâmide é dada por $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$, sendo A_b a área de sua base e h sua altura. Um poliedro regular de F faces pode ser enxergado como sendo uma reunião de F pirâmides retas congruentes, cada qual, com base de área $\frac{A\{p,q\}}{F}$ (esta é a área de uma face do poliedro regular) e altura igual ao raio de sua esfera inscrita. Então, $V = \frac{1}{3} \frac{A\{p,q\}}{F} r$ é o volume de uma pirâmide com base sobre uma face do poliedro regular e altura r (Figura 2.10). Como F pirâmides como essa preenchem o poliedro, o volume do poliedro regular é dado por:

$$V\{p, q\} = \frac{1}{3} A\{p, q\} r.$$

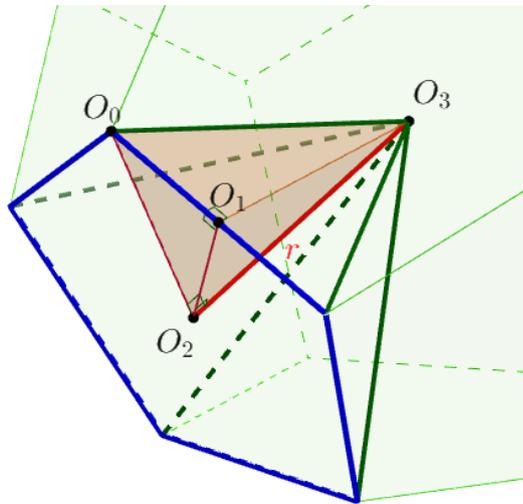


Figura 2.10: Figura de apoio à dedução do volume do poliedro. Fonte: a autora.

Como pela fórmula 2.24 temos:

$$r = \frac{a}{2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \cotg\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{q}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}}$$

e, pela fórmula 2.25 temos:

$$A\{p, q\} = Fp \frac{a^2}{4} \cotg\left(\frac{\pi}{p}\right),$$

então:

$$V = \frac{1}{3} Fp \frac{a^2}{4} \cotg\left(\frac{\pi}{p}\right) \frac{a}{2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \cotg\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{q}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}} \Rightarrow$$

$$V\{p, q\} = Fp \frac{a^3 \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \cotg^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}{24 \sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{q}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}}. \quad (2.26)$$

Assim, na Tabela 2.10 temos os valores de volumes procurados.

Poliedro Regular	F	p	q	Volume $V\{p, q\}$ dos Poliedros Regulares
Tetraedro	4	3	3	$\frac{a^3 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cotg^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2 \sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 \cong 0,1179 a^3$
Hexaedro (cubo)	6	4	3	$a^3 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cotg^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}} = a^3$
Octaedro	8	3	4	$a^3 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cotg^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}} a = \frac{\sqrt{2}}{3} a^3 \cong 0,4714 a^3$
Dodecaedro	12	5	3	$\frac{5a^3 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cotg^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}{2 \sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}} = \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4} a^3 \cong 7,6631 a^3$
Icosaedro	20	3	5	$\frac{5a^3 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \cotg^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2 \sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}} = \frac{15 + 5\sqrt{5}}{12} a^3 \cong 2,1817 a^3$

Tabela 2.10: Fórmulas dos volumes dos poliedros regulares

3. POLIEDROS SEMIRREGULARES

3.1 INTRODUÇÃO HISTÓRICA

Arquimedes (287–212 a.C.) foi um matemático famoso, físico e engenheiro grego, que viveu em Siracusa, uma cidade da Sicília, na Itália (referência [10]). Desde cedo ele teve contato com a ciência, pois seu pai era um astrônomo grego que costumava reunir colegas em sua casa. O matemático estudou em Alexandria, um dos principais centros intelectuais da época. Lá, ele aprofundou seus conhecimentos de matemática, geometria, mecânica e astronomia.

Quando Arquimedes voltou a sua cidade natal, ele descobriu a “gravidade específica”, denominada de Princípio de Arquimedes, no qual afirmou que “*Qualquer corpo mais denso que um fluido, ao ser mergulhado neste, perderá peso correspondente ao volume de fluido deslocado*”. Histórias dizem que após descobrir esse princípio ele saiu gritando na rua “Eureka!”, que quer dizer “Descobri!”.

Ele também inventou o “Parafuso de Arquimedes”, um dispositivo em espiral disposto dentro de um cilindro que, ao girar, levanta a água. Uma outra contribuição notável de Arquimedes foi a descoberta da lei da alavanca, em que o matemático afirmava “*Dê-me um ponto de apoio e moverei o mundo*”. Criou sistema de roldanas por meios de cabos e o ligou à uma embarcação, e com ele arrastou a trirreme (tipo de navio de guerra antigo) e logo ela estava na água. Essa ideia teve um impacto significativo no desenvolvimento da engenharia e da física.

Arquimedes foi responsável por inúmeras descobertas no âmbito da matemática como, por exemplo, a descoberta do número π (razão constante entre o comprimento e o diâmetro de um círculo), cálculo da área e comprimento do círculo, entre outras. Além disso, acredita-se que foi Arquimedes o primeiro a descobrir os treze poliedros semirregulares. No entanto, parte desse magnífico trabalho se perdeu, mas acabou por ser redescoberto durante o século XV. Pouco tempo após, Kepler foi quem fez um estudo aprofundado sobre esses poliedros semirregulares, chamando-os de *Poliedros de Arquimedes*.

Acredita-se que Arquimedes foi morto por um soldado, que o interrompeu ele no meio de alguns cálculos solicitando que o acompanhasse. Com a interrupção, o matemático ficou irritado e disse que só sairia dali quando terminasse. Com raiva, o soldado deu um golpe de espada no sábio e ele morreu. Arquimedes foi enterrado e seu túmulo foi marcado com a esfera inscrita a um cilindro, um desejo dele.

3.2 CLASSIFICAÇÃO DOS POLIEDROS SEMIRREGULARES

Esta seção foi baseada no quinto capítulo da referência [8], páginas de 179 a 209.

No Capítulo 1 fornecemos a definição de poliedro semirregular. Como consequência da definição apresentada, em poliedros semirregulares vale a *Relação de Euler* e é possível provar que existem apenas treze de tais poliedros, conforme listados também no Capítulo 1. Nesta seção, faremos essa classificação dos poliedros semirregulares em treze tipos.

A Figura 3.1 mostra uma forma esquemática de como os treze poliedros semirregulares são formados. Os poliedros em azul claro são os poliedros regulares e os poliedros em vermelho, azul escuro e verde são os poliedros semirregulares.

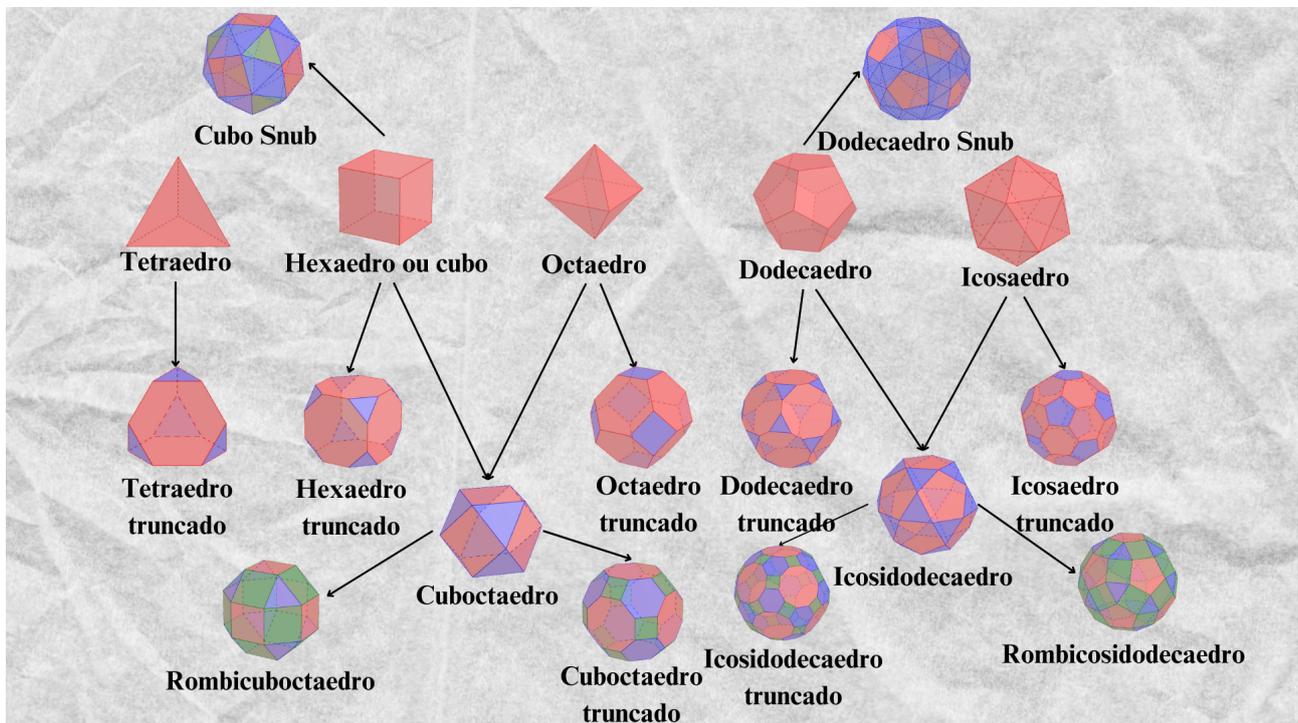


Figura 3.1: Mapeamento dos Poliedros Arquimedianos. Fonte: a autora.

As setas com sentido de cima para baixo representam truncamentos (simples ou compostos). As setas partem dos poliedros regulares originais e apontam para os poliedros truncados. Já as setas com sentido de baixo para cima indicam a snubificação do hexaedro (cubo) e do dodecaedro. Para uma melhor compreensão desta seção, é conveniente recordar as definições das operações geométricas de truncamento e snubificação que apresentamos no Capítulo 1.

O truncamento de um poliedro permite obter outro por meio de cortes próximos aos seus vértices. Na Figura 3.1 temos onze poliedros truncados. Para isso, foram feitos cortes em vértices de tal modo que gerassem polígonos regulares nas faces truncadas e nas faces já existentes. Em quatro desses onze poliedros truncados também foi necessário fazer pequenos ajustes, por

meio de afastamento de faces (truncamento composto), para que todas as faces sejam, de fato, regulares. Estes são os quatro poliedros da parte inferior da Figura 3.1.

A snubificação de poliedro permite obter outro por meio de afastamento de todas as faces do poliedro seguido de giro das mesmas de um certo ângulo. Posteriormente os espaços vazios resultantes são preenchidos com triângulos regulares. No caso do exemplo do cubo, representado na Figura 3.1, ocorreu o afastamento das faces quadradas do cubo, um giro de todas elas e o preenchimento dos espaços vazios com triângulos equiláteros. Já no exemplo do dodecaedro, as faces pentagonais foram afastadas, houve o giro destas e o preenchimento também com triângulos equiláteros.

Voltando à definição dos poliedros semirregulares, constatamos que a configuração de faces em torno de cada vértice é sempre a mesma. Vamos extrair dessa configuração aquilo que chamaremos de **vetor do poliedro semirregular**, que será indicado por meio de uma n -upla, na qual n é a quantidade de faces no entorno de cada vértice; e cada entrada da n -upla é a quantidade de lados de cada uma dessas faces. Entradas adjacentes indicam faces adjacentes. Por exemplo, o vetor do rombicoidedraedro é $(3, 4, 5, 4)$ e ele indica que em cada vértice deste poliedro há um triângulo, um quadrado, um pentágono, e outro quadrado. Os quadrados não são adjacentes, bem como o triângulo e o pentágono também não são adjacentes (veja o poliedro do canto inferior direito da Figura 3.1).

Poliedros regulares também podem ser representados por meio de vetores. Neste caso, as entradas são todas iguais. Por exemplo, o vetor $(4, 4, 4)$ representa o cubo, pois no entorno de cada vértice há três quadrados.

Outro aspecto que chama a atenção na definição dos poliedros semirregulares é o fato deles serem convencionados diferentes de prismas e antiprismas (Figura 3.2).

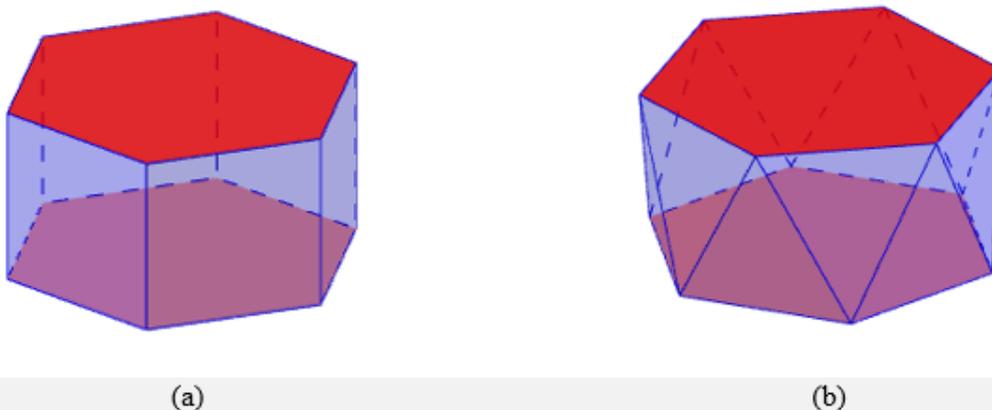


Figura 3.2: Prisma e antiprisma. Fonte: a autora.

Os prismas constituem uma família infinita de poliedros convexos com faces de dois tipos e que podem ser regulares, bastando, para tal, que as bases sejam polígonos regulares congruentes

e as faces laterais formem um anel de quadrados. O vetor de um prisma é da forma $(n, 4, 4)$, sendo n o número de lados das bases.

Os antiprismas também constituem uma família infinita de poliedros convexos com faces de dois tipos e que podem ser regulares, bastando, para tal, que as bases sejam polígonos regulares congruentes e as faces laterais formem um anel de triângulos equiláteros (é sempre bom lembrar que em um antiprisma, ao contrário de um prisma, suas bases estão “giradas” uma em relação à outra de tal modo que as laterais são “preenchidas” com um anel de triângulos). O vetor de um antiprisma é da forma $(n, 3, 3, 3)$, sendo n o número de lados das bases.

Teorema 3. *Existem apenas treze poliedros semirregulares.*

Demonstração.

Os poliedros semirregulares são poliedros convexos de faces regulares com vértices descritos por um vetor com as entradas não todas iguais, ou seja, são poliedros de, pelo menos, dois tipos distintos de faces regulares, mas com todos os vértices descritos pelo mesmo vetor (n_1, \dots, n_k) ($3 \leq k \leq 5$ e $n_i \geq 3$, para $1 \leq i \leq k$). Vetores com entradas iguais representam os poliedros regulares.

Vamos pensar em um vértice e reparar nos seus ângulos. A soma dos ângulos será menor do que 2π , pois o vértice não pode estar no plano. Assim, podemos escrever de forma matemática da seguinte maneira:

$$2\pi > \sum_{i=1}^k \frac{n_i - 2}{n_i} \pi = \pi \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{2}{n_i}\right) = \pi \left(k - \sum_{i=1}^k \frac{2}{n_i}\right),$$

ou seja,

$$2 > k - \sum_{i=1}^k \frac{2}{n_i} \iff -2 \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i} < 2 - k \iff 2 \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i} > k - 2.$$

Assim:

$$\boxed{\sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i} > \frac{k-2}{2}}. \quad (3.1)$$

Caso $k = 3$.

Por ter apenas três coordenadas no vetor do poliedro, podemos convencionar escrevê-lo como (n_1, n_2, n_3) em ordem crescente.

Se uma das entradas, digamos r , for ímpar, então as outras duas entradas, digamos s e t , são iguais, ou seja, $s = t$. Isto é bem fácil de perceber ao percorrermos os vértices de uma face com r ímpar como, por exemplo, a Figura 3.3.

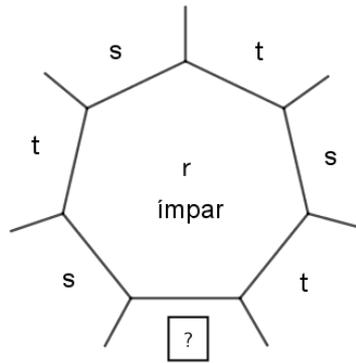


Figura 3.3: Igualdade $s = t$ quando r é ímpar. Fonte: a autora.

Além disso, $s = t$ tem que ser par pois, caso contrário, pelo mesmo argumento acima aplicado a uma face de s ímpar, concluiríamos que $t = r$. Com isso, chegaríamos a um vetor com entradas (r, r, r) ; mais especificamente $(3, 3, 3)$ e $(5, 5, 5)$ que representam poliedros regulares (tetraedro e dodecaedro).

Resumindo: para termos um poliedro semirregular com $k = 3$, quando uma entrada r é ímpar, então as outras duas entradas s e t são pares e iguais.

Desta forma, quando $k = 3$, teremos o vetor (n_1, n_2, n_3) nas condições:

(1) $3 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3$, em que pelo menos uma das duas desigualdades seja restrita para garantir dois tipos diferentes de faces.

(2) $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} > \frac{1}{2}$ pela desigualdade 3.1, já que $\sum_{i=1}^3 \frac{1}{n_i} > \frac{3-2}{2} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} > \frac{1}{2}$.

(3) Se uma das entradas for ímpar, então as outras duas serão pares e iguais.

Para cada um desses vetores, pode haver um único poliedro convexo de faces regulares cujos vértices são todos descritos por esse vetor. A busca é feita por exaustão e está sintetizada na Tabela 3.1, mostrando a existência de 7 poliedros semirregulares nessas condições.

Para os vetores em que existe o poliedro, teremos as nomenclaturas listadas na Tabela 3.2.

A partir dessa tabela, geramos 7 poliedros semirregulares.

Caso $k = 4$.

Pela desigualdade 3.1, temos $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} > 1$, já que:

$$\sum_{i=1}^4 \frac{1}{n_i} > \frac{4-2}{2} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} > 1.$$

No caso de $k = 4$ não usaremos a forma crescente, como utilizamos no $k = 3$.

Vetor	Desigualdade 3.1 para $k = 3$	Existe?
(3, 3, 3)	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1 > \frac{1}{2}$	existe
(3, 4, 4)	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4+6}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} > \frac{1}{2}$	existe
(3, 6, 6)	$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2+2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$	existe
(3, 8, 8)	$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8+6}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}$	existe
(3, 10, 10)	$\frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{10+6}{30} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15} > \frac{1}{2}$	existe
(3, 12, 12)	$\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4+2}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$	não existe
(3, 2u, 2u), $u \geq 6$	$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{n_i} < \frac{1}{2}$	não existe
(4, 4, 4)	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$	existe
(4, 4, 5)	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{10+4}{20} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10} > \frac{1}{2}$	existe
(4, 4, n)	$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{n_i} > \frac{1}{2}$	existe
(4, 6, 6)	$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6+8}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}$	existe
(4, 6, 8)	$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{6+4+3}{24} = \frac{13}{24} > \frac{1}{2}$	existe
(4, 6, 10)	$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{15+10+6}{60} = \frac{31}{60} > \frac{1}{2}$	existe
(4, 6, 2u), $u \geq 6$	$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{n_i} < \frac{1}{2}$	não existe
(5, 5, 5)	$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5} > \frac{1}{2}$	existe
(5, 6, 6)	$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6+5+5}{30} = \frac{16}{30} > \frac{1}{2}$	existe
(5, 8, 8)	$\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8+5+5}{40} = \frac{18}{40} < \frac{1}{2}$	não existe
(5, 2u, 2u), $u \geq 4$	$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{n_i} < \frac{1}{2}$	não existe
(6, 6, 6)	$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	não existe
(i, j, k), $i, j, k \geq 6$	$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{n_i} \leq \frac{1}{2}$	não existe

Tabela 3.1: Vetores para o caso $k = 3$.

Observe que se $n_1, n_2, n_3, n_4 = 4$, $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$, o que não vai valer. Com isso, pelo menos um dos $n_i = 3$.

Considere $n_1 = 3$ e chamemos de v_1, v_2 e v_3 os vértices de uma face triangular. Se existirem dois triângulos adjacentes no poliedro, então, há dois triângulos adjacentes em torno do vértice v_3 , ou seja, v_1v_3 ou v_2v_3 é lado de dois triângulos. Se v_1v_3 for lado de dois triângulos, então há três triângulos em torno de v_1 . Se v_2v_3 for lado de dois triângulos, então há três triângulos em torno de v_2 . Veja a Figura 3.4.

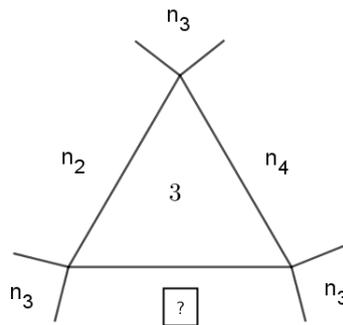


Figura 3.4: Se há dois triângulos adjacentes, então há três triângulos em cada vértice. Fonte: a autora.

Assim, concluímos que se existe dois triângulos adjacentes, na verdade, há três triângulos em

Vetor	Nomenclatura
(3, 3, 3)	Poliedro regular, Tetraedro
(3, 4, 4)	Prisma
(3, 6, 6)	Tetraedro Truncado
(3, 8, 8)	Cubo Truncado
(3, 10, 10)	Dodecaedro Truncado
(4, 4, 4)	Poliedro Regular, Hexaedro ou Cubo
(4, 4, 5)	Prisma
(4, 4, n)	Prisma
(4, 6, 6)	Octaedro Truncado
(4, 6, 8)	Cuboctaedro Truncado
(4, 6, 10)	Icosidodecaedro Truncado
(5, 5, 5)	Poliedro Regular, Dodecaedro
(5, 6, 6)	Icosaedro Truncado

Tabela 3.2: Nomenclatura dos poliedros para o caso $k = 3$.

torno de cada vértice e os vértices são descritos por $(3, 3, 3, n)$, que representam os antiprismas.

Se não houver triângulos adjacentes, $n_2 \neq 3$ e $n_4 \neq 3$, (n_3 pode ser 3 porque não será adjacente ao triângulo da entrada n_1). Assim como no $k = 3$, podemos ver que n_2 será igual a n_4 . Nessas condições, temos $(3, 4, 3, 4)$, $(3, 4, 4, 4)$, $(3, 4, 5, 4)$ e $(3, 5, 3, 5)$. Vejamos na Tabela 3.3, mostrando a existência de 4 poliedros semirregulares nessas condições.

Vetor	Desigualdade 3.1 para $k = 4$	Existe?
(3, 4, 3, 4)	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3+4+3}{12} = \frac{14}{12} > 1$	existe
(3, 4, 4, 4)	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4+3+3+3}{12} = \frac{13}{12} > 1$	existe
(3, 4, 5, 4)	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{20+15+12+15}{60} = \frac{62}{60} > 1$	existe
(3, 4, 6, 4)	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{4+3+2+3}{12} = \frac{12}{12} = 1$	não existe
$(3, 4, n, 4), n \geq 6$	$\sum_{i=1}^4 \frac{1}{n_i} \leq 1$	não existe
(3, 5, 3, 5)	$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5+3+5+3}{15} = \frac{16}{15} > 1$	existe
(3, 5, 4, 5)	$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{20+12+15+12}{60} = \frac{59}{60} < 1$	não existe
$(3, 5, n, 5), n \geq 4$	$\sum_{i=1}^4 \frac{1}{n_i} \leq 1$	não existe
(3, 6, 4, 6)	$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1+2+1}{6} = \frac{6}{6} = 1$	não existe
$(3, n, j, n), n \geq 6, j \geq 3$	$\sum_{i=1}^4 \frac{1}{n_i} \leq 1$	não existe

Tabela 3.3: Vetores para o caso $k = 4$.

Para os vetores em que existe poliedro, teremos as nomenclaturas listadas na Tabela 3.4.

A partir dessa tabela, geramos 4 poliedros semirregulares, totalizando $7 + 4 = 11$ poliedros semirregulares.

Todos os vetores geram apenas um poliedro, com exceção do vetor $(3, 4, 4, 4)$ que gera dois tipos de rombicuboctaedros. A diferença deles é que um deles possui três anéis formados por quadrados, representados em (a), (b) e (c) da figura 3.5 enquanto o outro possui somente um anel de quadrados, representado em (d) na figura 3.5. Um anel de polígonos no poliedro é tal que conseguimos dar uma volta no poliedro passando apenas pelos polígonos do anel.

Uma cúpula é um poliedro com duas bases, uma com n lados e outra com $2n$ lados, que

Vetor	Nomenclatura
(3, 4, 3, 4)	Cuboctaedro
(3, 4, 4, 4)	Rombicuboctaedro do tipo “um”
(3, 4, 4, 4)	Rombicuboctaedro do tipo “dois”
(3, 4, 5, 4)	Rombicosidodecaedro
(3, 5, 3, 5)	Icosidodecaedro

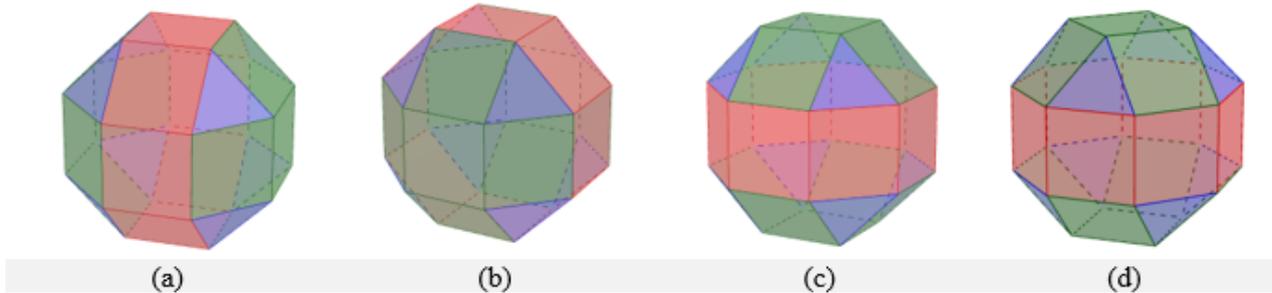
Tabela 3.4: Nomenclatura dos poliedros para o caso $k = 4$.

Figura 3.5: Cúpula quadrangular. Fonte: a autora.

estão ligadas uma à outra por uma sequência alternada de retângulos e triângulos. Veja a Figura 3.6.

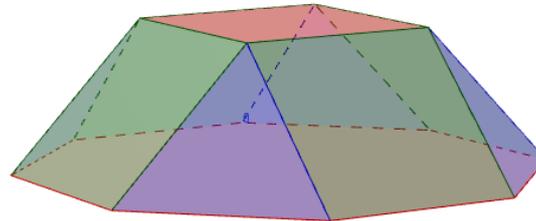


Figura 3.6: Cúpula quadrangular. Fonte: a autora.

Nesse caso que estamos tratando, seria um poliedro (a cúpula) em que uma base é um quadrado, e a outra seria um octógono e ela tem essa alternância de quadrados e triângulos. O rombicuboctaedro do tipo “dois” pode ser pensado como se girássemos em um determinado grau a cúpula “de baixo” do rombicuboctaedro do tipo “um”. O rombicuboctaedro do tipo “um” possui a cúpula acima do anel de quadrados na mesma disposição que a cúpula abaixo. Já no rombicuboctaedro do tipo “dois” a disposição é diferente (Figura 3.7).

O cuboctaedro pode ser realizado considerando os pontos médios do cubo unido por arestas ou a partir do octaedro, que chamamos de dual¹ do cubo, considerando os pontos médios dos lados das faces triangulares do octaedro unidos por arestas. Logo, o cuboctaedro pode ser visto como a intersecção do cubo e do octaedro ao mesmo tempo. (Figura 3.8).

De forma análoga, considerando o dodecaedro e o icosaedro, obtemos o icosidodecaedro.

¹O dual de um poliedro $\{p,q\}$ é o poliedro que se obtém de $\{p,q\}$ considerando um vértice em cada uma das faces e unindo dois destes vértices por uma aresta se eles pertencerem a faces adjacentes.

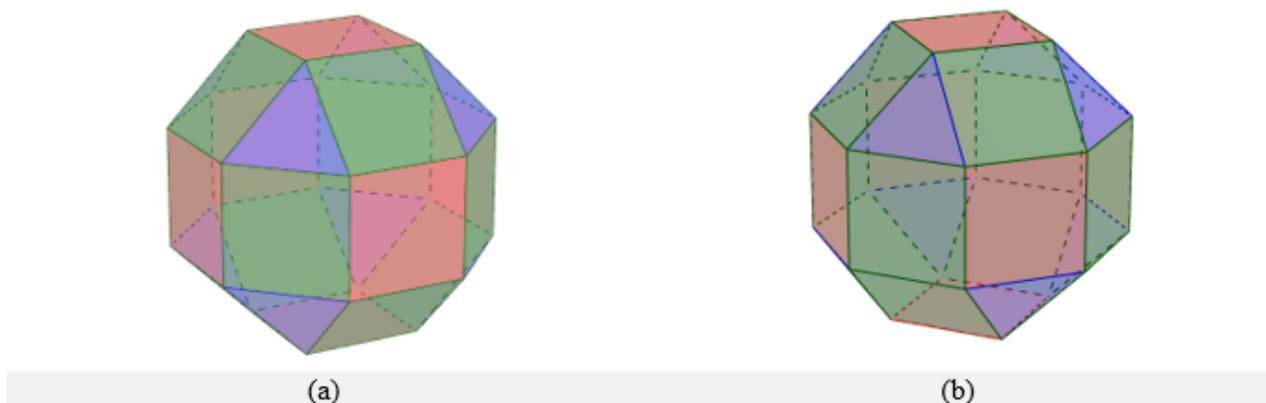


Figura 3.7: Rombicuboctaedro tipo “um” e Rombicuboctaedro tipo “dois”. Fonte: a autora.

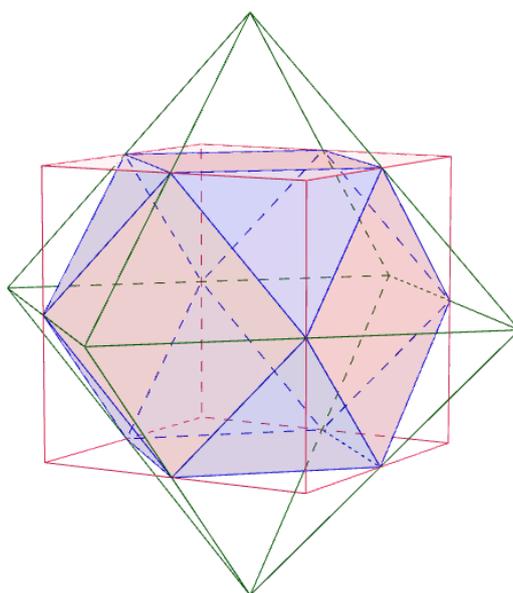


Figura 3.8: Cuboctaedro como intersecção de cubo com octaedro. Fonte: a autora.

Os duais dos poliedros semirregulares formam os chamados *Poliedros de Catalan*, que não abordaremos no trabalho.

Se truncarmos todos os vértices do cuboctaedro, obtemos um poliedro que não tem as faces todas regulares, entretanto se permitirmos afastar um pouco as faces, podemos transformá-lo num poliedro com as faces todas regulares, ou melhor, no rombicuboctaedro que surgiu no caso $k = 4$. Da mesma maneira, se considerarmos o icosidodecaedro e fizermos o mesmo procedimento de truncá-lo e afastar um pouco suas faces, vamos obter o rombicosidodecaedro, também encontrado no caso $k = 4$.

Caso $k = 5$.

Finalmente o último caso. Pela desigualdade 3.1, temos $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} > \frac{3}{2}$, já que $\sum_{i=1}^5 \frac{1}{n_i} > \frac{5-2}{2} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} > \frac{3}{2}$. Vejamos a Tabela 3.5, mostrando a existência de 2 poliedros semirregulares nessas condições.

Vetor	Desigualdade 3.1 para $k = 5$	Existe?
$(3, 3, 3, 3, 3)$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3} > \frac{3}{2}$	existe
$(3, 3, 3, 3, 4)$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+4+4+4+3}{12} = \frac{19}{12} > \frac{3}{2}$	existe
$(3, 3, 3, 3, 5)$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5+5+5+5+3}{15} = \frac{23}{15} > \frac{3}{2}$	existe
$(3, 3, 3, 3, 6)$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+2+2+2+1}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$	não existe
$(3, 3, 3, 3, n), n \geq 6$	$\sum_{i=1}^5 \frac{1}{n_i} \leq \frac{3}{2}$	não existe
$(i, j, k, l, m), i \leq j \leq k \leq l \leq m$ com $i > 3$	$\sum_{i=1}^5 \frac{1}{n_i} \leq \frac{3}{2}$	não existe

Tabela 3.5: Vetores para o caso $k = 5$.

Para os vetores em que existe poliedro, teremos as nomenclaturas listadas na Tabela 3.6.

Vetor	Nomenclatura
$(3, 3, 3, 3, 3)$	Poliedro regular, Icosaedro
$(3, 3, 3, 3, 4)$	Cubo Snub tipo 1
$(3, 3, 3, 3, 4)$	Cubo Snub tipo 2
$(3, 3, 3, 3, 5)$	Dodecaedro Snub tipo 1
$(3, 3, 3, 3, 5)$	Dodecaedro Snub tipo 2

Tabela 3.6: Nomenclatura dos poliedros para o caso $k = 5$.

