UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA – FAMAT

BRENDA DIAS LOPES

EXPLORANDO A MATEMÁTICA DAS ABELHAS: UMA PROPOSTA DE VIDEOAULAS INTERATIVAS PARA O ENSINO MÉDIO

Uberlândia – MG
2023

BRENDA DIAS LOPES

EXPLORANDO A MATEMÁTICA DAS ABELHAS: UMA PROPOSTA DE VIDEOAULAS INTERATIVAS PARA O ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia como requisito parcial para obtenção do título de licenciada em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientadora: Érika Maria Chioca Lopes

Uberlândia – MG

2023

BRENDA DIAS LOPES

EXPLORANDO A MATEMÁTICA DAS ABELHAS: UMA PROPOSTA DE VIDEOAULAS INTERATIVAS PARA O ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia como requisito parcial para obtenção do título de licenciada em Matemática.

Uberlândia, 29 de novembro de 2023.

Banca examinadora:

____

Profª Drª. Érika Maria Chioca Lopes (orientadora)
Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia (UFU)

____

Prof. Dr. Arlindo José de Souza Junior (membro)
Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia (UFU)

____

Prof. Dr. Douglas Marin (membro)
Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia (UFU)

Uberlândia - MG
2023

AGRADECIMENTOS

Quero iniciar meus agradecimentos à minha família, em especial aos meus pais, Roberto e Alaíde, pelo apoio incondicional em todos os aspectos, mesmo à distância. Amo vocês profundamente e sou imensamente grata pelo constante apoio, encorajamento e suporte que me proporcionaram ao longo de toda a minha vida.

Ao meu namorado José Victor, meu grande apoio e motivador. Desde o momento em que cheguei a uma cidade nova, foi a primeira pessoa que me fez sentir amada e acolhida. Nos momentos de maior incerteza, quando minha própria fé vacilava, sua confiança em mim foi inestimável. Sua presença constante, o amor e as risadas que compartilhamos são lembranças das quais guardarei com muito carinho.

Agradeço imensamente aos meus amigos que estiveram ao meu lado nessa jornada, em especial à Luana, Maria Eduarda e Tamiris. Juntas, enfrentamos desafios, desde os momentos de desespero antes de uma prova difícil até a determinação de seguir adiante, unidas até a reta final. Cada um dos inúmeros momentos que compartilhamos permanecerá eternamente em minha memória. São lembranças especiais que jamais se apagarão.

Expresso minha profunda gratidão aos professores que me guiaram e compartilharam conhecimentos ao longo desses anos. Agradeço especialmente à Ana Cláudia, cujo apoio ultrapassou os limites acadêmicos e se estendeu à amizade sincera.

Gostaria de expressar meus agradecimentos aos membros da banca examinadora, Arlindo José de Souza Junior e Douglas Marin, por dedicarem seu tempo, conhecimento e expertise na avaliação e análise deste trabalho. Suas contribuições, críticas construtivas e sugestões foram fundamentais para o aprimoramento deste estudo.

E, sem sombra de dúvidas, à minha orientadora Érika Maria Chioca Lopes. Além de guiar este trabalho com maestria, Érika tornou-se uma amiga desde o primeiro período. Sua orientação atenta e empática foi além do esperado. Agradeço por seu cuidado minucioso, seu encorajamento incansável e por sempre acreditar no meu potencial, mesmo nos momentos de dúvida. Sua contribuição não apenas acadêmica, mas também pessoal, foi inestimável e fez toda a diferença neste trabalho. Sou imensamente grata por ter tido a oportunidade de aprender e crescer sob sua orientação.

RESUMO

À medida que a tecnologia avança rapidamente em diversos setores, a escola muitas vezes parece caminhar com passos mais lentos nessa direção. Em decorrência disso, é importante repensar em como podemos inserir a tecnologia no ambiente escolar de forma que ela se torne mais presente nesse setor. Isso vai além de simplesmente disponibilizar dispositivos e recursos tecnológicos, requer um planejamento cuidadoso para integrá-los de maneira a enriquecer o processo de aprendizagem. Sendo assim, buscamos entender a viabilidade da utilização das videoaulas interativas como uma ferramenta tecnológica com propósitos pedagógicos. Dito isso, este estudo teve como objetivo desenvolver uma sequência de videoaulas interativas abordando conteúdos de geometria e trigonometria do Ensino Médio, utilizando conceitos matemáticos associados ao contexto das abelhas. O processo de criação das videoaulas foi embasado nas Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), e fundamentado nos conceitos de interação e interatividade, e na teoria da Modelagem Matemática. Após a gravação das videoaulas, estas foram incorporadas à plataforma *Edpuzzle*, permitindo a inserção de elementos interativos. Para avaliação, a sequência de videoaulas interativas foi testada com a turma de Informática e Ensino do curso de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, visando a obtenção de relatórios que permitiram uma análise mais detalhada das funcionalidades presentes na plataforma. A análise dos resultados revelou que as videoaulas interativas oferecem uma experiência mais próxima ao ambiente de sala de aula, pois permite, por meio da interação mediada, o estabelecimento de uma comunicação consistente professor-aluno, através de dispositivos tecnológicos. Este trabalho visa contribuir com a comunidade docente, ao disponibilizar essa sequência de videoaulas para uso educacional. Além disso, almeja-se que, ao explorarem essas videoaulas e entenderem as funcionalidades da plataforma, os docentes se sintam inspirados a criar suas próprias produções, incorporando o contexto da modernidade tecnológica em suas práticas educacionais, enriquecendo seu conjunto de ferramentas pedagógicas.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Interatividade, Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação, GeoGebra, Abelhas.

ABSTRACT

As technology rapidly advances into many sectors, schools often seem to take slower steps in this direction. As a result, it is important that we think over about how to insert technology in a school environment in a way that it becomes more present in this sector. This goes beyond simply making gadgets and technological resources available. It requires careful planning to integrate them in a way as to enrich the learning process. Therefore, we seek to understand the viability of interactive video lessons as a technological tool with pedagogical purposes. That said, this study aims to develop a sequence of interactive video lessons adressing High School geometry and trigonometry subjects, using mathematical concepts associated to the context of bees. The creative process of the video lessons was based on the Digital Technologies of Information and Communication (TDIC), and grounded in the concepts of interaction and interactivity and in the theory of Mathematical Modeling. After the recording of the video lessons, they were incorporated into the Edpuzzle platform, allowing for the insertion of interactive elements. For its evaluation, the sequency of interactive video lessons was tested in the class of IT and Teaching of the Mathematics Course of the Federal University of Uberlândia, aiming to obtain reports that would allow a further detailed analysis of the platform's functionalities. The analysis of the results showed that the interactive video lessons offer an experience closer to the classroom environment, since it allows, through mediated interaction, the establishment of a consistent communication between teacher and student, via technological devices. This study aims to contribute to the teaching community by making available this sequence of interactive video lessons for educational purposes. Furthermore, it is desired that, by exploring the video lessons and understanding the functionalities of the platform, teachers feel inspired to create their own productions, incorporating the context of modern technology in their educational practices, enhancing their set of pedagogical tools.

Keywords: Mathematical Modeling, Interactivity, Digital Information and Communication Technologies, GeoGebra, Bees.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A sociedade moderna está imersa em um mundo altamente dinâmico e tecnológico, no qual as informações são acessadas facilmente através de dispositivos que se conectam à *Internet*. O universo educacional não deve ser desassociado dessa evolução, ou seja, é importante que as práticas de ensino acompanhem o ritmo do mundo contemporâneo e forneça aos alunos mecanismos que os permitam acessar os conteúdos de maneira tão fácil e ágil quanto acessam outras informações, fazendo com que a escola não se torne um espaço obsoleto. Esse pensamento vai ao encontro das ideias de Valente (2018, p. 19), enfatizando ainda que "a questão, portanto, não é alterar os conteúdos disciplinares, mas, sim, a maneira como eles devem ser trabalhados.".

Essa nova realidade demanda uma abordagem educacional mais inovadora e interativa, que faça uso de recursos tecnológicos que cativem os estudantes e os forneça a oportunidade de organizar a rotina de estudo de maneira mais flexível. Perante o exposto, surge a importância dos educadores se questionarem: Como utilizar as novas tecnologias para aprimorar o processo de ensino e aprendizagem?

Livros e apostilas já não são mais a prioridade quando o assunto é a busca pelo conhecimento, o estudante "prefere os tutoriais *online* ou os vídeos no *YouTube* para entender como as coisas funcionam." (Valente, 2018, p. 17). No entanto, se o professor optar por atribuir videoaulas como tarefas escolares, enfrentará certas limitações. Em primeiro lugar, não há como garantir que os alunos realmente assistirão aos vídeos. Além disso, o professor não terá meios de verificar o andamento dessas tarefas, ou seja, não poderá identificar, por si só, os momentos em que os alunos encontraram dificuldades para compreender o conteúdo, nem ter acesso a possíveis questionamentos que possam surgir durante a visualização dos vídeos. Essa falta de acompanhamento pode resultar em uma lacuna de compreensão e dificultar o processo de aprendizagem. Levando em conta isso, surge uma nova pergunta: Como utilizar videoaulas de maneira a permitir que o professor se mantenha envolvido no processo?

Uma alternativa para encararmos o questionamento acima é a utilização de videoaulas interativas, que se diferem das videoaulas comuns uma vez que demanda participação do espectador, por meio de respostas a questionamentos que surgirão em determinados momentos, para que este consiga prosseguir na visualização do conteúdo restante.

Além disso, as plataformas onde as videoaulas interativas são disponibilizadas fornecem diversas informações para o produtor do material, como por exemplo: quem assistiu aos vídeos, os momentos em que o internauta pausou ou retrocedeu, possíveis comentários tecidos pelos espectadores, respostas das perguntas adicionadas no decorrer do vídeo, percentual de acertos, entre outros detalhes. Sendo assim, o professor tem dados bastante precisos sobre o empenho dos alunos diante da atividade proposta, podendo utilizar dessas informações para identificar possíveis entraves e elaborar uma maneira de combate-los (Chagas; Linhares; Barroso, 2019).

Perante o exposto, esta pesquisa será guiada pela seguinte questão: **Como elaborar uma sequência de videoaulas interativas para ensinar geometria e trigonometria no Ensino Médio, com uma abordagem que associa Matemática e abelhas?** Para que, dessa forma, o professor possa usufruir das informações coletadas como uma orientação no processo de ensino.

Na disciplina "Oficina de Prática Pedagógica", que faz parte da grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática na UFU (Universidade Federal de Uberlândia), realizei estudos sobre os Temas Contemporâneos Transversais, especificamente sobre o Meio Ambiente, fundamentados no Currículo Referência de Minas Gerais.

> A transversalidade curricular tem como proposta abordar temas e conteúdos de relevância para a aprendizagem, de forma a explicitar a integração entre os diferentes componentes, fazer a conexão destes com as situações vivenciadas pelos estudantes e contribuir para a articulação das temáticas contemporâneas com o contexto e os interesses dos estudantes [...]. (Minas Gerais, 2018, p.49)

Assim, para construir uma proposta didática transversal que abarcasse o Meio Ambiente e se relacionasse com a área do conhecimento a ser desenvolvida que, no contexto em questão, é a Matemática, surge a iniciativa de explorar a matemática desenvolvida pelas abelhas devido à sua fascinante natureza e à maneira elaborada como demonstram comportamento e habilidades organizacionais. Essa temática proporciona, ainda, a possibilidade de construir um debate crítico sobre a necessidade da preservação desse inseto para a manutenção da vida na Terra. Ademais, explorar a aplicação da Matemática nas abelhas torna o processo de aprendizado envolvente e demonstra aos alunos que a matemática pode ser encontrada em contextos surpreendentes. Isso estabelece uma conexão com o mundo real, despertando o interesse dos alunos e mostrando-lhes a relevância da Matemática em suas vidas.

Diante desse contexto, o objetivo deste trabalho é desenvolver uma sequência de videoaulas interativas que abordem conteúdos de geometria e trigonometria, previstos para serem ensinados no Ensino Médio, utilizando a matemática associada às abelhas. Os alvéolos criados pelas abelhas servirão como pano de fundo e elo de ligação entre as videoaulas produzidas, a fim de criar um cenário mais estimulante e palpável no cotidiano dos estudantes. Com isso, visamos utilizar desses recursos tecnológicos para oferecer maior praticidade e conforto, de modo que os discentes possam realizar os estudos de acordo com sua disponibilidade e, ao mesmo tempo, o professor não perca a capacidade de acompanhar o desenvolvimento individual de cada estudante, sendo esse o intuito de empregar a interatividade nos vídeos.

Como objetivo específicos, pretendemos:

(i) estudar referenciais teóricos referente as temáticas de pesquisa;

(ii) relacionar as criações das abelhas com conteúdo matemáticos abordados na Educação Básica;

(iii) produzir videoaulas interativas de até 20 minutos;

(iv) analisar a interatividade elaborada nos vídeos;

(v) analisar as possibilidades para o professor a partir dos recursos presentes na plataforma onde os vídeos serão inseridos.

A estrutura deste trabalho é organizada da seguinte maneira em relação à disposição:

A seção 2 englobará as teorias que fundamentaram esta pesquisa. Serão analisadas as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação com base nas ideias de Valente (2018), Barcelos e Batista (2015), Carneiro e Passos (2014), e Kenski (2007). Em seguida, serão discutidos os conceitos de Interação e Interatividade sob a orientação de Tonus (2007) no contexto da interação mediada, além da relevância da bidirecionalidade na comunicação, como defendido por Yacci (2000). Por último, será abordada a Modelagem Matemática a partir da perspectiva de Bassanezi (2002), incluindo o desenvolvimento de todas as modelagens presentes nas videoaulas elaboradas.

Na seção 3, abordaremos os procedimentos metodológicos adotados durante a realização desta pesquisa e na criação dos vídeos, detalhando o local, os recursos e aplicativos empregados na gravação. Ademais, caracterizaremos a turma de Informática e Ensino na qual aplicamos, como um teste piloto, a sequência de videoaulas.

Na seção 4, iremos apresentar a análise da interatividade presente nos vídeos, juntamente com as habilidades da Base Nacional Comum Curricular e do Currículo Referência de Minas Gerais que podem ser desenvolvidas em cada um deles. Em sequência, serão mostradas as possibilidades de ferramentas que podem ser utilizadas pelo produtor dos conteúdos, utilizando os relatórios produzidos pela aplicação para isso.

Por fim, a última seção traz as considerações finais desta pesquisa, assim como indicações para trabalhos futuros.

2. ASPECTOS TEÓRICOS

Nesta seção, discutiremos os pressupostos teóricos que embasaram a elaboração da sequência de videoaulas interativas produzida nesta pesquisa. O estudo realizado foi feito por meio da leitura e reflexões a partir de artigos, livros, dissertações e teses oriundos de pesquisas voltadas para o uso das TDIC, para os conceitos de interação e interatividade e para a Modelagem Matemática.

2.1 TECNOLOGIAS DIGITAIS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO

A contemporaneidade é marcada por uma rápida e abrangente implementação das tecnologias digitais em diversos âmbitos da sociedade, revolucionando a maneira como as pessoas interagem, comunicam-se e realizam tarefas. No entanto, um cenário diferente emerge quando observamos o setor educacional. Enquanto muitos setores abraçaram as vantagens oferecidas pelas tecnologias digitais, as escolas ainda frequentemente se mantêm fiéis ao tradicional modelo "lápis e papel" (Valente, 2018). A abordagem educacional tradicional é aquela em que a participação do aluno em sala de aula se resume em seguir ordens estipuladas pela figura principal, o professor. Nela, o papel do aluno é escutar, copiar, decorar e reproduzir, não havendo espaço para investigar as informações, manipular os dados, levantar hipóteses ou, até mesmo, questionar os resultados. Na menção ao tradicional modelo "lápis e papel", Valente também aponta uma crítica à sua estagnação tecnológica em face das diversas oportunidades disponíveis para aprimorar o processo formativo.

Embora o modelo retratado anteriormente tenha sido o alicerce do ensino por gerações, e seja crucial reconhecer que esse modelo pedagógico clássico não seja inerentemente ineficaz, já que ele serviu como a base fundamental do ensino antes da era das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), a implementação desses recursos pode desencadear uma transformação positiva na forma como os alunos se apropriam e aplicam o conhecimento. Nesse sentido, Barcelos e Batista (2015, p. 132) argumentam que as TDIC

> [...] podem trazer contribuições para a educação formal, enriquecendo as situações de aprendizagem em sala de aula e ampliando as possibilidades de pesquisa. Tais tecnologias possibilitam experimentações, muitas vezes difíceis de serem realizadas sem o uso das mesmas, colaboram em atividades de investigação, permitindo análises críticas e estabelecimento de hipóteses e, entre outras ações, facilitam visualizações, manipulações e levantamento de informações.

O estudo conduzido por Carneiro e Passos (2014), envolvendo 16 professores com formação em Licenciatura em Matemática e que incorporavam TDIC em suas práticas de ensino, revelou perspectivas interessantes. Alguns docentes reconhecem que a tecnologia está entrelaçada no dia a dia dos estudantes e que o domínio dessa ferramenta está destinado a se tornar uma habilidade essencial no pleno exercício da cidadania.

De fato, a habilidade de utilizar tecnologias está se tornando cada vez mais crucial para uma participação na sociedade contemporânea. Um exemplo dessa tendência é a transição gradual de documentos tradicionais para suas versões digitais, assim como a transformação dos sistemas bancários em plataformas virtuais, incluindo a própria moeda digital.

> As mudanças contemporâneas advindas dos usos das redes transformaram as relações com o saber. As pessoas precisam atualizar seus conhecimentos e competências periodicamente, para que possam manter qualidade em seu desempenho profissional. (Kenski, 2007, p. 47)

Nesse contexto, a educação desempenha um papel de extrema relevância ao aproximar os alunos desses recursos tecnológicos, não apenas por almejar que eles estejam aptos a lidar com os desafios cotidianos, mas também por ser uma estratégia para capacitá-los a enfrentar as demandas e as oportunidades do mundo profissional.

De acordo com a interpretação dos relatos dos professores da pesquisa citada anteriormente, no que diz respeito às vantagens do uso de tecnologias em aulas de Matemática, os autores Carneiro e Passos (2014, p. 117) destacam que

> [...] as tecnologias permitem despertar nos estudantes o interesse e a motivação para aprender matemática, podendo auxiliar a desfazer a imagem dessa disciplina como apenas memorização de fórmulas, algoritmos e procedimentos que são aplicados de forma mecânica. Ainda, elas podem auxiliar e facilitar a compreensão dos conteúdos matemáticos e desenvolver a imaginação e a criatividade.

Além disso, os professores pesquisados enfatizaram outros aspectos benéficos decorrentes da utilização das TDIC, tais como: uma maior facilidade na aplicação e visualização dos conceitos trabalhados, especialmente em tópicos como Geometria; uma compreensão mais aprofundada de elementos de natureza abstrata; uma notável elevação na motivação e no interesse dos alunos em sala de aula; uma execução mais ágil de cálculos; otimização do tempo ao realizar atividades construtivas, dentre outros.

Embora, como já mencionado, as tecnologias digitais apresentem diversas justificativas para serem postas em prática no ramo educacional, é importante levar em consideração que apenas a sua implementação não garante melhorias autonomamente.

Nessa direção, Kenski (2007, p. 46) retrata que para haver mudanças significativas, "é preciso saber usar de forma pedagogicamente correta a tecnologia escolhida", destacando a significância de tornar harmônico os conteúdos a serem ministrados com as motivações pessoais de cada aprendiz, suas competências, vocações, conhecimentos e objetivos. Os pesquisadores consultados neste estudo são unânimes em afirmar que é preciso haver um redimensionamento do papel do professor, que deixa de centralizar a apresentação do conteúdo, e passa a aproveitar os recursos tecnológicos para planejar situações com foco na aprendizagem e nas interações, tornando-se um mediador de todo o processo.

