UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA À DISTÂNCIA

Rayssa Socorro Arruda

Aplicação do Teste da Segunda Derivada para a análise de pontos críticos.

Uberlândia - MG

2023

Rayssa Socorro Arruda

Aplicação do Teste da Segunda Derivada para a análise de pontos críticos.

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Matemática - UFU, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Juliano Gonçalves Oler.

Uberlândia - MG

2023

Rayssa Socorro Arruda

Aplicação do Teste da Segunda Derivada para a análise de pontos críticos.

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade Matemática - UFU, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Juliano Gonçalves Oler.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Juliano Gonçalves Oler

Prof. Dr. Lúcio Borges de Araújo

Documento assinado digitalmente
DOUGLAS MARIN
Data: 19/12/2023 20:51:04-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Douglas Marin

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo geral identificar a importância das aplicações da derivada no ensino médio. Os objetivos específicos delineados foram: demonstrar as regras da Derivação e, enfatizar a utilidade da Segunda Derivada. Apresenta uma sequência de conceitos e exemplos, para introduzir as ideias intuitivas de limite e derivadas. Em seguida estudamos os extremos das funções, Teorema de Rolle, o Teste da Segunda Derivada. No final do trabalho traz uma aplicação em uma situação problema real, onde mostra uma atividade para ser desenvolvida com os alunos do ensino médio.

Palavras-chave: Limite; Derivada; Extremos de Funções; Teste da Segunda Derivada.

ABSTRACT

This work aims to identify the importance of the applications of derivatives in high school. The specific objectives outlined were to: demonstrate the rules of differentiation and emphasize the usefulness of the second derivative. It presents a sequence of concepts and examples to introduce the intuitive ideas of limits and derivatives. Then we study the extrema of functions, Rolle's Theorem, and the Second Derivative Test. At the end of the work, it brings an application in a real problem situation, where it shows an activity to be developed with high school students.

Keywords: Limit; Derivative; Extrema of Functions; Second Derivative Test.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A matemática pode ser considerada como uma habilidade essencial, uma vez que ocorre em quase todas as áreas da vida das pessoas. Está dividida em muitas áreas temáticas e a derivada é uma delas. A Derivada é uma ferramenta matemática de grande importância, sendo base para diversas disciplinas como Cálculo Integral, Equações Diferenciais, entre outras. Em várias áreas da ciência e possível encontrar aplicações da derivada o seu estudo auxilia na interpretação e resolução de situações-problema.

O Cálculo Diferencial surgiu no final do século XVII, atribuído aos estudos de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. A derivada surge então com um papel fundamental na matemática para o desenvolvimento de várias ciências. Assim, possibilitou a descoberta de um método que permitiu o cálculo de problemas relacionados com a construção de retas tangentes, determinação de áreas e volumes. (DALLA’NESSE, 2000).

A derivada pode ser interpretada de duas maneiras. Geometricamente sendo a inclinação de uma reta tangente a uma curva e, interpretada, como taxa de variação onde tem um papel fundamental em diversos ramos das ciências, como na Física, Biologia, administração e entre outros. (LEITHOLD 1986).

Ao estudarmos o Cálculo Diferencial, nota-se que uma das suas aplicações mais importante são os problemas de otimização, maximizando ou minimizando uma determinada função. Esse tipo de problema nos ajuda resolver várias situações do cotidiano.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos. No capítulo 1 serão apresentadas ferramentas básicas, como as definições intuitiva, formal de limite e as principais propriedades de derivação. No capítulo 2, nos fornece definições e resultados importantes para o próximo capítulo. Este capítulo é dedicado as noções de máximo e mínimo de funções. No capítulo 3, será apresentado o Teste da Segunda Derivada. Por fim, no capítulo 4, apresentamos uma aplicação em uma situação problema real. Será apresentada uma atividade para ser desenvolvida com os alunos do ensino médio.

1 CONCEITOS E FERRAMENTAS PRELIMINARES

1.1 Definição intuitiva do limite

A noção intuitiva de limite é uma ideia fundamental na análise matemática que descreve o comportamento de uma função á medida que a variável de entrada se aproxima de um determinado valor.

Considerando a função $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{x^2-1}}$, quando $\boldsymbol{x}$ se aproxima de 1 pela direita e pela esquerda, podemos observar que a função $\boldsymbol{f(x)}$ se aproxima de $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$. Observe os valores na tabela abaixo.

X	f(x)
0,9	0, 526
0,99	0, 502
0, 999	0,5
1	0
1,1	0, 476
1,11	0, 478
1, 111	0, 474

Tabela 1: $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{x^2-1}}$.

Fonte: Autora.

Podemos visualizar esse comportamento estudando o gráfico da função a direita e a esquerda do ponto 1.

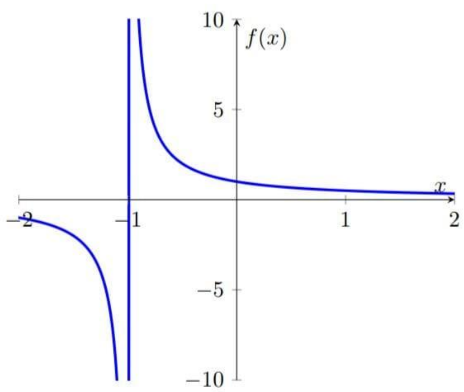

Figura 1: Gráfico $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{x^2-1}}$.

Fonte: Autora.

Podemos ver que a função se aproxima de $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ a medida que $\boldsymbol{x}$ se aproxima de 1, mas não está definida em $\boldsymbol{x} = \mathbf{1}.$ Mais precisamente, note que $\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$ não pertence ao domínio da função $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$(observe que $\boldsymbol{f}(\mathbf{1})$ não existe, pois $\boldsymbol{f}(\mathbf{1}) = \frac{\mathbf{1-1}}{\mathbf{1^2-1}} = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$, mas podemos estudar o comportamento de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ em uma “vizinhança”do ponto 1).

1.2 Definição formal de limite

Antes de explicar a definição formal de limite, é importante introduzir alguns conceitos básicos. Mais precisamente vamos definir o conceito de intervalo e vizinhança.

Definição 1. Um intervalo é um conjunto de números reais que inclui todos os números entre dois valores dados.

Exemplo 1. O intervalo [0, 1] inclui todos os números reais entre 0 e 1, incluindo 0 e 1.

Definição 2. Uma vizinhança de um ponto a é um intervalo que contém a, mas não necessariamente inclui a.

Exemplo 2. Uma vizinhança de 1 é o intervalo $\left(\frac{9}{10}, \frac{11}{10}\right)$, que contém o ponto 1.

Agora, podemos definir formalmente o limite de uma função.

Definição 3. Dada uma função $f(x)$ e um ponto a, dizemos que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a é L, e escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, para qualquer vizinhança V de L, existe uma vizinhança U de a tal que, para todos os valores de x em U, exceto possivelmente o ponto a, $f(x)$ está em V. Usualmente, utilizamos a notação $\lim_{x \to a} f(x) = L.$

Observação 1.

(a) Em outras palavras, dizer que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ é o mesmo que dizer que para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que sempre que $x \,\epsilon\, (a - \delta,\ b + \delta)$ então $f(x) \,\epsilon\, (L - \epsilon, L + \epsilon)$. Vale à pena ressaltar que, nesta escrita temos que $U = (a - \delta, a + \delta)$ e que $V = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$**.**

(b) Se utilizarmos a notação modular podemos escrever as vizinhanças U e V da seguinte forma:

$$x \,\epsilon\, (a - \delta, a + \delta) \Leftrightarrow 0 < |x - a| < \delta.$$

$$f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon) \Leftrightarrow 0 < |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Exemplo 3. Considere a função $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$. Então, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$.

De fato, para mostrar que $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$ usando a definição de limite, devemos provar que, para qualquer valor positivo ε, existe um valor positivo δ tal que:

$$0 < |x-1| < \delta, \text{ temos } \left|\frac{x-1}{x^2-1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

Começamos manipulando a expressão

$$\left|\frac{x-1}{x^2-1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2(x-1)-(x^2-1)}{2(x^2-1)}\right| = \left|\frac{2x-2-x^2+1}{2(x^2-1)}\right|$$

$$= \left|\frac{-x^2+2x-1}{2(x+1)(x-1)}\right| = \left|\frac{-(x^2-2x+1)}{2(x+1)(x-1)}\right|$$

$$= \left|-\frac{1}{2}\right| \cdot \left|\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{(x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}\right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |x-1| \cdot \frac{1}{|x+1|}.$$

Assim,

$$\left|\frac{x-1}{x^2-1} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}|x-1| \cdot \frac{1}{|x+1|}.$$

Agora, queremos encontrar um valor apropriado para $\delta > 0$ que nos permita garantir que $\left|\frac{x-1}{x^2-1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x-1| < \delta$. Note que

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow -\delta < x-1 < \delta.$$

Somando 2 as parcelas da desigualdade $-\delta < x-1 < \delta$, temos que

$$-\delta + 2 < x - 1 + 2 < \delta + 2$$

ou seja,

$$-\delta + 2 < x + 1 < \delta + 2.$$

Em particular, $2 - \delta < x + 1$ o que implica que

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{2-\delta}.$$

Por outro lado, como $x + 1 \leq |x + 1|$ temos que:

$$\frac{1}{|x+1|} < \frac{1}{x+1}.$$

Agora, se $\frac{1}{|x+1|} < \frac{1}{x+1}$ e $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{2-\delta}$ então temos que $\frac{1}{|x+1|} < \frac{1}{2-\delta}$. Assim, como

$$\left|\frac{x-1}{x^2-1} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}|x - 1|.\frac{1}{|x+1|}\, e\, \frac{1}{|x+1|} < \frac{1}{2-\delta}$$

temos que

$$\left|\frac{x-1}{x^2-1} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot \frac{1}{2-\delta} = \frac{\delta}{4-2\delta}$$

o que implica que

$$\left|\frac{x-1}{x^2-1} - \frac{1}{2}\right| < \frac{\delta}{4-2\delta}.$$

Para que $\left|\frac{x-1}{x^2-1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$, devemos ter que $\frac{\delta}{4-2\delta} < \varepsilon$, isto é,

$$\delta < (4 - 2\delta).\varepsilon \Rightarrow \delta < 4\varepsilon - 2\delta\varepsilon \Rightarrow \delta + 2\delta\varepsilon < 4\varepsilon \Rightarrow \delta(1 + 2\varepsilon) < 4\varepsilon \Rightarrow \delta < \frac{4\varepsilon}{1+2\varepsilon}.$$

Dessa forma, para todo $\varepsilon > 0$, $\left|\frac{x-1}{x^2-1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$, sempre que $\delta < \frac{4\varepsilon}{1+2\varepsilon}$.

Vejamos alguns exemplos.

Se $\varepsilon = 1$, então $\delta < \frac{4.1}{1+2.1} = \frac{4}{3} \cong 1{,}3$.

Se $\varepsilon = \frac{1}{2}$, então $\delta < \frac{4.\frac{1}{2}}{1+2.\frac{1}{2}} = \frac{2}{2} = 1$.