A partir dessa tabela, geramos 2 poliedros semirregulares, totalizando, finalmente, $7+4+2 = 13$ poliedros semirregulares.

O processo para obter esses poliedros semirregulares (cubo snub e dodecaedro snub), a partir dos sólidos platônicos, é diferente daqueles que usamos até agora. A operação é afastar as faces dos poliedros e preencher com triângulos equiláteros. Afastando as faces do cubo umas das outras com a mesma velocidade e com um ligeiro movimento rotatório, à determinada altura, é possível preencher os espaços entre as faces do cubo com triângulos equiláteros, obtendo assim o cubo snub. De forma análoga, também obtemos o dodecaedro snub considerando as faces do dodecaedro em vez das faces do cubo.

Aqui, temos dois tipos de cubo snub e dois tipos de dodecaedro snub. Isso acontece porque podemos girar as faces do cubo e do dodecaedro no sentido horário ou anti-horário e isso gera dois sólidos diferentes, porém com a mesma configuração de vértices. Veja a Figura 3.9.

Em resumo, se não contarmos os primas e os antiprismas, do ponto de vista geométrico, há exatamente dezesseis poliedros convexos com faces regulares de, pelo menos, dois tipos e cujos vértices são descritos pelo mesmo vetor. Todavia, contando apenas as configurações dos vetores do poliedro, temos apenas treze tipos de poliedros semirregulares. Esta é a contagem do enunciado da classificação que fizemos.

Com isto, fechamos a classificação dos poliedros semirregulares. □

A obra original de Arquimedes perdeu-se e, por isso, não se sabe ao certo como ele chegou nesses poliedros, nem as suas propriedades. Porém Kepler mostrou que existia somente essas treze configurações de polígonos em torno de vértices.

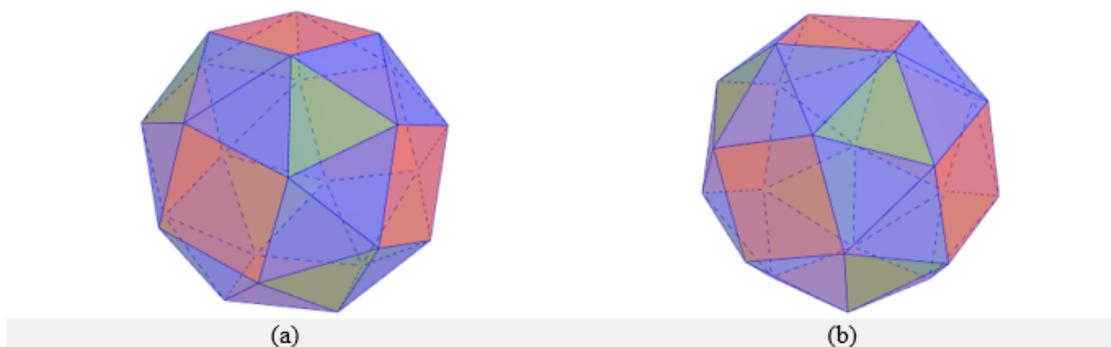


Figura 3.9: Cubo snub com giros horários e anti-horários. Fonte: a autora.

UMA ÚLTIMA OBSERVAÇÃO SOBRE A NOMENCLATURA DE ALGUNS POLIEDROS SEMIRREGULARES

Nos poliedros semirregulares, podemos ter algumas nomenclaturas diferentes das usadas nesse trabalho. O cuboctaedro truncado e o icosidodecaedro truncado podem ser chamados, também, de *grande cuboctaedro rômico* e *grande icosidodecaedro rômico*, respectivamente. Além disso, o rombicuboctaedro do tipo “um” e o rombicosidodecaedro podem ser chamados de *cuboctaedro rômico* e *icosidodecaedro rômico*, respectivamente. Como, geometricamente, temos dois tipos de rombicuboctaedro, o rombicuboctaedro do tipo “dois” também pode ser nomeado como *giro-bicúpula quadrangular alongada*.

4. ROTEIRO DE UMA DAS CONSTRUÇÕES NO GEOGEBRA

Neste capítulo apresentamos um roteiro detalhado de como fazer uma construção dinâmica no GeoGebra (referência [5]) de dois poliedros semirregulares a partir do hexaedro regular (cubo). São eles: o cubo truncado e o cuboctaedro.

De um modo geral, as construções dos primeiros poliedros semirregulares por truncamento de poliedros regulares são mais fáceis de serem implementadas dinamicamente no GeoGebra. Para realizar cada uma delas, primeiramente construímos os poliedros regulares para, depois, fazermos o truncamento e obter os poliedros semirregulares. Dessa maneira, foram necessários os estudos citados nas seções acima, bem como bom domínio do aplicativo GeoGebra. Após todos os cinco poliedros regulares serem construídos, utilizamos a ferramenta *controle deslizante* do GeoGebra em cada um deles para a realização dos cortes dos vértices de forma dinâmica, ou seja, podemos ajustar a profundidade dos cortes no próprio *controle deslizante*, de modo que todas as faces resultantes sejam regulares. Com essas construções, é fácil concluir, por exemplo, que o cuboctaedro e o icosidodecaedro podem ser obtidos a partir de poliedros regulares diferentes, como mostra a Figura 3.1. O cuboctaedro pode ser proveniente do hexaedro (cubo) ou do octaedro (daí o nome do sólido); enquanto que o icosidodecaedro pode ser proveniente do dodecaedro ou do icosaedro (e, novamente, eis a origem do nome desse sólido).

Dos treze poliedros arquimedianos, sete são obtidos por truncamento simples, ou seja, não é necessário fazer deslocamento de faces depois do corte para obter a semirregularidade do poliedro. Esses sete poliedros mais simples são: (1) o tetraedro truncado, (2) o cubo truncado, (3) o octaedro truncado, (4) o dodecaedro truncado, (5) o icosaedro truncado, (6) o cuboctaedro e (7) o icosidodecaedro.

Para esses sete poliedros arquimedianos mais simples, podemos apresentar um esquema padrão de construção que pode ser dividido em três etapas básicas.

Etapa 1: construção dos vértices e arestas de um poliedro regular de aresta medindo a , vinculada a um *controle deslizante* do *GeoGebra* (Na Figura 4.1, à esquerda, ilustramos essa etapa com um cubo).

Etapa 2: inserção de um par de pontos em cada aresta do poliedro regular, construído na Etapa 1, simétricos em relação ao ponto médio da aresta e vinculados a um *controle deslizante*. Esses pontos adicionados nas arestas definem os truncamentos do poliedro regular e são inseridos por meio de equações vetoriais de retas no espaço (Na Figura 4.1, ao centro, ilustramos essa

etapa com arestas e vértices de um cubo truncado)

Etapa 3: construção das faces dos truncamentos, definidos na Etapa 2, e das faces regulares contidas nas faces originais do poliedro regular (Na Figura 4.1, à direita, ilustramos essa etapa com um cubo truncado).

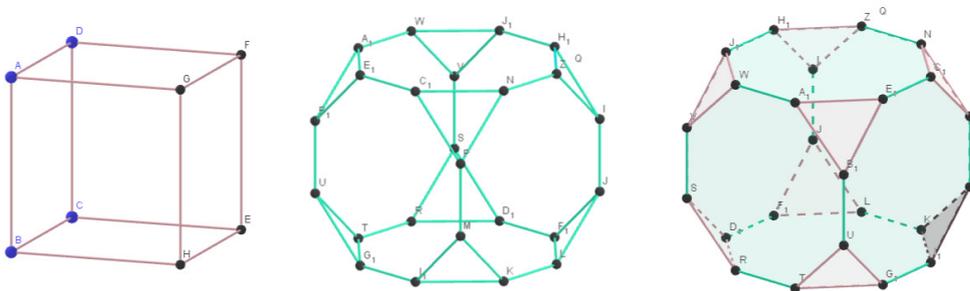


Figura 4.1: Etapas de construção do cubo truncado. Fonte: a autora.

Na Etapa 2:

- No caso particular de um tetraedro regular, quando consideramos os pares de pontos à distância $\frac{a}{3}$ de cada vértice, temos um tetraedro truncado e; quando cada par de pontos inserido em aresta coincide com o ponto médio da mesma, temos um octaedro regular.

- No caso particular de um cubo, quando consideramos os pares de pontos à distância $\frac{2-\sqrt{2}}{2}a$ de cada vértice, temos um cubo truncado e; quando cada par de pontos inserido em aresta coincide com o ponto médio da mesma, temos um cuboctaedro.

- No caso particular de um octaedro regular, quando consideramos os pares de pontos à distância $\frac{a}{3}a$ de cada vértice, temos um octaedro truncado e; quando cada par de pontos inserido em aresta coincide com o ponto médio da mesma, temos (novamente) um cuboctaedro.

- No caso particular de um dodecaedro regular, quando consideramos os pares de pontos à distância $\frac{a}{2+2\sin(54^\circ)}$ de cada vértice, temos um dodecaedro truncado e; quando cada par de pontos inserido em aresta coincide com o ponto médio da mesma, temos um icosidodecaedro.

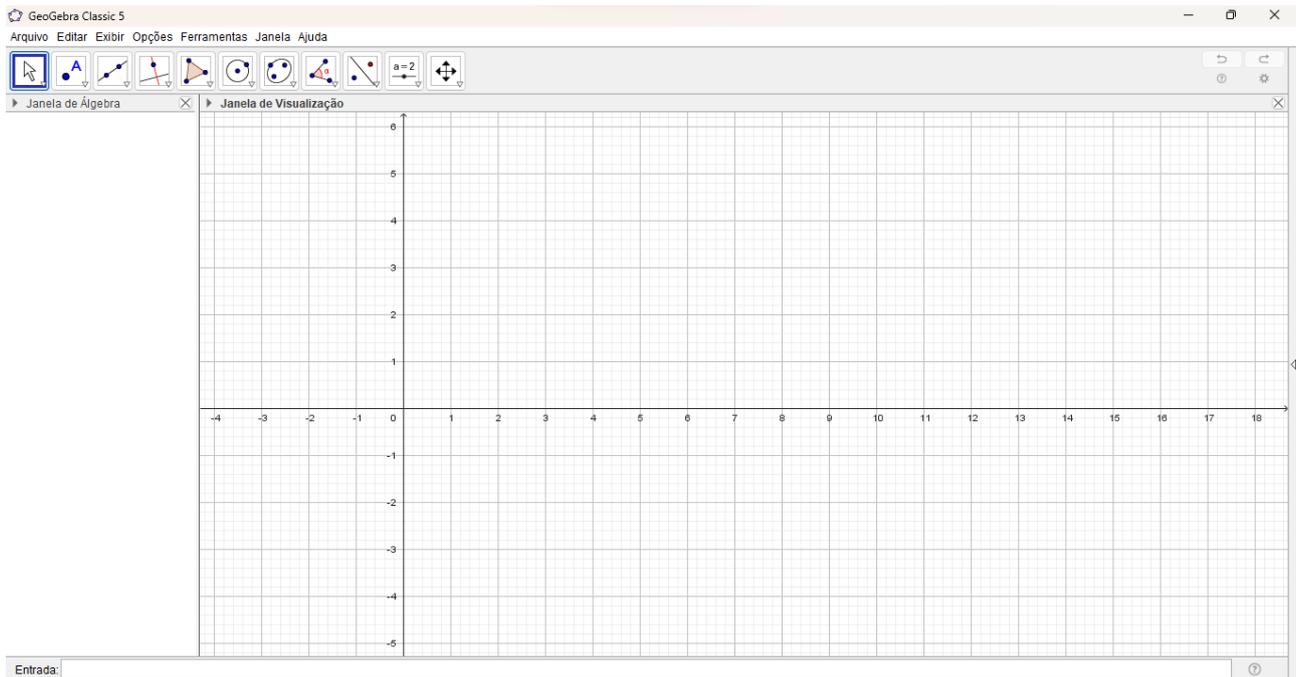
- No caso particular de um icosaedro regular, quando consideramos os pares de pontos à distância $\frac{a}{3}$ de cada vértice, temos um icosaedro truncado e; quando cada par de pontos inserido em aresta coincide com o ponto médio da mesma, temos (novamente) um icosidodecaedro.

Apresentamos abaixo o roteiro detalhado da construção dinâmica do cubo truncado e do cuboctaedro (ambos na mesma construção). Esta construção pronta pode ser acessada pelo link <https://www.geogebra.org/m/krf2cpx9>

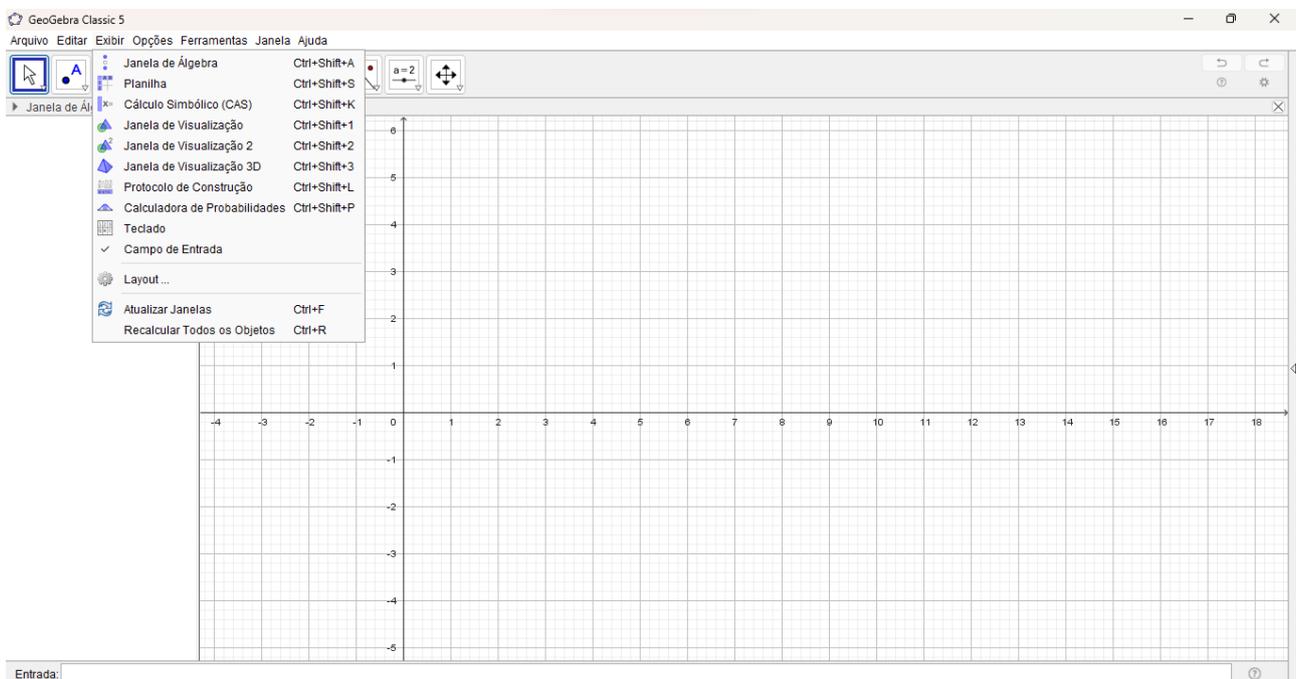
Os demais poliedros arquimedianos que são obtidos por truncamento seguem procedimentos de construção análogos ao do cuboctaedro e do cubo truncado.

ROTEIRO DE CONSTRUÇÃO DO CUBO TRUNCADO E CUBOCTAEDRO

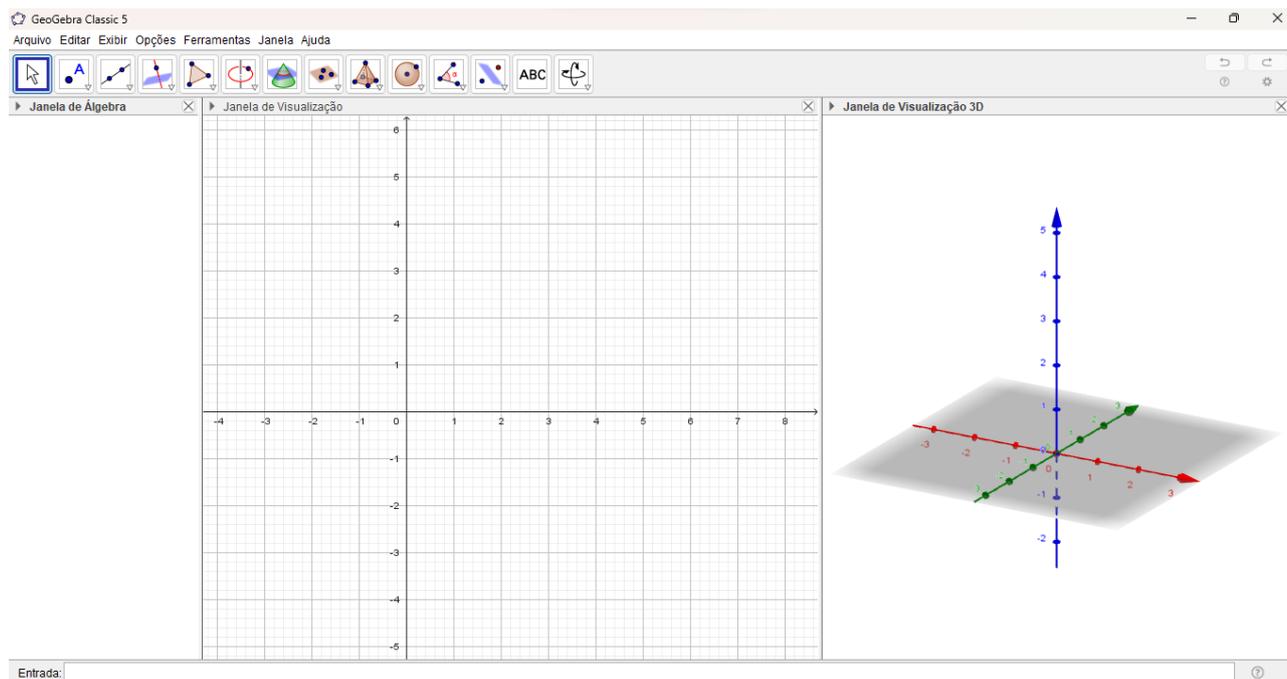
1) Nessa construção iremos usar o Geogebra Clássico 5.



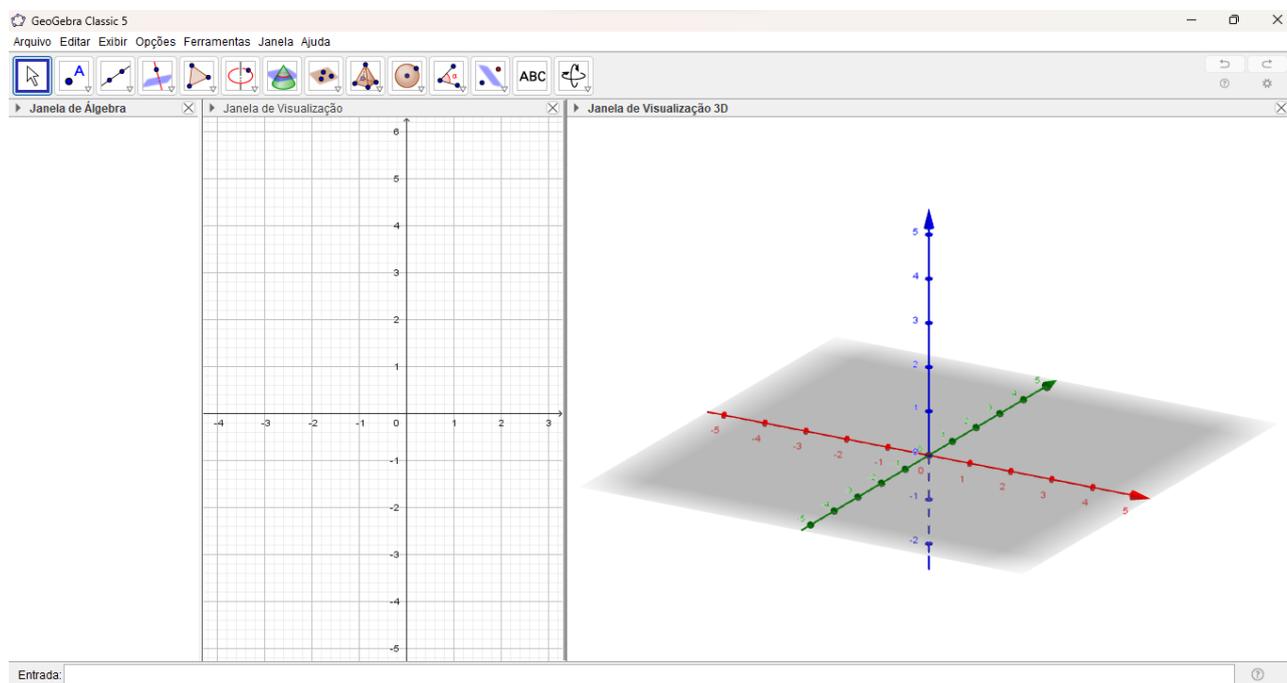
2) Na barra superior de menus, clique em "Exibir" e depois em "Janela de Visualização 3D".



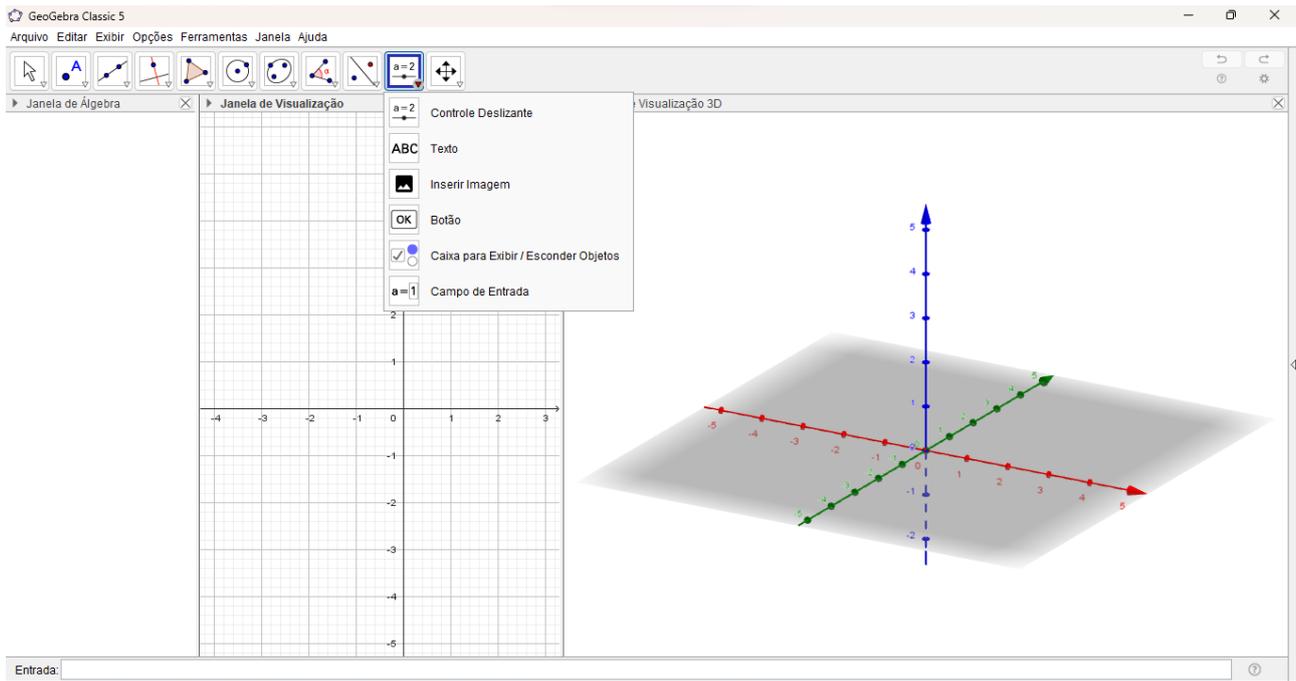
3) A Janela de Visualização 3D aparecerá do lado direito da tela.



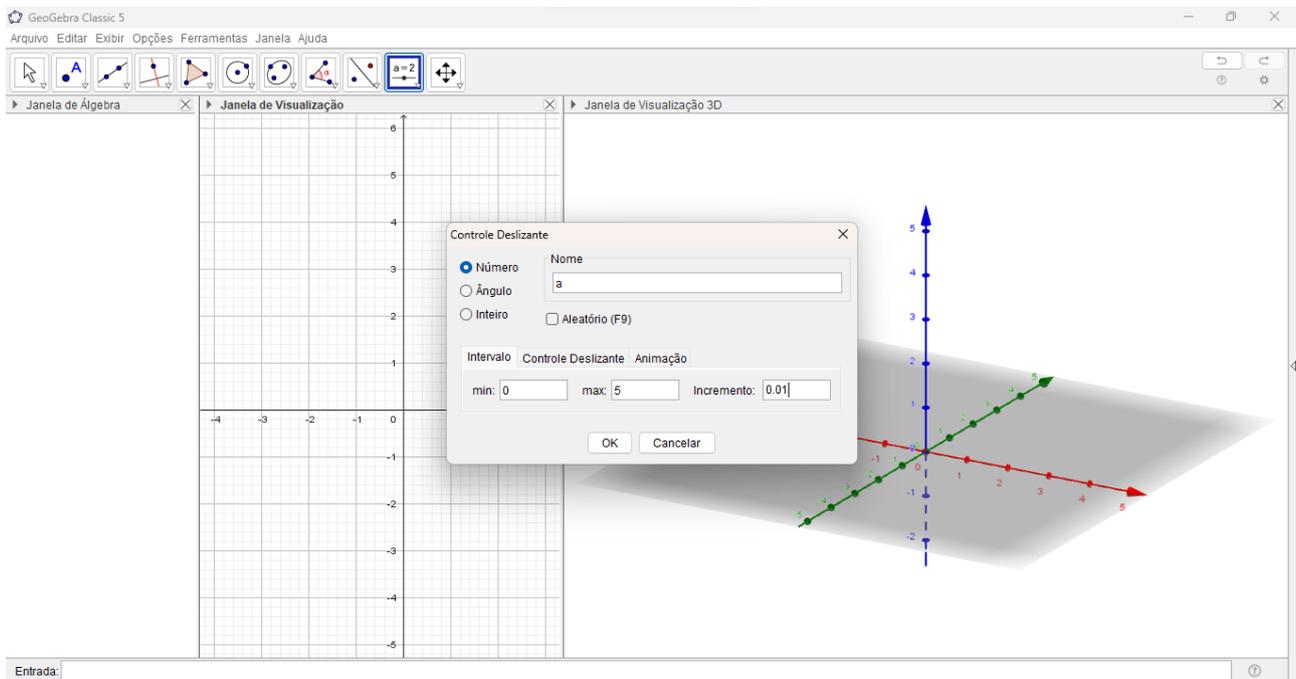
4) Aumente o campo de visão da Janela de Visualização 3D arrastando a divisória desta janela.



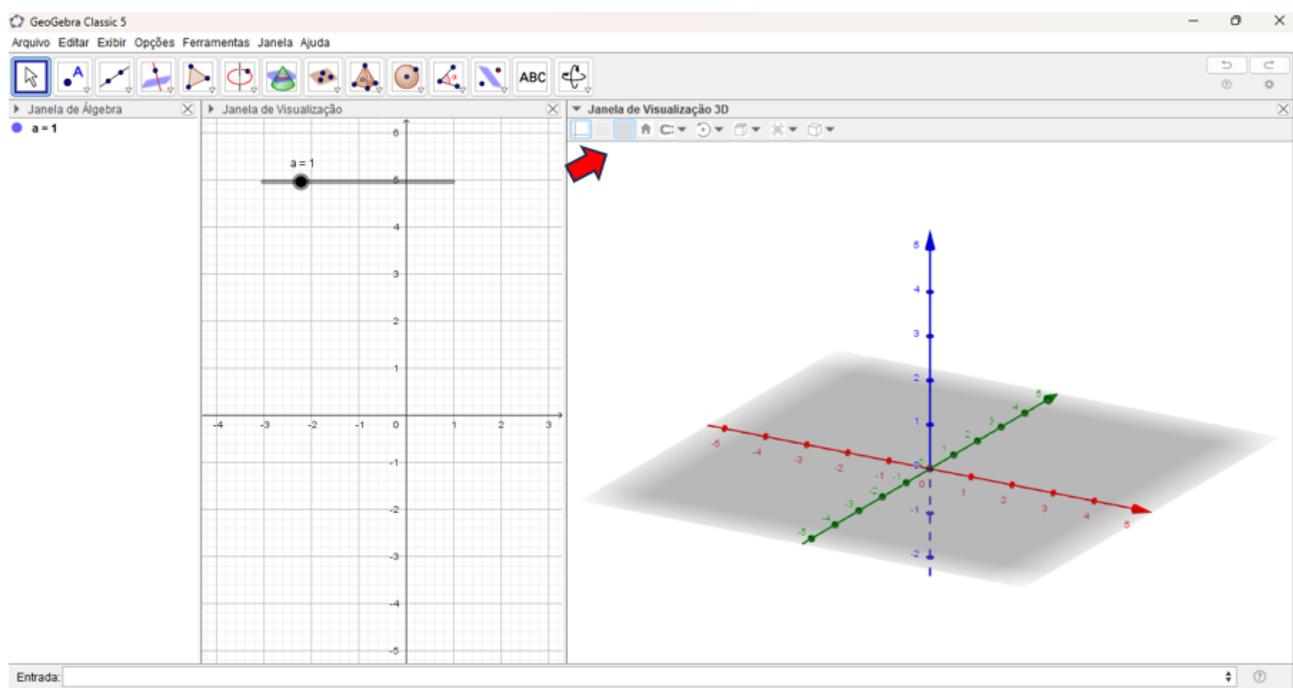
5) Clique na Janela de Visualização 2D e, depois, na barra de ferramentas. Selecione a ferramenta "Controle Deslizante".



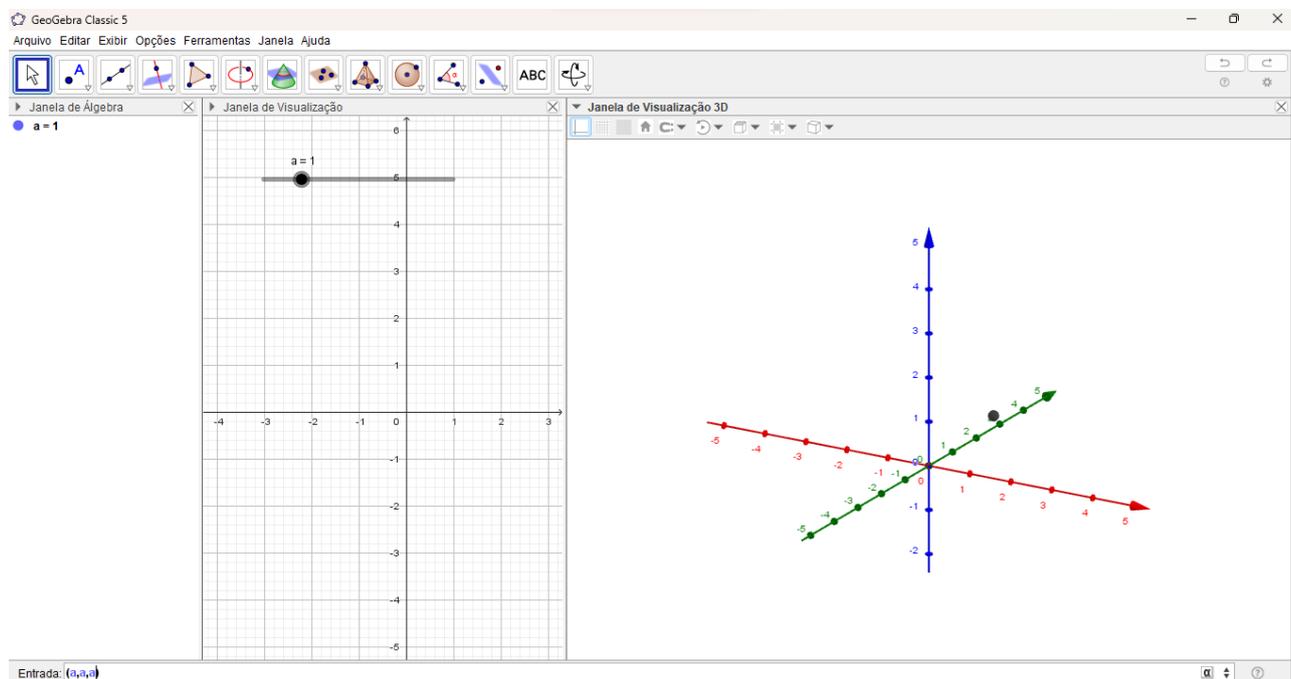
6) Clique em algum ponto da Janela de Visualização e complete a caixa de diálogo com as seguintes informações: Nome "a", Mínimo "0", Máximo "5" e Incremento "0.01". Clique em OK.



