Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

ENSINO DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS POR MEIO DO DESENHO GEOMÉTRICO

Barbara Ribeiro Silva Armando

Uberlândia-MG
2023

Barbara Ribeiro Silva Armando

ENSINO DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS POR MEIO DO DESENHO GEOMÉTRICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção de título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de concentração: Matemática
Linha de pesquisa: Ensino de Geometria

Orientador(a): Prof.º Dr. Walter dos Santos Motta Junior

Uberlândia-MG
2023

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

A727
2023

Armando, Barbara Ribeiro Silva, 1988-
ENSINO DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS POR MEIO DO DESENHO GEOMÉTRICO [recurso eletrônico] / Barbara Ribeiro Silva Armando. - 2023.

Orientador: Walter dos Santos Junior Motta .
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2023.502
Inclui bibliografia.

1. Matemática. I. , Walter dos Santos Junior Motta, 1960-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3230-9452 - www.famat.ufu.br - profmat@famat.ufu.br

ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT UFU				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Profissional, 01, PROFMAT				
Data:	Oito de agosto de dois mil e vinte e três	Hora de início:	16:00	Hora de encerramento:	18:00
Matrícula do Discente:	12112PFT001				
Nome do Discente:	Barbara Ribeiro Silva Armando				
Título do Trabalho:	Ensino de conceitos geométricos por meio do desenho geométrico				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Educação Matemática				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Não há				

Reuniu-se em web conferência pela plataforma Google Meet a Banca Examinadora, aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PPGMPMAT), assim composta pelos professores doutores: Leonardo de Amorim e Silva - ICENE/UFTM; Dulce Mary de Almeida - FAMAT/UFU e Walter dos Santos Motta Junior -FAMAT/UFU, orientador da candidata.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Dr. Walter dos Santos Motta Junior, apresentou a Comissão Examinadora e juntamente com a candidata agradeceram a presença de todos. Posteriormente, o presidente concedeu à Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação da Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

Dando continuidade, o senhor presidente concedeu a palavra para os examinadoras que passaram a arguir a candidata. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final considerando a candidata:

<u>Aprovada</u>

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

Documento assinado eletronicamente por **Leonardo de Amorim e Silva**, **Usuário Externo**, em 08/08/2023, às 17:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Dulce Mary de Almeida**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 08/08/2023, às 17:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Walter dos Santos Motta Junior**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 08/08/2023, às 17:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4709864** e o código CRC **B044D7F0**.

Referência: Processo nº 23117.056316/2023-49 SEI nº 4709864

Para os meus filhos Rhuan e Augusto motivos do meu acordar diário. E se continuo estudando é por acreditar que a melhor forma de educar é pelo exemplo.

Agradecimentos

Aos meus pais. Minha mãe, Cláudia, por ser meu apoio, minha amiga, meu braço direito e esquerdo, por ter ficado com os meninos a cada sábado, abdicando dos próprios finais de semana para que eu pudesse participar das aulas. Meu pai, Cláudio, que quando não estava com os meninos esteve na estrada comigo, sempre disposto, feliz e fazendo questão de me acompanhar. Mas principalmente por serem responsáveis por enraizar em mim a importância e a valorização do estudo.

Ao meu marido, Alberto, por ser paciente, as minhas ausências nesse período dedicado ao mestrado. Por continuar me apoiando e incentivando meu crescimento.

A minha irmã, Bruna, minha amiga, minha confidente, minha companheira de vida, pessoa que sei que posso contar por toda eternidade.

A minha sogra, Dona Maria, que sempre me acode, nas emergências... sempre disponível, prestativa e feliz.

Ao meu professor orientador Walter, que tem um coração enorme, foi paciente, flexível e acima de tudo me ensinou muito, aprendi demais e tenho certeza de que hoje minhas aulas são melhores graças a ele.

Aos meus sobrinhos, Pedro, Manuela e Leonardo, companheiros dos meninos e que tornam as nossas vidas mais felizes.

Aos meus cunhados, Luiz Cláudio, Lúcia, Luciana, Carlos e Daniel, por todo apoio.

As escolas públicas de Araxá que estão presente nessa pesquisa, pela disponibilidade de aplicação, em especial a minha escola de trabalho, que possui profissionais incríveis a quem sou imensamente grata.

A todos os meus alunos que me motivam a continuar trabalhando e transmitindo conhecimento.

A DEUS pela oportunidade de viver tudo isso.

ARMANDO, B. R. S. .*Ensino de conceitos geométricos por meio do desenho geométrico*. 2023. 163p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

O presente trabalho objetivou avaliar os reflexos e as potencialidades de disciplina Desenho Geométrico como eletiva no rol de possibilidades vinculadas com a reformulação do "Novo Ensino Médio 2022". Pretendemos construir argumentos e exemplos que comprovem as potencialidades dessa disciplina como suporte didático-pedagógico ao ensino de Matemática e, em especial, ao ensino de Geometria. Destacamos inicialmente aspectos históricos do Desenho Geométrico; elementos que mapeiam o desenvolvimento do pensamento geométrico dos discentes envolvidos segundo a teoria de Van Hiele e o uso de programas computacionais, alternativos às construções com régua e compasso, presentes usualmente no ambiente do Desenho Geométrico. Construímos, aplicamos e analisamos processos avaliativos, quanto aos níveis cognitivos dos ingressantes, destacando a ausência de um processo preparatório qualitativamente adequado desses discentes. Implementamos oficinas de curta duração, em um grupo de controle, produzindo materiais e incorporando metodologias que integraram aspectos teóricos e práticos do Desenho Geométrico/Geometria. Nosso entendimento é de que essas ações podem ser incorporadas a dinâmica de trabalho de outros colegas professores em suas salas de aula. Construímos, aplicamos e analisamos testes associados ao mapeamento da efetividade desse processo de intervenção pedagógica. Concluindo positivamente pela intervenção e a certeza de que uma ação planejada, com maior espaço tempo de duração, elevará para níveis satisfatórios o pensamento geométrico dos discentes envolvidos.

Palavras-chave: Van Hiele, Desenho Geométrico, Novo Ensino Médio, Eletiva.

ARMANDO, B. R. S. .*Teaching geometric concepts through geometric design*. 2023. 163p. M. Sc. Dissertation , Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

The present work aimed to evaluate the reflections and potentialities of the Geometric Design subject as an elective in the list of possibilities linked to the reformulation of the "New Secondary School 2022". We intend to build arguments and examples that prove the potential of this discipline as a didactic-pedagogical support to the teaching of Mathematics and, in particular, to the teaching of Geometry. We initially highlight historical aspects of Geometric Design; elements that map the development of the geometric thinking of the students involved according to Van Hiele's theory and the use of computer programs, alternative to constructions with ruler and compass, usually present in the environment of Geometric Design. We built, applied and analyzed evaluative processes, regarding the cognitive levels of freshmen, highlighting the absence of a qualitatively adequate preparatory process for these students. We implemented short-term workshops, in a control group, producing materials and incorporating methodologies that integrated theoretical and practical aspects of Geometric Design/Geometry. Our understanding is that these actions can be incorporated into the work dynamics of fellow teachers in their classrooms. We built, applied and analyzed tests associated with mapping the effectiveness of this pedagogical intervention process. Concluding positively by the intervention and the certainty that a planned action, with a longer duration, will raise to satisfactory levels the geometric thinking of the students involved.

Keywords: Van Hiele, Geometric draw, Eletiva.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Problemática

Desde 2014 trabalho em uma escola estadual na cidade de Araxá - MG. Essa escola é constituída apenas por turmas de ensino médio. No ano de 2021, estando em ensino remoto motivado pela epidemia de COVID-19, recebemos um catálogo de disciplinas eletivas, onde juntamente com os outros professores deveríamos escolher duas disciplinas que constituíriam parte da grade do novo currículo do ano seguinte, intitulado Novo Ensino Médio. Em função da minha experiência e de outros colegas professores com o ensino de Geometria em nossa escola a opção por Desenho Geométrico se fez presente como uma das eletivas selecionadas. Assim, ao iniciar os trabalhos de planejamento para o ano de 2022, na retomada das ações presenciais, e na busca de modelos de planos de ensino qualificados para o desenvolvimento da disciplina de Desenho Geométrico, me deparei com as dificuldades em ajustar um plano que se mostrasse compatível com as demandas desse Novo Ensino Médio. Dessa forma, um planejamento preliminar foi sendo concebido na dinâmica da vivência diária. Em meio a essas dificuldades de ajustes da passagem do ensino remoto para o presencial reencontrei o professor Walter dos Santos Motta Junior, que concebeu um projeto que respondia as nossas necessidades de planejamento e desenvolvimento do Desenho Geométrico como suporte ao ensino de Geometria. Através dele tive contato com a teoria de Van Hiele, que hoje acredito ser um meio metodológico bastante eficiente para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Considero que a frase citada abaixo por DEGRUIRE, resume bem o espírito dos desenvolvedores dessa dissertação.

> É possível citar muitas razões para que se estude geometria nas séries iniciais e médias. Uma delas é a oportunidade que a geometria oferece de ensinar a resolver problemas e ensinar para resolver problemas. Permitam-me esclarecer essas duas frases: "ensinar a resolver problemas" ultrapassa a mera resolução de problemas para incluir a reflexão sobre processos de resolução, objetivando coligir estratégias de resolução de problemas que poderão ser úteis posteriormente; "ensinar para resolver problemas" envolve o ensino do conteúdo de maneira significativa, de modo a que passe a ser utilizado em outros problemas e aprendizados.(Linda J. DEGRUIRE [8])

A problemática presente no ensino da Geometria vai além dos aspectos coletados em nossa pesquisa de campo com estudantes do Ensino Fundamental e Médio, percebe-se lacunas na formação do próprio professor conforme a fala de HERSHKOWITZ, juntamente com outros autores, no artigo *Atividades com professores baseadas em pesquisa cognitiva*, que pode ser acompanhado, abaixo

> Um conhecimento básico de geometria é fundamental para as crianças interagirem adequadamente com seu meio, assim como para se iniciarem num estudo mais formal dessa matéria. Esse conhecimento básico, que compreende conceitos de geometria, suas propriedades e relações simples, deveria em geral, ser adquirido através de experiências de geometria anteriores ao ensino fundamental anos finais.
> Se os alunos devem aprender esses fundamentos, é importante que os professores da escola elementar conheçam bem essas ideias e as maneiras de ajudar as crianças a aprender. Mas uma pesquisa mostrou que os professores apresentam padrões de concepções incorretas semelhantes aos dos alunos do 6° ao 9° ano. [14]

Acreditando no poder transformador do ensino qualificado da Geometria, gostaríamos que essa dissertação pudesse ser motivadora para o desenvolvimento de processos de intervenções pedagógicas coesas e que alcance um grande número de outros professores. As palavras da professora DANA merecem uma reflexão:

> Como professora, tenho incluído em meu curso a cada ano mais geometria, pois estou convencida de que se trata de uma fonte inesgotável de ideias, processos e atitudes inteiramente adequados à escola elementar. Tenho observado reiteradamente que a geometria pode ser estimulante, motivadora, gratificante, instigadora do raciocínio e, às vezes, desafiante (com frequência tanto para o professor como para o aluno). Alunos que não são brilhantes em aritmética às vezes são os primeiros a resolver um quebra-cabeças, os mais artísticos na criação de desenhos e os mais persistentes quando solicitados a encontrar todos os padrões ou figuras possíveis de uma dada espécie. Outros que são "bons alunos em aritmética" muitas vezes querem que se diga a eles quantas possibilidades existem ou calculam mentalmente a resposta, em vez de usar o processo de tentativa e erro experimentalmente. [6]

O leitor dessa dissertação encontrará aqui um paralelo a fala MILAUSKAS, pois acreditamos assim como ele na necessidade de desafiar o aluno e ainda mais apresentar a ele a resolução de forma geométrica.

> Tenho convicção de que o aluno aprende a resolver problemas resolvendo problemas de qualidade. O treinamento, aliado ao contato com problemas de qualidade. O treinamento, aliado ao contato com problemas fora dos padrões, estimula o aluno a exercer suas faculdades de resolução de problemas. Enfatizar a resolução de problemas não significa simplesmente inserir alguns "problemas especializados" aqui e ali na sala de aula. Ao contrário, a resolução de problemas deveria ser o tema subjacente das aulas de matemática. Toda tarefa escolar deveria incluir problemas planejados para estimular a flexibilidade e o raciocínio. Os problemas deveriam utilizar capacidades adquiridas em outras disciplinas, assim como encorajar o aprendizado de técnicas de resolução bem fundadas e o uso de habilidades de raciocínio de alto nível. A matemática torna-se mais significativa para o aluno que está constantemente em contato com uma ampla variedade de problemas. Ele estará mais capacitado a se adaptar a novas situações e a abordar novos problemas com segurança. [15]

Estrutura geral da Dissertação

Iniciamos o primeiro capítulo relatando elementos do projeto do Novo Ensino Médio: como aconteceu sua implementação; as legislações que o cercam e principalmente evidenciando que se as escolas não optarem por eletiva da área de geometria, o aluno não terá contato com essa disciplina. Principalmente aqueles alunos do primeiro ano do ensino médio que fatalmente ficarão sem nenhuma aula de geometria. Refletimos sobre a possível desvalorização presente no processo educacional em Minas Gerais referente aos itinerários formativos. Focamos no estudo sobre o catálogo da eletiva Desenho Geométrico, apresentando uma sugestão para desenvolvimento de conteúdos na mesma.

Além disso, nesse capítulo inicial apresentamos exemplos modelos de três exercícios, aparentemente de resolução estritamente algébrica, que a medida que são abordamos numa ótica geométrica, inicialmente com uso de resoluções com régua e compasso, se mostram com planos de resoluções lúcidos. Fazemos uma apresentação da evolução histórica do estudo de geometria no Brasil. Seguimos apresentando os pilares da teoria de Van Hiele. Finalizando, executamos um breve relato do software gratuito de geometria dinâmica GeoGebra, software esse que fazemos um comparativo de utilização com as três construções elementares com régua e compasso anteriores. Finalizamos o capítulo com a apresentação de quatro exercícios aparentemente de resolução complexa, onde para resolvermos vamos apresentar e desenvolver pela técnica de Polya, primeiro algebricamente e em seguida geometricamente.

No capítulo 2, temos como objetivo mapear os possíveis alunos que estariam presentes na escola do ensino médio no ano de 2023, para isso fomos aplicar um teste por nós criado seguindo a teoria de Van Hiele, para alunos do 9° ano do fundamental, de três escolas públicas diferentes. E fazemos um estudo sobre esse teste.

No capítulo 3, utilizamos novamente o teste aplicado no capítulo 2, para definir um grupo de controle e um grupo livre onde, aplicaremos atividades de intervenção formativa, baseada na teoria de Van Hiele, com objetivo de melhorar o desenvolvimento geométrico dos alunos.

No capítulo 4, apresentamos as atividades de intervenção formativa, planejadas para a turma intitulada como grupo de controle bem como suas devolutivas.

No capítulo 5, fizemos o desenvolvimento de um pós teste onde apresentamos os resultados das atividades de intervenção formativa.

Vamos todos refletir sobre o ato de ensinar Geometria

Gostaríamos de encerrar essa introdução com uma reflexão. Entendendo que o(a) leitor(a) principal desse material seja um(a) professor(a) de matemática do ensino médio, observe a fala de BALOMENOS que segue, nela se evidencia possíveis problemas que transportaremos para o futuro de nossos estudantes sem o desenvolvimento de um ensino de geometria qualificado.

> São cada vez maiores os indícios de que as dificuldades de nossos alunos em cálculo se devem a uma formação deficiente em geometria. Sugerimos que se amplie o papel da geometria no ensino médio, pois seu estudo propiciará a prontidão para o cálculo e desenvolverá a visualização espacial. [2]

CAPÍTULO 1

Aspectos gerais

1.1 O NOVO ENSINO MÉDIO

1.1.1 As mudanças estruturais presentes no projeto do “Novo Ensino Médio – 2022”

Em 16 de fevereiro de 2017 foi pulicada a LEI Nº 13.415 [13], pelo então presidente da república Michel Temer, tendo como objetivos principais a flexibilização do currículo e a ampliação da carga horária do ensino médio. Observando na integra da lei, destacamos a sua estruturação básica:

> O currículo do ensino médio será composto pela Base Nacional Comum Curricular e por itinerários formativos, que deverão ser organizados por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino, a saber:
> I - linguagens e suas tecnologias;
> II - matemática e suas tecnologias;
> III - ciências da natureza e suas tecnologias;
> IV - ciências humanas e sociais aplicadas;
> V - formação técnica e profissional. [13]

No estado de Minas Gerais o **Novo Ensino Médio** começou a ser implementado em sua integra no ano de 2022, sendo que num contexto de projeto piloto, durante o ano de 2021, foi implementado em apenas 13 escolas do estado.

Destaca-se que com essa implementação, a carga horária anual passou de 1000 para 1200 horas anuais, gerando a necessidade de adequações na gestão escolar, sendo que na maioria das escolas estaduais, a opção foi pela incorporação de um sexto horário para fazer frente a essa demanda de aumento de 200 horas.

Após o ajuste da carga horária, vale destacar como o processo de flexibilização da matriz curricular ocorreu. No que segue, para turmas do ensino médio diurno, inicialmente enfatizamos como era a matriz currícular até o ano de 2021 (Figura 1.1) e como passou a ser no ano de 2022 (Figura 1.2). Essas matrizes foram retiradas do Diário do Executivo, especificamente, a matriz do “antigo ensino médio” da RESOLUÇÃO SEE N° 4.234, DE 22 DE NOVEMBRO DE 2019 [9] e a matriz do “novo ensino médio” da RESOLUÇÃO SEE Nº 4.657/2021, DE 10 DE NOVEMBRO DE 2021 [10].

MATRIZ CURRICULAR ENSINO MÉDIO DIURNO			
ÁREAS DO CONHECIMENTO	COMPONENTES CURRICULARES	1°ANO	
		AULAS SEMANAIS	AULAS ANUAIS
Linguagens	Língua Portuguesa	4	160
	Língua Inglesa	2	80
	Arte	1	40
	Educação Física	2	80
Matemática	Matemática	4	160
Ciências da Natureza	Física	2	80
	Química	2	80
	Biologia	2	80
Ciências Humanas	Geografia	2	80
	História	2	80
	Sociologia	2	80
	Filosofia	-	
CARGA HORÁRIA TOTAL		25	1000

Figura 1.1: Matriz Currícular do “antigo” ensino médio

MATRIZ CURRICULAR ENSINO MÉDIO DIURNO - 2022				
Novo Ensino Médio	ÁREAS DO CONHECIMENTO	COMPONENTES CURRICULARES	1°ANO	
			AULAS SEMANAIS	AULAS ANUAIS
Formação Geral Básica	Linguagens e suas Tecnologias	Língua Portuguesa	3	120
		Língua Inglesa	1	40
		Arte	1	40
		Educação Física	1	40
	Matemática e suas Tecnologias	Matemática	3	120
	Ciências da Natureza e suas Tecnologias	Física	1	40
		Química	1	40
		Biologia	2	40
	Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	Geografia	1	40
		História	2	80
		Sociologia	1	40
		Filosofia	1	40
SUBTOTAL			18	720
Itinerários Formativos	UNIDADE CURRICULAR	COMPONENTES CURRICULARES	Aulas Semanais	Aulas Anuais
	Projeto de Vida	Projeto de Vida	1	40
	Eletivas	Eletiva 1	1	40
		Eletiva 2	1	40
	Preparação para o mundo do trabalho	Introdução ao mundo do trabalho	2	80
		Tecnologia e Inovação	1	40
	Aprofundamento nas áreas do conhecimento	Práticas Comunicativas Criativas	1	40
		Humanidades e Ciências Sociais	2	80
		Núcleo de Inovação Matemática	1	40
		Ciências da Natureza e suas Tecnologias	2	80
SUBTOTAL			12	480
CARGA HORÁRIA TOTAL			30	1200

Figura 1.2: Matriz Curricular do “novo” ensino médio

Direcionando a nossa atenção para a componente curricular Matemática, observamos na Figura 1.1, que os estudantes do primeiro ano tinham um total de 4 horas/aula semanais, enquanto que observando a Figura 1.2, houve uma redução para 3 horas/aula na formação geral básica, acrescidos de uma complementação de mais 1 hora/aula dentro dos itinerários formativos com a componente intitulada ***Núcleo de Inovação Matemática***. Além disso, existe a possibilidade dos estudantes terem mais aulas destinadas ao ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos. Para tanto, faz-se necessário direcionar, para esse fim, as opções por disciplinas dessa natureza no universo itinerários formativos eletivos, conforme podemos observar essa possibilidade na Figura 1.2, onde é apresentado duas disciplinas eletivas, com carga horária semanal de 1 hora/aula para cada uma delas.

Juntamente com a RESOLUÇÃO SEE Nº 4.657/2021, DE 10 DE NOVEMBRO DE 2021, foi também disponibilizado pela Secretária de Estado da Educação de Minas Gerais o intitulado Catálogo de Eletivas [21]. De forma que no processo de escolha, por parte das escolas, das efetivas disciplinas eletivas se recomenda o que segue:

> ...cabe às escolas a escolha das Eletivas que irão compor sua oferta anual, dentro das opções disponibilizadas neste Catálogo, e aos professores(as), adaptar os objetos de conhecimento, objetivos de aprendizagem e referências sugeridos, de acordo com as necessidades e intencionalidades da escola, o interesse dos estudantes, bem como, explorar a temática a partir de informações e contextos do município e da região onde a escola está inserida. Essa contribuição dos(as) professores(as), aproximando a Eletiva da realidade loco-regional, gera mais aderência e potência à aprendizagem dos estudantes. Espera-se que, após a análise do Catálogo, as escolas façam as melhores escolhas de Eletivas para os estudantes mineiros e coordenem sua implementação, mantendo sempre sua responsabilidade, seu compromisso e engajamento no bom desenvolvimento das propostas curriculares. [21]

A Secretária de Educação acertadamente reconhece que a escolha das eletivas deve ser delegada às escolas atuantes. E tais escolhas devem considerar a realidade, as necessidades e interesses dos estudantes e as opções catalogadas e direcionadas ao conteúdo de matemática denomidas por **MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS**, a saber: ***Desenho geométrico, Educação financeira, Educação fiscal, Matemática e artes visuais, Preparação para o ENEM e Raciocínio lógico***.

1.1.2 Observações vivenciadas na implementação do Novo Ensino Médio.

A nossa vivência e os relatos de colegas indicam que o novo ensino médio foi de fato apresentado aos professores da rede estadual durante o período de pandemia de COVID-19. Consequentemente, em pleno momento da vivência com o ensino remoto e suas diversidades estruturais, enfrentadas pelos estudantes, tanto quanto a acessibilidade de mídias digitais, como a equipamentos necessários. Naquele momento, inicialmente foram propostos aos professores, num processo remoto, cursos de formação para conhecimento e interação com a dinâmica da reforma e as possibilidades de direcionamentos das escolhas. Porém, a realidade dos professores os direcionavam para outros objetivos, busca e localização dos estudantes que não estavam tendo acesso ao ensino remoto, orientação dos mesmos em como utilizar todas as ferramentas tecnológicas que naquele momento se faziam obrigatórias para esse modelo remoto de ensino. Assim, houve um natural conflito entre a realidade escolar e a necessidade de se integrar e informar sobre as demandas presentes no projeto do novo ensino médio.

Assim, sem uma orientação mais específica, em junho de 2021, os professores de ensino médio começaram a receber, em seus endereços pessoais, vários livros de diversas editoras, visando a escolha PNLD 2021. Essa ação, basicamente se direcionava a seleção de textos já moldados as demandas de livros para o novo ensino médio. Essa demanda gerou dificuldades de várias naturezas e em diferentes Itinerários Formativos. Por exemplo, a necessidade de escolha de um livro para a disciplina **PROJETO DE VIDA**. No meu ambiente de trabalho, essa disciplina até então havia sido ministrada para os estudantes do turno noturno no ano de 2020, como complementação de carga-horária. Portanto, não existia na escola um professor efetivo responsável pela disciplina e a escola necessariamente deveria escolher um livro.

Salientamos que em relação a componente matemática, as coleções ofertadas vieram em formas muito diferentes daquelas anteriormente trabalhadas, onde então três livros eram ofertados, agora haviam duplicado a quantidade de textos, e cada editora estava inadequadamente priorizando alguns conteúdos ou mesmo excluindo determinados assuntos. Assim, foram encontrados textos de uma determinada editora que não traziam mais o ensino de geometria analítica, outras excluiram progressões aritméticas, outras ainda traziam como conteúdo iniciação a computação. Dessa forma, um nível de insegurança minha e de meus colegas nos levaram a escolher coleções já conhecidas e que de certa forma se mostraram, posteriormente, pouco ajustadas às reformas previstas. Além dessa escolha referente a coleção de textos de matemática, houve a necessidade de escolhas integradas com outras áreas, tais como humanidades, onde as coleções traziam projetos interdiciplinares para estudo e correlação da sociedade com um linguajar matemático integrado. Pode-se dizer que a escolha dos livros foram verdadeiramente o primeiro contato dos professores com o novo ensino médio.

Especificamente, quanto ao catálogo de eletivas [21], apresentado em início do mês de novembro de 2021, foi dada a escola a incumbência de selecionar quais seriam as disciplinas a serem ministradas. Mais uma vez, a orientação apresentada às escolas foram frágeis e com a alteração da grade curricular, os professores efetivos de todas as disciplinas tiveram mudanças em suas habituais escolhas. Junta-se a isso a volta dos professores e estudantes de uma pandemia de aproximadamente dois anos, exigindo um difícil e danoso isolamento, com reflexos profundos no sistema educacional, o ano de 2022 teve início com a implementação do novo ensino médio para todas as turmas do 1° ano do ensino médio de Minas Gerais. Nesse contexto todo, é razoável intuir um conjunto de dificuldades e inseguranças vividas pelos estudantes e professores, ambos vítimas da ausência de uma dinâmica preparatória sequencial e com consequências em toda cadeia do processo de ensino-aprendizagem de matemática.

1.1.3 Entraves causados pela legislação

Destaca-se na RESOLUÇÃO SEE Nº 4.657/2021, DE 10 DE NOVEMBRO DE 2021 [10], o artigo 16, que enfatiza o que segue:

> Art. 16 - No Ensino Médio as atividades extraescolares realizadas pelos estudantes poderão ser lançadas como aproveitamento de estudos realizados e conhecimentos constituídos, integralizando a carga horária prevista na Matriz Curricular. § 1º - Para o ensino regular diurno, as atividades extraescolares poderão ser aproveitadas para integralizar a carga horária dos Componentes Curriculares das unidades curriculares Aprofundamento nas Áreas de Conhecimento e Eletivas, que sejam ministradas no 6º horário ou contraturno. [10]

Deve-se destacar ainda que nessa mesma resolução existe uma determinação, presente no artigo 5, a saber:

> §2º - Apenas os seguintes componentes curriculares do Itinerário Formativo poderão ser ofertados no 6° horário ou contraturno: Eletiva 1, Eletiva 2, Práticas Comunicativas e Criativas, Humanidades e Ciências Sociais, Núcleo de Inovação Matemática e Ciências da Natureza e suas Tecnologias. [10]

Pode-se intuir que os orgãos educacionais gestores do novo ensino médio não alinham coerentemente ações que priorizem a efetiva implementação das componentes curriculares previstas. Existem opções legais de aproveitamento de estudos, conforme destacamos:

> Serão consideradas, para efeito de aproveitamento de estudos realizados e conhecimentos constituídos para integralização de carga horária extraescolar, na Rede Estadual de Educação de Minas Gerais, as seguintes atividades formais realizadas no corrente ano letivo: estágios, Aprendiz nos termos da Lei n.10.097/2000, cursos da Educação Profissional Técnica de Nível Médio com validade nacional, cursos livres ministrados por pessoa jurídica, atividades de iniciação científica em instituições de ensino regulamentadas. [10]

Nesse contexto, pode-se interpretar os artigos apresentados na resolução de maneira a concluir que os estudantes que fazem atividades extraclasse podem optar por não assistirem as aulas do 6° horário, oportunizando ainda que eles apresentem na escola uma comprovação de sua atividade extraclasse e que essa seja integralizada na carga horária. Embora encontramos a todo momento a legislação tratando dos itinerários formativos com um viés quantitativo, focado na sua carga horária, existe um elemento avaliativo correlato pouco explorado. De fato, a dinâmica operacional exige do professor atribuições de notas para todas as disciplinas dos itinerários. Em Minas Gerais presenciamos o fato de que o sistema gestor gera uma pendência final, caso os alunos estejam aprovados nos conteúdos de formação básica e não esteja com nota igual ou superior a 60% nos itinerários formativos, que são resolvidas de forma inadequada. Genericamente essas pendências, denominadas internamente no ambiente escolar, como “pendências no diário”, são reclassificadas como problemas para a gestão escolar e geralmente são resolvidos solicitando ao professor que “gere uma aprovação” para o estudante.

1.2 O Desenho Geométrico

1.2.1 Na perspectiva de uma disciplina eletiva no Novo Ensino Médio – 2022

Na página 34 do catálogo de eletivas [21], existe um breve resumo para estruturação da disciplina de **Desenho Geométrico** no contexto do novo ensino médio, com sugestões de algumas referências bibliográficas. Ressaltamos desse Catálogo os objetivos a saber:

> **Objetivos de aprendizagem:** Compreender os conceitos e técnicas de construções geométricas com régua e compasso, para resolver problemas de geometria euclidiana plana; Resolver problemas de geometria plana por meio do desenho geométrico, obtendo soluções com grau de precisão satisfatório; Utilizar materiais e instrumentos de desenho na apresentação dos trabalhos gráficos; Elaborar, por meio de softwares matemáticos, desenhos geométricos. **Objetos de conhecimento:** Noções primitivas de Geometria; Medição de segmentos e de ângulos; Figuras planas; Lugares geométricos; Planificação das figuras a partir de construções de sólidos geométricos; Projeções ortogonais de um sólido geométrico. [21]

Essas orientações tem se mostrado insuficientes para um processo uniforme de ações nos diferentes ambientes escolares. A escolha da disciplina de desenho geométrico como uma disciplina eletiva do ensino médio inicialmente nos remete a definição do ano que ela será ministrada. Destaca-se que o estudante do terceiro ano estará estudando conjuntamente geometria análitica em sua formação geral, assim as duas disciplinas e seus respectivos professores necessitam ter um tempo conjunto para projetarem ações que se complementam. No caso do 2° ano a disciplina necessitará uma articulação com trigonometria e geometria espacial. Ao escolher ministrar essa disciplina para estudantes do 1° ano do ensino médio o desafio pode se mostrar ainda maior. A realidade nos mostra que esses estudantes são provenientes de diferentes escolas e períodos, característica comum de todas as escolas estaduais que contemplam apenas o ensino médio, então ao ingressarem, a primeira necessidade do professor é traçar o perfil da turma. Mostra-se necessário avaliar as habilidades preliminares dos estudantes, suas defasagens educacionais e, posteriormente, traçar um planejamento educacional que nivele toda a turma.

Ao analisarmos o Currículo Referência de Minas Gerais para o ensino fundamental [22], observamos que toda a base necessária para a disciplina de desenho geométrico está ali contemplada, todavia a realidade tem-se mostrado bem diferente. Existe uma evidente priorização na aprendizagem de elementos algébricos no ensino fundamental em detrimento ao ensino da geometria. Nesse sentido, destaca-se a fala de Pavanello [18]:

> O gradual abandono do ensino da geometria, verificado nestas últimas décadas, no Brasil, é um fato que tem preocupado bastante os educadores matemáticos brasileiros e que, embora reflita uma tendência geral é mais evidente nas escolas públicas,... [18]

Nossa vivência nos mostra que chegam estudantes no 1° ano do ensino médio com dificuldades em usar os instrumentos básicos de geometria/desenho geometrico, como régua e compasso. Infelizmente recebemos alunos no 1° ano do ensino médio que ao ser solicitado a construção de um segmento com tamanho dado, questionam se devem começar medir do zero ou do um, em outras situações percebe-se o completo desconhecimento do uso do compasso, sem ter conhecimento das diferenças entre raio e diâmetro de um círculo. Inúmeros relatos das dificuldades dos estudantes são registrados na literatuda, destacamos a fala de Alvez [1]:

> Entretanto, no ensino fundamental a geometria é deixada sempre para o final do ano letivo e muitas vezes não dá tempo para ser trabalhada de maneira eficiente, se detendo apenas a alguns conceitos. Causando, assim, um déficit significativo na aprendizagem da Geometria durante a vida escolar dos alunos e comprometendo toda uma trajetória de conhecimento geométrico, que é trabalhado em todo o ensino fundamental, mas que é no nono ano que o aluno sente realmente essa carência, devido aos conteúdos geométricos ali trabalhados. [1]

Optamos por implementar nas escolas que atuo em Araxá a eletiva de desenho geométrico no primeiro ano. Assim, observando dois fatores: as dificuldades que os alunos chegam ao ensino médio e o cátalogo de eletivas, estruturamos um plano de ensino dividido em quatro bimestres contemplando os elementos que seguem:

1°Bimestre: Noções primitivas de Geometria; Medição de segmentos e de ângulos; Figuras planas;

2°Bimestre: Compreender os conceitos e técnicas de construções geométricas com régua e compasso, para resolver problemas de geometria euclidiana plana;

3°Bimestre: Lugares geométricos;

4°Bimestre: Planificação das figuras a partir de construções de sólidos geométricos; Projeções ortogonais de um sólido geométrico.

Iremos trabalhar em todos esses bimestres com os instrumentos básicos, régua e compasso, integrados com softwares matemáticos de geometria dinâmica como suporte operacional. O uso de heurísticas diversas, tais como buscas de padrões, uso de simetrias, tentativa e erro por inferência dentre outras, visam despertar o interesse dos estudantes, evitando aulas com excessivo uso de instrumental algébrico.

1.2.2 Como suporte na resolução de problemas presentes no ensino-aprendizagem de Matemática

Historicamente as construções geométricas estavam no centro do desenvolvimento do pensamento matemático, ocorrendo originalmente a partir da Grécia antiga. Conforme enfatiza Eduardo Wagner:

> As construções geométricas continuam até hoje a ter grande importância na compreensão da Matemática elementar. Seus problemas desafiam o raciocínio e exigem sólido conhecimento dos teoremas de geometria e das propriedades das figuras e não é exagero dizer que não há nada melhor para aprender geometria do que praticar as construções geométricas. [26]

Consideramos que a incorporação do Desenho Geométrico no rol da eletivas a serem ofertadas na reformulação do ensino médio é uma escolha acertada, haja visto o seu potencial para dar suporte didático-pedagógico ao ensino de geometria. Por vezes uma abordagem de um problema via uma contrução geométrica é uma forma facilitadora e balizadora para a elaboração de um plano de resolução lúcido. Nesse tópico vamos apresentar a resolução de três problemas matemáticos com uso de construções geométricas. O objetivo é validar a ideia de que o desenho geométrico se comporte como um aliado eficiente na produção de plano de resolução, por vezes mais acessível ao entendimento do estudante. Oferecendo-lhe uma "visão geométrica interpretativa” das eventuais incógnitas procuradas. Destaca-se que as abordagens imprimem um caracter construtivo coeso de forma a evitar operações algébricas desnecessárias e trabalhosas.

Problema 1:

Para quais valores da constante a o sistema de equações $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ (x-a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ possui exatamente duas soluções?

Resolução algébrica:

Inicialmente vamos fazer um tratamento algébrico do problema, por certo essa ação poderia direcionar o estudante para um eventual "atoleiro de contas".

Observe que $x^2 = y^2$ e dessa forma $x^2 - 2ax + a^2 + x^2 = 1 \Leftrightarrow$

$$2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0. \tag{1.1}$$

Para que a equação 1.1 possua duas soluções é necessário $\Delta = 0$, por se tratar de uma equação quadrática.

$$\begin{aligned}
&\Delta = (-2a)^2 - 4(2)(a^2 - 1)\\
&\Leftrightarrow \Delta = 4a^2 - 8a^2 + 8\\
&\Leftrightarrow \Delta = -4a^2 + 8.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
&-4a^2 + 8 = 0\\
&\Leftrightarrow -4a^2 = -8\\
&\Leftrightarrow a^2 = 2\\
&\Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Se $a = +\sqrt{2}$, substituindo na equação 1.1, teremos

$$\begin{aligned}
&2x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 - 1 = 0\\
&\Leftrightarrow 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Ao resolver a equação encontramos $\Delta = 0$, e portanto a raíz da equação é $\frac{\sqrt{2}}{2}$. E de forma análoga observaremos que se $a = -\sqrt{2}$, a raíz da equação é $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Logo, para que o exercício possua duas soluções é necessário que $a = \sqrt{2}$ ou $a = -\sqrt{2}$.

Resolução via construção geométrica:

Observe que $x^2 = y^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{y^2} \Leftrightarrow |x| = |y|$. Dessa forma, podemos desenhar no sistema cartesiano xOy, o par de retas correspondentes à essa igualdade, as quais correspondem as bissetrizes dos quadrantes 1,3 e 2,4.

Por outro lado, analisando a equação $(x - a)^2 + y^2 = 1$ temos que ela representa uma circunferência de raio 1 e centro $(a, 0)$. Assim, projetamos a construção que segue:

Passo-a-passo de construção:

1° Trace duas retas perpendiculares, (eixo x e eixo y);

2° Trace as bissetrizes dessas perpendiculares, (retas r e s); Como ambas são bissetriz dos eixos elas são perpendiculares entre si.

3° Trace um círculo de raio 1, que seja tangente as retas r e s, e esteja centrado no eixo x, esse círculo pode ser construído sobre o lado positivo e negativo do eixo.

Essa construção pode ser observada na Figura 1.3.

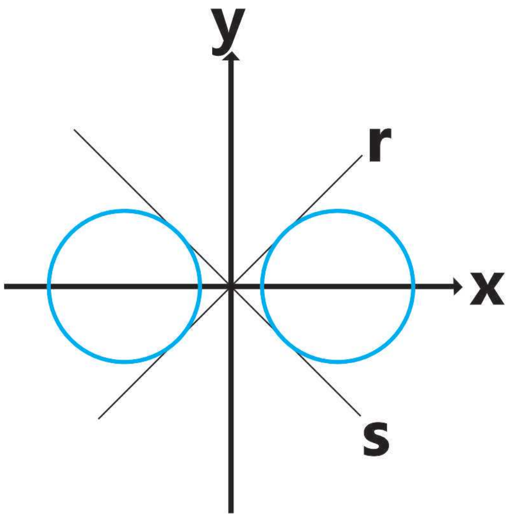


Figura 1.3: Construção Geométrica: Problema 1.

Na Figura 1.3, temos a representação da solução do problema, pois os elementos possuem dois pontos em comum.

Para determinar o valor de α, basta visualizar o triângulo retângulo que possui vértice na origem do plano cartesiano denominado por O, vértice num dos pontos de tangência entre o círculo e as retas bissetrizes denominaremos por P e vértice no centro do círculo C. Observe a Figura 1.4.

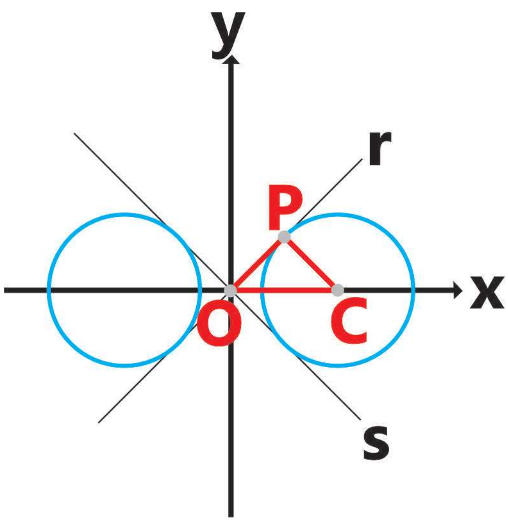


Figura 1.4: Vizualisação do triângulo retângulo que resolve o Problema 1.

Logo, podemos concluir que o triângulo OPC é retângulo isósceles, pois é reto em P ponto de tangência e o ângulo $P\hat{O}C$ mede 45° (bissetriz de perpendiculares), logo como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, temos que $P\hat{C}O$ mede 45°, sendo assim $PO = PC = 1$.

Por Pitágoras temos que $OC^2 = 1^2 + 1^2$ logo $OC = \sqrt{2}$, e como $OC = a$ concluímos que $a = \sqrt{2}$, ou $a = -\sqrt{2}$, uma vez que o círculo intersecta as retas tangentes duas vezes, sendo o valor de a positivo ou negativo.

A abscissa do ponto P é obviamente $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Problema 2:

Encontre as raízes reais da equação $x^2 - 10x + 16 = 0$.

Resolução algébrica:

Nesse problema existem diferentes possibilidades para uma abordagem algébrica. Por se tratar de um problema algorítmico se enfatiza as habilidades de cálculos dos estudantes. Em um sentido mais amplo, busca-se uma ação de aplicação de um procedimento passo a passo que requer prática e se baseia numa dinâmica que requer memorização. Isso por vezes pode se tornar enfadonho para o estudante. Observe o uso do procedimento intitulado “método de completar quadrados”:

$x^2 - 10x + 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = (x-5)^2 - 5^2 + 16 = (x-5)^2 - 3^2 = 0$.

Logo, $(x-5)^2 = 3^2 \Rightarrow x - 5 = \pm 3 \Rightarrow x' = 2$ e $x'' = 8$.

Num outro contexto, podemos fazer uso de construções geométricas na sua resolução, ampliando dessa forma as experiências e vivências dos estudantes, colocando-os frente a uma dinâmica que privilegia a visualização geométrica presente nas construções.

Resolução via construção geométrica (1^a opção):

Uma solução por construções geométricas pode ser obtida, observando que as soluções (raízes procuradas) serão expressas por segmentos cujas medidas correspondam aos valores acima descritos.

A primeira resolução que apresentaremos utilizando construção geométrica será uma adaptação da apresentada na página 53 da apostila [26].

Podemos observar nossa equação como uma equação do tipo $x^2 - ax + b^2 = 0$, quando comparamos os valores com a equação do nosso problema temos que $b = 4$ e $a = 10$.

No nosso estudo matemático sabemos como resolver o discriminante de uma equação do segundo grau, para a equação em questão o cálculo da raiz do discriminante seria $\Delta = \sqrt{100 - 4.1.16} = 6$.

Realizando a construção de um triângulo retângulo o discriminante Δ será um dos catetos desse triângulo cuja hipotenusa é a e o outro cateto é $2b$, para a nossa equação valerá 10 e o outro cateto 8, dessa forma as raízes da equação são:

$$x' = \frac{a}{2} - \frac{\Delta}{2} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{a}{2} + \frac{\Delta}{2}$$

Como o objetivo é resolver a equação utilizando construção geométrica, primeiro precisamos determinar os valores de a e b, sendo a equação da forma $x^2 - ax + b^2 = 0$, e nossa equação $x^2 - 10x + 16 = 0$, temos que para nós os valores para $a = 10$ e para $b = 4$, porém para tornar o passo a posso mais limpo e utilizável, utilizaremos as variáveis.

Passo-a-Passo da construção:

1) Construa um segmento $AB = 2b$ ($AB = 8$);

2) Trace a perpendicular a AB, passando por A;

3) Trace a reta BC, de modo que o ponto C fique sobre a reta perpendicular construída no passo anterior e a distância entre os pontos B e C, seja a, ou seja, $BC = a$ ($BC = 10$);

Dessa forma construímos um triângulo retângulo ABC, retângulo em A, onde $AB = 2b$, $BC = a$ e $AC = \Delta$.

4) Trace o ponto médio de BC, ponto D;

5) Trace uma paralela a AB, passando por D;

6) Marque o ponto de interseção entre a paralela construída no passo 5 e o segmento AC, ponto E;

7) Trace a circunferência com centro em C e raio CE ($CE = \frac{\Delta}{2}$);

8) Trace os pontos de interseção dessa circunferência com a reta que passa pelos pontos B e C, pontos F e G.

A distância $DF = \frac{a}{2} + \frac{\Delta}{2} = x''$ e $DG = \frac{a}{2} - \frac{\Delta}{2} = x'$, a imagem final da construção pode ser observada na Figura 1.5.

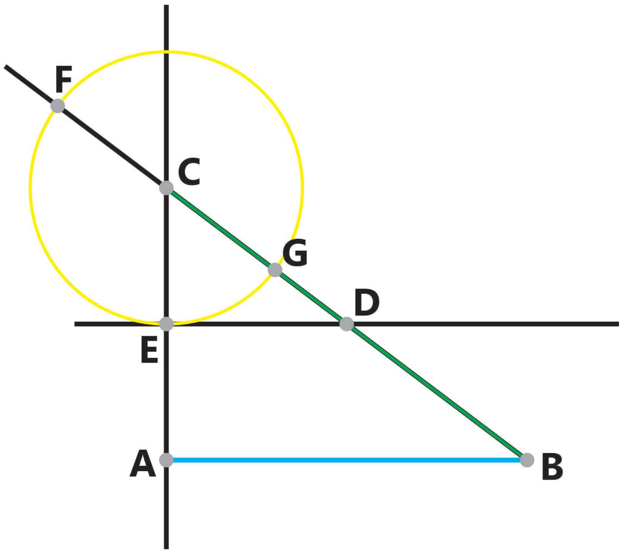


Figura 1.5: Construção com régua e compassso: Resolução de uma equação do Segundo Grau.