Se $\varepsilon = \frac{1}{100}$, então $\delta < \frac{4.\frac{1}{100}}{1+2.\frac{1}{100}} = \frac{\frac{1}{25}}{1+\frac{1}{50}} = \frac{\frac{1}{25}}{\frac{51}{50}} = \frac{50}{25.50} = \frac{50}{1250} = 0{,}04$.

1.3 Principais propriedades de limites

Proposição 1 (Unicidade do limite). Seja f uma função real. Suponha que f tenha dois limites no ponto $x = a$. Mas precisamente, estamos considerando que: $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ e que $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$. Então, $L_1 = L_2$.

Demonstração.

Vamos supor que $L_1 \neq L_2$ e mostrar que esta afirmação leva a uma contradição. Observe que, segundo a definição de limite temos que, se $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$, então para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Agora, se $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$, então para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Por outro lado, é verdadeira a igualdade

$$L_1 - L_2 = L_1 - f(x) + f(x) - L_2, \tag{1.3}$$

para todo número real x.

Assim, segue (1.3) que

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= \left|\left(L_1 - f(x) + (f(x) - L_2)\right)\right| \\ &\leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2|. \end{aligned}$$

O que implica que

$$|L_1 - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2|. \tag{1.4}$$

Agora, como $L_1 - f(x) = -f(x) - L_1$, segue que

$$\begin{aligned} |L_1 - f(x)| &= |-f(x) - L| = |(-1).(f(x) - L_1)| \\ &= |-1|.|f(x) - L_2| = |f(x) - L_2|. \end{aligned} \tag{1.5}$$

De (1.4) e (1.5) temos que:

$$| L_1 - L_2| \leq |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2|. \tag{1.6}$$

Dessa forma, de (1.1), (1.2) e (1.6) temos que para todo $\varepsilon > 0$ existe um

$\delta = min\ \{\delta_{1,}\delta_2\} > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então

$$| L_1 - L_2| \leq |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \tag{1.7}$$

Logo, se $\delta < min\ \{\delta_1, \delta_2\}$, então $\delta < \delta_1$ e $\delta < \delta_2$ e a desigualdade (1.7) nos mostra que: se $0 < |x - a| < \delta$, então

$$|L_1 - L_2| < 2\varepsilon. \tag{1.8}$$

Como, $\varepsilon > 0$ pode assumir qualquer valor real positivo, considerando $\varepsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{2}$ e substituindo em (1.8) obtemos $\varepsilon > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então

$$|L_1 - L_2| \leq 2.\frac{|L_1 - L_2|}{2} = |L_1 - L_2|\ .$$

O que implica que:

$$|L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|. \tag{1.9}$$

Observe que a desigualdade (1.9) gera uma contradição uma vez que um número não pode ser menor que ele mesmo. A contradição surgiu ao supormos que $L_1 \neq L_2$ (esta condição é crucial para $\varepsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{2}$ ser positivo).

Portanto, concluímos que $L_1 = L_2$.

Proposição 2 (Limite da soma e diferença de funções). Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$, então **(a)** $\lim_{x \to a}\big(f(x) - g(x)\big) = L - M$;

(b) $\lim_{x \to a}\big(f(x) + g(x)\big) = L + M$.

Demonstração.

A prova da Proposição 2 será feita apenas para o item (a). A prova do item (b) é semelhante. Para este fim, utilizando a definição de limite, temos que mostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - g(x) - (L - M)| < \varepsilon$.

Como $\lim_{x\to a} f(x) = L$ segue que para todo $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta_1$, então

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.10}$$

Por outro lado, sendo $\lim_{x\to a} g(x) \ = M$, segue que para todo $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta_2$, então

$$|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.11}$$

Agora, tomando $\delta = min\,\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que $\delta \leq \delta_1$ e $\delta \leq 2$. Se $\delta \leq \delta_1$ e $\delta \leq \delta_2$ então (1.10) e (1.11) ocorrem simultaneamente.

Logo, se $0 < |x - a| < \delta$, então

$$\begin{aligned} \left|\big(f(x) - g(x)\big) - (L - M)\right| &= |f(x) - g(x) - L + M| \\ &= |(f(x) - L) + \ (M - g(x)\ | \\ &\leq |f(x) - L| + |M - g(x)| \\ &= |f(x) - L| + |(-1)(g(x) - M)| \\ &= |f(x) - L| + |-1|.|g(x) - M| \\ &= |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, a afirmação está provada, o que mostra que $\lim_{x\to a}\big(f(x) - g(x)\big) = L - M$.

Proposição 3 (Limite do produto de funções). Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, então $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = L.M$.

Demonstração.

Seja $\varepsilon > 0$, arbitrário. Utilizando a definição de limite, temos que mostrar que existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então

$$|f(x).g(x) - LM| < \varepsilon. \tag{1.12}$$

Para provarmos (1.12), primeiramente vamos escrever $|f(x).g(x) - LM|$ em função das expressões $|f(x) - L|$ e $|g(x) - M|$. Observe que $|f(x) - L|$ e $|g(x) - M|$ são controlados, uma vez que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$.

Assim, adicionado e subtraindo o termo $L.g(x)$ em $|f(x).g(x) - LM|$. Obtemos

$$|f(x).g(x) - LM| = |f(x)g(x) - L.g(x) + L.g(x) - L.M|$$

$$= |g(x)(f(x) - L) + L(g(x) - M|$$

$$\leq |g(x)(f(x) - L| + |L(g(x) - M|$$

$$= |g(x)|.|f(x) - L| + |L|.$$

Nosso objetivo agora, é mostrar que cada parcela $|g(x)||f(x) - L|\ e\ |L||g(x) - M|$ fique menor de $\frac{\varepsilon}{2}$.

Como $\lim_{x \to a} g(x) = M$, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta_1$, então

$$|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2(1+|L|)}.$$

Por outro lado, também existe $\delta_2 > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta_2$, então

$$|g(x) - M| < 1.$$

O que mostra que

$$|g(x)| = |(g(x) - M) + M| \leq |g(x) - M| + |M| < 1 + |M|.$$

Agora, sendo $\lim_{x \to a} f(x) = L$, existe $\delta_3 > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2+(1+|M|)}.$$

Considerando $\delta = min\ \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, se $0 < |x - a| < \delta$, então temos

$\delta < \delta_1 , \delta < \delta_2, \delta < \delta_3$, portanto, podemos combinar as inequações para obter,

$$|f(x)g(x) - LM| \leq |f(x) - L||g(x)| + |L||g(x) - M|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2(1+|M|)}|g(x)| + |L|\frac{\varepsilon}{2(1+|L|)}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2\big(1+(M)\big)} \cdot (1 + |M|) + \frac{|L|}{(1+|L|)} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|L|}{(1+|L|)} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Note que

$$|L| < 1 + |L|.$$

O que implica que

$$\frac{|L|}{1 + |L|} < 1.$$

1.4 Continuidade

Intuitivamente, dizemos que uma função é contínua quando seu gráfico não apresenta interrupções, isto é, para que uma função f seja contínua em um ponto $x = b$ é necessário que a função esteja definida em b e que os valores de $f(x)$, para x próximos de b, estejam próximos de $f(b)$.

Definição 4 (veja [5]). Uma função f é dita contínua num ponto b se as três condições a seguir são satisfeitas:

1. $b \in Dom(f)$,
2. $\lim_{x \to b} f(x)$ existe,
3. $\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$.

Observação 2. Se uma função não é contínua em um ponto b, dizemos que ela é descontínua neste ponto.

Como o conceito de continuidade é um caso particular de limite, podemos reescrever a definição 4, utilizando a definição vizinhanças introduzidas anteriormente.

Definição 5. Diz-se que uma função $f(x)$ é contínua em um ponto a se, dado um $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Exemplo 4. Se f é uma função definida por $f(x) = 5x + 3$, então fé uma função contínua em $x = 1$. De fato, primeiramente observamos que $f(1) = 8$. Logo, da Definição 4, devemos mostrar que $\lim_{x \to 1}(5x + 3) = 8$. Note que

$$|f(x) - f(1)| = |5x + 3 - 8| = |5x - 5|$$

$$= 5|x - 1|.$$

Agora,

$$|f(x) - f(1)| < \varepsilon \Leftrightarrow 5|x - 1| < \varepsilon \Rightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Portanto, dado um $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \frac{\varepsilon}{5} > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então

$$|f(x) - f(1)| < \varepsilon.$$

1.4.1 Propriedades das funções contínuas

Como o conceito de continuidade é um caso particular do conceito de limite, considerando $f\ e\ g$ são funções contínuas em ponto b, então temos as seguintes propriedades:

C1. $f + g$ é contínua em b;

C2. $f - g$ é contínua em b;

C3. $f.g$ é contínua em b;

C4. $\frac{f}{g}$ é contínua em b, desde que $g(b) \neq 0$;

C5. Seja $f\ e\ g$ funções tais que $\lim_{x \to a} f(x) = b$ e g é contínua em a, então:

$$\lim_{x \to a} g[f(x)] = g\left[\lim_{x \to a} f(x)\right].$$

Observação 3. A seguir, listamos algumas funções que são contínuas.

1. Toda Função polinomial é contínua.

2. Toda função racional (quociente de polinomiais) é contínua em seu domínio.

3. As funções $f(x) = sen(x)$,$f(x) = \cos(x)$, $f(x) = e^x$ e $f(x) = \ln(x)$ são contínuas.

4. A função exponencial é contínua para todo número real x.

1.5 Alguns exemplos de aplicação do conceito de limite

Exemplo 5. Considere as funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \frac{1}{x}$, ambas definidas para $x > 0$. Então,

$$\lim_{x\to 1}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x}\right) + \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= 1 + 1 = 2.$$

Exemplo 6. Considere as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$. Então,

$$\lim_{x\to 1}\big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x\to 1}(x^2 - x^3)$$

$$= \lim_{x\to 1}(x^2) - \lim_{x\to 1}(x^3)$$

$$= 1^2 - 1^3$$

$$= 1 - 1 = 0.$$

Exemplo 7. Considere a função $f(x) = 2x^2$ e seja $c = 3$. Então,

$$\lim_{x\to 1}\big(c.f(x)\big) = \lim_{x\to 1}(3.2x^2)$$

$$= \lim_{x\to 1}(6x^2)$$

$$= 6 \cdot (\lim_{x\to 1} x^2)$$

$$= 6 \cdot 1^2 = 6 \cdot 1 = 6.$$

Exemplo 8. Considere as funções $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = \cos(x)$. Então,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x))$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}(x).\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos(x)$$

$$=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{4}}{4}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

Exemplo 9. Sejam $f(x)=3x^2-5x+2$e $g(x)=2x^2-5x+4$. Note que

$$\lim_{x\to 1}g(x)=\lim_{x\to 1}2x^2-5x+4$$

$$=2\cdot 1^2-5\cdot 1+4$$

$$=2-5+4=1.$$

Como $\lim_{x\to 1}g(x)\neq 0$, podemos aplicar a propriedade de limite de quociente, ou seja,

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-5x+2}{2x^2-5x+4}=\frac{\lim_{x\to 1}\left(3x^2-5x+2\right)}{\lim_{x\to 1}(2x^2-5x+4)}$$

$$=\frac{\left(3(1)^2-5(1)+2\right)}{(2(1)^2-5(1)+4)}$$

$$=\frac{3-5+2}{2-5+4}=\frac{0}{1}=0.$$

Exemplo 10. Considere as funções $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ e $g(x)=x^2-1$. Queremos calcular o limite $\lim_{x\to 1}f\big(g(x)\big)$. Note que

$$f\big(g(x)\big)=f(x^2-1)=\operatorname{sen}(x^2-1).$$

Assim,

$$\lim_{x \to 1} f(g(x)) = \lim_{x \to 1} \text{sen}(x^2 - 1)$$

$$= \text{sen}\left(\lim_{x \to 1} x^2 - 1\right)$$

$$= \text{sen}(1^2 - 1)$$

$$= \text{sen}(0) = 0.$$

1.6 Derivada

Definição 6. (veja [5]) A derivada de uma função $\boldsymbol{f(x)}$ em relação à variável $\boldsymbol{x}$ é a função $\boldsymbol{f}$ cujo valor em $\boldsymbol{x}$ é

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Desde que o limite exista.