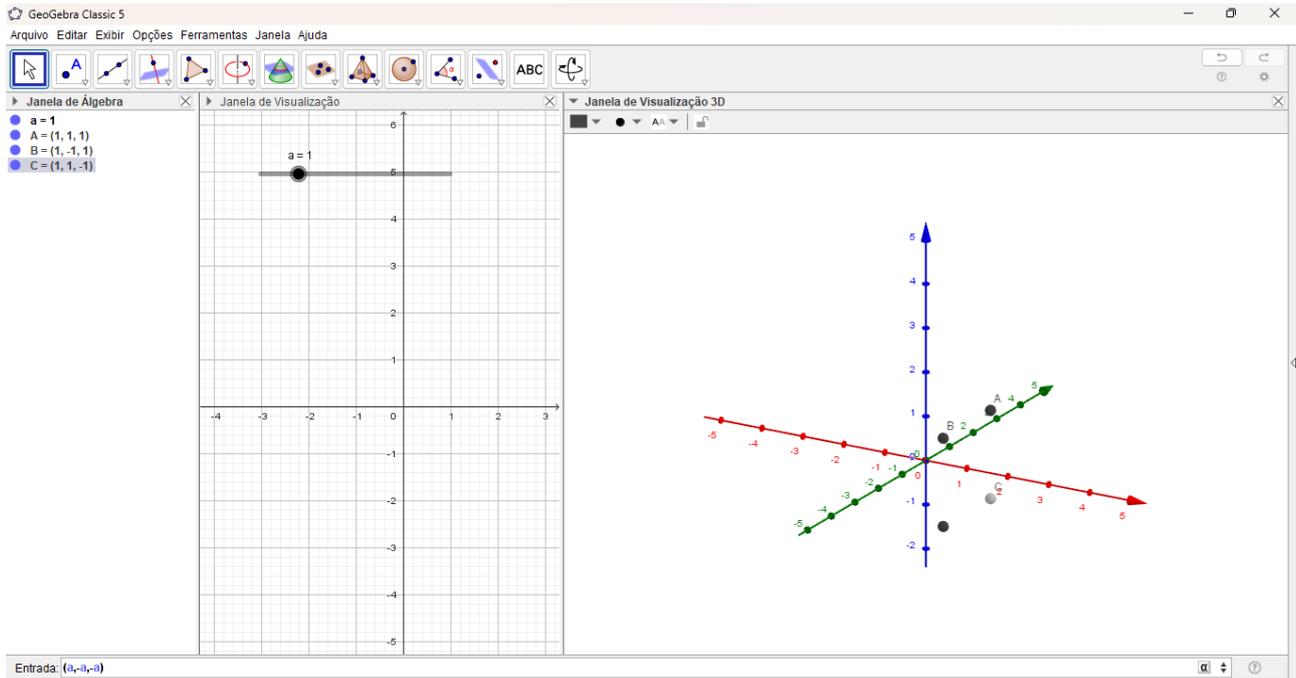
7) Abra o menu rápido da Janela de Visualização 3D e clique no botão que esconde o plano xy .



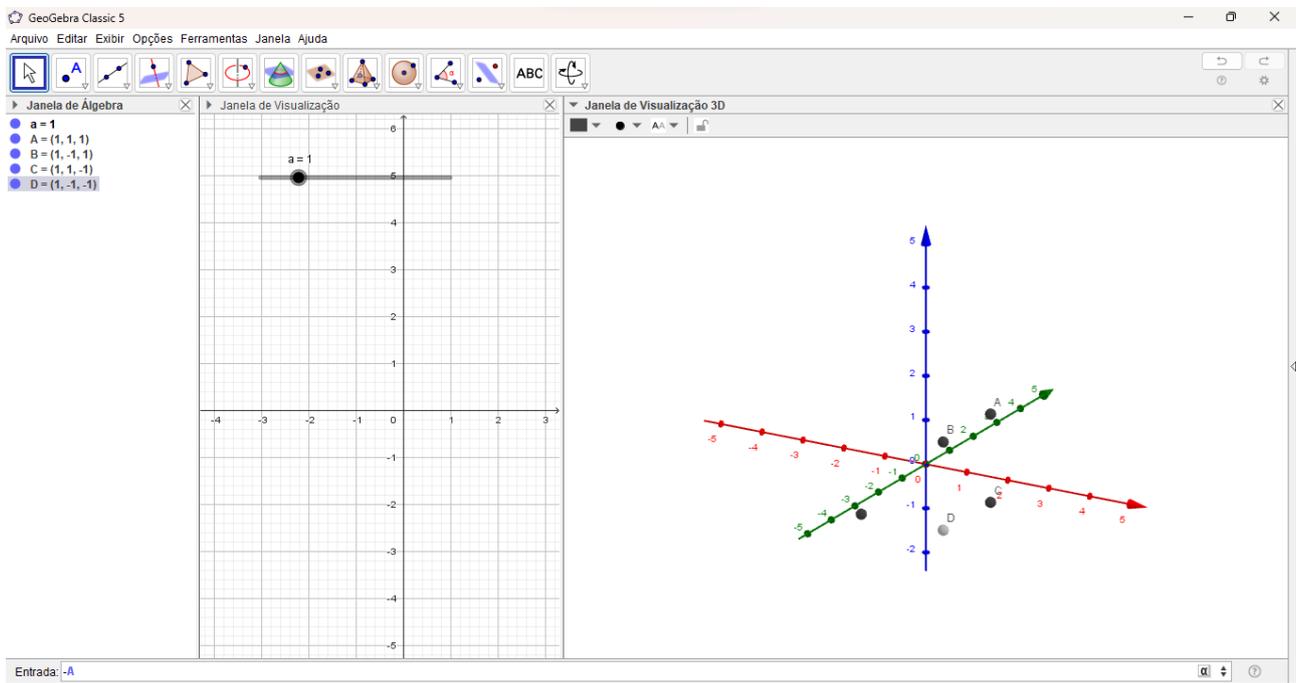
8) Na linha de entrada, digite (a, a, a) para criar o primeiro ponto.



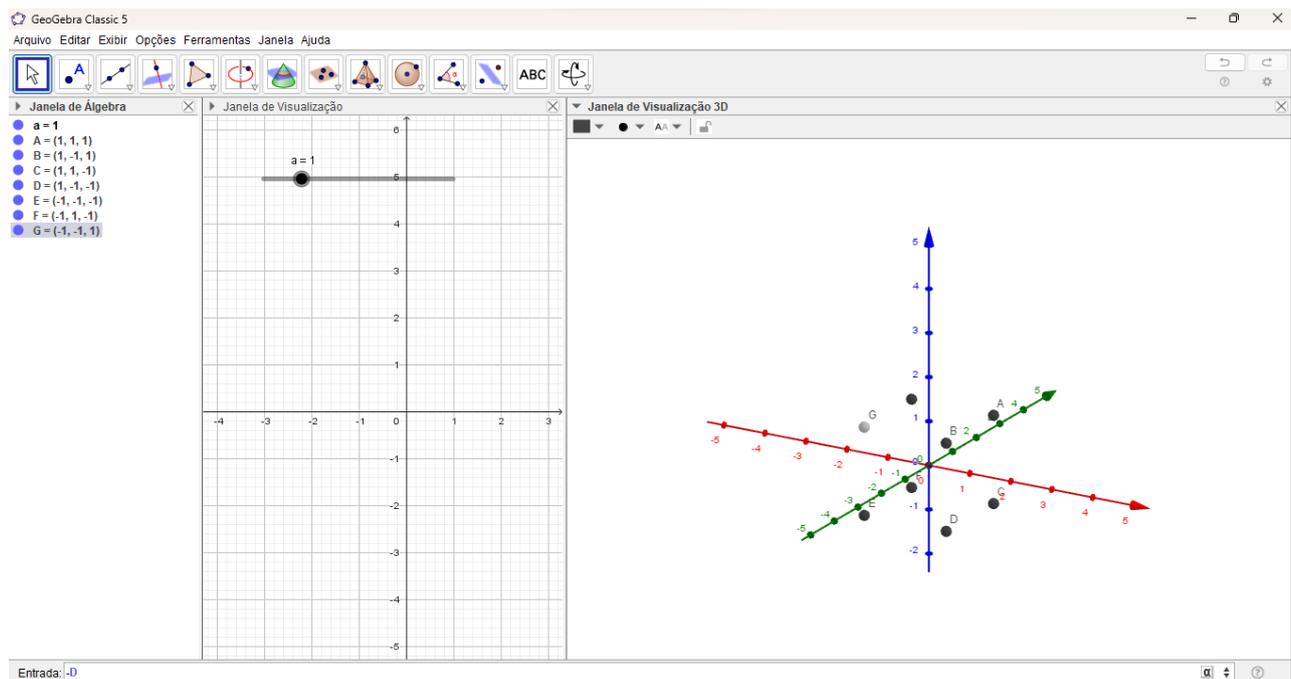
9) Repita o processo para criar os pontos $(a, -a, a)$, $(a, a, -a)$ e $(a, -a, -a)$.



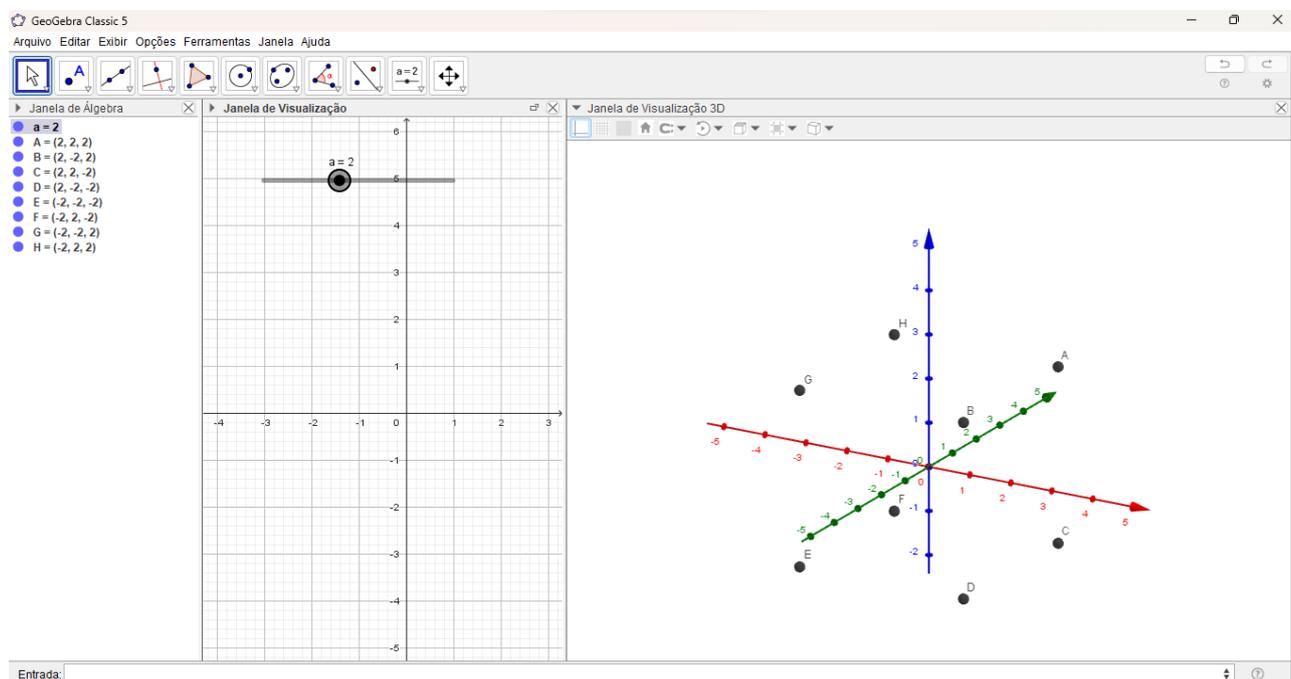
10) Na linha de entrada, digite $-A$.



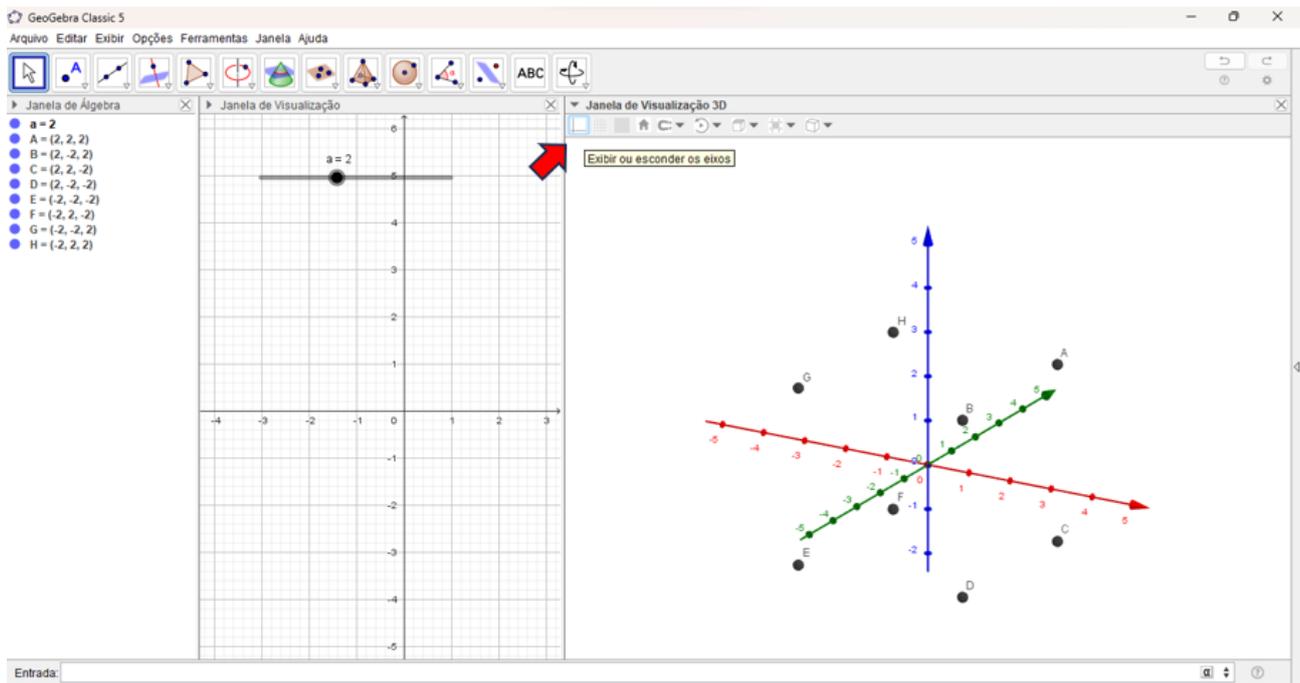
11) Repita o processo para criar os pontos $-B$, $-C$ e $-D$.



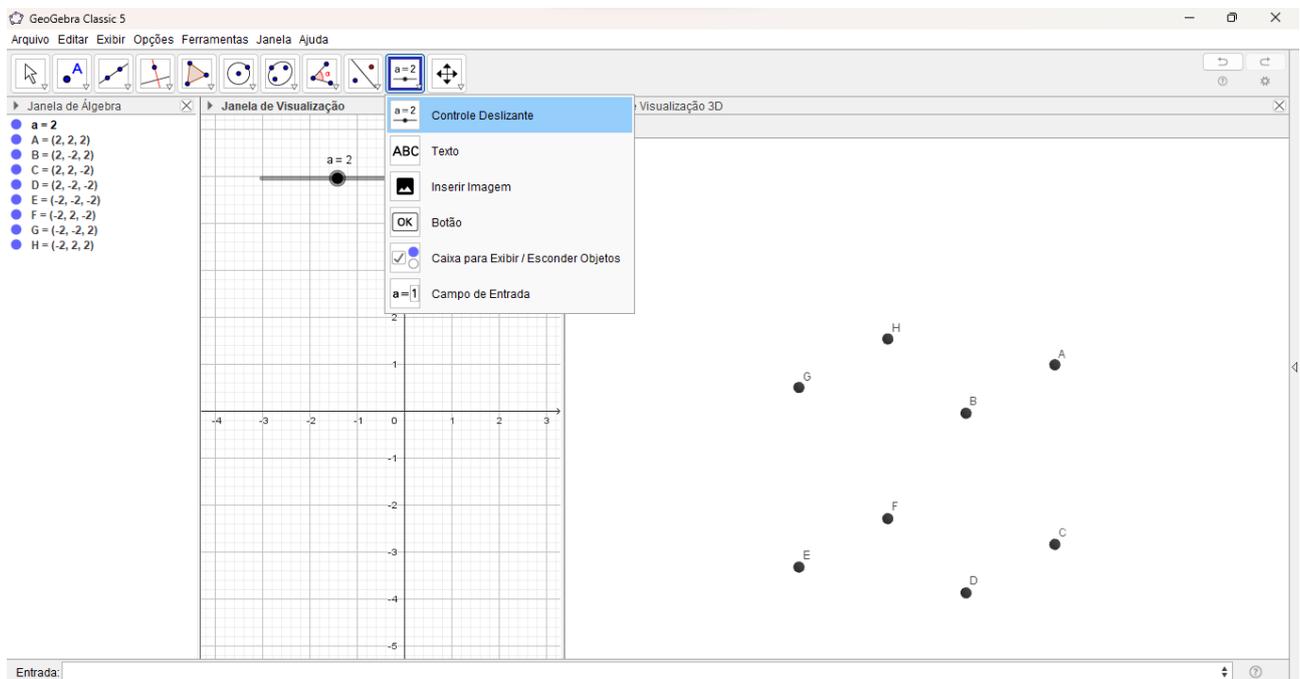
12) Altere o controle deslizante para $a = 2$ para facilitar a visualização.



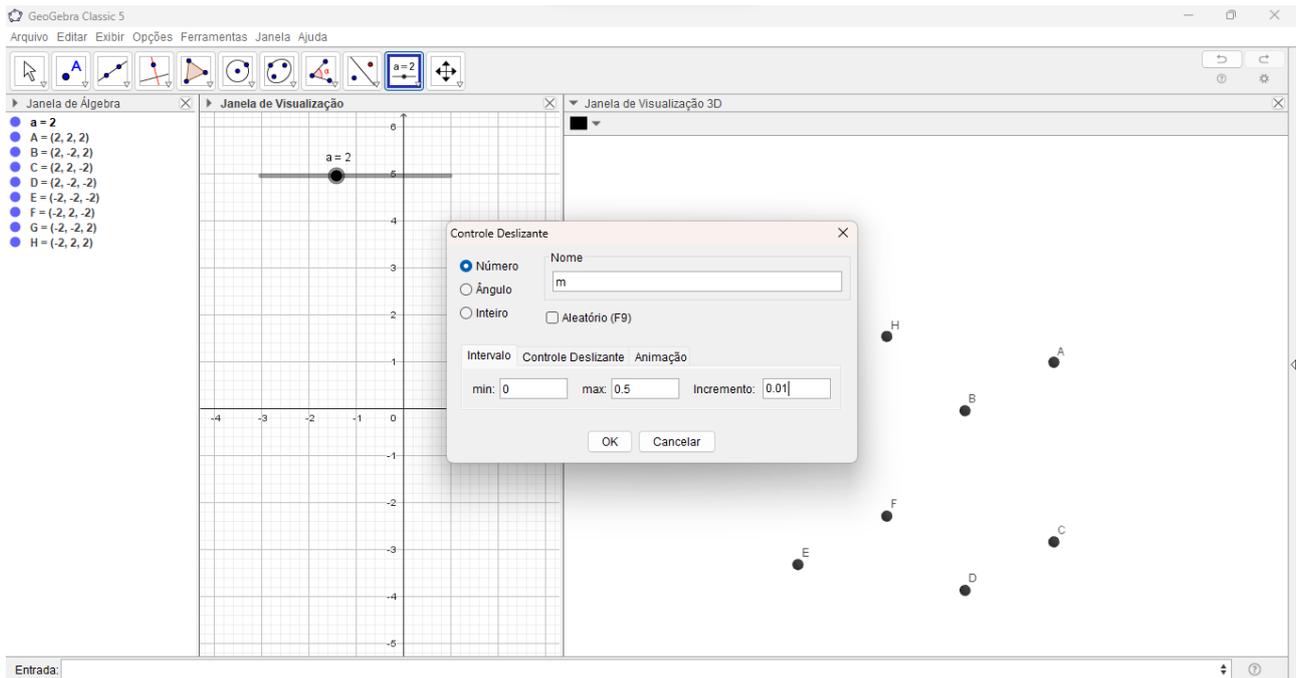
13) No menu rápido da Janela de Visualização 3D e clique no botão que esconde os eixos.



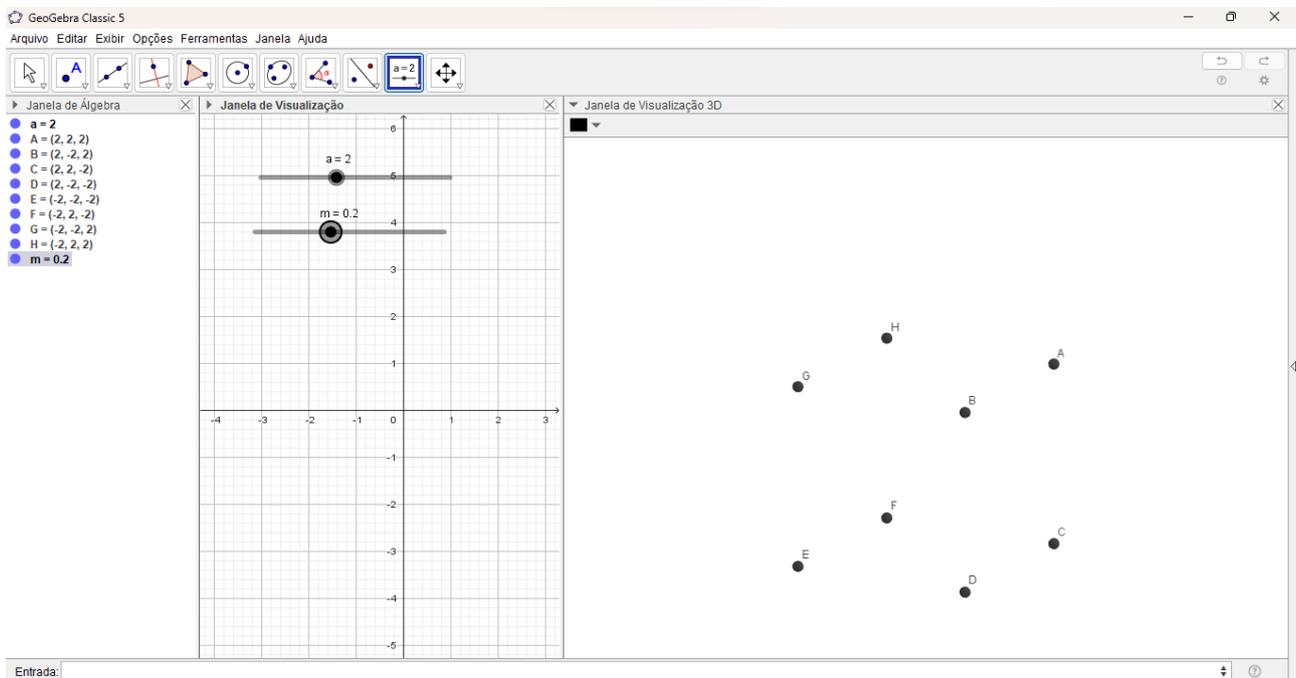
14) Clique na Janela de Visualização 2D e, na barra de ferramentas, selecione a opção "Controle Deslizante".



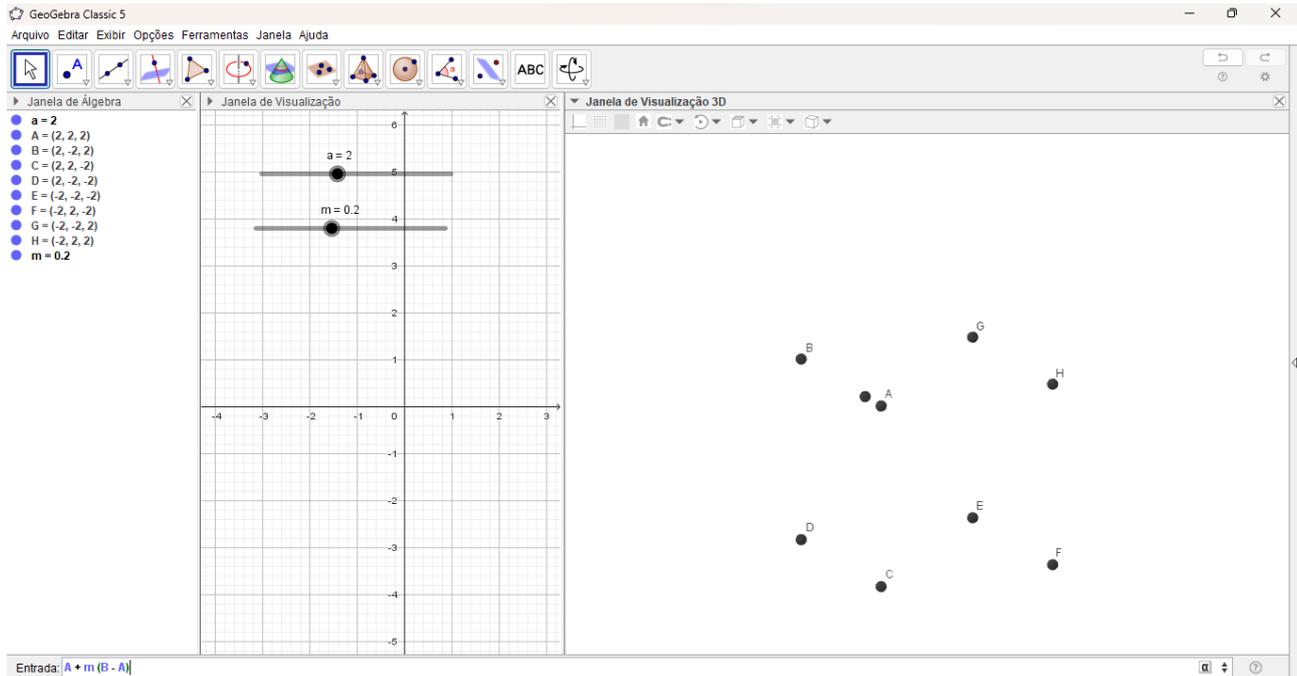
15) Complete a caixa de diálogo com as seguintes informações: Nome "m", Mínimo "0", Máximo "0.5" e Incremento "0.01".



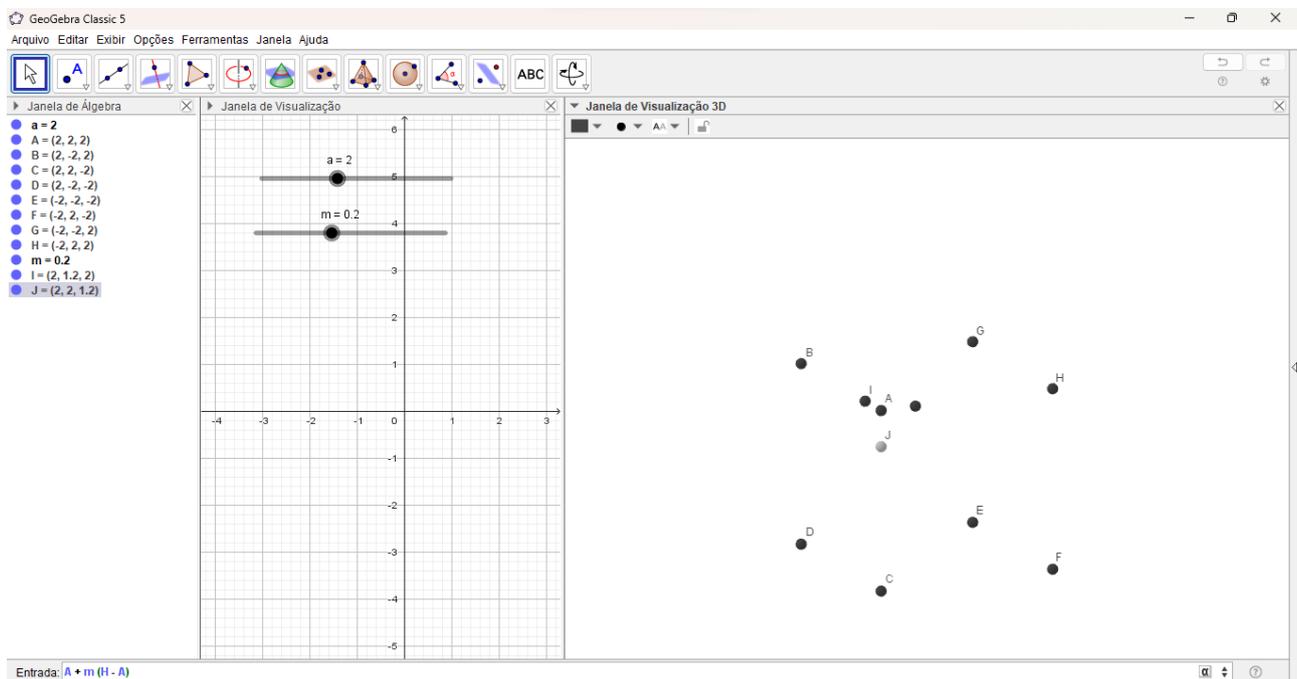
16) Coloque o valor do controle deslizante m em $m = 0.2$, para facilitar a visualização.



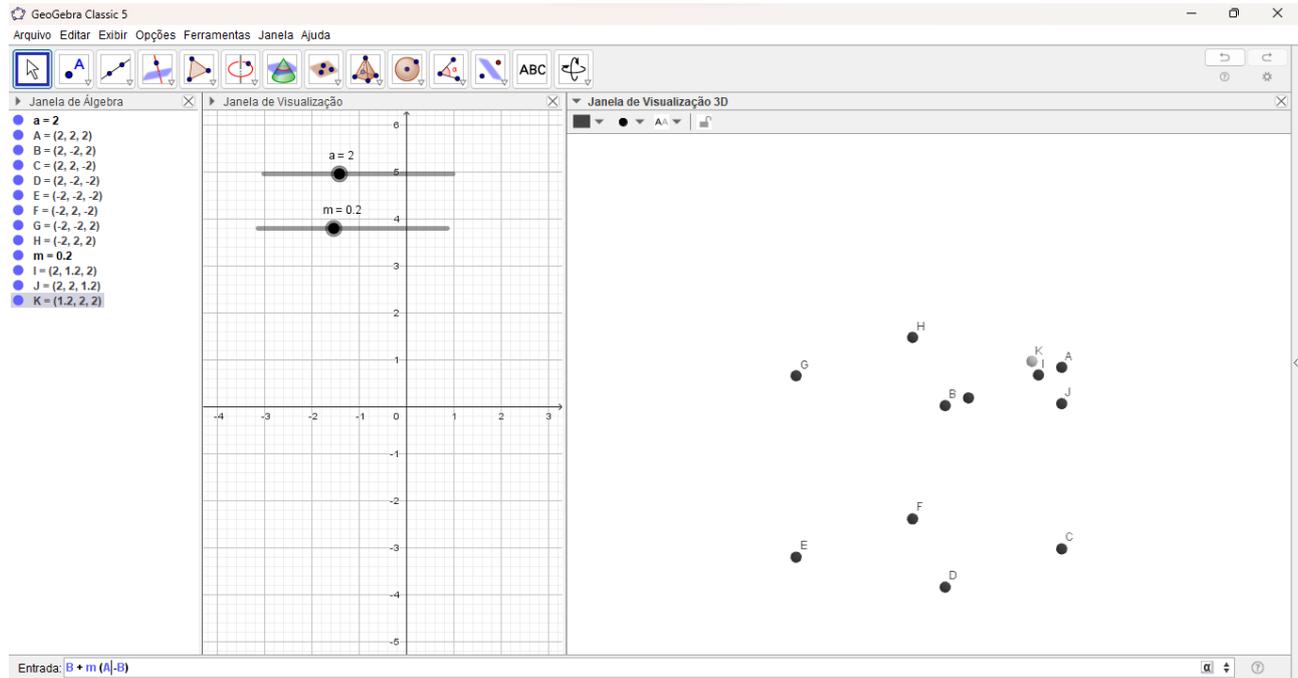
17) Na linha de entrada, digite $A + m(B - A)$.



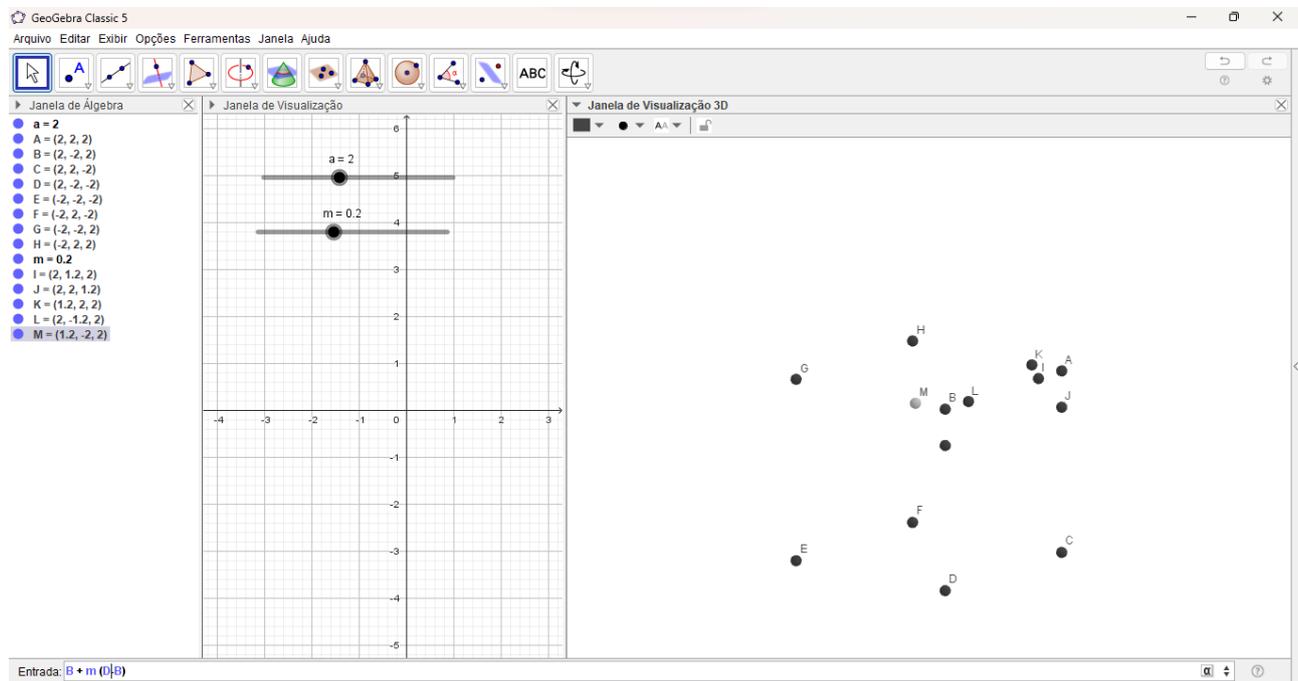
18) Repita o processo para criar os pontos $A + m(C - A)$ e $A + m(H - A)$.