Resolução via construção geométrica (2^a opção):

Nosso objetivo é resolver a equação $x^2 - 10x + 16 = 0$, pensando na ideia de soma e produto, temos que

$x_1 + x_2 = 10$ e $x_1.x_2 = 16$.

As Equações do 2º grau, no processo Euclidiano são resolvidas utilizando os mesmos conceitos dos Sistemas de Equações. Para isso, é necessário, primeiro, escrever a expressão no formato $x \pm mx \pm n = 0$, com $m > 0$. Assim, uma equação do 2º grau que, em princípio se apresenta como $ax + bx + c = 0$, deve ter seus coeficientes divididos por a e, a seguir, determinado um número n tal que $\frac{|c|}{|a|} = n^2$. Teremos, então, um sistema do tipo: $x_1 + x_2 = \pm m$ e $x_1.x_2 = \pm n^2$.

Sistemas desse tipo são resolvidos pelo Processo Aditivo da Média Geométrica, uma vez que n (altura do triângulo retângulo) é a média geométrica entre as projeções (incógnitas x e y) dos catetos sobre a hipotenusa. Sendo que esta é justamente de valor conhecido m (a soma de x com y). OBS.: Há uma condição de existência: n não pode ser maior do que a metade de m. Assim, no problema 2, tem-se:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ x_1.x_2 = 4^2. \end{cases}$$

Passo-a-Passo da construção:

1°) Construir um segmento AB de comprimento $m = 10$;

2°) Traçar o ponto médio do segmento AB, denomine-o por C;

3°) Traçar a perpendicular ao segmento AB passando por C, denomine-a por reta s;

4°) Traçar a circunferência de centro C, com diâmetro AB;

5°) Traçar sobre a perpendicular (reta s), um segmento de comprimento n, com extremidade no ponto C, denomine a outra extremidade por D;

6°) Trace a perpendicular a reta s, que passa pelo ponto D, denomine-a por t;

7°) Denomine por E um dos pontos de interseção entre a reta t e a circunferência de diâmetro AB;

8°) Trace a perpendicular em relação ao segmento AB que passa por E, denomine-a por reta r;

9°) Denomine por F o ponto de interseção entre o segmento AB e a reta r;

Observe que $x_1 = AF$ e $x_2 = BF$.

A construção final pode ser observada na Figura 1.6.

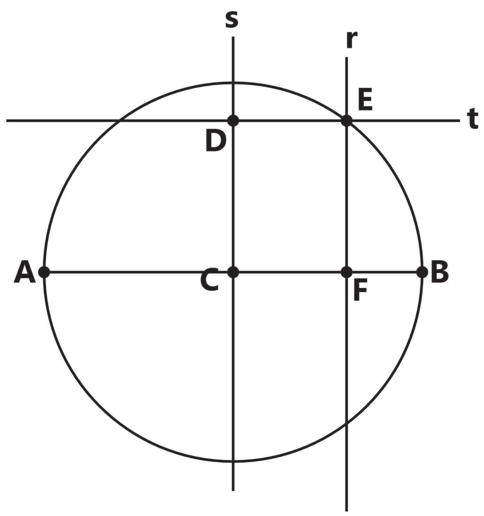


Figura 1.6: Construção com régua e compassso: 2ª Resolução de uma equação do Segundo Grau.

Problema 3:

Um arqueólogo encontra uma peça que parece ser parte do bordo de entrada de um vaso. A vista frontal desse bordo se mostra corresponder a uma parte de uma circunferência S, como pode ser observado na Figura 1.7:

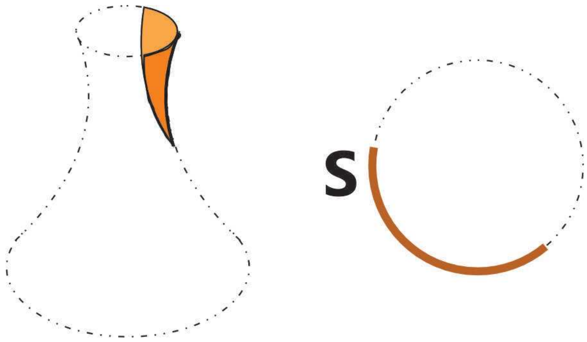


Figura 1.7: Representação da situação Problema 3.

Para estimar as medidas da peça ele coloca as extremidades de um metro no interior do bordo e verifica que o ponto médio do instrumento ficou a 7,2 cm da parede do bordo. Como está representado na Figura 1.8.

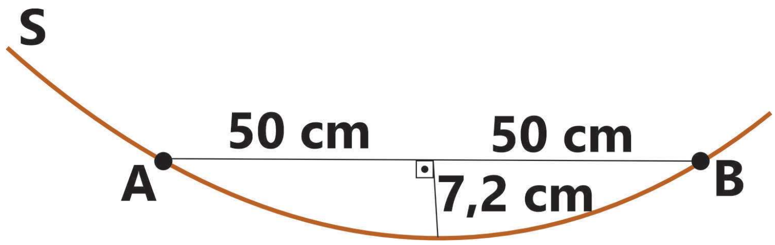


Figura 1.8: Representação da situação Problema 3, com realização das primeiras medidas.

Determine o diâmetro do bordo de entrada do vaso.

Resolução:

Para se construir um plano de resolução necessitamos idealizar um posicionamento do centro de S, digamos O. Nesse sentido uma construção geométrica será um agente auxiliar importante, trazendo lucidez a essa ação.

Passo-a-passo da construção:

1°) Trace um segmento de 100 cm de extremidades A e B;

2°) Trace a mediatriz do segmento AB;

3°) Sobre a mediatriz determine o ponto C, que dista do segmento AB 7,2 cm.

Nosso objetivo é traçar uma circunferência que passa pelos pontos A, B e C.

4°) Trace a mediatriz do segmento AC, denomine-a por l;

5°) Trace a mediatriz do segmento BC, denomine-a por s;

6°) Denomine a interseção entre as retar l e s por D, esse ponto é o centro da circunferência procurada;

7°) Trace a circunferência de centro D e raio $DA = DB = DC = r$.

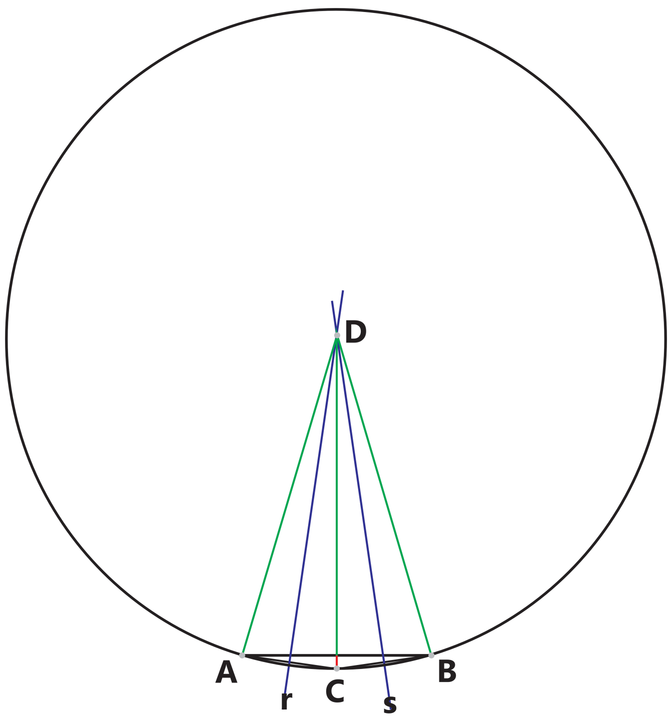


Figura 1.9: Resolução da Situação Problema 3: Construção com régua e compasso.

Dessa forma, na Figura a seguir temos a possibilidade de aplicar o teorema de Pitágoras conforme indicado.

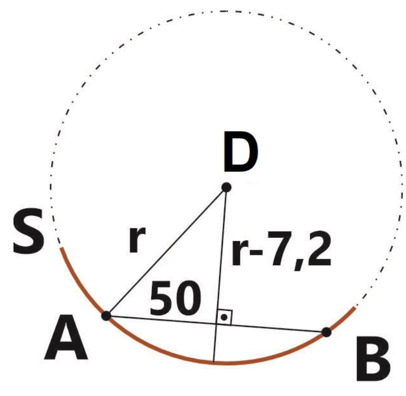


Figura 1.10: Resolução da Situação Problema 3, Teorema de Pitágoras.

Logo, aplicando o Teorema de Pitágoras na imagem segue que $r^2 = 50^2 + (r - 7,2)^2 \Rightarrow r^2 = 50^2 + r^2 - 2.7,2.r + 7,2^2 \Rightarrow 14,4r = 2551,84 \Rightarrow r = 177,21111$. Logo, o diâmetro procurado é 354,42 centímetros. Vale destacar que nessa solução deve-se ter a preocupação de justificar, na idealização do posicionamento de O, que o mesmo pertença à reta mediatriz ao ponto médio da corda AB.

1.2.3 No contexto histórico e evolutivo nas políticas públicas voltadas ao ensino de Geometria

Com intuito de entender as dificuldades básicas dos estudantes em relação ao ensino de Geometria achamos conveniente entender o que ocorreu com o ensino de Geometria no decorrer desses últimos anos. Para tanto destacamos o importante trabalho de Marlova Caldatto e Regina Pavanello. Vamos descrever algumas reflexões e conclusões publicadas pelas pesquisadoras em [3]. Aqui estaremos citando partes do texto dessas pesquisadoras apenas como elemento referencial para o leitor desse trabalho. Salientamos que os elementos dessa seção são frutos de estudos e conclusões das referidas pesquisadoras.

Entre os anos de 1964 e 1985, o país era administrado pelo Regime Militar e foi durante esse regime que aconteceu a promulgação da Lei Federal 5692/71, lei essa que prejudica muito o ensino de Geometria, uma vez que

> dava às escolas liberdade na escolha de seus programas de ensino, o que possibilitava aos professores de Matemática o abandono do ensino de geometria ou seu adiamento para o final do ano letivo, se houvesse tempo para isso. [3]

Destaca-se nessa lei que ela abrangia o ensino da maior parte dos jovens brasileiros, demandando para a sua realização muito investimento realizado pelas agências de financiamento internacionais,

> empréstimos necessários, inicialmente, para a ampliação e posteriormente também para manutenção das redes estatais de ensino e a melhoria da qualidade deste. A contrapartida requerida pela instituição financeira à concessão destes empréstimos é a comprovação de que o dinheiro empregado resulta em melhores resultados dos alunos nas avaliações de ensino, tanto interna quanto externamente. O que, por sua vez, determina a implementação de parâmetros nacionais tanto em termos curriculares quanto em termos de avaliação do sistema. [3]

No ano de 1985 acontece a queda do Regime Militar, todavia continuava vigorando a Lei 5692/71, fomentando a busca de alternativas, por parte de grupos de professores, para recuperação desse estudo de Geometria.

> como exemplo dessa tentativa de recuperação a *Proposta Curricular do Estado de São Paulo*, de 1988. De fato, neste documento, não só se enfatiza o ensino da geometria na escola básica, sugere-se que esta seja usada como uma ferramenta no ensino da álgebra, como modo de torná-la mais acessível aos alunos. [3]

Outra tentativa de recuperação da Geometria é observado em,

> *Currículo Básico para a Escola Pública do Estado do Paraná*, de 1992, ao indicar para o ensino da Geometria que: As crianças devem manipular objetos presentes no seu dia-a-dia (caixas, bolas, garrafas, embalagens de todos os tipos, folhas de árvores, tocos de madeira, etc.) observando características tais como: forma; semelhança; diferença; coisas que param em pé ou não; coisas que rolam ou não; coisas que tem "pontas" (vértices) ou não, etc. A partir dessas observações, as crianças podem trabalhar com uma coleção de objetos na forma de prismas, pirâmides, cubos, etc. [3]

Em 1998 são criados os PCNM (Parâmetro Curriculares Nacionais de Matemática), que continuam sendo norteadores do ensino até o presente momento, no que diz respeito a Geometria, temos que

> a abordagem da geometria euclidiana a partir da exploração visual e tátil por meio de atividades experimentais: [. . .] As habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. [3]

Juntamente com os PCNs são criadas também as avaliações de abrangência nacional, sendo que primeiro foi criado o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), com objetivo inicial de avaliar o ensino médio, e posteriormente em 2005, as avaliações do SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica). Como fruto dessas avaliações vê-se que embora exista uma tentativa de reestabelecimento do ensino de Geometria, essas tentativas ainda não galgaram sucesso.

Um interessante estudo sobre os motivos do ensino de Geometria não ser ainda bem sucedido foi feito por

> Gazire (2000) em sua tese de doutorado, intitulada *"O não resgate das geometrias"*, afirma não ter havido o resgate do ensino de geometria nos ensino fundamental e médio. Gazire (2000) aponta ainda os motivos que impedem o resgate da geometria no ensino alegando que os professores: a) são vítimas de um ciclo vicioso (não aprenderam geometria, logo não vão ensinar geometria); b) possuem dificuldades em romper com os procedimentos tradicionais da aula expositiva; c) de modo geral, relacionam a geometria apenas a assuntos que possibilitam o algebrismo e cálculos; d) não têm informações quanto às demais alternativas de ensino da geometria, senão as algébricas e aritméticas; e) possuem opiniões sobre a geometria baseadas em frases que ouvem dizer sobre os benefícios da geometria, mas nunca experimentaram a efetividade destes benefícios, o que transforma seu discurso em um discurso vazio; f) seguem textos didáticos não adequados e que abarcam a geometria apenas nas seções finais, o que reserva para a abordagem da geometria um menor espaço de tempo; g) não possuem acesso a uma bibliografia adequada de geometria, o que ocasiona um maior apego ao livro didático, o único material que conhecem que aborda o assunto; h) utilizam de forma inadequada o material concreto, pois reduzem essa utilização apenas ao ato de mostrá-lo aos alunos; i) sabem que mudanças no ensino de geometria podem acarretar em repressão por parte dos pais dos alunos que, por não terem aprendido geometria durante sua escolarização, crêem que a matemática está ligada ao trabalho com os números, idéia reforçada em concursos e exames vestibulares; j) sentem falta do apoio de lideranças ou autoridades no desbravamento de caminhos para o ensino de geometria e seu encorajamento no desbravamento desses caminhos. [3]

Para complementar a ideia de Gazire temos também

> o problema maior do abandono do ensino da geometria reside na formação do professor (Nacarato e Passos, 2003, p. 135). Vasconcellos (2008) e Santos (2009), entre tantos outros autores que abordam o abandono do ensino da geometria, também explicitam, em seus trabalhos, a relação entre tal abandono e a formação deficitária dos professores com relação a esse ramo da Matemática. Em pesquisa recente a respeito do ensino de geometria, Caldatto e Pavanello (2014), discorrem que grande parte dos professores de Matemática ainda possui grandes dificudades em trabalhar com a Geometria Euclidiana e que muitas vezes este conhecimento acaba não sendo trabalhado pelos professores nas escolas, mesmo a Geometria Euclidiana sendo um conhecimento presente nos currículos da escola básica e das Licenciaturas em Matemática. [3]

Em resumo destaca-se a cronologia de fatos que afetaram direta ou indiretamente o ensino da Geometria

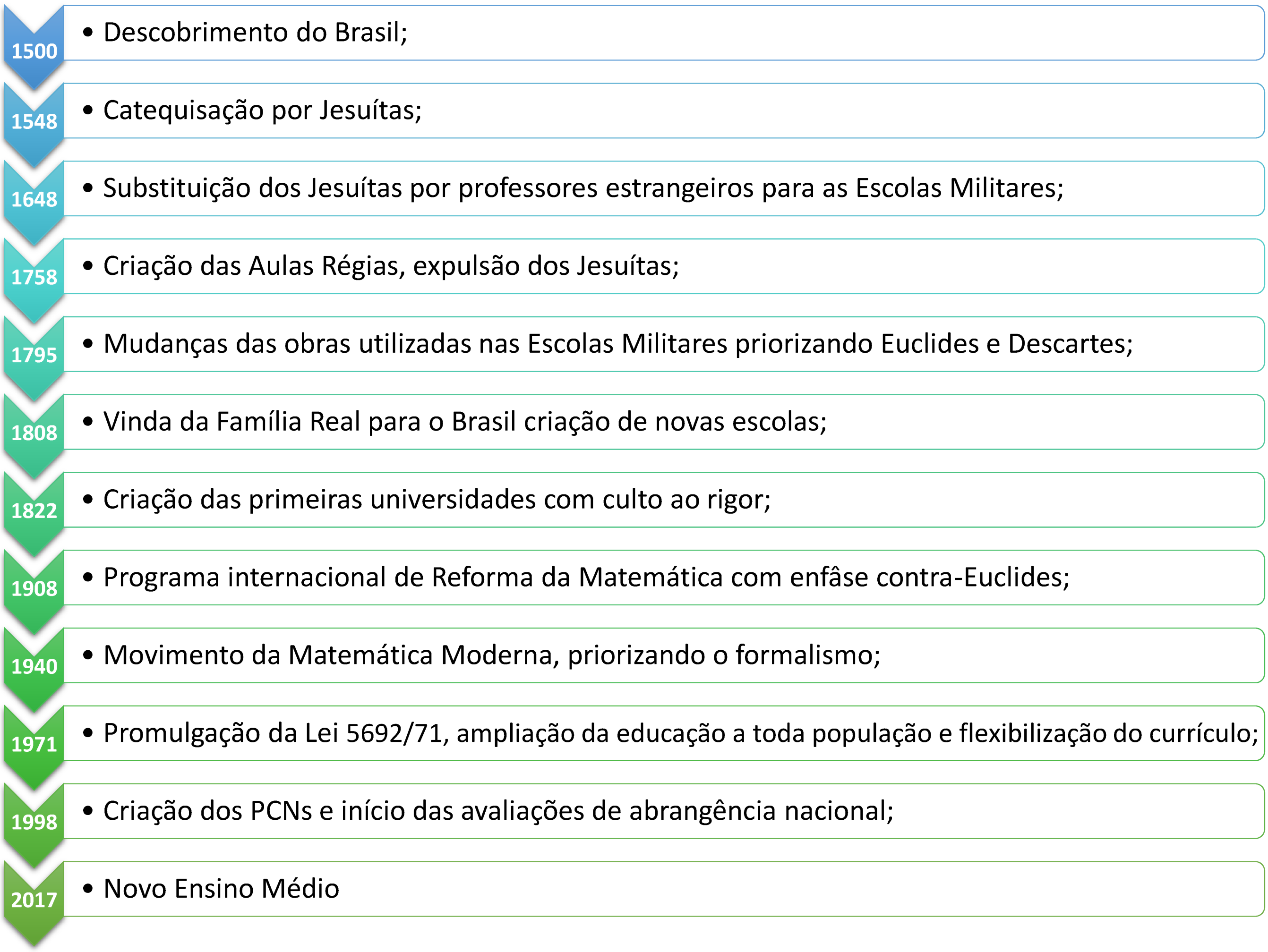


Figura 1.11: Quadro de referência para as principais datas

Resumidamente destacamos que:

- em 1908, acontece o primeiro processo de reforma do ensino da matemática, aonde começa a ser pregado o culto “contra-euclides”;

- em 1940, começa a surgir o Movimento da Matemática Moderna, que “preconizava uma abordagem dos temas matemáticos a partir do formalismo, da teoria de conjuntos, da axiomatização, das estruturas algébricas e lógicas”, sendo que a Geometria deixa de ser estudada em sua plenitude;

- em 1971 é promulgada a Lei Federal 5692/71, que amplia a educação a maioria da população, mas faz isso sem a quantidade necessária de professores, acarretando na possibilita de que as escolas escolham seus currículos. Um agravante para o ensino da Geometria é que nesse período as aulas até então destinadas ao Desenho Geométrico passam a ser ocupadas pelo currículo de Artes;

- em 1998 os PCNM passam a nortear o ensino da Geometria sem uma devida orientação aos professores.

1.3 O modelo Van Hiele

Para escrever essa seção usaremos como base o artigo **O modelo Van Hiele de desenvolvimento geométrico**, da autora *Mary L. Crowley*, artigo esse que encontra-se publicado no livro [5], também seremos amparados pelos textos do **Projeto Fundão**, projeto esse que vem estudando e difundindo a Teoria Van Hiele no Brasil [16].

O modelo Van Hiele, foi apresentado por Dina van Hiele-Geldof e Pierre van Hiele, na Holanda, na Universidade Utrecht, em suas teses de doutorado publicadas em 1957, pouco tempo depois das defesas Dina vem a falecer e Pierre passa a dar continuidade e difundir os estudos.

O modelo Van Hiele, tem sua base nos níveis de aprendizado de Geometria, evidenciando que um aluno não é capaz de estar em um nível mais avançado sem que tenha plena consciência dos níveis básicos. Sendo que o modelo se baseia em estabelecer o nível de consciência geométrica que o aluno se encontra para posteriormente passar pelas fases de aprendizagem com intuito de alcançar um próximo nível. Portanto assim que o aluno alcança um novo nível para que ele possa alcançar o próximo precisa novamente passar pelas fases de aprendizagem deste. Para uma melhor compreensão observe a (Figura 1.12).

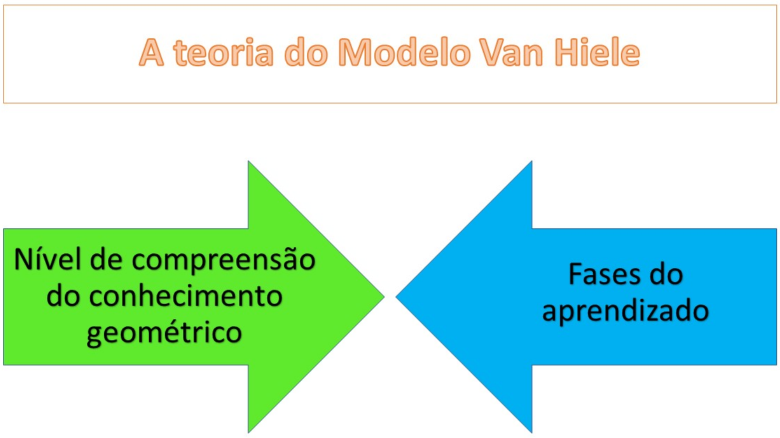


Figura 1.12: Apresentação lúdica da Teoria de Van Hiele.

O trabalho dos Van Hiele, foi bem aceito na União Soviética, onde o currículo foi reformulado nos anos 60 para adaptar-se ao modelo. Porém demorou a ganhar prestígio internacional, sendo apenas na década de 70 que começa ser estudado pelo norte-americano Izaak Wirszup, e em 1984 algumas de suas obras começam a ser traduzidas para o inglês.

1.3.1 Os diferentes níveis de compreensão do pensamento geométrico

A teoria enquadra o aluno em 5 níveis de comprensão do pensamento geométrico, explicitaremos melhor cada um deles. (Figura 1.13).

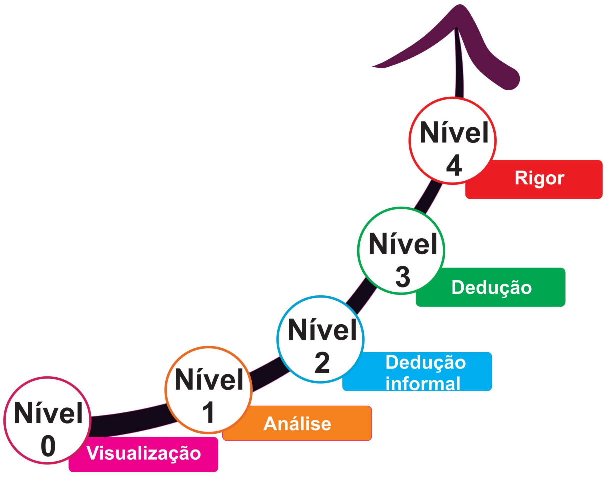


Figura 1.13: Níveis de compreensão do pensamento geométrico segundo a Teoria de Van Hiele.

Nível 0: Visualização

Para que o aluno seja enquadrado nesse nível básico, que é de visualização, a teoria entende que o aluno seja capaz de reconhecer formas básicas como quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios, fazendo analogias e comparações com formas cotidianas, é esperado que o aluno relacione o retângulo com o formato da porta, o quadrado com a face do dado, o losango com a pipa,... Espera-se que os alunos desse nível sejam capazes de distinguir as figuras apenas por suas formas físicas, ou seja, por sua aparência global, sem fazer referências aos seus componentes e atributos. Ainda é esperado que um aluno desse nível seja capaz de via comparação separar quadriláteros não congruentes bem como reproduzi-los, e é esperado que o aluno desse nível seja capaz de fazer rotações da figura e entender que essas rotações não alteram sua nomenclatura.

Nível 1: Análise

Para que um aluno seja enquadrado no nível 1, intitulado por análise, é necessário que tenha compreensões de alguns conceitos geométricos como ângulos, medidas congruentes e diagonais, sendo ainda que saiba identificá-los na figura através apenas de comparações. Um aluno de nível 1 deve ser capaz de observar um quadrado e dizer que ele tem quatro lados de mesmo comprimento, quatro ângulos retos e diagonais congruentes, porém ainda não é capaz de fazer relações entre as propriedades dos quadrados e dos retângulos. Fazendo uso dessas comparações entende-se ainda que um aluno desse nível já é capaz de resolver alguns problemas, como por exemplo, o de estabelecer que os ângulos opostos de um paralelogramo tem a mesma medida.

Nível 2: Dedução informal

Observa-se entre os alunos desse nível uma capacidade maior de resolver problemas, porém sem o entendimento formal da teoria, um aluno desse nível não tem uma noção concreta das funções dos axiomas. Um marco bem evidente de um aluno desse nível é que ele percebe que o quadrado é também um retângulo pois tem todas as propriedades de um retângulo, percebe ainda que, dado um quadrilátero se os lados opostos são paralelos, necessariamente os ângulos opostos são congruentes. Sendo assim consegue resolver problemas usando uma argumentação lógica informal. Um aluno desse nível embora não consiga realizar uma demonstração rigorosa, é capaz de acompanhar uma explicação completa de uma, pois tem clareza da ordenação de classes de figuras geométricas.

Nível 3: Dedução

Um aluno que atinge o nível de dedução, tem compreensão da teoria geométrica por completo, sabendo diferenciar e utilizar axiomas, postulados, teoremas, definições e demonstrações. Sendo capaz de realizar demonstrações não apenas por memorização, mas também utilizando estratégias e caminhos diferentes, pois tem conhecimento de condições necessárias e suficientes. É ainda capaz de fazer distinções entre uma afirmação e sua recíproca.

Nível 4: Rigor

Estando no nível de rigor o aluno é capaz de realizar demonstrações de teoremas em uma Geometria Finita, tendo por exemplo total compreensão de Geometrias não-Euclidianas. Um aluno no nível de rigor visualiza a Geometria no plano abstrato.

Observação em relação aos níveis

Como o público dessa dissertação são alunos do ensino médio regular, acreditamos assim como Van Hiele, que nosso objeto de estudo está nos três primeiros níveis. Portanto ter um aluno ao final do ensino médio verdadeiramente enquadrado no nível de dedução informal é o desejado. Deixando a necessidade de nível 3 para o ensino superior e o nível 4, para cursos de Formação Matemática.

1.3.2 Interfaces entre as habilidades demandadas e os níveis do modelo Van Hiele

Conjuntamente com os níveis de compreensão, os Van Hiele também determinaram algumas propriedades que caracterizam o modelo. Propriedades essas necessárias para possíveis tomadas de decisões dos educadores.

Sequêncial

Uma vez determinados os níveis, um aluno não pode estar em um nível mais avançado sem que tenha assimilado com clareza todas as peculiaridades do nível anterior, ou seja, não é possível que um aluno "queime" algum nível.

Avanço

De acordo com a teoria dos Van Hiele o nível de compreensão geométrica não tem ligação com a idade, alunos de idades diferentes podem estar no mesmo nível. Ainda de acordo com a teoria acredita-se improvável que em um ano letivo o aluno saia do nível 0 e atinja o nível 4, por exemplo, pois existem vários conceitos que precisam ser assimilados e revisados. Nenhum método de ensino é capaz de viabilizar que o aluno pule de nível, alguns acentuam o progresso, ao passo que outros o retardam ou até impedem a passagem de um nível a outro.

Intrínseco e extrínseco

Os elementos analisados no nível 0, constituem a essência dos níveis posteriores. Ao passo que também existem propriedades do nível 4, que não pertencem ao nível 1.

Linguística

A linguagem vai acompanhando os níveis, vão sendo inseridos novos conceitos. Sendo assim uma relação que é "correta" num certo nível pode ser modificada no nível seguinte.

Combinação inadequada

Caso as aulas sejam ministradas em um nível que o aluno ainda não atingiu, este não será capaz de acompanhar os processos de pensamento que serão empregados. É necessário que professor, material didático, conteúdo, vocabulário estejam sempre no mesmo nível.

1.3.3 Fases do aprendizado

Para que o aluno consiga progresso entre os níveis, o modelo acredita ser necessário cinco fases sequenciais de aprendizagem: interrogação, orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração. Uma vez que acreditam que o progresso de nível não acontece de forma natural, mas sim sobre a influência de um programa de ensino-aprendizagem.

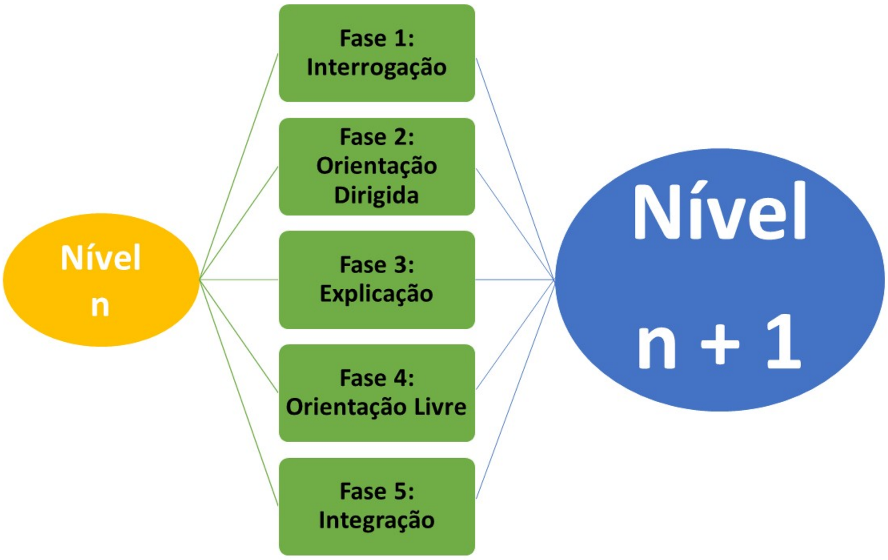


Figura 1.14: Fases do aprendizado necessárias para progredir de nível.

Fase 1: Interrogação/Informação

Essa fase é uma fase introdutória, onde o professor faz perguntas diversas, com intuito de direcionar as próximas fases. Nesse momento é possível que o professor perceba potencialidades e dificuldades e é um momento em que o aluno consegue entender o que será estudado.

Fase 2: Orientação dirigida

O professor elabora materiais e atividades que permitem ao aluno construir respostas, para as perguntas que não foram respondidas na fase anterior. Essas atividades devem começar básicas e explorarem como fundamento o nível anterior do aluno.

Fase 3: Explicação

Nessa fase o papel do professor é mínimo ele precisa apenas orientar para que não tirem conclusões precipitadas bem como também é importante que o professor comece a modificar a linguagem para uma mais adequada para o nível. É nessa fase que começa a tornar-se evidente o sistema de relações de níveis.

Fase 4: Orientação Livre

Será proposto ao aluno nessa fase atividades mais complexas, que exijam vários passos, em que a conclusão final pode ser obtida por caminhos diferentes.

Fase 5: Integração

O importante dessa fase é revisar e registrar todo o conteúdo aprendido, fazendo uma leitura global. Não é permitido que nessa faze o professor faça interferências, nem inclusão de conceitos novos. No final dessa fase percebe-se que tudo que era esperado para aquele nível foi alcançado e é possível reiniciar as fases de aprendizado tendo como objetivo o próximo nível.

1.3.4 Reflexões sobre o modelo Van Hiele

Existem algumas críticas apresentadas ao modelo Van Hiele, dentre elas destacamos os questionamentos de Oliveira [4], em seus estudos encontram-se quatro critérios citados por alguns autores que evidenciam os problemas no modelo, sendo eles: *a descontinuidade dos níveis* (os pesquisadores apontam que as fases 4 e 5 de um nível, se confundem com as fases 1 e 2 do nível seguinte), *os critérios de enquadramento* (a avaliação para decidir o nível em qual o aluno enquadra-se depende muito dos critérios adotados), *a não existência do nível 4* (existe um certo consenso de que os alunos em geral não atingem o nível 4), *a inadequação do calendário escolar* (em um ano letivo iniciado com alunos enquadrados nos níveis 3 ou 4, geralmente não é possível a progressão de nível pois o tempo é insuficiente). Enfatizo o último onde temos que:

> Dina van Hiele-Geldof (1957 – 1984), por exemplo, relata em sua tese de doutorado que foi capaz de elevar o nível de seus alunos (com idade média de doze anos) de 0 para 1 em 20 aulas e de 1 para 2 em 50 aulas. [4]

Villiers [7] em seu texto destaca como problema a demora em iniciar com alunos demonstrações, explicando por exemplo que demonstrações podem ser realizadas com alunos dos níveis 0 e 1, utilizando de explicação, descoberta e verificação, e essas estratégias podem ser significativas para alunos fora de um contexto de sistematização. Ele ainda relata que principalmente pelo tempo que é gasto até ter estruturado os níveis 0 e 1, realizá-lo sem demonstrações dificulta ainda mais a sua introdução posterior.

Mesmo que vários autores concordem com os problemas apresentados existe grande aprovação a utilização do modelo, acreditando que grandes avanços podem ser alcançados utilizando-o. Ainda enfatizamos a fala de Crowley [5]:

> Agora são necessários professores e pesquisadores para se aprimorarem as fases de aprendizagem, desenvolver materiais baseados no modelo Van Hiele e implementar o uso desses materiais e essa filosofia no contexto da sala de aula. O raciocínio geométrico pode ser acessível a todas as pessoas [5].

1.4 O Geogebra: alguns aspectos manipulativos de suas ferramentas operacionais

1.4.1 Aspectos gerais

O GeoGebra é um software de matemática dinâmico e multiplataformas. Pode ser instalado através do site `https://www.geogebra.org/download`. O software GeoGebra foi criado em 2001 como tese de Markus Hohenwarter, desde então vem sendo aprimorado e popularizado. Podemos encontrar exemplos de utilização e cursos de aprimoramento através do Instituto São Paulo GeoGebra [20].

Na Figura 1.15 podemos visualizar a página de interface inicial.

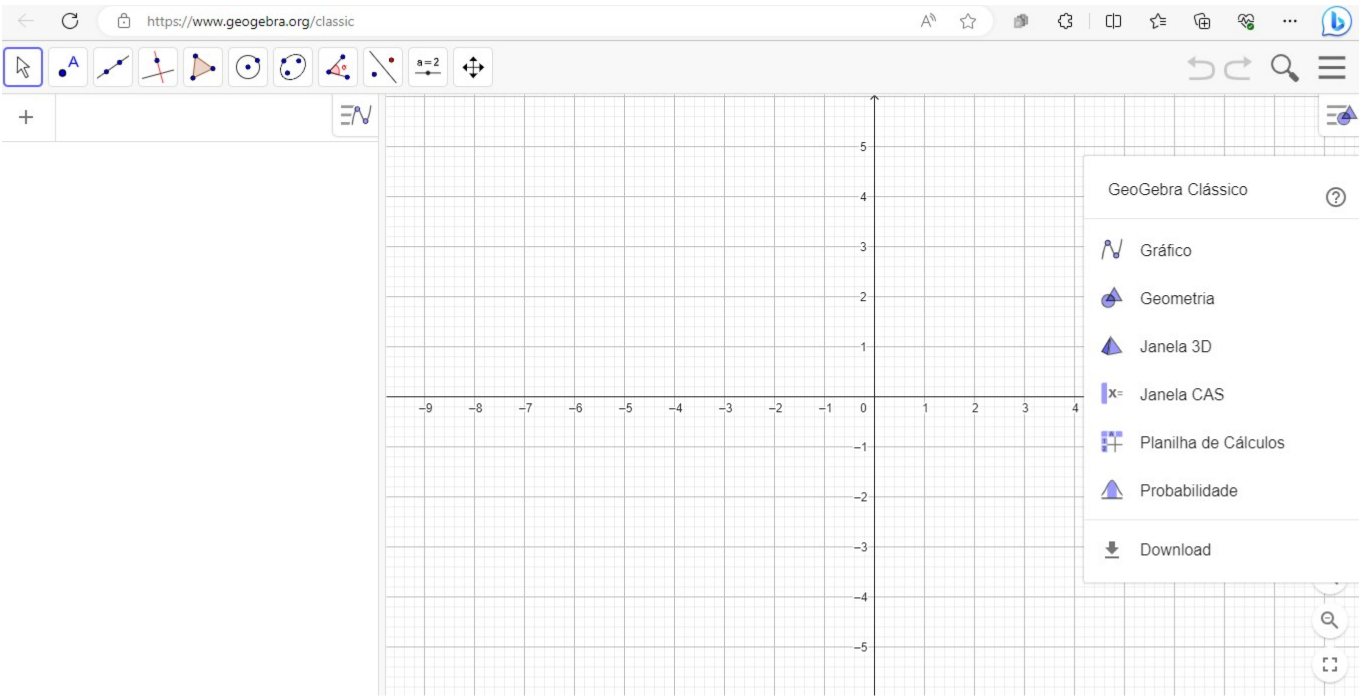


Figura 1.15: Página de interface inicial do GeoGebra.

Podendo verificar a vasta abrangência matemática do software. Nesse trabalho utilizaremos as disposições Geometria e Janela 3D.

Escolhendo a disposição Geometria a barra de ferramentas fornece diversas funções, que são explicitadas na Figura 1.16 .

Figura 1.16: Exibição das funções presentes na barra de ferramentas na disposição Geometria.

Para exemplificar como o aplicativo GeoGebra pode facilitar as aulas de Desenho Geométrico, apresentaremos abaixo algumas construções considerados como **Construções Fundamentais** encontrados no livro *curso de DESENHO GEOMÉTRICO* do autor Affonso Rocha Giongo [11], onde primeiro explicitaremos sua construção com régua e compasso e em seguida utilizando o software.

1.4.2 Algumas construções geométricas fundamentais utilizando o GeoGebra

Construção da reta perpendicular a uma reta dada *r* que passa por um ponto *A*

Construção com régua e compasso:

I) O ponto *A* pertence à reta

1) Trace uma reta e denomine-a por r;

2) Determine o ponto A sobre a reta r;

3) Com centro do compasso em A e raio qualquer marcamos os pontos B e C, sobre a reta r;

4) Com centro em B e raio maior que a metade da distância entre B e C, traçamos arcos acima e abaixo de r;

5) Com centro em C e mesmo raio utilizado no passo 4, traçamos novamente arcos acima e abaixo de r;

6) A interseção desses arcos denominaremos pelos pontos D e E;

7) Traçar a reta que passa pelos pontos D e E. Sendo que essa é a reta perpendicular pretendida.

O resultado final dessa construção pode ser acompanhado pela Figura 1.17.

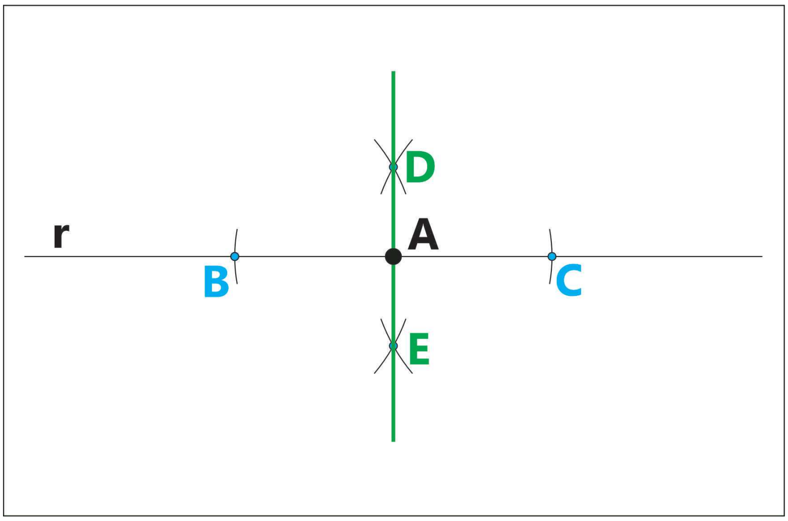


Figura 1.17: Construção com régua e compasso: Reta perpendicular I.

II) O ponto *A* é exterior à reta

Passo-a-Passo de construção análoga, alterando apenas o passo 2, onde o ponto A, deve ser determinado fora da reta r. Sendo que um esboço da construção é apresentado na Figura 1.18.

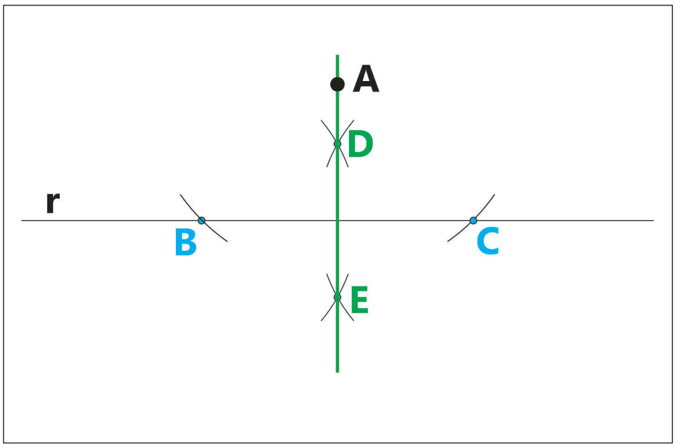


Figura 1.18: Construção com régua e compasso: Reta perpendicular II.

Construção com aplicativo GeoGebra:

I) O ponto *A* pertence à reta

Essa construção é feita apenas com a necessidade de traçar a reta *r*, utilizando o comando *Reta*, sendo que para isso são necessários dois pontos no caso os pontos *A* e *B*. Em seguida escolhemos a opção *Reta Perpendicular*, selecionamos a reta *r* e também o ponto *A*. E está construída a reta perpendicular pretendida. Como a construção foi feita usando a versão online do software, é possível compartilhar o link de forma pública para que qualquer pessoa tenha acesso sendo no caso o link: `https://www.geogebra.org/geometry/efdhhecm`, o resultado final da construção é apresentado na Figura 1.19.

Figura 1.19: Construção com software online GeoGebra: Reta perpendicular I.

II) O ponto *A* é exterior à reta

Para essa construção iniciamos por determinar o ponto *A*, posteriormente a reta *r*. Em seguida escolhemos a opção *Reta Perpendicular*, selecionamos a reta *r* e também o ponto *A*. E está construída a reta perpendicular pretendida. Sendo o link dessa construção: `https://www.geogebra.org/geometry/cbadkj4v`. O resultado final da construção também pode ser observado na Figura 1.20

Figura 1.20: Construção com software online GeoGebra: Reta perpendicular II.

Construção da reta paralela a uma reta dada *r* que passa por um ponto *A*, fora de *r*

Construção com régua e compasso:

1) Trace uma reta e denomine-a por r;

2) Determine o ponto A exterior a reta r;

3) Siga os passos de construção apresentados na seção anterior para construir uma reta perpendicular a reta r, com ponto A exterior à reta r. Denominemos essa perpendicular construída por reta s.

4) Siga os passos de construção apresentados na seção anterior para construir uma reta perpendicular a reta s, com ponto A pertencente à reta s. Denominemos essa perpendicular construída por reta t. Por sua vez a reta t é a reta paralela a reta r, que passa pelo ponto A.

Na Figura 1.21, temos o esboço da construção realizada.