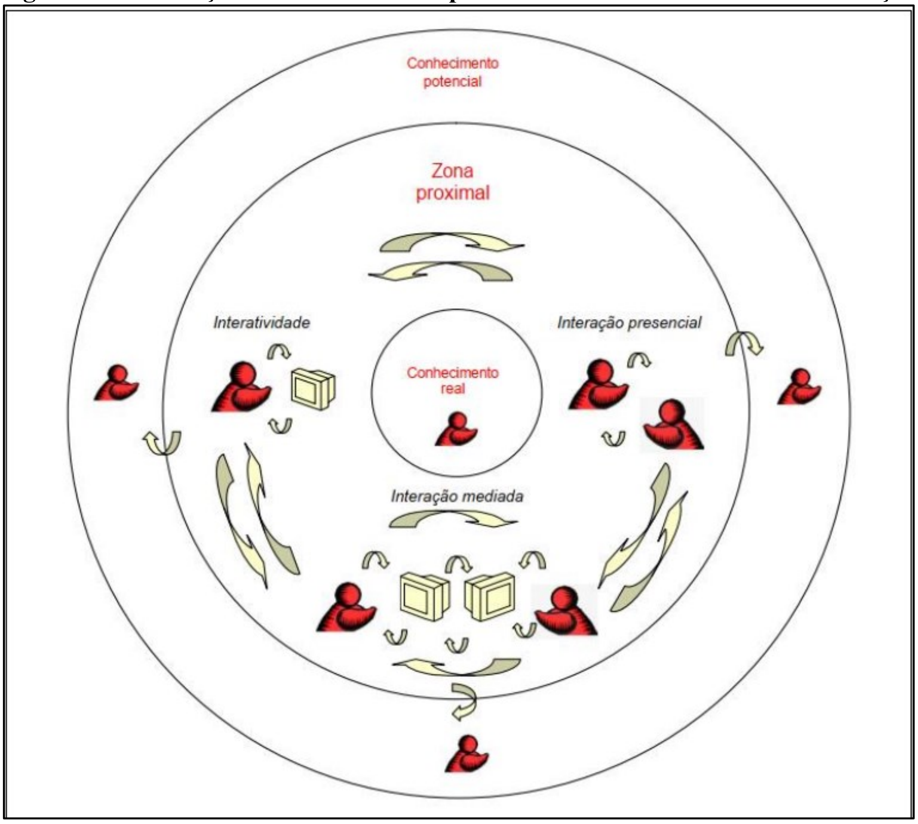
2.2 INTERAÇÃO E INTERATIVIDADE

Desde o nascimento, os seres humanos são inerentemente inclinados a interagir com o meio em que vivem. De fato, pode-se afirmar que viver é, em sua essência, um ato contínuo de interação. Embora a interação humana sempre tenha sido fundamental para a nossa existência social, a sociedade contemporânea testemunha uma revolução na forma como nos relacionamos com o ambiente ao nosso redor. Atualmente, observamos uma crescente tendência em que a interação não se limita apenas a aquelas entre seres humanos, mas, cada vez mais, também se estende para o domínio das interações entre seres humanos e máquinas.

Por essa razão, Mattar (2009) apresenta uma síntese de autores que abordam os conceitos de interação e interatividade. Para Wagner (1994, 1997 *apud* Mattar, 2009), esses conceitos são separados, no qual a interação estaria associada à relação entre indivíduos, suas trocas e os grupos que se influenciam, enquanto a interatividade se relacionaria com a tecnologia.

Nesse sentido, Tonus (2007) descreve três distintas formas de interação: a interação presencial, que ocorre quando pessoas se envolvem diretamente umas com as outras; a interatividade, que se manifesta quando seres humanos interagem com máquinas; e, por fim, a interação mediada, na qual a comunicação entre indivíduos é intermediada por dispositivos tecnológicos, possibilitando a conexão entre as pessoas através dessas máquinas. A figura a seguir ilustra essas ideias.

Figura 1: Construção do conhecimento por meio da interatividade e da interação



Fonte: Tonus (2007, p. 82)

A crescente expansão das tecnologias modernas, especialmente a *Internet*, tem proporcionado novas perspectivas no desenvolvimento de conteúdos e recursos pedagógicos. Conforme apontado por Mattar (2009), são diversas as opções disponíveis para a construção de materiais educacionais digitais, tais como: som, texto, imagens, vídeo e realidade virtual. Sendo as videoaulas interativas o recurso escolhido para ser utilizado nessa pesquisa.

As videoaulas interativas são aulas em formato de vídeo que incorporam elementos interativos para envolver os alunos de maneira ativa durante o aprendizado (Chagas; Linhares; Barroso, 2019). A principal diferença entre as videoaulas interativas e as videoaulas comuns está na possibilidade de interação e participação ativa dos alunos. Nas videoaulas comuns, os estudantes assistem passivamente aos vídeos, sem interagir ou participar ativamente. Já nas videoaulas interativas, os alunos têm a oportunidade de responder a perguntas, resolver problemas, tomar decisões e receber *feedback*.

Neste trabalho, investigaremos a interação mediada conforme concebida por Tonus (2007). O professor disponibilizará uma videoaula interativa por meio da plataforma *online*

Edpuzzle[1]. Isso permitirá aos alunos acessá-la de seus computadores ou dispositivos móveis, estabelecendo, assim, um canal de comunicação mediado por tecnologia.

Essa categoria de videoaula permite que o professor adicione pausas em momentos adequados para realizar perguntas ao telespectador, tanto discursivas quanto de múltipla escolha, a respeito do conteúdo assistido, podendo configurar de modo que a continuação da visualização só seja permitida após a resposta à pergunta. Também é possível inserir pausas para a inclusão de notas. Esse recurso se mostra útil, por exemplo, para direcionar os alunos a materiais complementares, destacar momentos importantes, elucidar postos-chave, dentre outras utilidades.

Entretanto, para que a utilização desse recurso traga aprimoramento, é importante que o professor tenha conhecimento sobre a forma como os alunos interagiram com o material. Sendo assim, Yacci (2000) abrange a concepção do *loop* interativo, que destaca a importância da bidirecionalidade na interação. No contexto escolar, a interatividade requer que a mensagem seja transmitida do professor para o aluno e que, por sua vez, o aluno retorne uma mensagem em resposta e, por fim, o professor retorne um feedback sobre a mensagem para o aluno.

Nessa perspectiva, a interatividade não é apenas uma via de mão única, mas sim um processo dinâmico de troca e diálogo entre o professor e o aluno. Essa comunicação bidirecional é fundamental para o engajamento dos estudantes e a construção do conhecimento de forma ativa e participativa.

2.3 MODELAGEM MATEMÁTICA

"Para que serve isso, professora?" Esse questionamento é muito frequente em aulas de Matemática e revela a necessidade de que os conteúdos matemáticos estudados façam sentido, e não sejam meros procedimentos, ou conceitos abstratos a serem memorizados. Como dizia D'Ambrosio no prefácio de Bassanezi (2002), "Teorias e técnicas são apresentadas e desenvolvidas, muitas vezes, sem relacionamento com fatos reais, mesmo quando são ilustradas com exemplos, geralmente artificiais. Entende-se a razão disso. A realidade é muito complexa.".

Uma alternativa para tentar conectar a Matemática com situações mais "palpáveis" para os alunos é a utilização da Modelagem Matemática que se baseia fundamentalmente em

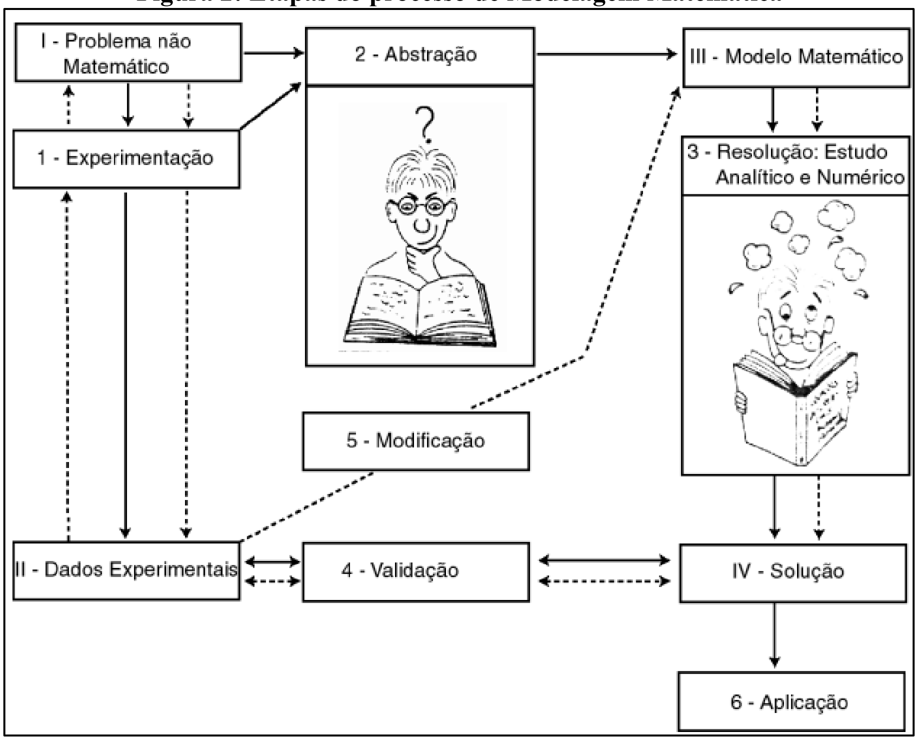
[1] https://edpuzzle.com/

"[...] transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual." (Bassanezi, 2002, p.24), tendo como finalidade, de acordo com Gravina e Contiero (2011, p.4), um maior entendimento dos fenômenos estudados.

Para o matemático Bassanezi (2002 p.26), a Modelagem Matemática deve seguir 5 etapas sequenciais (Figura 2), iniciando pela Experimentação que consiste no processamento dos dados coletados, seguido pela Abstração, fase em que o modelo será formado através do estabelecimento das variáveis a serem trabalhadas, a indicação do que se pretende resolver, formulação de hipóteses e a simplificação do campo de estudo. A próxima etapa é a Resolução em que a linguagem natural das hipóteses é substituída por uma linguagem matemática coesa. Em seguida temos a Validação na qual os modelos e suas hipóteses são confrontados com os dados reais para verificar sua precisão, comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos, definindo, dessa forma, se o modelo é aceitável ou não. Para finalizar, temos a etapa da Modificação, como o próprio nome sugere, é a etapa em que pode haver mudanças no modelo a fim de aperfeiçoá-lo.

Na Figura 2, Bassanezi (2002, p. 27) explica que "[...] as setas contínuas indicam a primeira aproximação. A busca de um modelo matemático que melhor descreva o problema estudado torna o processo dinâmico, indicado pelas setas pontilhadas.".

Figura 2: Etapas do processo de Modelagem Matemática



Fonte: Bassanezi (2002, p.27)

Além de trazer a realidade como objeto de estudo e aproximá-la dos estudantes, como dito anteriormente, a Modelagem Matemática é repleta de outros benefícios. De acordo com Blum e Niss (1991), a aplicação dessa metodologia não só desenvolve a criatividade e habilidades de resolução de problemas, mas também prepara os alunos para se tornarem cidadãos atuantes e engajados na sociedade. Além disso, ela facilita a compreensão da matemática, enriquece o conjunto de ferramentas matemáticas à disposição dos estudantes e possibilita a adaptação conforme a realidade sociocultural em que estão inseridos.

Sendo assim, a modelagem matemática aparenta ser uma excelente metodologia para desenvolver habilidades e preparar os estudantes para os desafios e demandas da sociedade atual. Para Garcia (2009, p.181), desenvolver apreciação pela matemática tem relação com "[...] estar consciente de como e em que extensão o pensamento matemático permeia o dia a dia e as situações de vida, mesmo quando não existe referência explícita à matemática."

Partindo dessa perspectiva, um objeto de estudo que apresenta múltiplas facetas a serem investigadas por meio da Modelagem Matemática são as abelhas, ligadas ao Tema Contemporâneo Transversal: Meio Ambiente. Apesar de serem animais que à primeira vista não parecem ter conexão com o domínio das ciências exatas, surpreendentemente, a comunicação e os padrões de construção que elas utilizam podem ser analisados e compreendidos por meio da linguagem matemática.

A abordagem matemática no contexto das abelhas permite explorar diversas relações e fenômenos que estão presentes nesse universo fascinante. A matemática desempenha um papel fundamental na análise e compreensão dos padrões, processos e interações que ocorrem no meio ambiente, incluindo a relação das abelhas com seu *habitat*.

Na pesquisa exploratória que fizemos a partir da escolha do tema para este trabalho, encontramos diversos exemplos[2] que demonstram como as abelhas utilizam instintivamente conceitos matemáticos em suas atividades cotidianas, como a construção dos favos hexagonais e a dança para comunicar informações importantes. Ao estudar esses comportamentos, os alunos podem perceber a presença da matemática no mundo natural e compreender como ela é aplicada de maneira eficiente e funcional.

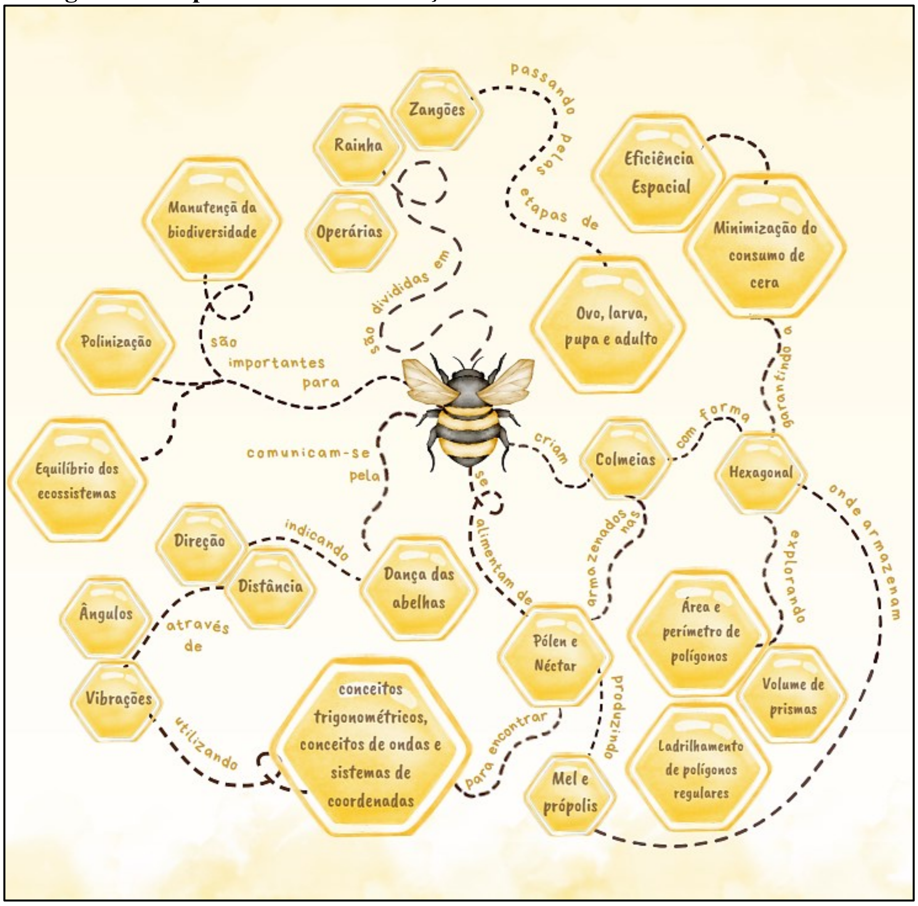
Além disso, ao explorar a relação entre as abelhas, a matemática e o meio ambiente, os estudantes são instigados a refletir sobre a importância da conservação das abelhas e da

[2] Mais detalhes podem ser encontrados no e-book elaborado pela autora, como produto final da disciplina OPP: https://www.canva.com/design/DAFk6xCmG84/rlrqnuyOzVvMX8rnuw0jnA/view?utm_content=DAFk6xCmG84&utm_campaign=designshare&utm_medium=link&utm_source=publishsharelink#15

preservação do meio ambiente como um todo. Dessa forma, a interação entre matemática, abelhas e meio ambiente oferece aos estudantes uma perspectiva multidisciplinar, despertando o interesse por esses temas e promovendo a consciência ambiental.

No mapa conceitual abaixo, ilustramos algumas das conexões entre as abelhas e a matemática, baseadas nos estudos realizados em Bassanezi (2002), Molinero, Marques e Jafelice (2009), Bertone e colaboradores (2021) e no Guia do Professor denominado “Abelhas matemáticas”[3], do *site* da coleção Matemática Multimídia, produzido pelo NIED/UNICAMP.

Figura 3: Mapa conceitual da relação entre abelhas e matemática



Fonte: A autora

A partir da pesquisa exploratória inicial realizada, optamos por elaborar a sequência de videoaulas interativas que abordasse a forma como as abelhas constroem seus favos. As abelhas utilizam células hexagonais chamadas de alvéolos, para armazenar mel, pólen e criar as crias. Essa estrutura hexagonal escolhida pelas abelhas contém propriedades geométricas eficientes. Ao explorar essas propriedades do favo hexagonal, os estudantes podem

---

[3] Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1042

compreender a relação entre matemática e eficiência na natureza. A seguir, apresentaremos a modelagem matemática desenvolvida em cada videoaula feita neste trabalho.

2.3.1 VIDEOAULA 1: ESTUDO DA SEÇÃO TRANSVERSAL DE UM ALVÉOLO

Os alvéolos criados pelas abelhas adotam a forma de prismas hexagonais, resultando em uma seção transversal hexagonal.

Figura 4: Formato hexagonal dos favos de mel

Fonte: https://micromath.com.br/as-abelhas-e-os-favos-hexagonais/

Para compreender a lógica por trás dessa escolha, nossa primeira videoaula se concentra no estudo do ladrilhamento (ou mosaico, ou pavimentação) do plano por polígonos regulares. Para elaborar a modelagem contida neste material inicial, contamos com o suporte das seguintes fontes de pesquisa: o já citado Guia do Professor, "Abelhas Matemáticas" (Rodrigues; Rezende, s.d.), o livro “Matemática na Prática: Desafio Geométrico” (Dias; Sampaio, 2013) e um artigo do n. 40 da Revista do Professor de Matemática (Alves; Dalcin, 1999).

De acordo com o guia citado anteriormente, o ladrilhamento do plano é “um conjunto de regiões poligonais que cobrem o plano sem deixar espaços vazios e sem se sobreporem” (Rodrigues; Rezende, p.6).

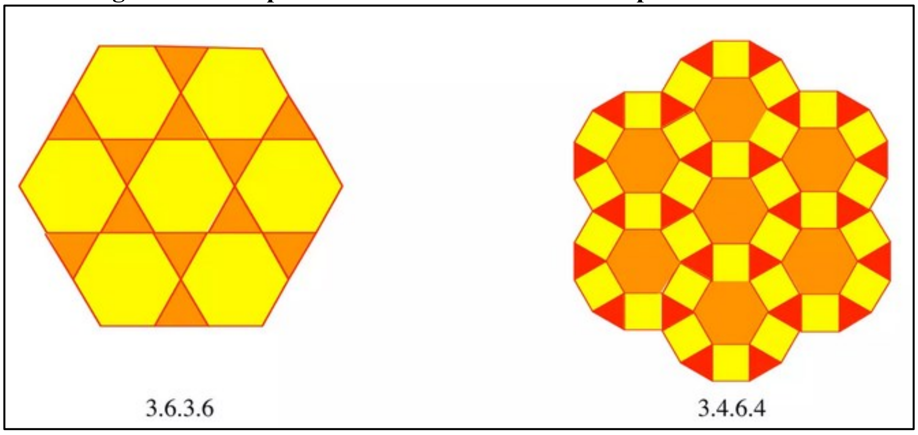
Para esse trabalho, optamos por explorar o ladrilhamento bem-comportado, que apresentam as seguintes condições, de acordo com Dias e Sampaio (2013):

1. Os ladrilhos devem ser polígonos regulares, de um ou vários tipos (figuras 5 e 6).

2. A interseção de dois ladrilhos, se existir, é sempre um lado ou um vértice (figuras 4 e 5).

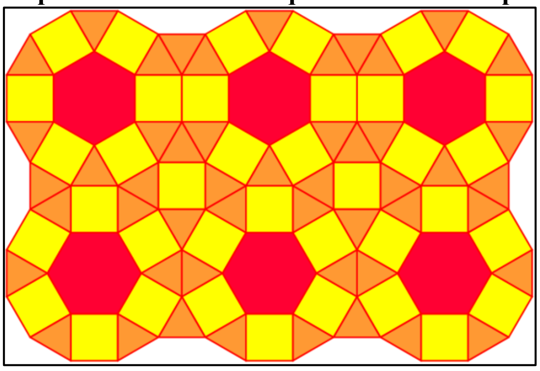
3. A distribuição de ladrilhos ao redor de cada um dos vértices do ladrilhamento é sempre a mesma (Figura 4).