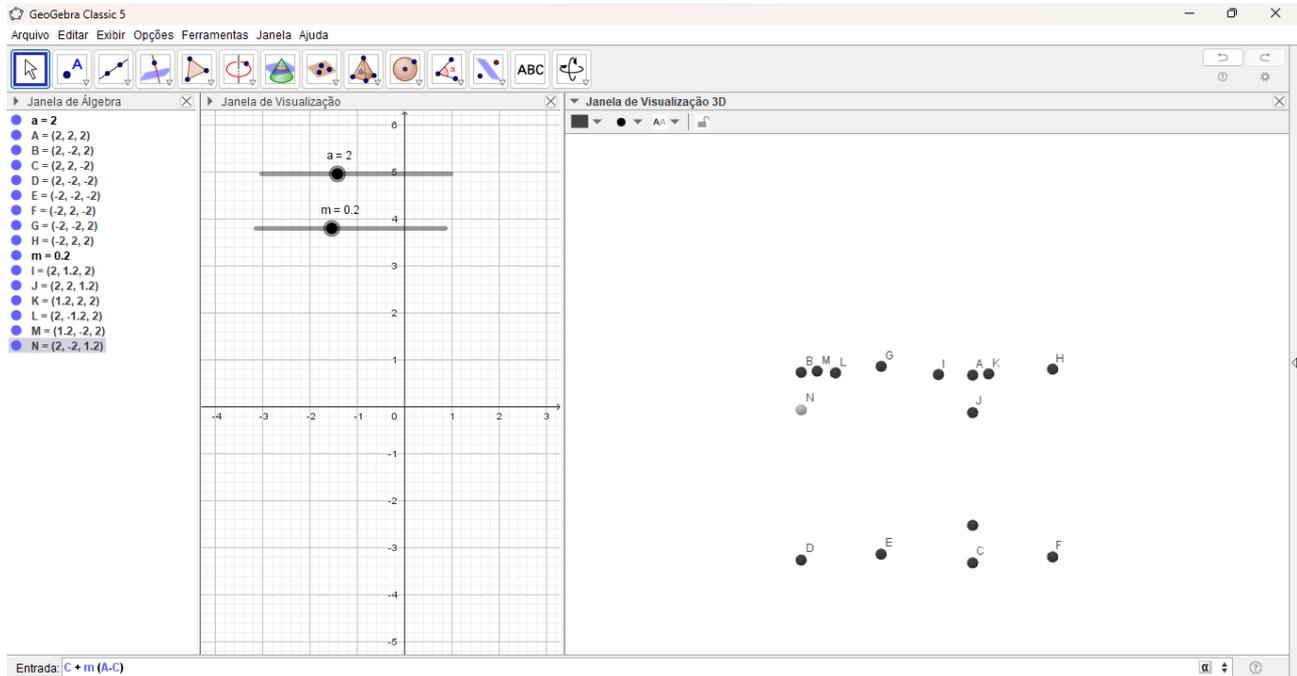
19) Na linha de entrada, digite $B + m(A - B)$.



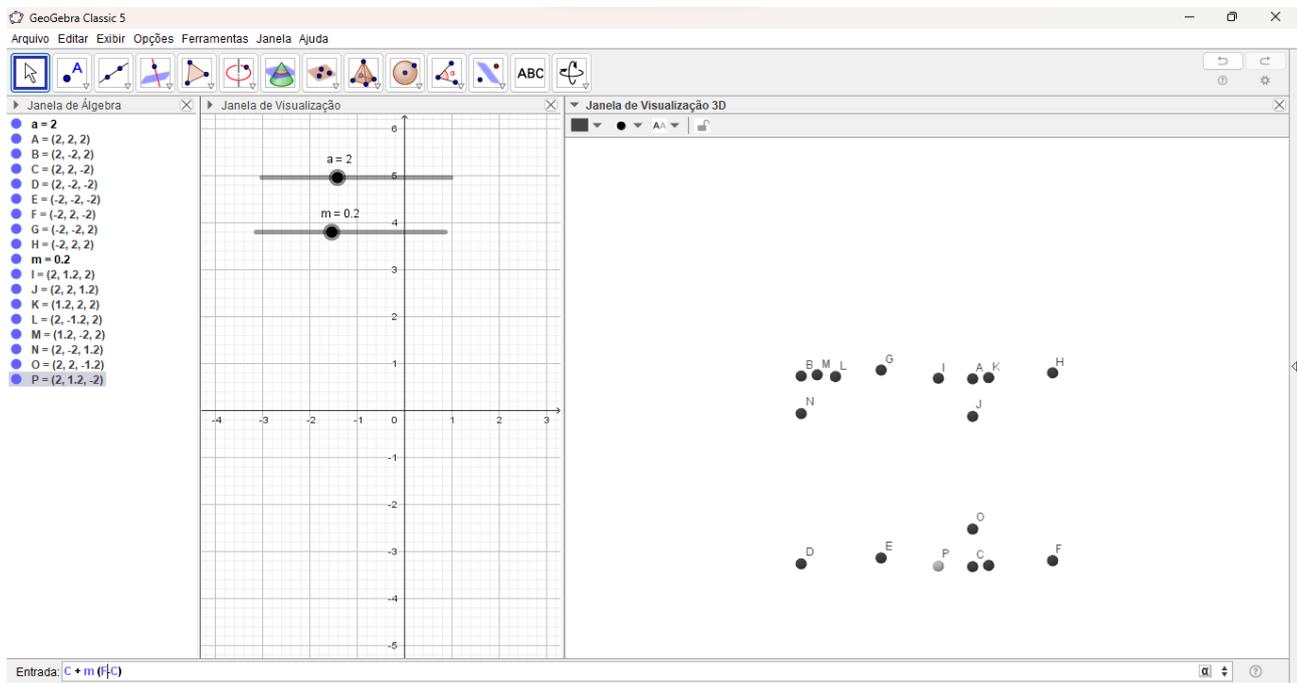
20) Repita o processo para criar os pontos $B + m(D - B)$ e $B + m(G - B)$



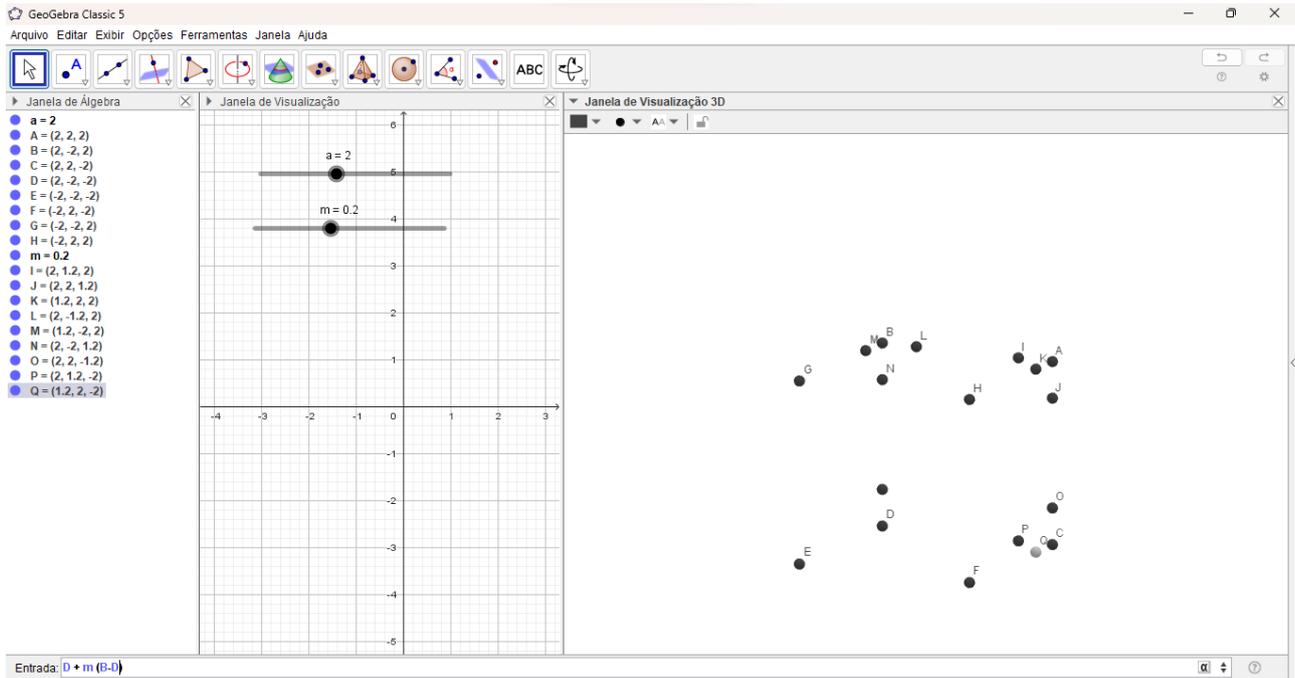
21) Na linha de entrada, digite $C + m(A - C)$.



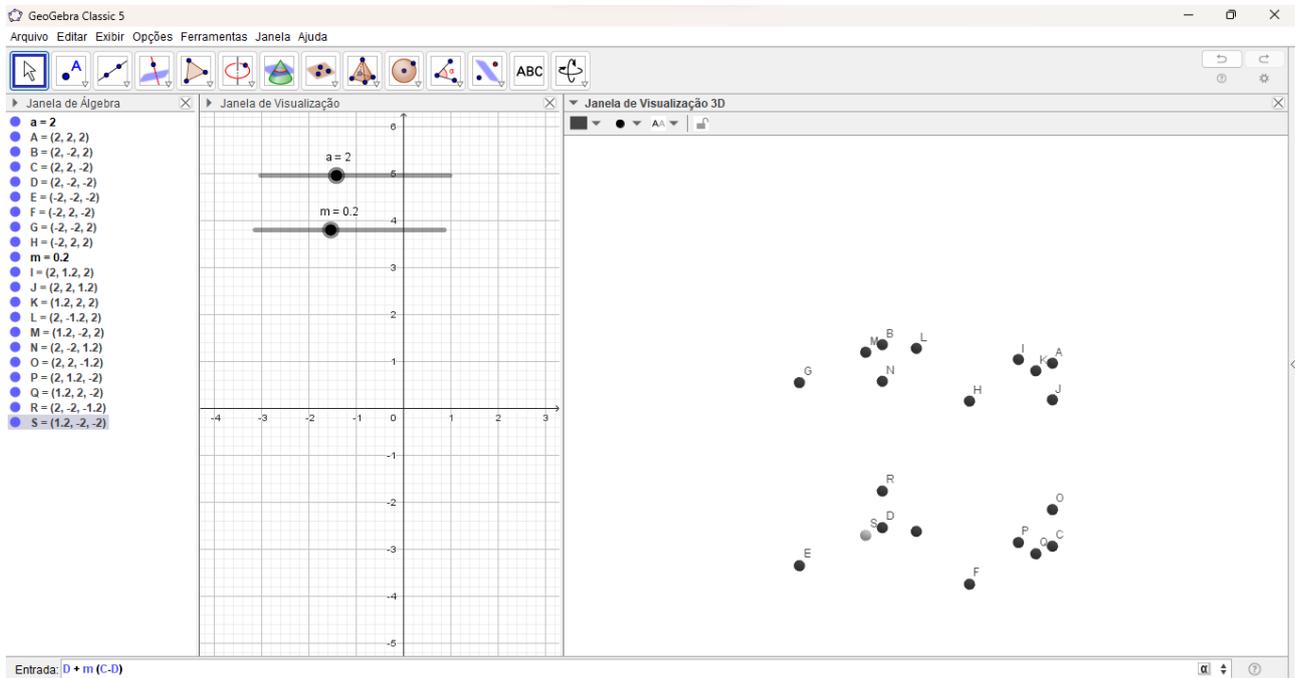
22) Repita o processo para criar os pontos $C + m(D - C)$ e $C + m(F - C)$.



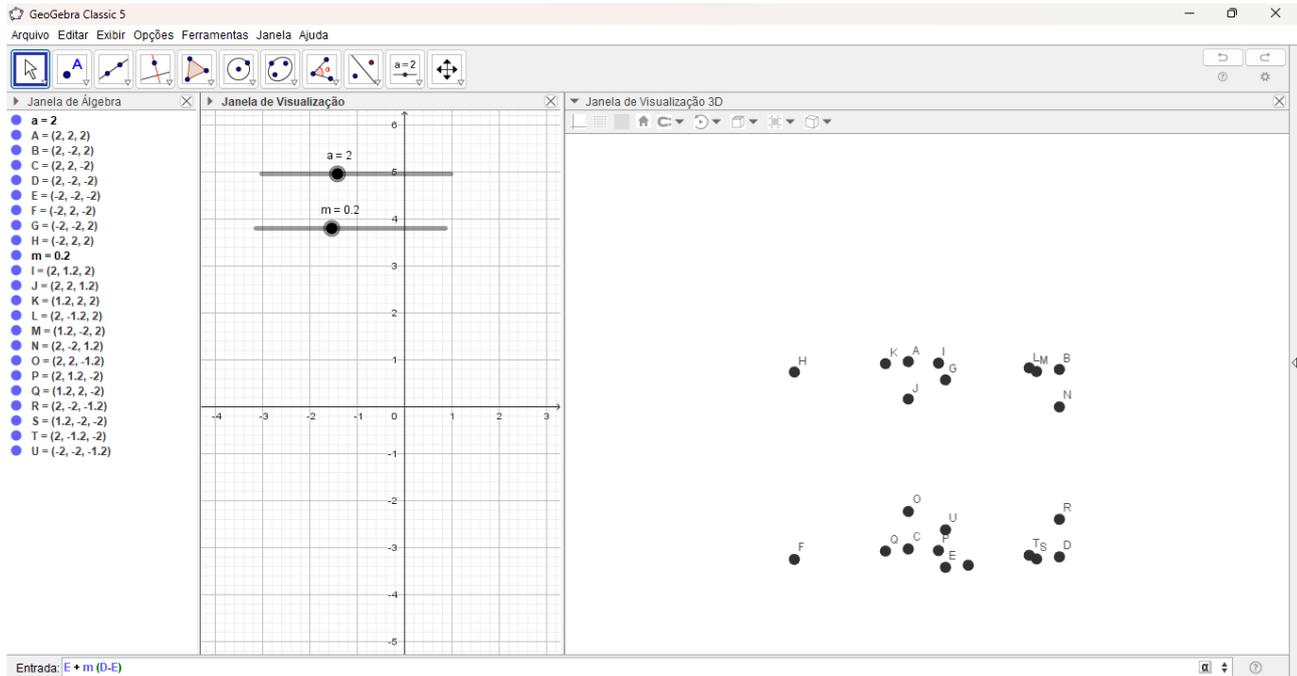
23) Na linha de entrada, digite $D + m(B - D)$.



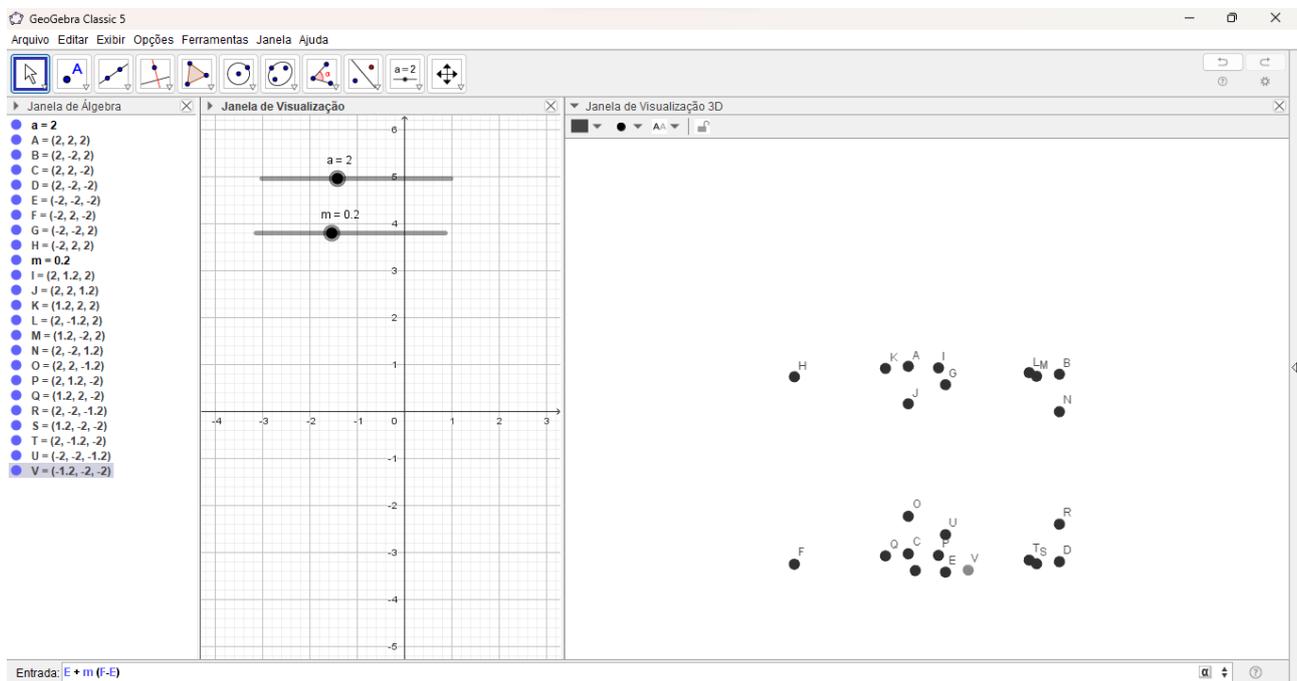
24) Repita o processo para criar os pontos $D + m(C - D)$ e $D + m(E - D)$.



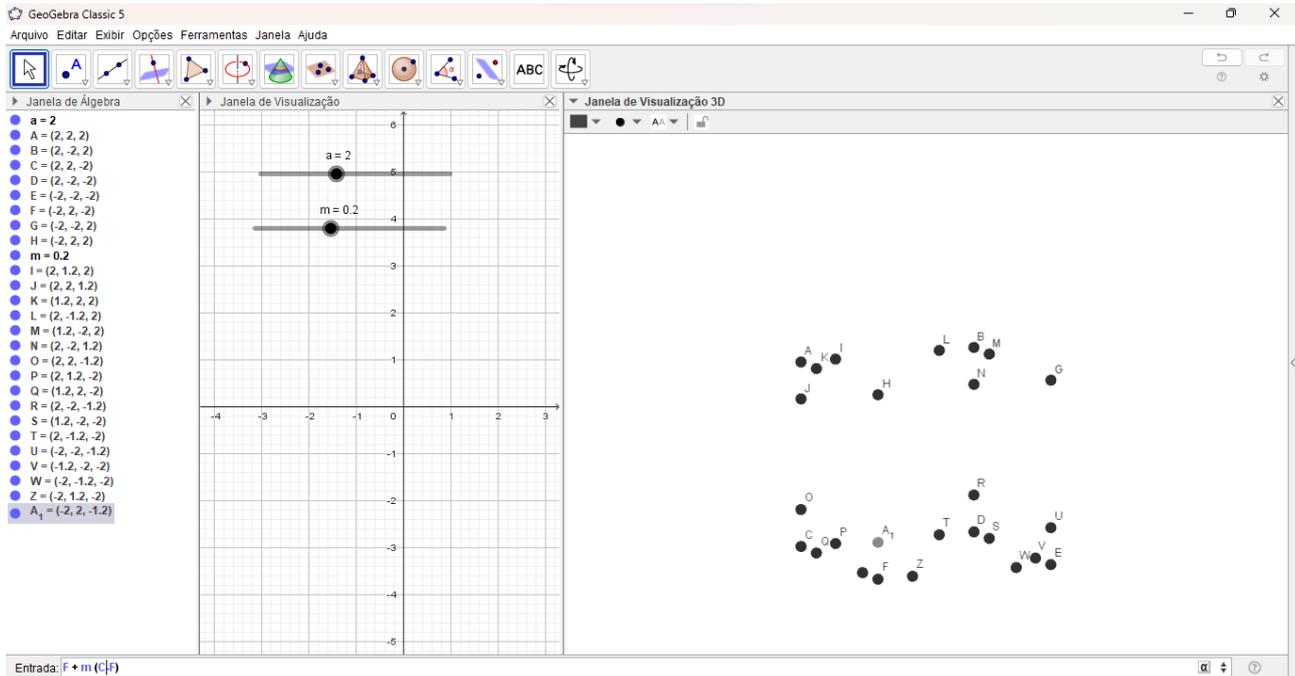
25) Na linha de entrada, digite $E + m(D - E)$.



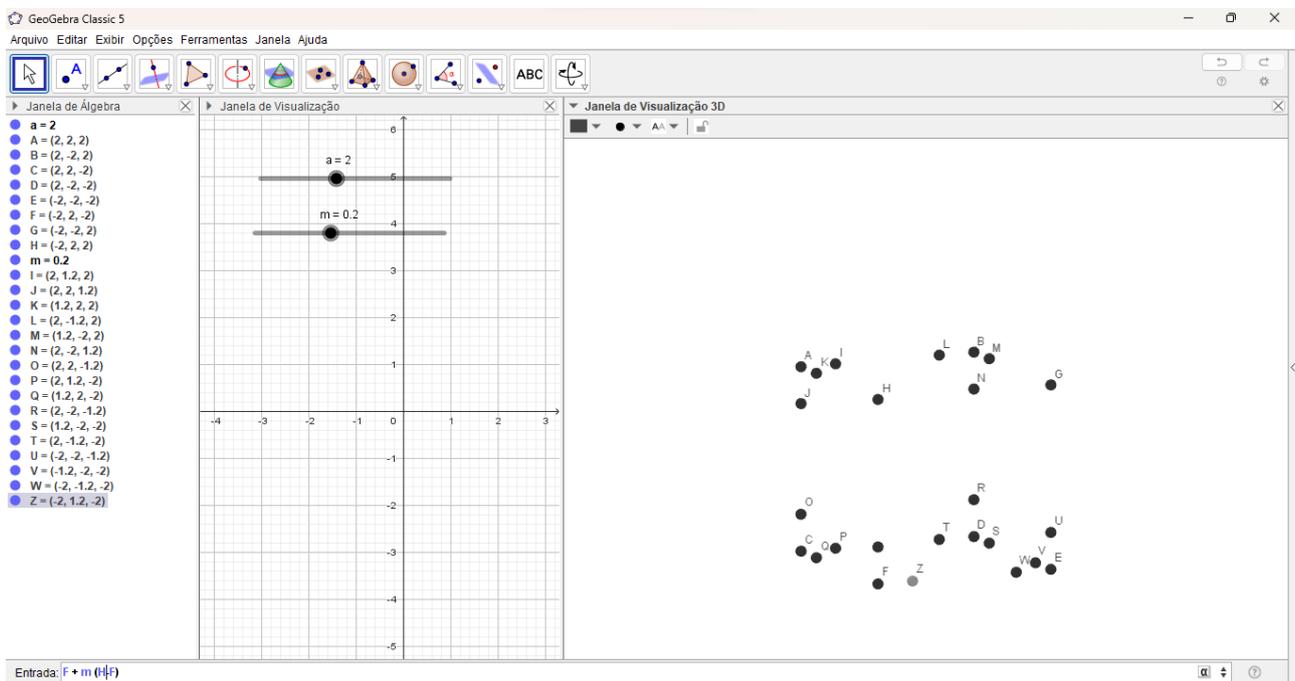
26) Repita o processo para criar os pontos $E + m(F - E)$ e $E + m(G - E)$.



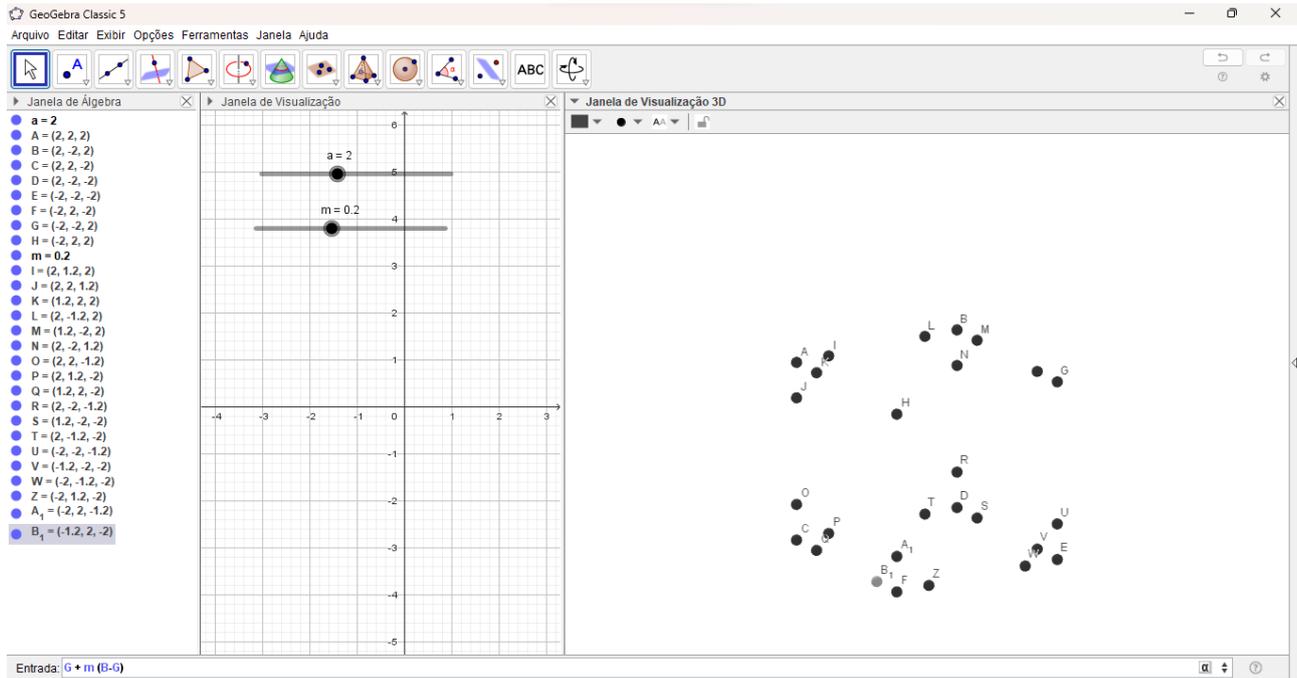
27) Na linha de entrada, digite $F + m(C - F)$.



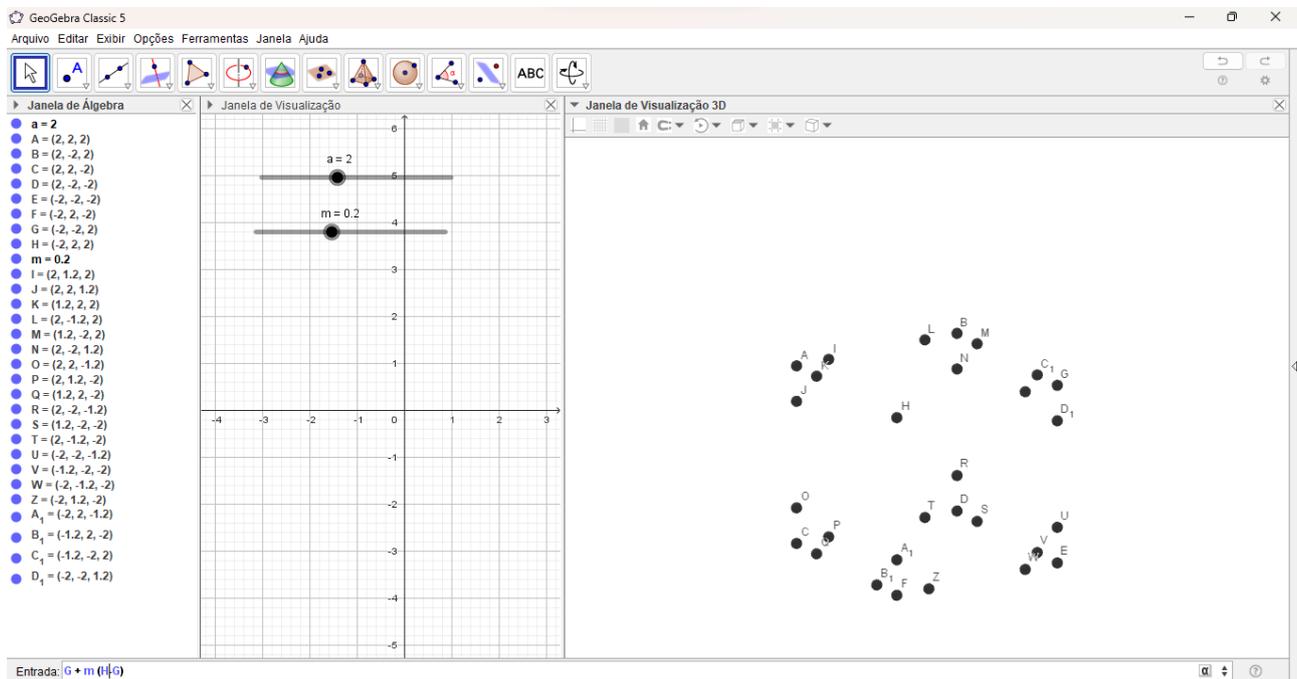
28) Repita o processo para criar os pontos $F + m(E - F)$ e $F + m(H - F)$.



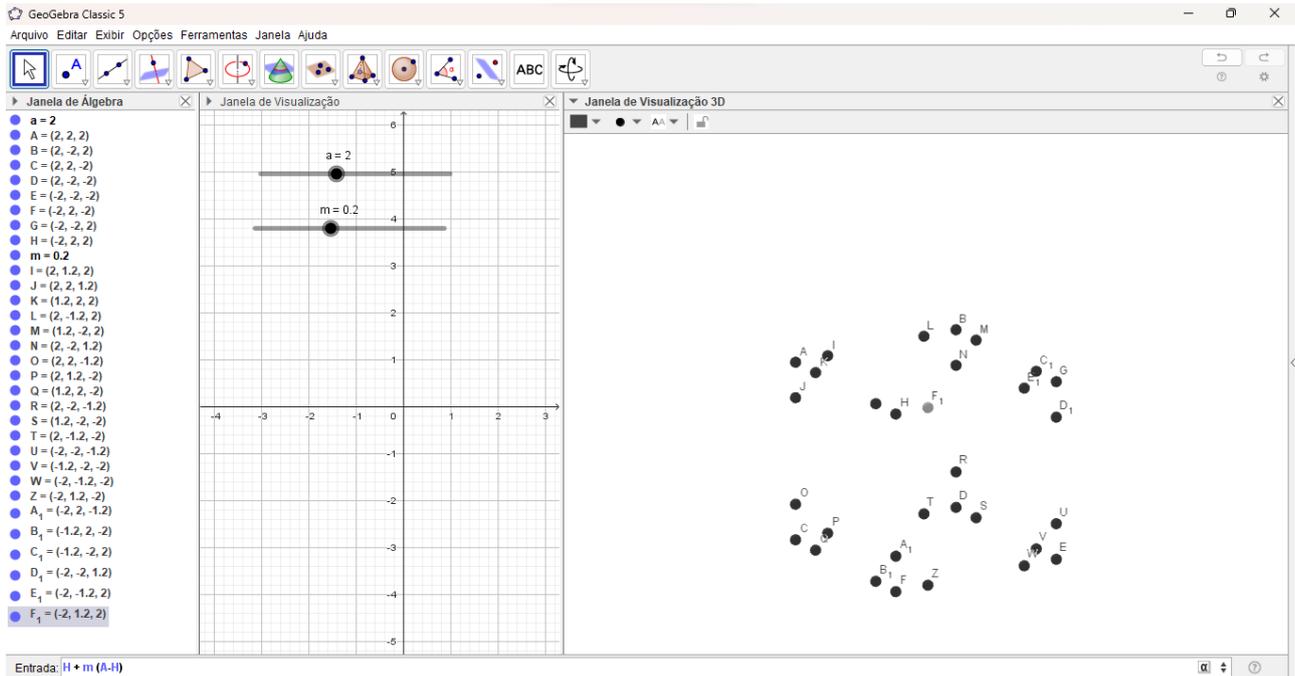
29) Na barra de entrada, digite $G + m(B - G)$.