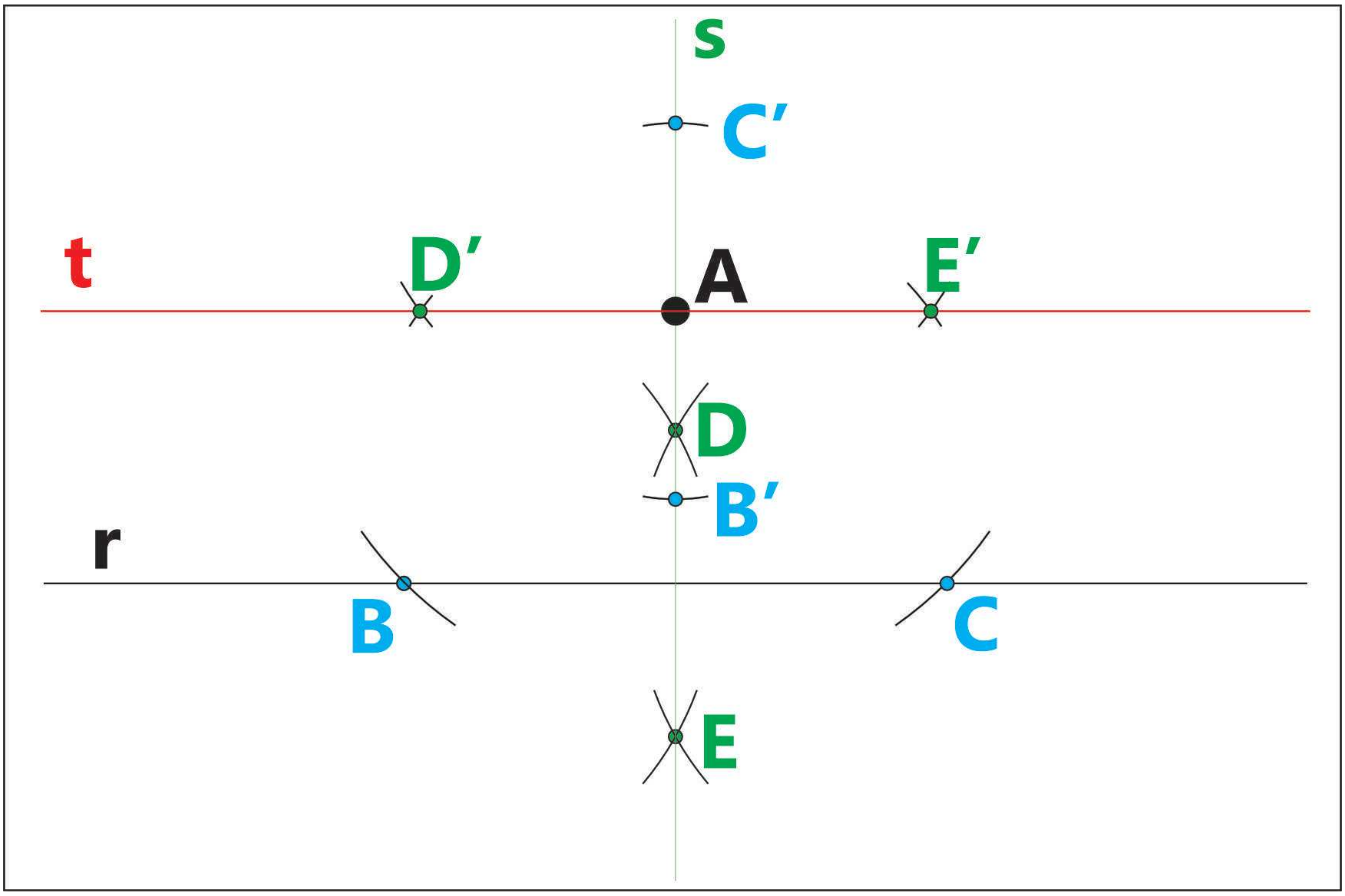


Figura 1.21: Construção com régua e compasso: Retas Paralelas.

Construção com aplicativo GeoGebra:

Para essa construção traçamos a reta r e o ponto A, exterior à reta r. Em seguida escolhemos a função *Retas Paralelas* e basta selecionar a reta r e o ponto A. O link para acesso a construção apresentada da Figura 1.22 é: `https://www.geogebra.org/geometry/adcdhzer`.

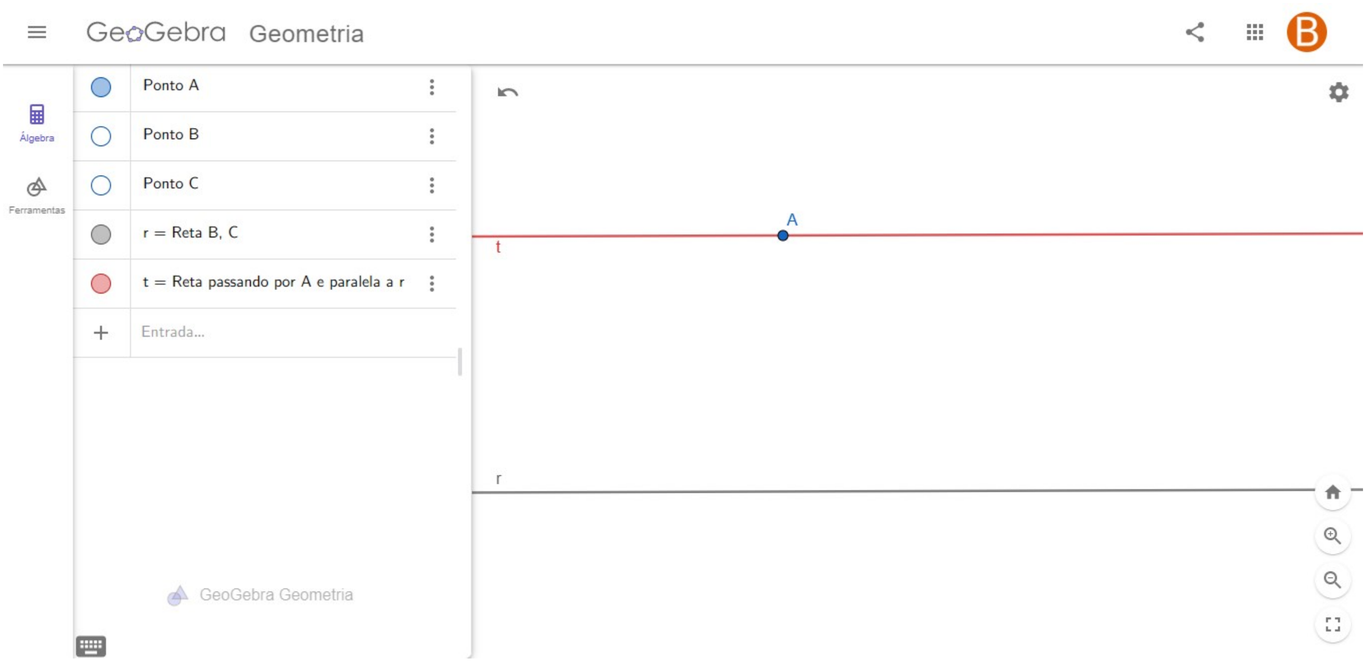


Figura 1.22: Construção com software online GeoGebra: Retas Paralelas

Construção da mediatriz de um segmento/Determinando o ponto médio de um segmento

Construção com régua e compasso:

1) Construa um segmento e denomine suas extremidades por A e por B;

2) Com centro no ponto A, com raio maior que a metade do segmento AB, trace arcos abaixo e acima desse segmento;

3) Utilizando o mesmo raio definido no passo 2 e centro no ponto B, trace arcos abaixo e acima do segmento AB;

4) Denomine a interseção dos arcos construídos nos passos 2 e 3, pelos pontos C e D;

5) Trace a reta que passa pelos pontos C e D. Essa é a reta mediatriz desejada.

Para encontrar o ponto médio do segmento AB, siga todos os passos anteriores e em seguida:

6) Denomine por M a interseção da reta mediatriz traçada no passo 5 e o segmento AB. Esse ponto M é o ponto médio procurado.

Na Figura 1.23, pode ser observada a construção com régua e compasso listada.

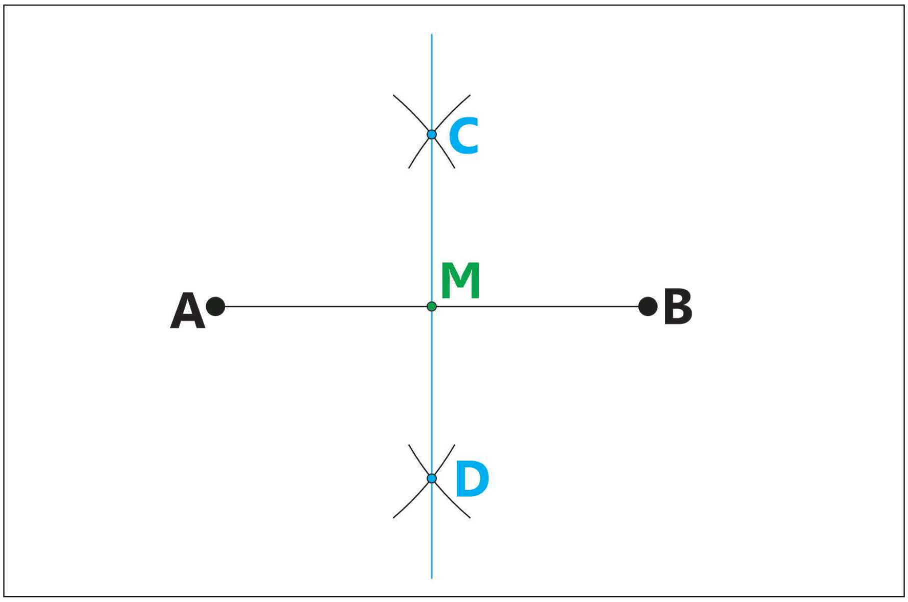


Figura 1.23: Construção régua e compasso: Mediatriz e ponto médio de um segmento.

Construção com aplicativo GeoGebra:

Uma vez determinado o segmento com extremidades A e B. Basta escolher a função *Mediatriz* e selecionar o segmento AB. A construção pode ser observada no link: https://www.geogebra.org/geometry/axe9bz5s e também na Figura 1.24.

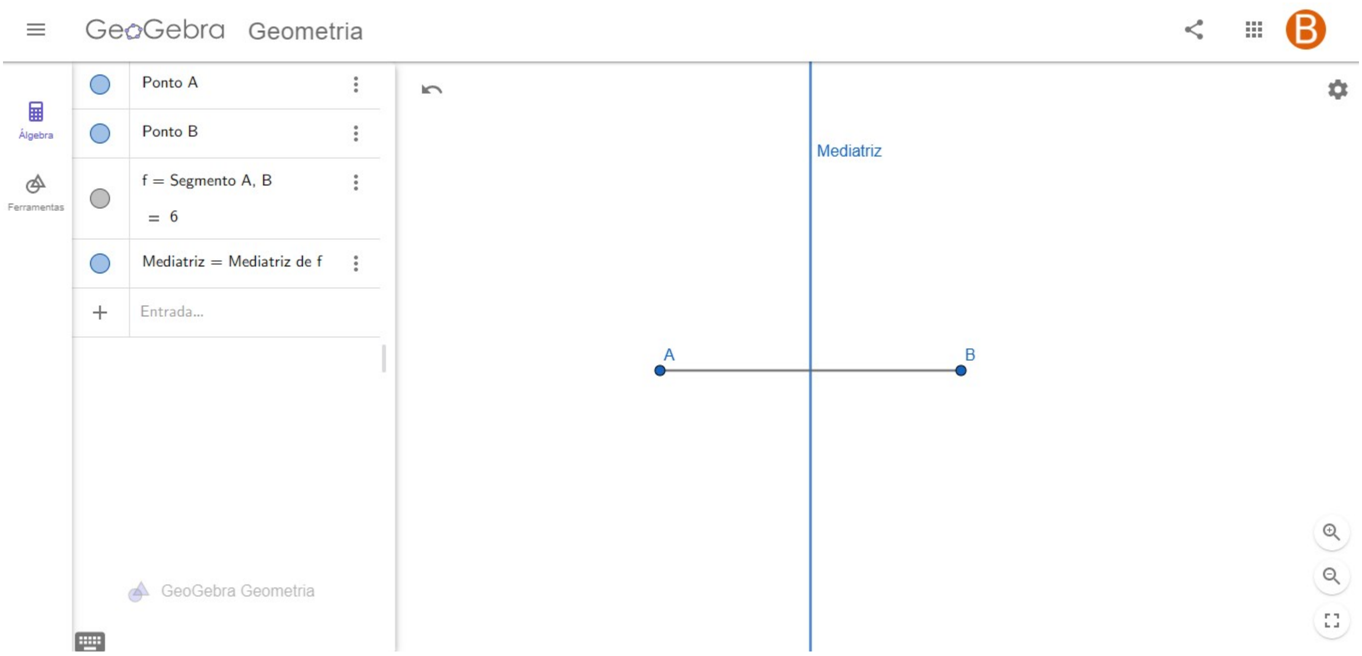


Figura 1.24: Construção com software online GeoGebra: Mediatriz.

Para determinar o ponto médio de um segmento começamos por traçar o segmento com extremidades A e B. Em seguida escolhemos a função *Ponto Médio* e selecionamos o segmento AB. A construção pode ser observada no link: https://www.geogebra.org/geometry/bz66gft3 e também na Figura 1.25.

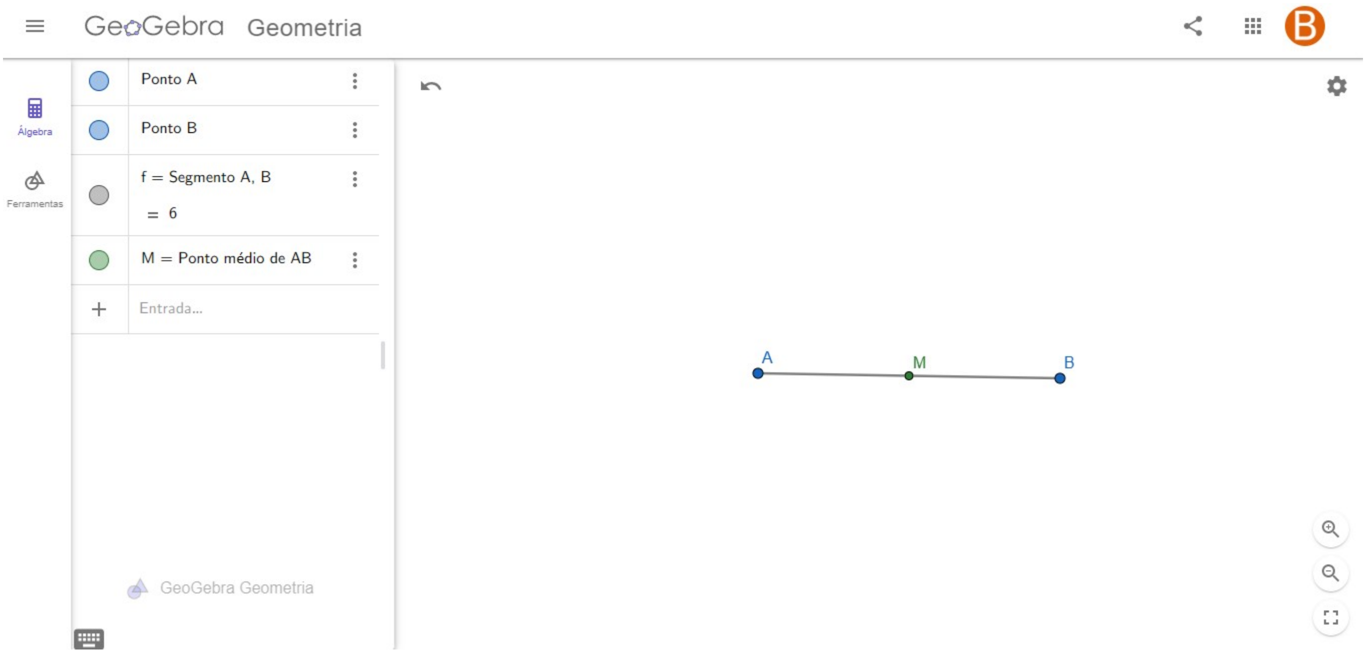


Figura 1.25: Construção com software online GeoGebra: Ponto Médio.

As potencialidades do software GeoGebra são inumeráveis, optamos inicialmente por apresentar algumas construções fundamentais necessárias para o ensino da Disciplina de Desenho Geométrico. Construções que iniciam o livro [11]. Com intuito principal de explicitar as facilidades do GeoGebra vamos apresentar a solução de um exercício.

1.5 Oficina modelo: resolução de problemas utilizando a dinâmica de Polya

1.5.1 A abordagem de um problema segundo o Método de Polya

O matemático George Polya (1987-1985) escreveu vários livros de matemática, apresentaremos aqui suas contribuições referentes ao texto **A arte de resolver problemas: Um novo aspecto do método matemático** [19], traduzido e adaptado em 1995 por Heitor Lisboa de Araújo.

Nosso objetivo nessa seção é apresentar alguns exercícios matemáticos aparentemente com planos de resolução áridos e que se visualizados por uma ótica geométrica apresentam planos mais lúcidos.

Para resolver esses exercícios utilizaremos o Método de Polya, apresentado no livro [19], onde se encontra um roteiro com o título *Como resolver um problema*, com as quatro fases do método, conforme destacado na Figura 1.26.

Figura 1.26: Método de Polya: Como resolver um Problema.

Observe como o autor detalha cada um dos passos:

1° Passo: Compreender o Problema

É preciso compreender o problema.

- Qual é a incógnita?
- Quais são os dados?
- Qual é a condicionante?
- É possível satisfazer a condicionante?
- A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória?
- Trace uma figura.
- Adote uma notação adequada.
- Separe as diversas partes da condicionante.
- É possível anotá-las?

2° Passo: Estabelecimento de um Plano

Encontre a conexão entre os dados e a incógnita. É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata. É preciso chegar afinal a um plano para a resolução.

- Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente?
- Conhece um problema correlato? Conhece um problema que lhe poderia ser útil?
- Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.
- Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?
- É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições.

3° Passo: Execução do Plano

Execute o plano e ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo.

- É possível verificar claramente que o passo está correto?
- É possível demonstrar que ele está correto?

4° Passo: Retrospecto

Examine a solução obtida.

- É possível verificar o resultado?
- É possível verificar o argumento?
- É possível chegar ao resultado por um caminho diferente?
- É possível perceber isto num relance?
- É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

1.5.2 Situação Problema 1:

Uma lagartixa acaba de entrar pela janela em uma casa com o teto lotado de aranhas, porém a casa também possui um faminto gato.

- A distância entre a janela e o armário mais próximo é de 6 metros.
- A distância do local da janela por onde a lagartixa entrou até o teto é 3 metros.
- A distância do chão ao teto é 5 metros.

Crie o melhor plano para que a lagartixa possa ir ao teto, pegar uma aranha e esconder-se do gato debaixo do armário, no chão.

Método de Polya

1° Passo: Compreender o problema

Incógnita: O objetivo é encontrar o menor caminho para que a lagartixa saia da janela, vá até o teto e depois para debaixo do armário; portanto a incógnita é o menor caminho possível para realizar esse trajeto.

Dados: distância da janela até o teto 3 metros, distância da janela até o armário 6 metros, distância do chão ao teto 5 metros.

Condicionante: Menor caminho (minimizar).

Figura: 1.27.

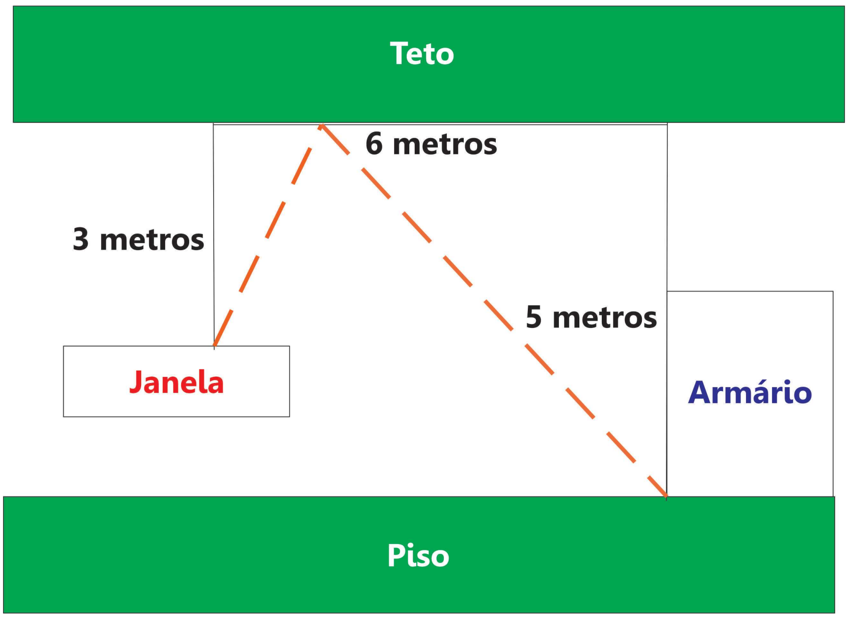


Figura 1.27: Figura para representar a situação Problema 1.

2° Passo: Estabelecimento de um plano

Problema correlato: A situação problema apresentada lembra muito exercícios de máximos e mínimos, em especial exercícios onde devemos encontrar o valor do perímetro para que a área seja máxima, com a diferença que nosso objetivo aqui é de minimização.

Observando melhor a Figura 1.28.

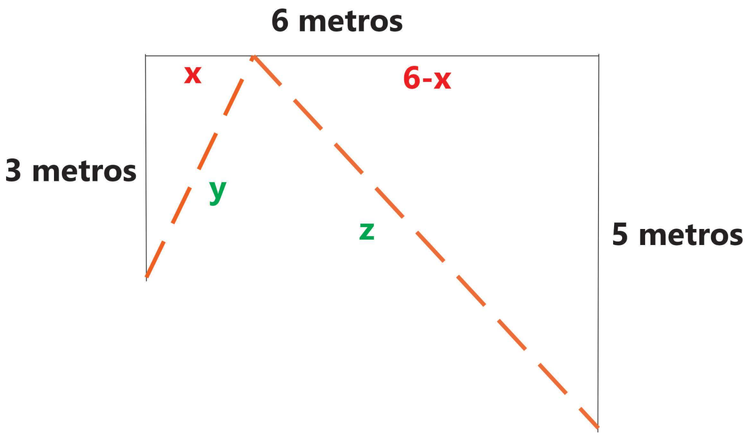


Figura 1.28: Figura “limpa” para representar a situação Problema 1.

Nomearemos nossa incógnita por P, sendo que $\boxed{P = y + z}$. Queremos encontrar o menor valor possível para P e para isso precisamos determinar o valor de x, pois será o local onde a lagartixa atingirá o teto.

Assim como no nosso problema correlato temos como objetivo escrever y e z, em função de uma única incógnita, no caso a incógnita x, para isso usaremos o Teorema de Pitágoras.

Uma vez determinada a função nosso objetivo é calcular seu valor mínimo, ou seja, o menor percurso percorrido, que é representado por nós como $\boxed{P = y + z}$.

3° Passo: Execução do plano

Sabendo que $\boxed{P = y + z}$. Utilizando o Teorema de Pitágoras:

Para a váriavel y

$$y^2 = x^2 + 3^2 \quad \Longrightarrow \quad y = \sqrt{x^2 + 9}$$

Para a variável z

$$z^2 = 5^2 + (6 - x)^2 \quad \Longrightarrow \quad z = \sqrt{x^2 - 12x + 61}$$

Logo a função que precisaremos minimizar será:

$$\boxed{P = y + z} \quad \Longrightarrow \quad P = \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{x^2 - 12x + 61}$$

Que é uma função que depende apenas da variável x, logo podemos renomeá-la:

$$f(x) = \sqrt{x^2+9} + \sqrt{x^2-12x+61}$$

Como o objetivo é minimizar essa função, vamos calcular sua derivada primeira e igualar a zero; $f'(x) = 0$. Para isso será necessário usar a Regra da Cadeia. O resultado da primeira derivada da função f é:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} + \frac{x-6}{\sqrt{x^2-12x+61}} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - \frac{6-x}{\sqrt{x^2-12x+61}} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{6-x}{\sqrt{x^2-12x+61}}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)^2 = \left(\frac{6-x}{\sqrt{x^2-12x+61}}\right)^2$$

$$\Longrightarrow \frac{x^2}{x^2+9} = \frac{36-12x+x^2}{x^2-12x+61}$$

$$\Longrightarrow x^2(x^2-12x+61) = (x^2+9)(36-12x+x^2)$$

$$\Longrightarrow x^4-12x^3+61x^2 = 36x^2-12x^3+x^4+324-108x+9x^2$$

$$\Longrightarrow 16x^2+108x-324 = 0$$

$$\Longrightarrow x = \frac{-108 \pm \sqrt{32400}}{2.16}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{-108 \pm 180}{32}$$

$$\Longrightarrow x' = 2,25 \text{ ou } x'' = -9$$

Como estamos pensando em medidas o resultado negativo não interessa. Nosso interesse agora é ter a certeza que o valor 2,25 é o ponto mínimo, para isso será necessário traçar o gráfico da função

$$f(x) = \sqrt{x^2+9} + \sqrt{x^2-12x+61}$$

donde percebemos que $x = 2,25$ é ponto de mínimo local de f.

Uma vez garantido esse fato é necessário substituí-lo na função $f(x)$, com objetivo de encontrar o menor caminho. Temos

$$f(x) = \sqrt{x^2+9} + \sqrt{x^2-12x+61}$$

$$\Longrightarrow f(2,25) = \sqrt{2,25^2+9} + \sqrt{2,25^2-12.2,25+61}$$

$$\Longrightarrow f(2,25) = \sqrt{5,0625+9} + \sqrt{5,0625-27+61}$$

$$\Longrightarrow f(2,25) = \sqrt{14,0625} + \sqrt{39,0625}$$

$$\Longrightarrow f(2,25) = 3,75+6,25$$

$$\Longrightarrow f(2,25) = 10$$

4° Passo: Retrospecto

A solução obtida nos remete que o menor caminho realizado pela lagartixa será de 10 metros, e ela tocará o teto a uma distância de 2,25 m da janela.

É possível chegar ao resultado por um caminho diferente?

Resolução Geométrica

Observe o cenário abaixo, Figura 1.29 considerando a janela como ponto J, o armário sendo o ponto A e o teto a reta r. O objetivo é determinar o ponto P sobre a reta r de forma que a soma $JP + PA$ seja mínima. Respeitando os valores iniciais do problema.

Figura 1.29: Resolução Geométrica: Figura "limpa" para representar a situação Problema 1.

Passo-a-passo construção:

1°) Trace uma reta perpendicular a reta r que passa pelo ponto J; denomine-a por reta s;

2°) Denomine por B, o ponto de interseção entre as retas r e s;

3°) Trace um círculo com centro em B e raio JB;

4°) Denomine por J' a outra interseção entre o círculo e a reta s;

Da construção resultou o fato de J' ser simétrico à J, em relação a r. Observe a Figura 1.30.

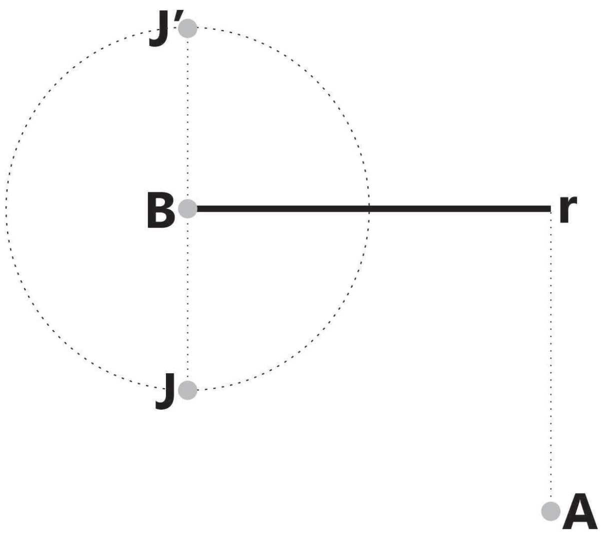


Figura 1.30: Resolução Geométrica: Figura com simétrico do ponto J, ponto J'.

Com intuito de deixar a construção "limpa", vamos esconder o círculo e o ponto B.

5°) Marque um ponto Q qualquer, sobre a reta r;

6°) Trace AQ, QJ e QJ'.

Como r é mediatriz de JJ', então $QJ = QJ'$. Assim $AQ + QJ$ é sempre igual a $AQ + QJ'$. Entretanto está soma será mínima quando A, Q e J' forem colineares.

7°) Trace o segmento AJ';

8°) Marque o ponto de interseção entre a reta r e o segmento AJ', denomine-o por P.

Logo o ponto P é o ponto procurado. Observe na Figura 1.31.

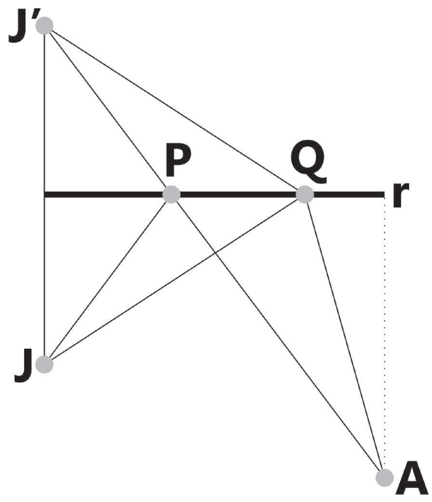


Figura 1.31: Resolução Geométrica: Figura com representação do local exato do ponto P.

Resolução com GeoGebra

- Trace um segmento *AB* com comprimento fixo de 6 unidades, na posição horizontal;
- Trace retas perpendiculares à *AB* pelas extremidades desse segmento;
- Sobre a reta perpendicular, trace um segmento *AC* abaixo do segmento AB, sendo *AC* com comprimento 3 unidades;
- Sobre a outra reta perpendicular, trace um segmento *BD* à cima do segmento AB, sendo *BD* com comprimento 5 unidades;
- Trace o segmento *CD*;

A construção descrita pode ser acessada através do link `https://www.geogebra.org/geometry/ax9sw7ub`. E sua construção final está representada na Figura 1.32.

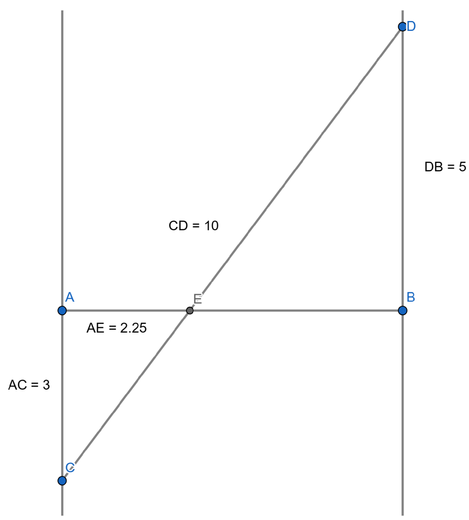


Figura 1.32: Resolução da Situação Problema 1 com GeoGebra.

1.5.3 Situação Problema 2:

Dado um quadrado decomposto em dois retângulos menores (sombreados conforme Figura 1.33) e dois quadrados, $TR = 7$ e $UE = 20$.

a) Ache PQ.

b) Ache a área sombreada total.

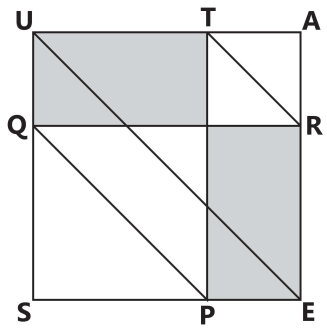


Figura 1.33: Esboço da situação Problema 2

Método de Polya

1° Passo: Compreender o problema

Incógnita: O primeiro objetivo é encontrar o valor de PQ, e o segundo é a área dos retângulos.

Dados: $TR = 7$ cm que é a diagonal de um quadrado e $UE = 20$ cm que é a diagonal de outro quadrado.

Condicionantes: Sabemos que a figura é um quadrado, decomposto em dois retângulos e dois quadrados e isso é muito relevante para o problema.

Adote uma notação adequada: Vamos denominar o lado do quadrado que tem um dos lados determinados pelas letras TA por x, o lado do quadrado que tem um dos lados determinados pelas letras QS por y, o lado do quadrado que tem um dos lados determinados pelas letras AE por w.

Trace uma figura:

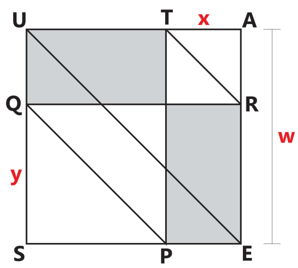


Figura 1.34: Esboço da situação Problema 2 com notação adequada.

2° Passo: Estabelecimento de um plano

Utilizar o Teorema de Pitágoras, utilizando as diagonais destacadas como hipotenusa dos triângulos retângulos. Primeiro nas diagonais que o exercício apresentou valores. Em seguida percebendo que $w = x + y$, utilizaremos novamente o Teorema de Pitágoras para encontrar o valor da diagonal do quadrado de lado y, que é o valor PQ procurado.

Como o exercício é divido em duas perguntas precisamos também encontrar o valor da área dos retângulos, ela poderá ser determinada por $2xy$.

3° Passo: Execução do plano

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo que possui diagonal $TR = 7$ temos:

$$x^2 + x^2 = 7^2$$

$$\Longrightarrow 2x^2 = 49$$

$$\Longrightarrow x^2 = \frac{49}{2}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{7}{\sqrt{2}}.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo que possui diagonal $UE = 20$ temos:

$$w^2 + w^2 = 20^2$$

$$\Longrightarrow 2w^2 = 400$$

$$\Longrightarrow w^2 = 200$$

$$\Longrightarrow w = \sqrt{200}$$

$$\Longrightarrow w = 10\sqrt{2}.$$

Como $w = x + y$ temos que

$$w = x + y$$

$$\Longrightarrow 10\sqrt{2} = \frac{7}{\sqrt{2}} + y$$

$$\Longrightarrow y = 10\sqrt{2} - \frac{7}{\sqrt{2}}$$

$$\Longrightarrow y = \frac{10.2 - 7}{\sqrt{2}}$$

$$\Longrightarrow y = \frac{13}{\sqrt{2}}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo que possui diagonal medindo PQ, temos:

$$PQ^2 = y^2 + y^2$$

$$\Longrightarrow PQ^2 = \left(\frac{13}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{13}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\Longrightarrow PQ^2 = \frac{13^2}{2} + \frac{13^2}{2}$$

$$\Longrightarrow PQ^2 = \frac{338}{2}$$

$$\Longrightarrow PQ = \sqrt{169}$$

$$\Longrightarrow PQ = 13$$

Que é a resposta da letra a do exercício. Agora para responder a letra b, faremos Área $= 2xy$.

$$\text{Área} = 2xy.$$

$$\Longrightarrow \text{Área} = 2\left(\frac{7}{\sqrt{2}}\right).\left(\frac{13}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Longrightarrow \text{Área} = 91 \text{ cm}^2$$

O que responde a letra b do exercício.

4° Passo: Retrospecto

A solução encontrada é coerente? Não percebendo nenhum problema nela vamos pensar:

É possível chegar a solução por um caminho diferente?

Resolução Geométrica

Observe que a diagonal AS, é também diagonal do quadrado de lado w, portanto temos que $UE = AS = 20$. Observe a Figura 1.35.

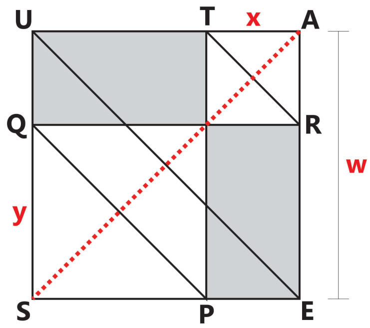


Figura 1.35: Esboço da situação Problema 2 - Resolução Geométrica.

A diagonal AS pode ser decomposta nas diagonais dos quadrados de lado x e y, logo

$$AS = PQ + TR$$

$$\Longleftrightarrow 20 = PQ + 7$$

$$\Longleftrightarrow PQ = 13 \text{ cm}.$$

Resolução que responde a alternativa a, de forma rápida e direta. Para a alternativa b, uma vez sabendo o valor das diagonais podemos apenas encontrar a área do quadrado de lado w e subtrair a área dos quadrados de lados x e y, que restará apenas a área dos retângulos. Para isso temos que $2w^2 = 20^2$, $2y^2 = 13^2$ e $2x^2 = 7^2$. Assim,

$$\text{Área dos retângulos} = \frac{400}{2} - \frac{169}{2} - \frac{49}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \text{Área dos retângulos} = 91 \text{ cm}^2.$$

Resolução com GeoGebra

No aplicativo GeoGebra basta construir um quadrado com diagonal medindo 20 cm, com um quadrado interior com diagonal medindo 7 cm. Traçar o prolongamento dos lados do quadrado de diagonal com medida 7, para formar os retângulos.

Em seguida basta medir a diagonal procurada *PQ* e também a área dos retângulos. A construção pode ser observada no link `https://www.geogebra.org/geometry/nx2d4azq`. E seu esboço está representado na Figura 1.36.

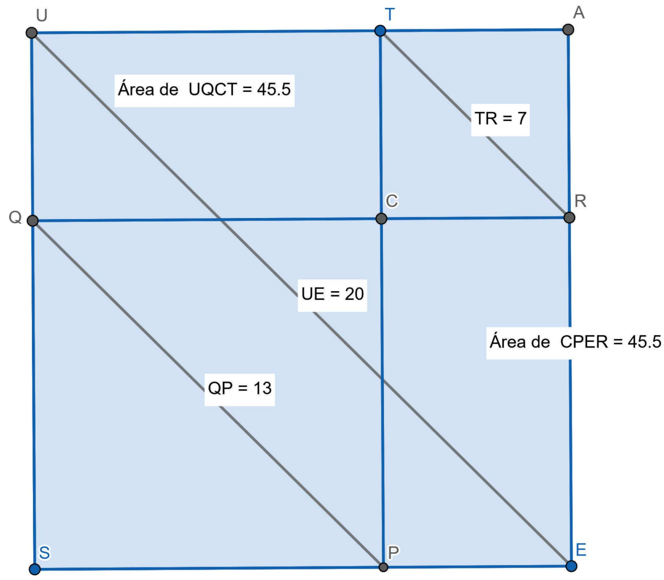


Figura 1.36: Esboço da situação Problema 2 - Resolução com GeoGebra.

1.5.4 Situação Problema 3:

Dois quadrados congruentes de 6 cm x 6 cm sobrepõem-se, conforme mostra a Figura 1.37. Um vértice de um dos quadrados está no centro do outro quadrado. Qual é o valor possível da área hachurada? (O primeiro quadrado é móvel, mantendo-se fixo apenas o vértice que está no centro do outro, conforme mostra a figura).

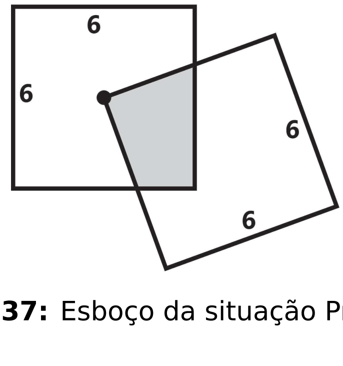


Figura 1.37: Esboço da situação Problema 3.

Método de Polya

1° Passo: Compreender o problema

Vamos refazer a figura nomeando os vértices e as intersecções das arestas:

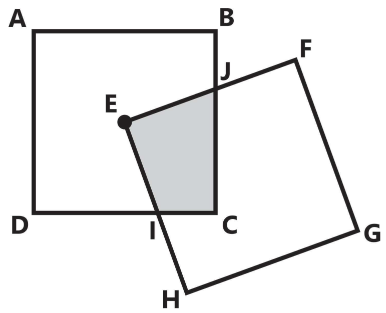


Figura 1.38: Esboço da situação Problema 3 - Nomeando os vértices.

Sabemos que os lados dos quadrados medem 6 cm. E que o ponto E está localizado no centro do quadrado $ABCD$.

O objetivo é descobrir a área do quadrilátero $EJCI$. Como pode ser observado na Figura 1.38.

2° Passo: Estabelecimento de um plano

Observe a Figura 1.39, onde foram traçados os segmentos EK e EL, sendo que o ponto K é o ponto médio do segmento CD e L é o ponto médio do segmento BC.

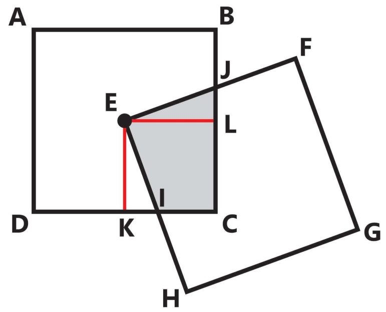


Figura 1.39: Esboço da situação Problema 3 - Traçando triângulos congruentes.

Conseguindo provar que os triângulos EIK e EJL são congruentes o problema estará resolvido, pois a área do quadrilátero $EJCI$ será equivalente a área do quadrado $ELCK$, que é um quadrado de lado 3 cm.

3° Passo: Execução do plano

De fato, os triângulos EIK e EJL são congruentes pelo caso ângulo-lado-ângulo (ALA) de congruência, observe a Figura 1.40. Temos que os ângulos $J\hat{E}L \equiv I\hat{E}K$ são congruentes, bem como os lados $EL \equiv EK$, e os ângulos $E\hat{K}I \equiv E\hat{L}J$ medem 90^o.

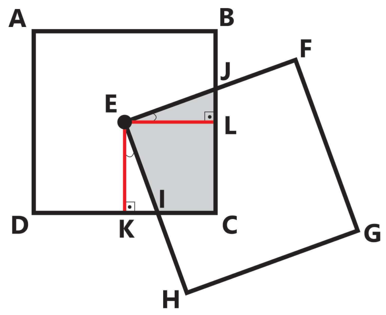


Figura 1.40: Esboço da situação Problema 3 - Caso ALA de Congruência.

Portanto concluímos que a área do quadrilátero *EJCI* é igual a área do quadrado de lado 3 cm, portanto 9 cm^2.

4° Passo: Retrospecto

A solução apresentada é uma solução limpa e portanto não apresenta problemas. Porém:

É possível chegar a solução por um caminho diferente?

Resolução Geométrica

Como um quadrado tem um vértice fixo no centro do outro quadrado, basta rotacionar o quadrado com o ponto fixo até que seus lados fiquem paralelos. Observe a Figura 1.41.

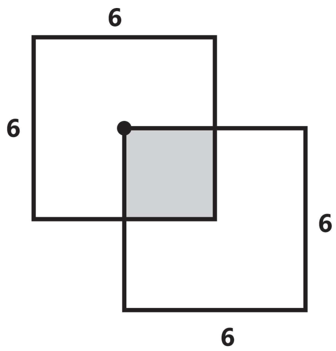


Figura 1.41: Esboço da situação Problema 3 - Resolução Geométrica.

E dessa forma percebemos que a área procurada corresponde a um quarto da área do quadrado, ou seja 9 cm^2.

Resolução com GeoGebra

Para resolver o problema com o GeoGebra, basta construir um quadrado *ABCD* com lado 6 cm, marcar seu centro *E*. Construir outro quadrado com lado 6 cm, de forma que um dos seus vértices esteja no centro do primeiro quadrado, denote esse quadrado por *EFGH*.

Em seguida selecionar o poligono *EJCI* que deseja descobrir a área e solicitar o cálculo da área. A construção pode ser observada no link https://www.geogebra.org/geometry/et8auysm. E seu esboço é a imagem da Figura 1.42.

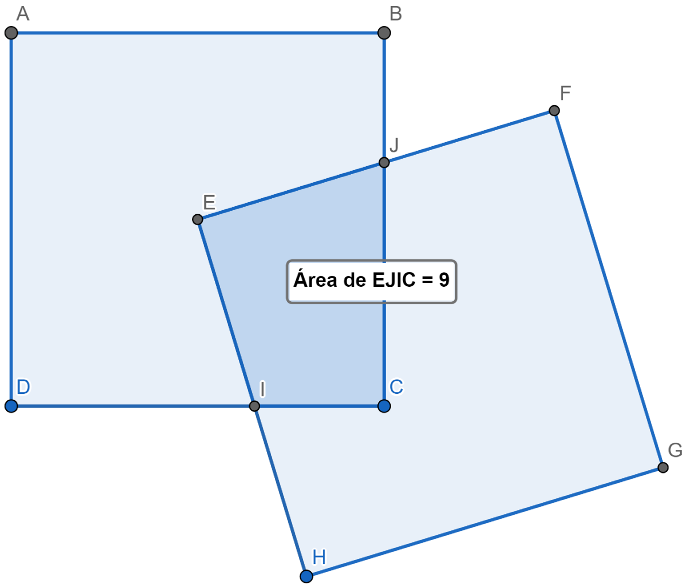


Figura 1.42: Esboço da situação Problema 3 - Resolução com GeoGebra.

1.5.5 Situação Problema 4:

Na figura, ABCD é um paralelogramo e o segmento EF é paralelo a AB. Qual é a soma das áreas dos triângulos sombreados? Observe a Figura 1.43.