Observação 4.

1. Na definição, usamos a notação $f(x)$ em vez de simplesmente f para enfatizar a variável indepedente de x, em relação à qual estamos derivando.
2. O domínio de f' é o conjunto de pontos do domínio de f para o qual o limite existe, ele pode ser igual ou menor que o domínio de f.
3. Se f' existe para determinado valor de x, dizemos que f é derivável em x. Se f' existe em qualquer ponto no domínio de f, chamanos de f derivável.
4. A derivada de f também se expressa por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z) - f(x)}{z - x},$$

onde $z = x + h$, então $h = z - x$, e h tende a 0 se, e somente se, z tende a x.

Exemplo 11. Considere a função $f(x) = \frac{1}{x+2}$. Então, $f'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}$.

De fato, note que $f(x+h) = \frac{1}{(x+h+2)}$, com $h \epsilon \mathbb{R}$. Aplicando a definição de derivada, temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h+2} - \frac{1}{x+2}}{h}.$$

O que implica que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} . \frac{x+2-(x+h+2)}{(x+h+2).(x+2)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} . \frac{x+2-x-h-2}{(x+h+2).(x+2)}.$$

Ou seja,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h+2).(x+2)}.$$

$$= \frac{-1}{x^2+4x+4}$$

Logo,

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}.$$

1.6.1 As principais propriedades de derivação

D1. Regra da soma: $(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})'(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{p})$.

Demonstração.

$$(f + g)'(p) = \lim_{h\to o} \frac{(f + g)(p + h) - (f + g)(p)}{h}$$

$$= \lim_{h\to o} \frac{f(p + h) - f(p)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(p + h) - g(p)}{h}$$

$$= f'(p) + g'(p).$$

D2. Regra da diferença: $(f - g)'(p) = f'(p) - g'(p)$.

Demonstração.

$$(f - g)'(p) = \lim_{h\to o} \frac{(f - g)(p + h) - (f - g)(p)}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(p+h) - g(p)}{h}$$

$$= f'(p) - g'(p).$$

D3. Regra do produto: $(fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$.

Demonstração.

$$(fg)'\,(p) = \lim_{h \to o} \frac{(fg)(p+h) - (fg)(p)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h)g(p+h) - f(p)g(p+h) + f(p)g(p+h) - f(p)g(p)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h)g(p+h) - f(p)g(p+h)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(p)g(p+h) - f(p)g(p)}{h}$$

$$= f'(p)g(p) + f(p)g'(p).$$

D4. Regra do quociente: $\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{[g(p)]^2}$.

Demonstração.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(p+h)}{g(p+h)} - \frac{f(p)}{g(p)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h)g(p) - f(p)g(p)}{h \cdot g(p+h)g(p)} - \lim_{h \to 0} \frac{f(p)g(p+h) - f(p)g(p)}{h \cdot g(p+h)g(p)}$$

$$= \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{[g(p)]^2}.$$

D5. Regra da cadeia: $(f \cdot g)'(p) = f'\big(g(p)\big) \cdot g'(p)$.

Demonstração.

$$(f \cdot g)'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f\big(g(p+h)\big) - f\big(g(p)\big)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f\big(g(p+h)\big) - f\big(g(p)\big)}{g(p+h) - g(p)} \cdot \frac{g(p+h) - g(p)}{h}$$

$$= f'\big(g(p)\big) \cdot g'(p).$$

D6. Regra da constante: $(cf)'(p) = cf'(p)$.

Demonstração.

Seja $f(x) = c$, onde c é uma constante. Então $f'(x) = 0$ para todo x.

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

$$= \lim_{x \to p} \frac{c - c}{x - p}$$

$$= \lim_{x \to p} \frac{0}{x - p}$$

$$= 0.$$

D7. Regra da potência: $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Demonstração.

Seja $f(x) = x^n$, onde n é um número inteiro positivo. Então, para $x \neq p$ temos

$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \frac{x^n - p^n}{x - p}$$

$$= \frac{(x-p)\left(x^{n-1} + x^{n-2}p + \cdots + p^{n-1}\right)}{x - p}$$

$$= x^{n-1} + x^{n-2}p + \cdots + p^{n-1}.$$

Tomando o limite quando $x \to p$, obtemos $(x^n)' = np^{n-1}$.

Exemplo 12. Sejam $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln(x)$. Então,

$$(f + g)'(x) = (e^x + \ln(x))'$$

$$= (e^x)' + ln(x)'$$

$$= e^x + \frac{1}{x}.$$

Exemplo 13. Sejam $f(x) = x^3$ e $g(x) = \cos(x)$. Então,

$$(f - g)'(x) = (x^3 - \cos(x))'$$

$$= (x^3)' - cos(x)'$$

$$= 3x^2 + \operatorname{sen}(x).$$

Exemplo 14. Sejam $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = e^x$. Então,

$$(fg)'(x) = (\text{sen}(x)e^x)'$$

$$= (\text{sen}(x))'\,(e^x)$$

$$= \cos(x)e^x + \text{sen}(x)e^x.$$

Exemplo 15. Sejam $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = x^2$. Então,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(\frac{\ln(x)}{x^2}\right)'$$

$$= \frac{(\ln(x))'x^2 - \ln(x)\left(x^2\right)'}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}\left(x^2\right) - (\ln(x))(2x)}{(x^2)^2} = \frac{x - \ln(x)\cdot 2x}{x^4}.$$

2 EXTREMOS DE FUNÇÕES

Neste capítulo, vamos identificar e localizar valores extremos de uma função continua (máximos e mínimos locais) a partir de sua derivada. Através desta ferramenta, poderemos resolver uma série de problemas do cotidiano.

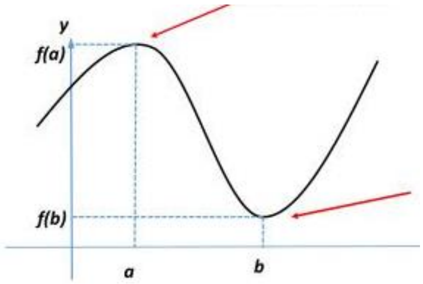

Figura 2: Máximo local e Mínimo local.

Fonte: Google Imagens (2023).

Definição 7 (Máximo Local ou Máximo Relativo). Dizemos que uma função f tem um máximo local (ou relativo) em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$.

Figura 3: Máximo local.

Fonte: Autora.

Definição 8 (Mínimo Local ou Mínimo Relativo). Dizemos que uma função f tem um mínimo local (ou relativo) em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$.

Figura 4: Mínimo local.

Fonte: Autora.

Definição 9 (Ponto crítico). Seja $c \in \mathrm{Dom}(f)$ (domínio da função f). Se $f'(c) = 0$ ou se $f'(c)$ não existe, então $x = c$ é chamado de ponto crítico.

Observação 5. (a) Vamos destacar na definição de extremos locais para extremidades de intervalos definindo que f possuir um valor máximo local ou um valor mínimo local em uma extremidade c se a desigualdade apropriada é válida para qualquer x em um intervalo semiaberto que contenha *c*. Na figura 5, a função f tem máximos locais em *a, d, b* e mínimos locais em *c, e.*

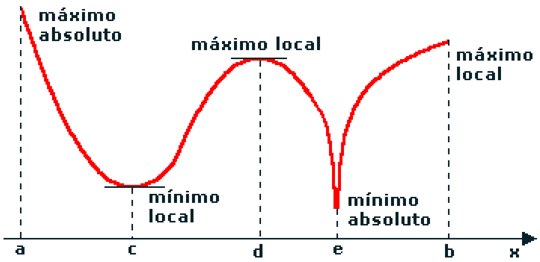

Figura 5: classificação dos máximos e mínimos.

Fonte: Google Imagens.

(b) Um máximo absoluto é o maior valor entre todos os valores máximos relativos. Note que um máximo absoluto também é um máximo local. Assim, uma lista contendo todos os máximos locais incluirá automaticamente o máximo absoluto, se houver.

(c) Analogamente, um mínimo absoluto é o menor valor entre todos os valores mínimos relativos. Observe que um mínimo absoluto também é um mínimo local. Uma lista contendo todos os mínimos locais incluirá automaticamente o mínimo absoluto.

Teorema 1 (Primeiro teorema da derivada para valores de extremos locais) Se f possui um valor máximo ou mínimo local em ponto *c* interior de seu domínio e se f'é definida em *c*, então $f'(c) = 0$.

Demonstração.

Suponhamos que f tem um ponto de máximo relativo em$c$ e que $f'(c)$existe. Então,

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

$$= \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

$$= \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Como f tem um ponto de máximo local em c, pela definição de máximo local, se x estiver suficientemente próximo de c temos que $f(c) \geq f(x)$, ou seja, $f(x) - f(c) \leq 0$.

Se $x \to c^+$, temos $x - c > 0$. Assim, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$ e, então,

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Se $x \to c^-$, temos $x - c < 0$. Logo, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$ e, então,

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Portanto, concluímos que $f'(c) = 0$.

Observação 6. Se um número $c \epsilon Dom(f)$, então uma condição necessária á existência de um extremo local para f é que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não exista. Observe os exemplos.

Exemplo 16. Neste exemplo, vamos estudar um caso em que $f'(x)$ pode ser igual a zero para um valor de x, mas sem que possua um extremo relativo.

Considerando $f(x) = (x - 2)^3$, temos que $f'(x) = 3(x - 2)^2$. Note que,

$$f'(2) = 3(2 - 2)^2 = 3.(0)^2 = 3.0 = 0.$$

Por outro lado, observe que $f(x) < 0$ se $x < 2$ e $f(x) > 0$ se $x > 2$. Dessa forma, f não possui um extremo local em $x = 2$.

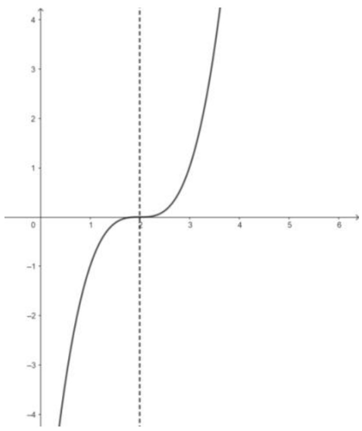

Figura 6: $f(x) = (x - 2)^3$.

Fonte: Autora.