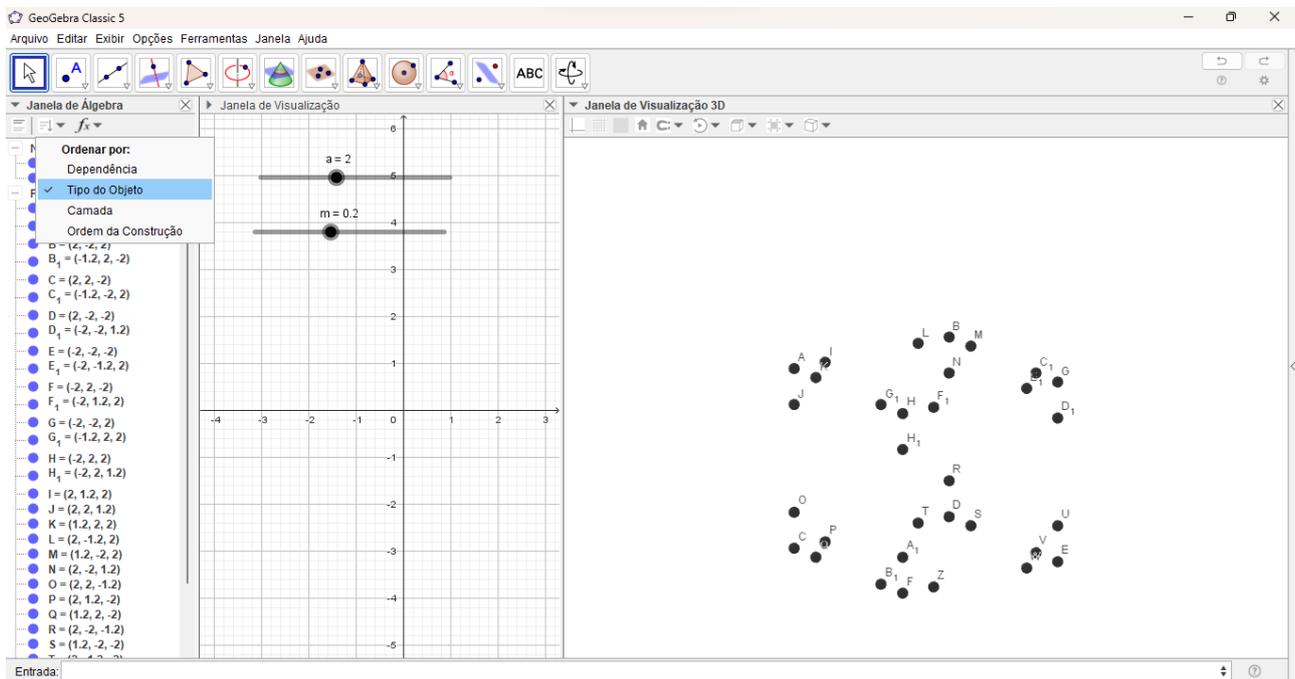
30) Repita o processo para criar os pontos $G + m(E - G)$ e $G + m(H - G)$.



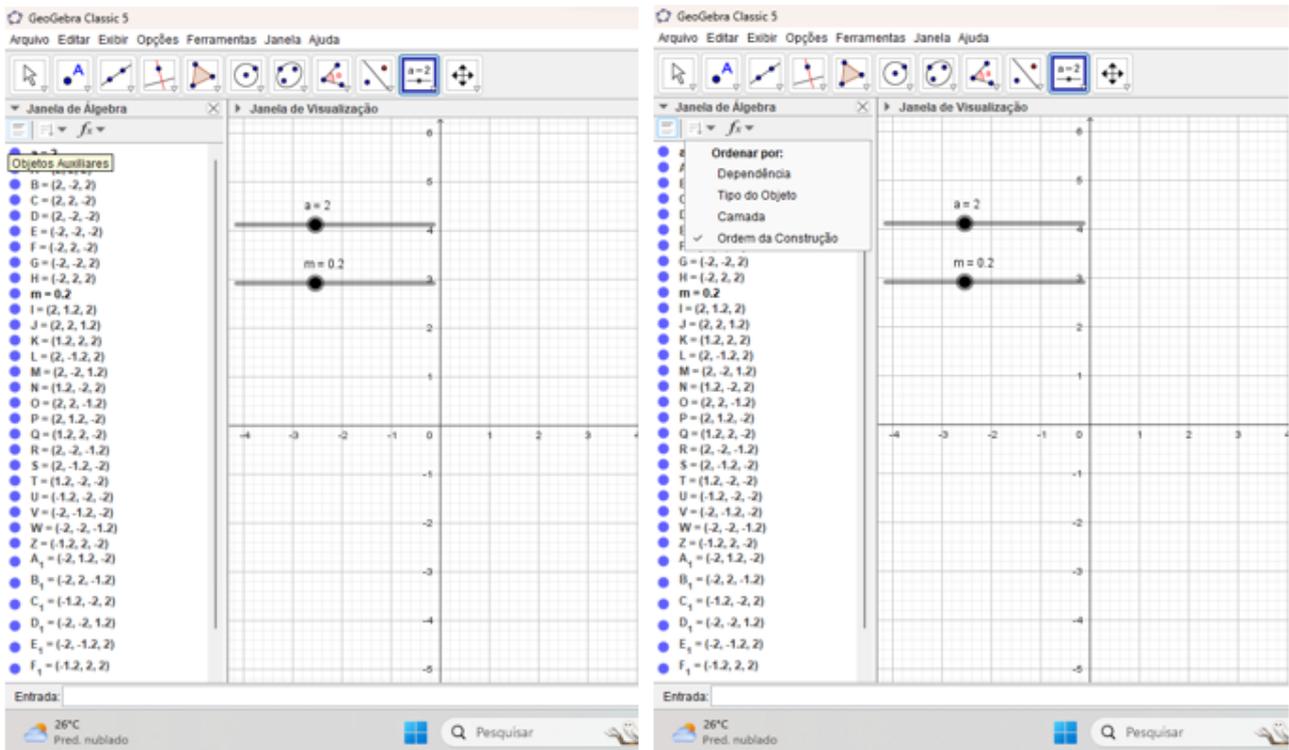
31) Na linha de entrada, digite $H + m(A - H)$.



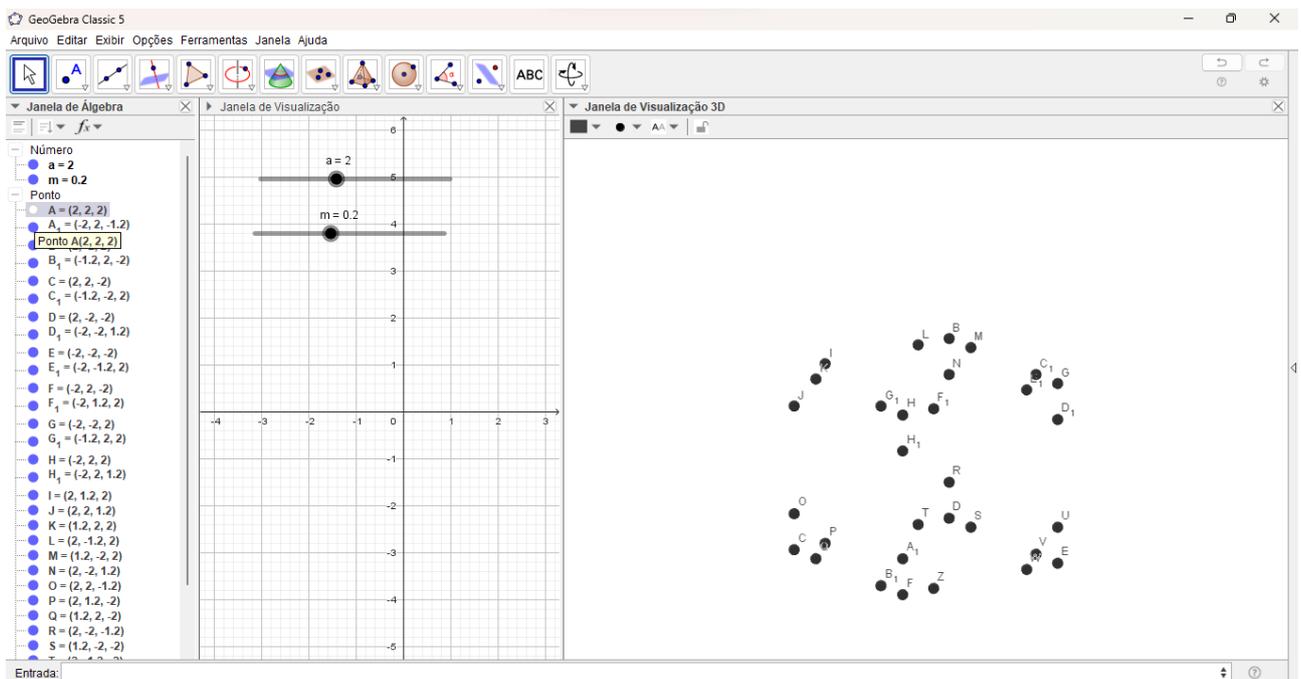
32) Repita o processo para criar os pontos $H + m(F - H)$ e $H + m(G - H)$.



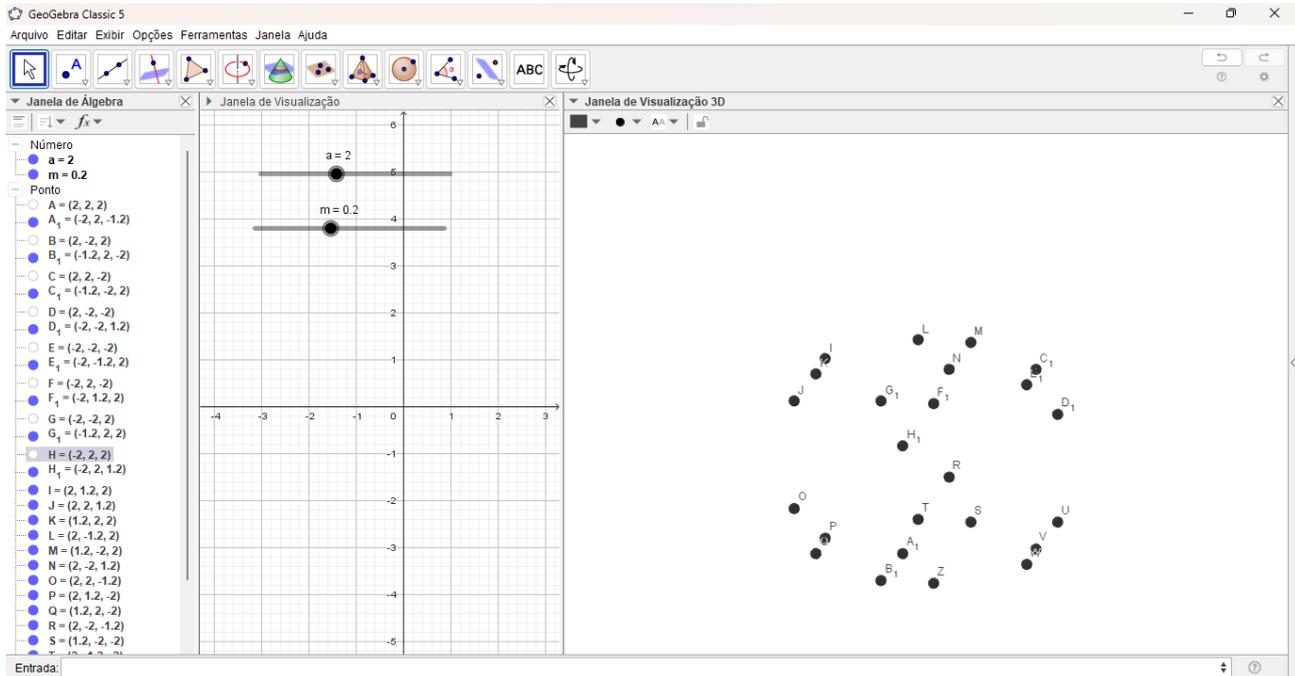
33) No menu rápido da Janela de Álgebra selecione 'Objetos Auxiliares' e depois ordene por 'Tipo de Objeto'.



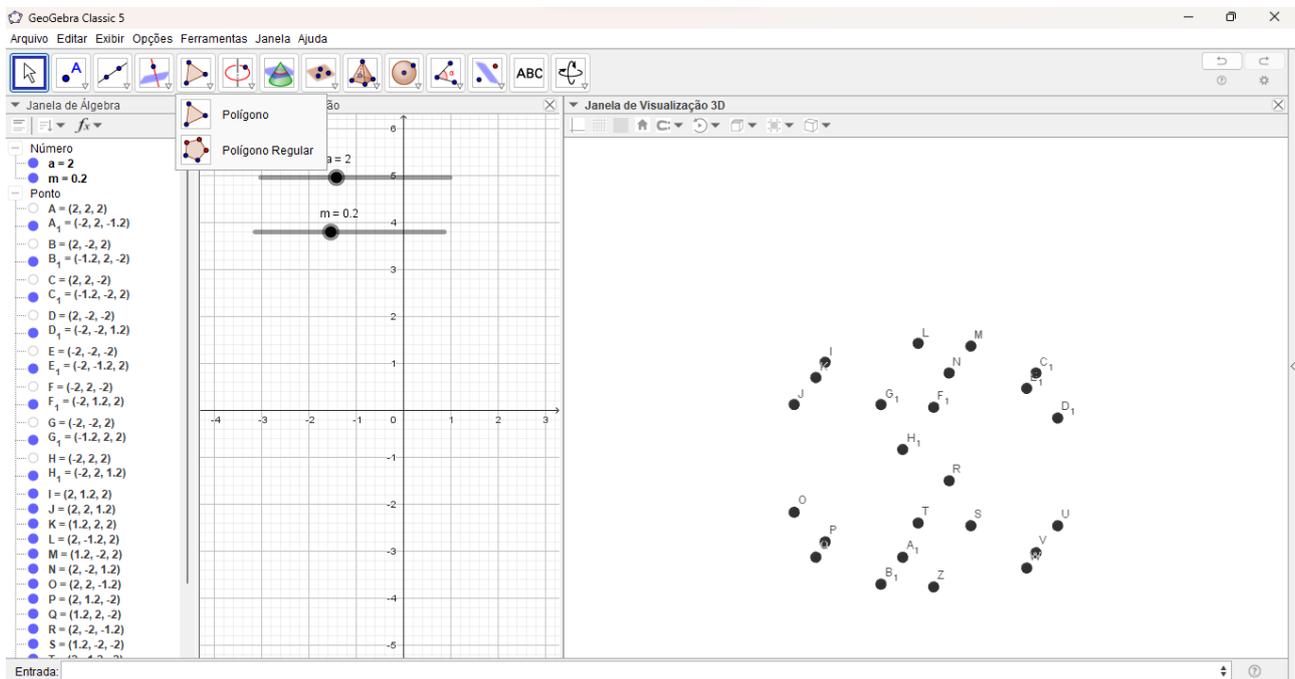
34) Na Janela de Álgebra, clique no disco azul ao lado do ponto A para ocultá-lo.



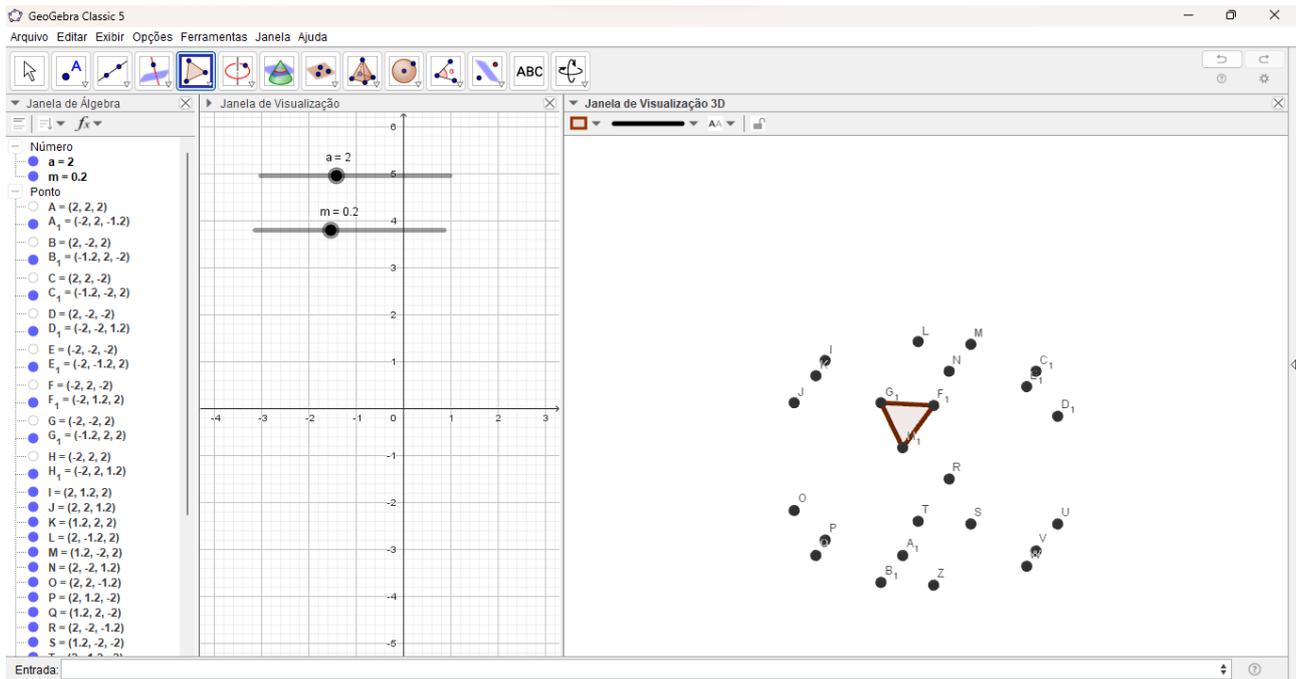
35) Repita o processo para ocultar os pontos B, C, D, E, F, G e H.



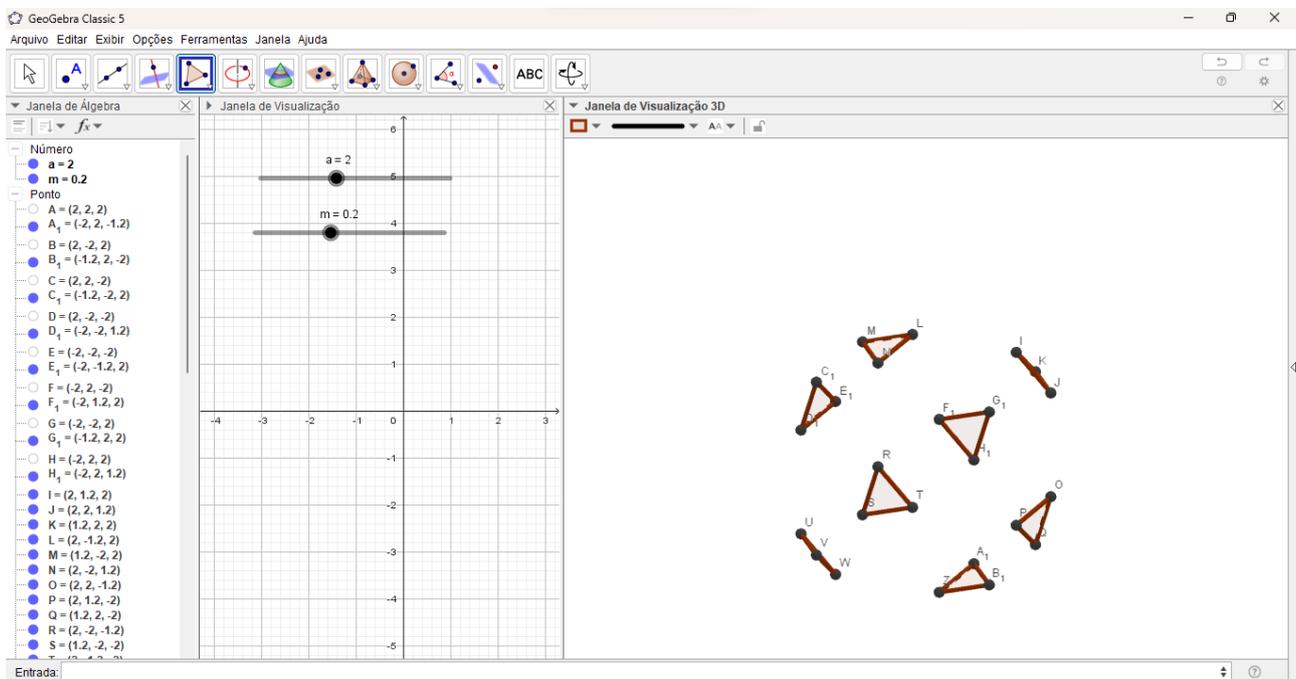
36) Na barra de ferramentas selecione a ferramenta "Polígono".



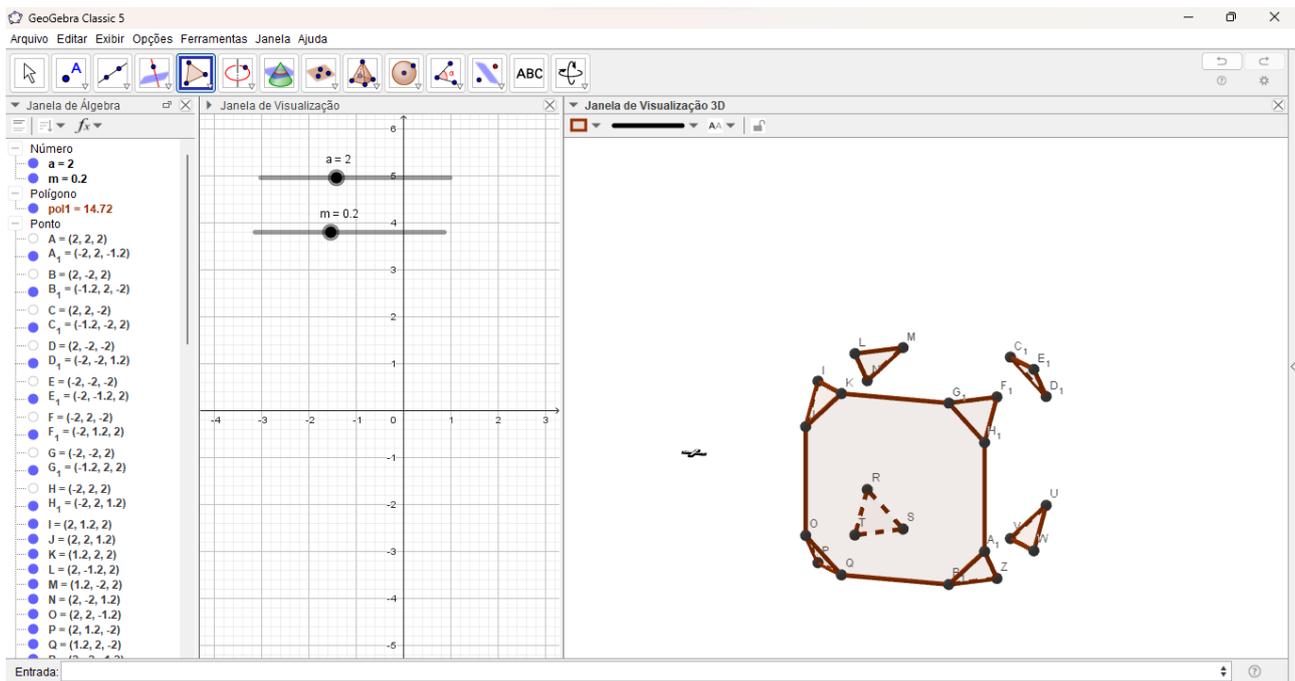
37) Com a ferramenta "Polígono" ativada, crie um triângulo para ser uma das faces truncadas do poliedro, conforme figura abaixo.



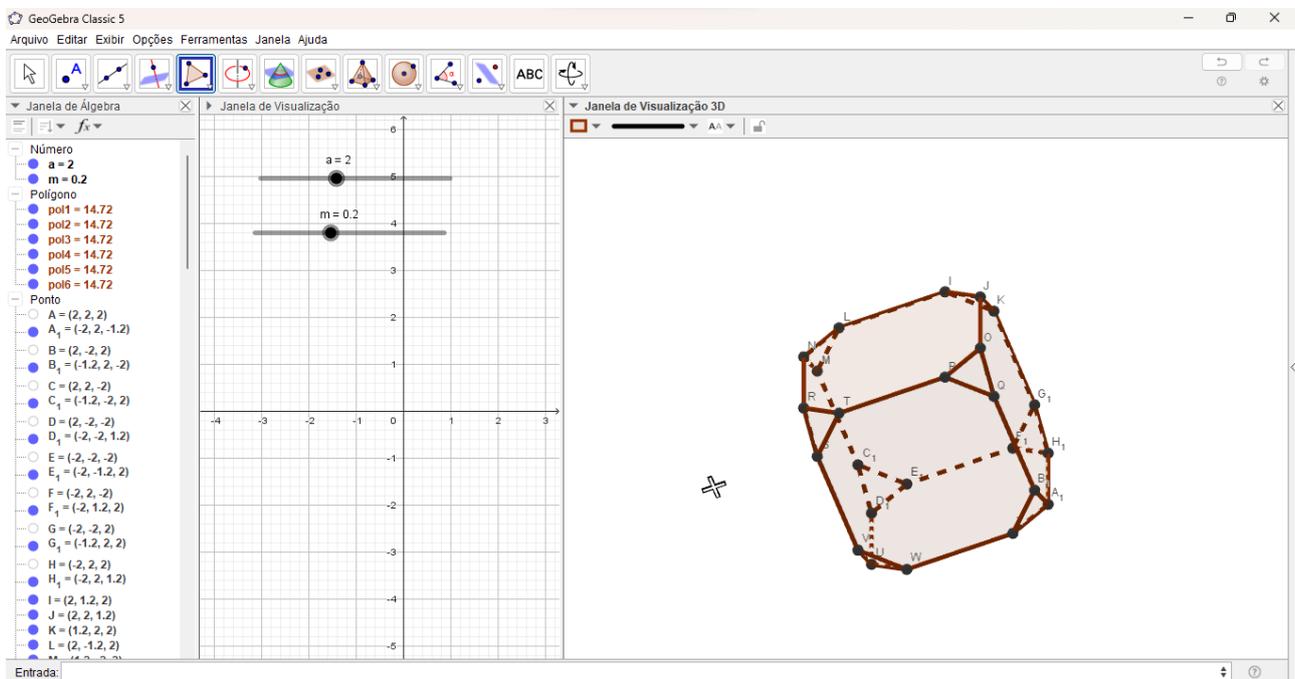
38) Repita o processo mais sete vezes para criar todas as faces triangulares que representam os truncamentos do cubo.



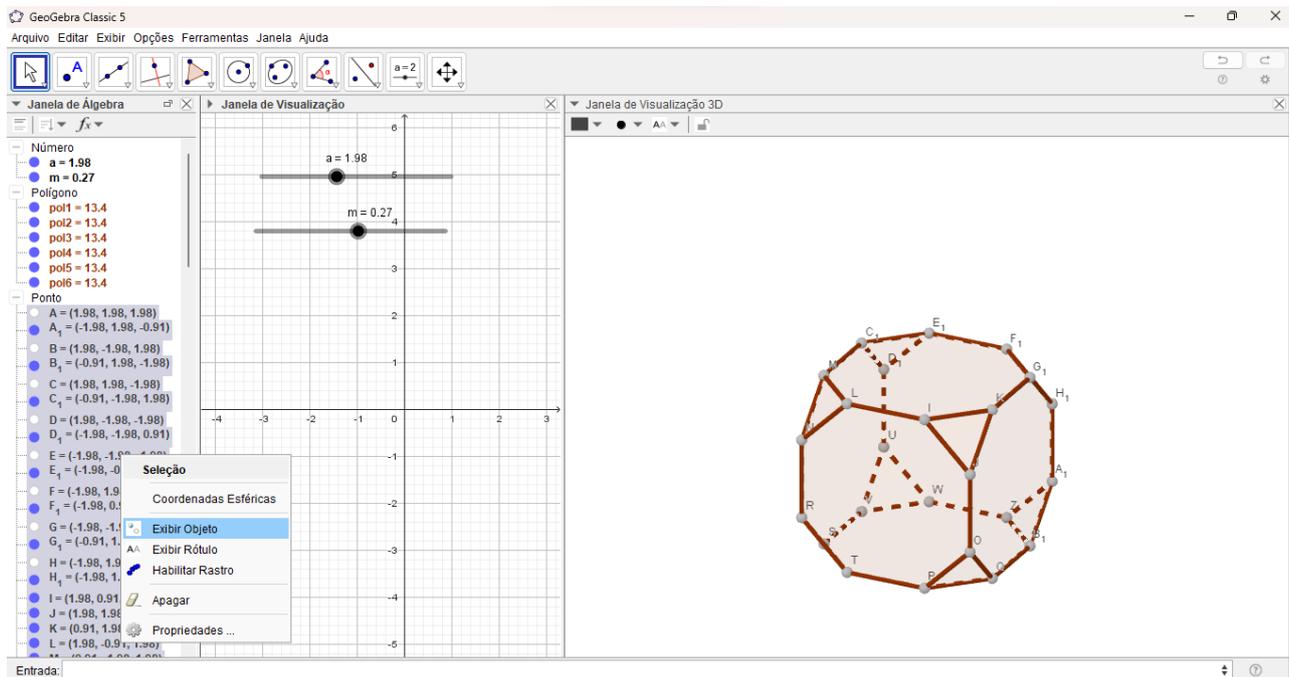
39) Com a ferramenta "Polígono" ativada, crie um octógono para ser uma das faces do poliedro, conforme figura abaixo.



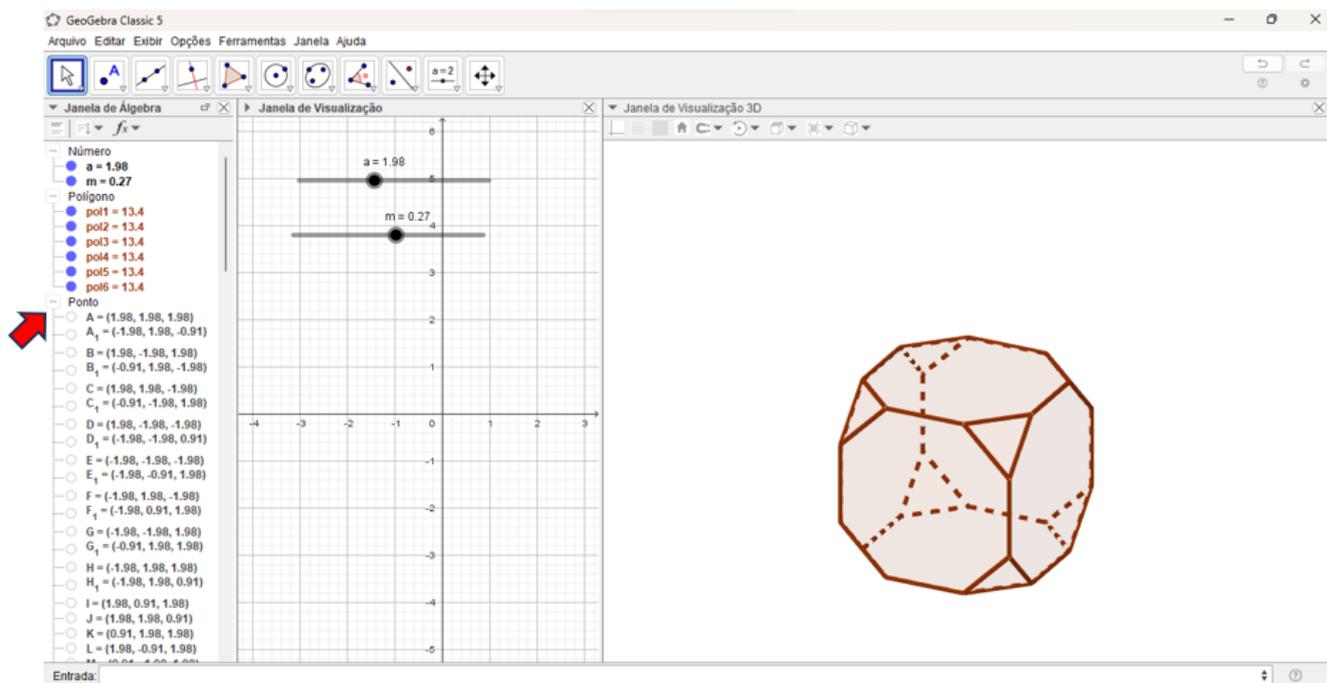
40) Repita o processo mais cinco vezes para criar todas as faces octogonais do poliedro.