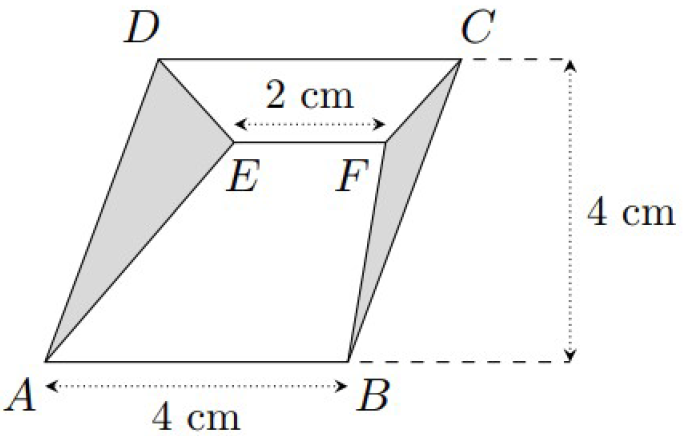


Figura 1.43: Esboço da situação Problema 4.

Método de Polya

1° Passo: Compreender o problema

Dados: O problema é composto por um paralelogramo decomposto em dois trapézios e dois triângulos, sendo que a altura e a base do paralelogramo é 4 cm.

Dos trapézios sabemos o valor das bases, sendo a base maior $B = 4$ cm, e base menor $b = 2$ cm, mas não sabemos o valor das alturas.

Incógnitas: Portanto nossa incógnita será a altura dos trapézios.

Trace uma nova figura:

A figura traçada mostra a notação das alturas dos trapézios 1.44.

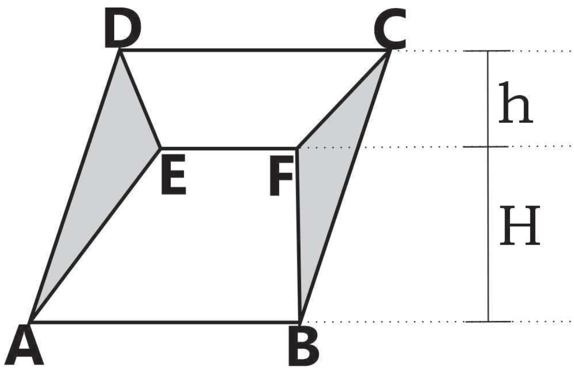


Figura 1.44: Esboço da situação Problema 4, notação das alturas dos trapézios.

2° Passo: Estabelecimento de um plano

Como o objetivo é calcular a área dos triângulos sombreados, vamos optar por calcular a área do paralelogramo *ABCD* e subtrair a área dos trapézios *ABFE* e *CDEF*.

3° Passo: Execução do plano

O paralelogramo *ABCD* tem base 4 cm e altura 4 cm, logo a área do paralelogramo será

$$Área_{paralelogramo} = 4 \quad cm \quad . \quad 4 \quad cm = 16 \quad cm^2. \tag{1.2}$$

O trapézio *ABFE*, tem base $AB = 4cm$ e base $EF = 2cm$ e altura H, logo sua área será dada por

$$Área_{trapézio(ABFE)} = \frac{(AB + EF).H}{2} = \frac{(4+2).H}{2} = \frac{(6).H}{2} = 3.H \tag{1.3}$$

.

O trapézio *CDEF*, tem base $CD = 4$ cm e base $EF = 2$ cm e altura h, logo sua área será dada por

$$Área_{trapézio(CDEF)} = \frac{(CD + EF).h}{2} = \frac{(4+2).h}{2} = \frac{(6).h}{2} = 3.h. \tag{1.4}$$

Portanto a soma das áreas dos triângulos procurada será dada por (1.2) - (1.3) - (1.4).

Observe:

$$Área_{procurada} = 16 - 3.H - 3.h = 16 - 3(H + h). \tag{1.5}$$

Como sabemos que $H + h = 4cm$, temos que,

$$Área_{procurada} = 16 - 3.H - 3.h = 16 - 3(4) = 16 - 12 = \quad 4 \quad cm^2. \tag{1.6}$$

4° Passo: Retrospecto

A solução realizada não aparenta nenhum problema, logo, temos que a soma das áreas dos triângulos é realmente 4 cm^2.

É possível chegar a solução por um caminho diferente?

Resolução Geométrica

Note que o paralelogramo pode ser deformado, mantendo fixa sua base AB e deslizando o lado CD sobre a reta suporte deste segmento até obtermos um quadrado, mantendo seu comprimento igual a 4 cm. Observe a Figua 1.45.

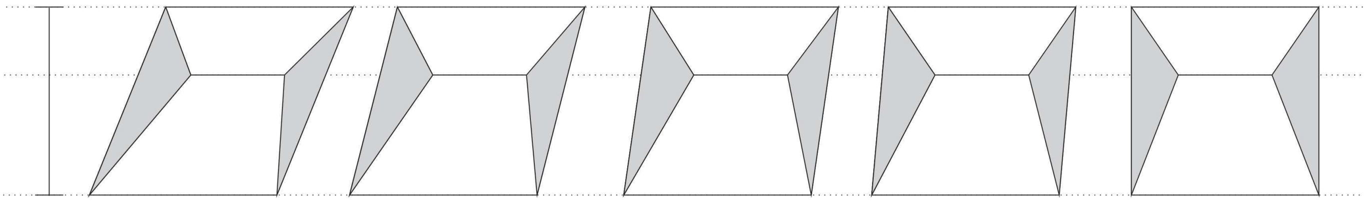


Figura 1.45: Deformação do paralelogramo até formar um quadrado.

Ao fazermos essa deformação, também deslizamos o segmento EF sobre a reta suporte que o contém e mantemos seu comprimento igual a 2 cm, de modo que na posição final as distâncias do ponto E até ao lado AD e do ponto F até ao lado BC coincidam.

Desse modo obtemos uma figura simétrica em relação ao eixo vertical central. Agora, o triângulo BCF pode ser decomposto nos triângulos CKF e BKF, os quais tem respectivamente as mesmas áreas (são congruentes) que os triângulos DOE e EPA, conforme ilustra a Figura 1.46 à direita. Finalmente, concluímos que a região colorida tem a mesma área que a região retangular $APOD$, a qual é um quarto da área do retângulo $ABCD$, ou seja $\frac{1}{4}.16 = 4\ cm^2$.

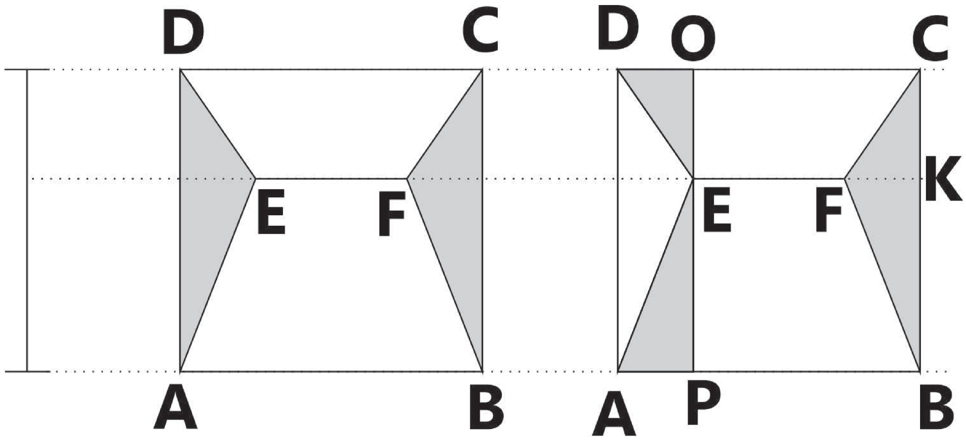


Figura 1.46: Triângulos ADE e BCF congruentes.

Resolução com GeoGebra

Construíremos no Geogebra o paralelogramo *ABCD* com base e altura de 4 cm, deixando suas bases *AB* e *CD* sobre retas paralelas. Em seguida contruiremos os dois triângulos hachurados *DEA* e *CBF* de tal forma que *EF* seja paralelo as bases do paralelogramo *ABCD* o comprimento de *EF* seja 2 cm e os pontos *E*, sejam internos ao paralelogramo. A construção deve ser feita permitindo que o ponto *D* fique móvel. Independente da movimentação do ponto *D* a soma das área dos triângulos permanece inalterada. A construção final pode ser observada na Figura 1.47, e também pode ser visualizada e manipulada acessando o link https://www.geogebra.org/geometry/ffhuayyq.

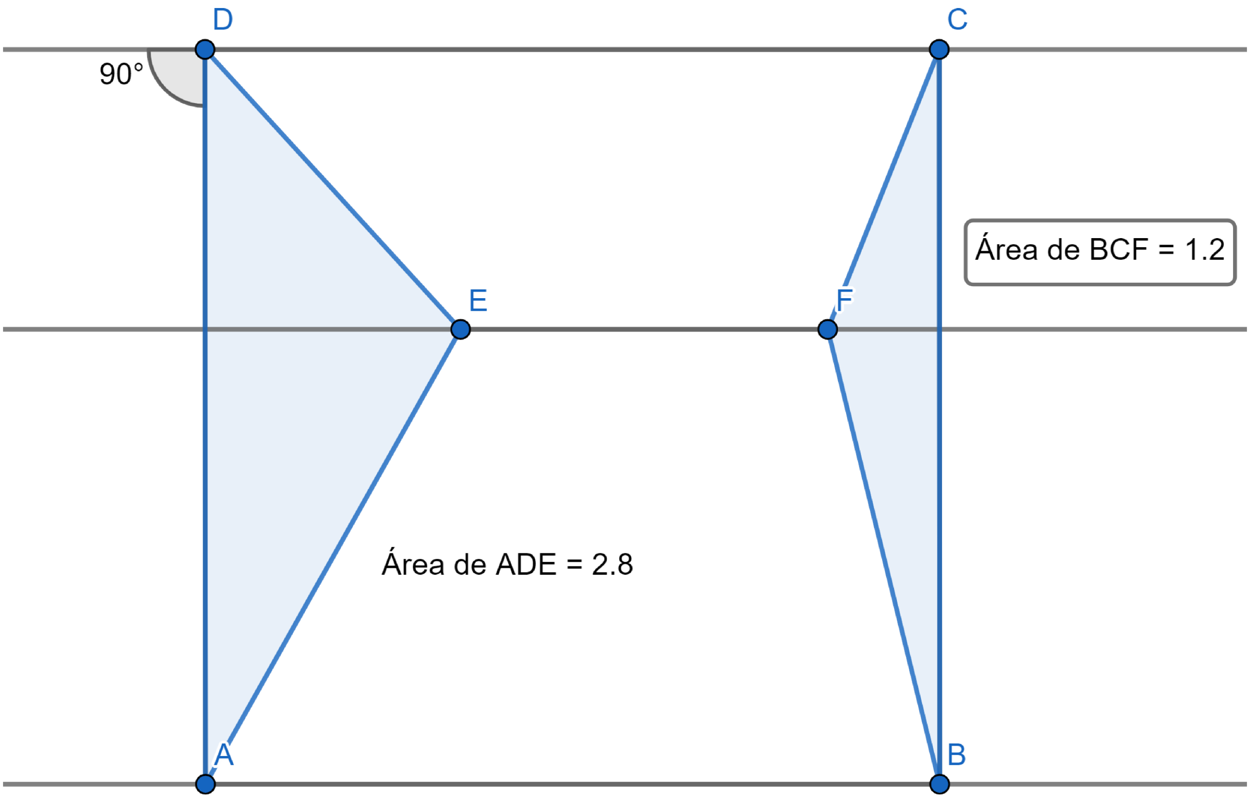


Figura 1.47: GeoGebra: Situação Problema 4.

CAPÍTULO 2

Aspectos relacionados ao perfil do ingressante na eletiva Desenho Geométrico

2.1 Elaboração e aplicação do pré-teste a estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental

Destaca-se que essa dissertação foi iniciada no mês de setembro de 2022, com intuito de nortear professores que ministram a disciplina eletiva de Desenho Geométrico. Assim, nosso universo e o nosso público alvo, para experimentos de ações intervencionistas no ensino-aprendizagem de Geometria, são estudantes de uma escola pública da cidade de Araxá, a qual oferece apenas ensino médio. Aqui denominaremos essa escola por EscolaEM. Observamos que para a turma que já encontrava-se finalizando o 1° ano não conseguiríamos atingir uma avaliação satisfatória. Analisando ainda que passamos por dois anos de pandemia precisaríamos conhecer os alunos que provavelmente essa escola receberia no ano seguinte para podermos traçar uma estratégia de trabalho mais efetiva. Com esse intuito foi elaborado o Pré-Teste, que encontra-se na integra no Anexo A.1, o qual foi aplicado em três escolas públicas da cidade de Araxá, escolas essas com público alvo apenas até o ensino fundamental II, sendo portanto o possível público da EscolaEM, denominaremos as escolas onde o teste foi aplicado por EscolaEF1, EscolaEF2 e Escola EF3 (Figura 2.1).

Figura 2.1: Alunos do 9° ano de três escola públicas diferentes realizando o Pré-Teste.

Esse teste foi aplicado nos dia 4, 5 e 6 de outubro de 2022, com autorização da direção dessas escolas, sendo que o modelo de pedido de autorização pode ser visualizado no Anexo A.2. O teste foi aplicado pela professora responsável por essa pesquisa, sendo solicitado que o professor da classe no horário do teste se ausentasse. Antes de iniciar os alunos foram informados que esse teste era parte integrante de uma pesquisa para uma dissertação de mestrado, que tem como objetivo mapear seus conhecimentos para traçar melhores estratégias para o novo ensino médio. Sendo ainda que na primeira página do teste eles receberam os dizeres abaixo que foram lidos em voz alta pela aplicadora.

- Esse teste é composto por 16 questões, distribuídas segundo os quatro níveis presentes no modelo Van Hiele;
- O tempo previsto para a realização do teste é de 40 minutos. Estamos prevendo um total de 30 minutos para a realização das resoluções e 10 minutos para preenchimento do gabarito;
- Leia atentamente cada questão. Decida qual resposta você acredita estar correta. Há apenas uma alternativa correta para cada questão. Preencha o gabarito com atenção;
- Use o próprio caderno de questões para efetuar qualquer cálculo ou desenho que julgar necessário;
- Será permitido utilizar durante o teste apenas lápis e borracha;
- O teste será corrigido e os participantes caracterizados segundo os níveis do modelo. Pretende-se, posteriormente, construir oficinas didático-pedagógicas enfatizando ações formativas no enfretamento de eventuais necessidades observadas no processo de ensino – aprendizagem.

O teste foi por nós elaborado sendo composto por 16 questões, onde consideramos que as questões 1, 2, 3 e 4, fazem referência ao Nível 0, do pensamento de Van Hiele, as questões 5, 6, 7 e 8, ao Nível 1, as questões 9, 10, 11 e 12, ao Nível 2 e por fim as questões 13, 14, 15 e 16 ao Nível 3.

Consideramos que, para que um aluno estivesse enquadrado em determinado nível deveria ter um aproveitamento mínimo de 75%, ou seja, como cada nível foi composto por 4 questões, para ser incluído nesse nível deveria acertar no mínimo três questões. Analisamos ainda que, caso o aluno não atingisse 75% do nível 0, não poderia ser avaliado no nível 1, nem em nenhum nível subsequente. Tínhamos uma expectativa de que os alunos estariam enquadrados entre os níveis 1 e 2. Porém, observando a tabulação abaixo, percebemos que a defasagem está muito maior.

Iniciando com a análise da EscolaEF1: a escola está localizada na periferia da cidade de Araxá, no setor oeste, sendo está uma escola pública municipal, que abrange 2 turmas de 9° ano, o teste foi aplicado a apenas uma das turmas escolhida aleatoriamente pela aplicadora. No momento do teste estavam presentes 20 alunos, sendo que 17 alunos não conseguiram se enquadrar em nenhum dos níveis, 2 alunos enquadram-se no Nível 0, e apenas um aluno no Nível 1. Observe o gráfico de barras na Figura 2.2.

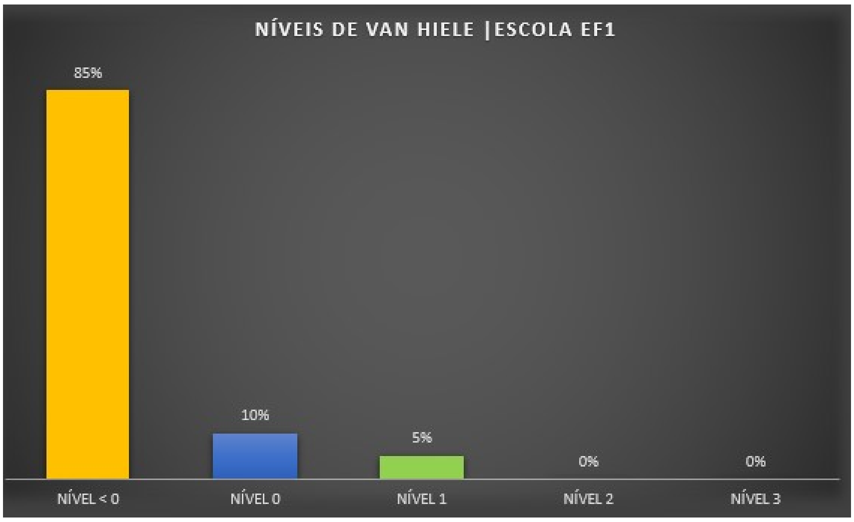


Figura 2.2: Tabulação das respostas dos alunos da EscolaEF1.

Analisando agora a Escola EF2: escola essa também localizada na periferia da cidade de Araxá, no setor norte, sendo essa por sua vez uma escola pública estadual, que atende quatro turmas de 9° ano, o teste foi aplicado escolhendo aleatoriamente apenas uma turma que no momento do teste constava de 24 alunos, sendo que 14 alunos não conseguiram enquadra-se em nenhum dos níveis, 9 alunos enquadram-se no Nível 0, e apenas um aluno no Nível 1. Observe o gráfico de barras na Figura 2.3.

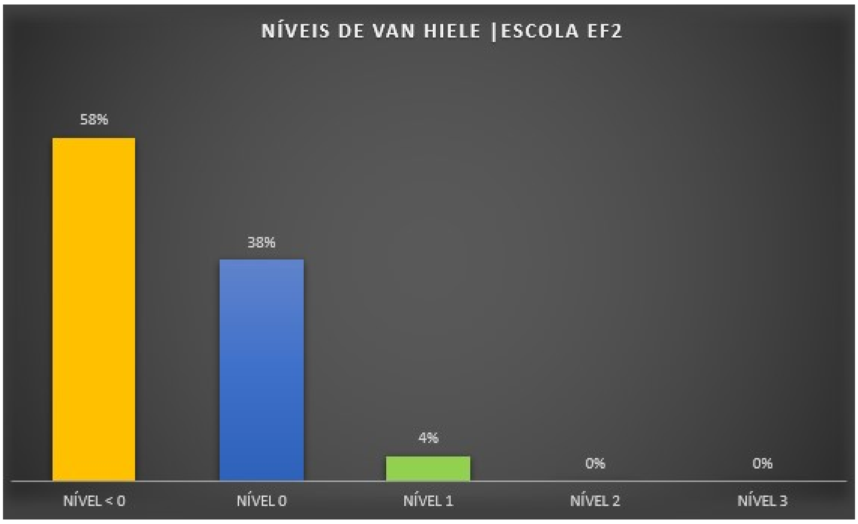


Figura 2.3: Tabulação das respostas dos alunos da EscolaEF2.

Por fim, fazendo uma análise da EscolaEF3: escola essa localizada na região central da cidade de Araxá, sendo uma escola pública estadual, que atende cinco turmas de 9° ano, o teste foi aplicado escolhendo aleatoriamente apenas uma turma que no momento do teste constava de 31 alunos, sendo que 22 alunos não conseguiram enquadrar-se em nenhum dos níveis, 9 alunos enquadram-se no Nível 0, e nenhum aluno no Nível 1. Observe o gráfico de barras na Figura 2.4.

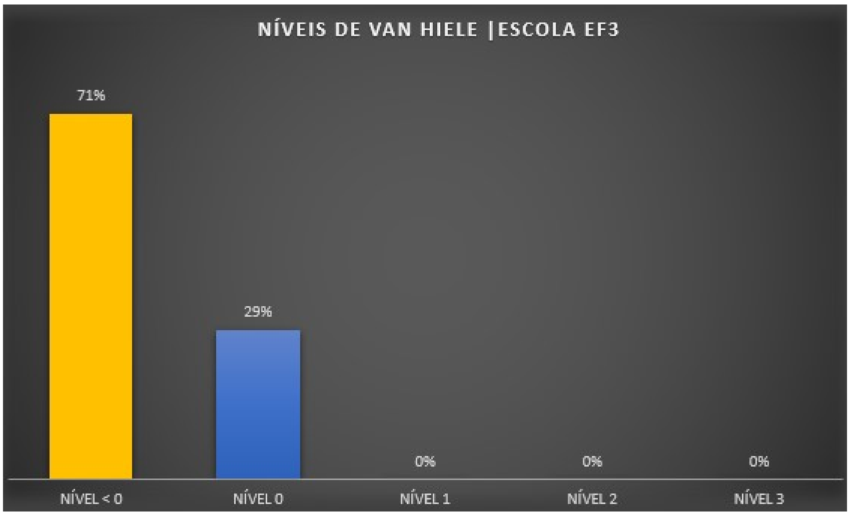


Figura 2.4: Tabulação das respostas dos alunos da EscolaEF3.

Avaliamos que ocorreu um equilibrado padrão de desempenho entre os estudantes da referidas escolas. Portanto, faremos a seguir uma análise considerando as três escolas de forma única. Dessa forma, observamos que entre as três escolas obtivemos 71% dos alunos fora dos níveis, ou seja, demonstrando desempenho muito insatisfatório, 26% no nível 0 e 3% no nível 1. Nenhum aluno se integrando a um nível superior a 1, segundo os parâmetros estabelecidos por esse Pré-Teste aplicado. Observe o gráfico de barras na Figura 2.5.

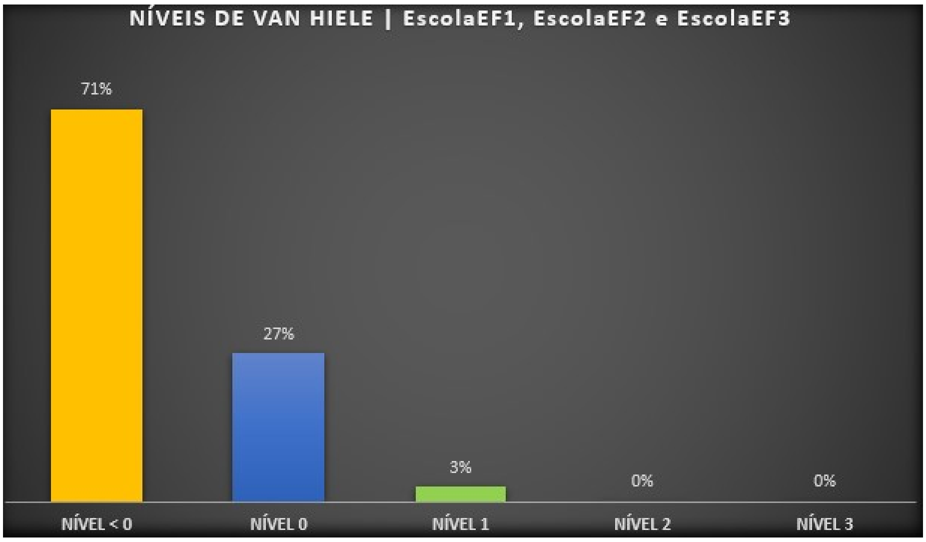


Figura 2.5: Tabulação reunida das respostas dos alunos das três escolas.

Como nossas expectativas eram que todos os alunos, ou pelo menos a maioria, acertassem as questões referentes ao nível 0, que é o Nível de Visualização, faremos uma análise das respostas obtidas para as primeiras questões do teste, pois acreditamos que analisando com cuidado essas dificuldades apresentadas pelos alunos conseguiremos planejar melhor o ano seguinte.

Análise do Pré-Teste: Nível 0 (Questões de 1 até 4)

Na Figura 2.6, temos a porcentagem de escolha para cada uma das alternativas ao lado do enunciado da primeira questão do teste.

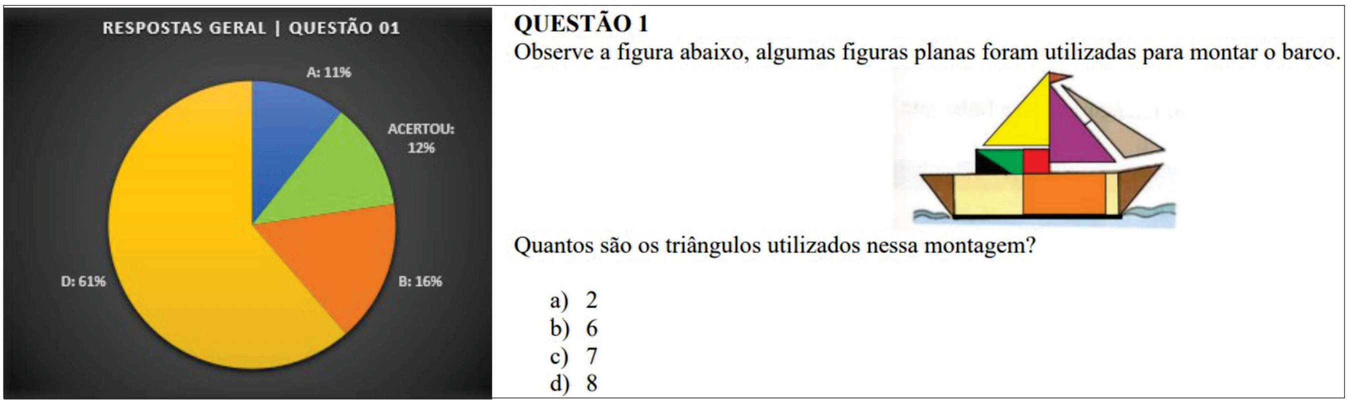


Figura 2.6: Tabulação da Questão 1 do Pré-Teste.

Observando as respostas da Questão 1, temos que apenas 12% dos alunos acertaram a questão, contando os 7 triângulos na imagem. Analisando que 61% dos alunos optaram pela alternativa d), contando na figura 8 triângulos, consideramos que isso acontece pela confusão entre triângulo e trapézio, acreditamos que o trapézio verde foi contabilizado como triângulo. Demonstrando assim que os alunos possuem dificuldade ainda de visualização e nomenclatura das figuras planas.

Na Figura 2.7, observamos que 40% dos alunos conseguiram visualizar os 6 quadrados.

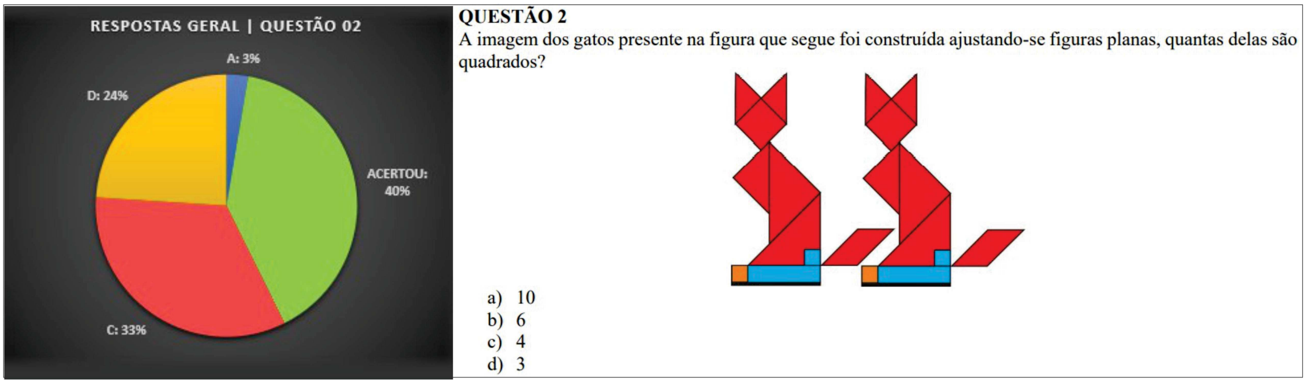


Figura 2.7: Tabulação da Questão 2 do Pré-Teste.

Consideramos que, alunos que responderam 10 quadrados realizaram o teste sem observação, os 33% que contaram 4 quadrados tiveram dificuldades em observar os quadrados rotacionados, e os 24% que optaram por 3 quadrados não tiveram a perpicássia de somar os quadrados das duas imagens.

Na Figura 2.8, podemos verificar a alta porcentagem de acerto, sendo essa de 68%.

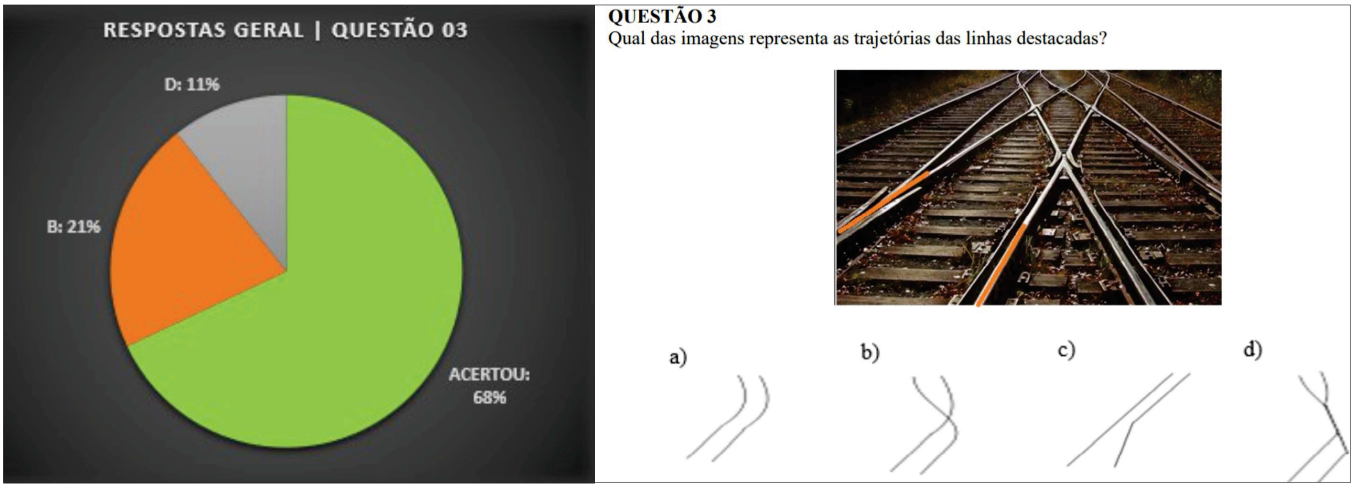


Figura 2.8: Tabulação da Questão 3 do Pré-Teste.

Mesmo sendo alta a porcentagem de acerto ainda é preocupante observar alunos que optaram pelas outras alternativas. As noções de paralelismo e o entendimento do deslocamento de pessoas e objetos se mostram noções pouco incorporadas a vivência do aluno.

Na Figura 2.9, temos a questão mais acertada do Pré-Teste, com uma taxa de acerto de 87%.

A porcentagem de acerto para essa questão evidencia que nas aulas de Geometria o

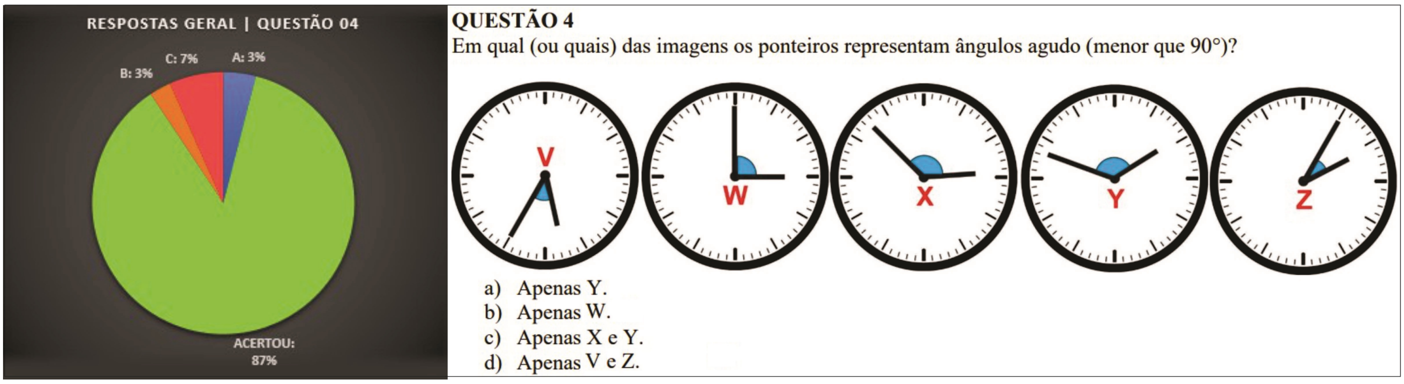


Figura 2.9: Tabulação da Questão 4 do Pré-Teste.

estudo de ângulos se mostrou um conceito bem incorporado ao entendimento do estudante.

Ao analisarmos as quatro questões em conjunto concluímos que será necessário iniciarmos os trabalhos no ano seguinte, primeiro ano do ensino médio, pelo Nível 0. Salientamos que a análise das demais questões que executamos reforçam a ideia de centrar esforços numa ação de intervenção referente ao nível zero.

2.2 Possíveis reflexos no ensino de Geometria relacionados à pandemia de COVID 19

É necessário observar que os alunos que responderam ao nosso pré-teste foram alunos que cursaram no ano de 2022 o 9° ano do Ensino Fundamental e em 2023 estão cursando o 1° ano do Ensino Médio. Portanto, são alunos que carregam os prejuízos da Pandemia, uma vez que no ano de 2021 as aulas no estado "voltaram" em setembro de forma não obrigatória e apenas em novembro de forma obrigatória, sem que houvesse a necessidade de avaliações, apenas focadas na exigência de carga-horária. Dessa forma, nossos respondentes cursaram o 8° ano de forma remota e o 7° ano que cursaram no ano de 2020 foi cursado presencialmente apenas até o dia 16 de março. Portanto, podemos concluir que temos alunos que passaram do 6° ano do Ensino Fundamental direto para o 9° ano sem um contato mais efetivo com os professores. Acreditamos na necessidade do contato presencial entre professor e aluno, sendo essa a possibilidade do professor "sentir" as dificuldades de entendimento de conceitos por parte dos alunos, explorar diversificadas metodologias e fazer as intervenções necessárias ao desenvolvimento de um ensino-aprendizagem de qualidade.

Considerando que o nosso principal foco de estudos é a Geometria, destacamos a seguir as seções apresentadas pelo Currículo Referência de Minas Gerais [22], para todos os anos do ensino fundamental no ano de 2022, da disciplina de Matemática porém enfatizando apenas a Geometria.

2.2.1 Recortes do Currículo Referência de Minas Gerias: Geometria

6°ano

Geometria	(EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.	Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas).
	(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.	Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados.

Geometria	(EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.	Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados.
	(EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.	
	(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.	Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e softwares.

Geometria	(EF06MA16X) Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono, com ou sem o uso de tecnologias digitais.	Plano cartesiano: associação dos vértices de um polígono a pares ordenados.
	(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.	Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas.
	(EF06MA23) Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.).	Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e softwares.

Figura 2.10: CRMG: Geometria para o 6° ano [22].

7°ano

Geometria	(EF07MA23) Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica.	Retas e ângulos. Retas. Semirreta e segmento de reta. Posições relativas entre duas retas. O ângulo e seus elementos. Medida de ângulo. Como medir um ângulo utilizando o transferidor. Ângulo reto, ângulo agudo e ângulo obtuso. Construção de um ângulo com o transferidor. Construção de alguns ângulos com um par de esquadros.
	(EF07MA55MG) Utilizar termos ângulo, retas paralelas, transversais e perpendiculares para descrever situações do mundo físico ou objetos.	

Figura 2.11: CRMG: Geometria para o 7° ano [22].

Geometria	(EF07MA19) Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro.	Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem.
	(EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.	
	(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.	Simetrias de translação, rotação e reflexão.
	(EF07MA52MG) Reconhecer o plano cartesiano.	Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem.
	(EF07MA53MG) Localizar pontos no plano cartesiano.	
	(EF07MA54MG) Representar um conjunto de dados graficamente no plano cartesiano.	

Geometria	(EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.	A circunferência como lugar geométrico.
	(EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.	Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos.
	(EF07MA25) Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas.	
	(EF07MA26) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.	
	(EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.	Ângulos internos e externos de um polígono. Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero.
	(EF07MA28) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.	Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero.

Geometria	(EF07MA56MG) Utilizar as relações entre ângulos formados por retas paralelas com transversais para obter a soma dos ângulos internos e externos de um polígono.	Ângulos internos e externos de um polígono Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero.

Figura 2.12: CRMG: Geometria para o 7° ano [22].

8°ano

Geometria	(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.	Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30°. Ângulos complementares e suplementares. Mediatriz e Bissetriz. Polígonos Regulares e suas propriedades.
	(EF08MA16) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso.	
	(EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.	
	(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.	Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação.
	(EF08MA34MG) Identificar segmento, ponto médio de um segmento, triângulo e seus elementos, polígonos e seus elementos.	Triângulos e suas propriedades. Baricentro, Ortocentro e Incentro. Congruência de triângulos. Propriedades dos quadriláteros.
	(EF08MA35MG) Reconhecer as propriedades do ponto de encontro das medianas (baricentro), alturas (ortocentro) e das bissetrizes (Incentro) de um triângulo.	
	(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.	

Figura 2.13: CRMG: Geometria para o 8° ano [22].

9°ano

Geometria	(EF09MA10) Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.	Semelhança de triângulos e Teorema de Tales. Ângulos complementares e suplementares. Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal. Teorema de Tales e suas aplicações na resolução de problemas.
	(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.	
	(EF09MA29MG) Reconhecer triângulos congruentes a partir dos critérios de congruência.	
	(EF09MA30MG) Resolver problemas que envolvam o teorema de Tales.	
	(EF09MA31MG) Utilizar semelhança de triângulos para descrever as relações métricas no triangulo retângulo.	Teorema de Pitágoras e suas aplicações na resolução de problemas. Relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo. Cálculo de seno, cosseno e tangente de ângulos notáveis de 30, 45 e 60 graus. Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais.
	(EF09MA32MG) Utilizar semelhança de triângulos para obter o teorema de Pitágoras.	
	(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.	
	(EF09MA33MG) Resolver problemas que envolvam as relações métricas no triângulo retângulo.	
	(EF09MA14A) Resolver problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.	
	(EF09MA14B) Elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.	

Figura 2.14: CRMG: Geometria para o 9° ano [22].

Geometria	(EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.	Distância entre pontos no plano cartesiano.
	(EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica.	Relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo.
	(EF09MA27MG) Identificar ângulos centrais e inscritos em uma circunferência.	
	(EF09MA28MG) Relacionar medidas de ângulos centrais, inscritos e arcos em uma circunferência.	
	(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.	Polígonos regulares.

Figura 2.15: CRMG: Geometria para o 9° ano [22].

Geometria	(EF09MA17) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.	Vistas ortogonais de figuras espaciais.

Figura 2.16: CRMG: Geometria para o 9° ano [22].

Analisando esse material de referência curricular para o ensino fundamental, podemos observar que ele contempla os pilares para um sólido curso de Desenho Geométrico, porém o projeto e a prática não se ajustam e lamentavelmente, mesmo antes da pandemia, o Desenho Geométrico já não era ensinado conforme as previsões do Currículo. Durante a pandemia o estudo foi norteado pelos *Planos de Estudo Tutorado (PET)*, que foram criados teoricamente baseados no Currículo de Referência, sendo que tivemos uma versão em 2020 [23] e outra versão em 2021 [24]. Existem diversas críticas a formulação dos PETs, a principal delas a ser destacada é o fato de as ações não contemplarem todos os alunos. A grande maioria dos alunos não conseguiram acesso online às aulas e apenas o recebimento de apostilas impressas, disponibilizadas pelo estado, não foram suficientes para que o aluno aprendesse sozinho. Relatos de colegas professores, que ministraram aulas para os alunos do 9° ano no ano de 2022, destacam que o currículo de Geometria não foi cumprido uma vez que a orientação prioritária foi de que se viesse a trabalhar com os alunos as operações básicas, tamanho eram o nível de despreparo e fragilidade educacionais demonstradas pelos estudantes.

CAPÍTULO 3

Definições dos grupos de controle e livre no âmbito do primeiro ano do Ensino Médio

3.1 Aplicação do pré-teste a estudantes do 1º ano do Ensino Médio

Logo no início do ano letivo de 2023 o mesmo teste aplicado aos alunos do 9° ano, (teste que pode ser visualizado no Anexo A.1) foi aplicado às turmas do 1° ano do ensino médio, sendo esse o público alvo objeto inicial de nossas análises. Embora a escola onde o teste foi aplicado abranja um total de 10 turmas de primeiro ano, sendo nove delas no período vespertino e uma no período noturno, o teste foi aplicado apenas para as quatro turmas de trabalho da orientanda pois seriam turmas com acesso facilitado para intervenções. O resultado das quatro turmas pode ser observado nas imagens abaixo, onde denominaremos as quatro turmas por 1° A, 1° B, 1° C e 1° D.

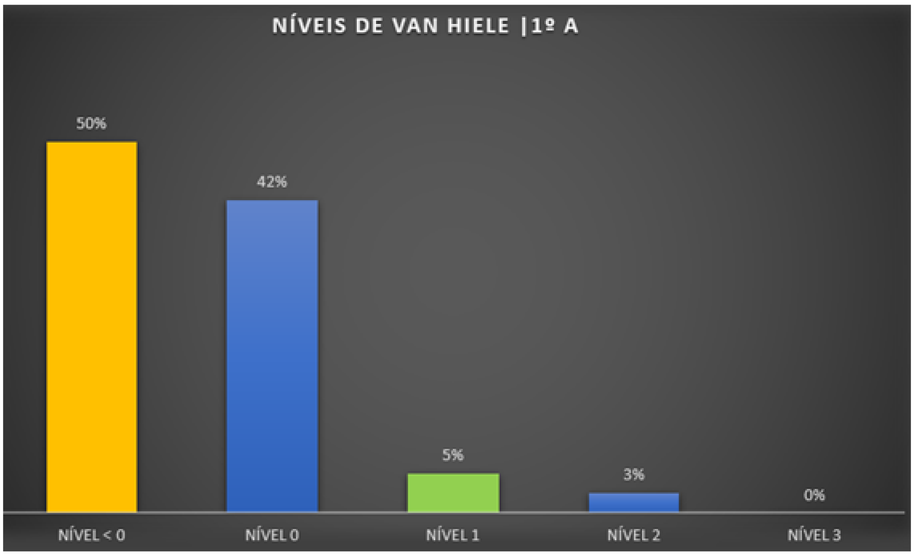


Figura 3.1: Gráfico de resultados do pré-teste - Turma: 1°A.

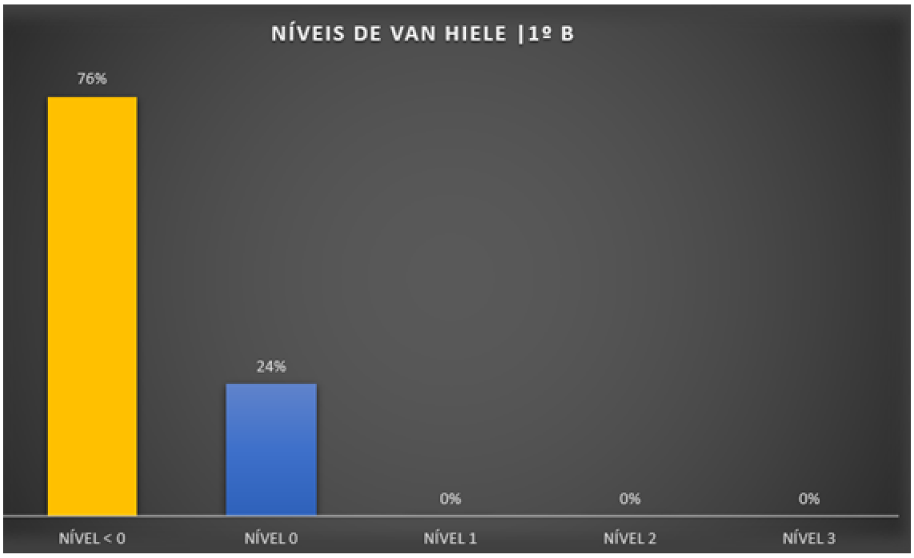


Figura 3.2: Gráfico de resultados do pré-teste - Turma: 1°B.