Figura 5: Exemplos de ladrilhamentos bem-comportados



Fonte: https://pt.slideshare.net/WilsonMarques8/ladrilahamento

Figura 6: Exemplo de ladrilhamento que não é bem-comportado

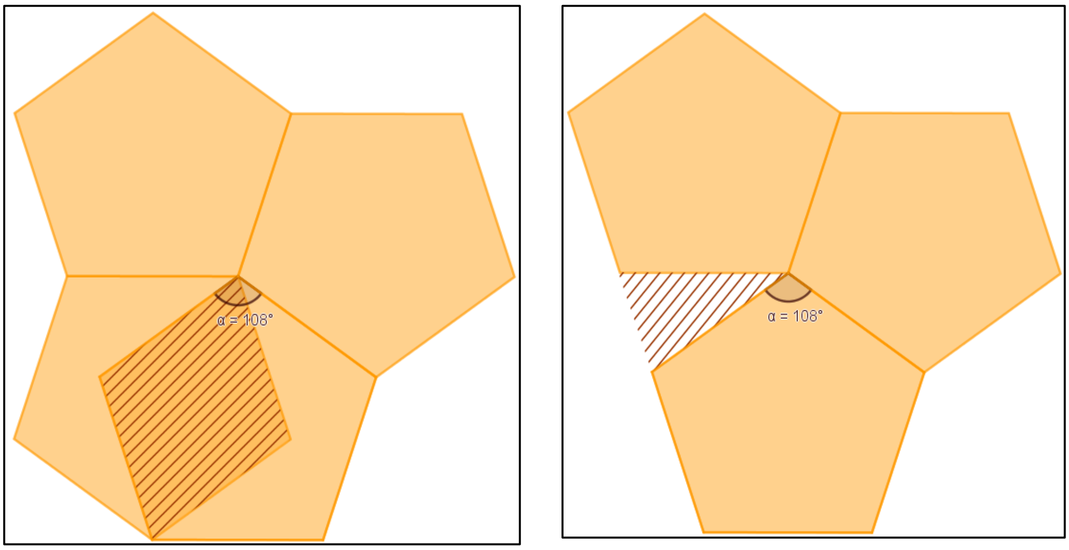


Fonte: A autora

Se forem utilizados apenas polígonos regulares congruentes, a viabilidade de uma pavimentação bem-comportada é determinada pela condição do ângulo interno do polígono de ser um divisor de 360 graus. Isso ocorre porque, quando os ângulos internos são divisores de 360 graus, é viável adicionar polígonos congruentes ao redor de um mesmo vértice até que a soma dos ângulos nesse ponto resulte em exatamente 360 graus. Dessa forma, eles se encaixam perfeitamente uns nos outros, formando um padrão de ladrilhamento regular e contínuo no plano.

Caso contrário, se os ângulos internos não forem divisores de 360 graus, a criação de um mosaico bem-comportado apenas com polígonos do mesmo tipo se torna inviável. Isso ocorre devido às sobreposições inevitáveis ao tentar posicionar os polígonos ao redor de um vértice (Figura 7, imagem à esquerda). Essas sobreposições resultam na interseção entre eles não se limitando a um único ponto ou vértice, o que vai de encontro à nossa segunda condição. Alternativamente, podem surgir lacunas e espaços vazios entre os polígonos, o que também contraria a definição de ladrilhamento (Figura 7, imagem à direita).

Figura 7: Exemplos de ladrilhamentos mal sucedidos



Fonte: A autora

Portanto, a relação entre os ângulos internos dos polígonos regulares congruentes e a capacidade de realizar um ladrilhamento bem-comportado é um princípio fundamental na geometria de ladrilhamento.

Partindo dessa condição de que os ângulos internos do polígono devem ser divisíveis por 360 graus, estabeleceremos a fórmula que nos dirá se polígonos regulares congruentes, isto é, na condição 1 estaremos usando figuras apenas do mesmo tipo, podem ou não ser usados para ladrilhar.

O cálculo da soma dos ângulos internos de um polígono é dado por $(n-2)\times 180°$, em que n é o número de lados do polígono. Como queremos determinar a medida do ângulo interno em cada vértice, basta dividir a fórmula acima pelo número de vértices, uma vez que em polígonos o número de vértices é igual ao número de lados, realizaremos a divisão pelo valor n.

$$\frac{(n-2)\times 180°}{n}$$

A medida do ângulo interno em cada vértice deveria ser um divisor de 360 graus. Logo, faremos a seguinte igualdade:

$$\frac{(n-2)\times 180°}{n} = \frac{360°}{m} \qquad (1)$$

$$n, m \in \mathbb{N}; 3 \leq n, m \leq 6$$

A restrição $n \geq 3$ e, consequentemente $m \geq 3$, decorre da impossibilidade de formar polígonos com menos de três lados.

Dado que a menor medida do ângulo interno de um polígono regular é 60 graus, podemos concluir que o maior valor possível para m é obtido dividindo 360 por 60, resultando em $m \leq 6$ e, em virtude disso, $n \leq 6$.

Na equação (1), se, para o ângulo de cada vértice de um polígono de n lados, for possível encontrar um valor m que divida 360 graus em partes que se igualem ao ângulo dado, então é possível formar um mosaico bem-comportado com o determinado polígono.

Para avaliar a possibilidade de ladrilhar utilizando apenas triângulos equiláteros, substituímos n por 3 e, tem-se, pela equação (1) que:

$$\frac{(3-2)\times 180°}{3} = \frac{360°}{m} \Longrightarrow 60° = \frac{360°}{m} \Longrightarrow m = 6$$

Assim, torna-se possível pavimentar utilizando triângulos equiláteros, de modo que ao redor de cada vértice estejam dispostos 6 deles.

Seguindo o mesmo procedimento anterior para examinar a potencial pavimentação com quadrados ($n = 4$), obtemos:

$$\frac{(4-2)\times 180°}{4} = \frac{360°}{m} \Longrightarrow 90° = \frac{360°}{m} \Longrightarrow m = 4$$

Novamente, torna-se possível realizar a pavimentação usando quadrados, de forma que 4 deles estejam dispostos ao redor de cada vértice.

O mesmo feito não será praticável para pentágonos regulares ($n = 5$) como já visto na Figura 6. Entretanto, vamos confirmar essa hipótese utilizando da equação (1):

$$\frac{(5-2)\times 180°}{5} = \frac{360°}{m} \Longrightarrow 108° = \frac{360°}{m} \Longrightarrow m = 3,\overline{3} \notin \mathbb{N}$$

Por fim, iremos testar a fórmula para os hexágonos regulares ($n = 6$)

$$\frac{(6-2)\times 180°}{6} = \frac{360°}{m} \Longrightarrow 120° = \frac{360°}{m} \Longrightarrow m = 3$$

Deste modo, o último polígono com o qual podemos efetuar a pavimentação é o hexágono regular, com três deles em torno de cada vértice.

2.3.2 VIDEOAULA 2: ESTUDO DO FORMATO DOS ALVÉOLOS PARA MINIMIZAR A QUANTIDADE DE CERA EM SUA PRODUÇÃO

Na segunda videoaula, nosso objetivo principal era investigar qual dos formatos de alvéolo - seja um prisma triangular, prisma quadrangular ou prisma hexagonal - seria mais eficiente em termos de minimizar o uso de cera na produção. A razão para a escolha desses formatos específicos de alvéolos reside no fato de que eles são os únicos que possuem bases que podem ser ladrilhadas, ou seja, não haverá espaços vazios e, consequentemente, o gasto de cera será otimizado. Essa análise foi conduzida considerando que todos os três formatos teriam a mesma altura e volume.

Para modelar essa situação, usamos como apoio o trabalho de Mendes *et al.* (2014), apresentado no 8º FEPEG 2014 (Fórum Ensino, Pesquisa, Extensão e Gestão), intitulado “O estudo da geometria utilizada pelas abelhas como aplicação dos conceitos de área, perímetro e volume com o auxílio do Geogebra 3D”, além do texto de Bassanezi (2002).

O volume de um prisma é obtido multiplicando a área de sua base pela altura. Considerando que a altura e o volume permanecem constantes para os três tipos diferentes de prismas em análise, podemos concluir que as áreas de suas bases precisam ser iguais.

Para o primeiro prisma, cuja base é um triângulo equilátero de lado a, podemos calcular a área da base utilizando a fórmula a seguir:

$$A_t = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Quanto ao segundo prisma, que possui um quadrado de lado b como base, determinamos a área da seguinte maneira:

$$A_q = b^2 \tag{2}$$

Por último, procedemos ao cálculo da área do terceiro prisma, cuja base consiste em um hexágono regular de lado c, por meio da seguinte fórmula:

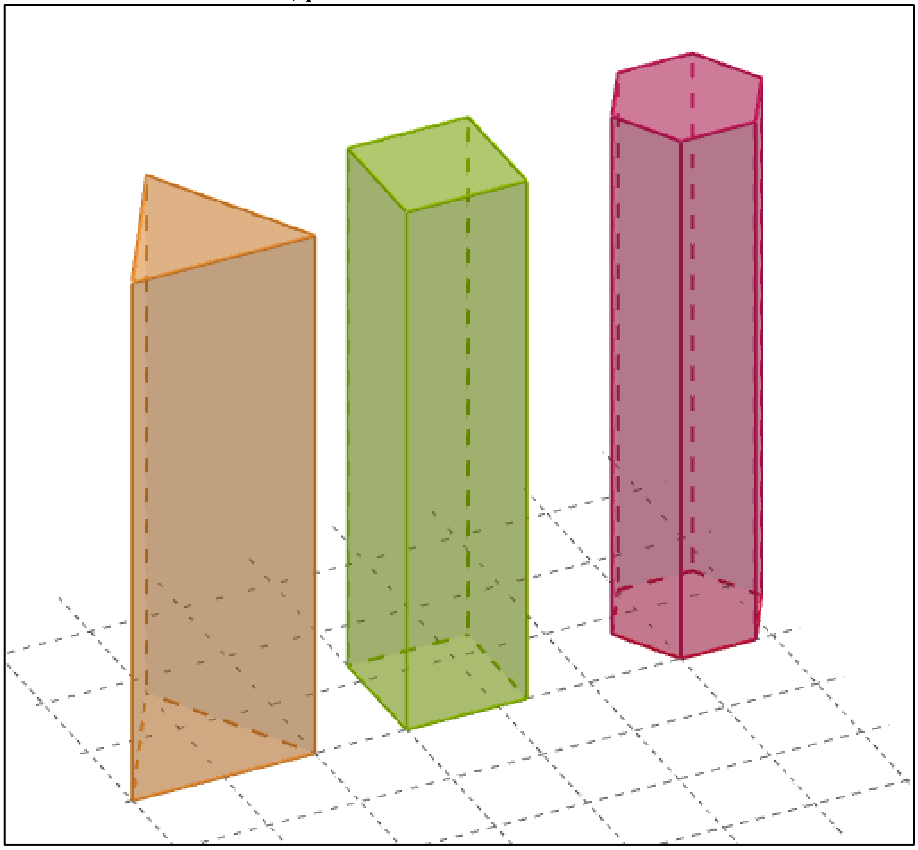
$$A_h = \frac{3c^2\sqrt{3}}{2} \tag{3}$$

Ao igualar essas áreas, podemos expressar os lados b e c do quadrado e do hexágono em função do lado a do triângulo, obtendo:

$$b = \frac{a\sqrt{\sqrt{3}}}{2}; c = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

O consumo de cera necessário para que uma abelha construa cada formato de alvéolo está diretamente relacionado à área lateral de cada tipo de prisma. No contexto de prismas regulares, que estamos explorando, essas áreas laterais consistem em retângulos. No caso dos prismas que estamos analisando, encontramos 3 faces laterais no prisma triangular, 4 no prisma quadrangular e 6 no prisma hexagonal (Figura 8). Para calcular a área de um retângulo, multiplicamos os comprimentos de dois lados adjacentes, que, nesse caso, incluiriam a altura dos prismas. No entanto, como estabelecemos que a altura é a mesma para todos os três tipos de prismas, não é necessário multiplicá-la para fins de comparação.

Figura 8: Comparação dos prismas de base triangular, quadrada e hexagonal, de mesma altura e mesmo volume, para cálculo da área lateral



Fonte: A autora

Portanto, para determinar qual alvéolo exigirá a menor quantidade de cera, e consequentemente, o menor gasto de material na produção, basta compararmos os perímetros das bases dos prismas, expressando-os em termos da medida a da aresta da base triangular, como já calculado anteriormente. Essa análise nos permite identificar que a forma de alvéolo mais eficiente do ponto de vista do uso de recursos é hexagonal.

2.3.3 VIDEOAULA 3: ESTUDO DO FORMATO DOS ALVÉOLOS PARA MAXIMIZAR O VOLUME DE MEL ARMAZENADO

Nesta videoaula, nosso objetivo se inverte em relação à aula anterior. Agora, estamos buscando determinar qual tipo de alvéolo - seja o prisma triangular, quadrangular ou hexagonal - terá a maior capacidade de armazenamento, considerando que a quantidade de cera disponível para construir cada tipo de alvéolo é a mesma. O foco se desloca para a maximização da capacidade de armazenamento, em contraste com a preocupação anterior sobre a minimização do uso de cera. Para modelar essa situação, recorremos mais uma vez ao auxílio do Guia do Professor do Matemática Multimídia: "Abelhas Matemáticas".

Ao estabelecermos a quantidade de cera como constante para a produção dos três tipos de alvéolos de mesma altura, estamos, na verdade, afirmando que suas áreas laterais são equivalentes. Consequentemente, como já deduzimos na seção anterior, seus perímetros também serão iguais.

Com as medidas das arestas dos prismas regulares de base triangular, quadrada e hexagonal representadas por a, b e c, respectivamente, podemos concluir que seus perímetros são $3a$, $4b$ e $6c$. Deixando os lados do quadrado e do hexágono em função do lado do triângulo, temos:

$$b = \frac{3a}{4}; c = \frac{a}{2} \tag{4}$$

Para determinar qual alvéolo terá a maior capacidade, basta utilizar as igualdades acima no cálculo do volume de cada alvéolo e compará-los. O volume de um prisma é dado pela área da base vezes a altura. Na seção anterior, temos as áreas das bases de cada prisma. Portanto, substituiremos (4) em (2) e (3) e multiplicaremos cada área pela altura h, obtendo:

$$V_t = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}h;\ V_q = \frac{9a^2}{16}h;\ V_h = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}h$$

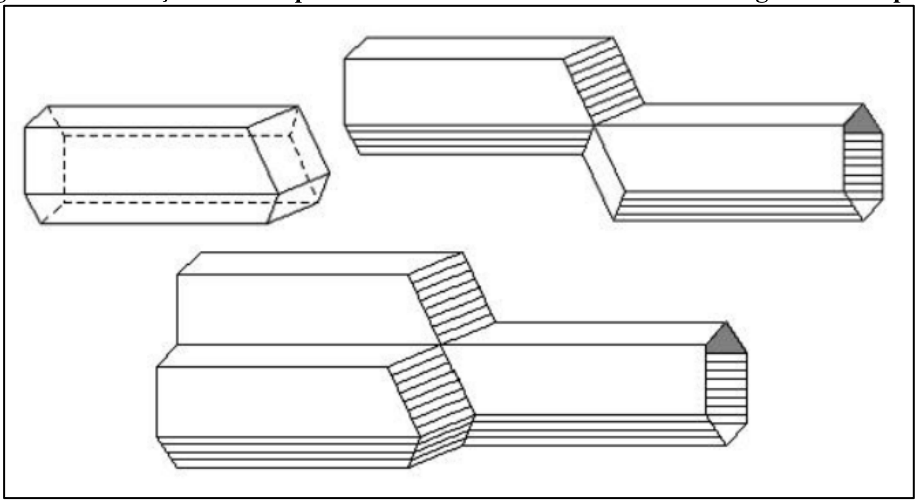
$$\Rightarrow \boxed{V_t \cong 0{,}43a^2h;\ V_q \cong 0{,}56a^2h;\ V_h \cong 0{,}65a^2h}$$

Conforme os cálculos supracitados, o alvéolo que apresenta a maior capacidade de armazenamento é o que possui o formato de um prisma de base hexagonal. Isso significa que, dado o mesmo uso de cera na construção de cada alvéolo, o prisma de base hexagonal terá uma capacidade de armazenamento superior aos outros dois formatos.

2.3.4 VIDEOAULA 4: ESTUDO DO FORMATO DO FECHAMENTO DOS ALVÉOLOS E CÁLCULO DA QUANTIDADE DE CERA EM SUA PRODUÇÃO

Os alvéolos que as abelhas constroem em formato de prisma hexagonal apresentam uma extremidade com um ápice triédrico, composto por três losangos, permitindo que eles se encaixem de maneira perfeita uns aos outros, formando o favo (Figura 9). A outra extremidade é mantida aberta, possibilitando que a abelha utilize o interior do alvéolo.

Figura 9: Formação do favo pelo encaixe de alvéolos de formato hexagonal com ápice triédrico

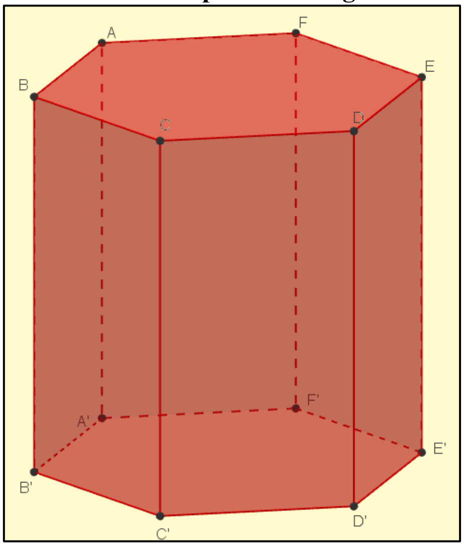


Fonte: https://m3.ime.unicamp.br/arquivos/1042/abelhasmatematicas-guia.pdf

Nesse contexto, o objetivo desta videoaula foi desenvolver uma fórmula que permitisse calcular a área total de um alvéolo em função do ângulo do ápice triédrico, levando em consideração as condições mencionadas. Ela nos permitirá encontrar o ângulo ótimo que minimiza o gasto de cera na fabricação do alvéolo. Novamente, contamos com o apoio do Guia “Abelhas Matemáticas", além de uma construção no GeoGebra que nos auxiliou na visualização dos elementos geométricos necessários em cada etapa, para a produção desta fórmula.

Partiremos do prisma hexagonal no qual os pontos da base inferior são A', B', C', D', E' e F', enquanto os da base superior seguem o mesmo esquema: A, B, C, D, E e F (Figura 10).

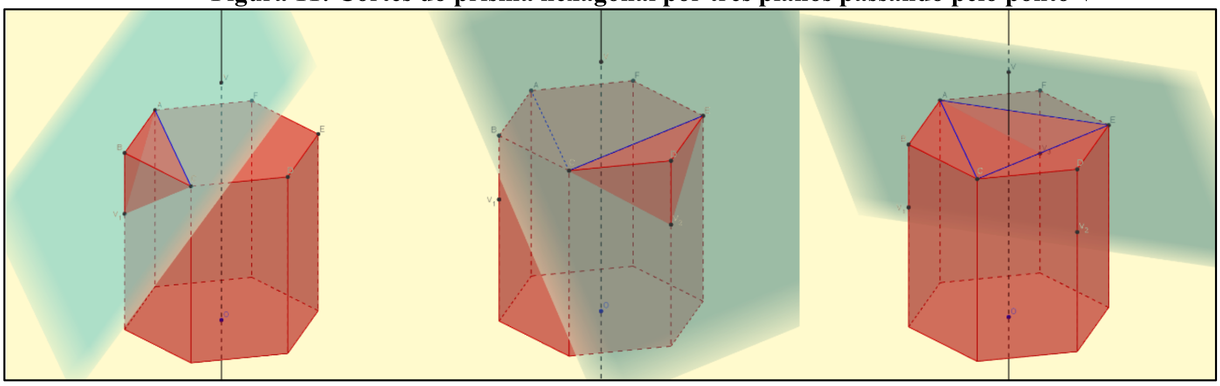
Figura 10: Formato de prisma hexagonal do alvéolo



Fonte: A autora

O ápice triédrico é criado por meio do corte de planos que intersectam três diagonais alternadas $\overline{AC}$, $\overline{CE}$ e $\overline{AE}$ da base superior do prisma e o mesmo ponto V, localizado no eixo vertical, no qual o ponto O é o centro do hexágono da base inferior. Os pontos em que os planos cortaram as arestas laterais serão chamados de V_1, V_2 e V_3, respectivamente. Esse processo gera a formação de três tetraedros (Figura 11).