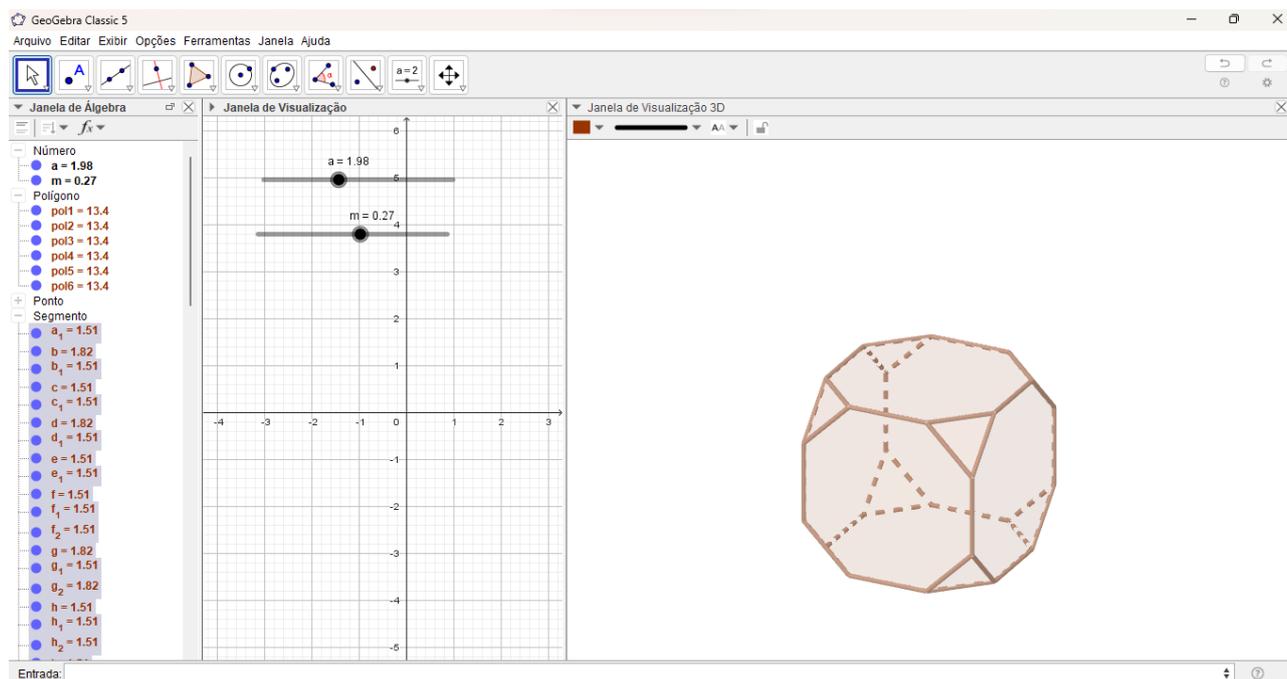
41) Na Janela de Álgebra, clique na palavra "Ponto" (para selecionar todos os pontos); aperte o botão direito do mouse e selecione a opção "Exibir Objeto" duas vezes para que todos os pontos sejam ocultados.



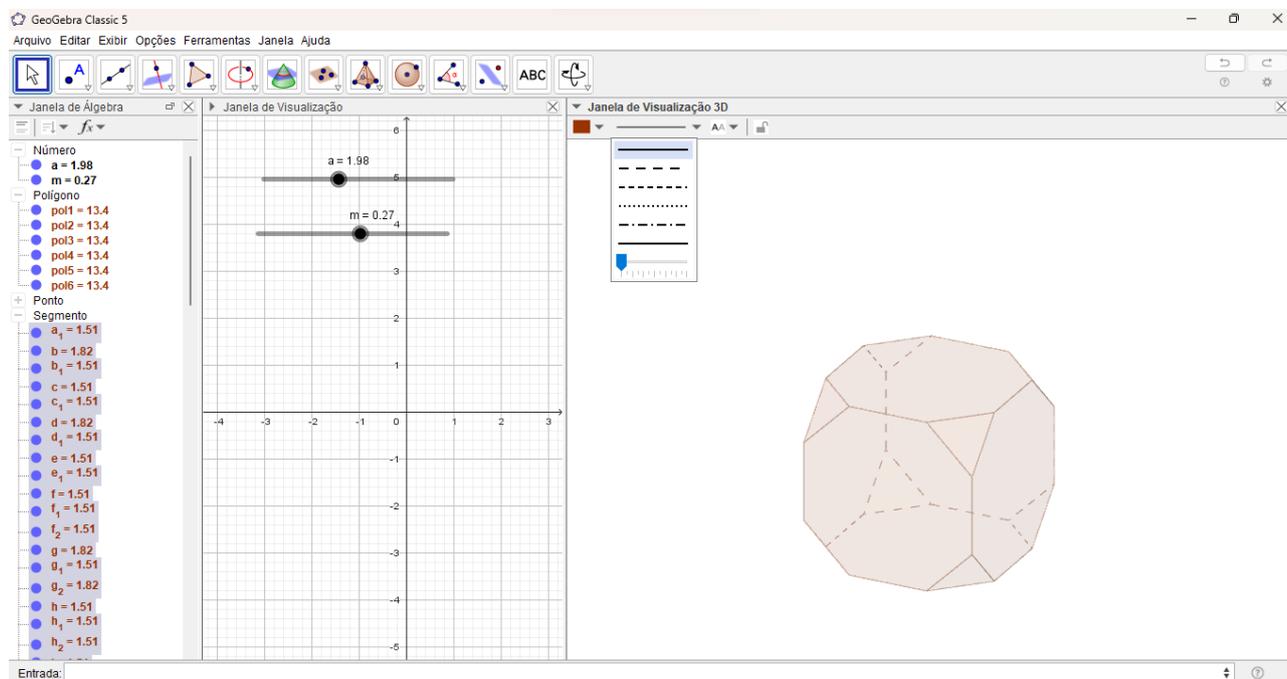
42) Clique no 'sinal de menos', —, situado na frente da palavra "Ponto" na Janela de Álgebra e indicado na figura abaixo, para recolher todos pontos na Janela de Álgebra.



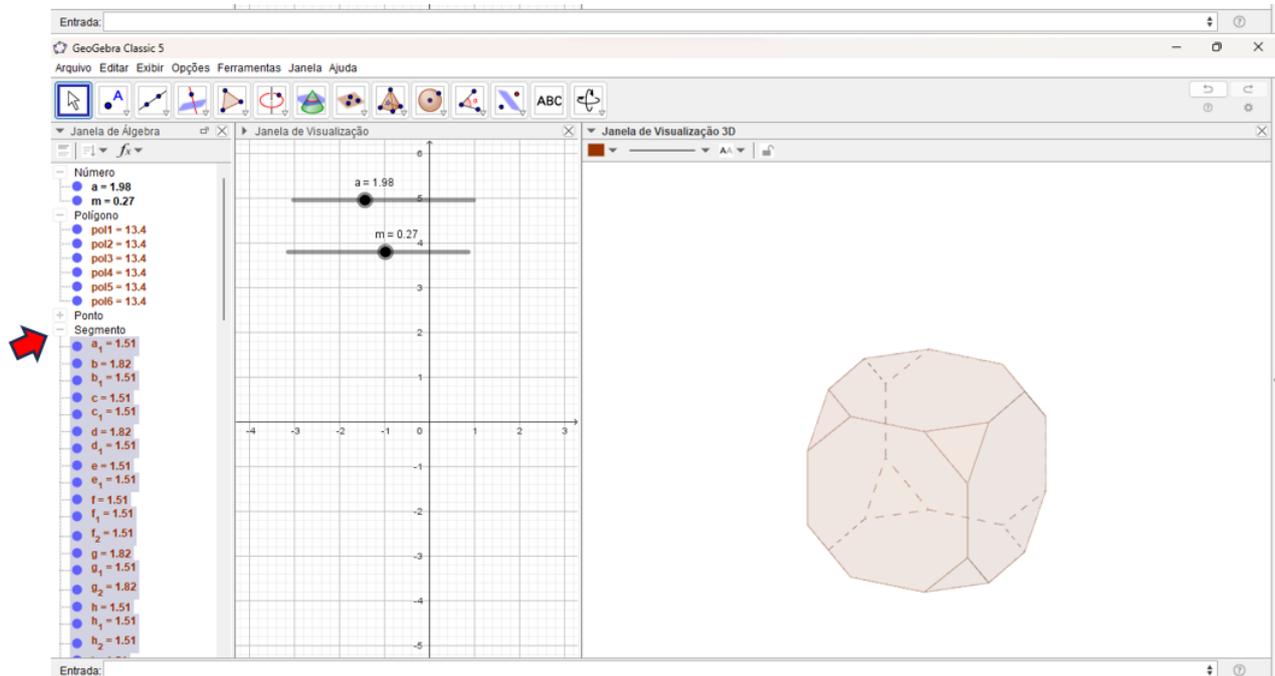
43) Na Janela de Álgebra, clique na palavra "Segmento"(para que todos os segmentos sejam selecionados).



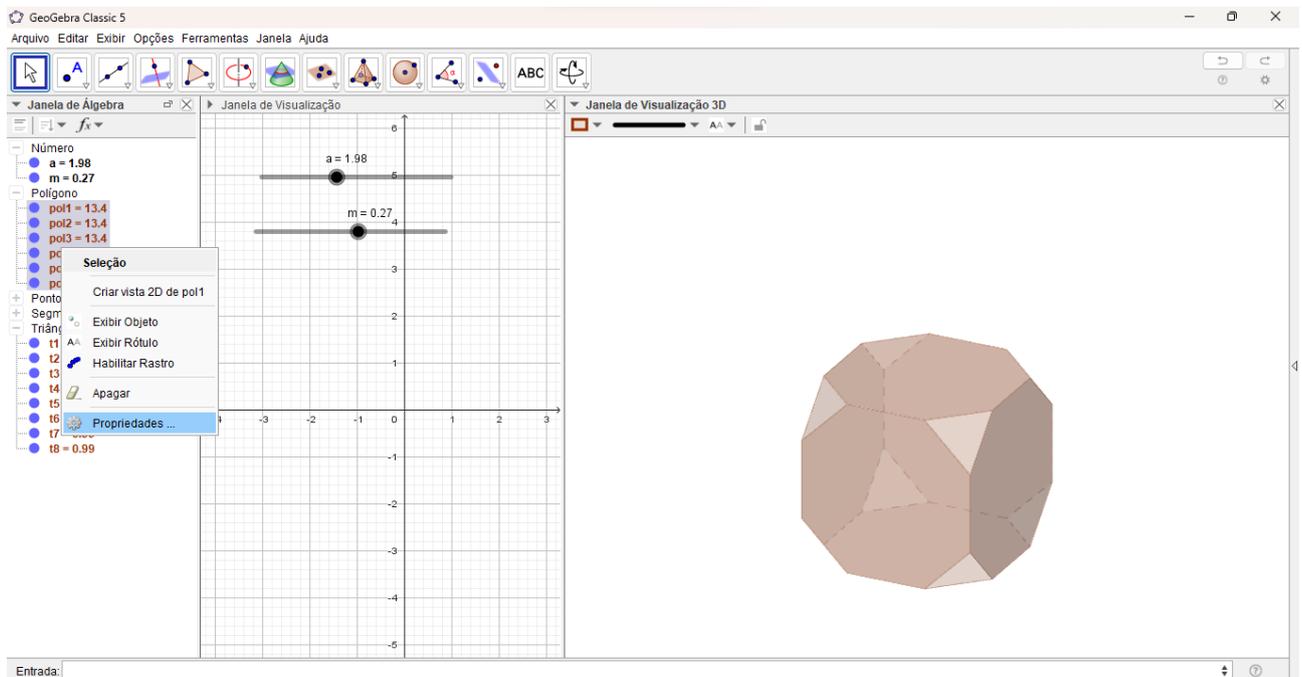
44) No menu rápido da Janela de Visualização 3D, clique no submenu de estilo de linha e arraste a barra seletora para a esquerda, para obter menor espessura dos segmentos.



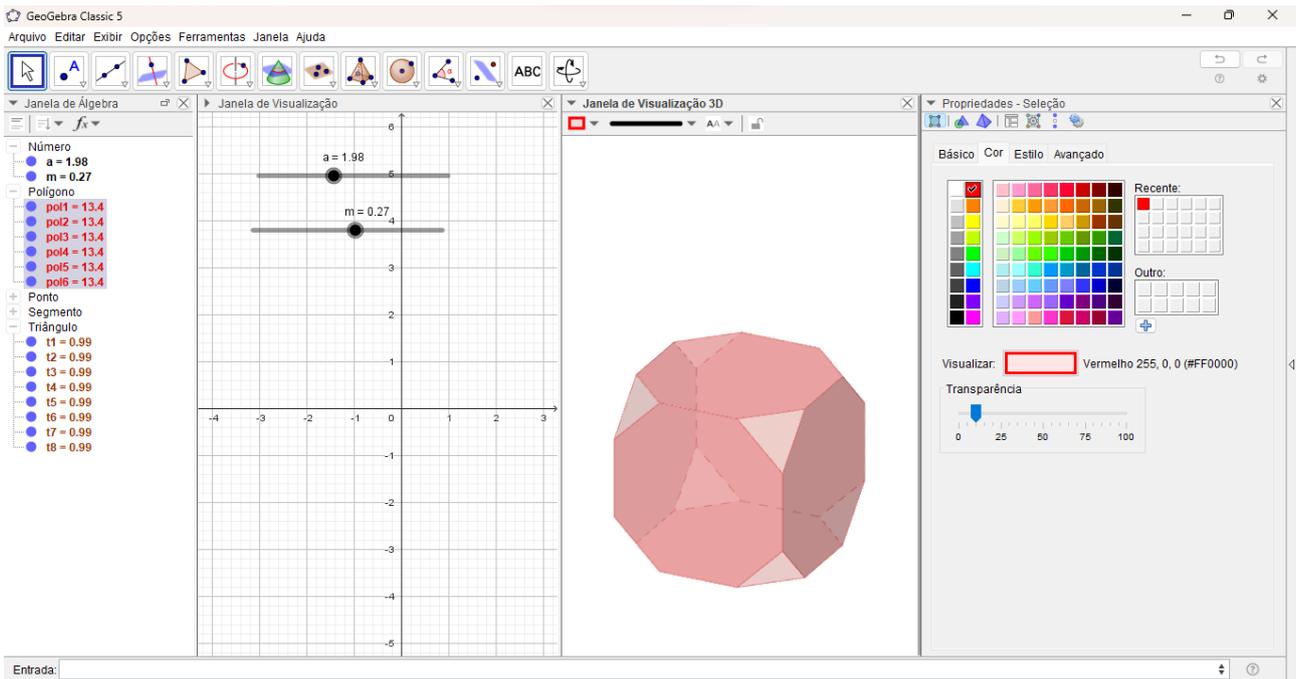
45) Clique no 'sinal de menos', —, situado na frente da palavra "Segmento" na Janela de Álgebra e indicado na figura abaixo, para recolher todos segmentos na Janela de Álgebra.



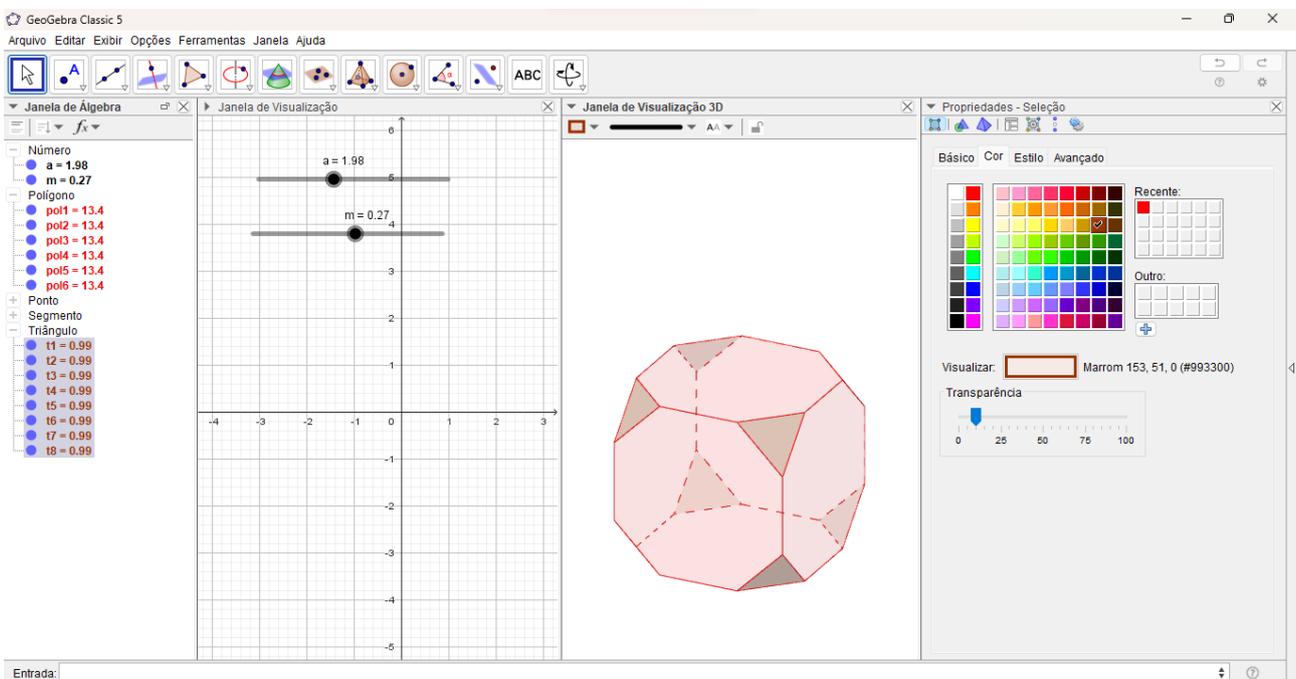
46) Na Janela de Álgebra, clique na palavra "Polígono" (para selecionar todos os polígonos), aperte o botão direito do mouse e selecione a opção "Propriedades".



47) Na Janela de Propriedades, clique na aba "Cor" e, em seguida, escolha a cor que deseja para os polígonos.



48) Com a Janela de Propriedades ainda aberta, clique na palavra "Triângulo" na Janela de Álgebra (para que todos eles fiquem selecionados).



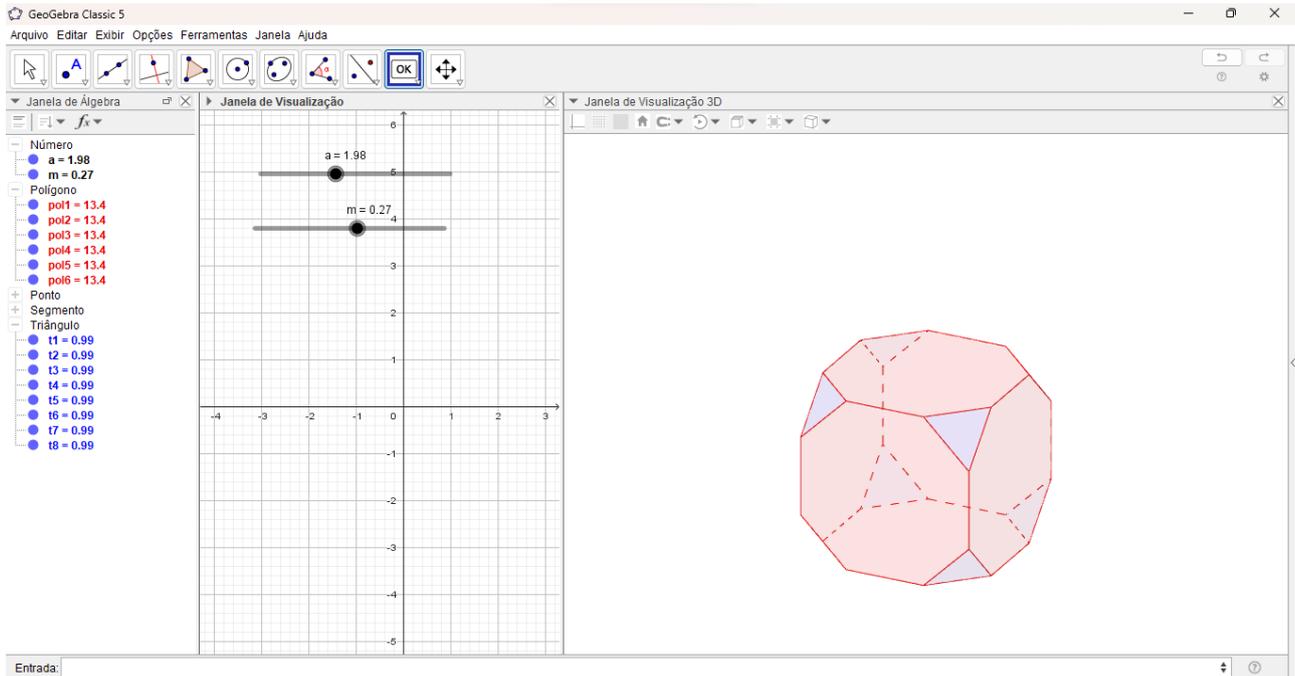
49) Escolha a cor que deseja para as faces triangulares do poliedro.

The screenshot shows the GeoGebra Classic 5 interface. On the left, the 'Janela de Visualização' (2D View) displays a coordinate system with two horizontal segments. The top segment is at $y = 5$ with a point labeled $a = 1.98$. The bottom segment is at $y = 4$ with a point labeled $m = 0.27$. The 'Janela de Visualização 3D' (3D View) shows a polyhedron with red faces and blue triangular faces. The 'Propriedades - Seleção' (Properties - Selection) panel on the right is open to the 'Cor' (Color) tab, showing a color palette and a 'Visualizar' (View) dropdown set to 'Azul 0, 0, 255 (#0000FF)'. A transparency slider is also visible.

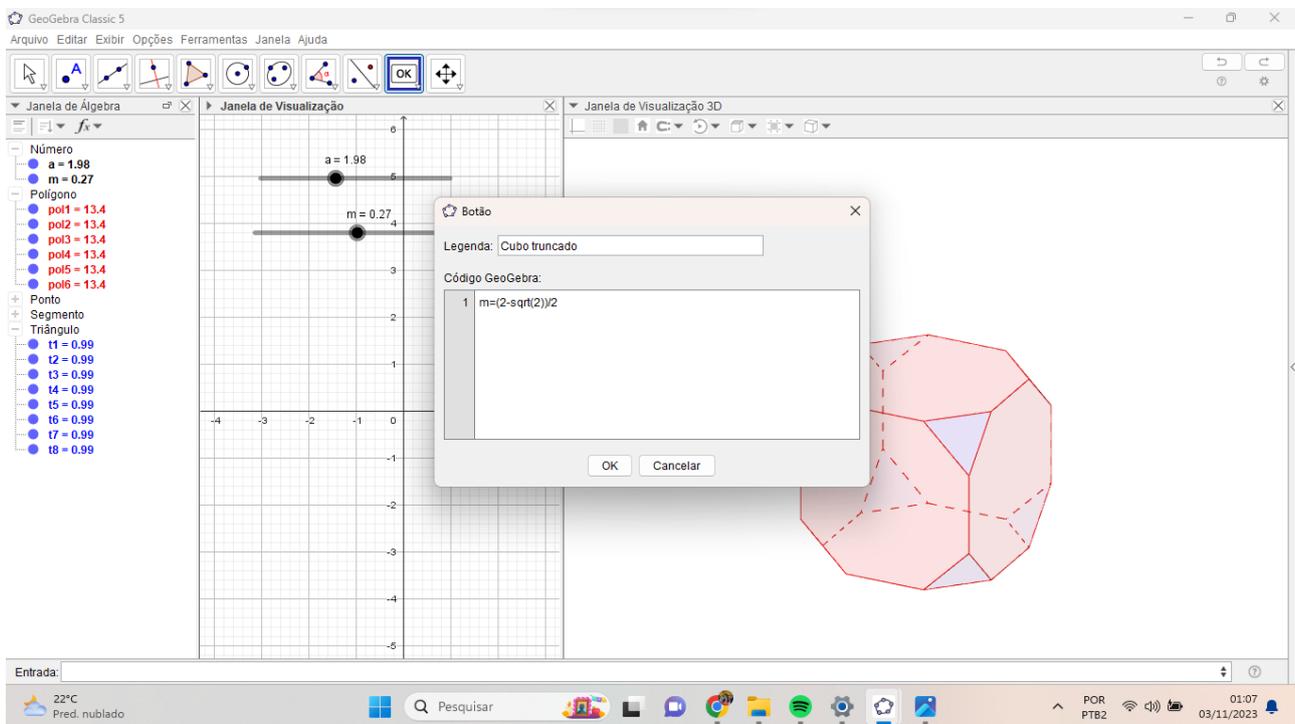
50) Clique na Janela de Visualização 2D e, na barra de ferramentas, selecione a ferramenta "Botão".

The screenshot shows the GeoGebra Classic 5 interface with the 'Botão' (Button) tool selected in the toolbar. The 'Janela de Visualização' (2D View) shows the same coordinate system as in the previous screenshot. The 'Propriedades - Seleção' (Properties - Selection) panel is open to the 'Controle Deslizante' (Slider Control) tab, showing a slider for $a = 2$ and a checkbox for 'Caixa para Exibir / Esconder Objetos' (Box to Show / Hide Objects) which is checked. The 'Visualização 3D' (3D View) shows the same polyhedron as in the previous screenshot.

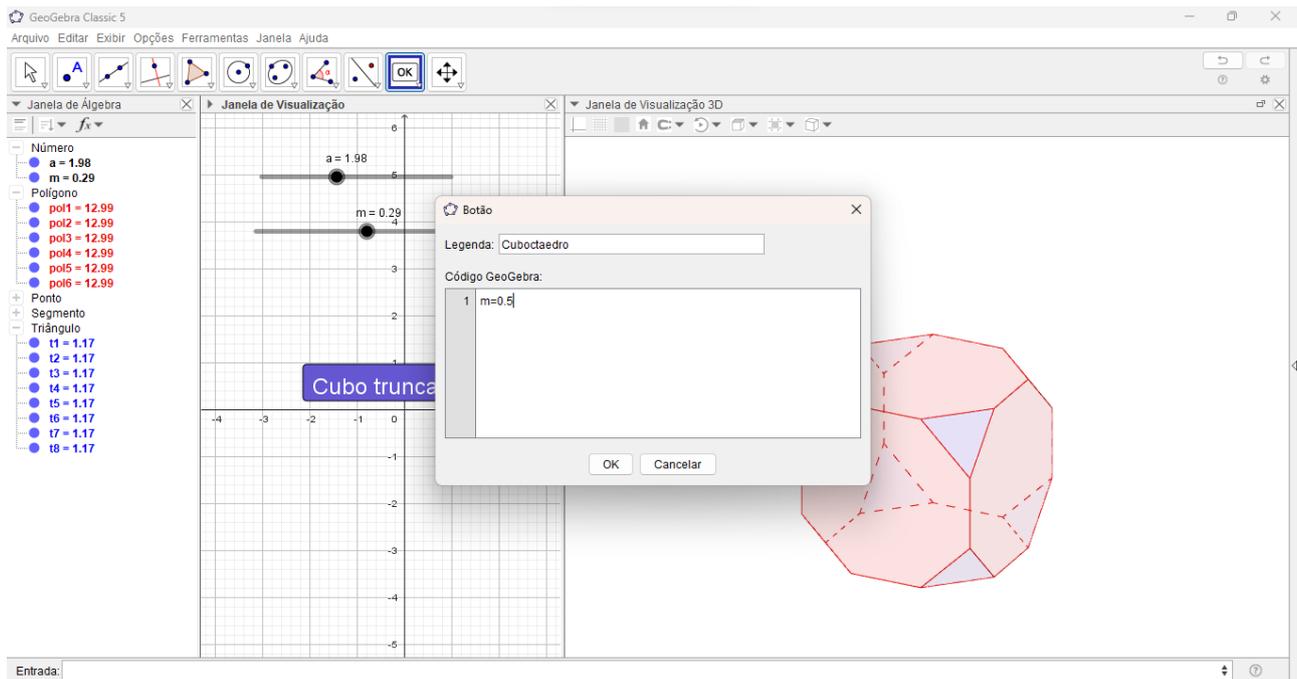
51) Clique em um lugar qualquer na Janela de Visualização 2D com a ferramenta "Botão" ativada.



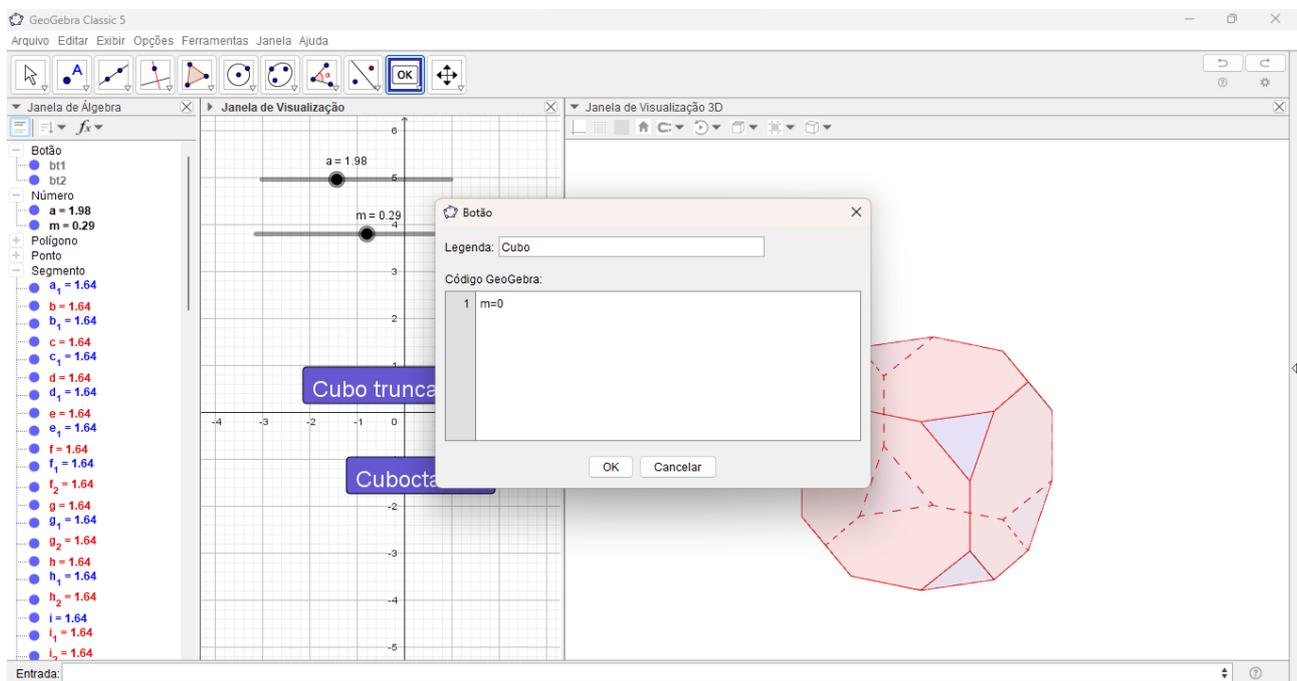
52) Complete a caixa de diálogo que aparecerá com as seguintes informações: Legenda "Cubo Truncado" e Código GeoGebra " $m = (2 - \sqrt{2})/2$ ". Depois clique em OK.



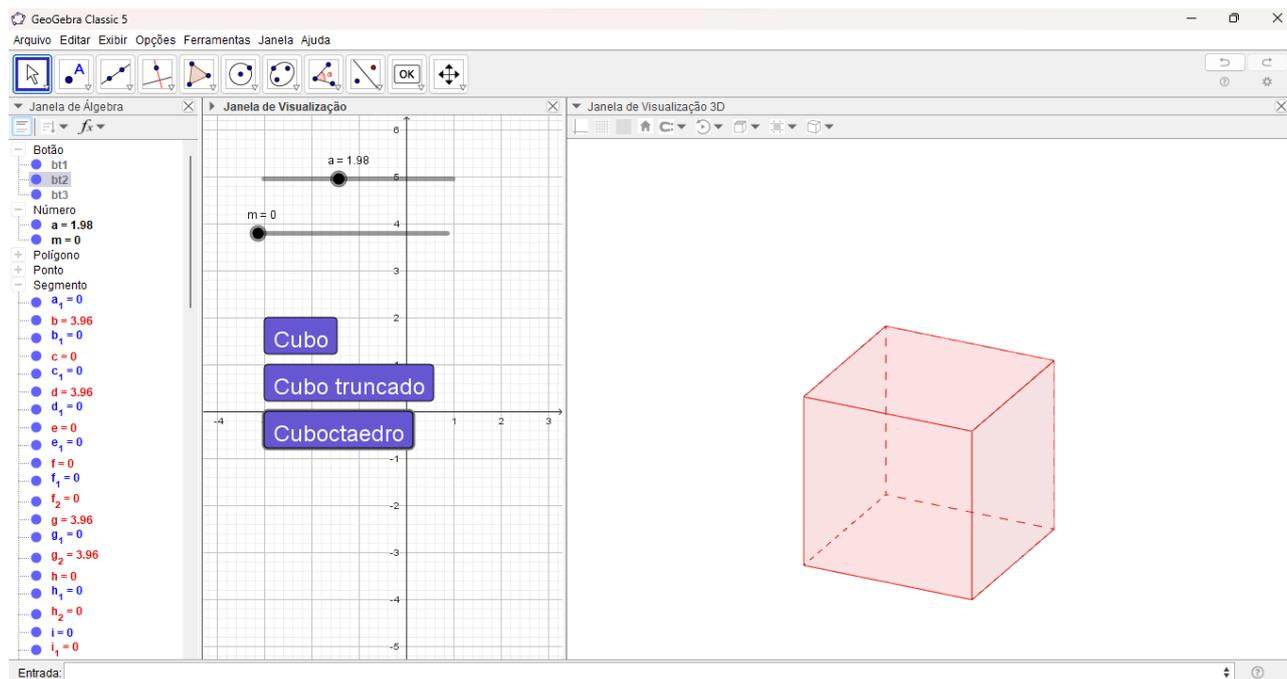
53) Repita o processo anterior para criar o botão do cuboctaedro, com " $m=0.5$ " no código.