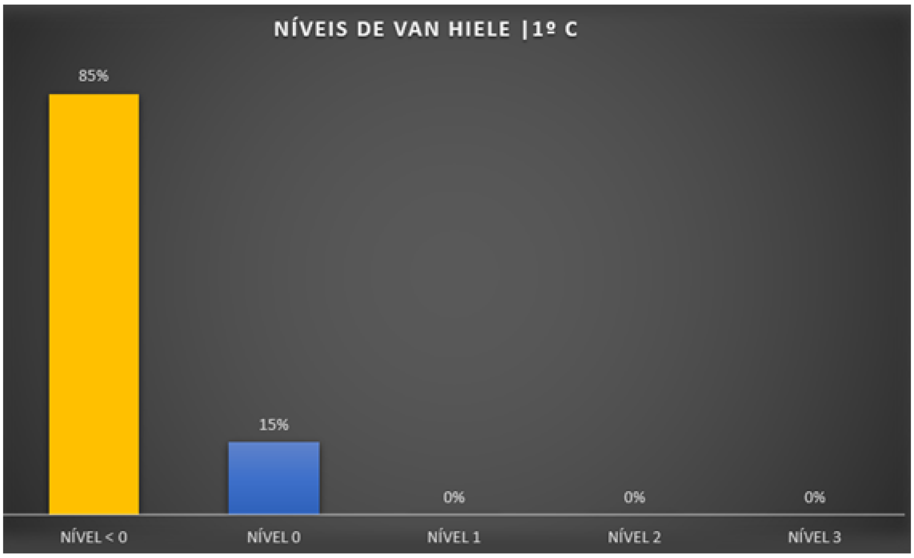


Figura 3.3: Gráfico de resultados do pré-teste - Turma: 1°C.

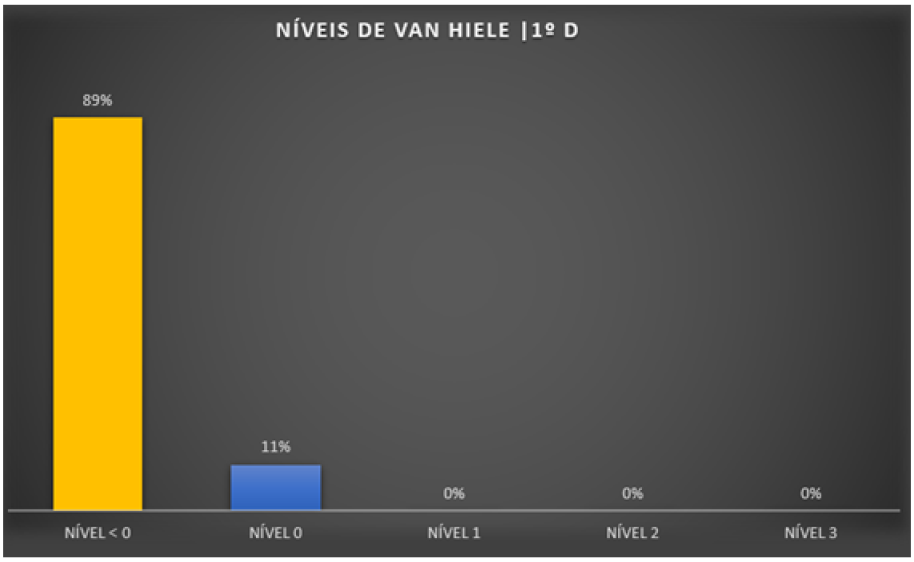


Figura 3.4: Gráfico de resultados do pré-teste - Turma: 1°D.

Embora com certa diferença observada na turma do 1°A, em relação ao teste aplicado aos alunos do 9° ano, continuamos verificando que grande parte dos alunos não conseguiram atingir o Nível 0 do modelo de Van Hiele, não sendo portanto enquadrados no Nível de Visualização.

3.2 Análises dos desempenhos no pré-teste, definições de grupos de controle e livre e escolhas programáticas recorrentes

É necessário enfatizar novamente, segundo os parâmetros que adotamos, que o estudante necessitava acertar três das quatro questões para ser enquadrado no nível 0. Na turma A, dos 38 alunos que responderam o teste, 19 conseguiram acertar no mínimo três das quatro questões propostas, enquanto isso na turma D, também tivemos 38 alunos respondendo ao teste, apenas 4 alunos conseguiram acertar pelo menos quatro questões. Sendo assim, vamos considerar a turma do 1° A como nossa turma livre, onde serão realizadas apenas atividades regulares, enquanto que na turma do 1° D, além dessas ações regulares, serão realizadas mais atividades de intervenção com o objetivo que a turma do 1° D apresente um nível de melhor desempenho em mapeamentos futuros.

Portanto, nossas análises definiram as nomenclaturas: a turma do 1°A será a turma livre e a turma do 1°D será a turma de controle.

Para efeito de esclarecimentos, vamos descrever um comparativo percentual dos acertos das primeiras quatro questões, que seriam as questões determinantes para o aluno ser enquadrado no Nível 0, para essas duas turmas.

3.2.1 Análise da 1ª questão

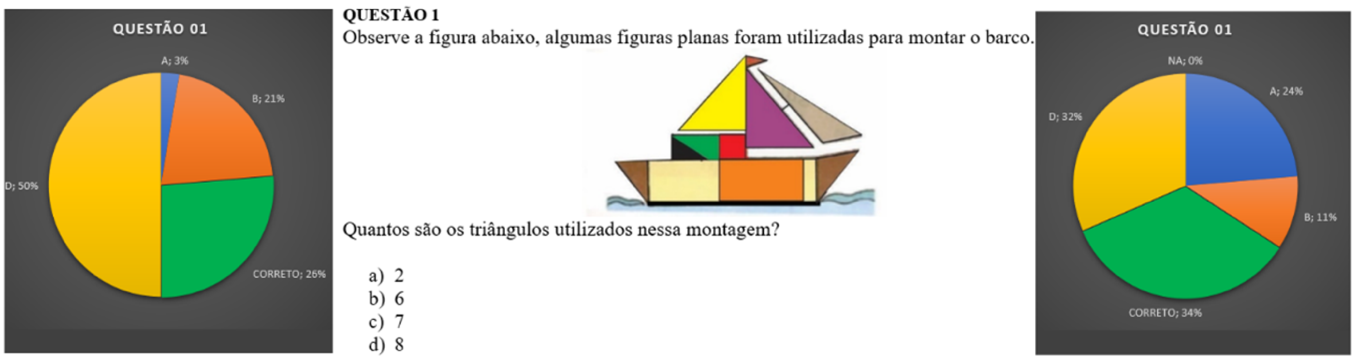


Figura 3.5: Análise da primeira questão, do lado esquerdo respostas do 1°A e do lado direito respostas do 1°D.

Ao analisar as respostas dos alunos constatamos que os alunos da turma D acertaram globalmente mais questões que os alunos da turma A, marcando a alternativa correta, sete triângulos. Destaca-se que metade dos estudantes da turma A e 32% dos alunos da turma D consideraram que a figura tinha 8 triângulos. Acreditamos que isso se dá pelo fato de que contaram o quadrilátero (trapézio) verde como um triângulo, um erro que não é esperado para alunos do ensino médio, comprovando a ausência de habilidades básicas de reconhecimento de formas geométricas. Por outro lado, conjecturamos que os alunos que marcaram a alternativa 2 criaram uma errônea analogia entre forma e cor, onde somente conseguem identificar equivalência entre os dois triângulos marrons. Por fim, o aluno que escolhe a letra b, seis, conjecturamos que isso pode acontecer por não cotar o menor triângulo (do topo) ou ainda por desconsiderar o triângulo na cor preta.

3.2.2 Análise da 2ª questão

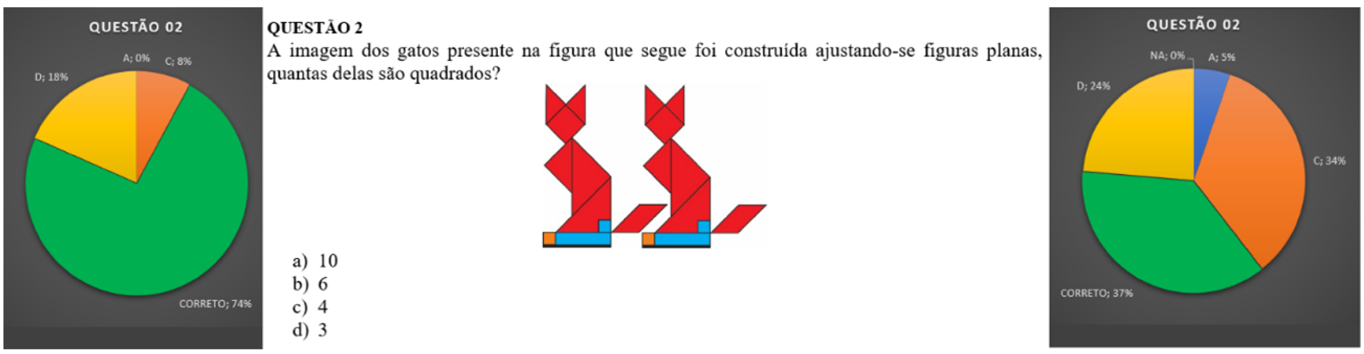


Figura 3.6: Análise da segunda questão, do lado esquerdo respostas do 1°A e do lado direito respostas do 1°D.

Durante a execução do teste muitos alunos chamaram o aplicador com dúvida na questão, para saber se é pra contar os quadrados de um ou dos dois gatos, e a resposta foi sempre que deveriam responder conforme considerassem correto. E é claro que o correto é contar os quadrados dos dois gatos, portanto ao somar todos os quadrados teríamos um total de 6 quadrados, alternativa b, encontrada por 74% dos alunos da turma A e por 37% dos alunos da turma D. Marcou a alternativa a, nenhum dos alunos da turma A e apenas 5% dos alunos da turma D, que pode ter sido uma resposta aleatória ou uma resposta por contar todos os quadriláteros que aparecem na figura: Para a alternativa c, 8% dos alunos da turma A escolheram e 34% da turma D, os alunos que optaram por essa alternativa não conseguiram visualizar o quadrado rotacionado (“a cabeça dos gatosȷ), a opção pela alternativa d foi escolhida por 18% dos alunos da turma A e 24% dos alunos da turma D, os alunos que fizeram essa opção contaram apenas um dos gatos.

3.2.3 Análise da 3ª questão

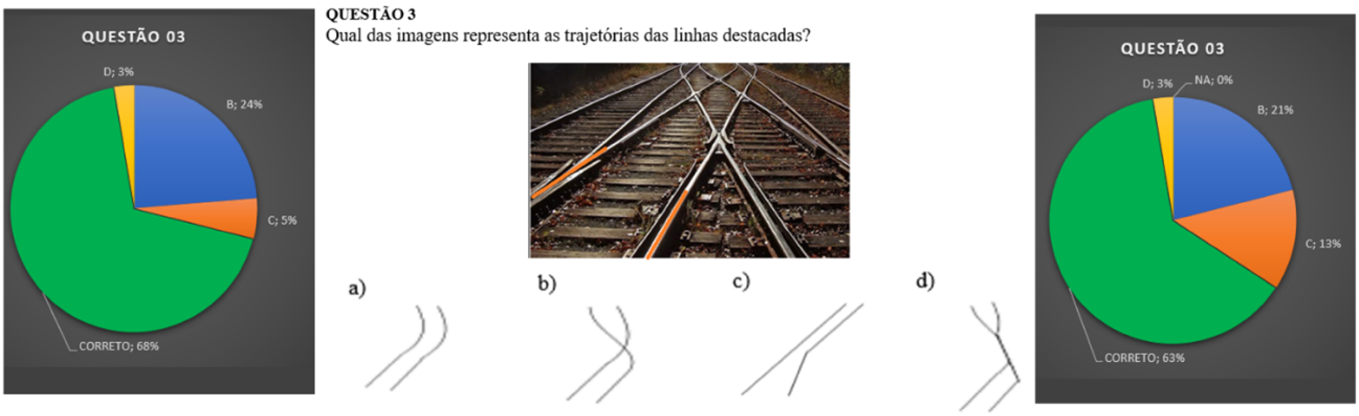


Figura 3.7: Análise da terceira questão, do lado esquerdo respostas do 1°A e do lado direito respostas do 1°D.

Considerando as quatro questões essa foi a questão com maior percentual de acerto entre as duas turmas, sendo 68% para a turma A e 63% para a turma D. Esses alunos tem a habilidade de identificar o conceito de paralelismo atrelado a vivência de caminho percorrido por um objeto (locomotiva).

3.2.4 Análise da 4ª questão

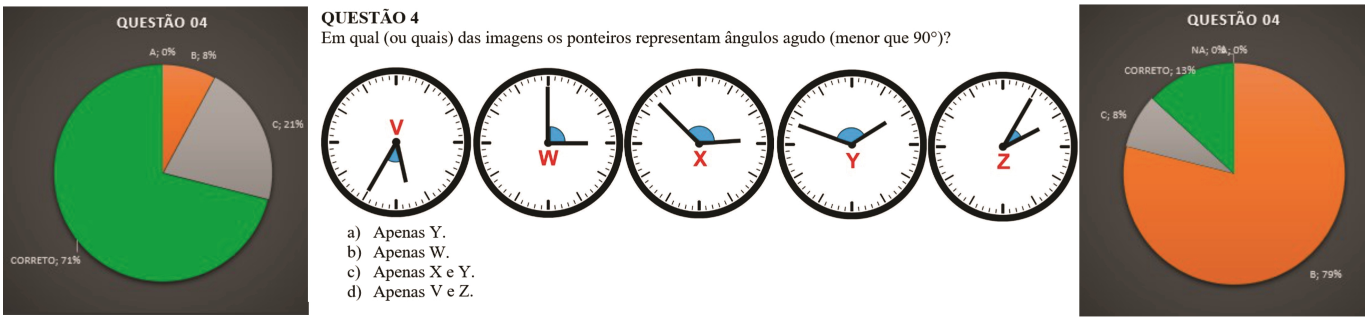


Figura 3.8: Análise da quarta questão, do lado esquerdo respostas do 1°A e do lado direito respostas do 1°D.

Para responder a quarta questão era necessário que o aluno soubesse a notação de ângulo, que de acordo com a legislação educacional vigente é de domínio dos estudantes do ensino médio. A questão aborda ângulo agudo, que o próprio texto já indicou ser ângulo menor que 90°. Ao fazer a análise dos gráficos de respostas observamos que 71% dos alunos da turma A, conseguiram perceber que os relógios denominados pelas letras V e Z estão indicando ângulos menores que 90°, ao passo que na turma D, talvez por falta de atenção 79% dos alunos marcaram o relógio W. O relógio W, indica o ângulo que mede exatamente 90°.

Diante do que foi observado nesse pré-teste, agregado ao nosso objetivo primário de trabalhar com os alunos com estímulos vinculados ao nível 0 do modelo de Van Hiele, com objetivo de que atinjam uma evolução ao longo dos níveis, iremos priorizar o reconhecimento de figuras planas, a identificação de ângulos e o estudo de triângulos e posições relativas entre retas. Destacamos que esses tópicos se constituem numa base fundamental para o estudo de conceitos geométricos no Ensino Médio.

CAPÍTULO 4

Atividades de intervenção formativa

4.1 Planejamento e elaboração de oficinas envolvendo construções geométricas

Ao realizar o pré-teste percebemos grande dificuldade dos alunos até mesmo no reconhecimento de figuras planas, então objetivamos desenvolver uma oficina pedagógica com esse fim e o mais próximo possível de atividades moldadas na matemática recreativa.

As oficinas foram realizadas seguindo o entendimento do modelo Van Hiele, o qual resgatamos aqui suas fases, retratadas na Figura 4.1.

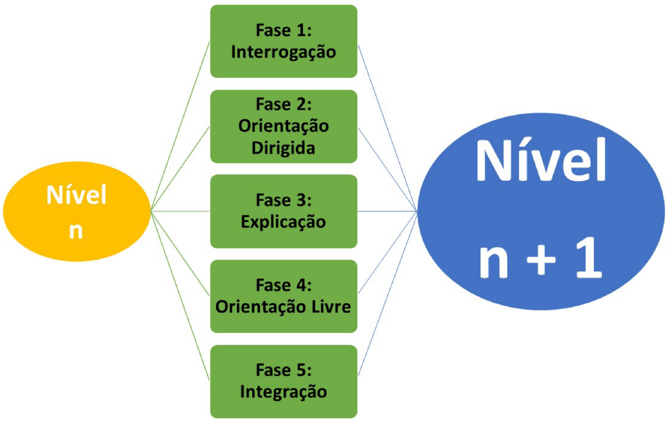


Figura 4.1: Fases do aprendizado segundo a Teoria de Van Hiele.

A oficina foi planejada para três semanas consecutivas com quatro aulas semanais. Portanto, o planejamento global envolveu um total de 12 horas-aula. Optamos por separar os objetivos de cada semana, a saber:

Atividade 1: Reconhecimento de figuras planas, área, perímetro, aplicações desses conceitos em artes, apresentação do geoplano.

Atividade 2: Enfase no conceito de paralelas e perpendiculares.

Atividade 3: Será abordado o conceito de ângulos com uso do transferidor.

Passaremos agora a descrever os elementos que vieram a compor cada uma dessas atividades. Destaca-se que esses elementos foram por nós elaborados e propostos. Podemos inferir que os mesmos podem servir como fontes de trabalho em sala de aula para outros professores.

4.1.1 Atividade 1

Aula 1

A atividade 1, se inicia de forma individual com os alunos recebendo individualmente a folha representada na Figura 4.2:

Na primeira atividade com o objetivo de retomar o conceito de área, utilizamos o GeoPlano e nele apresentamos figuras planas, determinamos um padrão e solicitamos a identificação dos padrões, e ainda interrogamos, instigamos um pensamento geométrico que permitiria identificar a quantidade de padrões existentes imagem.

Na segunda parte da atividade é explicado ao aluno o conceito de perímetro, e solicitado que identifique os perímetros das figuras apresentadas na imagem.

A última linha da atividade desafia o aluno a calcular o perímetro da primeira imagem, sendo que será necessário para isso uso do Teorema de Pitágoras.

O planejamento para essa atividade é que os alunos tentem resolver por 10 minutos de forma indivídual e depois permitiremos mais 10 minutos de forma coletiva, em grupos de 4 alunos, com objetivo de compararem as respostas.

Terminando esse primeiro momento será distribuído nos grupos a folha Figura 4.3, juntamente com uma folha no tamanho A3, régua e compasso.

O objetivo dessa segundo momento é que os alunos identifiquem em grupo algumas figuras e treinem o uso de régua e compasso. Para esse segundo momento destinaremos mais trinta minutos, o que termina a primeira aula.

Nessa primeira aula o papel do professor será muito importante nos grupos, uma vez que é necessário direcionar e auxiliar para que atinjam o objetivo, embora o primeiro interesse seja cumprir a Fase 1 de Van Hiele com o objetivo de Interrogação, onde a principal intenção

ATIVIDADE 1 – AULA 1 – Parte 1

1. Considerando o padrão destacado abaixo, com lados medindo 1 unidade de comprimento, identifique em quantos padrões o “interior” de cada uma das figuras planas apresentadas se decompõe.

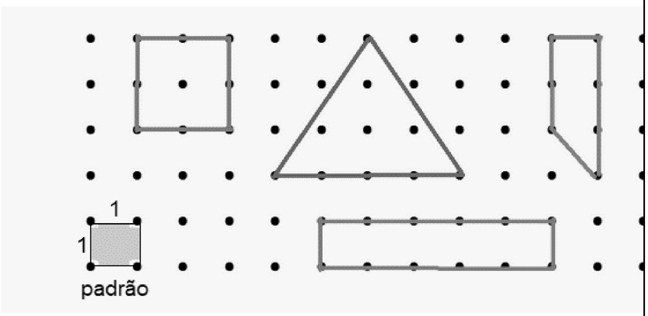


Figura 1

Tente utilizar **desenho geométrico** para auxiliar a sua visualização relativamente ao triângulo.

2. Utilizando o mesmo padrão acima descrito e observando que uma figura plana em geral divide o ambiente onde está desenhada em uma região limitada e outra ilimitada, podemos entender a “fronteira” entre essas duas regiões como o contorno da figura.

Identifique o “perímetro” (quantidade de unidades de comprimento do contorno da figura), relativamente a medida do lado do nosso padrão, das figuras que seguem:

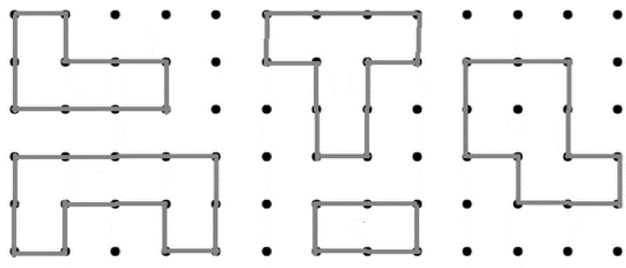


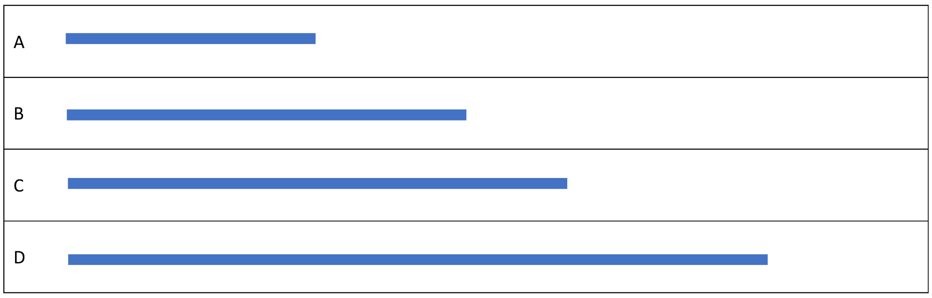
Figura 2

Observe que todos os valores encontrados serão números naturais. Imagine uma forma de abordar, com construções auxiliares via desenho geométrico, esses mesmos cálculos para as figuras planas descritas na Figura 1.

Figura 4.2: Atividade 1 - Aula 1 - 1ª Parte

Atividade 1 – Aula 1 – Parte 2

Observe os segmentos:



Realize cada uma das construções listadas abaixo na folha A3, coloque dentro de cada construção o seu número correspondente. Na folha A3, escreva o nome de todos os integrantes do grupo.

1) Construa um triângulo utilizando os segmentos A, B e C.
2) Construa um triângulo retângulo sendo o segmento C sua hipotenusa, e o segmento B um dos catetos.
3) Construa um trapézio sendo que uma das suas bases é o segmento D, a outra base o segmento B, e os outros dois lados não paralelos devem ser formados pelo segmento A.
4) Construa um quadrado sabendo que a sua diagonal é dada pelo segmento A.
5) Construa dois retângulos distintos que tenham o perímetro equivalente ao segmento D.
6) Construa um retângulo, um quadrado e um triângulo que tenham o mesmo perímetro, sendo esse perímetro igual a 24 centímetros.

Figura 4.3: Atividade 1 - Aula 1 - 2ª Parte.

é perceber as potencialidades e dificuldades dos alunos com o conteúdo.

Aula 2

O objetivo da aula 2 é que os alunos percebam que figuras com mesmo perímetro em geral possuem áreas diferentes e nessa aula já obordamos as nomeclaturas área e perímetro. Sendo portanto uma aula que contempla a Fase 3 de Van Hiele, será uma aula expositiva. Onde o primeiro momento é realizado no Data-Show com os slides que podem ser visualizados na Figura 4.4. Toda a aula 2, pode ter seu entendimento resumido na proposta: *Construa um retângulo, um quadrado e um triângulo que tenham o mesmo perímetro, sendo esse perímetro igual a 24 centímetros*. Que é a última atividade da aula 1, atividade *6) Construa um retângulo, um quadrado e um triângulo que tenham o mesmo perímetro, sendo esse perímetro igual a 24 centímetros.*

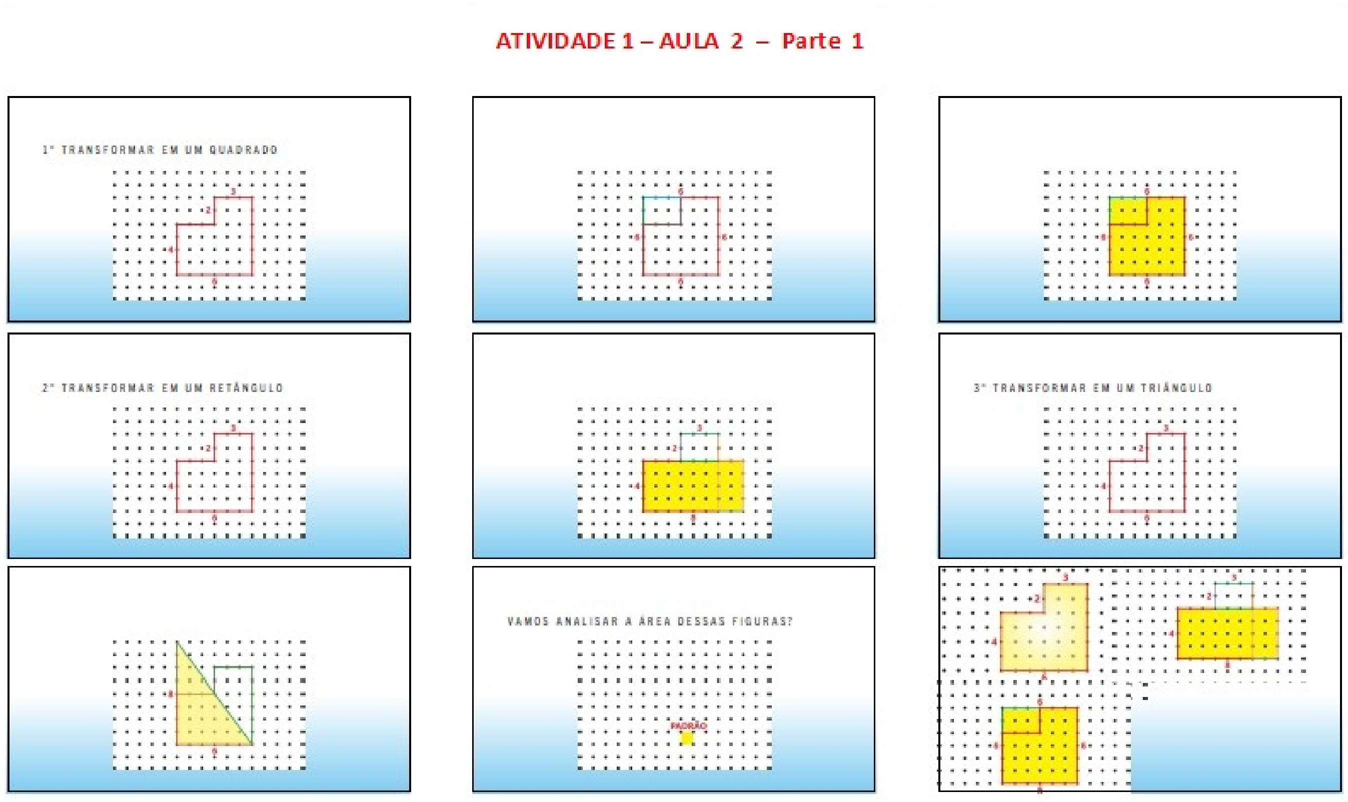
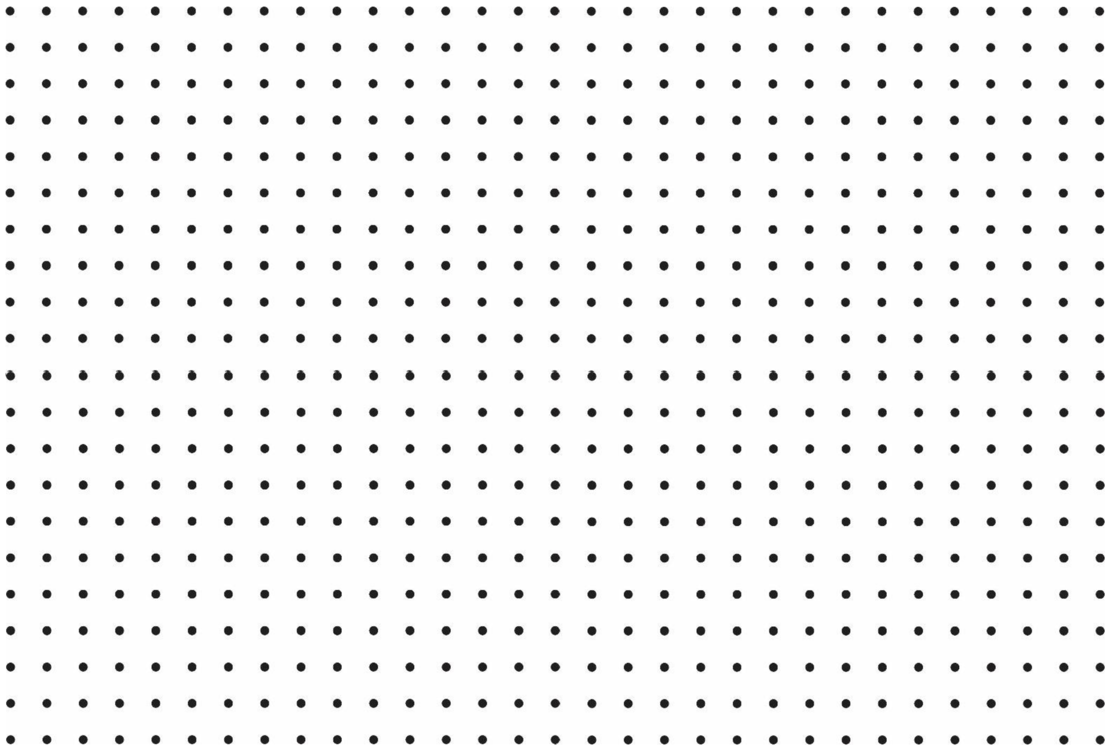


Figura 4.4: Atividade 1 - Aula 2 - 1ª Parte.

Após o momento de explicação, partimos para a Fase 4 de Van Hiele com Orientação Livre, entregamos para cada aluno a atividade da Figura 4.5.

Atividade 1 – Aulа 2 – Parte 2

Nome:



Atividade: Faça construções de figuras planas que possuem o mesmo perímetro, porém possuem áreas diferentes, (no mínimo quatro figuras diferentes)

- 1° passo: Determine qual será o valor do seu perímetro;
- 2° passo: Faça a constatação de que o valor das áreas é diferente. Deixe os valores registrados aqui embaixo.

Figura 4.5: Atividade 1 - Aula 2 - 2ª Parte.

O objetivo da atividade da Figura 4.5 é que os alunos desenhem figuras no geoplano, todos com um perímetro que não pode ser o 24, que foi o apresentado, porém todas as figuras devem possuir o mesmo perímetro e posteriormente fazer o cálculo da quantidade de padrões (área) de cada figura.

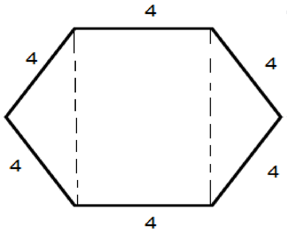
Aula 3

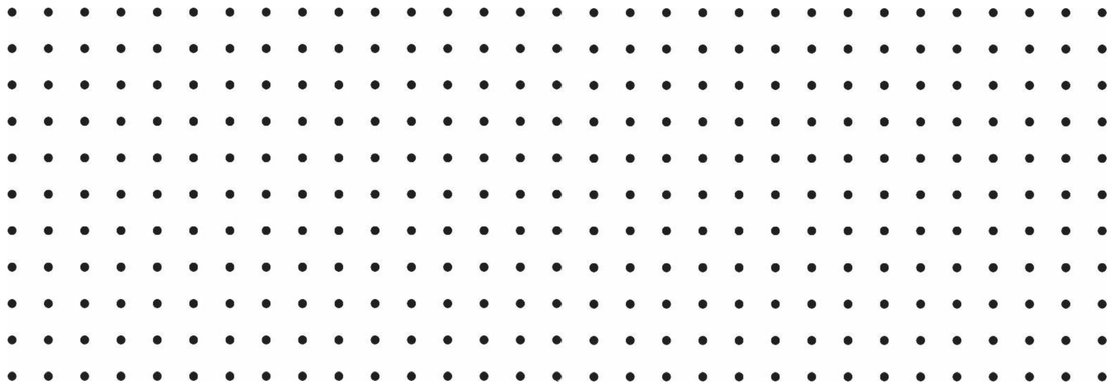
A terceira aula foi iniciada com os alunos recebendo a Figura 4.6.

Atividade 1 – Aula 3 – Parte 1

Nome:

Observe a figura abaixo, faça sua representação no Geoplano.





Atividade 1 – Aula 3 – Parte 3

Figura 4.6: Atividade 1 - Aula 3 - 1ª e 3ª Parte.

A folha deve ser entregue sem nenhuma orientação e aguardar 10 minutos.

Após eles realizarem a construção da figura no GeoPLANO, solicitar que tentem transformar a figura em um retângulo mantendo a quantidade de padrões (área) e aguardar mais 10 minutos.

Em seguida, solicitar que tentem determinar a área do retângulo, construído, e depois sentem-se em grupos com o objetivo de verificarem as construções dos colegas e fazerem comparações entre as áreas. Pois o retângulo pode ser construída de formas diferentes.

O objetivo final dessa aula é que os alunos tenham a ideia de retas paralelas, perpendiculares, bissetriz e mediatriz. A estratégia aqui, agora, segue todas as fases de Van Hiele em um única aula.

Após os alunos fazerem a construção da primeira figura no Geoplano é apresentado para eles uma sequência de imagens no Data-Show, montado na própria sala de aula enquanto eles realizam a atividade, projetadas sobre o quadro. A sequência de imagens do Data-Show e a ideia final pode ser visualizada nas Figura 4.7 e Figura 4.8.

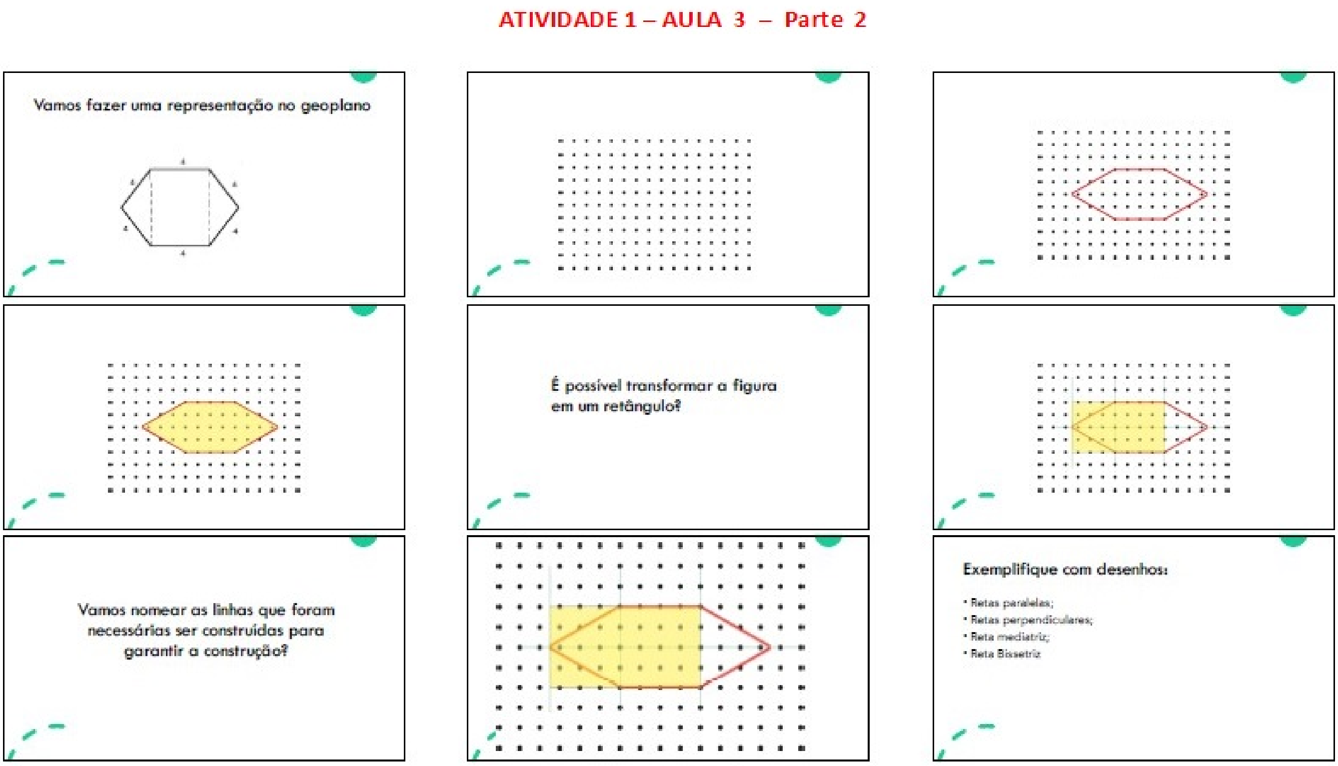


Figura 4.7: Atividade 1 - Aula 3 - 2ª Parte.

Na Figura 4.7, temos a sequência de imagens apresentada no Data-Show.

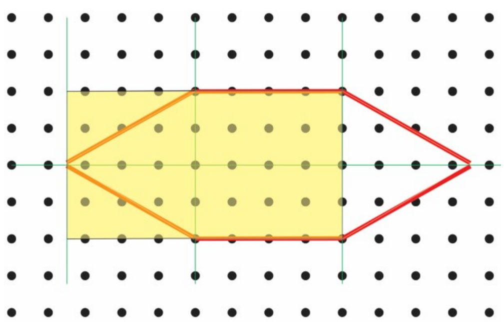


Figura 4.8: Atividade 1 - Aula 3 - 2ª Parte - Evidenciando figura principal.

A Figura 4.8, é apresentada no Data-Show com projeção sobre o quadro e as retas que auxiliam na desconstrução do hexágono para transformação em retângulo são construídas e evidenciadas com pincel sobre a figura. E nesse momento é necessário informar aos alunos o nome dessas retas que vão sendo construídas.

Em seguida é solicitado a eles que voltem a folha da Figura 4.6, para realizar o terceiro momento da aula que consiste em fazer o esboço das retas: Paralelas, perpendiculares, mediatriz e bissetriz.

Aula 4

ATIVIDADE 1 – AULA 4

Nome:

Observe a obra artística de Bárbara Schubert Spanoudis (1980), que tem como título TRIÂNGULOS.

Se fossemos reproduzir os desenhos desses triângulos destacados, revisando as construções exploradas nas últimas aulas, construa um registro das construções necessárias para se atingir essa reprodução.

Figura 4.9: Atividade 1 - Aula 4.

A intenção principal da aula 4, é realizar a Fase 5 de Van Hiele que consiste no conceito de Integração: De acordo com a teoria, nesse momento o professor não faz nenhuma interferência, apenas solicita a conclusão para poder identificar se o aluno está pronto para o próximo nível, e assim foi feito através da atividade da Figura 4.9.

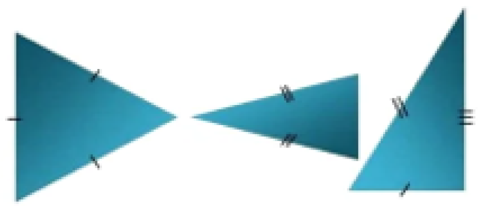
Nessa atividade optamos por trazer como inspiração uma obra de arte, uma vez que percebemos tanto uso da Geometria nas artes e assim podemos ampliar os horizontes desses alunos.

4.1.2 Atividade 2

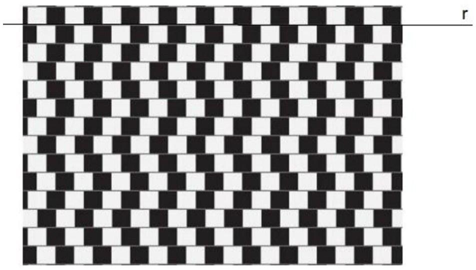
Aula 1

ATIVIDADE 2 – AULA 1 – PARTE 1

1. O que você entende ser um triângulo equilátero. Visualmente poderia identificá-lo?



2. Observe a reta horizontal r na figura que segue. Identifique quantas outras retas horizontais são paralelas a r.



3. (Ilusão ótica de Ponzo) Os segmentos de retas A e B são paralelos, as retas *t* e *h* são perpendiculares a *r* e *s*. É correto afirmar que o segmento A é maior do que o segmento B?

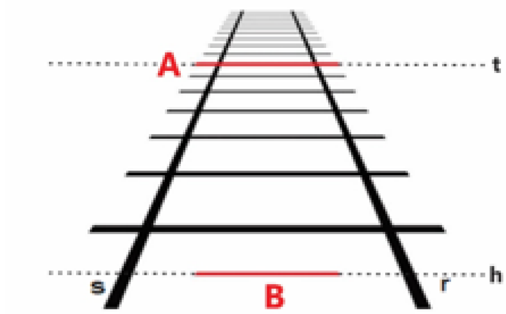


Figura 4.10: Atividade 2 - Aula 1 - 1ª Parte.

O primeiro momento dessa nova atividade inicia com a entrega aos alunos da Figura 4.10. Essa atividade deve ser desenvolvida de forma individual nos primeiros 10 minutos e depois mais 15 minutos em duplas. Pensando nessa atividade como a Fase 1 de Van Hiele, não é realizada intervenção pelo professor nesse primeiro momento.

Estando os alunos ainda em posse da folha, fazer a apresentação da atividade em Data-Show com objetivo de correção. A sequência de slides pode ser observada na Figura 4.11. Esse momento é caracterizado pela Fase 2 de Van Hiele.

Solicitar que refaçam suas respostas. Tempo estimado de 15 minutos. Aqui já caracteriza a Fase 3 de Van Hiele.

ATIVIDADE 2 – AULA 1 – Parte 2

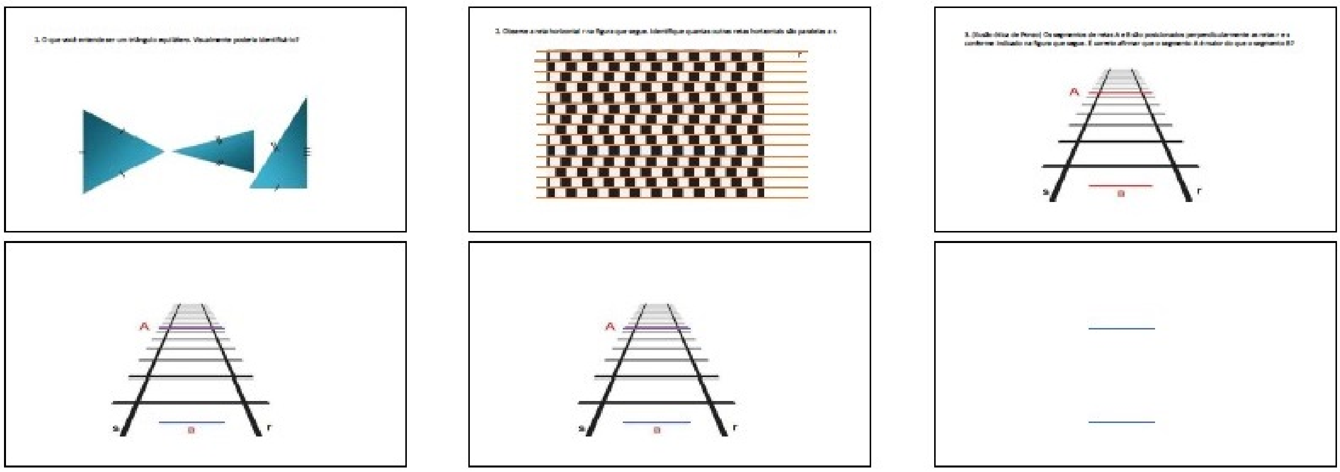
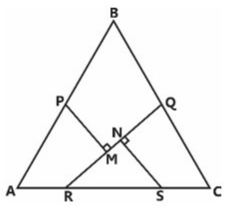


Figura 4.11: Atividade 2 - Aula 1 - 2ª Parte.

Em seguida após os alunos realizarem as correções, devem utilizar o restante do horário de forma individual, porém os alunos permanecem sentados em dupla. Entregar uma folha em branco e o direcionamento para realizarem a construção, do triângulo conforme as orientação da Figura 4.12. Essa atividade é caracterizada pela Fase 4 de Van Hiele.

ATIVIDADE 2 – AULA 1 – PARTE 3

1) No papel cartão, escreva seu nome, em seguida:
   a) Construa um triângulo equilátero ABC sabendo que a medida dos seus três lados é igual a 16 cm.
   b) Utilizando régua e compasso faça a decomposição do triângulo equilátero ABC em quatro partes conforme segue:



As quatro partes serão obtidas de forma que $\overline{AP} = \overline{BP}$, $\overline{CQ} = \overline{BQ}$, $\overline{AR} = 1/4\ \overline{AC}$, $\overline{CS} = 1/4\ \overline{CA}$ e PM e SN são perpendiculares a RQ.

Figura 4.12: Atividade 2 - Aula 1 - 3ª Parte.

Observe portanto que em uma única aula foi possível seguir quatro passos do método de Van Hiele.

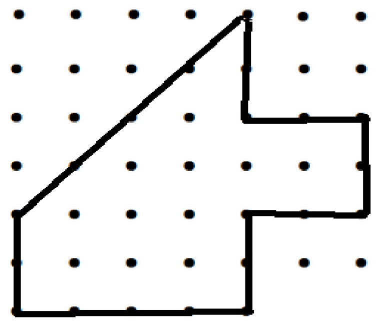
Aula 2

A segunda aula deve ser iniciada solicitando que os alunos estejam em trios, eles recebem a Figura 4.13, de forma individual. Tempo estimado para realização da atividade 30 minutos.