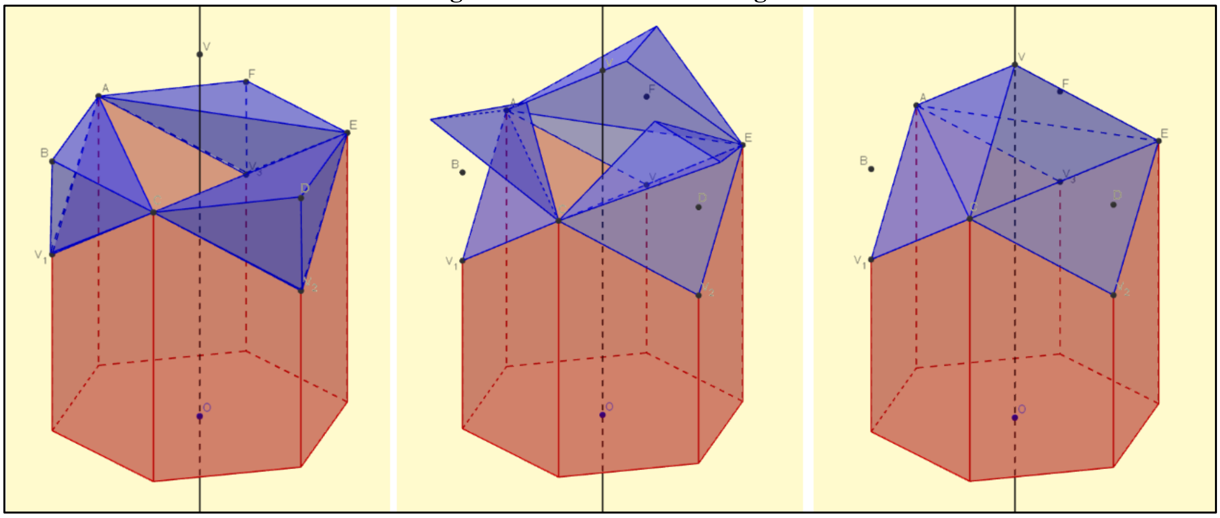
Figura 11: Cortes do prisma hexagonal por três planos passando pelo ponto V



Fonte: A autora

As figuras resultantes devem ser rotacionadas em um ângulo de 180 graus ao redor das diagonais inicialmente cortadas pelo plano, originando assim o ápice triédrico. Esse movimento de rotação produz três losangos no ápice do alvéolo (Figura 12).

Figura 12: Formação do ápice triédrico, por meio da rotação de cada tetraedro cortado do prisma hexagonal em torno de uma diagonal

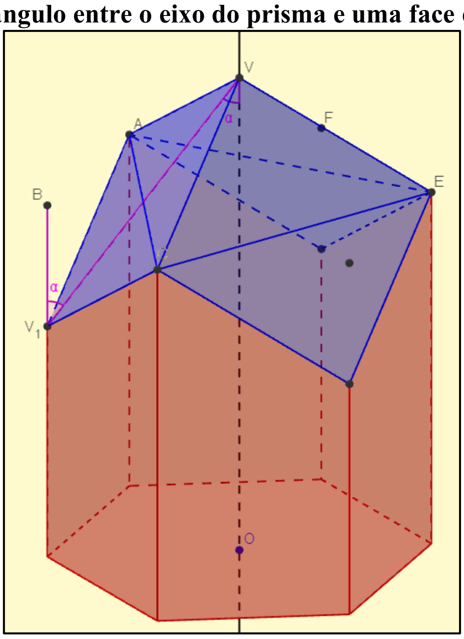


Fonte: A autora

Para calcular a área total do alvéolo, o primeiro passo é determinar a área de cada um desses losangos. A área de um losango é obtida multiplicando-se as diagonais e dividindo o resultado por dois. Considerando o losango $AVCV_1$, o ponto de partida para acharmos sua área é a descoberta da medida de ambas as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{VV_1}$.

Vamos supor que o ângulo $O\hat{V}V_1$, formado entre o eixo vertical e o plano usado na criação dos tetraedros, seja α (Figura 13). Isso implica que o ângulo $V\widehat{V_1}B$ também mede α, uma vez que a reta que passa por B e V_1 é paralela àquela que passa por V e O, tornando os ângulos em questão alternos internos.

Figura 13: Destaque para ângulo entre o eixo do prisma e uma face do ápice triédrico (losango)



Fonte: A autora

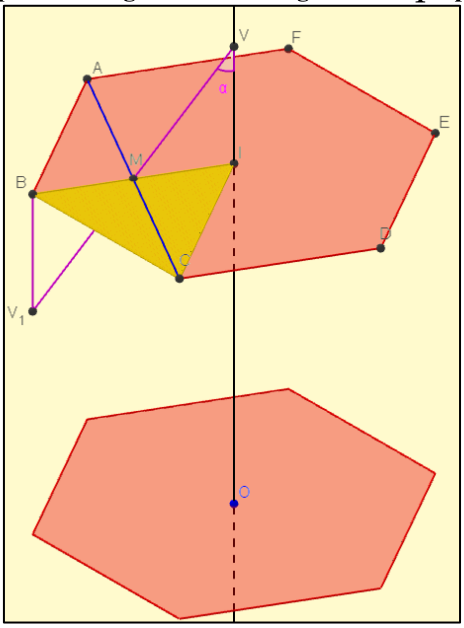
- **Procedimentos para encontrar a medida da diagonal $\overline{AC}$**

Seja M o ponto médio e interseção entre as duas diagonais do losango $AVCV_1$ e I o centro do hexágono superior (Figura 14). Vamos dividir em três etapas os procedimentos para encontrar a diagonal $\overline{AC}$. A primeira delas consistirá em encontrar a medida do segmento $\overline{IM}$ em relação ao lado a do hexágono, procedida da etapa que encontraremos a medida do segmento $\overline{CM}$ e, por fim, obteremos a diagonal desejada.

1ª etapa: Encontrar a medida do segmento $\overline{IM}$

Um hexágono regular pode ser dividido em 6 triângulos equiláteros. Consideremos um deles, o triângulo BIC de lado a, destacado em amarelo na Figura 14, presente na base hexagonal superior.

Figura 14: Destaque para as diagonais do losango $AVCV_1$ e para o triângulo BIC



Fonte: A autora

O segmento $\overline{CM}$ representa a altura do triângulo em relação à base $\overline{BI}$. Uma vez que o triângulo é equilátero, sua altura é também mediana, o que significa que $\overline{IM}$ é a metade de $\overline{BI}$. Já que o lado do hexágono mede a, então $\overline{BI}$ medirá o mesmo. Portanto, $\boxed{\overline{IM} = \frac{a}{2}}$.

2ª etapa: Encontrar a medida do segmento $\overline{CM}$

O triângulo equilátero BIC é dividido em dois triângulos retângulos, sendo um deles o CMI, onde $\overline{CI}$ é a hipotenusa. Os ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60 graus cada, logo $B\hat{I}C = 60°$. Como já temos que $\overline{IM} = \frac{a}{2}$, podemos fazer a tangente de $B\hat{I}C$ para encontrarmos o comprimento de $\overline{CM}$.

$$\tan B\hat{I}C = \tan 60° = \frac{\overline{CM}}{\overline{IM}} \Longrightarrow \sqrt{3} = \frac{\overline{CM}}{\frac{a}{2}} \Longrightarrow \boxed{\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}a}{2}}$$

3ª etapa: Encontrar a medida da diagonal $\overline{AC}$

Como M é o ponto médio da diagonal $\overline{AC}$, então $\overline{CM}$ é a metade dessa diagonal. Assim, para encontrarmos o comprimento dela, basta dobrarmos o valor de $\overline{CM}$.

$$\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}a}{2} \Longrightarrow 2\overline{CM} = \boxed{\overline{AC} = \sqrt{3}a}$$

Dessa forma, concluímos o cálculo de uma das diagonais do losango $AVCV_1$.

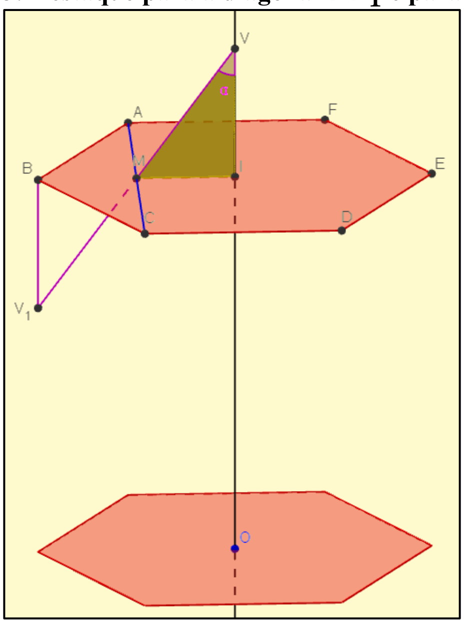
- **Procedimentos para encontrar a medida da diagonal $\overline{VV_1}$**

Para encontrarmos $\overline{VV_1}$, a segunda diagonal do losango, em função do comprimento a e do ângulo α, iremos primeiro realizar uma etapa para determinar o comprimento do segmento $\overline{VM}$, seguida da etapa que encontraremos a medida da diagonal pretendida.

1ª etapa: Encontrar a medida do segmento $\overline{VM}$

Vamos considerar o triângulo retângulo VMI, em que $I\hat{V}M = \alpha$ e $\overline{VM}$ é a sua hipotenusa, assim como na figura abaixo.

Figura 15: Destaque para a diagonal $\overline{VV_1}$ e para o triângulo VMI



Fonte: A autora

Anteriormente, observamos que $\overline{IM} = \frac{a}{2}$. Agora, utilizaremos uma função trigonométrica que relaciona $\overline{IM}$, $\overline{VM}$ e o ângulo α. A função que desempenha esse papel é a seno. Portanto, procederemos ao cálculo da mesma.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{IM}}{\overline{VM}} = \frac{\frac{a}{2}}{\overline{VM}} \Rightarrow \boxed{\overline{VM} = \frac{a}{2\, sen\, \alpha}}$$

2ª etapa: Encontrar a medida da diagonal $\overline{VV_1}$

Uma vez que M é o ponto médio da diagonal $\overline{VV_1}$, isso implica que $\overline{VM}$ equivale à metade dessa diagonal. Portanto, para determinar o comprimento da diagonal completa, basta multiplicar por 2 o valor de $\overline{VM}$.

$$\overline{VM} = \frac{a}{2\operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow 2\overline{VM} = \boxed{\overline{VV_1} = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}}$$

Assim, concluímos o cálculo da segunda diagonal do losango $AVCV_1$.

- **Cálculo da área dos losangos**

Agora que calculamos o valor de ambas as diagonais do losango $AVCV_1$, basta multiplicá-los e, em seguida, dividir o resultado por dois para encontrar a área.

$$A_L = \frac{\overline{AC} \times \overline{VV_1}}{2} = \frac{\sqrt{3}a \times \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}}{2} \Rightarrow A_L = \frac{a^2\sqrt{3}}{2\operatorname{sen}\alpha}$$

O ápice triédrico é formado por três losangos congruentes, isso implica que a área total dos losangos é:

$$\boxed{3A_L = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2\operatorname{sen}\alpha}}$$

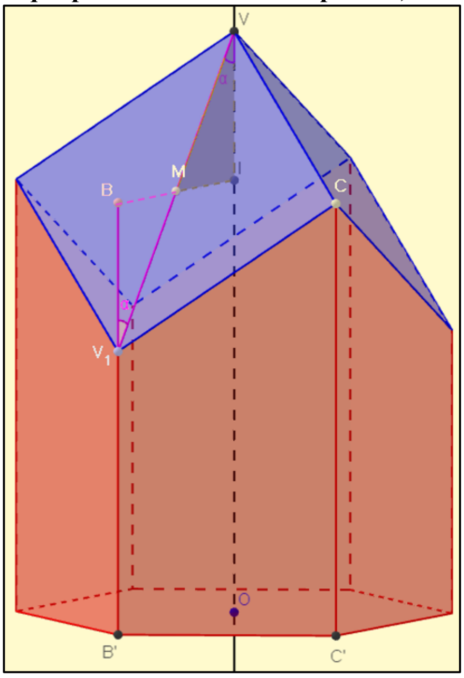
A porção restante da área do alvéolo é composta por seis trapézios idênticos, onde as alturas desses trapézios são iguais à medida da aresta da base, que vale a. A base maior dos trapézios corresponde à altura do prisma, que chamaremos de h .

O cálculo da área de um trapézio envolve o comprimento da base menor, da base maior e da altura. A altura dos trapézios coincide com as arestas da base inferior do prisma, sendo assim, a altura mede a.

Como já temos as medidas da base maior e da altura, resta descobrir o comprimento da base menor. Vamos considerar o trapézio $V_1CC'B'$ para realização dos cálculos (Figura 16).

É possível perceber que a base menor $\overline{B'V_1}$ do trapézio será igual à altura h do prisma original subtraída do comprimento de $\overline{BV_1}$. Portanto, devemos encontrar sua medida e, posteriormente, o valor de $\overline{B'V_1}$.

Figura 16: Destaque para a face lateral do prisma, o trapézio $V_1CC'B'$



Fonte: A autora

Para isso vamos precisar de três etapas. Na primeira provaremos que o triângulo BV_1M é congruente ao triângulo IVM, que nos permitirá encontrar a medida de $\overline{BV_1}$ na segunda etapa e, finalizamos a terceira etapa encontrando o valor da base menor $\overline{B'V_1}$.

1ª etapa: Provar que o triângulo BV_1M é congruente ao triângulo IVM

Sabe-se que a medida de $\overline{V_1M}$ é igual à de $\overline{MV}$, uma vez que M é ponto médio do segmento $\overline{VV_1}$. O ângulo $V_1\widehat{M}B$ é igual ao $V\widehat{M}I$, pois são ângulos opostos pelo vértice. A medida de $\overline{BM}$ é igual à de $\overline{MI}$, pois vimos anteriormente que $\overline{CM}$ era altura do triângulo equilátero BIC e, portanto, mediana, o que implicava em M ser ponto médio de $\overline{BI}$.

Portanto, temos o caso de congruência lado-ângulo-lado, ou seja, o triângulo BV_1M é congruente ao triângulo IVM.

2ª etapa: encontrar a medida de $\overline{BV_1}$

Na etapa anterior provamos que o triângulo BV_1M é congruente ao triângulo IVM, o que nos diz que o lado $\overline{BV_1}$ é congruente ao lado $\overline{VI}$. Por isso, buscaremos encontrar a medida de $\overline{VI}$ que, consequentemente, nos fornecerá a de $\overline{BV_1}$.

O triângulo IVM é retângulo, por isso, ao calcularmos a cotangente de α, encontraremos o comprimento de $\overline{VI}$ em função de a e α.

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\overline{VI}}{\overline{MI}} = \frac{\overline{VI}}{\frac{a}{2}} \Rightarrow \overline{VI} = \frac{a\operatorname{cotg}\alpha}{2}$$

Como a medida de $\overline{BV_1}$ é igual a de $\overline{VI}$, concluímos que:

$$\boxed{\overline{BV_1} = \frac{a\operatorname{cotg}\alpha}{2}}$$

3ª etapa: encontrar o valor da base menor $\overline{B'V_1}$

A base menor $\overline{B'V_1}$ é dada pela altura do prisma original menos $\overline{BV_1}$, ou seja $h - \overline{BV_1}$, isto é:

$$\overline{B'V_1} = \boxed{base\ menor = h - \frac{a\operatorname{cotg}\alpha}{2}}$$

- **Cálculo da área dos trapézios**

A área A_T de um trapézio é dada pela soma da base maior com a base menor, o resultado disso multiplicado pela altura e tudo isso dividido por 2.

$$A_T = \frac{(base\ maior + base\ menor) \times altura}{2}$$

Substituindo os valores que já encontramos, temos:

$$A_T = \frac{(h + h - BV_1)a}{2} \Rightarrow \boxed{A_T = ha - \frac{a^2}{4}\operatorname{cotg}\alpha}$$

Logo, a área dos seis trapézios é:

$$\boxed{6A_T = 6ah - \frac{3a^2}{2}\operatorname{cotg}\alpha}$$

- **Cálculo da área total do alvéolo**

Finalmente, para determinar a área total do alvéolo, ou seja, a quantidade de cera necessária para as abelhas o produzirem, precisamos somar as áreas de todos os polígonos que o compõem, ou seja, as áreas dos losangos com as áreas dos trapézios[4], ficando da seguinte maneira:

---

[4] A área da base hexagonal inferior não entra no cálculo da área total do alvéolo, pois estamos considerando que essa extremidade é aberta para que seu interior possa ser utilizado pelas abelhas.

$$\boxed{Área\ total = 6ah - \frac{3a^2}{2}\operatorname{cotg}\alpha + \frac{3a^2\sqrt{3}}{2\operatorname{sen}\alpha}}$$

Assim, para um alvéolo hexagonal com aresta da base e altura fixas, a quantidade de cera gasta pelas abelhas para montá-lo depende do ângulo α, entre o eixo do alvéolo e um losango do ápide triédrico. Pretende-se, em trabalhos futuros, desenvolver o cálculo do ângulo que minimiza a quantidade de cera, o que pode ser feito por meio de conhecimentos de Cálculo Diferencial ou, no caso da presente proposta, com foco no Ensino Médio, por meio de estimativa aproximada, com auxílio do GeoGebra.

3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

A partir da questão norteadora, este estudo buscou possíveis caminhos para aprimorar o processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos por meio de videoaulas interativas. Para isso, buscamos percorrer um caminho metodológico que partiu de uma pesquisa bibliográfica exploratória, para identificar trabalhos recentes já realizados dentro dessa temática, que nos permitiram escolher a metodologia de ensino da Modelagem Matemática para abordar as abelhas. A partir disso, fizemos o estudo de referenciais teóricos que embasassem a elaboração de uma sequência de videoaulas interativas, apresentado na seção 2.

Partindo do pressuposto de produzir vídeos mais curtos, mas que pudessem cumprir seu objetivo dentro de cada vídeo, inicialmente optamos por separar as modelagens matemáticas estudadas em cinco vídeos.

No entanto, devido a mudanças no calendário acadêmico da Universidade Federal de Uberlândia (UFU) que o tornaram mais compacto, a gravação da quinta videoaula não pôde ser realizada. Essa última videoaula estava programada para incluir a dedução do ângulo ótimo que minimizaria a área lateral do alvéolo, mantendo seu volume, bem como o cálculo dos ângulos internos ideais dos losangos que compõem o ápice triédrico.

O Quadro 1, a seguir, resume as principais informações sobre o planejamento das quatro videoaulas gravadas.

Além dos recursos mencionados no Quadro 1, utilizamos ferramentas convencionais adicionais na produção das videoaulas. Para capturar as cenas, empregamos câmeras de celulares comuns. Além disso, um notebook foi essencial em várias etapas do processo de criação das videoaulas, e para a gravação da tela, contamos com o aplicativo *OBS Studio*. Uma mesa digitalizadora também foi utilizada para tornar algumas explicações mais interativas e dinâmicas, com o suporte dos aplicativos *Microsoft Whiteboard* e *Epic Pen*.

Quadro 1: Principais informações sobre as videoaulas

Nome	Objetivo	Conteúdos abordados	Recursos utilizados	Duração
Estudo da seção transversal de um alvéolo	Construir uma fórmula que determina com quais polígonos regulares é possível ladrilhar.	• Condições de um Ladrilhamento Bem-Comportado • Ângulos internos de polígonos regulares • Curiosidades sobre as abelhas da espécie *Apis Mellifera*	• Música • Power Point • Geogebra • Imagens • OBS Studio	17:16
Estudo do formato dos alvéolos para minimizar a quantidade de cera em sua produção	Encontrar o prisma regular, entre os de base triangular, quadrada e hexagonal, com a menor área lateral, dado o mesmo volume.	• Prismas regulares • Áreas laterais de prismas regulares • Áreas dos polígonos regulares: triângulo, quadrado e hexágono • Volumes de prismas regulares • Perímetro dos polígonos regulares: triângulo, quadrado e hexágono	• Imagens • Geogebra • Epic Pen • Microsoft Whiteboard • OBS Studio	17:06
Estudo do formato dos alvéolos para maximizar o volume de mel armazenado	Encontrar o prisma regular, entre os de base triangular, quadrada e hexagonal, com o maior volume, dada a mesma área lateral.	• Áreas dos polígonos regulares: triângulo, quadrado e hexágono • Volumes de prismas regulares • Perímetro dos polígonos regulares: triângulo, quadrado e hexágono	• Geogebra • Microsoft Whiteboard • Epic Pen • OBS Studio	13:05
Estudo do formato do fechamento dos alvéolos e cálculo da quantidade de cera em sua produção	Construir uma fórmula que calcule a área total de um alvéolo, considerando seu ápice triédrico.	• Área de losangos • Propriedades dos losangos • Área de trapézios • Propriedades de um prisma hexagonal. • Propriedades de hexágonos regulares • Propriedades de triângulos equiláteros • Razões trigonométricas: seno, tangente e cotangente • Ângulos alternos internos. • Congruência de triângulos: caso LAL	• Trecho do vídeo do Matemática Multimídia • Geogebra • Microsoft Whiteboard • Epic Pen • OBS Studio	18:56

Fonte: A autora

Após o planejamento geral dos vídeos, passamos a elaborar roteiros para cada um deles. As videoaulas foram gravadas no Laboratório de Ensino, Pesquisa e Extensão (LEPEx) "Maria Teresa Menezes Freitas" da Universidade Federal de Uberlândia, que está localizado no bloco 5K do campus Santa Mônica. Essas gravações foram agendadas previamente para uso do espaço.