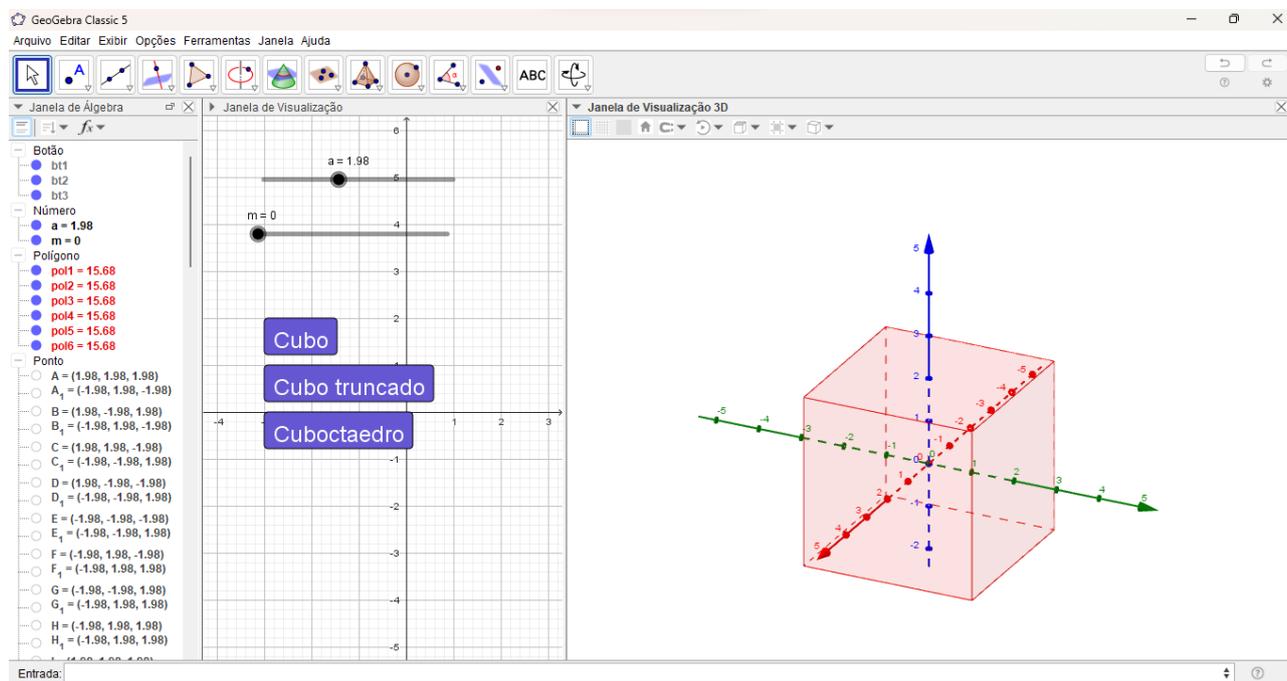
54) Faça o mesmo para criar o botão do cubo, com " $m=0$ " no código.



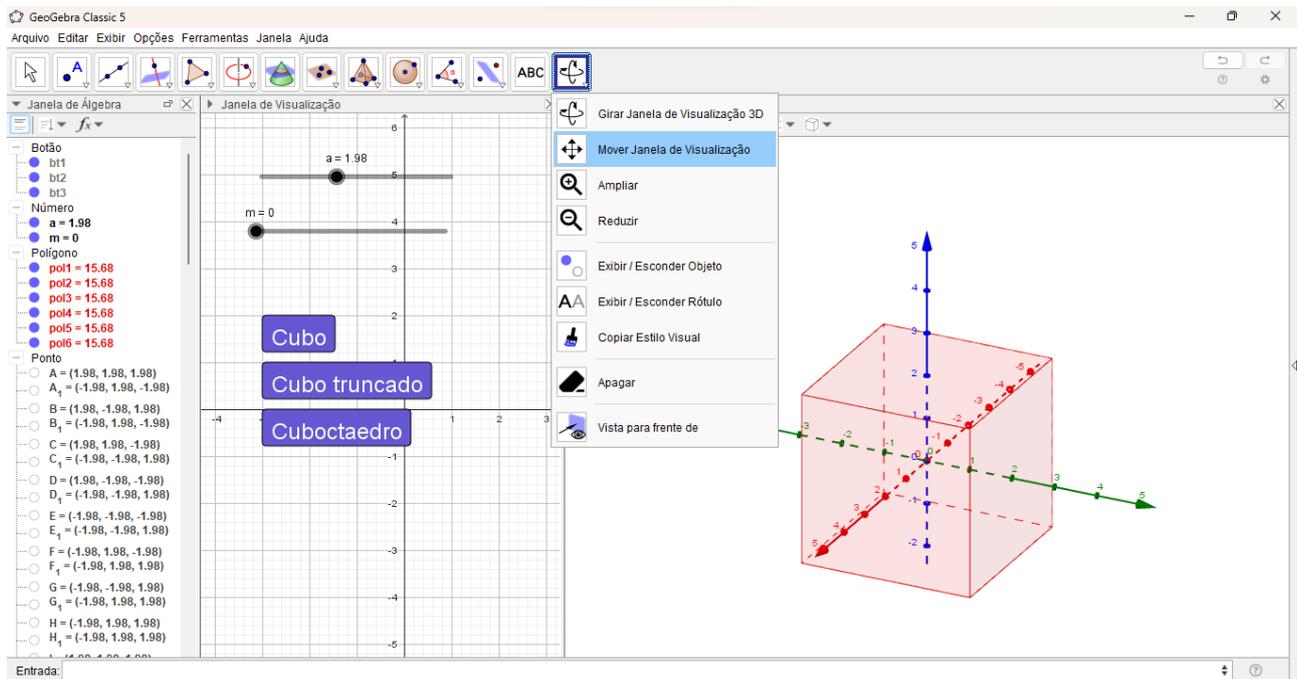
55) Posicione os botões na Janela de Visualização 2D da maneira que desejar.



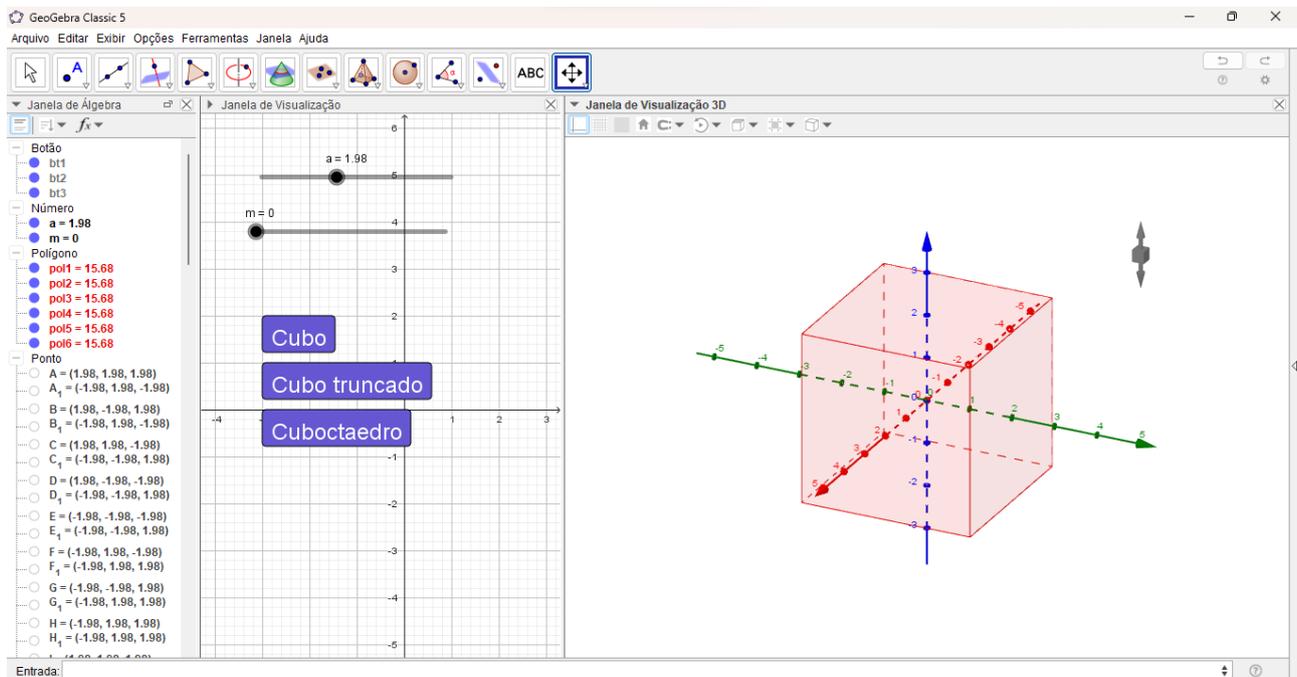
56) No menu rápido da Janela de Visualização 3D, clique em "Exibir Eixos".



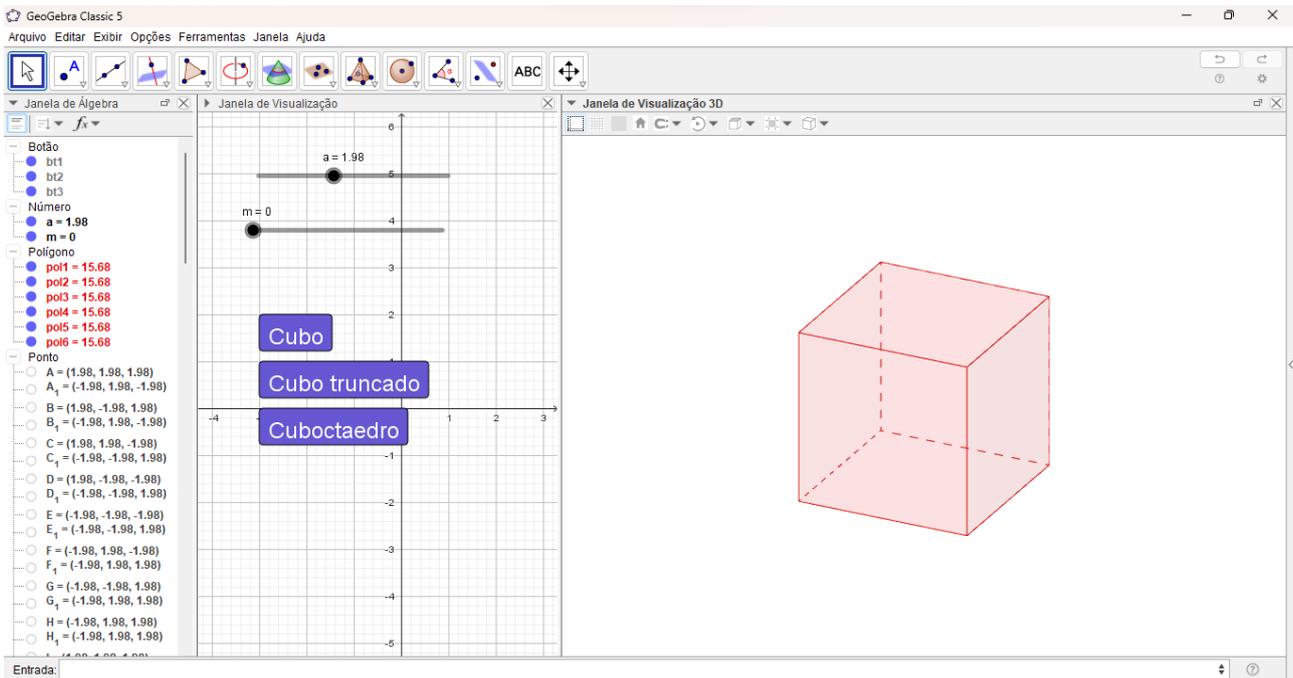
57) Na barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D, selecione a ferramenta "Mover Janela de Visualização".



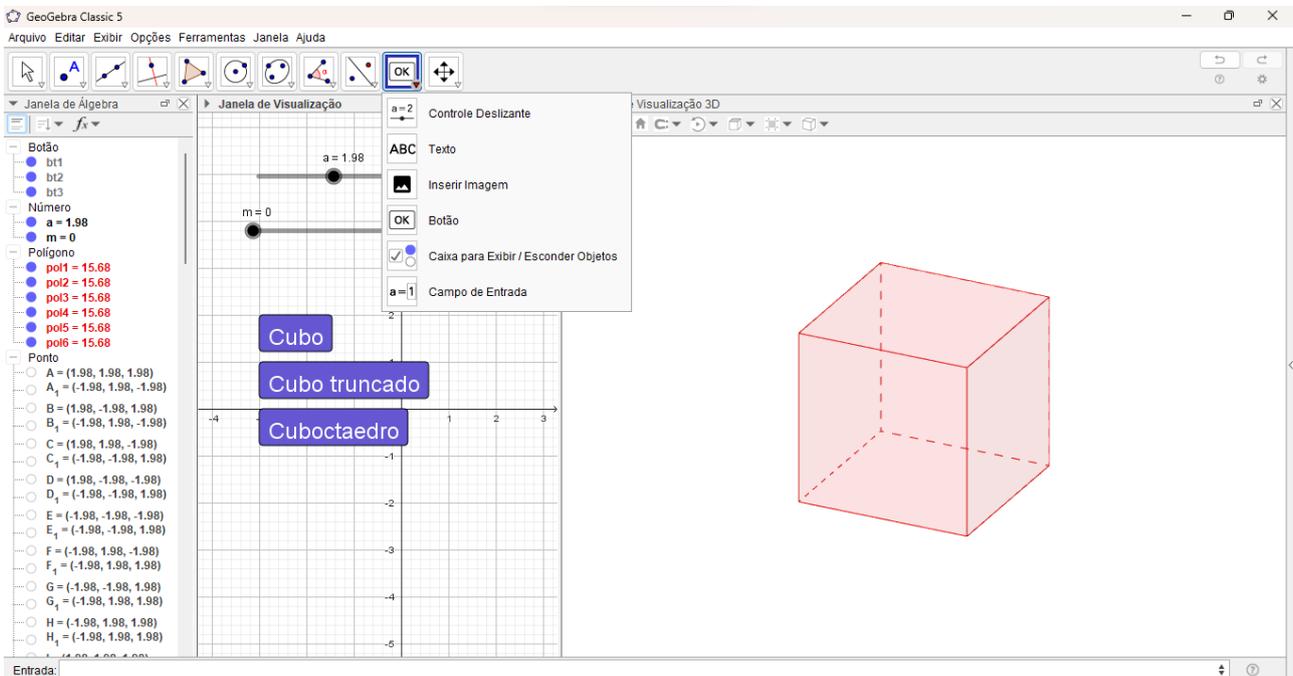
58) Quando o mouse aparentar como na figura abaixo (com uma seta dupla na vertical), clique com o botão esquerdo do mouse e arraste o sistema de coordenadas para cima, de tal modo a centralizar o poliedro.



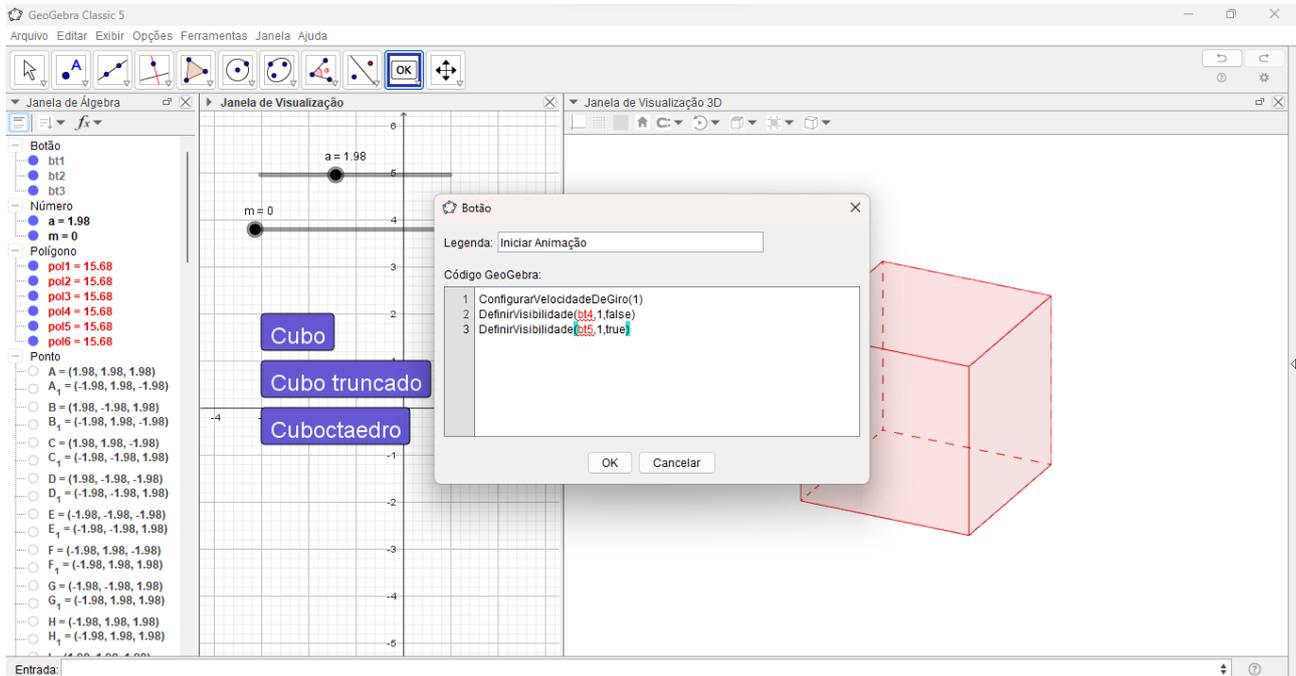
59) No menu da Janela de Visualização 3D, clique em "Exibir Eixos" novamente para escondê-los.



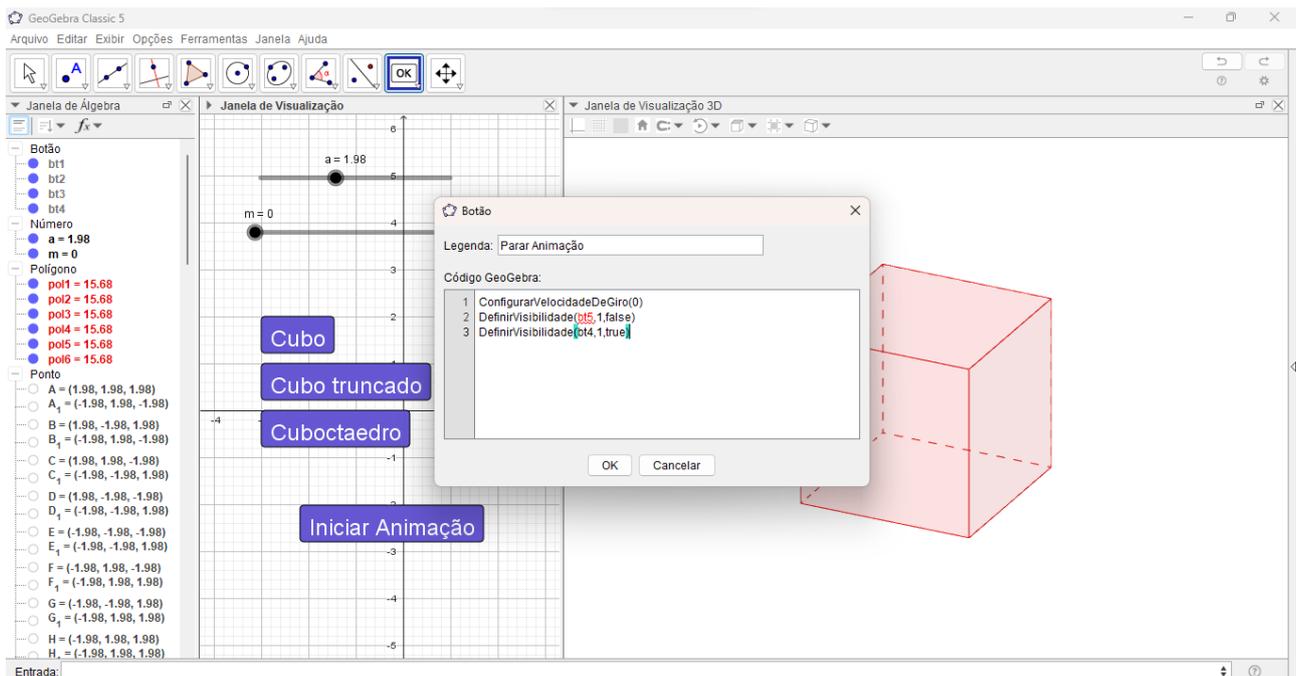
60) Na barra de ferramentas da Janela de Visualização 2D, selecione novamente a ferramenta "Botão".



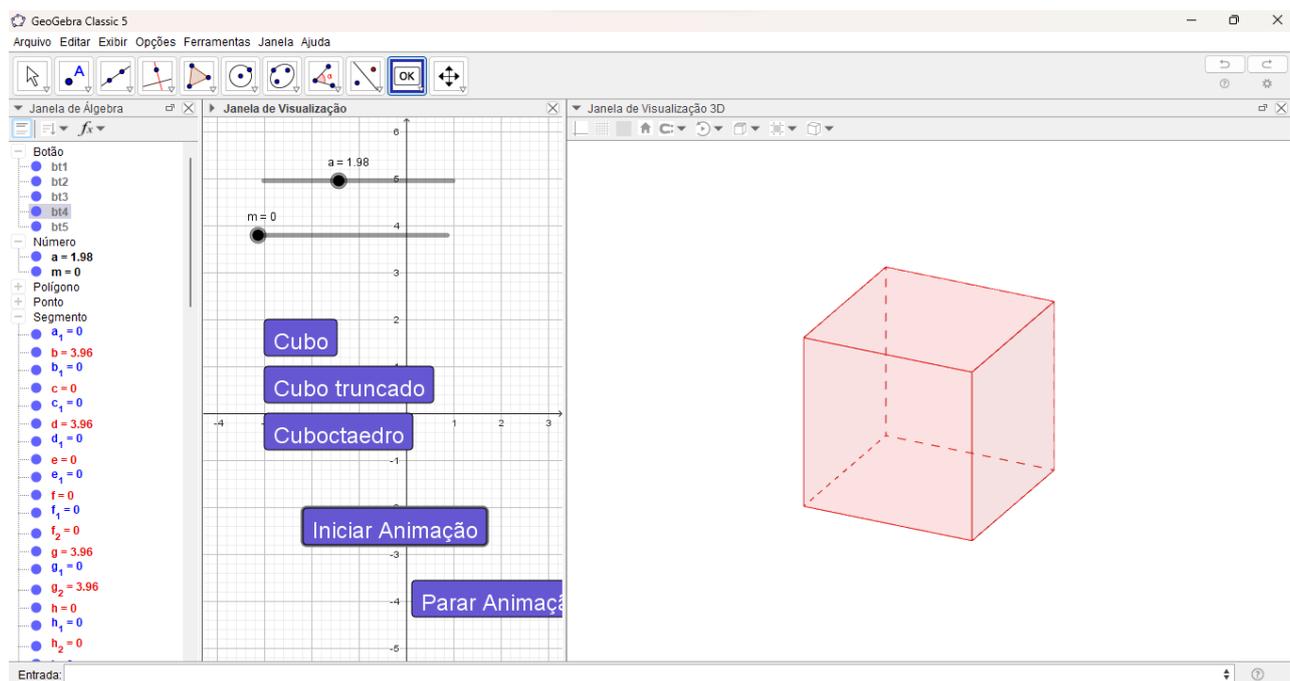
61) Complete a caixa de diálogo que aparecerá com as seguintes informações: Legenda "Iniciar Animação" e Código GeoGebra "ConfigurarVelocidadeDeGiro(1)", "DefinirVisibilidade(bt4,1,false)", "DefinirVisibilidade(bt5,1,true)".



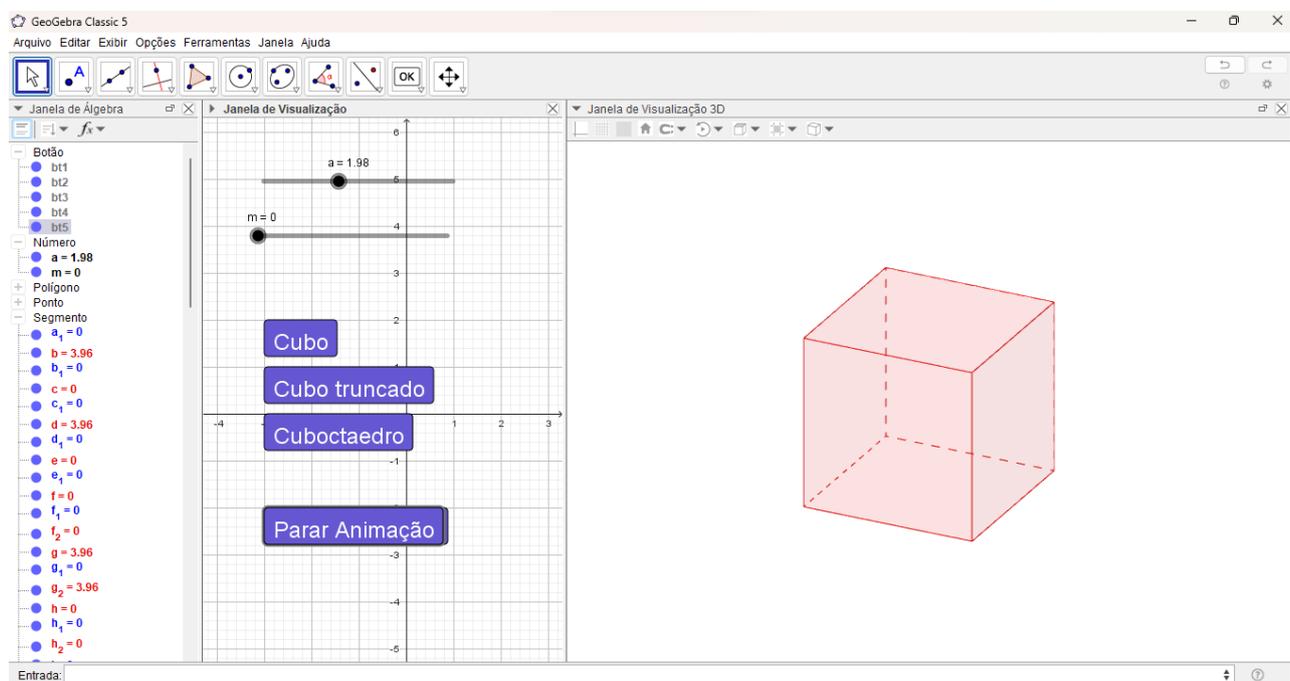
62) Repita o processo para criar o botão para parar a animação. Complete a caixa de diálogo que aparecerá com as seguintes informações: Legenda "Parar Animação" e Código GeoGebra "ConfigurarVelocidadeDeGiro(0)", "DefinirVisibilidade(bt4,1,true)", "DefinirVisibilidade(bt5,1,false)".



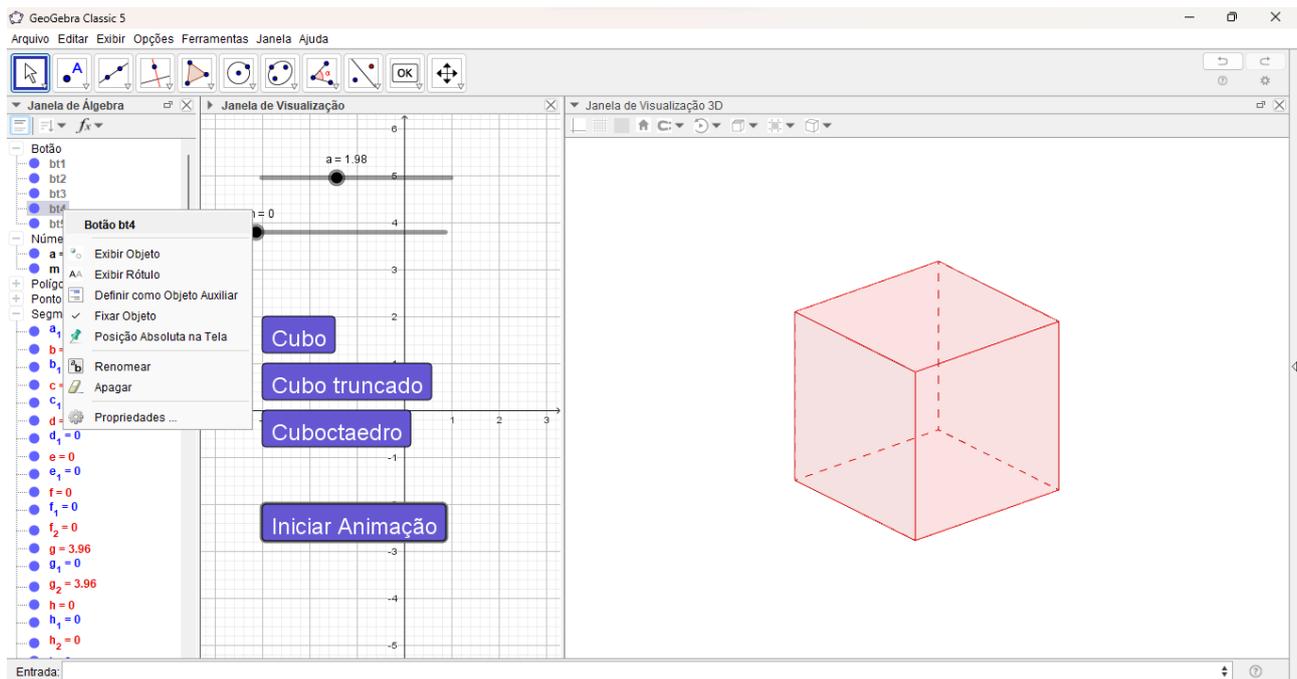
63) Tecle "Esc" no seu teclado e teste esses dois botões. Quando um está ativo, o outro estará oculto e vice-versa.



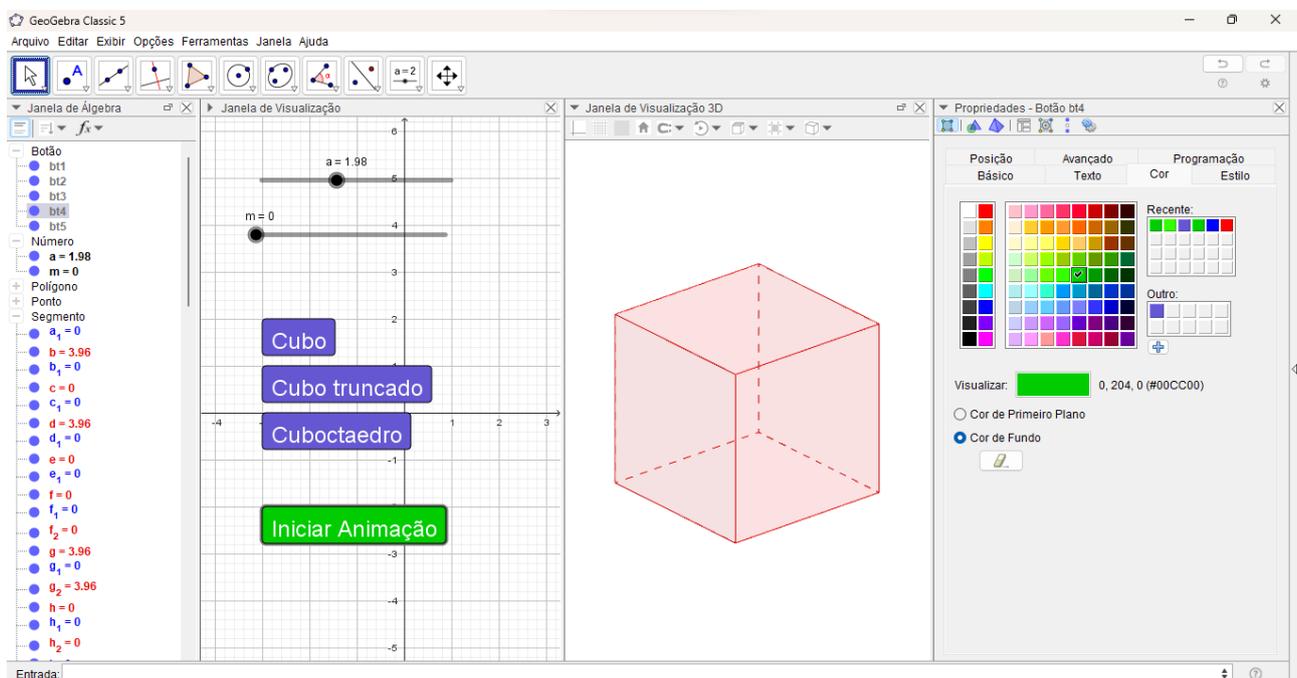
64) Posicione, com o botão direito do mouse, o botão "Parar Animação" exatamente em cima do botão "Iniciar Animação".