Pensando na teoria de Van Hiele, durante os primeiros 10 minutos o professor não faz interferência, permanecendo os alunos na Fase 1, decorridos os primeiros 10 minutos o professor anda entre os alunos fazendo pequenas observações e permitindo que os alunos concluam a atividade corrigindo os erros. Estando portanto na Fase 2. Decorridos os trinta minutos destinados a atividade o professor faz uma correção geral estando portando na Fase 3.

ATIVIDADE 2 – AULA 2 – PARTE 1

1) Utilizando desenho geométrico promova uma divisão da figura, construindo um quebra-cabeça de duas peças idênticas.



2) Considere as retas paralelas r e s.

a) Construa um círculo tangente simultaneamente a r e s.

r

s

b) Construa um triângulo equilátero cujos vértices estão sobre essas retas.

r

s

c) Construa um triângulo retângulo isósceles cujos vértices estão sobre essas retas.

r

s

Figura 4.13: Atividade 2 - Aula 2 - 1ª Parte.

Em seguida, devolve aos alunos o papel da atividade que foi realizada anteriormente (Figura 4.12, solicita que recortem as 4 partes formadas e tentem montar um retângulo com elas, solicita a descrição do que observam que garantiu a possibilidade da construção. Aqui estamos na Fase 4 de Van Hiele.

Para finalizar o professor monta um triângulo em EVA, seguindo a construção (Figura 4.12, e o apresenta pregando na parede e discutindo de forma coletiva a construção. Pode ser que essa construção fique para a Aula número 3.

Aula 3

Levar impresso em tamanho A3, a obra de Arte Composition A de Piet Mondrian de 1923 (Figura 4.14). Apresentando as diversas possibilidades e alcances da Geometria.

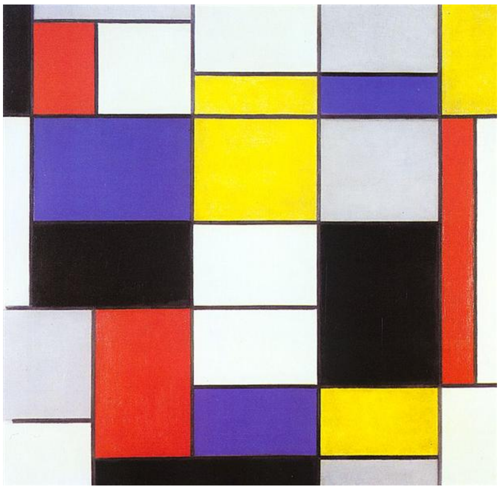


Figura 4.14: Atividade 2 - Aula 3.

Escrever no quadro a frase: "dividir uma circunferência em quatro partes iguais e traçar os quadrados inscrito e circunscrito", solicitar que realizem essa atividade em uma folha.

Apresentar a imagem criada em tamanho A3 (Figura 4.15), como inspiração, em seguida solicitar que utilizando a divisão feita na construção anterior façam uma obra de arte.

Figura 4.15: Atividade 2 - Aula 3.

Aula 4

Distribuir para os alunos a folha Figura 4.16. Os primeiros 10 minutos deverão ser pensados de forma individual, depois mais 10 minutos para pensarem em grupos de 4 alunos.

Nome:

ATIVIDADE 2 – AULA 4 – PARTE 1

Considere que as paralelas r e s correspondam as margens de um rio e os pontos A e B estão em lados opostos desse rio. Elabore construções geométricas de forma a determinar a posição de uma ponte PQ perpendicular às margens (com $P \in r$ e $Q \in s$) de forma que o percurso AP + PQ + QB seja o menor possível. No verso da folha descreva sua construção.

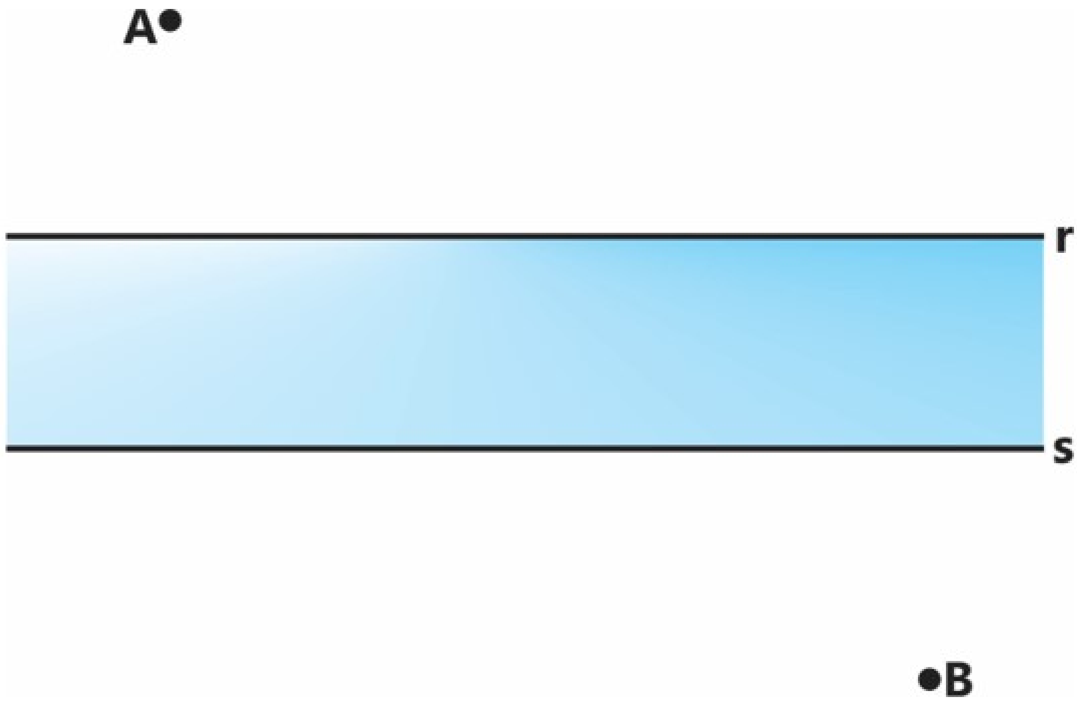


Figura 4.16: Atividade 2 - Aula 4 - 1ª Parte.

Em seguida apresentar a solução da atividade, iniciando com possíveis construções que levariam a um caminho maior e realizando as medições, e terminando com a solução do menor caminho.

Para finalizar a quarta aula, apresentar a Figura 4.17 e fazer instigações. Sendo que essa etapa caracteriza a Fase 5 de Van Hiele, porém com intuito de que a Atividade 2 não ultrapasse quatro aulas essa coleta de respostas será feita apenas de forma oral e coletiva.

Figura 4.17: Atividade 2 - Aula 4 - Final.

4.1.3 Atividade 3

Aula 1

A terceira atividade será iniciada no Data-show, com a apresentação de algumas imagens instigantes de transferidores. Esses slides podem ser visualizados na Figura 4.18.

Figura 4.18: Atividade 3 - Aula 1 - 1ª e 2ª Parte.

No último slide será feito a solicitação de participação na Nuvem de Palavras, sendo solicitado para cada aluno a digitação de 4 palavras.

A professora deverá também acessar o site e digitar para aparecer na Nuvem as palavras: ângulo agudo, ângulo obtuso, ângulo reto, ângulo raso.

Em seguida a nuvem deverá ser disponibilizada, para que todos vejam o resultado e será solicitado à alunos distintos que expliquem cada palavra. Tempo estimado: 20 minutos.

Toda essa primeira parte de visualização quanto a nuvem de palavras consiste na Fase 1: Interrogação e Informação da Teoria de Van Hiele.

Para o segundo momento será entregue para cada aluno um transferidor e a folha representada na Figura 4.19, e solicitado que sentem em grupos de 3 alunos. Será necessário orientar alguns trios. Nesse momento estamos realizando a Fase 2: Orientação dirigida.

Quando terminarem, solicitar que refaçam a soma dos ângulos internos dos triângulos e registre o valor na folha. Tempo estimado: 30 minutos

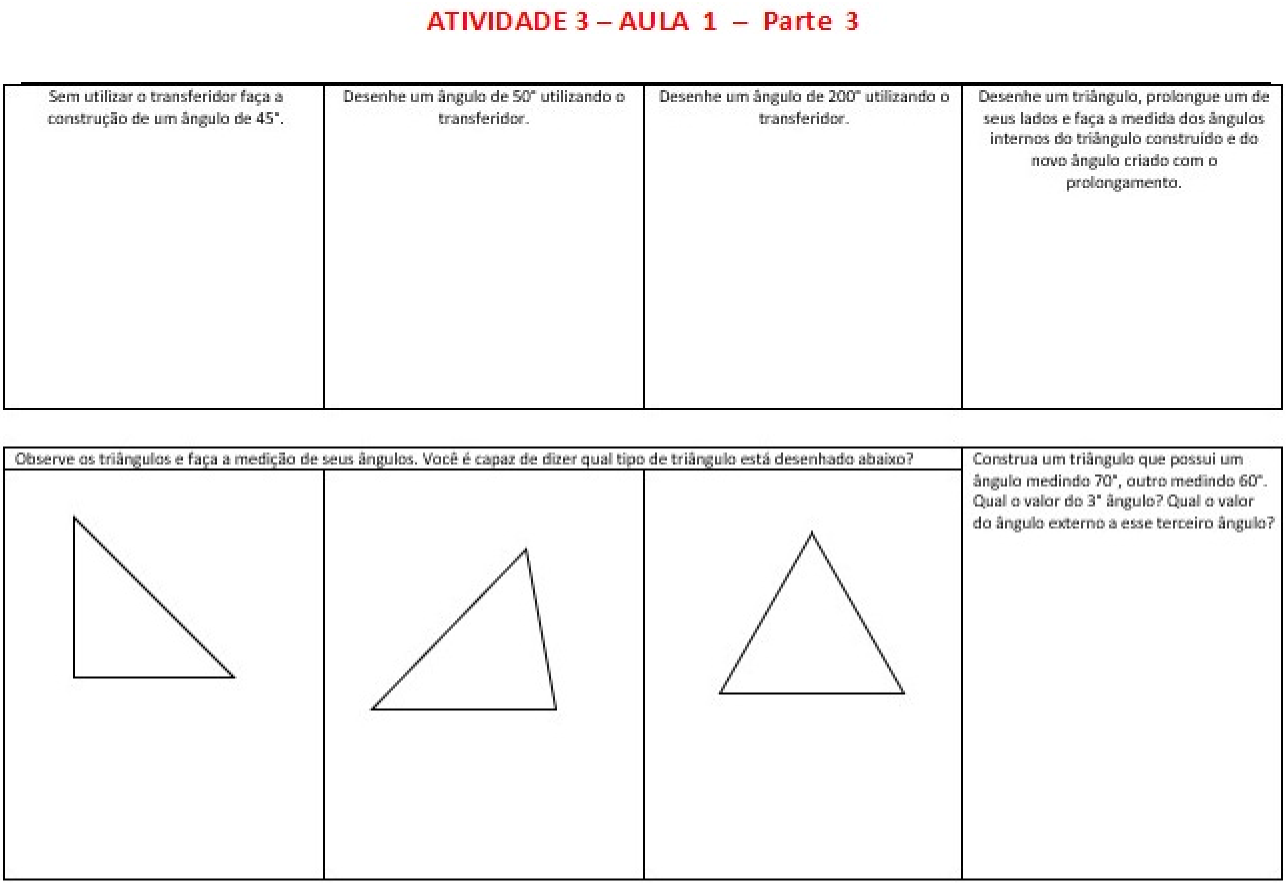


Figura 4.19: Atividade 3 - Aula 1 - 3ª Parte.

Aula 2

Entregar para cada aluno um transferidor, régua e compasso e a folha de Atividade representada na Figura 4.20, essa atividade deverá ser realizada de forma individual. Tempo estimado: 30 minutos.

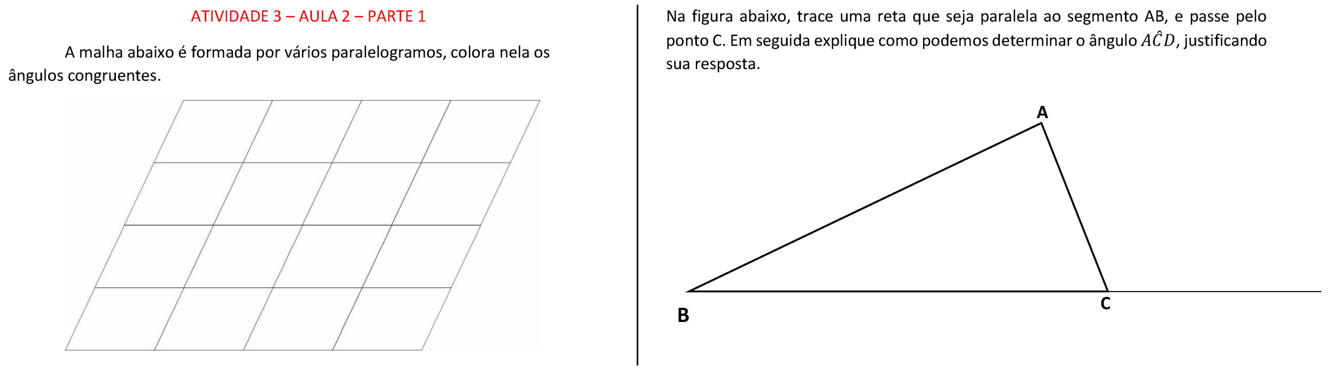


Figura 4.20: Atividade 3 - Aula 2 - 1ª Parte.

Para sequência da atividade será feita no Datashow a projeção do slide presentes na Figura 4.21. Com respostas coletivas orais e eventuais intervenções feitas pela professora.

Essa etapa consiste na Fase 3: Explicação, de acordo com a Teoria de Van Hiele.

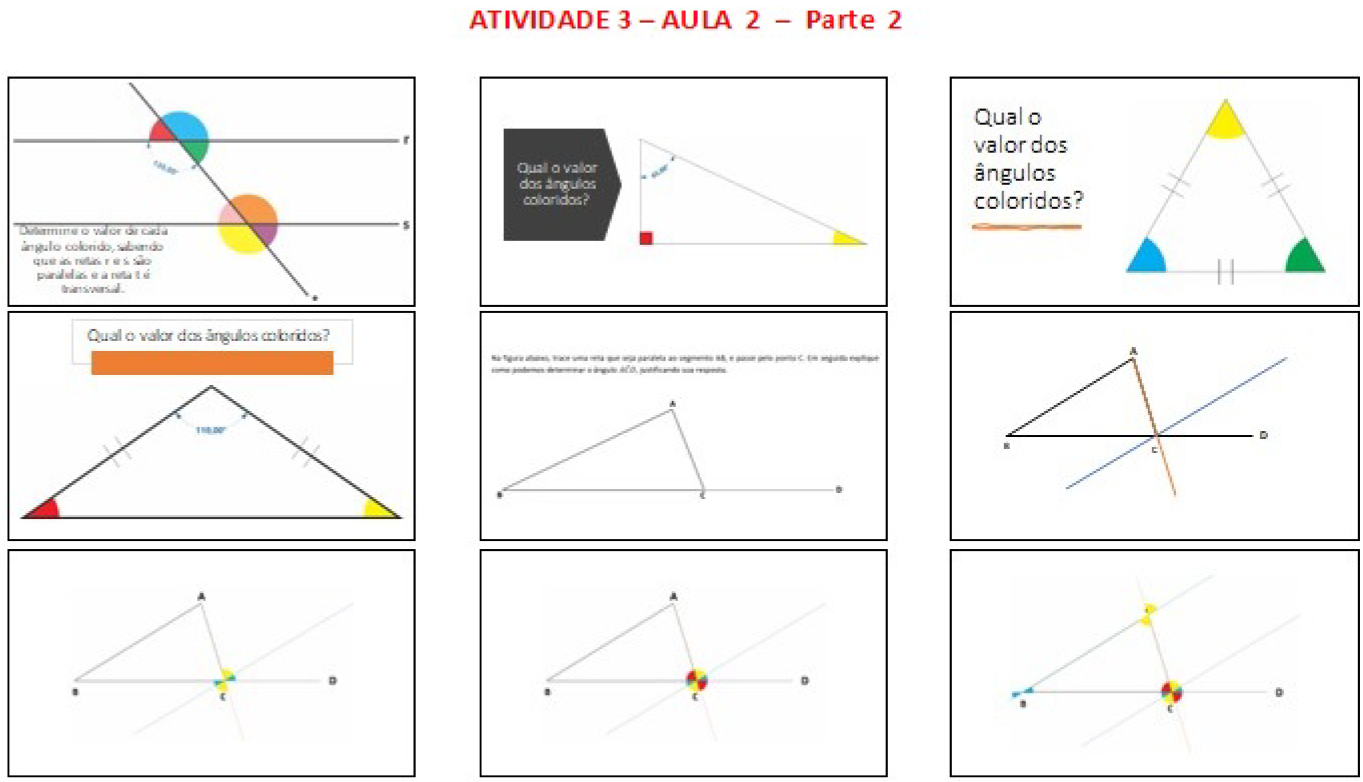


Figura 4.21: Atividade 3 - Aula 2 - 2ª Parte.

Aula 3

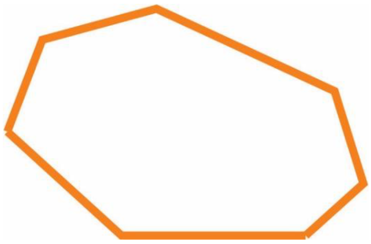
Solicitar que os alunos se organizem em duplas. Cada aluno deve estar de posse de uma régua, um compasso e um transferidor. E, receberam de forma individual a Figura 4.22.

Essa etapa é referente a Fase 4: Orientação Livre, segundo a teoria de Van Hiele.

Tempo estimado em dupla 30 minutos e posteriormente mais 20 minutos para as duplas compararem suas respostas.

ATIVIDADE 3 – AULA 3 – PARTE 1

Qual a soma dos ângulos internos da figura abaixo?



É possível responder sem uso do transferidor? Por quê?

Assuma que na elaboração do projeto do monumento descrito na Figura 1, o arquiteto tenha considerado o esboço geométrico, presente na Figura 2, para projetar as angulações da parte destacada (com a flecha).

Figura 1

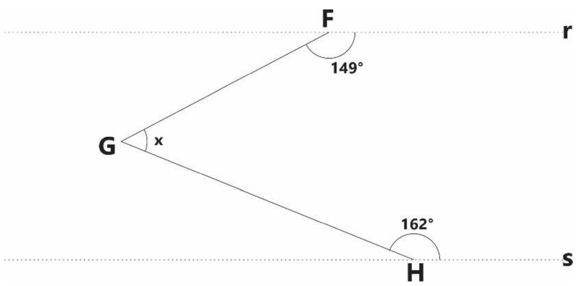


Figura 2

Sabendo que as retas r e s são paralelas, qual o valor do ângulo x?

Figura 4.22: Atividade 3 - Aula 3.

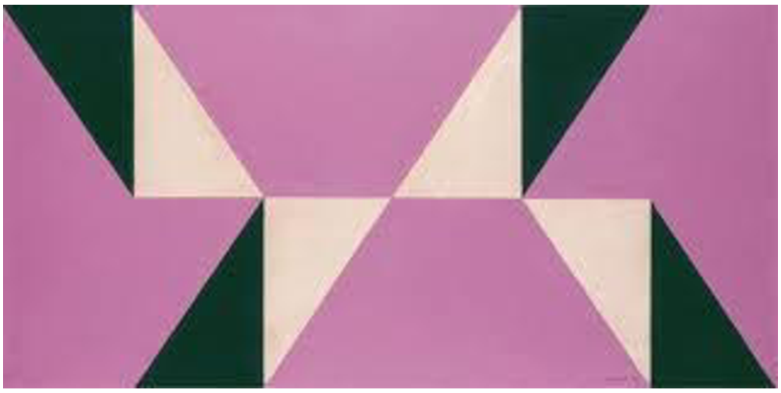
Aula 4

Entregar individualmente a atividade presente na Figura 4.23.

Sendo que nesse momento estaremos concluíndo as fases da teoria de Van Hiele, com a Fase 5: Integração.

ATIVIDADE 3 – AULA 4 – PARTE 1

Luiz Sacilotto (1924-2003) foi um importante pintor, escultor e desenhista brasileiro. Observe a sua obra que tem como título: Concreção 6048, pintada em 1960.



Observando essa imagem é possível observar vários estudos que realizamos nos últimos dias. Descreva esses estudos.

Se julgar necessário utilize régua, compasso e transferidor para as suas justificativas, utilizando os instrumentos sobre a imagem e explicando o que observou abaixo.

Figura 4.23: Atividade 3 - Aula 4.

4.2 Detalhamento do processo de aplicação das atividades projetadas

Todas as atividades foram realizadas com a turma escolhida e detalhada no capítulo 3, como turma de controle.

4.2.1 Atividade 1

Aula 1

O tempo planejado para essa atividade não foi o suficiente, os alunos precisaram de todo um horário para realizar a primeira parte da atividade, a primeira folha (Figura 4.2). O primeiro motivo para o atraso foi que a sala dos alunos é composta por cadeiras de braço, que considero não ser a melhor opção para atividades em grupos, portanto nos dirigimos para a sala que é composta por mesas e cadeiras, como na escola não são todas as salas que são compostas por mesas, e no turno existem salas ociosas, solicitamos uma sala para realização das aulas de Desenho Geométrico, sendo portanto que nessa sala temos mesas e cadeiras para todos os alunos e temos um armário com material. Só para a mudança de sala gastamos uns cinco minutos do horário. Posteriormente percebi que passados os primeiros dez minutos de forma individual eles ainda não tinham nem terminado a leitura, foi necessário destinar mais 10 minutos. Ao sentarem em grupo precisaram de mais tempo ainda, pois perceberam que principalmente em relação ao triângulo as respostas estavam muito divergentes, e nesse momento já foi necessário entrar na Fase 2 de Van Hiele, e fazer orientações principalmente relembrando o Teorema de Pitágoras. Dessa forma foi gasto os 50 minutos para a atividade pois mesmo os alunos que terminaram optaram por ajudar os grupos que ainda estavam com dificuldades.

Apresentarei agora algumas imagens devolutivas dessa atividade. Na Figura 4.24 podemos observar que, o que foi solicitado foi alcançado. É necessário salientar que, mesmo com intervenções direcionadas alguns alunos não conseguiram concluir a atividade conforme desejado.

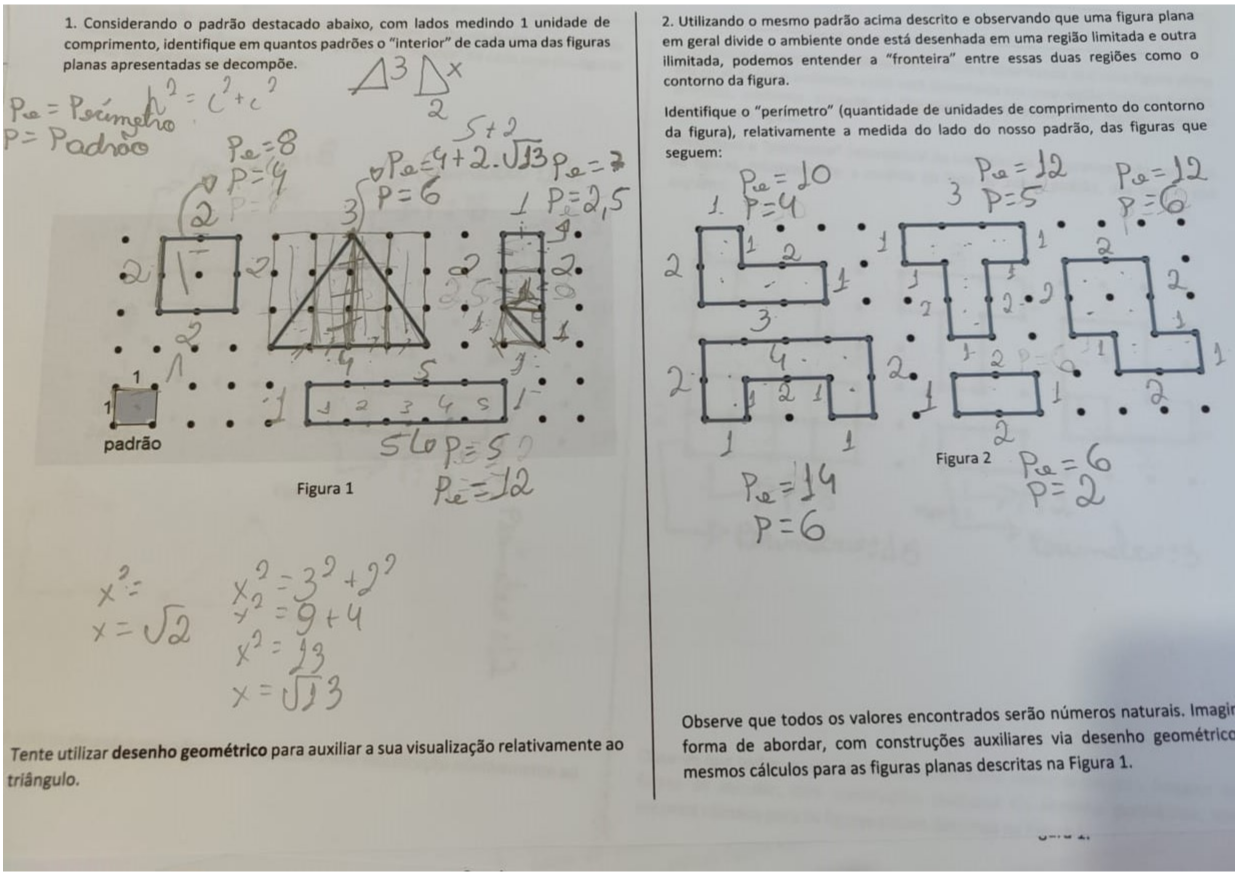


Figura 4.24: Atividade 1 - Aula 1 - 1ª Parte - Devolutiva dos alunos.

As duas atividades da aula 1 foram realizadas no mesmo dia e para cada uma foi gasto 50 minutos. Acredito que, o que gerou essa necessidade de tempo foi realmente a dificuldade inerente e o fato da atividade ser realizada em grupo, em grupo os alunos tendem a se dispersarem mais. A Figura 4.25 é uma devolutiva da atividade 1, segunda parte.

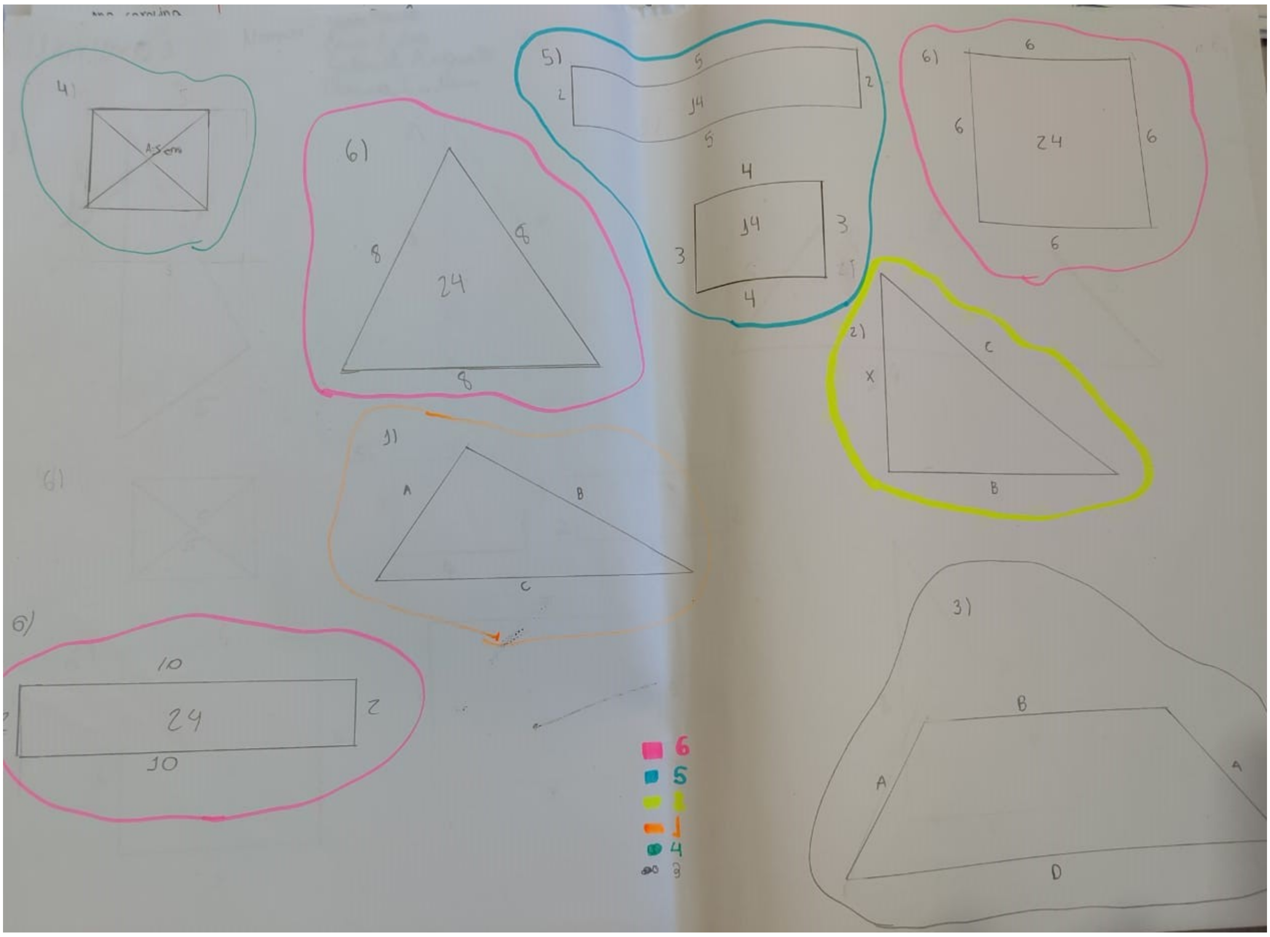


Figura 4.25: Atividade 1 - Aula 1 - 2ª Parte - Devolutiva dos alunos

Mesmo tendo sido gasto mais tempo do que o esperado, esse primeiro dia de atividades foi realizado com sucesso pois, os alunos tiveram grande interesse pela atividade. Principalmente quando pensamos no quanto os alunos hoje são desmotivados, perceber todos trabalhando com a intenção clara em acertar a atividade foi muito importante.

Aula 2

Essa aula foi realizada na sala de vídeo da escola, onde as cadeiras são do tipo longarinas, para o uso do Data-Show, com a intenção de fazer a exposição dos slides apresentados na Figura 4.4. Para a continuação da atividade optei pela permanência dos alunos nessa sala, devido à proximidade. A folha com a atividade da Figura 4.5, foi entregue de forma individual, já havia solicitado que eles fossem para a sala de vídeo com um caderno para apoio e estojo. As duas figuras são resultados dessa atividade, Figura 4.26 e Figura 4.27.

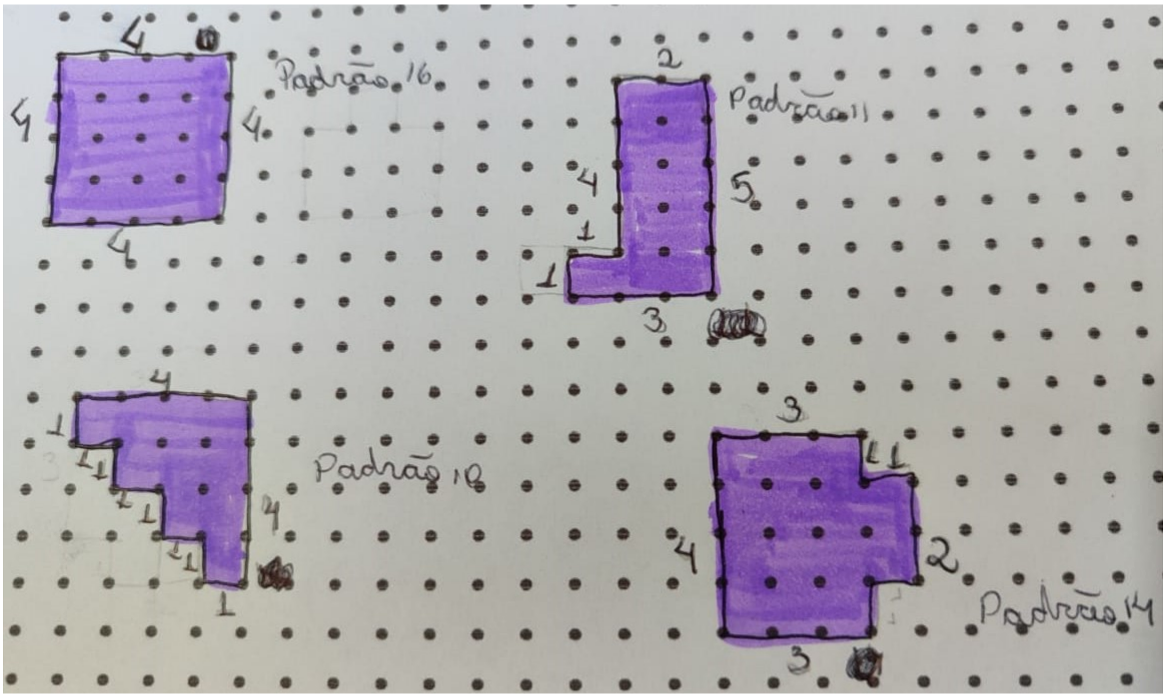


Figura 4.26: Atividade 1 - Aula 2 - 2ª Parte - Devolutiva dos alunos.

Na Figura 4.26, percebemos que o aluno optou pelo perímetro de 16 e fez o cálculo da quantidade de padrões.

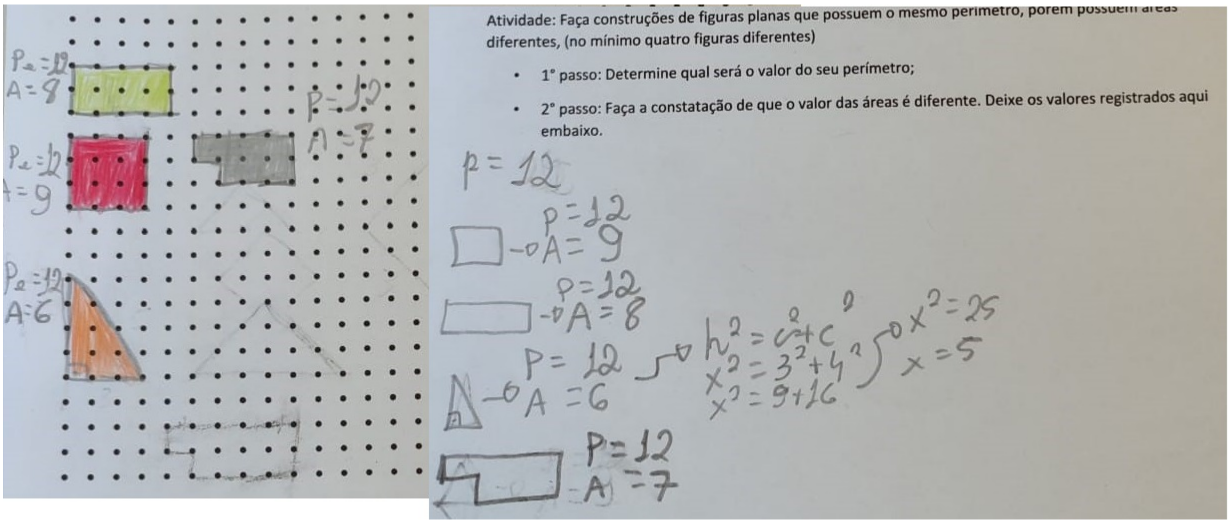


Figura 4.27: Atividade 1 - Aula 2 - 2ª Parte - Devolutiva dos aluno.s

Na Figura 4.27, percebemos que o aluno optou pelo perímetro de 12 e fez o cálculo da quantidade de padrões. Além de ter feito uma relação com as atividades anteriores optando por fazer um triângulo, onde foi necessário realizar o cálculo da hipotenusa.

Considero que essa atividade foi riquíssima pois os alunos realmente construíram e visualizaram que embora mantendo o perímetro a área não se mantém.

Aula 3

A aula 3, foi realizada conforme descrito na seção anterior. E os resultados podem ser observados nas Figura 4.28 e Figura 4.29.

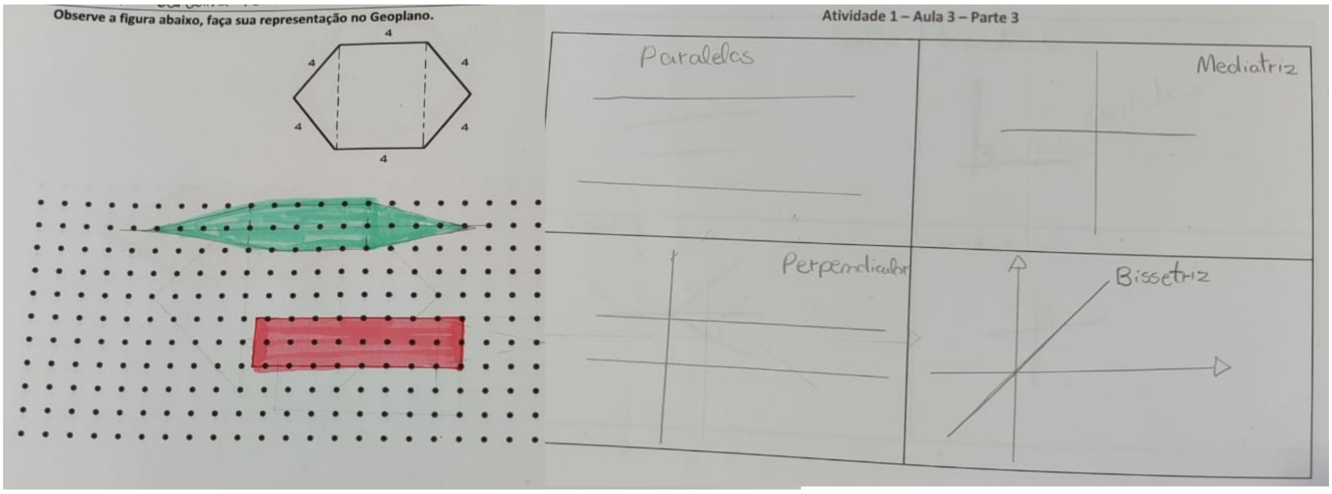


Figura 4.28: Atividade 1 - Aula 3 - Devolutiva dos alunos

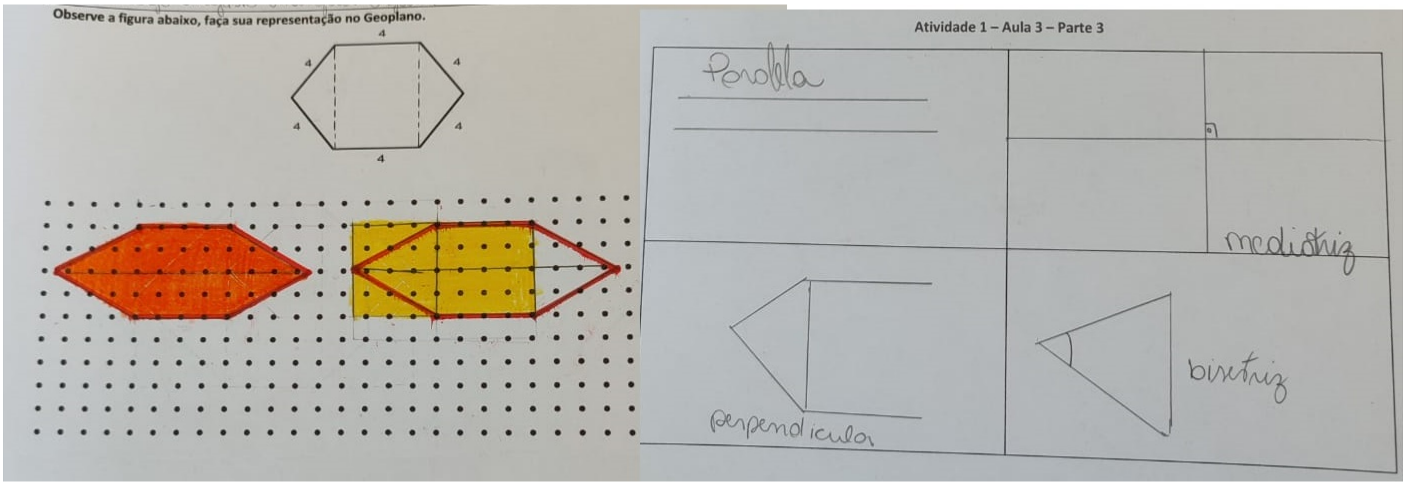


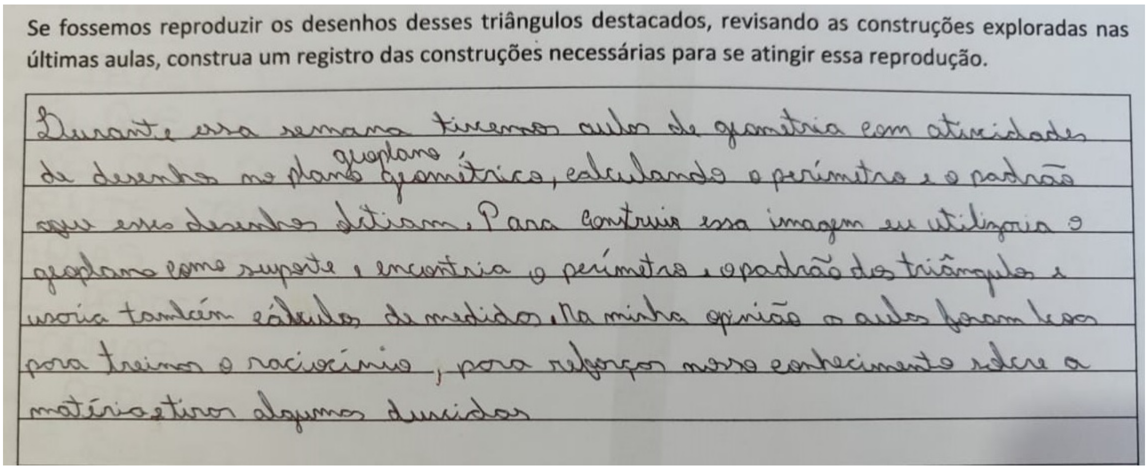
Figura 4.29: Atividade 1 - Aula 3 - Devolutiva dos alunos

A melhor parte dessa atividade foi perceber os comentários dos alunos ainda fazendo referências a aula dois. Foi possível perceber que embora o perímetro fosse o mesmo realizaram a construção com áreas diferentes.

Considero que entenderam a ideia das posições relativas entre as retas, porém como para muitos a nomeclatura estava sendo ouvida pela primeira vez tiveram mais dificuldades em associar o nome a cada tipo de reta, foi necessário realizar a explicação mais de uma vez e repetir de forma individual para alguns.

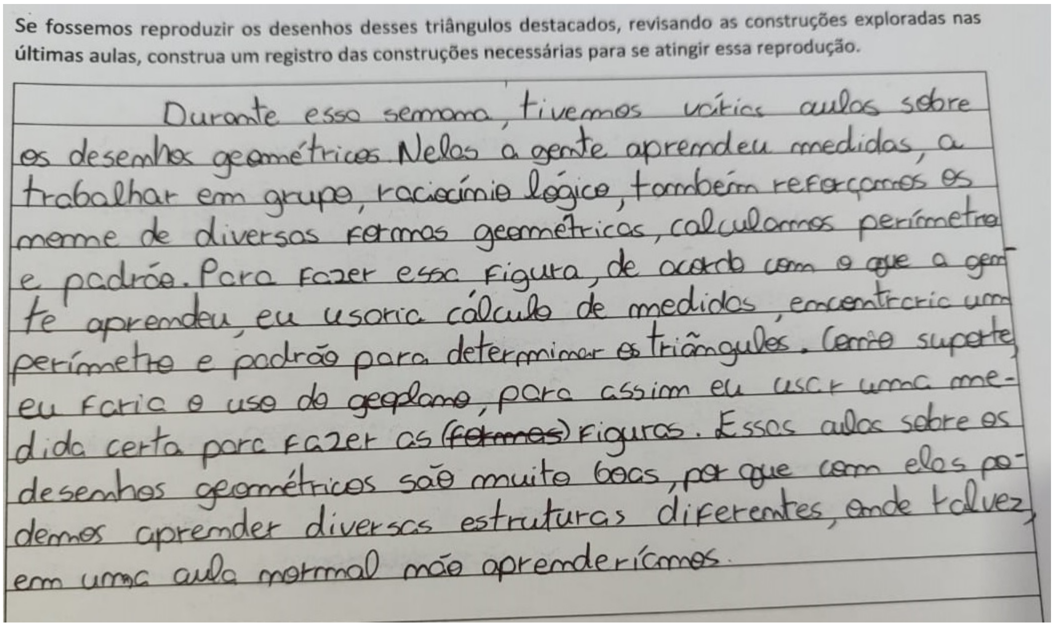
Aula 4

A folha representada na Figura 4.9, foi entregue para os alunos e foi fantástico ler as conclusões deles sobre essa sequência de atividades. Se não fosse ficar exagerado, gostaria de apresentar aqui todas as devolutivas, mas optei por deixar aqui registrado três que estão nas Figura 4.30, Figura 4.31 e Figura 4.32.