Exemplo 17. Neste exemplo, vamos estudar um caso em que uma função pode ter um extremo relativo em $x = p$ e f' pode não existir em $x = p$. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x - \dfrac{1}{2} \; se \; x \leq 3 \\ 4 - \dfrac{x}{2} \; se \; x > 3. \end{cases}$$

O gráfico da função $f(x)$ é dado por:

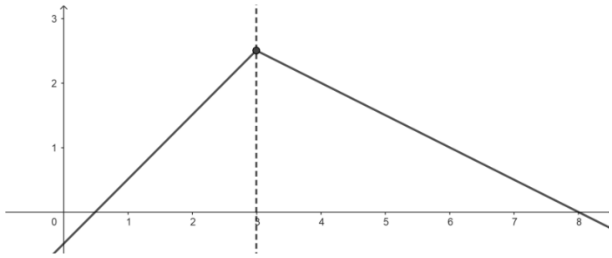

Figura 7: $f(x) = x - \frac{1}{2}$ e $f(x) = 4 - \frac{x}{2}$.

Fonte: Autora.

$$x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2};$$

$$x = 1 \Longrightarrow f(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$x = 2 \Longrightarrow f(2) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2};$$

$$x = 3 \Longrightarrow f(3) = 3 - \frac{1}{2} = \frac{6-1}{2} = \frac{5}{2};$$

$$x = 4 \Longrightarrow f(4) = 4 - \frac{4}{2} = 4 - 2 = 2;$$

$$x = 5 \Longrightarrow f(5) = 4 - \frac{5}{2} = \frac{8-5}{2} = \frac{3}{2};$$

$$x = 6 \Longrightarrow f(6) = 4 - \frac{6}{2} = 4 - 3 = 1;$$

$$x = 8 \Longrightarrow f(8) = 4 - \frac{8}{2} = 4 - 4 = 0.$$

Note que, a função f tem um máximo relativo em $x = 3$. Por outro lado,

$$f'_{-}(3) = \lim_{x\to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{x - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}}{x - 3}$$

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{x-3}{x-3} = 1.$$

$$f'_{+}(3) = \lim_{x\to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{4 - \frac{x}{2} - \frac{5}{2}}{x - 3}$$

$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{-\frac{x}{2} + \frac{3}{2}}{x - 3}$$

$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{-\frac{1}{2}.(x - 3)}{(x - 3)}$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

Como $f'_{-}(3) = 1 \neq -\frac{1}{2} = f'_{+}(3)$, isto é,$f'_{-}(3) \neq f'_{+}(3)$, podemos concluir que $f'(3)$ não existe.

Exemplo 18. Neste exemplo, vamos estudar um caso em que uma função f pode ser definida em um número $x = c$ onde $f'(x)$ não existe e ainda f pode não ter um extremo local em $x = c$.

Considerando $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, temos que

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{1/3-1}$$

$$= \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{x^{2/3}}$$

$$= \frac{1}{3x^{2/3}}.$$

Note que $f(0) = 0$, mas $f'(0) = 0$ não existe. Além disso, f não tem um extremo relativo em $x = 0$.

Observação 7. Se $x = c$ pertence do domínio da função f, uma condição necessária, mas não suficiente á existência de um extremo relativo em $x = c$ é que $x = c$ seja um ponto crítico.

2.1 Teorema de Rolle

O teorema, consiste em determinar os pontos do gráfico de uma função contínua e derivável em um dado intervalo em que a reta tangente possui inclinação igual a 0.Vejamos a seguir, o que enuncia o teorema.

Teorema 2 (Veja [3]). Seja uma função $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) com $f(a) = f(b)$. Então, existe um ponto $c \epsilon (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração.

Como f é contínua, pelo teorema do valor extremo f assume um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em $[a, b]$.

Sejam M e m, respectivamente o máximo absoluto e o mínimo absoluto de f. Então, se f for constante, teremos $M = n = f(a) = f(b)$, e consequentemente $f^{'}(x) = 0$, para todo $x \epsilon [a, b]$. Logo, qualquer número entre a e b pode ser tomado para c.

Suponhamos agora que $M \neq m$. Então, como $f(a) = f(b)$ devemos ter $M = f(c)$, para algum c tal que $a < c < b$. Então para $x < c$ teremos $x - c < 0$ e também
$f(x) - f(c) \leq 0$, portanto,

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Como f é derivável em (a, b) temos que

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f^{'}(c) \geq 0.$$

Do mesmo modo, se $x > c$, então$x - c > 0$, e também $f(x) - f(c) \leq 0$, e assim,

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Daí, temos

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f^{'}(c) \leq 0.$$

Portanto, como $f'(c) \geq 0$ e $f'(c) \leq 0$, a única possibilidade é $f'(c) = 0$.

Os gráficos a seguir exemplificam funções que cumprem os requisitos que possibilitam a aplicação do Teorema de Rolle, ou seja, a determinação do(s) pontos(s) do gráfico de uma função em que a tangente ao gráfico é uma reta horizontal e, portanto, $f'(c) = 0$.

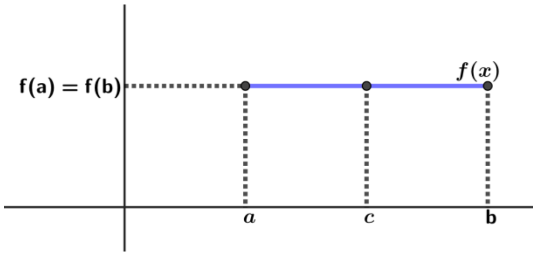

Figura 8: Teorema de Rolle (Função constante).

Fonte: Autora.

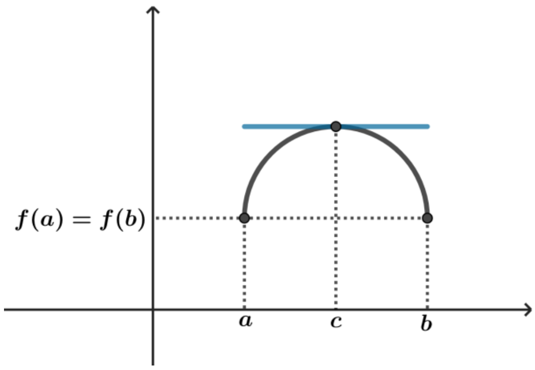

Figura 9: Teorema de Rolle (Função polinomial do 2º grau, $a < 0$).

Fonte: Autora.

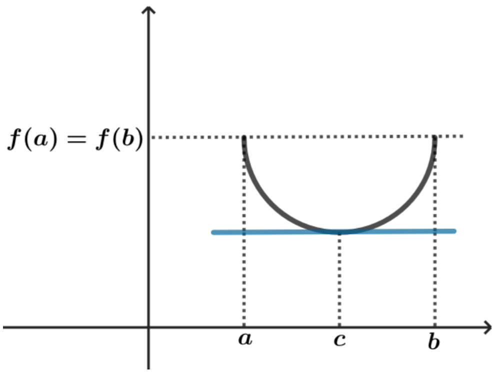

Figura 10: Teorema de Rolle (Função polinomial d0 2º grau, $a > 0$.

Fonte: Autora.

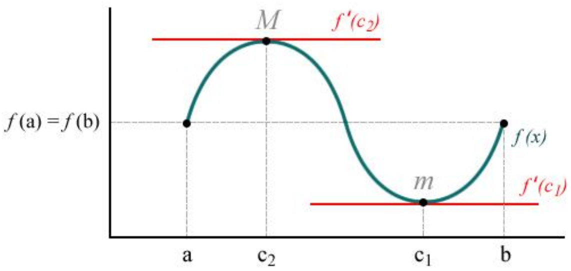

Figura 11: Teorema de Rolle (Função polinomial em $[a, b]$).

Fonte: Autora.

Exemplo 19. Dada a função $f: [0, 4] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 4x$. Utilizando o teorema de Rolle, existe um ponto $c \ \epsilon \ (0, 4)$ tal que $f'(c) = 0$.

Note que f é contínua em $[0, 4]$ e derivável em $(0, 4)$ (uma vez que $f(x) = x^2 - 4x$ é uma função polinomial). Por outro lado, observe que

$$f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 = 0 - 0 = 0$$

$$f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 = 16 - 16 = 0.$$

Assim sendo, podemos aplicar o Teorema de Rolle para garantir a existência de um ponto c no intervalo (0,4) de maneira que $f'(c) = 0$. Como $f'(x) = 2x - 4$, para encontramos o valor de c basta igualarmos $f'(x)$ a zero, o que nos dá $c = 2$.

Portanto, concluímos que o ponto c garantido pelo Teorema de Rolle é $c = 2$.

3 TESTE DA SEGUNDA DERIVADA

Antes de explicarmos o teste da segunda derivada, é importante introduzir alguns conceitos. O primeiro e a definição de derivada de segunda ordem.

Definição 10 (veja [5]). A derivada de f' no ponto x_0 é chamada de derivada de segunda ordem de f no ponto x_0 e é representa-se por $f\,''(x_0)$. Mais precisamente, definimos $f\,''(x_0)$ por

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Desde que os limites existem.

Observação 8. Seja D o conjunto dos pontos do domínio de f' em f' é derivável. A função segunda derivada de f, ou seja, f'', pode ser caraterizasa da seguinte forma:

$$f": D \to \mathbb{R}.$$

$$x \to f''(x).$$

Teorema 3 (Teorema da Conservação de Sinal). Seja f contínua em c e admita-se que $f(c) \neq 0$. Existe então um intervalo $(c - \delta, c + \delta)$ no qual f tem o mesmo sinal que $f(c)$.

Demonstração.

Sem perda de generalidade podemos supor que $f(c) > 0$. Devido à continuidade de f, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon, \text{ sempre que } c - \delta < x < c + \delta \qquad (3.1)$$

Se tomarmos o δ correspondente a $\varepsilon = \frac{f(x)}{2}$ (isto é, ε positivo), então (3.1) temos

$$\frac{1}{2} f(c) < f(x) < \frac{3}{2} f(c), \text{ sempre que } c - \delta < x < c + \delta$$

Portanto, $f(x) > 0$ neste intervalo e, por isso, $f(x)$ e $f(c)$ têm o mesmo sinal. Se $f(c) < 0$, tomaríamos δ correspondente a $\varepsilon = -\frac{f(c)}{2}$ e chegaríamos à mesma conclusão.

Teorema 4 (Teste da Segunda Derivada). Seja $I = (a, b)$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, considere $f: I \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x)$ e $f''(x)$ sejam contínuas para todo $x \in I$ e assuma que existe $x_0 \in I$ tal que $f'(x_0) = 0$. Então:

(a) Se $f''(x_0) > 0$, então x_0 é um ponto de mínimo local para f.

(b) Se $f''(x_0) < 0$, então x_0 é um ponto de máximo local para f.

(c) Se $f''(x_0) = 0$, então nada podemos afirmar.

Demonstração.