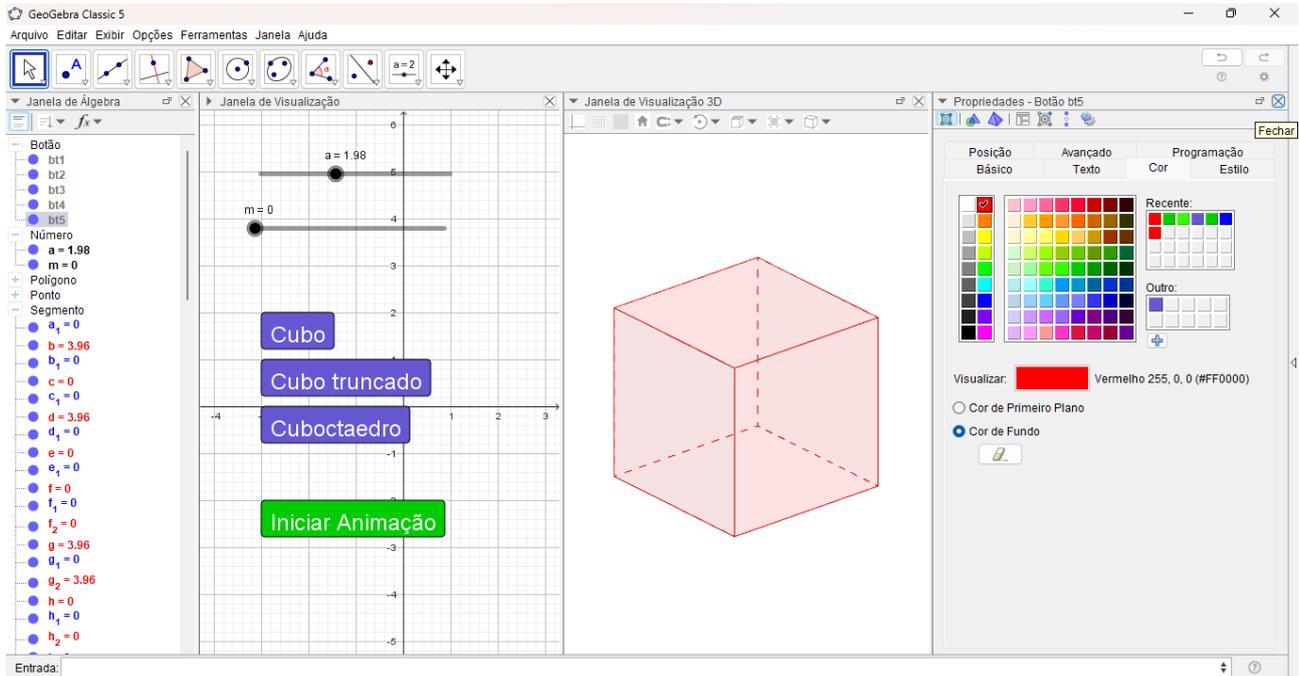
65) Na Janela de Álgebra, selecione o botão "bt4" (botão "Iniciar Animação"), clique com o botão direito do mouse e selecione as suas propriedades.



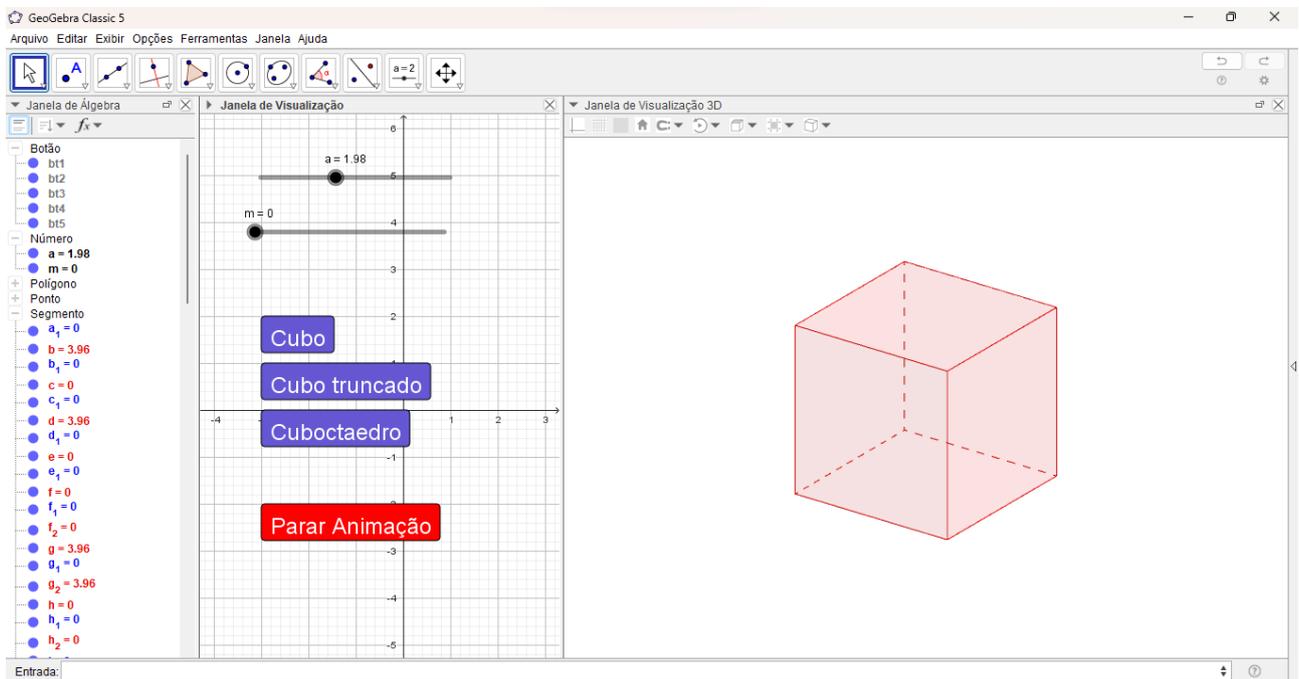
66) Na Janela de Propriedades, clique na aba "Cor" e, em seguida, escolha a cor que deseja para o botão "Iniciar Animação".



67) Com a Janela de Propriedades ainda aberta, selecione o botão "bt5" na Janela de Álgebra.



68) Escolha a cor que deseja para o botão "Parar Animação".



69) Teste os controles deslizantes, os botões e veja se tudo está tudo funcionando.

The screenshot displays the GeoGebra software interface. The main window is divided into three panels:

- Janela de Álgebra:** Lists various objects including buttons (bt1 to bt5), numbers (a = 1.98, m = 0), polygons (pol1 to pol6), and segments (a₁ to g₁).
- Janela de Visualização:** A 2D coordinate system with a grid. It shows two horizontal segments: one at y = 5 labeled 'a = 1.98' and another at y = 4 labeled 'm = 0'. Below the grid are four blue buttons: 'Cubo', 'Cubo truncado', 'Cuboctaedro', and a green button 'Iniciar Animação'.
- Janela de Visualização 3D:** A 3D view showing a red wireframe cube.

The interface includes a menu bar (Arquivo, Editar, Exibir, Opções, Ferramentas, Janela, Ajuda) and a toolbar with various geometric tools.

5. LINKS PARA AS CONSTRUÇÕES DOS POLIEDROS SEMIRREGULARES

Neste capítulo apresentamos os links para todas as construções geométricas dinâmicas dos poliedros semirregulares no GeoGebra. Todas as construções estão hospedadas no site do GeoGebra.org. Além dos links, apresentamos, também, alguns prints de tela das respectivas construções.

1ª CONSTRUÇÃO

Tetraedro \rightarrow Tetraedro truncado \rightarrow Octaedro:

<https://www.geogebra.org/m/m4xhwn9p>

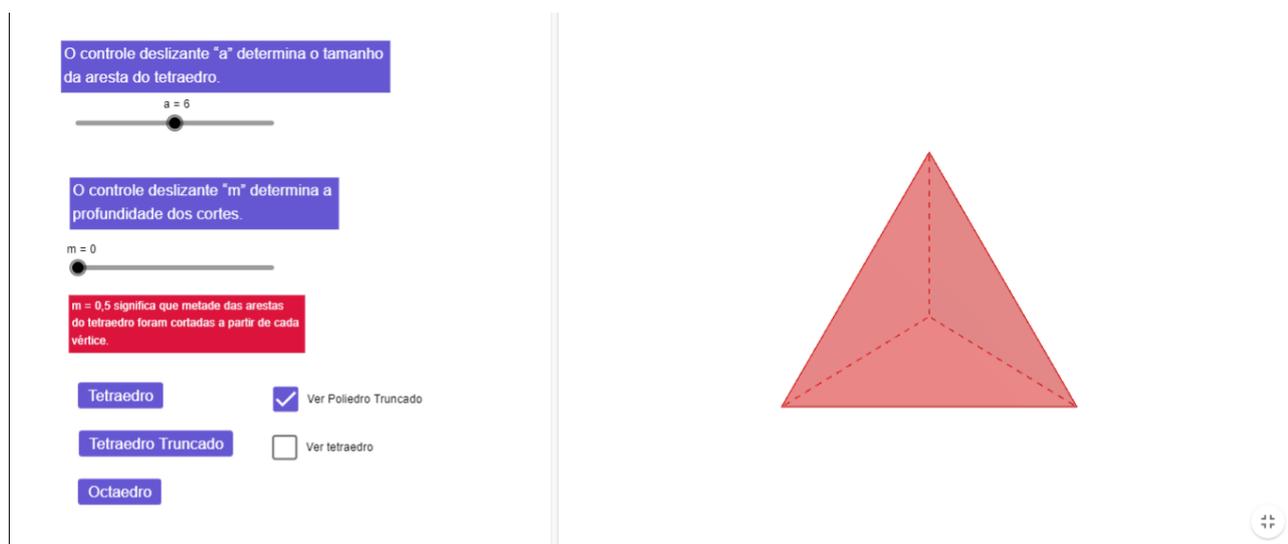


Figura 5.1: Tetraedro - Tetraedro Truncado - Octaedro. Fonte: a autora.

2ª CONSTRUÇÃO

Cubo \rightarrow Cubo truncado \rightarrow Cuboctaedro:

<https://www.geogebra.org/m/krf2cpx9>

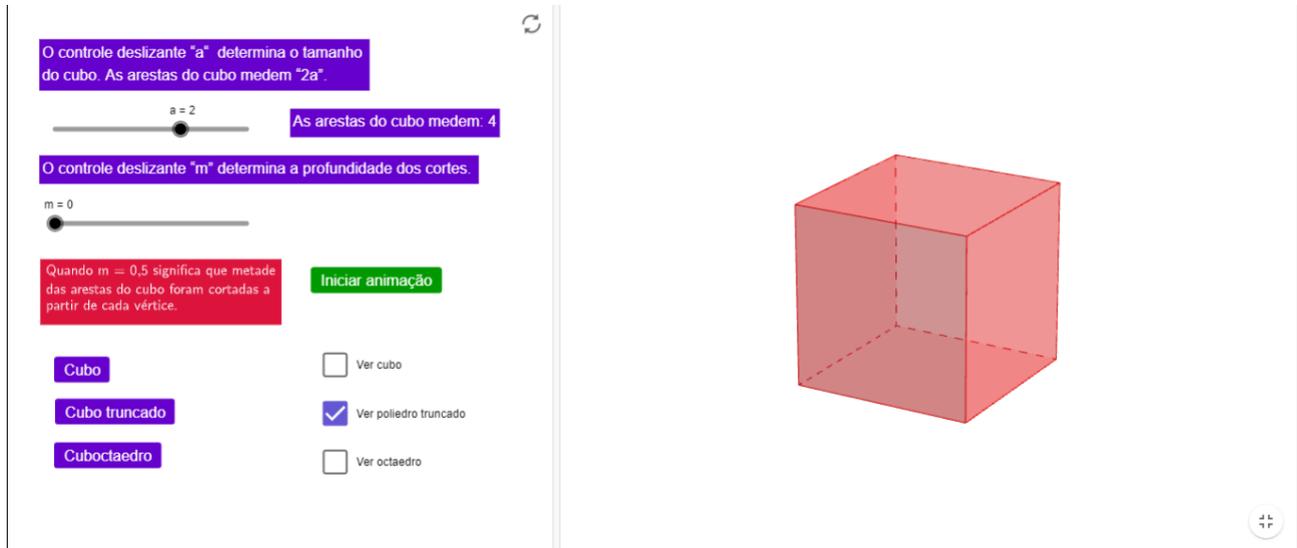


Figura 5.2: Cubo - Cubo truncado - Cuboctaedro. Fonte: a autora.

3ª CONSTRUÇÃO

Octaedro \rightarrow Octaedro truncado \rightarrow Cuboctaedro:

<https://www.geogebra.org/m/rqsywy6k>

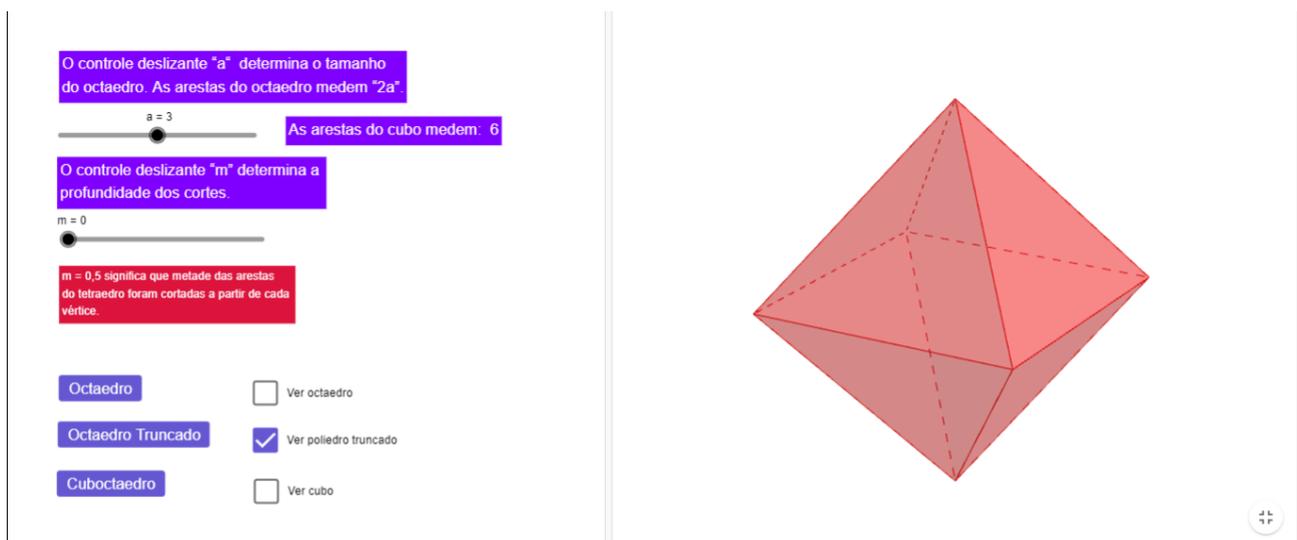


Figura 5.3: Octaedro - Octaedro truncado - Cuboctaedro. Fonte: a autora.

4ª CONSTRUÇÃO

Dodecaedro → Dodecaedro truncado → Icosidodecaedro:

<https://www.geogebra.org/m/wudnp4sq>

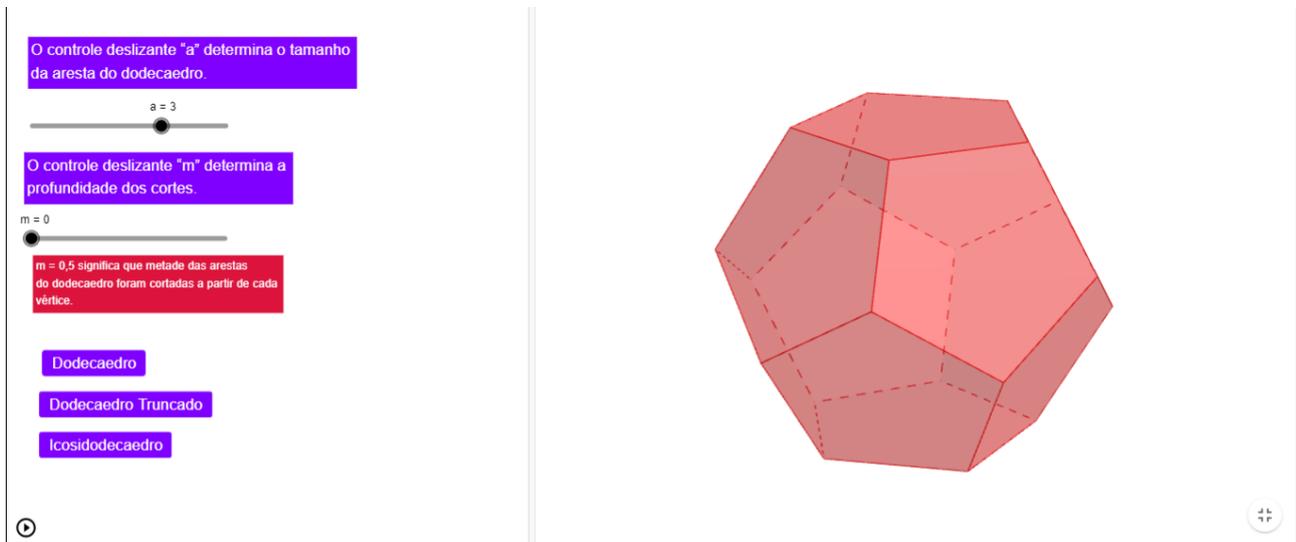


Figura 5.4: Dodecaedro - Dodecaedro truncado - Icosidodecaedro. Fonte: a autora.

5ª CONSTRUÇÃO

Icosaedro → Icosaedro truncado → Icosidodecaedro:

<https://www.geogebra.org/m/n6vfkpg6>

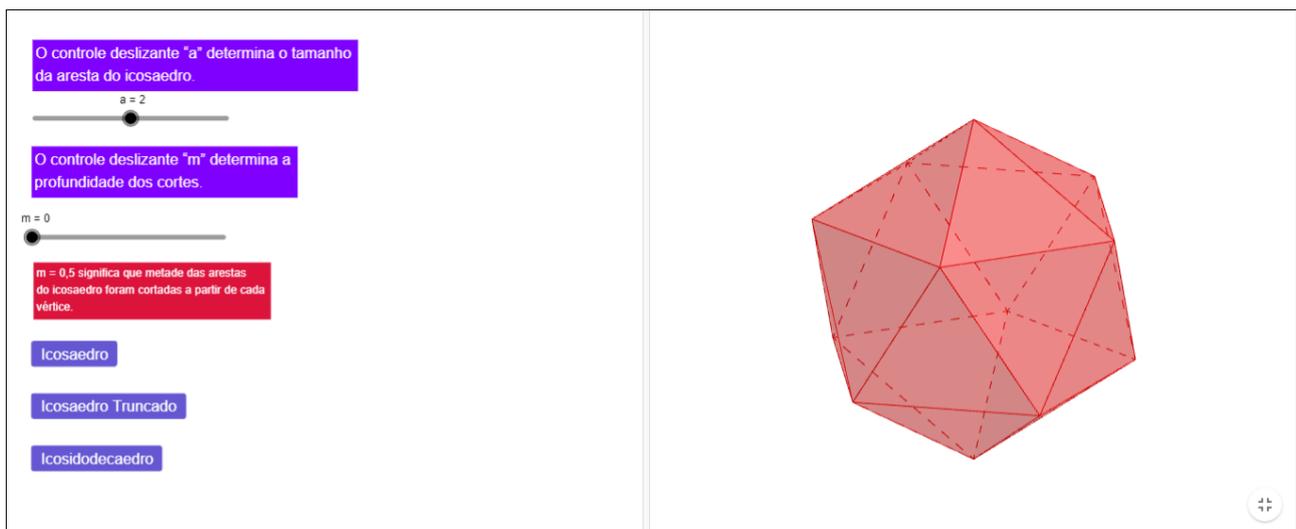


Figura 5.5: Icosaedro - Icosaedro truncado - Icosidodecaedro. Fonte: a autora.

6ª CONSTRUÇÃO

Cuboctaedro → Cuboctaedro truncado → Rombicuboctaedro:

<https://www.geogebra.org/m/gs63a5q3>

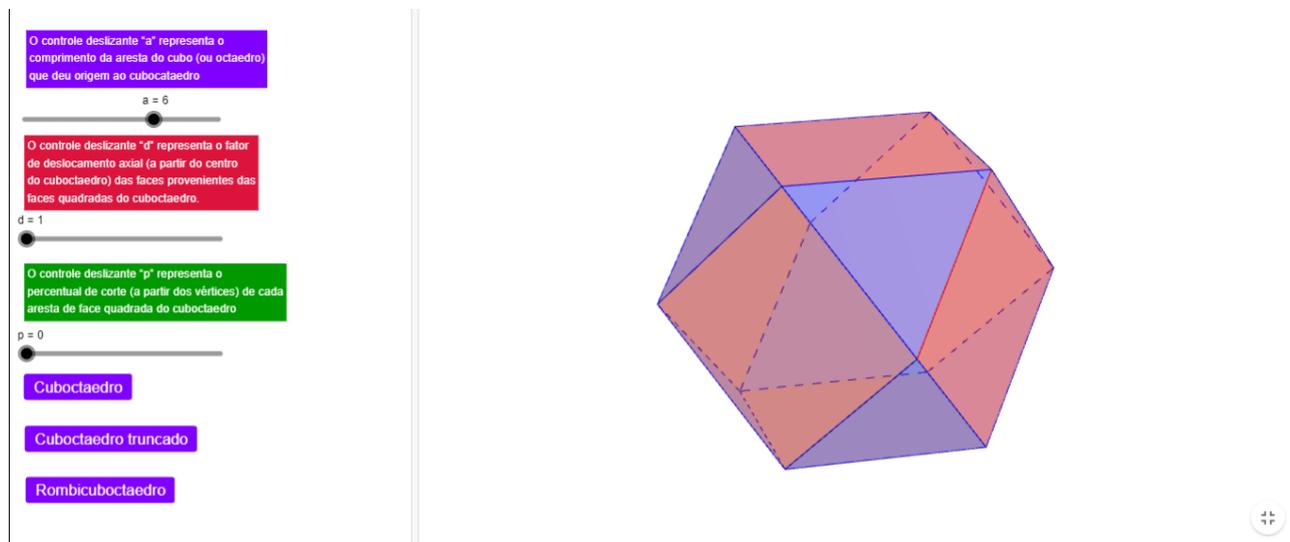


Figura 5.6: Cuboctaedro - Cuboctaedro truncado - Rombicuboctaedro. Fonte: a autora.

7ª CONSTRUÇÃO

Icosidodecaedro → Icosidodecaedro truncado → Rombicosidodecaedro:

<https://www.geogebra.org/m/e3xhbxgh>

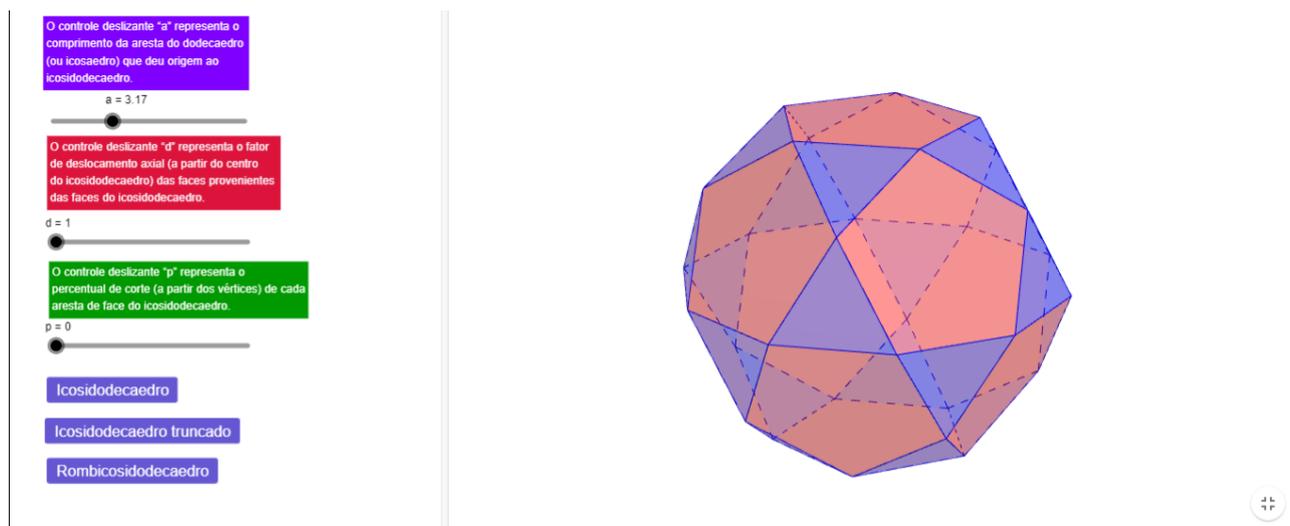


Figura 5.7: Icosidodecaedro - Icosidodecaedro truncado - Rombicosidodecaedro. Fonte: a autora.

8ª CONSTRUÇÃO

Cubo \rightarrow Cubo snub:

<https://www.geogebra.org/m/wtz4exnf>

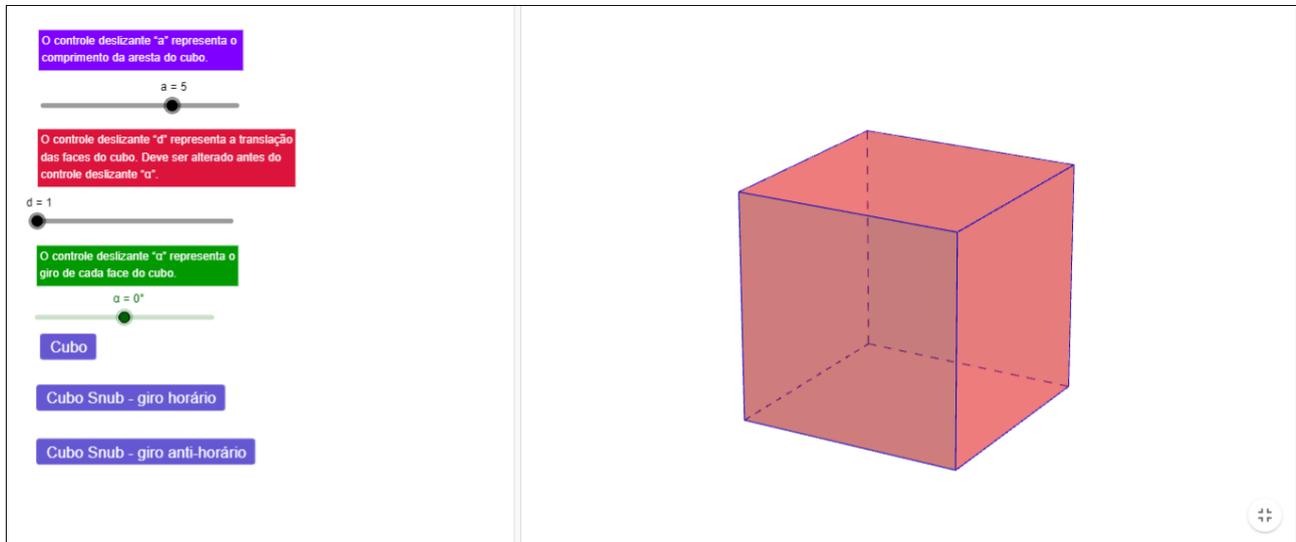


Figura 5.8: Cubo - Cubo snub. Fonte: a autora.

9ª CONSTRUÇÃO

Dodecaedro \rightarrow Dodecaedro snub:

<https://www.geogebra.org/m/sk26zkuy>

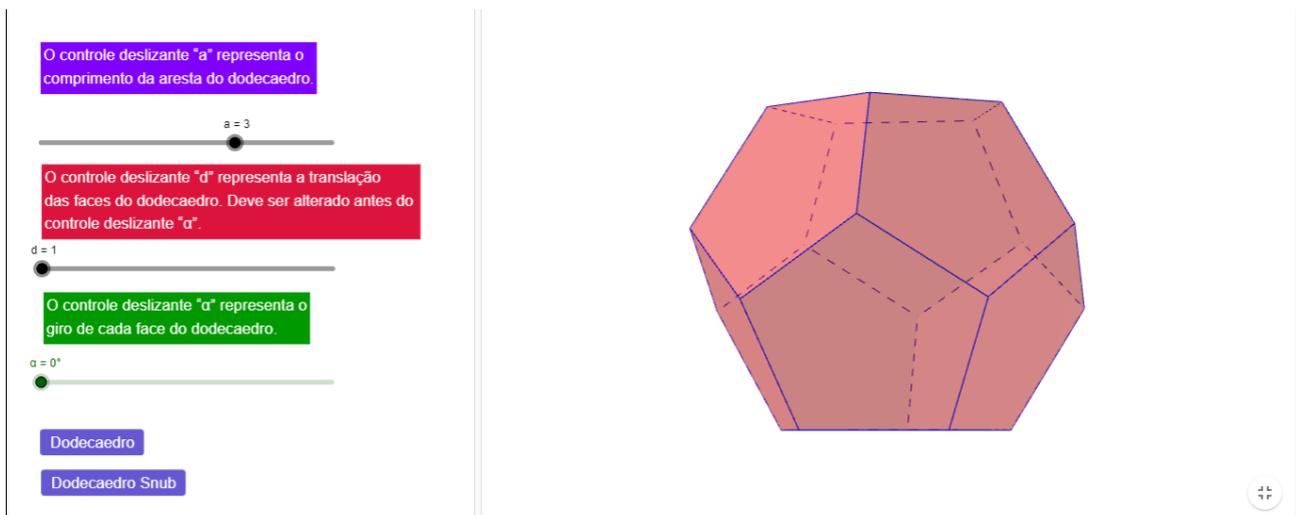


Figura 5.9: Dodecaedro - Dodecaedro snub. Fonte: a autora.

6. CONCLUSÕES

Neste trabalho procuramos contribuir com a teoria dos poliedros regulares e semirregulares, bem como contribuir com construções geométricas dinâmicas de tais poliedros no software GeoGebra.

Os poliedros regulares são relativamente bem conhecidos e apresentados aos alunos de Ensino Básico de forma geralmente superficial. Já os poliedros semirregulares quase nunca são estudados, mesmo no Ensino Superior. Parte desta omissão pode estar relacionada com a dificuldade de visualização de tais poliedros. Sendo assim, as construções geométricas dinâmicas que disponibilizamos no Capítulo 5 podem ajudar muito em tais estudos. O fato do estudante poder manipular por meio de controles deslizantes do GeoGebra as operações geométricas de truncamento de vértices, e de afastamento e giro de faces de poliedros regulares para obter poliedros semirregulares é algo que ajuda muito a fixar conceitos e desenvolver o raciocínio acerca dos vários modos de construção de famílias importantes de poliedros. Talvez esta seja a nossa maior contribuição neste trabalho, uma vez que o tipo de construção que fizemos é relativamente raro de se encontrar na plataforma do GeoGebra.org e, de um modo geral, na Internet.

Outro aspecto importante em termos de contribuição deste trabalho são as classificações dos poliedros regulares e semirregulares. Mais uma vez, é fácil encontrar na literatura matemática a prova de que existem apenas cinco poliedros regulares, mas a prova de existem apenas treze poliedros semirregulares já é bem mais rara. Além disso, as deduções das diversas fórmulas envolvendo poliedros regulares que fizemos no Capítulo 2 também são muito importantes. Em especial as deduções das medidas dos ângulos central e diedral de um poliedro regular em função dos gêneros de faces e de vértices. Essas duas fórmulas foram imprescindíveis para as construções geométricas no GeoGebra, além de serem, por si só, fórmulas pouco conhecidas e notáveis por sua simplicidade.

Por fim, não podemos deixar de pontuar os fragmentos de História da Matemática acerca dos poliedros regulares e semirregulares que fizemos nos Capítulos 1, 2 e 3. Acreditamos que a História da Matemática é uma ferramenta poderosa na motivação para os estudos de Matemática de um modo geral. Procuramos contribuir de forma concisa com as principais informações e curiosidades históricas sobre o tema, mas reconhecemos que o professor pode aprofundar muito neste campo em sala de aula.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] AGUSTINI, E. *Notas para o Acompanhamento das Aulas de Geometria Euclidiana Espacial*. Uberlândia, MG: UFU, 2014. Disponível em: <https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/25207> Acesso em: 29/05/2023.
- [2] BAIRRAL, M. A. & BARREIRA, J. C. F. *Algumas particularidades de ambientes de geometria dinâmica na educação geométrica*, Revista Do Instituto GeoGebra Internacional De São Paulo, 2017. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/35378>. Acessado em 05/12/2023.
- [3] DOLCE, O. & POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar* (coleção de 11 volumes - vol. 10: geometria espacial). 6^a. ed. Atual Editora. 2005.
- [4] FREITAS, P. *Sólidos Arquimedianos: Uma abordagem construtiva e investigativa em oficina presencial e uma exploração de classes de sólidos via software Poly em oficina remota com uma proposta de uso no Ensino Médio*. 2020. 69 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2020.
- [5] GEOGEBRA - *Aplicativos Matemáticos*. Versão 5.0.779-d. Página inicial disponível em: <https://www.geogebra.org/?lang=pt>. Acessado em 29/05/2023.
- [6] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E. & MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio* (coleção de 4 volumes - vol. 2). 6^a. ed. SBM Sociedade Brasileira de Matemática. 2006.
- [7] ROGENSKI, M. L. C. & PEDROSO, S. M. D. *O Ensino da Geometria na Educação Básica: realidade e possibilidades*, 2009. Disponível em: <https://bit.ly/3gr6jsF>. Acessado em 05/12/2023.
- [8] SÁ, C. C. & ROCHA, J. *Treze Viagens Pelo Mundo da Matemática*. Porto: U. Porto, 2010. p.179-208.
- [9] SATO, J. & AGUSTINI, E. *Poliedros regulares: duas fórmulas e um bônus*, RPM Revista do Professor de Matemática - SBM Sociedade Brasileira de Matemática, n. 102, 2020. Disponível em: https://www.rpm.org.br/rpm/img/contendo/files/46.%20Poliedros%20Regulares_%20Duas%20Formulas%20e%20um%20Bonus.pdf. Acessado em 29/05/2023.

- [10] THE MACTUTOR - *History of Mathematics archive*. Site de história da matemática da University of Saint Andrews - Scotland. Disponível em <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/>. Acessado em 05/12/2023.