Se fossemos reproduzir os desenhos desses triângulos destacados, revisando as construções exploradas nas últimas aulas, construa um registro das construções necessárias para se atingir essa reprodução.

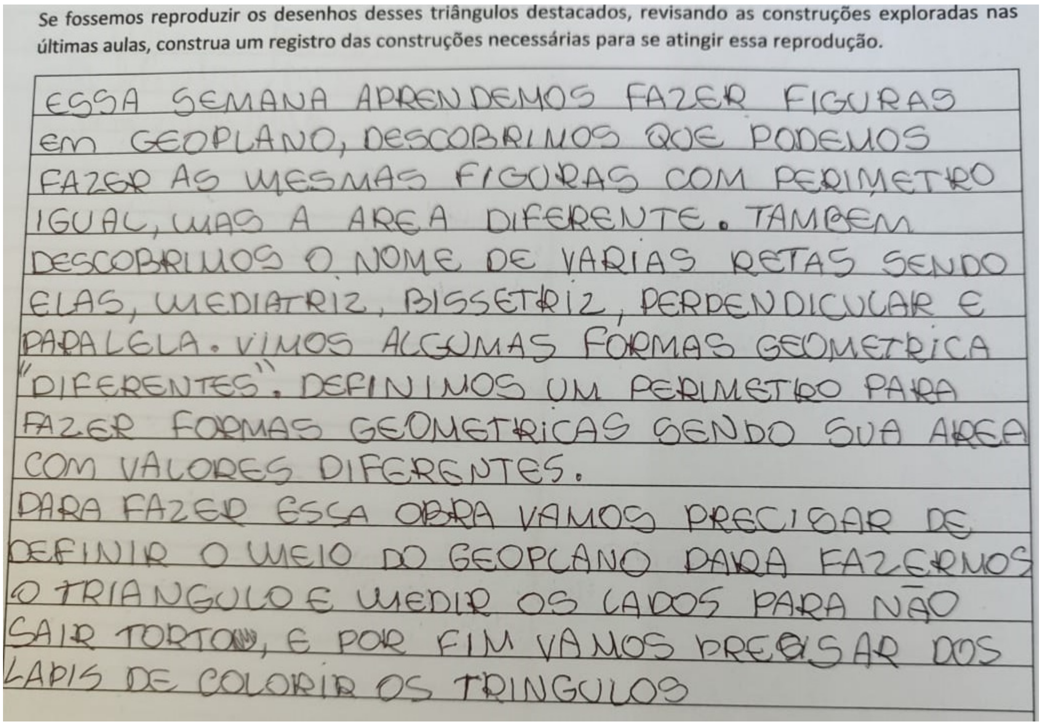
Durante essa semana tivemos aulas de geometria com atividades de desenhos no ~~plano~~ geoplano geométrico, calculando o perímetro e o padrão que esses desenhos ditiam. Para construir essa imagem eu utilizaria o geoplano como suporte, encontraria o perímetro, o padrão dos triângulos e usaria também cálculos de medidas. Na minha opinião as aulas foram boas para treinar o raciocínio, para reforçar nosso conhecimento sobre a matéria e tirar algumas dúvidas

Figura 4.30: Atividade 1 - Aula 4 - Devolutiva dos alunos.


Se fossemos reproduzir os desenhos desses triângulos destacados, revisando as construções exploradas nas últimas aulas, construa um registro das construções necessárias para se atingir essa reprodução.

Durante essa semana, tivemos várias aulas sobre os desenhos geométricos. Nelas a gente aprendeu medidas, a trabalhar em grupo, raciocínio lógico, também reforçamos os nome de diversas formas geométricas, calculamos perímetro e padrão. Para fazer essa figura, de acordo com o que a gente aprendeu, eu usaria cálculo de medidas, encontraria um perímetro e padrão para determinar os triângulos. Como suporte, eu faria o uso do geoplano, para assim eu usar uma medida certa para fazer as (~~formas~~) figuras. Essas aulas sobre os desenhos geométricos são muito boas, porque com elas podemos aprender diversas estruturas diferentes, onde talvez em uma aula normal não aprenderíamos.

Figura 4.31: Atividade 1 - Aula 4 - Devolutiva dos alunos.


Se fossemos reproduzir os desenhos desses triângulos destacados, revisando as construções exploradas nas últimas aulas, construa um registro das construções necessárias para se atingir essa reprodução.

ESSA SEMANA APRENDEMOS FAZER FIGURAS EM GEOPLANO, DESCOBRIMOS QUE PODEMOS FAZER AS MESMAS FIGURAS COM PERIMETRO IGUAL, MAS A AREA DIFERENTE. TAMBEM DESCOBRIMOS O NOME DE VARIAS RETAS SENDO ELAS, MEDIATRIZ, BISSETRIZ, PERPENDICULAR E PARALELA. VIMOS ALGUMAS FORMAS GEOMETRICA "DIFERENTES". DEFINIMOS UM PERIMETRO PARA FAZER FORMAS GEOMETRICAS SENDO SUA AREA COM VALORES DIFERENTES.
PARA FAZER ESSA OBRA VAMOS PRECISAR DE DEFINIR O MEIO DO GEOPLANO PARA FAZERMOS O TRIANGULO E MEDIR OS LADOS PARA NÃO SAIR TORTO, E POR FIM VAMOS PRECISAR DOS LAPIS DE COLORIR OS TRINGULOS

Figura 4.32: Atividade 1 - Aula 4 - Devolutiva dos alunos.

Ao ler esses relatos considero que a Atividade 1, foi um verdadeiro sucesso.

4.2.2 Atividade 2

Aula 1

A atividade constante na Figura 4.10, foi iniciada entregando na própria sala de aula dos alunos uma folha para cada um, posteriormente mudamos para a sala de vídeo com intuito dos alunos visualizarem as resposta Figura (4.11 e a sequência de forma clara. A conclusão da atividade pode ser observada na Figura 4.33.

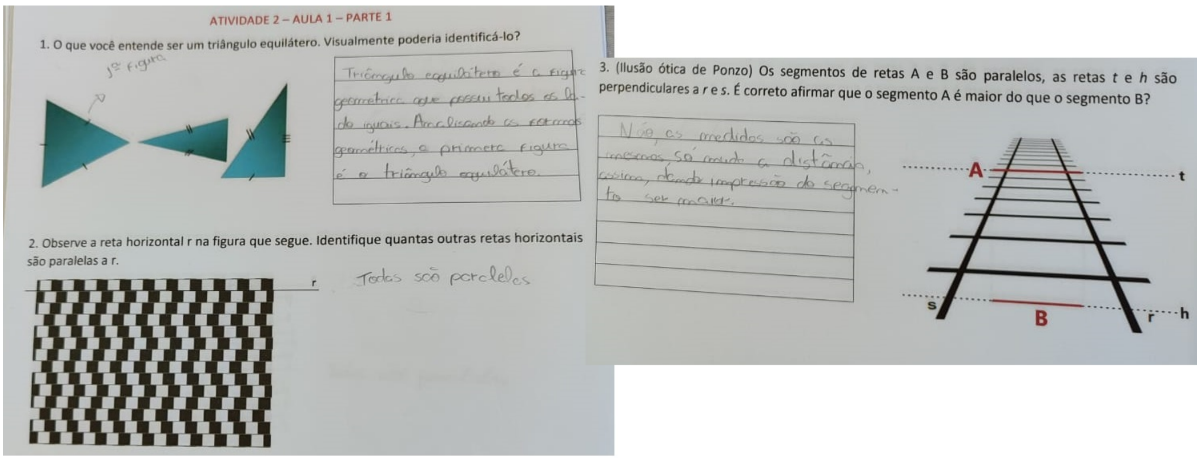


Figura 4.33: Atividade 2 - Aula 1 - Parte 1 - Devolutiva dos alunos.

Essa atividade foi muito atrativa para os alunos, principalmente por causa das ilusões de ótica que apresentam. Os alunos ficaram maravilhados com a resolução na sequência de imagens do Power-Point.

Fizeram a correção, uma vez que todos erraram na primeira tentativa.

Voltamos para sala e foi solicitado que realizassem a atividade referente a Figura 4.12. O tempo não foi suficiente para que acabassem a atividade. Como não teria aula com eles no dia seguinte, solicitei que acabassem em casa e passei recolhendo a atividade no dia seguinte. A solução da atividade pode ser observada na Figura 4.34.

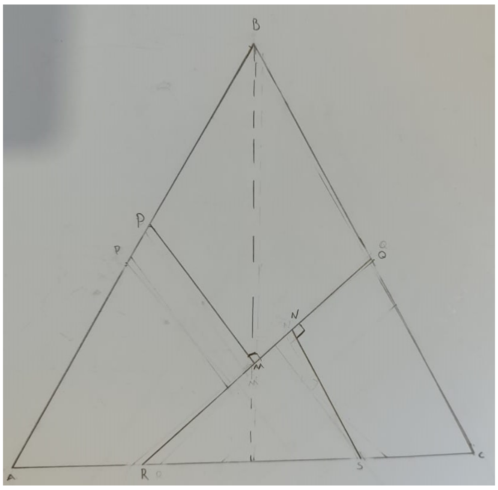


Figura 4.34: Atividade 2 - Aula 1 - Parte 3 - Devolutiva dos alunos.

Ao recolher a atividade observei que os alunos tiveram grandes dificuldades, principalmente na construção do triângulo equilátero e que, dessa forma, ao recortar o triângulo eles não montariam o quadrado esperado.

Aula 2

A segunda aula foi iniciada com a entrega individual para os alunos da atividade constante na Figura 4.13, régua e compasso.

Para a realização do primeiro exercício foi necessário apresentar algumas dicas e de forma coletiva conseguiram chegar a solução.

Para a segunda atividade, como muitos tem grandes dificuldades com o compasso, permiti que sentassem da forma que achassem mais conveniente. Observe a conclusão da atividade na Figura 4.35.

Gastaram aproximadamente meia hora para finalizar a atividade.

Diante das dificuldades observadas ao recolher a atividade referente à Figura 4.12, optei

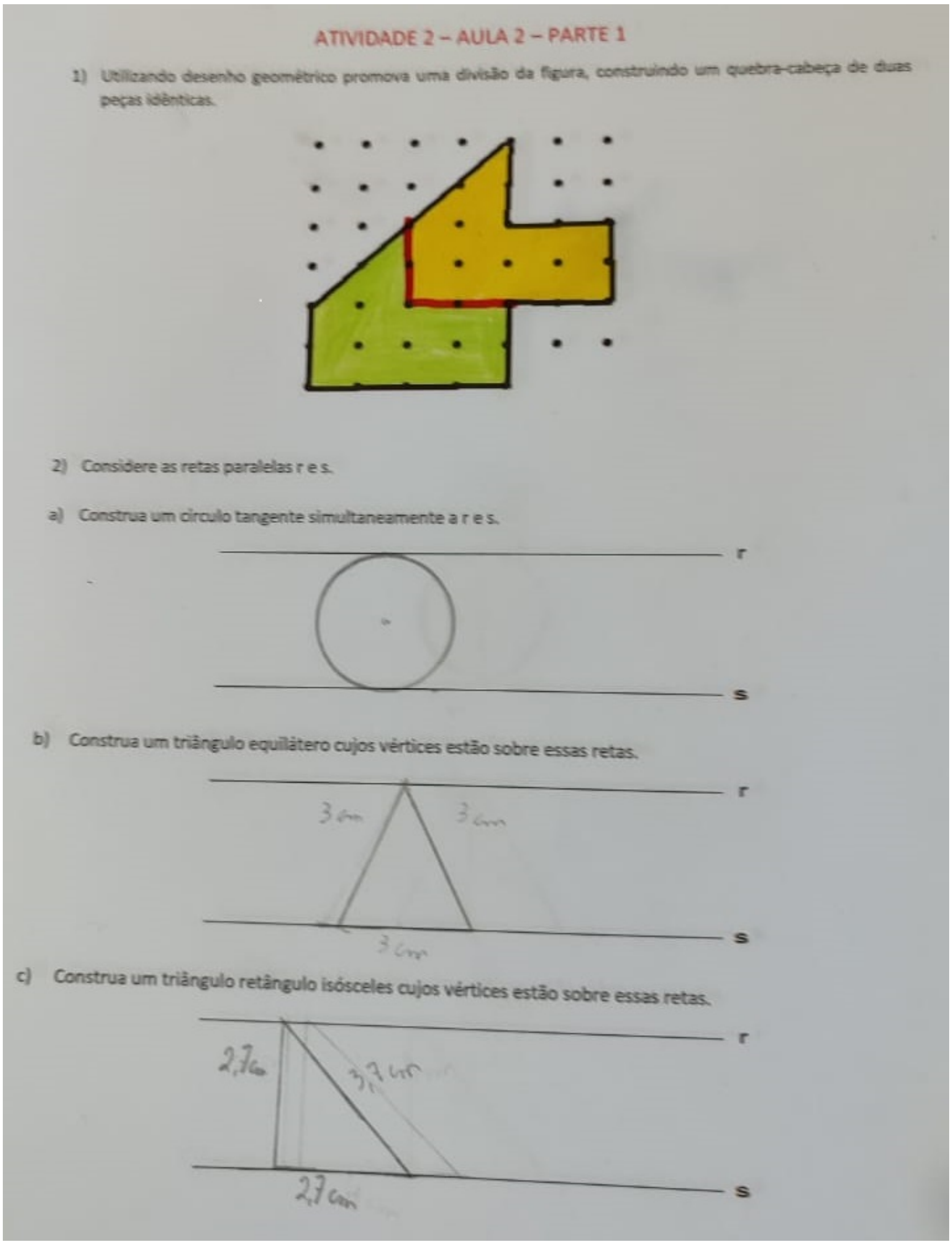


Figura 4.35: Atividade 2 - Aula 2 - Devolutiva dos alunos.

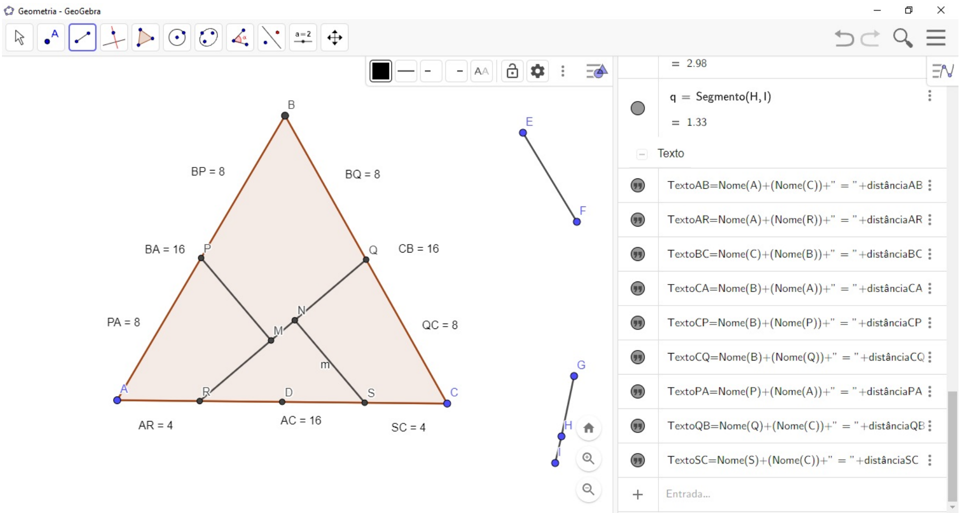


Figura 4.36: Atividade 2 - Reapresentação com GeoGebra.

por leva-los a sala de vídeo e fazer a construção do triângulo novamente, fiz um passo-a-passo da construção utilizando o aplicativo GeoGebra. A construção realizada para que eles entendessem está representada na Figura 4.36.

Voltamos para sala e eles realizaram uma construção bem melhor que a da primeira tentativa.

Aula 3

A terceira aula foi iniciada solicitando que os alunos recortassem os triângulos construídos na aula anterior.

As construções ficaram bem feitas e os alunos admirados, embora tenham tido certa dificuldade de montarem sozinho. Observe as construções na Figura 4.37.

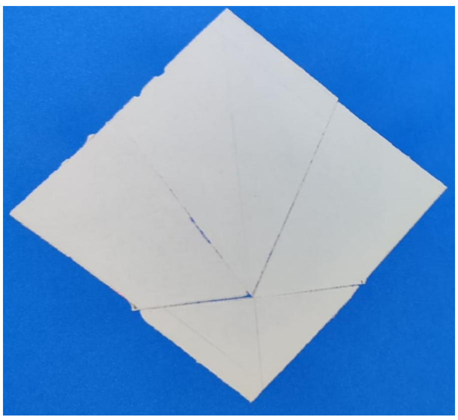


Figura 4.37: Atividade 2 - Aula 3 - Devolutiva dos alunos.

Para que entendessem a montagem do "quebra-cabeça" foi realmente necessário fazer a montagem utilizando os EVAs.

Em seguida, foi apresentado para os alunos a obra de arte em formato A3 presente na Figura 4.14 e solicitado que fizessem observações sobre o que achavam. As respostas foram diversas.

Após a escrita no quadro "dividir uma circunferência em quatro partes iguais e traçar os quadrados inscrito e circunscrito" foi apresentado para eles a Figura 4.15 e solicitado que fizesem algo parecido. Duas figuras obtidas são apresentadas nas imagens das figuras: Figura 4.38 e Figura 4.39.

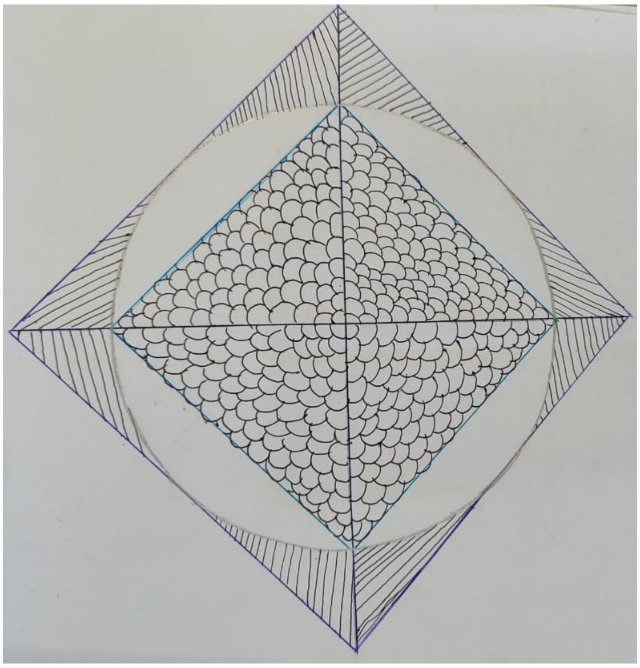


Figura 4.38: Atividade 2 - Aula 3 - Devolutiva dos alunos.

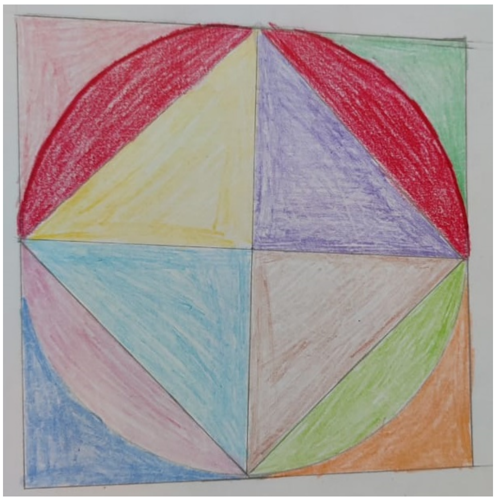


Figura 4.39: Atividade 2 - Aula 3 - Devolutiva dos alunos.

Considerei que os alunos fizeram belíssimos trabalhos e essa atividade, mais uma vez, para eles foi interessante e se dedicaram muito na sua construção.

Aula 4

Para inciar a próxima atividade foi entregue aos alunos a folha da Figura 4.16. A melhor solução encontrada foi a da Figura 4.40.

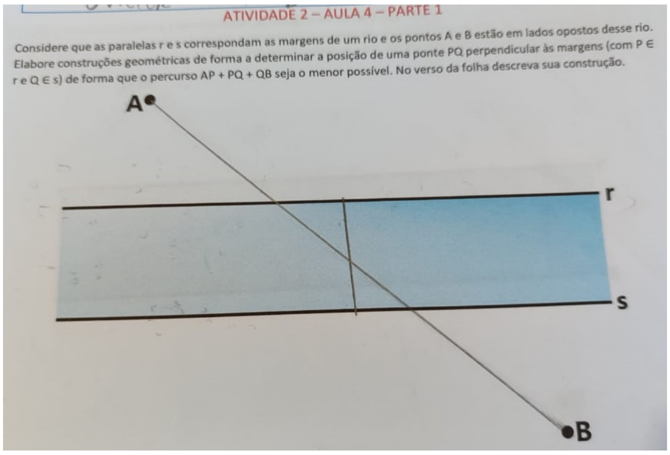
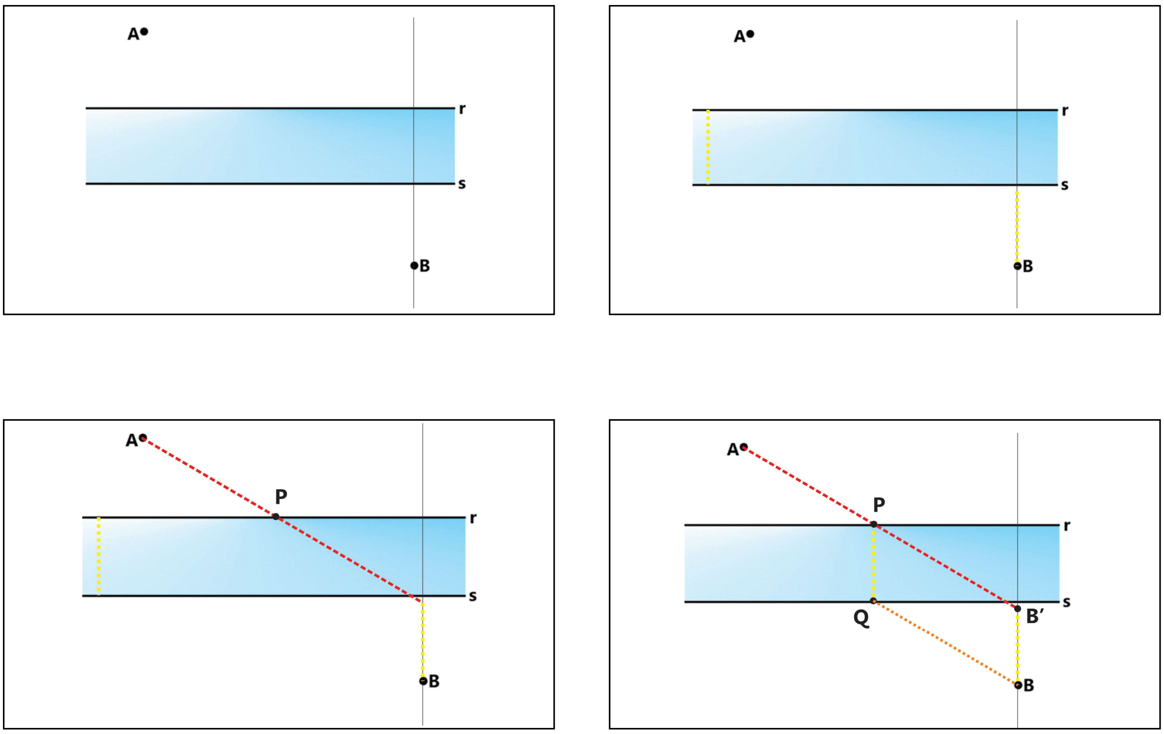


Figura 4.40: Atividade 2 - Aula 4 - Devolutiva dos alunos

Os alunos, no geral, tiveram muita dificuldade com a solução desse exercício. Fiz a apresentação da sequência de slides para exemplificação, Figura 4.41.



1

Figura 4.41: Atividade 2 - Aula 4 - Sequência de slides.

A Atividade 2, foi finalizada com a apresentação para os alunos da Figura 4.17.

A construção oral e coletiva das respostas foi bem satisfatória e ficou claro que os alunos entenderam o conceito de paralelas e perpendiculares.

4.2.3 Atividade 3

Aula 1

A realização da terceira atividade foi iniciada com os slides apresentados na Figura 4.18. No final do último slide foi apresentado um QR-CODE, que os alunos leem e são direcionados para uma página onde precisam escrever três palavras que são apresentadas na nuvem de palavras. A nuvem de palavras obtida com a resposta dos alunos pode ser visualizada na Figura 4.42.

Figura 4.42: Atividade 3 - Aula 1 - 2ª Parte.

Ao discutirmos as palavras apresentadas na nuvem tive respostas ótimas, onde foi também possível perceber que alguns alunos não tinham conhecimento sobre o instrumento transferidor, relataram nunca ter utilizado.

Após as trocas, retornamos para sala de aula para realizar a atividade presente na Figura 4.19. Essa atividade foi iniciada mas, os alunos não conseguiram realizar na sequência, foi necessário recolher e terminar na aula posterior na qual também, foi gasto todo o horário. O final da atividade pode ser observada na Figura 4.43.

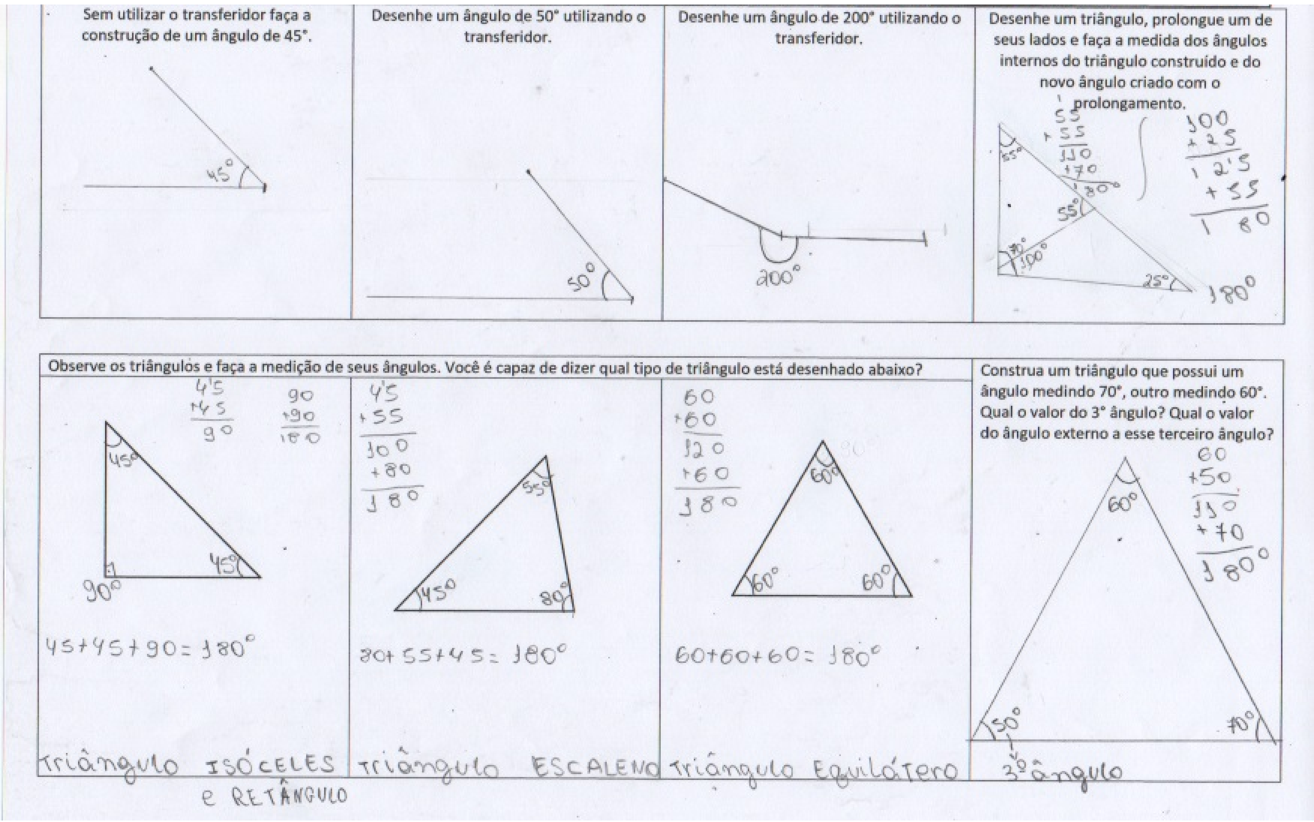


Figura 4.43: Atividade 3 - Aula 1 - 1ª Parte.

No geral digo que foi uma atividade de grande superação, pois foi necessário ensinar o uso do transferidor de forma individual para vários trios de alunos, sendo ainda que para alguns foi necessário realizar quase que todas as medições de forma assistida.

Mas, ao finalizar a atividade ficaram admirados quando perceberam que a soma dos ângulos internos dos triângulos resultavam em 180°.

Aula 2

Os alunos receberam de forma individual a atividade retratada na Figura 4.20. A atividade foi bem realizada por parte dos alunos, que sempre se interessam por essas atividades que envolvem o fato de colorir. Os resultados de coloração dos ângulos congruentes pode ser visualizado nas imagens da Figura 4.44 e também na Figura 4.46.

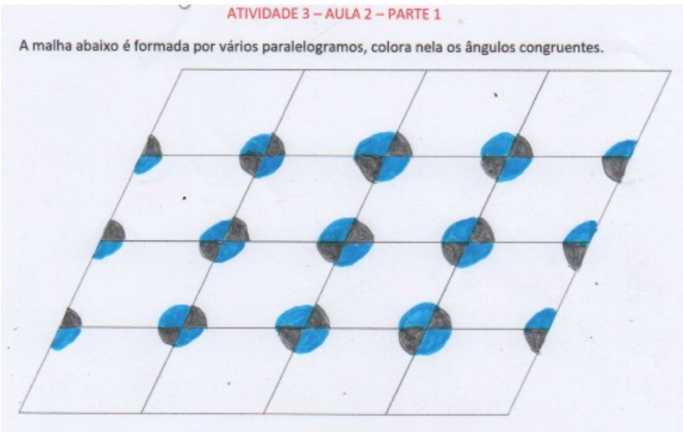


Figura 4.44: Atividade 3 - Aula 2 - 1ª Parte - Aluno A.

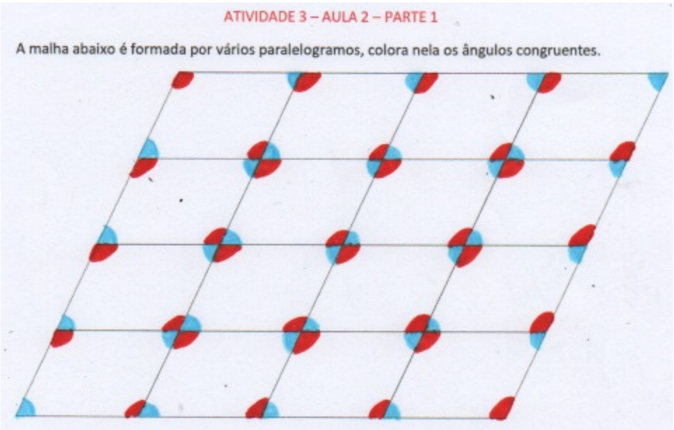


Figura 4.45: Atividade 3 - Aula 2 - 1ª Parte - Aluno B.

A segunda parte da atividade relativa à Figura 4.20, foi mais trabalhosa, no geral os alunos tiveram mais dificuldades. Uma das resoluções está exposta na Figura 4.46.

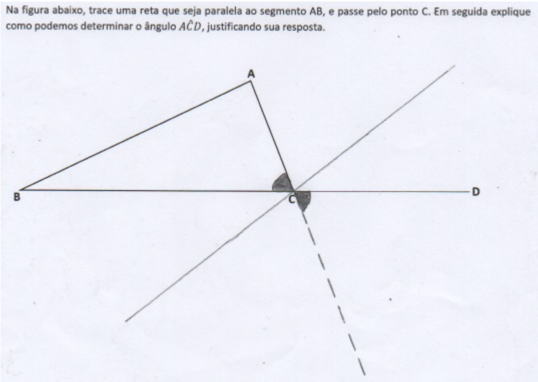


Figura 4.46: Atividade 3 - Aula 2 - 2ª Parte.

Para tanto, para sanar as dificuldades, a exposição dos slides 4.21, foi de suma importância.

Aula 3

A realização da atividade retratada na Figura 4.22 saiu melhor que a esperada. Os alunos realizaram sem grandes dificuldades de forma individual e posteriormente, ao solicitar para compararem as respostas. O fizeram de forma brilhante. Algumas soluções estão apresentadas nas imagens das Figura 4.47, Figura 4.48 e Figura 4.49.

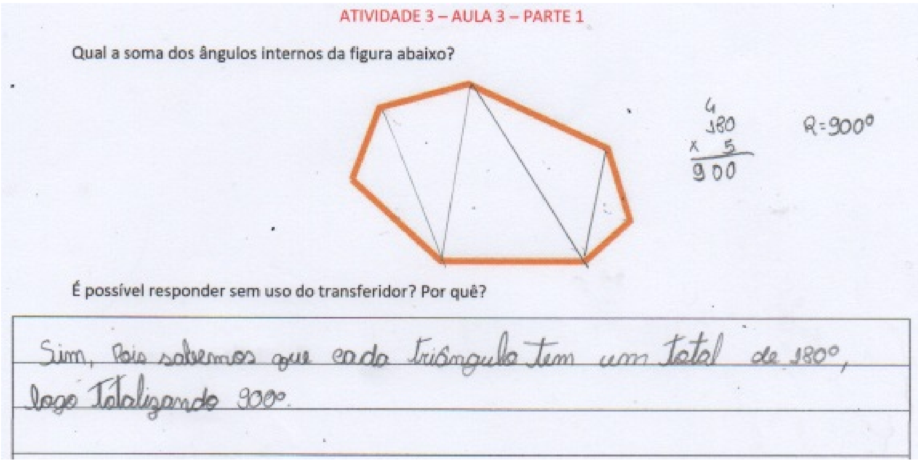


Figura 4.47: Atividade 3 - Aula 3 - 1ª Parte.

De forma geral, os alunos realizaram a divisão do poligono em triângulos para obter a soma de seus ângulos internos.

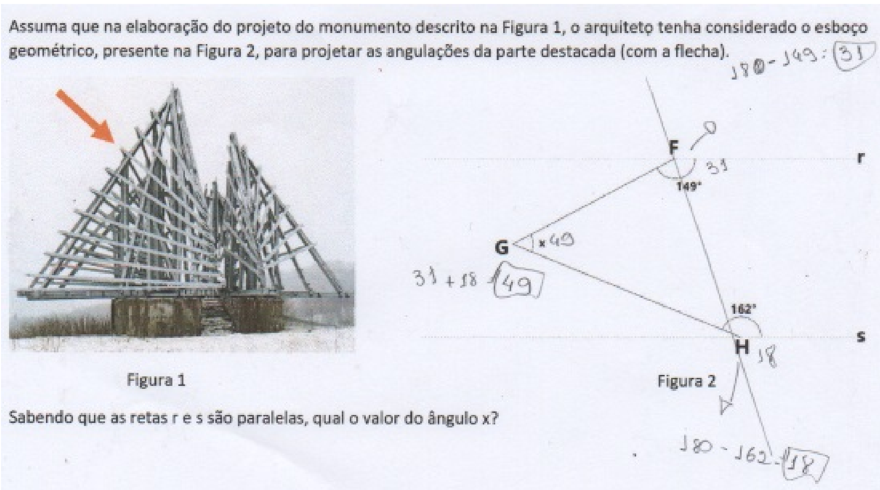


Figura 4.48: Atividade 3 - Aula 3 - 2ª Parte - Aluno A

Na solução apresentada na Figura 4.48 o aluno utilizou a soma de um ângulo raso.

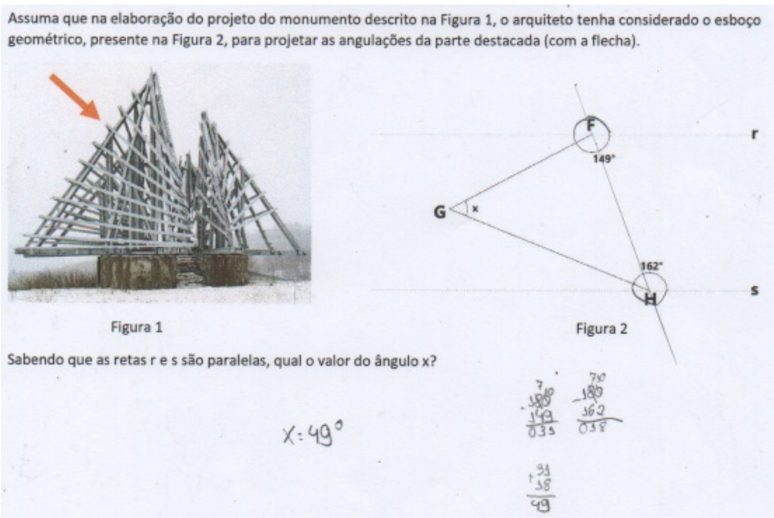


Figura 4.49: Atividade 3 - Aula 3 - 2ª Parte - Aluno B.

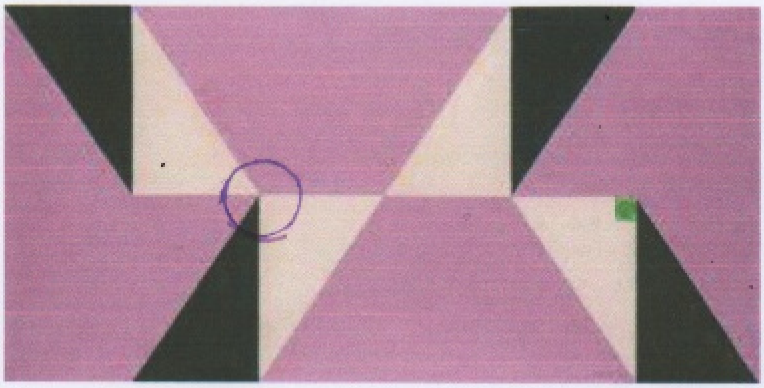
Na solução apresentada na Figura 4.49 o aluno utilizou a soma dos ângulos internos de um triângulo.

Aula 4

O objetivo da Aula 4, com a observação da obra de arte, intitulada: Concreção 6048 de 1960, apresentada na Figura 4.23. Recebemos devolutivas incríveis que, novamente, gostaria de fazer a exposição de todas mas, estou optando por três, apresentadas na imagens das Figura 4.50, Figura 4.51 e Figura 4.52.

ATIVIDADE 3 – AULA 4 – PARTE 1

Luiz Sacilotto (1924-2003) foi um importante pintor, escultor e desenhista brasileiro. Observe a sua obra que tem como título: Concreção 6048, pintada em 1960.



Observando essa imagem é possível observar vários estudos que realizamos nos últimos dias. Descreva esses estudos.

Se julgar necessário utilize régua, compasso e transferidor para as suas justificativas, utilizando os instrumentos sobre a imagem e explicando o que observou abaixo.

Nas aulas de desenho geométricos desses últimos dias pra cá eu pude reforçar o modo de uso do transferidor, os tipos de triangulos e que em cada triângulo no seu interior sempre teremos 180° E aprendi diferenciar as retas, porque antes eu confundia muito, aprendi que os ângulos opostos pelos vertices são congruentes, aprendi que quando eu quiser saber o calculo da soma dos ângulos de um paralelogramo/figura as vezes ficará mais fácil se eu dividi-lás em triângulos, pois eles no seu interno teem a mesma medida (180°), aprendi a justificar e calcular os ângulos sem o transferidor.

ali eu possuo 360°, e que em todos os encontros iguais a esse eu também terei

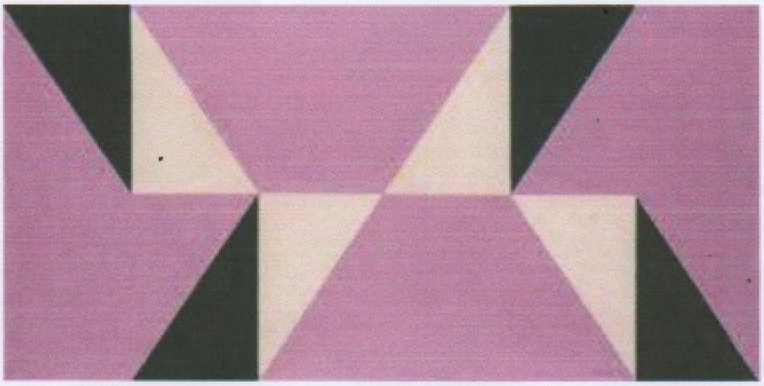
• eu tenho 90° graus e que em todas as linhas paralelas a ela eu terei o mesmo ângulo

Até tem mais coisas que aprendemos mais é dificil de se lembrar assim e principalmente de descrever

Figura 4.50: Atividade 3 - Aula 4 - Aluno A.

ATIVIDADE 3 – AULA 4 – PARTE 1

Luiz Sacilotto (1924-2003) foi um importante pintor, escultor e desenhista brasileiro. Observe a sua obra que tem como título: Concreção 6048, pintada em 1960.



Observando essa imagem é possível observar vários estudos que realizamos nos últimos dias. Descreva esses estudos.

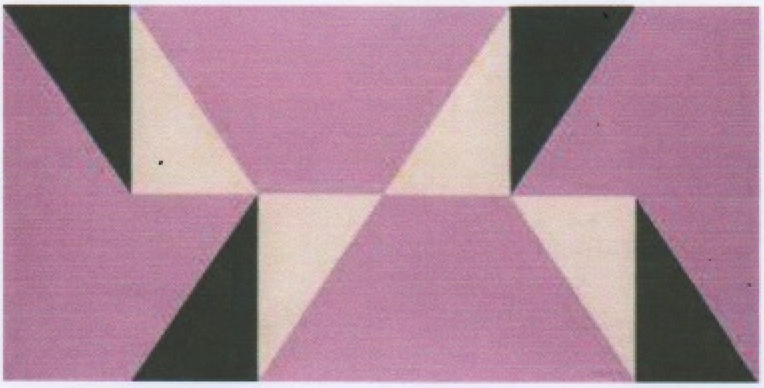
Se julgar necessário utilize régua, compasso e transferidor para as suas justificativas, utilizando os instrumentos sobre a imagem e explicando o que observou abaixo.

A medida do total do ângulo de todos os triângulos é de 180°, o triângulo retângulo possui todos os seus lados e ângulos iguais, o escaleno possui todos os lados e ângulos diferentes, o isósceles possui dois ângulos e lados iguais e um diferente, os ângulos que são opostos pelo vértice possui as medidas iguais, a soma dos ângulos do quadrado, do paralelogramo, entre outros é igual a 360°, as retas paralelas não se encontram e não se cortam, as transversais são as retas que cortam as paralelas, uma reta perpendicular é uma reta que forma o ângulo de 90°, é possível cortar figuras geométricas em retas para formar triângulos, com isso conseguimos descobrir quanto mede o ângulo dessa figura, aprendemos como usar o transferidor para fazer ângulos, uma circunferência tem o ângulo igual a 360° e uma semicircunferência tem o ângulo igual a 180°

Figura 4.51: Atividade 3 - Aula 4 - Aluno B.

ATIVIDADE 3 – AULA 4 – PARTE 1

Luiz Sacilotto (1924-2003) foi um importante pintor, escultor e desenhista brasileiro. Observe a sua obra que tem como título: Concreção 6048, pintada em 1960.



Observando essa imagem é possível observar vários estudos que realizamos nos últimos dias. Descreva esses estudos.

Se julgar necessário utilize régua, compasso e transferidor para as suas justificativas, utilizando os instrumentos sobre a imagem e explicando o que observou abaixo.