Primeiramente, antes de fazermos a prova do teorema, vamos mostrar que f pode ser escrita como um polinômio de grau 2. Mais precisamente, vamos provar a seguinte afirmação:

Afirmação: Sejam $x_0, x \in I$ tais que $x \neq x_0$. Então, existe $\tilde{x} \in (x, x_0)$ tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\tilde{x})}{2}(x - x_0)^2.$$

De fato, seja

$$P(t) = f(x_0) + f'(x_0)(t - x_0), \tag{3.2}$$

o polinômio de primeira ordem, na variável t construido a partir de f. Defina

$$M = \frac{2.(f(x) - p(x))}{(x - x_0)^2}. \tag{3.3}$$

Note que M é constante na variável t. Agora, vamos construir a seguinte função auxiliar

$$g(t) = f(t) - p(t) - M\frac{(t - x_0)^2}{2}.$$

Observe que para $t = x_0$, temos que

$$g(x_0) = f(x_0) - p(x_0) - M\frac{(x_0 - x_0)^2}{2}.$$

Para $t = x_0$, temos que $M\frac{(x_0 - x_0)^2}{2} = 0$, visto que $x_0 - x_0 = 0$. Assim, obtemos

$$g(x_0) = f(x_0) - p(x_0),$$

sempre que $t = x_0$.

De (3.2) temos que

$$p(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0).$$

$$= f(x_0),$$

pois $f'(x_0)(x_0 - x_0) = 0$ (uma vez que $x_0 - x_0 = 0$).

Assim, concluímos que

$$g(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0. \tag{3.4}$$

Por outro lado, note que pela definição de M temos

$$g(x) = f(x) - p(x) - M\frac{(x-x_0)^2}{2}$$

$$= f(x) - p(x) - \frac{2\big(f(x)-p(x)\big)}{(x-x_0)^2} . \frac{(x-x_0)^2}{2}.$$

Simplificando a expressão (2 com 2 e $(x - x_0)^2$com $(x - x_0)^2$). Segue que

$$g(x) = f(x) - p(x) - \big(f(x) - p(x)\big)$$

$$= f(x) - p(x) - f(x) + p(x).$$

Agora, simplificando a expressão ($f(x)$ com $f(x)$ e $p(x)$ com $p(x)$). Conseguimos que

$$g(x) = 0. \tag{3.5}$$

Assim, temos de (3.4) e (3.5) que:

$$g(x_0) = 0 = g(x).$$

Logo, segue do teorema de Rolle, que existe um ponto x_1 entre os pontos x_0 e $x\big(x_1 \in (x_0, x)\big)$ tal que:

$$g'(x_1) = 0. \tag{3.6}$$

Por outro lado, note que:

$$g'(t) = \frac{d}{dt}\left(f(t) - p(t) - M\frac{(t-x_0)^2}{2}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\big(f(t) - p(t)\big) - \frac{M}{2}(t-x_0)^2\right]$$

$$= \frac{d}{dt}[f(t) - p(t)] - \frac{d}{dt}\left[\frac{M}{2}(t-x_0)^2\right]$$

$$= \frac{d}{dt}[f(t)] - \frac{d}{dt}[p(t)] - \frac{M}{2}\frac{d}{dt}[(t-x_0)^2]$$

$$= \tfrac{d}{dt}[f(t)] - \tfrac{d}{dt}[p(t)] - \tfrac{M}{2}.2.(t-x_0)$$

$$= f'(t) - p'(t) - M(t-x_0).$$

Note que, na terceira igualdade usamos que

$$\tfrac{d}{dt}\left[f(t) - p(t) - M\tfrac{(t-x_0)^2}{2}\right] = \tfrac{d}{dt}\big(f(t) - p(t)\big) - \tfrac{d}{dt}\left[\tfrac{M}{2}(t-x_0)^2\right].$$

Na quarta igualdade utilizamos que

$$\tfrac{d}{dt}[f(t) - p(t)] = \tfrac{d}{dt}\big(f(t)\big) - \tfrac{d}{dt}\big(p(t)\big).$$

Na quinta igualdade aplicamos que

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{M}{2}(t-x_0)^2\right] = \frac{M}{2}\frac{d}{dt}[(t-x_0)^2].$$

Na sexta igualdade temos a regra da cadeia uma vez que $y = (t-x_0)^2 = u^2$, com $u = t - x_0$. Assim,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dt}$$

$$= \frac{d}{du}(u^2).\frac{d}{dt}(t-x_0)$$

$$= 2u.\left[\frac{d}{dt}(t) - \frac{d}{dt}(x_0)\right]$$

$$= 2.(t - x_0).[1 - 0]$$

$$= 2.(t - x_0).$$

Finalizamos com a notação

$$\frac{d}{dt}\big(f(t)\big) = f'(t). \text{ e } \frac{d}{dt}\big(p(t)\big) = p'(t).$$

Sabemos que:

$$g'(x_0) = f'(x_0) - p'(x_0) - M(x_0 - x_0)$$

$$= f'(x_0) - p'(x_0) - M.0$$

$$= f'(x_0) - p'(x_0) - 0$$

$$= f'(x_0) - p'(x_0). \tag{3.7}$$

Como $p(t) = f(x_0) + f'(x_0)(t - x_0)$ temos

$$p'(t) = \frac{d}{dt}[f(x_0) + f'(x_0)(t - x_0)]$$

$$= \frac{d}{dt}[f(x_0)] + \frac{d}{dt}[f'(x_0)(t - x_0)]$$

$$= \frac{d}{dt}[f(x_0)] - f'(x_0).\frac{d}{dt}[(t - t_0)]$$

$$= \frac{d}{dt}[f(x_0)] - f'(x_0).\left[\frac{d}{dt}(t) - \frac{d}{dt}(t_0)\right]$$

$$= 0 - f'(x_0).[1 - 0]$$

$$= f'(x_0).$$

Agora, combinando (3.6) e (3.7) temos

$$g'(x_0) = f'(x_0) - p'(x_0).$$

Dessa forma, de (3.6) e (3.7) temos $g'(x_1) = 0 = g'(x_2)$ o que implica pelo teorema de Rolle que existe $\tilde{x}$ entre x_0e x_1 tal que:

$$g''(\tilde{x}) = 0. \tag{3.8}$$

Note que, da definição de $g(t)$ obtemos:

$$g'(x) = \frac{d}{dt}\left(f(t) - p(t) - M\frac{(t-x_0)^2}{2}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\big(f(t)\big) - \frac{d}{dt}\big(p(t)\big) - \frac{d}{dt}\left(\frac{M(t-x_0)^2}{2}\right)$$

$$= f'(t) - \frac{d}{dt}\big(f(x_0) + f'(x_0)(t - x_0)\big) - \frac{d}{dt}\left(\frac{M(t-x_0)^2}{2}\right)$$

$$= f'(t) - \frac{d}{dt}\big(f(x_0)\big) - \frac{d}{dt}\big(f(x_0)(t - x_0)\big) - \frac{M}{2}.\frac{d}{dt}[(t - x_0)^2]$$

$$= f'(t) - 0 - f'(x_0)\frac{d}{dt}(t - x_0) - \frac{M}{2}.2(t - x_0).1$$

$$= f'(t) - f'(x_0).1 - M(t - x_0)$$
$$= f'(t) - f'(x_0) - M(t - x_0).$$

Além disso,

$$g"(t) = \frac{d}{dt}\big(g'(t)\big) = \frac{d}{dt}\big(f'(t) - f'(x_0) - M(t - x_0)\big)$$

$$= \frac{d}{dt}\big(f'(t)\big) - \frac{d}{dt}\big(f'(x_0)\big) - \frac{d}{dt}[M(t - x_0)]$$

$$= f(\mathrm{t}) - M.\frac{d}{dt}(t - x_0) = f"(t) - M,$$

isto é,

$$g"(\mathrm{t}) = f"(t) - M. \tag{3.9}$$

Combinando (3.8) com (3.9) temos

$$0 = g(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) - M.$$

O que implica que $f"(\tilde{x}) - M = 0$, isto é, $f"(\tilde{x}) = M$. (3.10)

Combinando (3.3) com (3.10) temos

$$f"(\tilde{x}) = \frac{2.(f(x) - p(x))}{(x - x_0)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$2.(f(x) - p(x)) = f''(\tilde{x})(x - x_0)^2$$
$$\Downarrow$$
$$2.f(x) - 2p(x) = f''(\tilde{x})(x - x_0)^2$$
$$\Downarrow$$
$$2.f(x) = 2.p(x) + f''(\tilde{x})(x - x_0)^2$$
$$\Downarrow$$
$$f(x) = \frac{2p(x) + f''(\tilde{x})(x - x_0)^2}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$f(x) = \frac{2p(x)}{2} + \frac{1}{2}f''(\tilde{x})(x - x_0)^2$$
$$\Downarrow$$
$$f(x) = p(x) + \tfrac{1}{2}f''(\tilde{x})(x - x_0)^2. \tag{3.11}$$

Agora, combinando (3.11) com a definição de $p(x)$ temos

$$f(x) = p(x) + \frac{1}{2}f''(\tilde{x})(x - x_0)^2$$

$$= f(x_o) + f'(x_o)(x - x_0) + \tfrac{1}{2}f''(\tilde{x})(x - x_0)^2,$$

o que finaliza a prova da afirmação.

Agora, vamos provar as afirmações do teorema.

(a) Se $f''(x_0) > 0$, então x_0 é um ponto de mínimo local para f.

De fato, vamos assumir que $f''(x_0) > 0$. Se $f''(x_0) > 0$ então segue do Teorema da Conservação do Sinal que existe $\delta > 0$ tal que $f''(x_0) > 0$, para todo $x \epsilon (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Considere $x \epsilon (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tal que $x \neq x_0$. Logo, da afirmação que existe $\tilde{x} \epsilon (x_0, x)$ tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\tilde{x})}{2}(x - x_0)^2$$

$$= f(x_0) + \tfrac{f''(\tilde{x})}{2}(x - x_0)^2 \text{ (por hipótese } f'(x_0) = 0)$$

$$> f(x_0) + (x - x_0)^2 \qquad (f''(x) > 0. \forall\, \tilde{x} \epsilon (x_0, x))$$

$$\geq f(x_0) + ((x - x_0)^2 = 0,\ x = 0\ e\ (x - x_0)^2 > 0\ \ x \neq x_0).$$

Assim, temos que:

$$f(x) \geq f(x_0),\ \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}.$$

Logo, x_0 é ponto de máximo local para f.

(b) Se $f"(x) < 0$, então x_0 é um ponto de máximo local.

Vamos assumir que $f"(x) < 0$. Se $f"(x) < 0$, então segue do Teorema da Conservação do Sinal que existe $\delta > 0$ tal que $f"(x_0) < 0$, para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Considere $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tal que $x \neq x_0$. Logo, da afirmação existe $\tilde{x} \in (x_0, x)$ tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f"(\tilde{x})}{2}(x - x_0)^2$$

$$= f(x_0) + \frac{f"(\tilde{x})}{2}(x - x_0)^2 (\text{por hipótese } f'(x_0) = 0)$$

$$\leq f(x_0) + 0.(x - x_0)^2 \qquad (f"(x) < 0. \forall\, \tilde{x} \in (x_0, x))$$

$$= f(x_0).$$

Assim, temos que

$$f(x) \leq f(x_0), \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}.$$

Logo, x_0 é ponto de mínimo local para f.

i) Se $f"(x_0) = 0$, então o teste é inconclusivo.

Quando $f"(x_0) = 0$, o ponto $x = x_0$ pode ser um ponto de máximo local, mínimo local ou nem máximo e nem mínimo local. Observe os exemplos.