A produção das videoaulas foi realizada ao longo de vários meses, seguindo um cronograma escalonado. A gravação da primeira videoaula teve início em junho de 2023, no semestre de 2022/2, seguida pela gravação da segunda em agosto no mesmo ano, porém no semestre de 2023/1. A terceira videoaula foi produzida em setembro, e o ciclo de gravação foi concluído com a quarta e última videoaula no início de outubro de 2023.

Após a gravação, realizamos a edição das videoaulas através do aplicativo *Capcut* e, em seguida, as hospedamos no *YouTube*. Essa etapa foi necessária, uma vez que a plataforma escolhida para adicionar a interatividade nos vídeos, o *Edpuzzle*, impõe um limite de 1GB para o tamanho dos arquivos. No entanto, podemos usar conteúdos de qualquer tamanho hospedados em outras plataformas.

Depois de inserir as videoaulas no *Edpuzzle*, incluímos, em cada vídeo, perguntas em momentos oportunos e notas de comentários para passar informações complementares, seguindo o planejamento feito nos roteiros. Essa interatividade inserida nos vídeos será analisada na seção 4.

Com intenção de avaliar a proposta de videoaulas criadas, planejamos conduzir um teste piloto na disciplina de Informática e Ensino, ofertada no terceiro semestre da grade curricular do curso de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, durante o primeiro semestre de 2023.

A escolha de realizar a testagem nessa disciplina se justifica pelos seus propósitos, dado que o objetivo geral é "Implementar práticas educativas com tecnologias digitais da informação e comunicação no processo de ensinar e aprender matemática" (Universidade Federal de Uberlândia, 2018, p.1). Consequentemente, a finalidade da disciplina está intrinsecamente alinhada com o escopo deste estudo, que aborda, essencialmente, o uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) no ensino de Matemática.

Além disso, os objetivos específicos dessa componente curricular seguem em concordância com as abordagens situadas nesta pesquisa. Dentre eles, destacam-se:

> explorar regularidades e testar conjecturas associadas a conceitos matemáticos; provocar mudança de postura didática/metodológica do professor face às ferramentas tecnológicas de apoio ao ensino da matemática, [...] vivenciar a

> execução de projetos de aulas de matemática em ambientes informatizado. (Universidade Federal de Uberlândia, 2018, p.1)

Os três objetivos acima mencionados se alinham completamente com o foco deste trabalho em questão, sendo que o último deles é aplicado de maneira prática durante a realização do teste piloto.

Portanto, a escolha de testar as produções desse trabalho, especificamente na disciplina de Informática e Ensino, é fundamentada na afinidade de seus objetivos com os objetivos deste estudo, o que possibilita uma investigação mais aprofundada das práticas educativas envolvendo TDIC no ensino da matemática.

Com base em um questionário preenchido pelos estudantes no ambiente virtual da disciplina, foi possível traçar um perfil dos mesmos. A turma de Informática e Ensino do curso de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, no semestre 2023/1, é composta por 8 integrantes, todos concordando em participar deste teste. Quanto à faixa etária, 6 deles têm até 20 anos, enquanto os outros 2 estão na faixa entre 21 e 30 anos. Entre esses estudantes, 3 já cursaram, total ou parcialmente, outro curso superior, e metade da turma possui experiência prévia, formal ou informal, como professores. No que diz respeito ao uso de recursos tecnológicos para estudo, 7 alunos relataram sua utilização, incluindo um que assiste videoaulas no *YouTube*. O outro participante mencionou não empregar recursos tecnológicos, recorrendo ao *Google* apenas para esclarecer dúvidas esporadicamente. No contexto do domínio do *software* GeoGebra, observa-se que apresentam um nível de familiaridade mediano.

Para introduzir a proposta na turma em foco, a professora responsável pela disciplina, também orientadora desta pesquisa, disponibilizou uma de suas aulas regulares. Nessa aula, os alunos tiveram a oportunidade de assistir e interagir com as 4 videoaulas preparadas. Posteriormente, durante a aula seguinte, conduzimos uma discussão com a turma. Nesse momento, apresentamos os fundamentos teóricos que embasam a sequência de vídeos e buscamos ouvir as impressões, críticas e sugestões dos alunos que assistiram às aulas.

Adicionalmente, aproveitamos a oportunidade para apresentar os recursos disponíveis para o gerenciamento da turma dentro do ambiente do *Edpuzzle*, utilizando os relatórios obtidos a partir da própria aplicação com os estudantes. Esses recursos, juntamente com as possíveis formas de utilização pelo professor, serão explorados e discutidos na seção 4 deste trabalho.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção, exploraremos dois principais aspectos para a análise dos dados gerados pela pesquisa. O primeiro focará na avaliação da interatividade presente na sequência de videoaulas, e, posteriormente, as habilidades passíveis de desenvolvimento pelos estudantes em cada vídeo. Além disso, abordaremos os recursos disponíveis na plataforma *Edpuzzle*, destacando sua potencial contribuição para as atividades do professor durante o processo educacional.

4.1. INTERATIVIDADE NA SEQUÊNCIA DE VIDEOAULAS

A Matemática frequentemente é apresentada nas escolas como uma disciplina já estabelecida e rígida, muitas vezes desconectada da realidade. Normalmente, quando um teorema é ensinado, segue-se uma sequência em que ele é primeiro enunciado, depois demonstrado e, por fim, suas aplicações são mostradas. No entanto, historicamente, na origem de um teorema, o processo ocorre de maneira inversa. Primeiro, surge a motivação para o problema, em seguida, busca-se formas de demonstrá-lo e só após a demonstração é que se procura a melhor maneira de enunciá-lo (Bassanezi, 2002).

O mesmo princípio se aplica aos problemas matemáticos. Inicialmente, uma dúvida surge como motivação, em seguida, hipóteses e testes são formulados, e, por fim, a solução é elaborada.

Assim, as videoaulas apresentadas nos próximos subtópicos buscam seguir a abordagem original de começar pelo caminho mais natural, ou seja, a motivação. Dessa forma, buscamos reinventar “o resultado juntamente com os alunos, seguindo o processo da modelagem e conjugando verdadeiramente o binômio ensino-aprendizagem” (Bassanezi, 2002, p.36).

Uma característica adicional que se faz presente nas videoaulas produzidas é a inclusão de legendas, com o propósito de aumentar a acessibilidade dos vídeos, uma vez que estes serão disponibilizados publicamente para uso por professores da área.

4.1.1 VIDEOAULA 1: ESTUDO DA SEÇÃO TRANSVERSAL DE UM ALVÉOLO

A primeira videoaula, intitulada "Estudo da seção transversal de um alvéolo", está disponível no seguinte link: https://edpuzzle.com/media/648a82a85100e342eea77dde. Nessa videoaula, o intuito era criar uma fórmula que estabelecesse quais polígonos regulares poderiam ser utilizados para preencher o plano, em que apenas um tipo de polígono fosse utilizado, sem permitir espaços vazios ou sobreposições.

Ao longo do vídeo, a interatividade se fez presente por meio de 9 perguntas, das quais duas eram de múltipla escolha, enquanto as demais eram perguntas discursivas. A nona e última pergunta buscava a opinião do aluno a respeito da videoaula assistida.

A videoaula começa com uma introdução, usando o trecho musical "Se essa rua, se essa rua fosse minha, eu mandava eu mandava ladrilhar..."[5] para estabelecer uma conexão entre a música e o comportamento das abelhas ao construir os favos. Em seguida, uma pergunta é feita ao espectador sobre o significado de "ladrilhar", para avaliar o conhecimento prévio do aluno, além de buscar seu engajamento no tema.

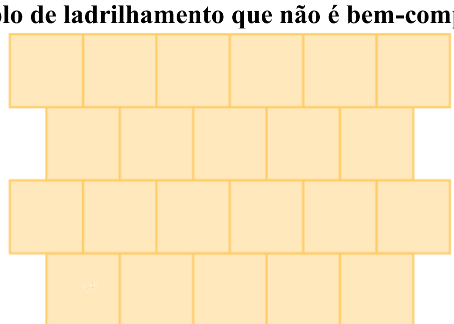
Após a resposta do estudante, o vídeo continua com a definição de ladrilhamento e imagens demonstrativas desse conceito. Em seguida, o espectador é questionado sobre onde esse padrão de imagem costuma ser encontrado, permitindo ao professor verificar se o aluno compreendeu o conceito de ladrilhamento e se ele já estabelece uma relação desse conceito com os favos de mel.

O vídeo prossegue com a apresentação dos critérios necessários para um ladrilhamento bem-comportado utilizando polígonos regulares, que, segundo Dias e Sampaio (2013, p.16-17) são os seguintes:

1. A interseção de dois ladrilhos, se existir, é sempre um lado ou um vértice.
2. A distribuição de ladrilhos ao redor de cada um dos vértices do ladrilhamento é sempre a mesma.

Em seguida, são ilustrados dois exemplos que não atendem aos requisitos. O primeiro exemplo apresenta uma violação do primeiro critério, onde a interseção dos polígonos envolve apenas uma parte de um lado, sem abranger o lado inteiro (Figura 17).

Figura 17: Exemplo de ladrilhamento que não é bem-comportado (primeiro critério)



Fonte: A autora

[5] https://www.youtube.com/watch?v=LSzCgUP8tqU

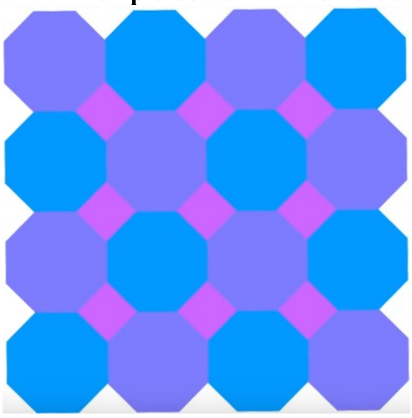
O segundo exemplo, embora satisfaça a primeira condição, apresenta uma discrepância nos polígonos encontrados ao redor de dois vértices diferentes, violando assim o segundo critério (Figura 18).

Figura 18: Exemplo de ladrilhamento que não é bem-comportado (segundo critério)

Fonte: A autora

O terceiro exemplo exibido (Figura 19) atende a ambos os critérios, configurando-se como um ladrilhamento bem-comportado. A exploração de diversas situações por meio desses exemplos permite ao aluno compreender melhor a aplicação dos critérios e as diferentes possibilidades de ladrilhamento.

Figura 19: Exemplo de ladrilhamento bem-comportado



Fonte: A autora

Após a apresentação dos exemplos, é hora de praticar o conceito. Nesse sentido, são formuladas duas perguntas: uma que estimula o aluno a identificar a imagem que não representa um ladrilhamento bem-comportado e outra que o convida a reconhecer a imagem que o representa. As respostas dos alunos desempenham um papel fundamental, permitindo ao professor avaliar a eficácia da explicação anterior e a compreensão dos conceitos por parte dos estudantes.

Depois de cada resposta fornecida pelo espectador, o vídeo segue imediatamente com a resolução do exemplo, acompanhada de uma explicação sobre o raciocínio que o aluno deveria seguir para chegar à resposta correta. Devido à funcionalidade da plataforma *Edpuzzle*, que permite ao criador do conteúdo impedir o avanço no vídeo, o aluno não tem a possibilidade de acessar a resolução das perguntas sem tê-las respondido previamente.

Uma das etapas da Modelagem Matemática, de acordo com Bassanezi (2002), é a Abstração, que retrata, em uma de suas subdivisões, a importância de se esclarecer o problema proposto.

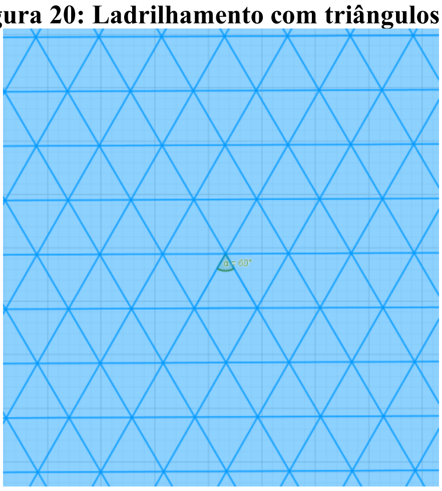
> A adequação de uma investigação sistemática, empírica e crítica leva à formulação de problemas com enunciados que devem ser explicitados de forma clara, compreensível e operacional. Desta forma, um problema se constitui em uma pergunta científica quando explicita a relação entre as variáveis ou fatos envolvidos no fenômeno.
> Enquanto que a escolha do tema de uma pesquisa pode ser uma proposta abrangente, a formulação de um problema é mais específica e indica exatamente o que se pretende resolver. (Bassanezi, 2002, p.28)

Portanto, é chegado o momento de abordar a questão central do vídeo: "Quais polígonos regulares podem ser usados para ladrilhar o plano?".

Antes de responder à pergunta acima de forma genérica, o aluno é condicionado à próxima subdivisão da etapa da Abstração: a formulação de hipóteses. Para isso, inicia-se um teste com o primeiro polígono regular possível: o triângulo equilátero.

Com auxílio do *software* GeoGebra, são adicionados triângulos equiláteros em torno de um vértice e, posteriormente, estendidos para preencher completamente o plano. De maneira visual (Figura 20), observa-se que as interseções entre os polígonos ocorrem somente nos pontos ou lados, levando à conclusão de que o triângulo equilátero pode ser utilizado para ladrilhar.

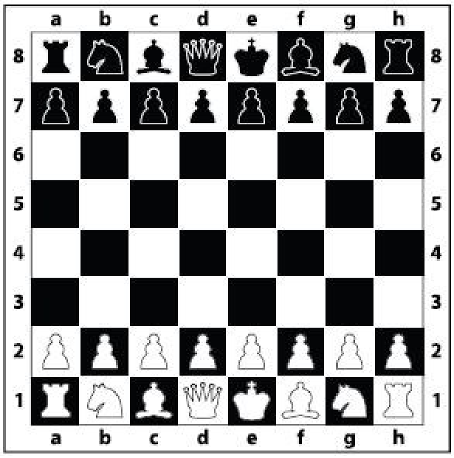
Figura 20: Ladrilhamento com triângulos equiláteros



Fonte: A autora

Para continuação dos testes, o aluno é então indagado sobre a viabilidade de reproduzir o mesmo procedimento, desta vez utilizando quadrados. Na explicação desta questão, é feita referência ao tabuleiro de xadrez para ilustrar que é, de fato, possível ladrilhar com quadrados, como na Figura 21.

Figura 21: Ladrilhamento com quadrados



Fonte: https://www.coladaweb.com/educacao-fisica/xadrez

Levando em consideração que tanto o triângulo equilátero quanto o quadrado se mostraram adequados para o ladrilhamento, uma suposição incorreta que poderia surgir é que todos os polígonos regulares compartilham dessa propriedade. Portanto, para verificar se o aluno aderiu a esse raciocínio, a próxima pergunta trata da possibilidade de pavimentar o plano com o uso de pentágonos regulares (Figura 22).

Figura 22: *Print* de pergunta aberta presente na videoaula 1

Fonte: A autora

A videoaula segue com a impossibilidade de formar mosaicos apenas com pentágonos regulares, sendo confirmada por meio de uma construção no GeoGebra, conforme ilustrado na Figura 7 (ver seção 2, página 24). Logo, se algum aluno havia considerado a suposição anterior de que o ladrilhamento era possível com todos os polígonos regulares, tornou-se evidente que essa premissa não é viável.

Após a realização desses três testes, que envolveram a verificação da possibilidade de pavimentação com triângulos equiláteros, quadrados e pentágonos regulares, é esperado que o aluno busque identificar semelhanças que permitiram a pavimentação com o triângulo equilátero e o quadrado, como sugerido por Bassanezi (2002, p. 28) ao explicar o conceito de hipóteses.

> De uma maneira geral as hipóteses se referem à frequência da inter-relação entre as variáveis, observada experimentalmente (hipóteses observacionais), mas podem também ser enunciadas de forma universal quando se procura generalizar os resultados investigados.

Dessa forma, com o intuito de guiar o aluno na formulação da hipótese correta e ao mesmo tempo promover seu pensamento autônomo, faz-se a seguinte pergunta: “O que os ângulos internos do triângulo equilátero e do quadrado têm em comum que os diferencia do pentágono regular?”

Espera-se que o aluno perceba que o triângulo equilátero e o quadrado possuem ângulos internos que são divisores de 360 graus, o que permite o ladrilhamento sem sobreposições ou espaços vazios.

Conforme destacado por Bassanezi (2002), a aprendizagem das técnicas e conteúdos matemáticos deve ser impulsionada pelo fenômeno modelado, que atua como um pano de fundo. Assim, com o propósito de reavivar a motivação inicial da conexão entre as abelhas e o ladrilhamento, menciona-se na videoaula o fato de que os favos que as abelhas constroem têm a forma de um hexágono regular. Posteriormente, desafia-se os alunos a responderem por que é possível ladrilhar com esse tipo de polígono.

Considerando a explicação anterior de que a pavimentação foi bem sucedida com o triângulo equilátero e o quadrado devido à característica de seus ângulos internos serem divisores de 360 graus, espera-se que o aluno identifique a medida dos ângulos internos do hexágono regular (120 graus) e perceba que também é um divisor de 360. Dessa forma, o aluno chega à conclusão de que o hexágono regular é um polígono ladrilhável, e, por conseguinte, deduz que as abelhas possuem a habilidade de realizar o ladrilhamento.

Após essa descoberta, destaca-se a utilização dos alvéolos hexagonais construídos pelas abelhas da espécie *Apis Mellifera*, os quais têm a função de armazenar pólen, mel e ovos. Essas estruturas hexagonais são notáveis pela eficiência na organização e conservação dos recursos dentro da colmeia.

Na videoaula, a explicação sobre a viabilidade de pavimentação com hexágonos regulares seguiu uma abordagem passo a passo. Inicialmente, procedeu-se ao cálculo da soma dos ângulos internos desse polígono. Em seguida, analisou-se o ângulo presente em cada vértice, com o propósito de verificar se esse valor é um divisor de 360 graus. A escolha de apresentar a resolução dessa pergunta dessa forma visava facilitar a futura busca por uma fórmula que determina se um polígono é ladrilhável, uma vez que o mesmo procedimento poderia ser aplicado de maneira geral.

Sendo assim, a etapa da Resolução é executada de maneira direta, repetindo o método utilizado para determinar se um hexágono regular pode ser ladrilhado, mas de forma genérica.

4.1.2 VIDEOAULA 2: EXPLORANDO O FORMATO DOS ALVÉOLOS PARA REDUZIR A QUANTIDADE DE CERA NA PRODUÇÃO

A segunda videoaula - intitulada "Explorando o Formato dos Alvéolos para Reduzir a Quantidade de Cera na Produção", disponível no link: https://edpuzzle.com/media/6507af51e7eec0400ddc1429 - começa retomando sucintamente o que foi discutido na aula anterior. Em seguida, destaca que os alvéolos são arquiteturas do mundo real e, portanto, suas estruturas não consistem em hexágonos regulares, mas sim em prismas com bases hexagonais, uma vez que apresentam dimensões em termos de altura, largura e comprimento.

Nesta videoaula, houve um total de 12 pontos de interação, compreendendo 9 perguntas abertas e 3 notas de comentários para acesso a materiais complementares. A primeira pergunta é apresentada imediatamente após a explicação sobre a forma prismática dos alvéolos e aborda a definição de "prisma". Mais uma vez, busca-se resgatar os conhecimentos prévios dos estudantes no início da videoaula.