Exemplo 20. Se $f(x) = (x - 1)^4$, então f tem um mínimo em $x = 1$. Note que,

$$f'(x) = 4.(x - 1)^3 \text{ e } f"(x) = 12.(x - 1)^2.$$

Assim, temos que

$$f(1) = f'(1) = f"(1) = 0.$$

Por outro lado, $x = 1$ é um ponto de mínimo de $f(x)$, uma vez que para todo

$x \epsilon (1-\delta, 1+\delta)$ com $\delta > 0$ temos que $f(x) \geq f(1)$.

Exemplo 21. Se $f(x) = -(x-1)^4$, então f tem um máximo em $x = 1$. Note que,

$$f'(x) = -4.(x-1)^3 \text{ e } f''(x) = -12.(x-1)^2.$$

Assim, temos que

$$f(1) = f'(1) = f''(1) = 0.$$

Por outro lado, $x = 1$ é um ponto de máximo local de $f(x)$, uma vez que para todo $x \epsilon (1-\delta, 1+\delta)$ com $\delta > 0$ temos que $f(x) \leq f(1)$.

Exemplo 22. Se $f(x) = (x-1)^3$, então não há extremo relativo em $x = 1$. Note que,

$$f'(x) = 3(x-1)^2 \text{ e } f''(x) = 6(x-1).$$

Assim, temos que

$$f(1) = f'(1) = f''(1) = 0.$$

Por outro lado, em $x = 1$ não há extremo relativo, uma vez que todo para todo $x \epsilon (1-\delta, 1)$ temos que $f(x) \leq f(1)$ e para todo $x \epsilon (1, 1+\delta)$ temos que $f(x) \geq f(1)$.

3.1 Aplicação do Teste da Segunda Derivada

Problema Prático. Uma caixa sem tampa será feita, recortando-se pequenos quadrados congruentes dos cantos de uma folha de papelão medindo $A \times A$ cm e dobrando-se os lados para cima. Que tamanho os quadrados das bordas devem ter para que a caixa chegue a sua capacidade máxima?

Solução.

O problema prático enunciado acima será resolvido seguindo os seguintes passos.

Passo 1. Inicialmente, vamos considerar uma folha de papelão quadrada com dimensões A cm.

Passo 2. Vamos cortar quadrados congruentes de lado x dos cantos da folha de papelão.

Passo 3. Em seguida, as bordas restantes são dobradas para cima e coladas, para formar uma caixa sem tampa.

Passo 4. Vamos chamar de l os lados da base da caixa e h a altura da caixa. Então, temos que: $l = A - 2x$ (já que foram recortados quadrados congruentes dos quatro cantos da folha) e que $h = x$ (já que a caixa é formada dobrando as bordas recortadas para cima).

Passo 5. Vamos calcular o volume da caixa utilizando as informações obtidas no passo 4. Note que volume V da caixa é dado por:

$$V = (\acute{a}rea\ da\ base) \times (altura)$$
$$= l \times l \times h$$
$$= (A - 2x) \times (A - 2x) \times x$$
$$= (A^2 - 4Ax + 4x^2) \times x$$
$$= A^2x - 4Ax^2 + 4x^3.$$

Assim, temos que a função volume obtida através das dimensões da caixa de papelão é

$$V(x) = A^2x - 4Ax^2 + 4x^3.$$

Passo 6. Note que, como os lados da folha de papelão medem A cm, após serem recortados os quadrados dos quatro cantos da folha temos que $l = A - 2x$. Nesse sentido, l não pode ser um número negativo, ou seja,

$$0 < l \implies 0 < A - 2x \implies 2x < A \implies x < \frac{A}{2}.$$

Por outro lado, x não pode ser um número menor ou igual a zero, pois neste caso não teríamos os recortes dos cantos e, assim, não conseguiríamos construir uma caixa. Dessa forma, função $V(x)$ está bem definida desde que

$$0 < x \text{ e } x < \frac{A}{2} \implies 0 < x < \frac{A}{2}.$$

Passo 7. Os pontos críticos da função $V(x)$ são obtidos quando por $V'(x) = 0$, ou seja,

$$(A^2x - 4Ax^2 + 4x^3)' = 0$$
$$(A^2x)' - (4Ax^2)' + (x^3)' = 0$$
$$A^2 \times (x)' - 4A \times (x^2)' + 4 \times (x^3)' = 0$$
$$A^2 \times 1 - 4A \times 2x + 4 \times 3 \times (x^2) = 0$$
$$A^2 - 8Ax + 12x^2 = 0$$

Agora, utilizando a fórmula de Bhaskara, temos $A^2 - 8Ax + 12x^2 = 0$ se, e somente se,

$$x = \frac{-(-8A)+\sqrt{(-8A)^2 - 4 \times 12 \times A^2}}{2 \times 12} \text{ ou } x = \frac{-(-8A)-\sqrt{(-8A)^2 - 4 \times 12 \times A^2}}{2 \times 12}$$

$$x = \frac{8A+\sqrt{64A^2-48A^2}}{24} \text{ ou } x = \frac{8A-\sqrt{64A^2-48A^2}}{24}$$

$$x = \frac{8A+\sqrt{16A^2}}{24} \text{ ou } x = \frac{8A-\sqrt{16A^2}}{24}$$

$$x = \frac{8A+4A}{24} \text{ ou } x = \frac{8A-4A}{24}$$

$$x = \frac{12A}{24} \text{ ou } x = \frac{4A}{24}$$

$$x = \frac{A}{2} \text{ ou } x = \frac{A}{6}.$$

Assim, considerando as informações obtidas no Passo 6, podemos afirmar que o único ponto crítico da função $V(x)$ é o ponto $x = \frac{A}{6}$.

Passo 8. Usando o Teste da Segunda Derivada, vamos classificar o ponto crítico $x = \frac{A}{6}$. Do Passo 7, temos que

$$V'(x) = A^2 - 8Ax + 12x^2.$$

Dessa forma, obtemos que

$$\begin{aligned} V''(x) &= \left(V'(x)\right)' \\ &= (A^2 - 8Ax + 12x^2)' \\ &= (A^2)' - (8Ax)' + (12x^2)' \\ &= 0 - 8A + 24x \\ &= -8A + 24x. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$V''(x) = -8A + 24x.$$

Agora, substituindo $x = \frac{A}{6}$, na expressão de $V''(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} V''\left(\frac{A}{6}\right) &= -8A + 24 \times \frac{A}{6} \\ &= -8A + \frac{24A}{6} \\ &= -8A + 4A \\ &= -4A. \end{aligned}$$

Dessa forma, como $V''\left(\frac{A}{6}\right) < 0$ podemos afirmar pelo item (b) do Teste da Segunda

Derivada que o ponto crítico $x = \frac{A}{6}$ é um máximo local de V.

Portanto, para obtermos uma caixa com volume máximo os quadrados das bordas devem ser cortados considerando $x = \frac{A}{6}$.

Exemplo 23. Considerando $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, calcule as coordenadas do valor mínimo que f pode assumir, se $f(x) = x^2 - 4x - 5$.

Solução.

Dada a função $f(x) = x^2 - 4x - 5$. Agora na teoria, sabemos que os pontos críticos são os candidatos a serem os pontos de máximo ou mínimo. Calculando a derivada da função dada, temos

$$f'(x) = 2x - 4,$$

Como os pontos críticos, são obtidos quando a derivada é zero ou não existe, analisaremos apenas o que ocorre com $f'(0) = 0$. Como a derivada de f sempre existe, estudaremos apenas essa situação.

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Para verificarmos que esse valor é o mínimo, usaremos o critério da derivada segunda.

$$f''(x) = 2.$$

Analisando o ponto $x = 2$, temos $f''(2) = 2 > 0$.

Portanto, o ponto $= 2$ é mínimo local e suas coordenadas são $(2, f(2)) = (2, -9)$.

Exemplo 24. Um terreno retangular é cercado por $1500\,m$ de cerca. Quais as dimensões desse terreno para que a sua área seja a maior possível? E qual a área máxima?

Solução.

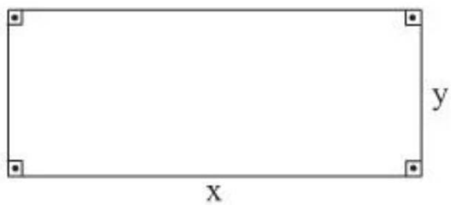

Figura 12: Terreno.

Fonte: Autora.

Como temos um tereno retangular seu perímetro é dado por:

$$A = 2x + 2y = 1500 \Rightarrow x + y = 1500 \Rightarrow y = 750 - x.$$

Por outro lado, a área do tereno retangular de lados x e y como na figura 12 é dada por:

$$A = xy \Rightarrow A = x(750 - x) \Rightarrow A = -x^2 + 750x.$$

Da teoria, sabemos que os pontos críticos são os candidatos a serem os pontos de máximo ou mínimo, logo calculando a derivada da função área, temos:

$$A'(x) = -2x + 750,$$

como os pontos críticos, são obtidos quando a derivada é zero ou não existe, analisaremos apenas o que ocorre com $A'(0) = 0$, já que a derivada de A sempre existe estudaremos apenas essa situação, logo

$$A'(x) = -2x + 750 = 0 \Rightarrow x = 375.$$

Para determinarmos que esse valor seja máximo usaremos o critério da derivada segunda, primeiramente, note que

$$A''(x) = -2.$$

Analisando o ponto $x = 375$, temos que:

$$A''(375) = -2 < 0.$$

Portando $x = 375$ é máximo e como $y = 750 - x$, temos que $y = 375$.

4 ATIVIDADE DIDÁTICA

Neste capítulo, será descrita uma atividade didática que irá explorar as técnicas de derivação que acabamos de estudar no capítulo anterior. Mais precisamente, vamos aplicar o Teste da Segunda Derivada para resolver um problema clássico envolvendo volume de caixas.

4.1 Plano de aula

TÍTULO: Aplicação do Teste da Segunda Derivada para análise de pontos críticos.

ASSUNTO DA AULA: Teste da Segunda Derivada.

UNIDADE TEMÁTICA: Definição de ponto crítico, definição de derivada parcial, definição do teste da segunda derivada, cálculo de segundas derivadas parciais, exemplos do uso do teste da segunda derivada e exercício para praticar o uso do teste da segunda derivada.

CARGA HORÁRIA: 120 minutos

TURMA: 3° ano do Ensino Médio

HABILIDADES BNCC: Analisar o comportamento local de funções de duas variáveis, a partir do estudo de seus pontos críticos e das derivadas parciais de segunda ordem. Aplicar o teste da segunda derivada para determinar se um ponto crítico de uma função de duas variáveis é um máximo, um mínimo ou um ponto de sela.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

O aluno deverá ser capaz de:

- Definir o que é um ponto crítico de uma função de duas variáveis.
- Calcular as segundas derivadas parciais de uma função de duas variáveis.
- Aplicar o teste da segunda derivada para determinar se um ponto crítico é um máximo, um mínimo ou um ponto de sela.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS: Conceitos básicos de cálculo de funções de duas variáveis, como limites, continuidade, derivabilidade e funções diferenciais e cálculo de derivadas parciais de primeira ordem.

RECURSOS NECESSÁRIOS: Quadro e giz ou projetor. Folhas de cartolina, régua, tesoura e cola para o exercício.

METODOLOGIA.

- Aula expositiva dialogada: O professor apresenta o conteúdo da aula de forma clara e objetiva, interagindo com os alunos para esclarecer dúvidas e promover a discussão.
- Resolução de exemplos: O professor resolve exemplos para ilustrar o uso do teste da segunda derivada.
- Exercícios: O professor pode propor exercícios para os alunos resolverem em grupo.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.

Apresentação do objetivo da aula e revisão dos conhecimentos prévios necessários. O professor pode iniciar a aula apresentando o objetivo da aula e revisando os conhecimentos prévios necessários. Isso pode ser feito por meio de uma pergunta, como: “O que vocês sabem sobre pontos críticos de funções de duas variáveis?”. O professor pode então discutir as respostas dos alunos e esclarecer quaisquer dúvidas.

Apresentação da definição do teste da segunda derivada. O professor pode apresentar a definição do teste da segunda derivada de forma clara e objetiva. Isso pode ser feito por meio de uma apresentação em PowerPoint ou no quadro, por exemplo.

Desenvolvimento da aula. Resolução de exemplos para ilustrar o uso do teste da segunda derivada. O professor pode resolver exemplos para ilustrar o uso do teste da segunda derivada, isso pode ser feito passo a passo, explicando as etapas do cálculo e os resultados obtidos.

Exercício para os alunos resolverem em grupo. Os alunos podem resolver o exercício para praticar o uso do teste da segunda derivada.

No fim da aula. Revisão geral do conteúdo da aula. O professor pode fazer uma revisão geral do conteúdo da aula para garantir que os alunos tenham compreendido os conceitos apresentados. O professor deve responder a todas as dúvidas dos alunos para garantir que eles tenham compreendido o conteúdo da aula.

Utilização de recursos tecnológicos. A utilização de recursos tecnológicos pode ajudar a ilustrar o conteúdo da aula e promover a interação entre os alunos. Por exemplo, o professor pode utilizar um software de geometria dinâmica para mostrar aos alunos como o comportamento de uma função pode mudar em torno de um ponto crítico.

PROPOSTA DE AVALIAÇÃO.

A avaliação deve ser um processo contínuo e individual, que ocorre ao longo da aula e não apenas no final. O professor deve estar atento ao desempenho dos alunos durante a aula e fornecer feedback regular. Isso ajudará os alunos a aprender mais efetivamente e a melhorar seu desempenho. O feedback pode ser fornecido de forma oral ou escrita, e deve ser objetivo e construtivo. O feedback deve ajudar os alunos a identificar suas áreas de força e de melhoria.

REFERÊNCIAS.

STEWART, James. **Cálculo**. Tradução Cyro c. Patarra. Ana flora Humes, Claudio Asano, Márcia Tamanaha. 4. Ed. São Paulo: Pioneira, 2003.

FLEMMING, D.; GONÇALVES, M. **Cálculo A: funções, limites, derivação e integração**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

WEIR, J. H. M. D.; GIORDANO, F. R. Cálculo de George B. Thomas Jr. São Paulo: Addison Wesley, 2009.

4.2 Roteiro de aplicação do exercício

✓ Início da aula (25 minutos)

O professor apresenta o objetivo da aula e revisa os conhecimentos prévios necessários.

✓ Desenvolvimento da aula (60 minutos)

Definição do ponto crítico de uma função de duas variáveis, o professor apresenta a definição do ponto crítico de uma função de duas variáveis de forma clara e objetiva. O professor pode utilizar exemplos para ilustrar a definição.

Cálculo da segunda derivada de uma função de duas variáveis, o professor apresenta o cálculo da segunda derivada de uma função de duas variáveis passo a passo ele pode utilizar exemplos para ilustrar o cálculo. Na Apresentação do teste da segunda derivada, o professor apresenta o teste da segunda derivada de forma clara e objetiva ele pode utilizar exemplos para ilustrar o teste.

Por fim, sugerimos que o professor forme quatro grupos para realizar a atividade proposta. Em seguida deve ser entregue cópia da atividade e uma folha de cartolina. Cada grupo receberá uma folha de cartolina com medidas e cores diferente. Recomenda-se, antes que os alunos iniciem a resolução da atividade, e que o professor faça uma leitura detalhada e esclarece todas as dúvidas em relação ao enunciado. Para então, pedir aos alunos para resolver a atividade com atenção, em que, ao final da aula serão analisadas as respectivas respostas.

Atividade 1

Uma caixa sem tampa será feita, recortando-se pequenos quadrados congruentes dos cantos de uma folha de cartolina medindo $A \times A$ cm e dobrando-se os lados para cima. Que tamanho os quadrados das bordas devem ter para que a caixa chegue a sua capacidade máxima?

Cada grupo vai receber uma folha de cartolina com medidas diferentes. Como mostra na figura 13.

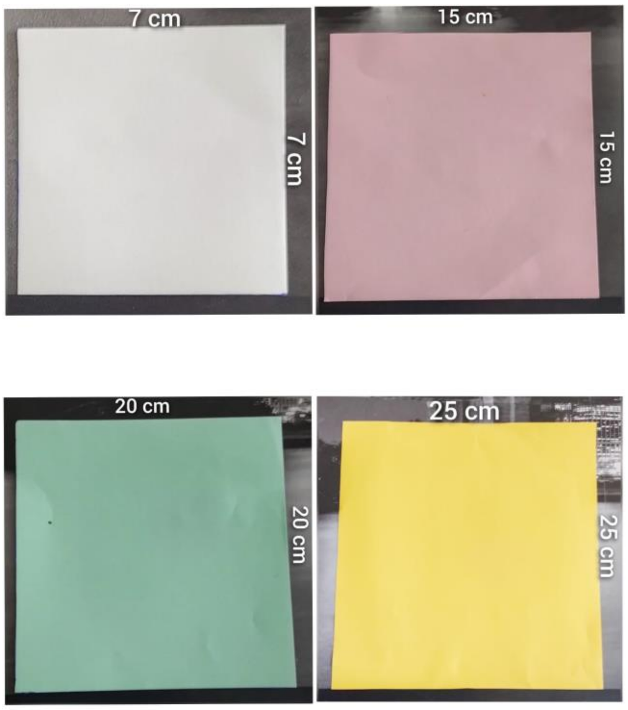

Figura 13: Folhas de cartolina.

Fonte: Autora.

Após a entrega das folhas, os alunos terão que construir uma caixa sem tampa com o maior volume possível. Necessitará usar régua e tesoura para cortar quadrados congruentes de lado x. Em seguida, as bordas restantes são dobradas para cima e a caixa resultante e colada para formar uma caixa sem tampa.

Recomendações metodológicas

Orienta-se ao professor, que destine um tempo para que os alunos possam responder a questão sem ajuda do professor e no final cada grupo apresenta sua atividade. Dessa forma, de posse destas soluções, o professor poderá analisar quais as dificuldades apresentadas pelos alunos. Assim o docente vai dispor de um diagnóstico qualitativo para subsidiar suas intervenções na correção da atividade.

Logo, é viável em um segundo momento que o professor faça uma discussão direcionada visando atender, sanar e diminuir as dificuldades apresentada. O docente deve solicitar que os grupos escolhem um representante. O representante de cada grupo deve apresentar na lousa suas estratégias de resolução, favorecendo com isso, uma interação e participação dos alunos na resolução da atividade.

Assim, tornar a aula mais interessante tanto para o professor quanto para os alunos, tornando-lhes agentes na construção do seu próprio conhecimento matemático. No final da aula o professor apresenta a resolução da atividade na lousa e analisará qual grupo chegou, mas perto.

Simulação da atividade.

O grupo branco retirou os quadrados congruentes com 1 cm (figura 14) .O grupo rosa cortou quadrados congruentes com 2 cm (figura 15), o grupo verde cortou quadrados congruentes com 4,5 cm (figura 16) e por fim o grupo amarelo cortou quadrados congruentes com 7 cm (figura 17).

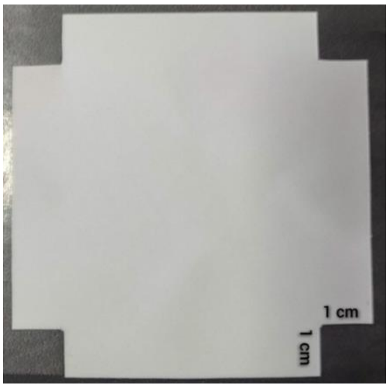

Figura 14: Grupo branco.

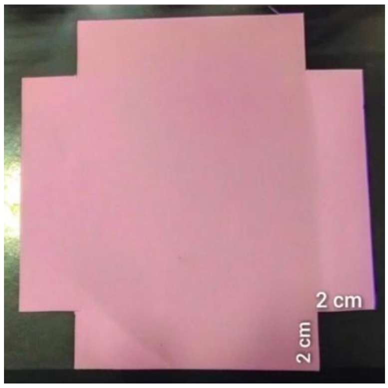

Figura 15: Grupo rosa.

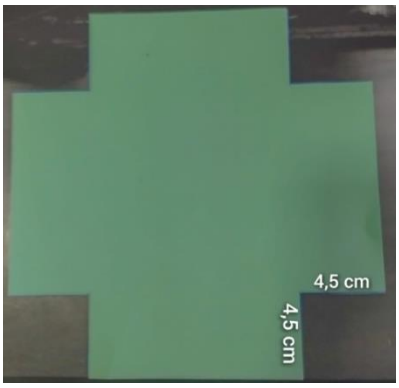

Figura 16: Grupo verde.

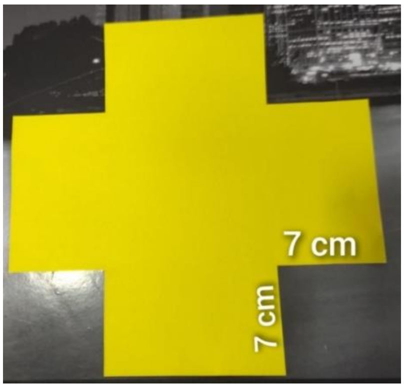

Figura 17: Grupo Amarelo.

Em seguida ocorreu à montagem das caixas, como mostra nas figuras 18, 19, 20 e 21. Assim, consegue calcular o volume obtido de cada caixa.

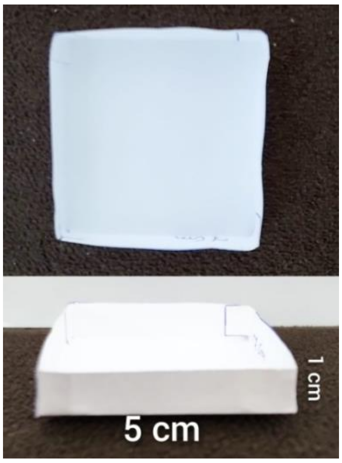

Figura 18: Caixa do grupo branco.

$v = b \times h \times l$

$v = 5 \times 5 \times 1 = 25cm^3$.

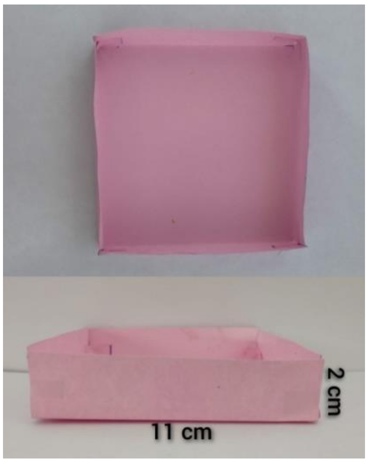

Figura 19: Caixa do grupo rosa.