Embora já tenha sido visto na aula anterior que o triângulo equilátero e o quadrado são polígonos que permitem a formação de mosaicos, a abelha opta por usar o prisma de base hexagonal na construção de seus alvéolos. Portanto, surge a seguinte pergunta para o espectador: “Se o triângulo equilátero e o quadrado também são ladrilháveis, por qual motivo a abelha poderia ter escolhido o prisma de base hexagonal para construir seus alvéolos?”. Essa pergunta serve como motivação inicial e será respondida ao longo do vídeo.

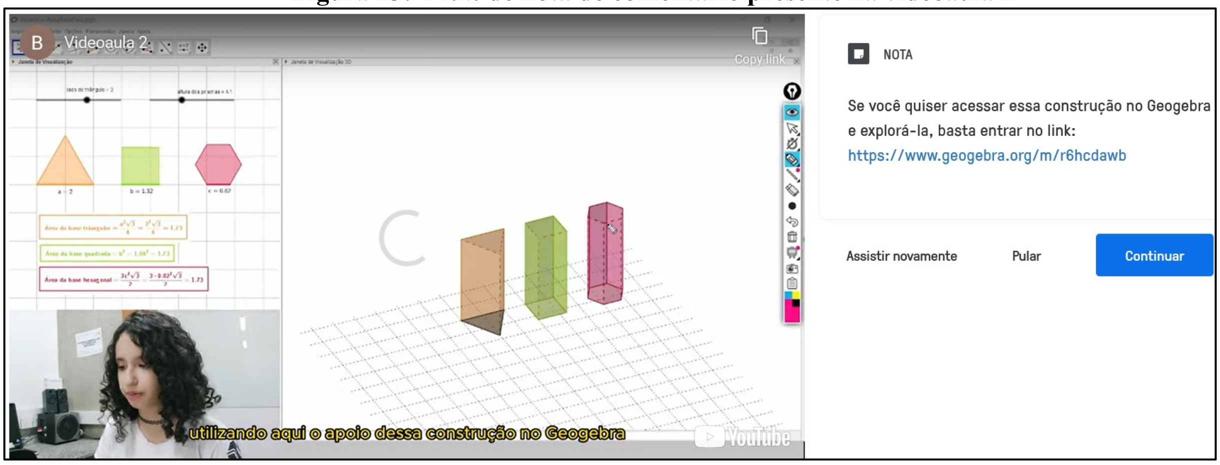
Bassanezi (2002) postula que o entusiasmo pela matemática floresce com maior facilidade quando é impulsionado por interesses e estímulos oriundos do mundo real, que vão além do âmbito puramente matemático. A motivação subjacente a esta videoaula está estreitamente vinculada a fenômenos concretos, uma vez que os alvéolos de certas espécies de abelhas efetivamente exibem estruturas hexagonais. Assim, a expectativa é que essa conexão com a realidade enriqueça o processo de aprendizado, conforme argumentado pelo autor mencionado.

Diante disso, o propósito desta videoaula é mostrar que, quando se tratam de alvéolos com a mesma capacidade de armazenamento, o alvéolo de base hexagonal é mais eficiente em termos de economia de material na sua construção. Matematicamente falando, entre prismas regulares com o mesmo volume, aquele com base hexagonal possui a menor área lateral.

Para comprovar essa afirmação, foi criada uma construção no Geogebra que inclui três prismas regulares: o triangular, o quadrado e o de base hexagonal[6]. Esses foram selecionados porque outros polígonos regulares não permitem uma colocação eficiente em mosaico, resultando em um uso menos eficaz do espaço disponível, como mostrou a primeira videoaula. Os prismas em questão foram projetados de modo que a área da base e a altura fossem as mesmas para todos os três. As áreas das bases dos prismas estavam vinculadas ao lado do triângulo, o que permitia o uso de controles deslizantes para ajustar o tamanho desse lado e, consequentemente, os tamanhos das bases dos outros prismas.

A construção mencionada foi disponibilizada ao estudante por meio de uma nota de comentário, permitindo que ele a explorasse de acordo com seu próprio ritmo durante o vídeo (Figura 23). Além das interações por meio das perguntas, o aluno tem a opção de interagir com o material criado especificamente para aquela aula, o que enriquece ainda mais a interatividade e a experiência de aprendizado.

Figura 23: ***Print* de nota de comentário presente na videoaula 2**



Fonte: A autora

[6] https://www.geogebra.org/m/r6hcdawb

A primeira pergunta feita após a apresentação da construção no Geogebra era: "Dado três prismas retos com a mesma área da base e a mesma altura, o que você pode concluir a respeito dos seus volumes? Justifique." A expectativa era que o estudante chegasse à conclusão por conta própria de que os volumes eram iguais, o que é uma dedução lógica, dada a igualdade da área da base e da altura.

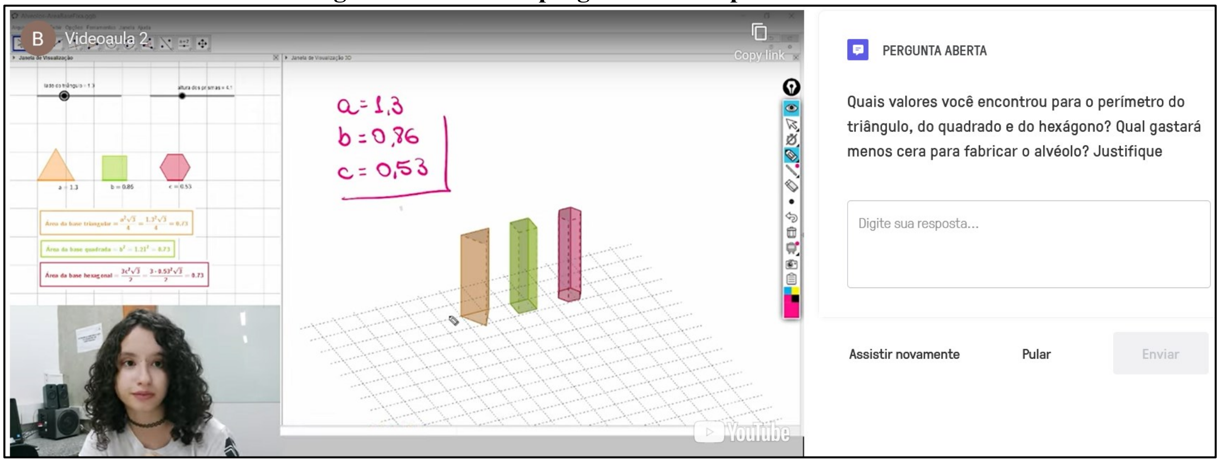
A resposta para a indagação anterior naturalmente conduz à próxima pergunta, que seria: “Se esses prismas têm o mesmo volume, quais benefícios a abelha poderia obter ao escolher um prisma de base hexagonal?”. Tal questionamento é um exemplo de como a abordagem pode ser usada para estimular a reflexão e o pensamento crítico dos alunos. Essa pergunta não espera uma resposta exata imediata, mas sim incentiva os alunos a levantarem hipóteses e a considerarem os possíveis benefícios da escolha da base hexagonal. Ela pode ser uma maneira de envolver os alunos na discussão e na exploração de um conceito, tornando a videoaula mais interativa e próxima de uma experiência presencial em sala de aula.

Essa abordagem incentiva os alunos a pensarem de forma crítica e a participar ativamente do processo de aprendizado, o que pode ser mais produtivo do que simplesmente fornecer respostas prontas (Valente, 2018). Além disso, ao replicar uma abordagem de sala de aula, a videoaula pode se tornar mais envolvente e eficaz no processo de construção do conhecimento.

Depois de demonstrar que, para fins de comparação das áreas laterais, era suficiente verificar os tamanhos dos perímetros da base de cada prisma, chegamos à fase de testes. Essa etapa é importante para que pudessem ser levantadas hipóteses baseadas nos resultados. Os testes envolveram a escolha de um valor para o lado da base do prisma triangular, a partir do qual a construção automaticamente calculava os valores correspondentes para o lado da base quadrada do prisma e da base hexagonal. Em seguida, esses três valores eram utilizados para calcular os perímetros das bases. O prisma com o menor perímetro também teria a menor área lateral.

O primeiro teste resultou na conclusão de que o prisma de base hexagonal tinha a menor área lateral para os valores específicos escolhidos. No entanto, esse resultado poderia ser apenas uma coincidência. Portanto, para aumentar a credibilidade da hipótese de que o prisma de base hexagonal sempre terá a menor área lateral, foi solicitado ao aluno que realizasse outro teste, desta vez com valores diferentes, e informasse qual dos prismas apresentou a menor área lateral (Figura 24).

Figura 24: ***Print*** **de pergunta aberta presente na videoaula 2**



Fonte: A autora

Após a confirmação, pela segunda vez, de que o prisma de base hexagonal era o mais eficiente, a hipótese tornava-se mais sólida e aceitável. Com isso em mente, avançaríamos para a fase da Resolução, na qual efetivamente demonstraríamos que a hipótese é verdadeira.

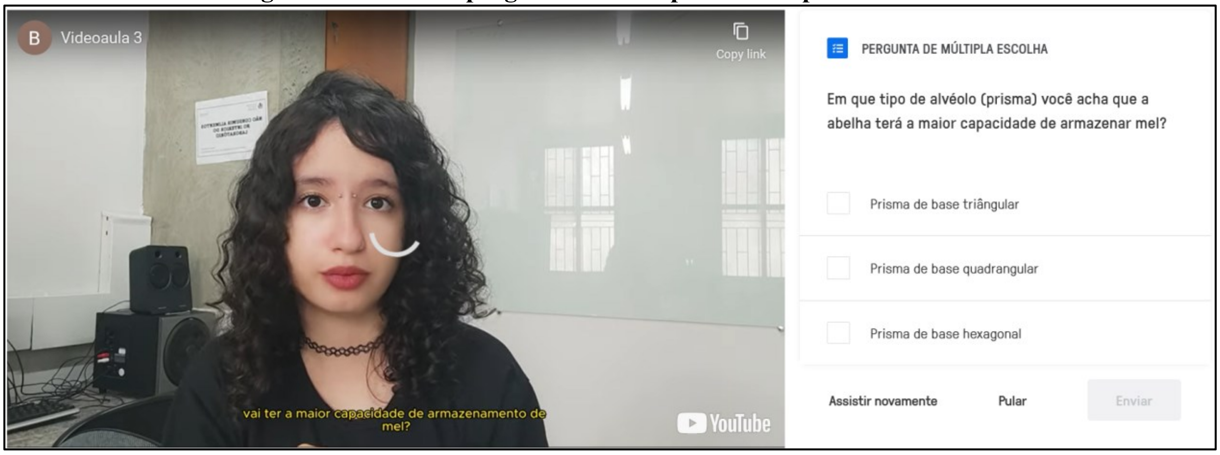
Durante essa etapa, vários conhecimentos de áreas de figuras planas foram necessários. Quando surgiam essas necessidades, os alunos eram interrogados sobre como obtê-las. Para evitar a extensão excessiva do vídeo, as demonstrações das fórmulas da área de um triângulo equilátero e do hexágono regular foram adicionadas como material complementar e enviadas aos alunos através das notas de comentários. Os vídeos dessas demonstrações foram selecionados no YouTube e não foram produtos autorais.

4.1.3 VIDEOAULA 3: ESTUDO DO FORMATO DOS ALVÉOLOS PARA MAXIMIZAR O VOLUME DE MEL ARMAZENADO

A terceira videoaula, nomeada "Estudo do formato dos alvéolos para maximizar o volume de mel armazenado", disponível no link: https://edpuzzle.com/media/651f8c2c36631e403d2c530d, segue uma estrutura e conteúdo semelhantes à anterior. Enquanto a aula anterior tinha como objetivo encontrar o alvéolo que requereria a menor quantidade de cera para a fabricação, mantendo todos com a mesma capacidade de armazenamento, a atual busca determinar qual alcançará a maior capacidade de armazenamento com a mesma quantidade de cera utilizada na fabricação.

A videoaula começa imediatamente estabelecendo a motivação inicial por meio da seguinte pergunta: "Em que tipo de alvéolo (prisma) você acha que a abelha terá a maior capacidade de armazenar mel?" e oferece três alternativas de resposta, conforme ilustrado na Figura 25.

Figura 25: *Print* de pergunta de múltipla escolha presente na videoaula 3



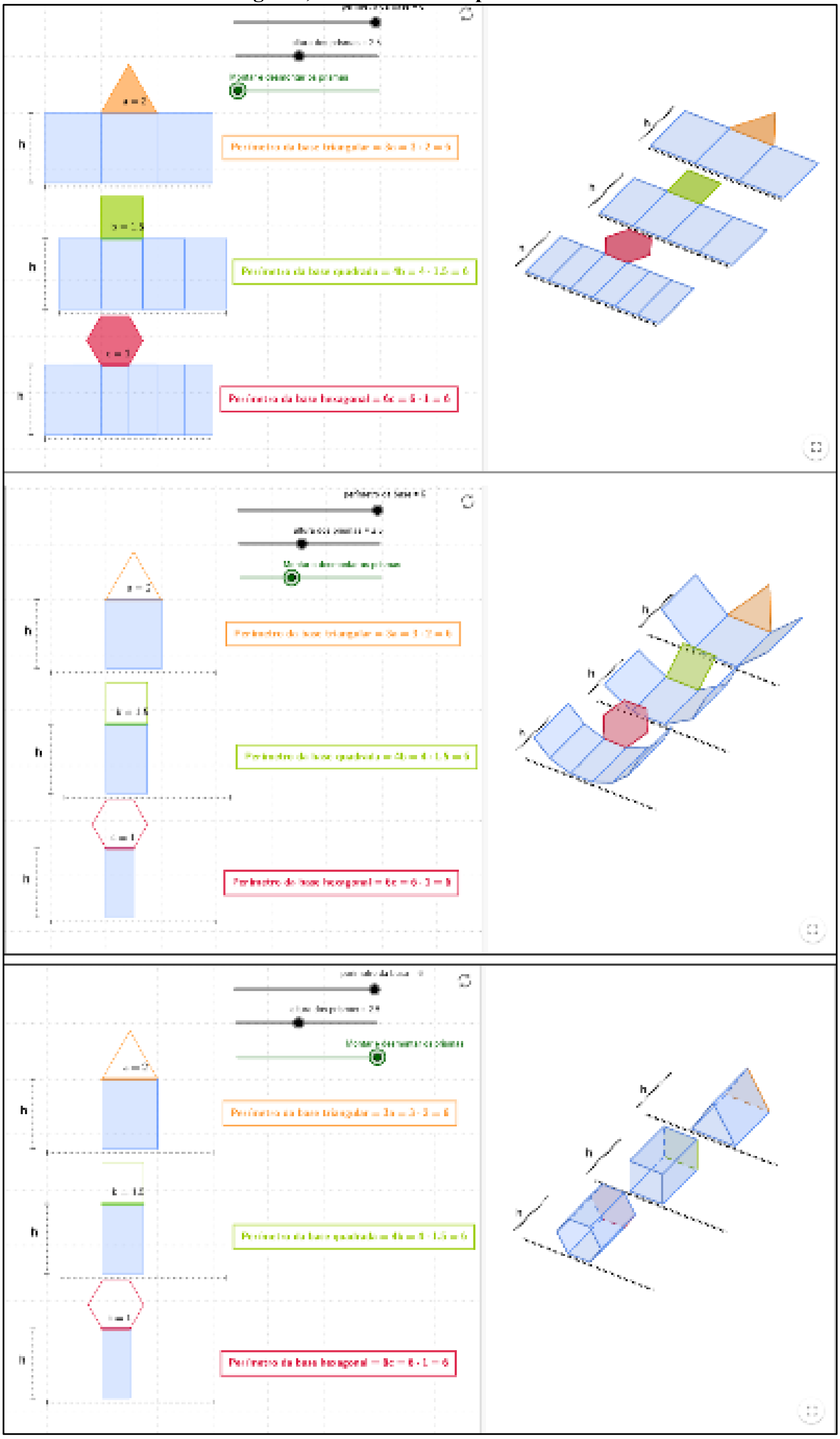
Fonte: A autora

Além da pergunta de múltipla escolha vista acima, a videoaula contou com outros 5 momentos de interatividade. Entre esses momentos, quatro consistiam em perguntas abertas, e um deles era destinado a uma nota de comentário.

Conforme defendido por Kenski (2007, p. 32), as “hipermídias reconfiguram as formas como lemos e acessamos as informações. A facilidade de navegação, manipulação e a liberdade de estrutura estimulam a parceria e a interação com o usuário”. Portanto, a nota de comentário presente nessa videoaula com o propósito de fornecer a construção do GeoGebra a ser utilizada, não apenas facilitaria a compreensão da aula, mas também garantiria maior interatividade, assim como na videoaula anterior.

Na parte esquerda da construção mencionada, encontram-se as representações planas dos três tipos de alvéolos em questão, enquanto na parte direita, está a montagem desses alvéolos a partir de sua planificação, vinculada a um controle deslizante. A Figura 26 mostra três momentos distintos da animação, para ilustrar esse movimento de montagem dos prismas a partir das planificações.

Figura 26: Montagem dinâmica de prismas, de mesma altura, com base triangular, quadrangular e hexagonal, todos de mesmo perímetro da base



Fonte: A autora

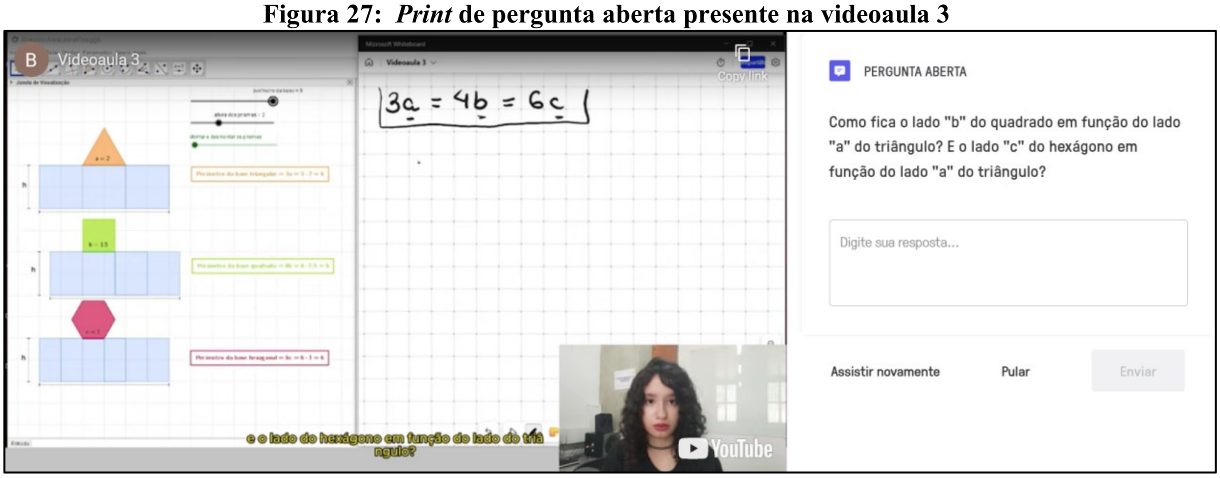
O procedimento de partir da representação bidimensional de um sólido para seu formato tridimensional e vice versa, pode ser uma tarefa bastante complexa para o professor, caso ele não utilize de outros recursos além do quadro negro. Nesse sentido, Carneiro e Passos (2014) verificaram em sua pesquisa que, com o auxílio das TDIC, em especial no ensino de geometria, é possível que essa dificuldade seja amenizada. Por isso, as construções do Geogebra disponibilizadas nas videoaulas podem ser uma ferramenta facilitadora no aperfeiçoamento do pensamento espacial por parte dos alunos.

Na etapa da formulação das hipóteses, foram estabelecidos valores para os lados das bases dos alvéolos e, a partir desses dados, os volumes correspondentes foram calculados. O primeiro cálculo, referente ao volume do alvéolo de base triangular, foi conduzido pela produtora do vídeo. Posteriormente, a fim de incentivar a participação dos alunos, foi solicitado que eles realizassem o cálculo do volume do prisma de base quadrangular e hexagonal da mesma maneira que foi mostrado anteriormente.

Depois de encontrados os volumes dos três prismas diferentes e concluído que o maior deles era o de base hexagonal, formula-se a hipótese - procedimento realizado na etapa da Abstração, segundo Bassanezi (2002) - de que isso ocorrerá para quaisquer que sejam as medidas dos lados das bases dos alvéolos.