$v = b \times h \times l$

$v = 11 \times 11 \times 2 = 242cm^3$.

Figura 20: Caixa do grupo verde.

$v = b \times h \times l$

$v = 11 \times 11 \times 4{,}5 = 544{,}5cm^3$.

Figura 21: Caixa do grupo amarelo.

$v = b \times h \times l$

$v = 11 \times 11 \times 7 = 847cm^3$

- ✓ Fim da aula (35 minutos)

Revisão geral do conteúdo da aula, o professor faz uma revisão geral do conteúdo da aula para garantir que os alunos tenham compreendido os conceitos apresentados e realiza a resolução da atividade.

Resolução da Atividade

Solução através do método da segunda derivada

Grupo Branco: Quadrado 7 cm

$$v = l \times L \times h = (7 - 2x)^2 \times x$$

$$= (4x^2 - 28x + 49) \times x$$

$$= 4x^3 - 28x^2 + 49x.$$

Mais precisamente, temos que o volume é uma função que depende de x, descrita por

$$v(x) = 4x^3 - 28x^2 + 49x.$$

Onde aqui x denota o comprimento do lado dos quadrados que foram cortados.

Da teoria, sabemos que os pontos críticos são os candidatos a serem os pontos de máximo e mínimo, logo calculando a

Derivada da função volume temos:

$$v'(x) = 12x^2 - 56x + 49.$$

Como os pontos críticos, são obtidos quando a derivada é zero ou não existe, analisaremos o que ocorre com $v'(x) = 0$, já que a derivada de v sempre existe estudaremos apenas essa situação, logo

$$v'(x) = 12x^2 - 56x + 49 = 0 \rightarrow x_1 = 3.5 \;\; e \; x_2 \cong 1.17.$$

Para determinarmos quais desses valores é máximo usaremos o critério da derivada segunda, primeiramente, note que

$$v''(x) = 24x - 56.$$

Analisando os pontos $x_1 = 3.5 \;\; e \; x_2 \cong 1.17$, temos:

$$v''(3.5) = 24.(3.5) - 56 = 28 > 0 \rightarrow \; x_1 = 3.5$$

é um ponto de mínimo. Por outro lado, temos,

$$v''(1.17) = 24.(1.17) - 56 = -27{,}92 < 0 \rightarrow x_2 = 1.17$$

é um ponto máximo.

Portanto os quadrados retirados deverão ter lados medindo $x = 1.17$

Assim, o volume máximo possível será de $v = 4{,}66 \times 4{,}66 \times 1{,}17 = 25{,}41cm^3$.

Grupo Rosa: Quadrado 15 cm

$$v = l \times L \times h = (15 - 2x)^2 \times x$$

$$= (4x^2 - 60x + 225) \times x$$

$$= 4x^3 - 60x^2 + 225x.$$

Mais precisamente, temos que o volume é uma função que depende de x, descrita por

$$v(x) = 4x^3 - 60x^2 + 225x.$$

Onde aqui x denota o comprimento do lado dos quadrados que foram cortados.

Da teoria, sabemos que os pontos críticos são os candidatos a serem os pontos de máximo e mínimo, logo calculando a derivada da função olume, temos:

$$v'(x) = 12x^2 - 120x + 225.$$

Como os pontos críticos, são obtidos quando a derivada é zero ou não existe, analisaremos o que ocorre com $v'(x) = 0$, já que a derivada de v sempre existe estudaremos apenas essa situação, logo

$$v'(x) = 12x^2 - 120x + 225 = 0 \rightarrow x_1 = 7.5 \;\; e \; x_2 = 2.5.$$

Para determinarmos quais desses valores é máximo usaremos o critério da derivada segunda, primeiramente, note que

$$v''(x) = 24x - 120.$$

Analisando os pontos $x_1 = 7.5 \;\; e \; x_2 = 2.5$, temos:

$$v''(7.5) = 24.(7.5) - 120 = 60 > 0 \rightarrow \; x_1 = 7.5$$

é um ponto de mínimo.

Por outro lado temos,

$$v''(2.5) = 24.(2.5) - 120 = -60 < 0 \rightarrow x_2 = 2.5$$

é um ponto máximo .

Portanto os quadrados retirados deverão ter lados medindo $x = 2.5$.

Assim, o volume máximo possível será de $v = 10 \times 10 \times 2{,}5 = 250cm^3$.

Grupo verde: Quadrado 20 cm

$$v = l \times L \times h = (20 - 2x)^2 \times x$$

$$= (4x^2 - 80x + 400) \times x$$

$$= 4x^3 - 80x^2 + 400x.$$

Mais precisamente, temos que o volume é uma função que depende de x, descrita por

$$v(x) = 4x^3 - 80x^2 + 400x.$$

Onde aqui x denota o comprimento do lado dos quadrados que foram cortados.

Da teoria, sabemos que os pontos críticos são os candidatos a serem os pontos de máximo e mínimo, logo calculando a derivada da função volume, temos:

$$v'(x) = 12x^2 - 160x + 400.$$

Como os pontos críticos, são obtidos quando a derivada é zero ou não existe, analisaremos o que ocorre com $v'(x) = 0$, já que a derivada de v sempre existe estudaremos apenas essa situação, logo

$$v'(x) = 12x^2 - 160x + 400 = 0 \rightarrow x_1 = 10 \ \ e \ x_2 \cong 3.33$$

Para determinarmos quais desses valores é máximo usaremos o critério da derivada segunda, primeiramente, note que

$$v''(x) = 24x - 160.$$

Analisando os pontos $x_1 = 10 \ \ e \ x_2 \cong 3.33$, temos:

$$v''(10) = 24.(10) - 160 = 80 > 0 \rightarrow \ x_1 = 10$$

é um ponto de mínimo. Por outro lado temos,

$$v''(3.33) = 24.(3.33) - 160 = -80.08 < 0 \rightarrow x_2 = 3.33$$

é um ponto máximo.

Portanto os quadrados retirados deverão ter lados medindo $x = 3.33$.

Assim, o volume máximo possível será de $v = 13{,}34 \times 13{,}34 \times 3{,}33 = 592{,}59cm^3$.

Grupo Amarelo: Quadrado 25 cm

$$v = l \times L \times h = (25 - 2x)^2 \times x$$

$$= (4x^2 - 100x + 625) \times x$$

$$= 4x^3 - 100x^2 + 625x.$$

Mais precisamente, temos que o volume é uma função que depende de x, descrita por

$$v(x) = 4x^3 - 100x^2 + 625x.$$

Onde aqui x denota o comprimento do lado dos quadrados que foram cortados.

Da teoria, sabemos que os pontos críticos são os candidatos a serem os pontos de máximo e mínimo, logo calculando a derivada da função volume, temos:

$$v'(x) = 12x^2 - 200x + 625.$$

Como os pontos críticos, são obtidos quando a derivada é zero ou não existe, analisaremos o que ocorre com $v'(x) = 0$, já que a derivada de v sempre existe estudaremos apenas essa situação, logo

$$v'(x) = 12x^2 - 200x + 625 = 0 \rightarrow x_1 = 12{,}5 \quad e\; x_2 \cong 4{,}17.$$

Para determinarmos quais desses valores é máximo usaremos o critério da derivada segunda, primeiramente, note que

$$v''(x) = 24x - 200.$$

Analisando os pontos $x_1 = 12{,}5 \quad e\; x_2 \cong 4{,}17$, temos:

$$v''(12{,}5) = 24.(12{,}5) - 200 = 100 > 0 \rightarrow \; x_1 = 12{,}5$$

é um ponto de mínimo.

Por outro lado temos,

$$v''(4{,}17) = 24.(4{,}17) - 200 = -99{,}92 < 0 \rightarrow x_2 = 4{,}17$$

é um ponto máximo.

Portanto os quadrados retirados deverão ter lados medindo $x = 4{,}17$.

Assim, o volume máximo possível será de

$$v = 16{,}66 \times 16{,}66 \times 4{,}17 = 1.157{,}41cm^3.$$

Por fim, O professor responde a todas as dúvidas dos alunos para garantir que eles tenham compreendido o conteúdo da aula.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O decorrer do trabalho foi desenvolvido conceitos e exemplos com o objetivo de facilitar tanto o entendimento daqueles que forem estudar o assunto abordado aqui quanto atraí-los para uma visão prática da utilização da segunda derivada. É comum a indagação dos alunos sobre a aplicação dos conteúdos estudados, e é gratificante perceber que a aplicação da segunda derivada foi bem trabalhada e reforçada durante o trabalho. Percebe-se que, apesar da derivada ser muito útil até mesmo para resolver exercícios do ensino básico, ela precisa de um embasamento teórico e de uma maturidade construída ao longo dos anos. Portanto, é necessária a inserção introdutória de conteúdos do cálculo diferencial - limite e derivadas, ainda no ensino médio.

Esse trabalho tem o potencial de contribuir para o desenvolvimento de um ensino de derivadas mais significativo e eficaz na educação básica. Espero que ajude os professores a desenvolver uma compreensão mais profunda dos conceitos de derivadas e suas aplicações, identificar estratégias de ensino e aprendizagem que sejam eficazes para o ensino de derivadas e desenvolver materiais didáticos que sejam relevantes e estimulantes para os alunos.

Diante das conclusões obtidas, percebe-se a importância da segunda derivada como uma ferramenta primordial para a análise de funções. Ela pode ser usada para determinar a natureza de pontos críticos, o que pode ser útil para a compreensão do comportamento de uma função. No caso específico desse problema, a segunda derivada nos permitiu determinar os pontos críticos e obtermos uma caixa com volume máximo. O estudo contribuiu para o meu aprendizado e ajudou a desenvolver as seguintes habilidades e competências que serão importantes para a minha prática profissional como futura professora, como a capacidade de planejar e desenvolver aulas que sejam significativas e relevantes para os alunos. O estudo me ajudou a entender a importância de apresentar os conceitos de derivadas de forma intuitiva e contextualizada, utilizando exemplos concretos e problemas do mundo real.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] DALL'ANESE, Cláudio. Conceito de Derivada: **Uma Proposta para o seu Ensino e aprendizagem**. PUC-SP, 2000. Disponível em https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11160/1/dissertacao_claudio_dall%20Anese.pdf.Acesso em: julho 2023.

[2] FLEMMING, D.; GONÇALVES, M. **Cálculo A: funções, limites, derivação e integração**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

[3] LEITHOLD, Louis: **O Cálculo com geometria analítica**. 2. ed. Campinas: Edit. Harbra Ltda, 1986. Tradução Antonio Paques, Otilia Teresinha W. Paques, Sebastião Antonio Jose Filho. v.1.

[4] STEWART, James. **Cálculo**. Tradução Cyro c. Patarra. Ana flora Humes, Claudio Asano, Márcia Tamanaha. 4. ed. São Paulo: Pioneira, 2003.

[5] WEIR, J. H. M. D.; GIORDANO, F. R. **Cálculo de George B. Thomas Jr. São Paulo**: Addison Wesley, 2009.