A fim de prosseguir para a próxima etapa, a Resolução, e confirmar o que foi conjecturado anteriormente, os estudantes são questionados sobre de que maneira iríamos comparar, de forma genérica, os volumes dos prismas. Depois disso, é comentado que, para fazer essa comparação, é necessário colocar os valores dos lados das bases dos prismas em função da mesma medida. Sendo assim, é pedido ao aluno que forneça o lado do quadrado e do hexágono em função do lado do triângulo, como mostra a Figura 27.

Figura 27: ***Print* de pergunta aberta presente na videoaula 3**



Fonte: A autora

Tendo encontrado os valores mencionados, bastava que fossem substituídos nas fórmulas das áreas das bases de cada prisma, já vistas na videoaula anterior, para que fosse provado que o volume do prisma de base hexagonal seria sempre maior do que os dos outros dois comparados, uma vez que a altura era a mesma para os três.

4.1.4 VIDEOAULA 4: ESTUDO DO FORMATO DO FECHAMENTO DOS ALVÉOLOS E CÁLCULO DA QUANTIDADE DE CERA EM SUA PRODUÇÃO

A quarta e última videoaula, intitulada “Estudo do formato do fechamento dos alvéolos e cálculo da quantidade de cera em sua produção”, disponível no link: https://edpuzzle.com/media/6520c170dfc4134035d1435e, conta com 14 momentos de interação, distribuídos em 7 perguntas abertas, 5 de múltipla escolha e 2 notas de comentário.

A motivação desta videoaula era encontrar a fórmula para calcular a área total de um alvéolo, levando em consideração sua configuração triédrica na parte superior. É relevante notar que essa estrutura triédrica é uma arquitetura real das abelhas e, devido à sua relativa complexidade e ao fato de não ser amplamente conhecida, esperava-se que isso suscitasse a curiosidade dos estudantes. Essa abordagem está alinhada com a teoria da Modelagem Matemática de Bassanezi (2002), que postula que a apresentação de situações do mundo real pode motivar o interesse e o envolvimento dos alunos no assunto.

Da mesma forma que na videoaula anterior, descrever ou tentar reproduzir o processo de formação desse ápice sem a ajuda de tecnologias teria sido uma tarefa extremamente árdua. Portanto, ao explicar o que essa configuração representava, foi utilizado um trecho do vídeo intitulado "Abelhas matemáticas"[7] do canal M3 Matemática Multimídia, que ilustrava o formato do alvéolo e como ele se encaixava de maneira ideal com os demais.

Entretanto, esse trecho não englobava o procedimento para a formação do ápice, mas apenas sua forma final. Portanto, foi necessário elaborar uma construção no Geogebra, disponibilizada aos alunos através de uma nota de comentário, que mostrasse de forma dinâmica esse processo, conforme mostra a Figura 12 (ver seção 2, página 31).

O progresso tecnológico nas últimas décadas abriu caminho para novas maneiras de aproveitar as TDIC na geração e difusão de informações, bem como na facilitação da interação e comunicação em tempo real, ou seja, no exato momento em que ocorrem os

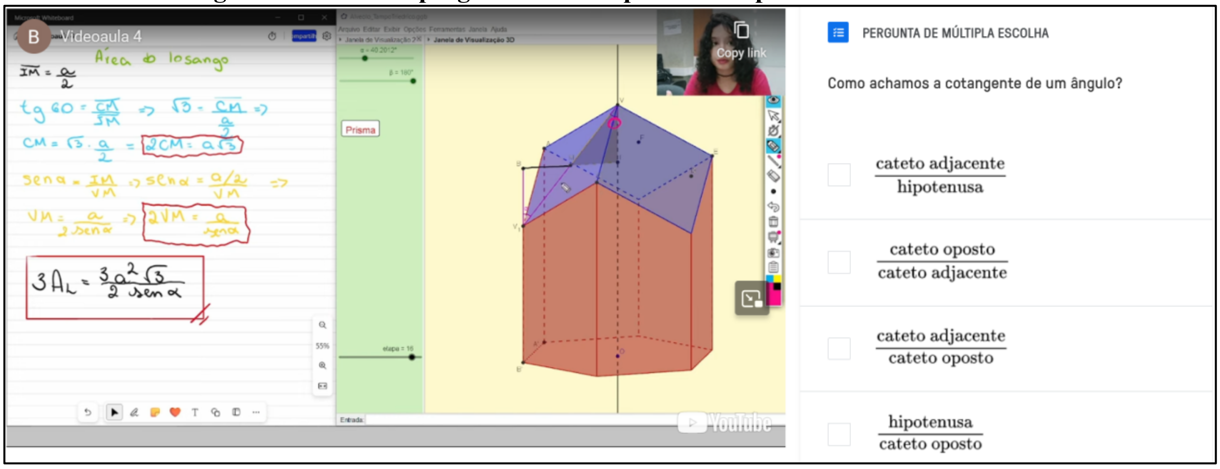
---

[7] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=AY--UJdipZI

eventos (Kenski, 2007). A partir dessa perspectiva, a construção do Geogebra foi dividida em 18 etapas, de forma que, em cada uma delas, a construção se alinhasse com o que estava sendo explicado naquele momento. Isso resultou em maior dinamismo e em uma redução da poluição visual, uma vez que cada etapa destacava o conteúdo em discussão.

A videoaula demandou do espectador diversos conhecimentos em geometria e trigonometria, abrangendo as 12 perguntas apresentadas ao longo do vídeo. Cada vez que esse conhecimento era necessário para avançar na aula, uma pergunta era apresentada ao aluno. Um exemplo ilustrativo disso pode ser observado na Figura 28.

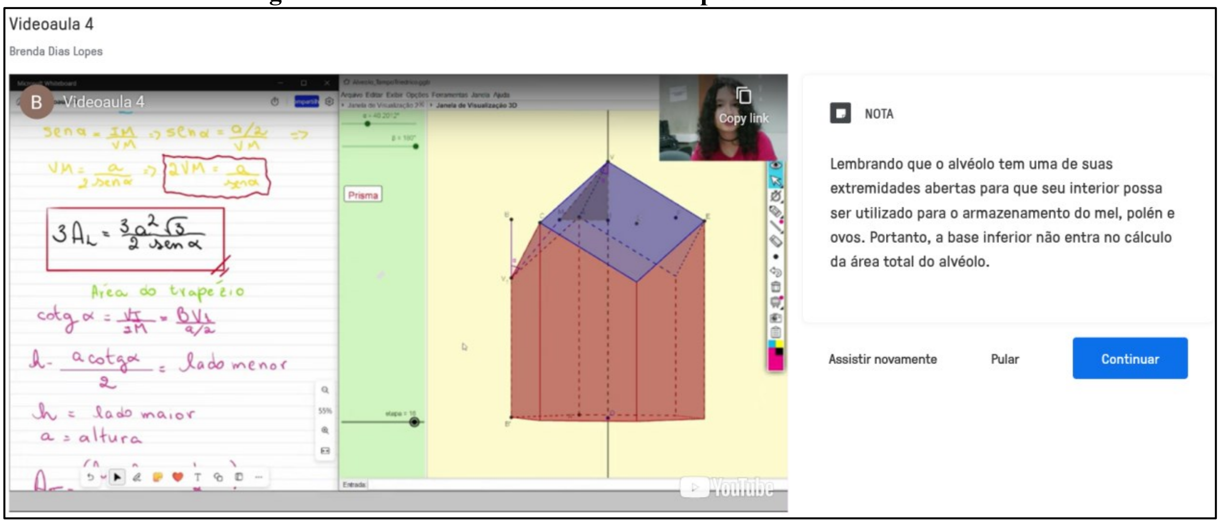
Figura 28: ***Print*** **de pergunta de múltipla escolha presente na videoaula 4**



Fonte: A autora

O recurso de notas de comentário foi utilizado nesta aula para fornecer ao aluno um lembrete sobre o motivo pelo qual a área do hexágono inferior não foi incluída no cálculo da área total do alvéolo (Figura 29).

Figura 29: ***Print*** **de nota de comentário presente na videoaula 4**



Fonte: A autora

Essa estratégia revela-se bastante útil em casos nos quais o professor pode ter esquecido de mencionar algo importante durante o vídeo ou quando deseja reforçar uma ideia específica. Também é proveitoso quando o professor utiliza vídeos de terceiros e deseja adicionar informações complementares.

4.1.5 HABILIDADES DA BNCC E DO CURRÍCULO DE MG NA SEQUÊNCIA DE VIDEOAULAS

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento norteador da Educação Básica no Brasil, estabelece os conhecimentos, habilidades e competências que os alunos devem desenvolver ao longo de sua trajetória educacional. Os Temas Contemporâneos Transversais estão integrados em sua estrutura, permeando as diferentes áreas do conhecimento. Eles são considerados como eixos estruturantes da formação, garantindo uma abordagem abrangente e contextualizada dos conteúdos.

No caso específico de Minas Gerais, o estado possui seu próprio currículo, o Currículo Referência de Minas Gerais (Minas Gerias, 2023). Esse currículo busca alinhar-se às diretrizes da BNCC (Brasil, 2018), adaptando-as às necessidades e realidades educacionais do estado. Nesse sentido, os Temas Contemporâneos Transversais também são contemplados no currículo de Minas Gerais, assegurando sua presença e importância na formação dos alunos.

Considerando a importância dos Temas Contemporâneos Transversais na formação abrangente dos estudantes, a sequência de videoaulas elaborada neste trabalho integrou o Tema Meio Ambiente, explorando o universo das abelhas. Este enfoque foi direcionado para oferecer uma perspectiva de ensino de Matemática contextualizada e significativa.

Adicionalmente, a abordagem dos conteúdos matemáticos presente nessas videoaulas está alinhada às competências e habilidades estipuladas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e pelo Currículo Referência de Minas Gerais. Desse modo, conduzimos uma análise para identificar quais dessas habilidades são contempladas em cada videoaula, as quais foram esquematizadas e organizadas no Quadro 2 abaixo.

Quadro 2: Habilidades da BNCC e do Currículo Referência de Minas Gerais contempladas nas videoaulas

Habilidades	Videoaulas
(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).	Videoaula 1 Videoaula 4

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.	Videoaula 4
(EM13MAT309A): Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.	Videoaula 2 Videoaula 3 Videoaula 4
(EM13MAT309B): Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo da capacidade de uma caixa d'água em diferentes formatos), com ou sem apoio de tecnologias digitais.	Videoaula 2 Videoaula 3 Videoaula 4
(EM13MAT505). Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.	Videoaula 1

Fonte: A autora

Os conteúdos matemáticos abordados nas videoaulas vão além das habilidades mencionadas. Além destas, há a possibilidade de explorar diversas características dos polígonos regulares, com especial enfoque no triângulo, quadrado e hexágono. Entre os tópicos abordados, encontram-se a fórmula da soma dos ângulos internos, cálculo do perímetro e área. Além do mais, são discutidas as áreas de losangos e trapézios, assim como as propriedades de diversas figuras geométricas, como o prisma hexagonal, hexágonos regulares, triângulos equiláteros, losangos e trapézios.

4.2. RECURSOS DA PLATAFORMA *EDPUZZLE* PARA O PROFESSOR

Vamos avaliar nesse subtópico as possibilidades oferecidas pelo Edpuzzle nas atividades docentes, usando o relatório resultante da aplicação da sequência de videoaulas interativas na turma de Informática e Ensino.

Como resultado dos estudos realizados por Carneiro e Passos (2014), os professores relataram enfrentar dificuldades para se adaptar a essa nova realidade tecnológica e incorporar isso em sua prática. Por isso, uma interface intuitiva que fornece uma ampla gama de informações em um único espaço, como o Edpuzzle, pode contribuir na facilitação da adaptação dos professores a essa mudança.

Na tela inicial da turma denominada "Abelhas" é possível ter acesso rápido a diversas informações úteis (Figura 30), como:

1. **Tarefas.**

   Nesse espaço é possível visualizar todas as tarefas designadas para uma turma específica. Na turma mencionada, foram incluídas 4 atividades.

2. **Respostas sem correção.**

   Aqui são informadas as quantidades de respostas dadas pelos alunos que ainda precisam ser corrigidas pelo professor. A plataforma é capaz de corrigir as perguntas de múltipla escolha, portanto, o número de respostas que requerem correção se refere às perguntas abertas. Por exemplo, na Videoaula 2, existem 72 novas respostas que ainda não foram avaliadas.

3. **Data de início.**

   Refere-se ao dia em que a tarefa foi aberta para ser realizada.

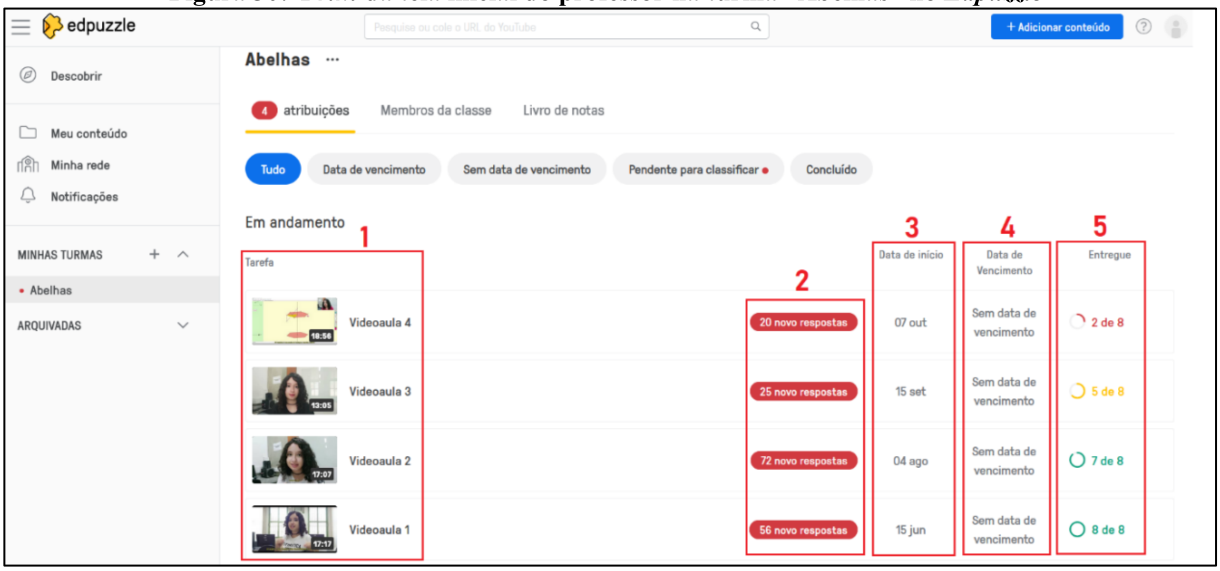
4. **Data de vencimento.**

   Refere-se ao dia final que o aluno tem disponível para entregar a atividade. Fica a critério do professor colocar, ou não, um prazo de vencimento. Na aplicação feita não foi adicionada data final para entrega da tarefa.

5. **Entregue.**

   Aqui, tem-se a informação referente a quantidade de alunos que já concluiu determinada tarefa. A primeira tarefa foi concluída pelos 8 alunos da turma. Enquanto que, por uma questão de tempo, apenas 2 alunos finalizaram a última.

Figura 30: ***Print*** **da tela inicial do professor na turma "Abelhas" no** ***Edpuzzle***



Fonte: A autora

Além dessa interface principal, é possível acompanhar o desempenho geral da turma em cada tarefa específica. A título de exemplo, consideremos a Videoaula 3 (Figura 31):

6. **Nome do aluno.**

   Neste local, são exibidos os nomes de todos os alunos que estão vinculados a turma. As tarjas foram sobrepostas aos nomes para proteger a identidade dos estudantes da pesquisa.

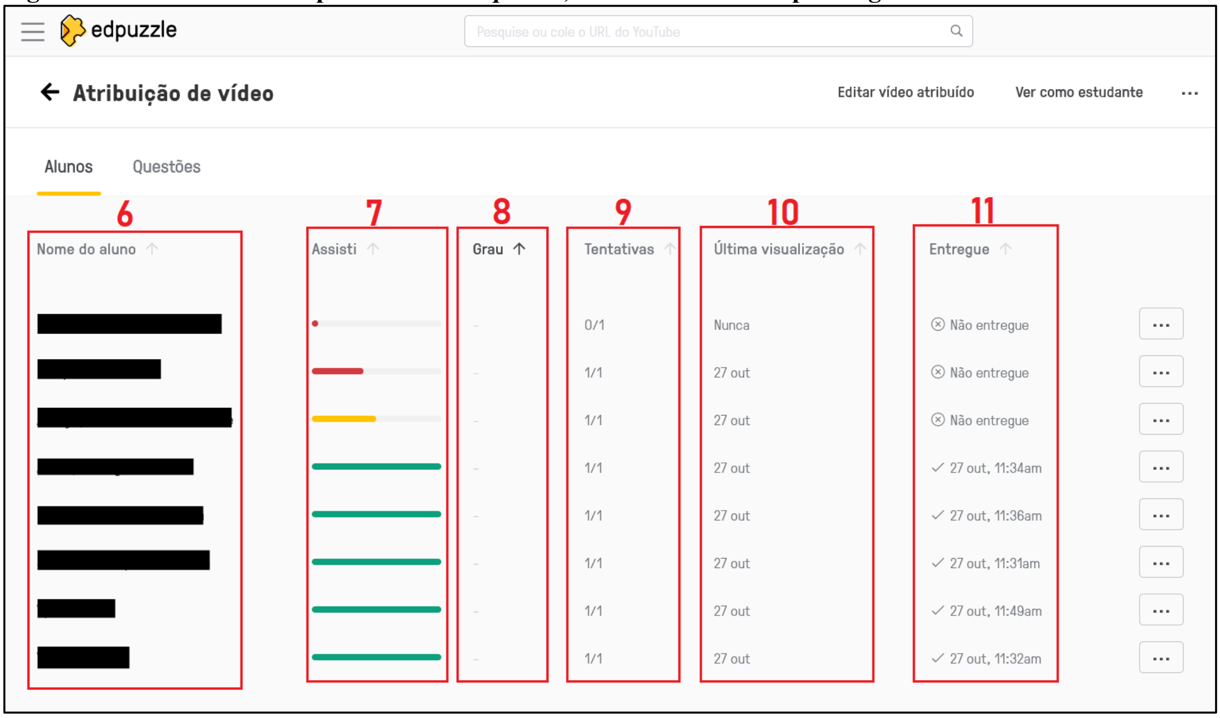
7. **Assisti.**

   Refere-se ao quanto o aluno assistiu do vídeo. As faixas coloridas representam a porcentagem de conclusão da videoaula pelo aluno. A faixa verde indica que a aula foi integralmente assistida ou quase isso, a faixa amarela sinaliza um progresso intermediário, enquanto a faixa vermelha denota pouca visualização do conteúdo.

8. **Grau.**

   Aqui são colocadas as notas de cada estudante. As notas aparecem nesse espaço automaticamente após a correção das perguntas abertas. O intuito da pesquisa não era avaliar os alunos, por isso, a correção não foi efetuada e, consequentemente, os espaços de notas estão vazios.

Figura 31: *Print* da tela do professor no *Edpuzzle*, referente ao desempenho geral da turma na videoaula 3



Fonte: A autora

9. Tentativas.

As tentativas dizem respeito a quantas vezes o aluno realmente assistiu o conteúdo e respondeu às perguntas, seguido da informação sobre quantas tentativas ele tem disponível. Nesse caso, foi permitida apenas uma tentativa, o que pode ser alterado pelo professor ao configurar o vídeo.

10. Última Visualização

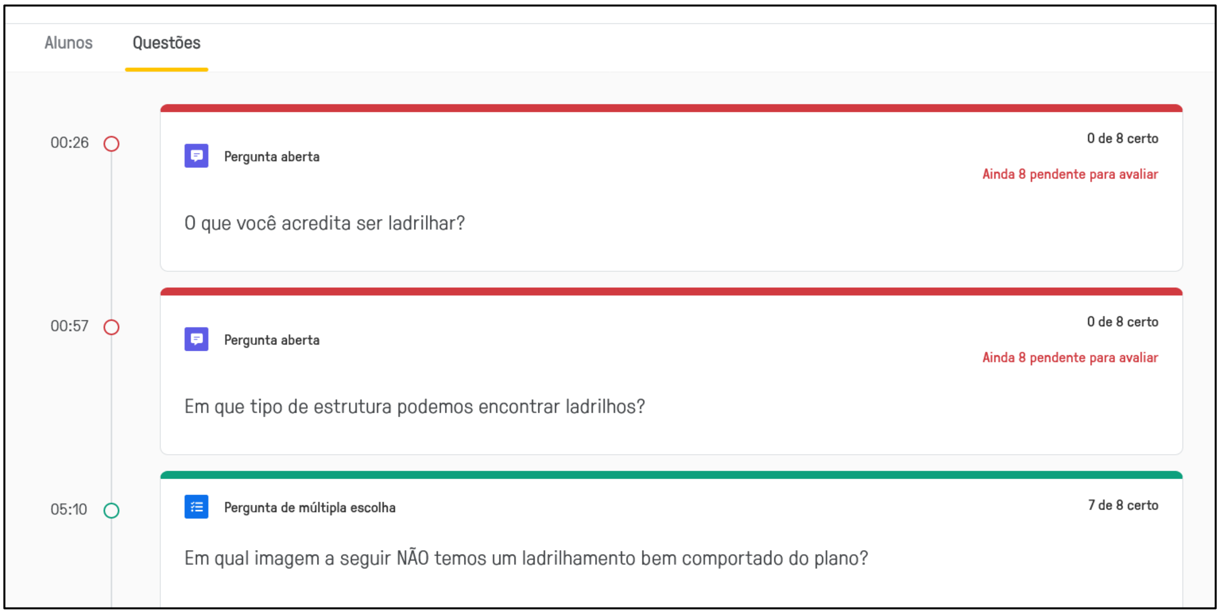
Aqui é disponibilizada a informação da última data que o aluno visualizou o conteúdo. Se o aluno nunca tiver acessado a tarefa, a última visualização aparecerá como “Nunca”.

11. Entregue.

Nesse espaço é informado o dia e a hora exata em que o estudante entregou a tarefa e, caso o conteúdo não tenha sido finalizado pelo aluno, aparece a mensagem “Não entregue”.

Ao lado da aba de “Alunos”, tem-se a aba das “Questões”, em que é possível verificar a quantidade de alunos que acertou cada pergunta presente em cada videoaula. Na Figura 32, retirada da Videoaula 1, é possível ver algumas das questões presentes nela e o tempo exato em que ela se localiza. Além disso, é informado quantas respostas ainda precisam de avaliação.

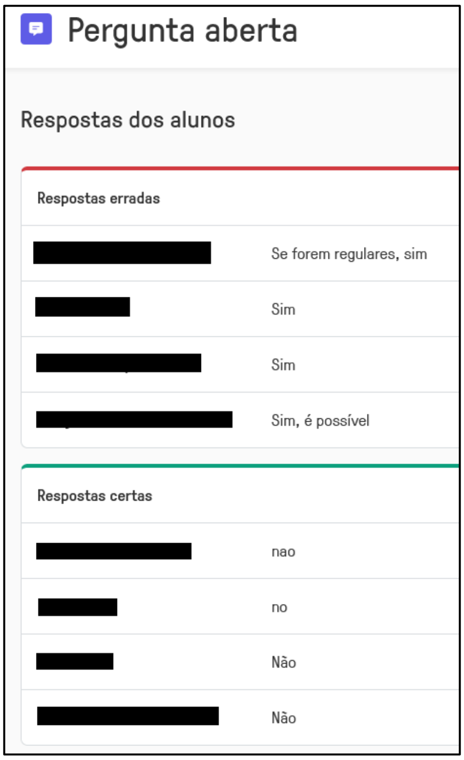
Figura 32: *Print* da tela do professor no *Edpuzzle*, referente aos resultados da turma por questão na videoaula 1



Fonte: A autora

Ao clicar em uma pergunta específica na aba de "Questões", é possível visualizar a resposta de todos os alunos em um só lugar. Na figura 33 encontra-se um exemplo retirado da Videoaula 1, referente à pergunta: "É possível ladrilhar o plano utilizando pentágonos regulares?".

Figura 33: *Print* da tela do professor no *Edpuzzle*, referente aos resultados da turma numa determinada questão na videoaula 1



Fonte: A autora

Com a possibilidade de ter acesso a essa informação em apenas uma tela, o professor pode verificar possíveis questões que não ficaram totalmente esclarecidas. Percebe-se que metade dos alunos acertou a resposta e a outra metade errou. Em situações de sala de aula, seria importante retomar essa questão e reforçar o conteúdo ligado a essa pergunta para garantir que todos os alunos compreendam o conteúdo adequadamente.

Além desses relatórios gerais, é possível ver o desempenho de cada aluno individualmente. Ao clicar no nome dele dentro da tarefa, tem-se acesso à porcentagem da tarefa que foi realizada, sua nota, tentativas feitas, quantidade de respostas corretas, tempo gasto para fazer a atividade e a data, com o horário que ela foi entregue.

Ademais, a plataforma divide a videoaula em seções e, com isso, o professor pode ter acesso a quantas vezes o aluno assistiu cada seção, ou seja, se o aluno retroceder o vídeo, isso será informado ao professor. Por exemplo, na Figura 34, observa-se que o aluno em questão assistiu duas vezes as seções do minuto 01:43 ao 03:27 e do 10:22 ao 12:05, enquanto as demais foram assistidas apenas uma vez.

Figura 34: *Print* da tela do professor no *Edpuzzle*, referente às interações de um determinado estudante da turma na videoaula 1

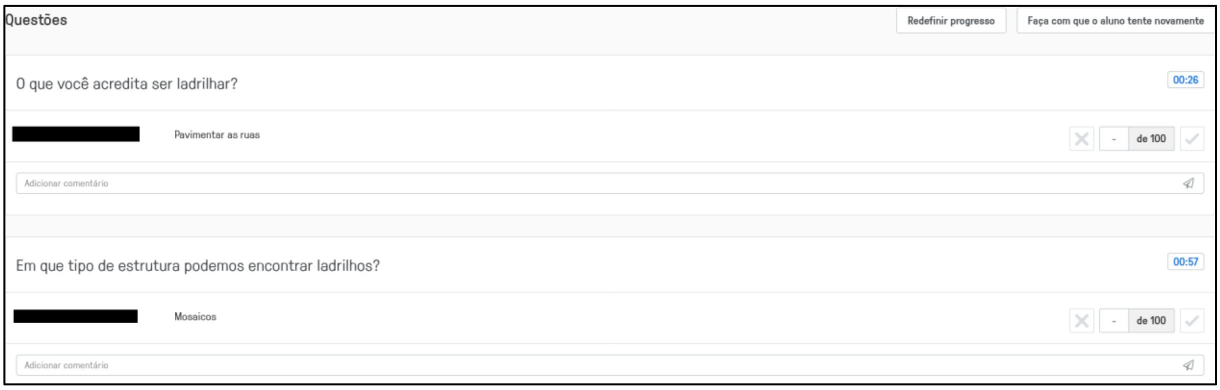
Fonte: A autora

Se um aluno retrocede diversas vezes no mesmo ponto, ou se a turma assiste diversas vezes a mesma seção, isso pode indicar uma situação de dificuldade, ou seja, um ponto que requer atenção do professor. É importante que o professor esteja ciente desses sinais e possa ajudar os alunos a superar as barreiras encontradas, seja por meio de *feedbacks* que ele pode enviar pela plataforma, ou em momentos presenciais com a turma.

Muitos dispositivos e abordagens que afirmam ser interativos muitas vezes não atendem verdadeiramente a esse critério, quando considerados do ponto de vista do aluno. Isso ocorre porque a interatividade exige que, após a resposta do aluno, o professor forneça *feedback*. Sem essa característica, a resposta do aluno desaparece no vazio, deixando-o sem saber se sua contribuição foi registrada, aceita, compreendida ou simplesmente ignorada (Yacci, 2000).

Nesse contexto, a plataforma *Edpuzzle* desempenha de forma eficaz seu papel de promover a interação, uma vez que, na seção individual do aluno, onde suas respostas são exibidas, há a possibilidade de incluir comentários para cada resposta dada (Figura 34). Portanto, para garantir que o ciclo de interação defendido por Yacci (2000) seja plenamente realizado – ciclo este que corresponde à interação mediada por dispositivos, na classificação de Tonus (2007) – é de grande importância que os professores façam uso desse recurso.

Figura 35: ***Print*** **da tela do professor no** ***Edpuzzle*****, referente aos campos para comunicação entre professor e estudante em cada questão na videoaula 1**



Fonte: A autora

Dadas essas considerações, é viável concluir que as videoaulas interativas podem estabelecer um ciclo de interação, uma vez que o professor tem acesso ao desenvolvimento individual de cada aluno, às respostas fornecidas a cada pergunta, aos momentos em que o estudante retrocedeu o vídeo e em quais segmentos, ao tempo despendido para concluir o material e à quantidade de vezes que o conteúdo foi revisto. Sendo assim, ele pode utilizar dessas informações para avaliar o nível de compreensão dos alunos, identificar possíveis dificuldades, adaptar sua abordagem pedagógica de acordo com as necessidades e fornecer *feedback* aos alunos sobre seu desempenho.

Por sua vez, os alunos têm a oportunidade de esclarecer suas dúvidas, expressar ideias e reflexões. Além do mais, Mattar (2009) aponta a possibilidade de um aprimoramento dos materiais a partir da exploração feita pelos alunos, contribuindo para a construção conjunta do saber.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo desta pesquisa, o objetivo central foi desenvolver uma sequência de videoaulas interativas destinadas ao ensino de conteúdos de geometria e trigonometria do Ensino Médio, utilizando como abordagem a matemática associada às abelhas.

Os resultados obtidos revelam que as videoaulas interativas oferecem um leque de recursos a serem explorados pelo professor, constituindo-se em uma ferramenta tecnológica pouco explorada, porém de grande potencial para aprimorar o processo educacional. Esta ferramenta, alinhada ao conceito de interação mediada conforme estabelecido por Tonus (2007), possibilita a comunicação entre emissor e receptor por meio de instrumentos tecnológicos.

Além disso, essa forma de comunicação se coaduna com a interatividade defendida por Yacci (2000): o professor disponibiliza o vídeo para o aluno, estabelecendo o primeiro contato; o aluno, por sua vez, responde às perguntas propostas na videoaula, interagindo com o conteúdo e fornecendo um retorno ao professor. Para completar esse ciclo interativo, o professor oferece um *feedback* ao aluno sobre seu desempenho na atividade. Observamos que essa dinâmica pode ser estabelecida por meio da plataforma *Edpuzzle*, evidenciando a possível contribuição desse recurso para a prática educacional.

Sob a perspectiva do aluno, o ambiente interativo oferece o controle sobre o próprio ritmo de aprendizagem, permitindo pausar o vídeo e revisitar o conteúdo quantas vezes necessário. Além disso, possibilita ao aluno registrar suas dúvidas nas respostas às perguntas apresentadas, promovendo uma participação ativa no processo educacional.

Já do ponto de vista do professor, essa plataforma oferece oportunidades significativas. Permite acompanhar o progresso de aprendizagem da turma como um todo, assim como o desenvolvimento individual de cada estudante. Essa análise detalhada possibilita ao professor adaptar a condução do processo educativo de acordo com os resultados observados nos relatórios do ambiente interativo dos vídeos, proporcionando uma abordagem mais personalizada.

A partir da aplicação da sequência de videoaulas interativas na turma de Informática e Ensino do curso de Matemática, percebe-se a importância dos futuros professores se atentarem para a formação tecnológica, integrada aos conhecimentos matemáticos e pedagógicos, necessária para uma atuação profissional condizente com a sociedade digital atual.

Para dar continuidade a esta pesquisa, sugere-se a produção de uma quinta videoaula que aborde a dedução do ângulo ótimo encontrado nos losangos do ápice triédrico, a partir da fórmula da área total deduzida na quarta videoaula[8]. No contexto do Ensino Médio, entende-se que essa discussão é possível de ser realizada sem utilizar conceitos e procedimentos do Cálculo Diferencial, apesar de tratar-se de uma função obtida pela soma de uma constante com duas funções trigonométricas, cuja representação gráfica não seria factível apenas com os conhecimentos ensinados na escola. Para conduzir essa discussão, explora-se dinamicamente, por meio do GeoGebra, o gráfico da função área total do alvéolo, em relação ao ângulo do ápice triédrico. Dessa forma, encontra-se um valor aproximado para o ângulo ótimo. Além disso, pode-se descobrir os ângulos internos em cada losango e comparar com resultados empíricos de pesquisas feitas por biólogos, complementando de maneira mais harmônica a série de vídeos desenvolvida.

Além disso, outras temáticas relacionadas às abelhas, que vão além das estruturas por elas construídas, podem ser exploradas em futuras videoaulas. Por exemplo, seria relevante abordar a 'dança das abelhas'[9] executada pela espécie *Apis Mellifera*, estabelecendo uma interdisciplinaridade com conteúdos de geografia e física. Essa temática permite uma abordagem matemática, envolvendo conceitos de vetores e trigonometria.

Almejamos que este estudo possa contribuir para as atividades docentes, proporcionando-lhes um novo recurso para integrar a tecnologia em suas práticas educacionais, principalmente na visualização de videoaulas de uma forma diferente da convencional. Além de apresentar essa ferramenta, demonstramos uma metodologia para utilizá-la, a Modelagem Matemática, a fim de explorar conteúdos mais envolventes e contextualizados. Sendo assim, esperamos que essa demonstração sirva de inspiração para que os professores possam adaptar e aplicar seus próprios conteúdos fazendo uso desse recurso.

Outra contribuição esperada para este trabalho está relacionada ao fomento de propostas similares durante a formação inicial de professores de Matemática e Ciências, buscando despertar para o uso das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) nos processos de ensino e aprendizagem.

---

[8] Referimos ao ângulo ótimo como o ângulo que vai minimizar a área total do alvéolo, ou seja, o ângulo que vai demandar a menor quantidade de cera para construção do alvéolo.

[9] Ver, por exemplo, Bertone *et al.* (2021) e https://www.facebook.com/NatGeoPortugal/videos/787526341923732/

O estudo realizado foi fundamental para destacar a significância das TDIC no contexto do ensino e aprendizagem da Matemática. Inúmeras possibilidades se tornam viáveis somente por meio do uso dessas tecnologias. Um exemplo tangível disso é a criação de uma animação, como a apresentada na Videoaula 4, que demonstrou de forma visual a formação do ápice triédrico encontrado nos alvéolos, fornecendo um recurso para enriquecer o material pedagógico e facilitar o trabalho do professor.

Além disso, a inclusão das TDIC no ambiente escolar desempenha um papel importante na formação dos estudantes, já que a habilidade de utilizar essas tecnologias é essencial para a participação efetiva na sociedade contemporânea. Dessa forma, a escola, ao adotar essas ferramentas tecnológicas, não apenas fortalece a educação tecnológica dos alunos, mas também promove a adaptação necessária para interagir no mundo atual, cada vez mais dependente desses recursos.

A pesquisa que realizei enriqueceu minha prática docente ao me permitir desenvolver um estudo mais aprofundado sobre o fascinante universo das abelhas, bem como sobre a aplicação da Matemática em seu contexto. Pude estudar, explorar e aplicar conceitos de Modelagem Matemática integrando-os às videoaulas interativas, algo que antes não havia explorado.

Adicionalmente, a realização desse trabalho proporcionou um avanço nas minhas habilidades de pesquisa e análise crítica. Dessa forma, este estudo não apenas expandiu meu conhecimento sobre um tema específico, mas também teve um impacto direto na minha prática pedagógica, enriquecendo-a com novas metodologias, abordagens e ferramentas pedagógicas.

Acreditamos que os educadores encontrarão aqui não somente uma fonte de ideias já preparadas, mas sim um catalisador para fomentar a criatividade no desenvolvimento de conteúdos educativos. Para aqueles que buscam alternativas prontas, a sequência de videoaulas interativas produzida neste trabalho estará disponível para fins educacionais. Nossa intenção é que este material não apenas inspire, mas também capacite os educadores a ampliar suas abordagens pedagógicas, adaptando e reinventando métodos de ensino para uma experiência de aprendizado mais dinâmica e significativa para os estudantes.

REFERÊNCIAS

ALVES, S.; DALCIN, M. Mosaicos do Plano. *Revista do Professor de Matemática* São Paulon. 40, p. 3-12, out.-dez. 1999.

BARCELOS, G. T.; BATISTA, S. C. F. Tecnologias digitais na matemática: tecendo considerações. *In:* PEIXOTO, G. T. B.; BATISTA, S. C. F.; AZEVEDO, B. F. T.; MANSUR, A. F. U. (org.). *Tecnologias digitais na educação:* pesquisas e práticas pedagógicas. Campos de Goytacazes, RJ: Essentia, 2015. p. 132-157.

BASSANEZI, Rodney Carlos. Modelagem Matemática como Método de EnsinoAprendizagem. Editora Contexto, 2002.

BERTONE, A. M. A.; TANAJURA, V. D. V.; BORGES, A. S.; MEDEIROS, W. M.; JAFELICE, R. S. M. Abelhas e GeoGebra: uma parceria na animação da dança do requebrado. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*. v. 10, n. 1, p. 151-167, 2021.

BLUM, W.; NISS, M. *Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects* — State, trends and issues in mathematics instruction. Educ Stud Math 22, p. 37–68, 1991.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018.

CARNEIRO, R. F.; PASSOS, C. L. B. A utilização de tecnologias da informação e comunicação nas aulas de Matemática: limites e possibilidades. *Revista Eletrônica de Educação*, v. 8, n. 2, p. 101-119, 2014.

CHAGAS, A. M.; LINHARES, R. N.; BARROSO, R. C. A. Edpuzzle e a utilização de vídeos em aprendizagens significativas: uma forma de identificação ou ampliação dos conhecimentos prévios. *In:* SANTOS, E.; PORTO, C. (org.) *App-Education*: fundamentos, contextos e práticas educativas luso-brasileiras na cibercultura. Salvador: EDUFBA, 2019. p. 389-408.

DIAS, C. C.; SAMPAIO, J. C. V. *Desafio geométrico*: módulo I. Central de Texto: Cuiabá, MT, 2013. (Matem@tica na pr@tica. Curso de especialização em ensino de matemática para o ensino médio)

GARCIA, V. C. V. Fundamentação teórica para as perguntas primárias: O que é Matemática? Por que ensinar? Como se ensina e como se aprende? *Revista Educação*, Porto Alegre, v. 32, n. 2, p. 176-184, mai.-ago. 2009.

GRAVINA, Maria Alice; CONTIERO, Lucas de Oliveira. Modelagem com o Geogebra: uma possibilidade para a educação interdisciplinar? *Revista Novas Tecnologias na Educação*. Porto Alegre, v. 9, n. 1, p. 1-10, jul. 2011.

KENSKI. V. M. *Educação e Tecnologias*: o novo ritmo da informação. 8ª ed. Campinas: Papirus, 2012.

MATTAR, J. Interatividade e aprendizagem. *In:* LETTO, F. M.; FORMIGA, M. (org.). *Educação a distância, o estado da arte*. ABED (Associação Brasileira de Educação a Distância). São Paulo: Pearson education do Brasil, 2009. p. 112-120.

MENDES, A. S. *et al.* O estudo da geometria utilizada pelas abelhas como aplicação dos conceitos de área, perímetro e volume com o auxílio do GeoGebra 3D. *In:* FÓRUM ENSINO PESQUISA EXPENSÃO GESTÃO (FEPEG), 8º, 2014, Montes Claros. *Anais* [...]. Montes Claros: Unimontes, p.1-3, 2014.

MINAS GERAIS. *Currículo Referência de Minas Gerais. Minas Gerais*, 2018. Disponível em: Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/curriculos_estados/documento_curricular_mg.pdf>. Acesso em: 02 mai. 2023.

MOLINERO, E. H. S.; MARQUES, L. D.; JAFELICE, R. S. M. O estudo matemático do comportamento das abelhas. *FAMAT em Revista*, n. 09, out. 2007.

RODRIGUES, C. I.; REZENDE, E. Q. F. *Abelhas matemáticas*. S. d. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1042. Acesso em 02/05/2023.

TONUS, M. *Interações digitais*: uma proposta de ensino de radiojornalismo por meio das TIC. 2007. Tese (Doutorado em Multimeios) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA. Faculdade de Matemática. *Ficha de componente curricular de Informática e Ensino (PROINTER II) do Curso de Graduação em Matemática*. Uberlândia, 2019.

VALENTE, J. A. Inovação nos processos de ensino e de aprendizagem: o papel das tecnologias digitais. *In:* VALENTE, J. A.; FREIRE, F. M. P.; ARANTES, F. L. (org.) *Tecnologia e Educação*: passado, presente e o que está por vir. Campinas: NIED/UNICAMP, 2018. p. 17-41.

YACCI, M. Interactivity: from agents to outcomes. *New Directions for Teaching and Learning*. n. 71, p. 19-26, 1997, .