NOS ESTUDAMOS SOBRE TRIANGULOS OPOSTOS, LINHAS
PERPENDICULAR E PARALELA. DESCOBRIMOS MEDIDAS
DE ANGULOS, NOS PODEMOS FAZER VARIAS FORMAS
GEOMETRICA EM GEOPLANO, NO GEOPLANO APRENDEMOS
A FAZER FORMAS COM A MESMA AREA E O MESMO
PERIMETRO, POREM, EM FIGURAS DIFERENTES. CAL-
CULAMOS VARIAS MEDIDAS DE ANGULOS E USAMOS
O TRANSFERIDOR, COM ELE NOS TIVEMOS VARIOS
EXERCICIOS E APRENDEMOS A USAR ELE DE FORMA
CORRETA. DESCOBRIMOS QUE OS TRIANGULOS OU
ATE MESMO OUTRA FORMA GEOMETRICA PODEM TER
O ANGULO OPOSTO COM A MESMA MEDIDA. FIZEMOS
VARIAS ATIVIDADES ENVOLVENDO VARIOS TIPOS DE
MEDIDAS. DESCOBRIMOS A ILUSÃO DE OTICA EM
RETAS PERPENDICULAR E POR FIM VARIAS FIGURAS
GEOMETRICA PODEMOS MONTAR UMA NOVA FIGURA

APRENDEMOS A USAR O COMPASSO E FAZERMOS VARIAS
CIRCUNFERENCIAS DE MEDIDAS DIFERENTES, TRANSFORMANOS
UMA FIGURA COMPOSTAS POR VARIAS OUTRAS EM UM DESENHO
CONSTRUIMOS VARIOS TRIANGULOS E DESCOBRIMOS O ANGULO
INTERNO E EXTERNO COM A AJUDA DO TRANSFERIDOR.

Figura 4.52: Atividade 3 - Aula 4 - Aluno C.

Pré-Conclusão

A parte que julgo mais importante da realização da oficina é o engajamento que aconteceu por parte dos alunos que, acredito, se dar pelo fato das atividades terem sido realizadas sempre de uma forma concreta, utilizando muito de matemática recreativa.

CAPÍTULO 5

Aplicação e análise do pós-teste

5.1 Elaboração e aplicação do pós-teste a estudantes dos grupos de controle e livre

Genericamente uma intervenção pedagógica se constitui numa ação que busca nivelar os níveis cognitivos dos educandos, baseando-se em um diagnóstico e um planejamento. Os educadores podem ser vistos como os maiores responsáveis nessa ação, proporcionando um momento de real construção do conhecimento e desenvolvimento de habilidades, para levar o educando ao entendimento e compreensão dos instrumentos avaliativos (atividades).

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) consta que o educador pode selecionar e aplicar metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas com a finalidade de promover a aprendizagem. Assim, no planejamento de uma intervenção pedagógica devemos traçar metas e estratégias, sendo a ação do professor como a de um facilitador na aprendizagem do estudante, utilizando heurísticas diversas e meios disponíveis com intenção de alcançar seus objetivos. Esse tipo de ação deve estar presente em toda atividade educacional, com a finalidade da busca de alternativas que levam a uma educação de qualidade e ainda uma melhor compreensão e entendimento do referido conteúdo proposto para o educando. Este processo por meio de métodos e técnicas vai convergindo para alcançar os objetivos e as metas propostas. Ao longo do processo de aplicação e implementação das atividades propostas, privilegiamos uma conformidade com as deduções oriundas no pré-teste.

Destaca-se que a integra do pós-teste pode ser visualizada no **Anexo A.3**.

Para a confecção do pós-teste optamos por uma roupagem bem próxima do primeiro teste, porém mudando as imagens das primeiras questões que foram aquelas que alguns alunos acertaram e mantendo na integra questões destinadas aos níveis 3 e 4, que não tínhamos tido nenhum aluno alcançando esse nível no primeiro teste.

O grupo livre, conforme já descrito sem quaisquer intervenções complementares, turma do 1° A, ao longo do período seguiram tendo aulas de Desenho Geométrico comigo uma vez por semana, onde trabalhamos área e perímetro de figuras planas. Tivemos um total de 6 aulas de Desenho Geométrico entre o primeiro teste e o pós-teste. Já o grupo de controle, turma 1°D, além dessas 6 aulas de Desenho Geométrico foi aplicado a eles a oficina por três semanas seguidas totalizando 12 aulas. Salientamos novamente que, em função de que no pré-teste a maioria dos alunos não conseguiram atingir o nível 0, trabalhamos a oficina principalmente com essa intenção de que os alunos atingissem esse nível.

5.2 Análise da efetividade das ações de intervenções

Quando o pré-teste foi aplicado não conhecíamos as configurações das turmas. Na atualidade já foi possível identificar as dificuldades que alguns alunos apresentam. As análises evidenciam ainda que, o grupo livre apresenta um nível de desenvolvimento do pensamento geométrico mais sólido que o grupo de controle, nos fazendo conjecturar que o período destinado a intervenção foi ainda pequeno para que haja um nivelamento entre esses universos. Percebe-se ainda que, infelizmente, nas duas turmas existem alunos que apresentam grande aversão ao ensino de geometria colocando barreiras difíceis de serem transpostas para a aprendizagem. Todavia, mesmo frente a essas dificuldades relatadas consideramos que o processo de intervenção foi um sucesso pois não só conseguiu produzir um nivelamento parcial entre as duas turmas mas, fundamentalmente, conseguindo um maior número de alunos da turma do 1°D enquadrados no nível 0, conforme demonstra os resultados do pós teste observados nos gráficos apresentados nas Figuras que seguem, Figura 5.1, representativo dos desempenhos no pós-teste da turma do 1°A e a Figura 5.2, representativo do desempenho no pós-teste da turma do 1°D.

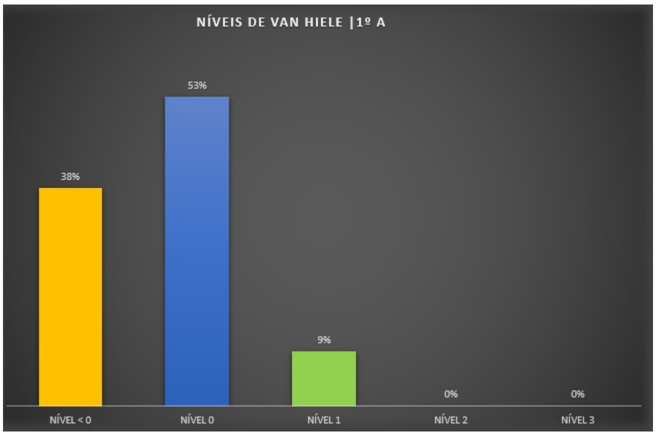


Figura 5.1: Gráfico de desempenho no pós-teste: 1°A.

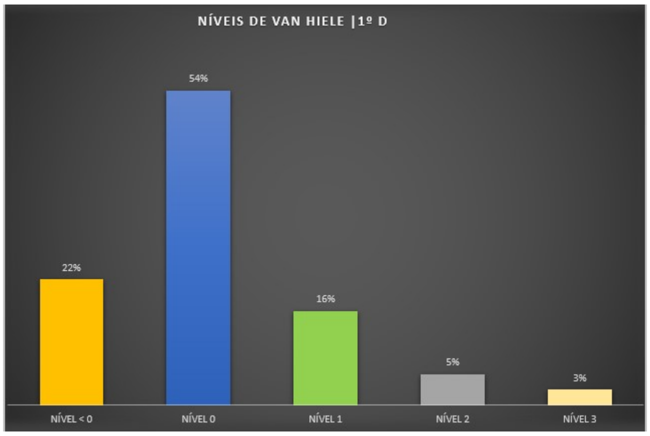


Figura 5.2: Gráfico de desempenho no pós-teste: 1°D.

5.3 Considerações finais sobre a evolução dos estudantes ao longo dos níveis de Van Hiele

Acreditamos que no geral recebemos alunos que realmente não sabiam sequer reconhecer figuras planas, ou diferenciar ângulos e posições relativas entre retas. Habilidades essas que se consolidaram com a intervenção pedagógica desenvolvida. A ação de trabalhar metodologicamente com a turma segundo “grupos mistos”, diluindo os alunos com grandes dificuldades em grupos diversos, se mostrou uma estratégia acertada que propiciou uma evolução nos níveis. Nossas análises mostraram que mesmo não havendo alunos enquadrados no nível três, um grupo de aproximadamente 5 alunos da turma 1°D responderam qualitativamente a algumas questões referentes ao nível três no pós teste. Embora não tenham demonstrado que estejam prontos para responder a todas elas, eles tiveram clareza em responder algumas. Isso nos leva a refletir sobre eventuais descontinuidade nos níveis e efetividade de parâmetros que ajustam os critérios de enquadramento, alinhando adequadamente uma dimensão eficaz quanto aos estímulos a serem vivenciados pelos estudantes.

APÊNDICE A

ANEXOS

A.1 Pré-teste

TESTE – GEOMETRIA

(Mapeamento dos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico segundo o modelo Van Hiele)

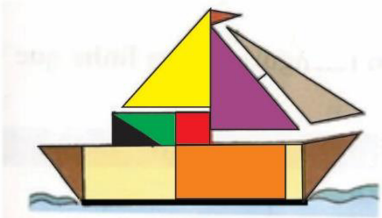
Nome:	Turma:
Escola:	Ano:

- Esse teste é composto por 16 questões, distribuídas segundo os quatro níveis presentes no modelo Van Hiele;
- O tempo previsto para a realização do teste é de 40 minutos. Estamos prevendo um total de 30 minutos para a realização das resoluções e 10 minutos para preenchimento do gabarito;
- Leia atentamente cada questão. Decida qual resposta você acredita estar correta. Há apenas uma alternativa correta para cada questão. Preencha o gabarito com atenção;
- Use o próprio caderno de questões para efetuar qualquer cálculo ou desenho que julgar necessário.
- Será permitido utilizar durante o teste apenas lápis e borracha;
- O teste será corrigido e os participantes caracterizados segundo os níveis do modelo. Pretende-se, posteriormente, construir oficinas didático-pedagógicas enfatizando ações formativas no enfretamento de eventuais necessidades observadas no processo de ensino – aprendizagem.

Esse teste está sendo realizado como parte integrante de uma dissertação de mestrado.

	A	**B**	**C**	**D**
QUESTÃO 1				
QUESTÃO 2				
QUESTÃO 3				
QUESTÃO 4				
QUESTÃO 5				
QUESTÃO 6				
QUESTÃO 7				
QUESTÃO 8				
QUESTÃO 9				
QUESTÃO 10				
QUESTÃO 11				
QUESTÃO 12				
QUESTÃO 13				
QUESTÃO 14				
QUESTÃO 15				
QUESTÃO 16				

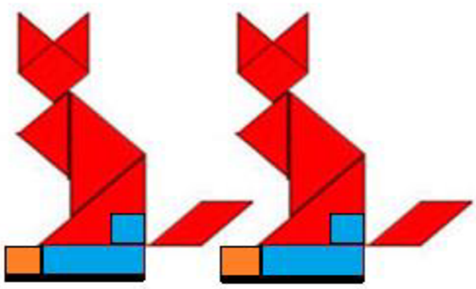
QUESTÃO 1
Observe a figura abaixo, algumas figuras planas foram utilizadas para montar o barco.



Quantos são os triângulos utilizados nessa montagem?

a) 2
b) 6
c) 7
d) 8

QUESTÃO 2
A imagem dos gatos presente na figura que segue foi construída ajustando-se figuras planas, quantas delas são quadrados?



a) 10
b) 6
c) 4
d) 3

QUESTÃO 3
Qual das imagens representa as trajetórias das linhas destacadas?

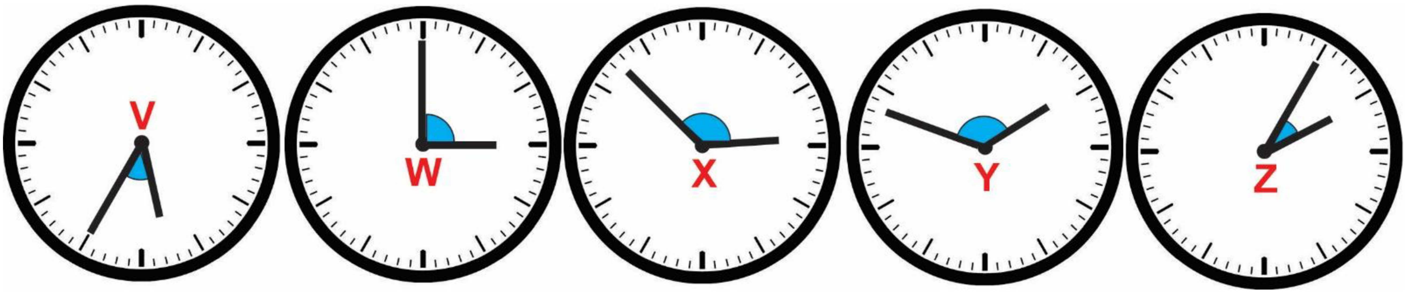
a)


b)


c)

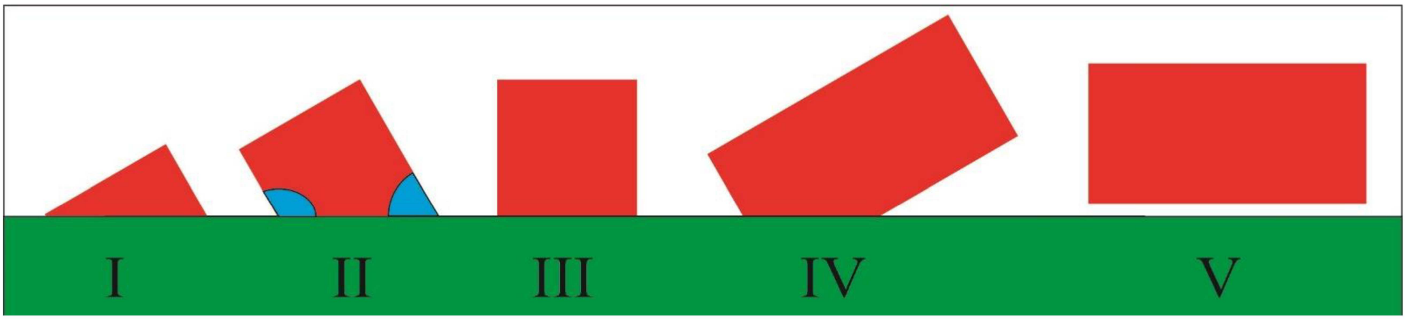

d)


QUESTÃO 4
Em qual (ou quais) das imagens os ponteiros representam ângulos agudo (menor que 90°)?



a) Apenas Y.
b) Apenas W.
c) Apenas X e Y.
d) Apenas V e Z.

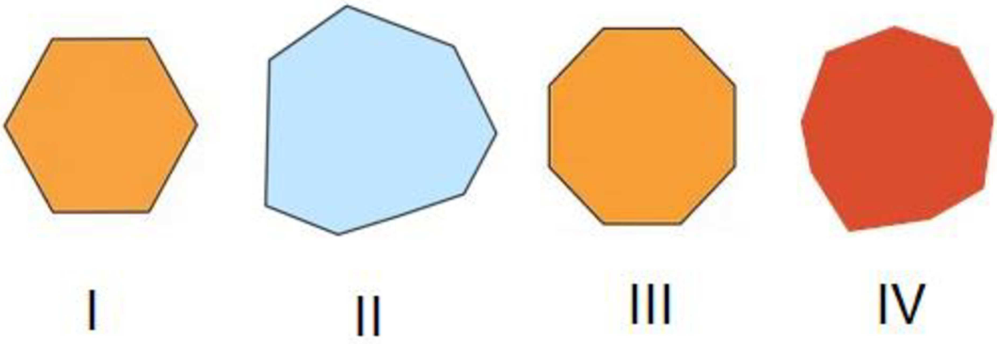
QUESTÃO 5
A figura abaixo mostra a imagem de um retângulo, visível em V, sendo revelada gradativamente pelos movimentos executados com ele.



Observando a sequência de movimentos executados, qual das alternativas é **INCORRETA**?

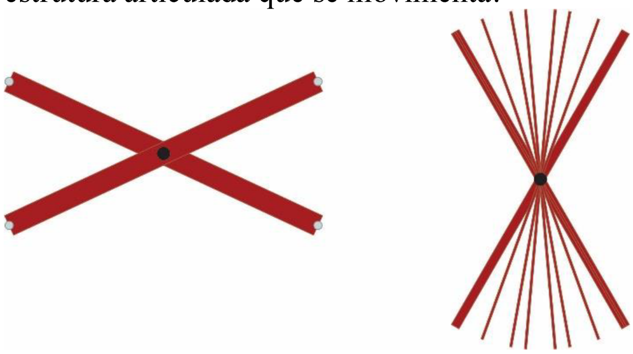
a) A imagem em I é de um TRIÂNGULO RETÂNGULO.
b) Na imagem II os ângulos destacados são suplementares.
c) A imagem III é de um TRAPÉZIO ISÓSCELES.
d) A imagem IV é de um PENTÂGONO com o maior número de ângulos retos possíveis.

QUESTÃO 6
Considere a afirmação que segue relativa a polígonos: a soma de seus ângulos internos é igual a 900°. Para qual das figuras abaixo ela é verdadeira?



a) I
b) II
c) III
d) IV

QUESTÃO 7
A figura abaixo representa duas tábuas de mesmas medidas unidas por um parafuso, fixado exatamente no centro delas, produzindo uma estrutura articulada que se movimenta.



Em cada extremidade das tábuas existe um gancho e por eles passaremos um barbante, esticado totalmente, ligando um gancho a apenas um outro de forma que o barbante nunca passe pelo parafuso.

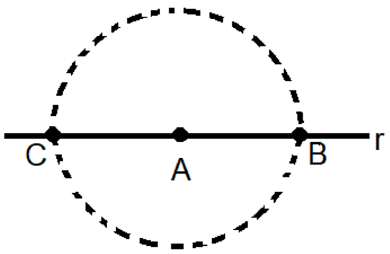
Considere as quatro afirmativas que seguem:

I) Quando a posição das tábuas não forma um ângulo reto, então os quatro barbantes esticados formam um trapézio.
II) Independentemente da posição das tábuas, os quatro barbantes esticados sempre formam um retângulo.
III) Quando o ângulo entre as tábuas é reto, então os quatro barbantes esticados formam um quadrado.
IV) Independentemente da posição das tábuas, os quatro barbantes esticados sempre formam um quadrilátero de mesmo perímetro

Assinale a afirmativa verdadeira:
a) Apenas I é falsa.
b) Apenas II é falsa.
c) Apenas III é falsa.
d) Apenas IV é falsa.

QUESTÃO 8
Considere o passo a passo de uma construção com régua e compasso:

I) Dada uma reta r;
II) Marque um ponto A pertencente a r;
III) Com centro do compasso em A e raio qualquer marcamos os pontos B e C sobre a reta r.

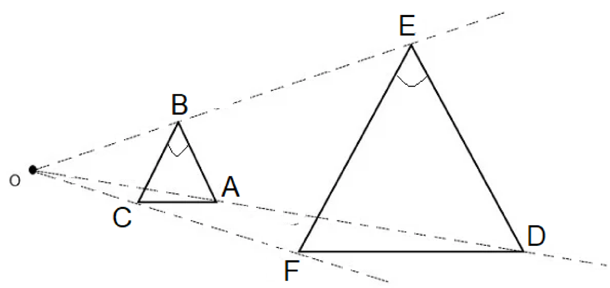


IV) Com centro em B e raio qualquer, um pouco maior daquele inicialmente escolhido, traçamos arcos acima e abaixo de r. Da mesma forma, e utilizando esse mesmo raio, com centro em C traçamos arcos acima e abaixo de r.
V) Os dois pontos de encontro desses arcos denominamos, respectivamente, por D e E. Trace a reta s ligando D e E.

Segundo as condições apresentadas na construção geométrica descrita, a reta s é:

a) mediatriz do segmento AC.
b) concorrente com r passando por um ponto distinto de A.
c) perpendicular a r passando por A.
d) paralela a r.

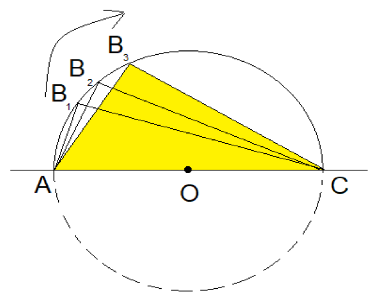
QUESTÃO 9
A figura abaixo mostra o desenho de dois triângulos construídos com régua e esquadro. As retas correspondentes aos lados passando, respectivamente, por A e D são paralelas.



Segundo a construção apresentada:

a) A medida de OC é sempre igual a medida de CF.
b) Os ângulos internos destacados são complementares.
c) Os triângulos ABC e DEF são congruentes.
d) Os valores das razões DF/AC e DE/AB são iguais.

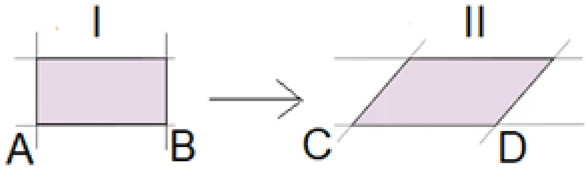
QUESTÃO 10
Interno a um semicírculo de centro O serão construídos triângulos de base AC e vértice B_i variando ao longo de pontos do círculo, conforme ilustra o desenho



Nessas condições, dentre as afirmações apresentadas assinale a correta.

a) A medida que B_i varia, o ângulo $A\hat{B}_iC$ é agudo.
b) Existe um único ponto B_i tal que o triângulo AB_iC é retângulo isósceles.
c) Existem posições para B_i tais que os ângulos da base AC não são complementares.
d) A medida que B_i varia todos os ângulos internos de AB_iC sofrem alterações.

QUESTÃO 11
O quadrilátero presente em I é "deformado" obtendo II, sendo que os lados AB e CD possuem as mesmas medidas.

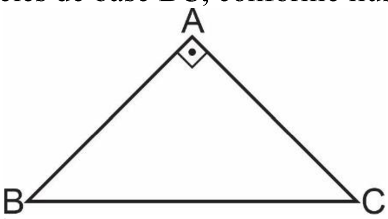


Qual das afirmações que seguem relacionam corretamente as propriedades presentes nessas figuras?

a) Os ângulos opostos em I são congruentes, isso se preserva em II.
b) A soma dos ângulos internos difere entre as figuras apresentadas.
c) Os ângulos adjacentes, suplementares em I, perdem essa característica em II.
d) As áreas das regiões sombreadas em I e II são distintas.

QUESTÃO 12

Seja ABC um triângulo retângulo isósceles de base BC, conforme ilustra a figura.



Qual dos procedimentos de desenho **<u>NÃO</u>** darão origem a uma visualização da altura desse triângulo.

a) Trace uma paralela r à BC e, posteriormente, uma perpendicular a r passando por A.
b) Trace a mediatriz de BC.
c) Trace a reta pelo ponto médio de BC e o ponto médio de AB.
d) Trace r, perpendicular a AC, por C e s, perpendicular a AB por B, seja H a interseção de r e s, ligue H até A.

QUESTÃO 13

Abaixo temos três afirmativas:

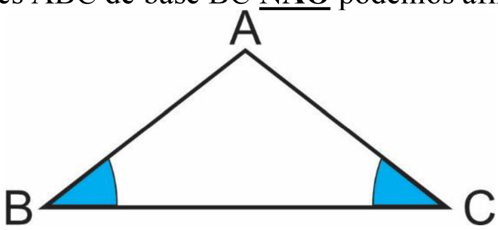
I. A figura é um paralelogramo.
II. As diagonais se cruzam formando ângulo reto.
III. As diagonais são congruentes.

Qual das afirmativas abaixo está correta?

a) Se I e II são verdadeiras então a figura pode ser classificada como um retângulo
b) Se I e III são verdadeiras então a figura pode ser classificada como um losango
c) Se I e III são falsas então a figura pode ser classificada como um triângulo.
d) Se II e III são falsas então a figura não pode ser, quadrado, nem retângulo, nem losango.

QUESTÃO 14

Considerando um triângulo isósceles ABC de base BC **<u>NÃO</u>** podemos afirmar que:



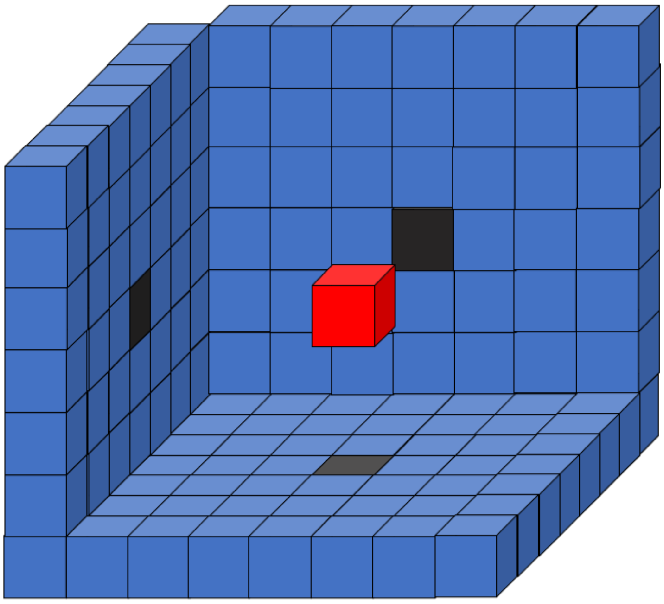
a) Ao traçar a bissetriz relativa ao lado BC, temos que ela intersecta o lado BC em um ponto N, sendo assim, os triângulos ΔABN e ΔACN são congruentes, pois $B\hat{A}N \equiv C\hat{A}N, AB \equiv AC, A\hat{B}N \equiv A\hat{C}N$ pelo caso ALA (ângulo, lado, ângulo).
b) Ao traçar a mediatriz relativa ao lado BC, temos que ela intersecta o lado BC no ponto Q, sendo assim, os triângulos ΔABQ e ΔACQ são congruentes, pois $AB \equiv AC, A\hat{B}Q \equiv A\hat{C}Q, A\hat{Q}B \equiv A\hat{Q}C,$ pelo caso LAAo (lado, ângulo, ângulo oposto) .
c) Ao traçar a mediana relativa ao lado BC, temos que ela intersecta o lado BC no ponto M, sendo assim, os triângulos ΔABM e ΔACM são congruentes, pois $AB \equiv AC, A\hat{B}M \equiv A\hat{C}M, BM \equiv CM$ pelo caso LAL (lado, ângulo, lado).
d) Ao traçar a altura relativa ao lado BC, temos que ela intersecta o lado BC no ponto H, sendo assim, os triângulos ΔABH e ΔACH são congruentes, pois $AB \equiv AC, BH \equiv CH, AH \equiv AH$ pelo caso LLL (lado, lado, lado).

QUESTÃO 15

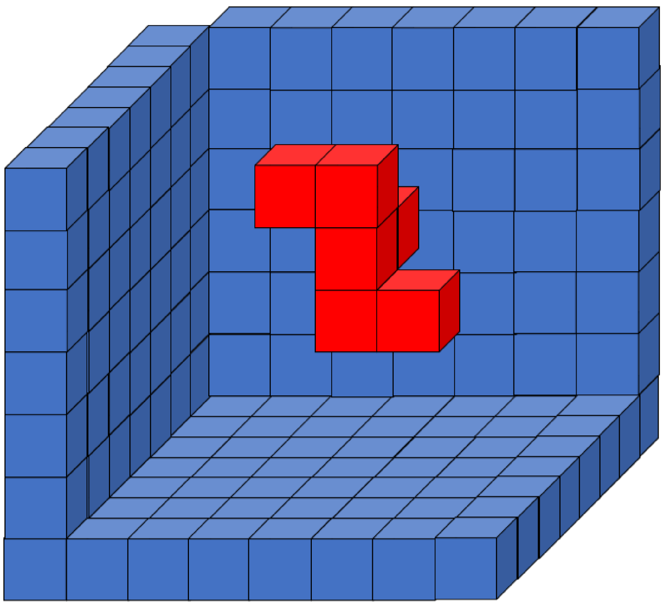
Uma nova versão do jogo Tetris consiste em empilhar e encaixar objetos tridimensionais formados por cubos que descem a tela, numa velocidade que cresce gradativamente enquanto o jogo evolui, de forma que completem planos horizontais. Quando um plano se forma, ela se desfaz, as camadas superiores caem, e o jogador ganha pontos.

O jogador pode girar ou mover cada objeto durante a descida para posicioná-lo adequadamente no plano horizontal. Para ajudar a movimentação do objeto pelo jogador, durante sua descida, o programa projeta ortogonalmente esse sólido em três planos quadriculados perpendiculares entre si.

Na ilustração abaixo, temos a representação de um único cubo. Observe que ele gera três projeções (quadrados), sendo um quadrado representado em cada plano.



Na próxima figura temos um outro objeto que é formado pela justaposição de seis cubos idênticos, formando assim um sólido rígido.



Esse sólido vai gerar outras três projeções, uma em cada plano, ao somar os quadrados formados nas três projeções teremos um total de quantos quadrados?

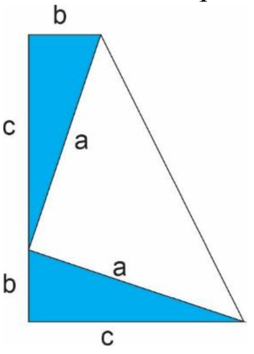
a) 12
b) 13
c) 15
d) 18

QUESTÃO 16

O enunciado do Teorema de Pitágoras, diz que

O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Esse enunciado possui diversas formas de demonstração. Observe uma delas:



A partir de um triângulo retângulo de lados **a, b, c,** sendo "**a**" sua hipotenusa, faz-se a duplicação desse triângulo de forma que os lados **b** e **c** estejam alinhados. Conforme figura ao lado, ao unir os outros vértices dos dois triângulos temos que a figura forma um trapézio retângulo, sendo a base maior **c**, base menor **b** e altura **b+c**.

Ao calcular a área das figuras temos que a área do trapézio é igual a área dos dois triângulos retângulos de lados a, b, c, somada a área do triângulo isósceles de cateto a.

Sendo assim:

$$A_{triângulo\ retângulo} + A_{triângulo\ retângulo} + A_{triângulo\ isósceles} = A_{trapézio} \Rightarrow$$

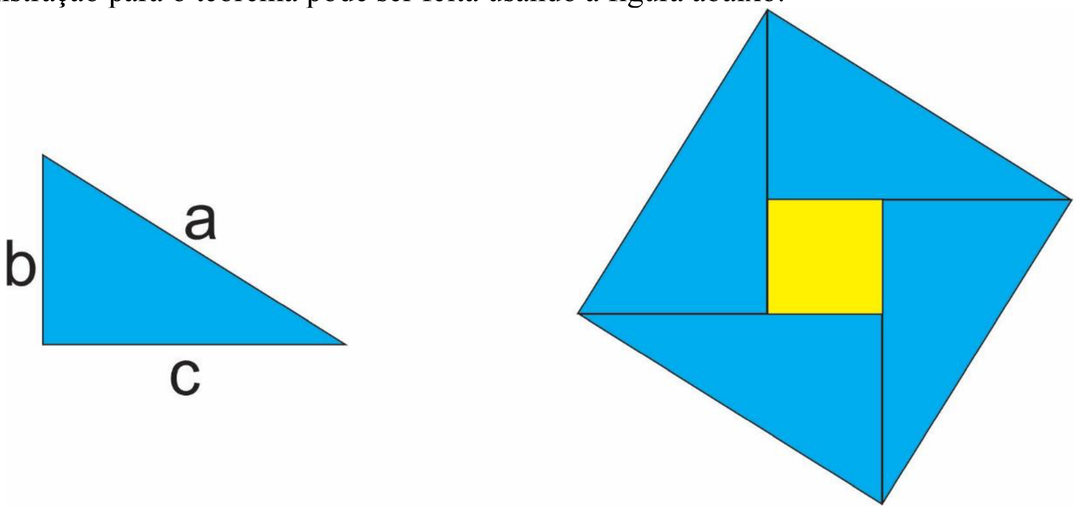
$$\left(\frac{b.c}{2}\right) + \left(\frac{b.c}{2}\right) + \frac{a.a}{2} = \frac{(b+c).(b+c)}{2} \Rightarrow$$

$$2.\left(\frac{b.c}{2}\right) + \frac{a.a}{2} = \frac{(b+c).(b+c)}{2} \Rightarrow$$

$$2bc + a^2 = b^2 + 2bc + c^2 \Rightarrow$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Outra demonstração para o teorema pode ser feita usando a figura abaixo.



Observando a última imagem, é possível observar que a área do quadrado maior é dada por a^2. Com objetivo de demonstrar o Teorema de Pitágoras podemos concluir que a área desse quadrado é igual a: $a^2=b^2+c^2$, nessa construção temos que o quadrado é formado por quatro triângulos retângulos congruentes mais um quadrado interno (amarelo). Para efetivar a demonstração precisamos da área do quadrado amarelo. Qual é a área do quadrado interno (amarelo)?

a) $b^2 - 2bc + c^2$
b) $b^2 + 2ab + a^2$
c) $a^2 - 2ab + b^2$
d) $a^2 + 2bc + c^2$

GABARITO

	A	**B**	**C**	**D**
QUESTÃO 1			X	
QUESTÃO 2		X		
QUESTÃO 3	X			
QUESTÃO 4				X
QUESTÃO 5			X	
QUESTÃO 6		X		
QUESTÃO 7	X			
QUESTÃO 8			X	
QUESTÃO 9				X
QUESTÃO 10		X		
QUESTÃO 11	X			
QUESTÃO 12			X	
QUESTÃO 13				X
QUESTÃO 14				X
QUESTÃO 15		X		
QUESTÃO 16	X			

A.2 Solicitação de autorização para aplicação de teste

SOLICITAÇÃO DE AUTORIZAÇÃO PARA APLICAÇÃO DE TESTE

Através do presente instrumento, solicitamos da diretora da Escola ____, autorização para realização do teste integrante da dissertação de mestrado, da mestranda **Barbara Ribeiro Silva Armando**, orientada pelo **Prof.º Dr. Walter dos Santos Motta Junior**, tendo como título preliminar "*Ensino de conceitos geométricos por meio do desenho geométrico*".

A coleta de dados será feita através da aplicação do teste de geometria, com objetivo de Mapeamento dos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico segundo o modelo Van Hiele.

A presente atividade será parte integrante da dissertação, do PROFMAT (Programa de Mestrado Profissional) da UFU (Universidade Federal de Uberlândia).

As informações coletadas por esse teste, serão utilizadas sem citar o nome da escola nem de qualquer aluno que venha a participar.

Araxá, ____ de ___________________ 20___.

WALTER DOS SANTOS MOTTA JUNIOR

Assinatura do Orientador

Assinatura da Orientanda

Deferido ( )

Indeferido ( )

Assinatura e carimbo do diretor

A.3 Pós-teste

PÓS-TESTE – GEOMETRIA

(Mapeamento dos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico segundo o modelo Van Hiele)

Nome:	Turma:	DATA:

- Esse teste é composto por 16 questões, distribuídas segundo os quatro níveis presentes no modelo Van Hiele;
- O tempo previsto para a realização do teste é de 40 minutos. Estamos prevendo um total de 30 minutos para a realização das resoluções e 10 minutos para preenchimento do gabarito;
- Leia atentamente cada questão. Decida qual resposta você acredita estar correta. Há apenas uma alternativa correta para cada questão. Preencha o gabarito com atenção;
- Use o próprio caderno de questões para efetuar qualquer cálculo ou desenho que julgar necessário.
- Será permitido utilizar durante o teste apenas lápis e borracha.

Esse teste está sendo realizado como parte integrante de uma dissertação de mestrado.

	A	**B**	**C**	**D**
QUESTÃO 1				
QUESTÃO 2				
QUESTÃO 3				
QUESTÃO 4				
QUESTÃO 5				
QUESTÃO 6				
QUESTÃO 7				
QUESTÃO 8				
QUESTÃO 9				
QUESTÃO 10				
QUESTÃO 11				
QUESTÃO 12				
QUESTÃO 13				
QUESTÃO 14				
QUESTÃO 15				
QUESTÃO 16				

QUESTÃO 1

Observe a obra de arte, Composição Do Contador V de THEO VAN DOESBURG, 1924.

Quantos triângulos aparecem na imagem?

a) 5

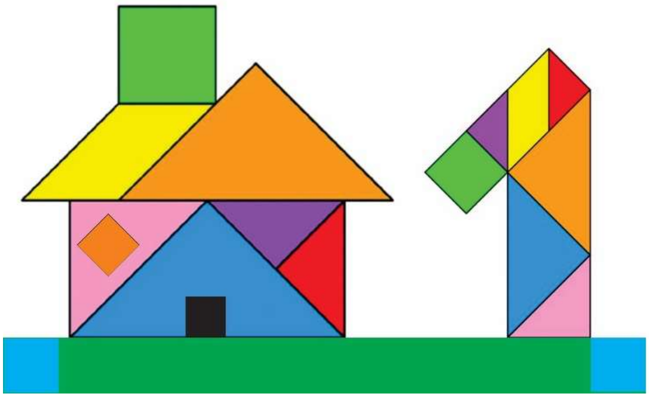
b) 6

c) 7

d) 9

QUESTÃO 2

A figura que segue foi construída ajustando-se figuras planas, quantas delas são quadrados?



a) 4

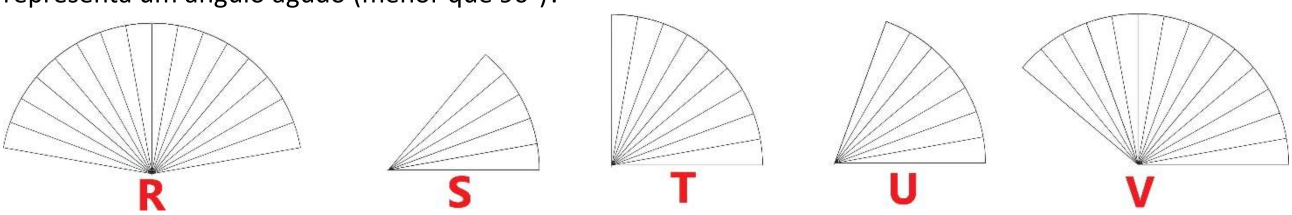
b) 5

c) 6

d) 7

QUESTÃO 3

A figura abaixo temos vários leques com aberturas diferentes, em qual (ou quais) das imagens a abertura do leque representa um ângulo agudo (menor que 90°)?



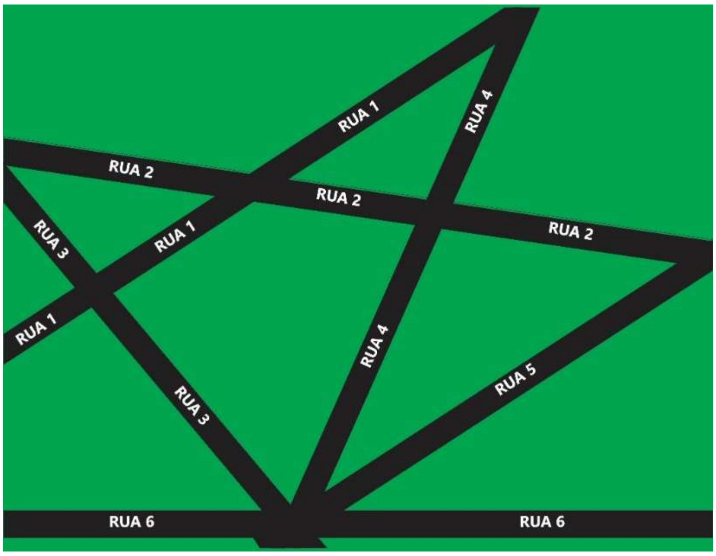
a) Apenas T.

b) Apenas R e V.

c) Apenas R.

d) Apenas S e U.

QUESTÃO 4

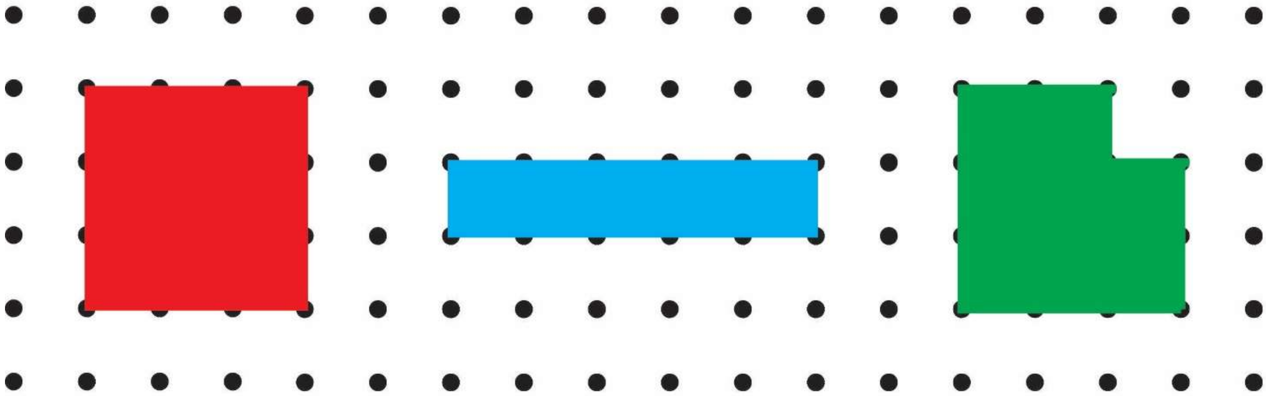


Analisando a posição das ruas, determine a alternativa correta.

a) As ruas 4 e 6 são perpendiculares.
b) As ruas 1 e 5 são paralelas.
c) As ruas 2 e 6 são concorrentes.
d) As ruas 3 e 4 são mediatrizes.

QUESTÃO 5

Na imagem abaixo temos representados no geoplano alguns polígonos.



Sobre esses polígonos podemos afirmar:

a) Possuem áreas congruentes e perímetros diferentes.
b) Possuem perímetros e áreas congruentes.
c) Possuem perímetros congruentes e áreas diferentes.
d) Possuem perímetros e áreas diferentes

QUESTÃO 6

Considere as informações sobre triângulos:

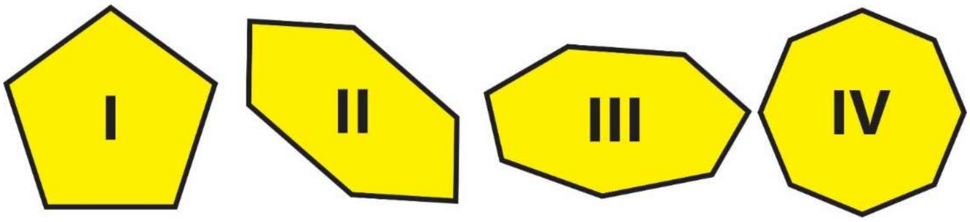
I. Esse triângulo possui três ângulos medindo 60°.
II. Esse triângulo possui dois ângulos de 45°.
III. Esse triângulo possui um ângulo de 20° e outro de 85°.

As informações garantem que:

a) I: triângulo equilátero, II: triângulo retângulo isósceles, III: triângulo escaleno.
b) I: triângulo escaleno, II: triângulo equilátero, III: triângulo retângulo.
c) I: triângulo retângulo, II: triângulo isósceles, III: triângulo equilátero.
d) I: triângulo isósceles, II: triângulo escaleno, III: triângulo retângulo isósceles.

QUESTÃO 7

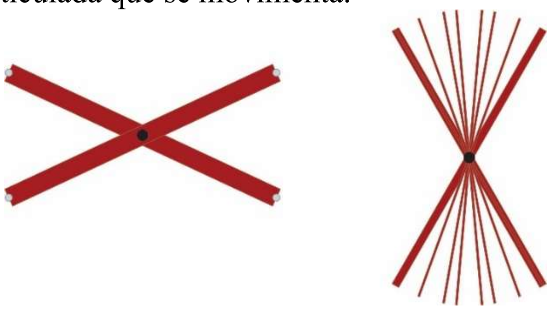
Considere a afirmação que segue relativa a polígonos: a soma de seus ângulos internos é igual a 720º. Para qual das figuras abaixo ela é verdadeira?



a) I
b) II
c) III
d) IV

QUESTÃO 8

A figura abaixo representa duas tábuas de mesmas medidas unidas por um parafuso, fixado exatamente no centro delas, produzindo uma estrutura articulada que se movimenta.

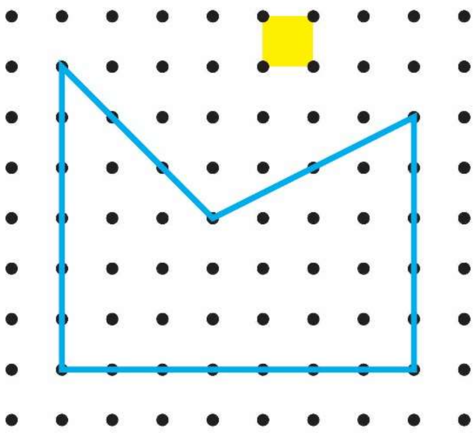


Em cada extremidade das tábuas existe um gancho e por eles passaremos um barbante, esticado totalmente, ligando um gancho a apenas um outro de forma que o barbante nunca passe pelo parafuso. Qual das alternativas é verdadeira?

a) Os barbantes sempre formam um trapézio, independentemente da posição das tábuas.
b) Quando as tábuas são posicionadas formando um ângulo de 60° os barbantes formam um quadrilátero irregular.
c) Os barbantes nunca podem formar um paralelogramo, independentemente da posição das tábuas.
d) Quando as tabuas são posicionadas perpendicularmente os barbantes podem formar um quadrado.

QUESTÃO 9

Qual a área da figura abaixo? Considerando que o quadradinho amarelo possui 1 cm².



a) 29,5 cm²

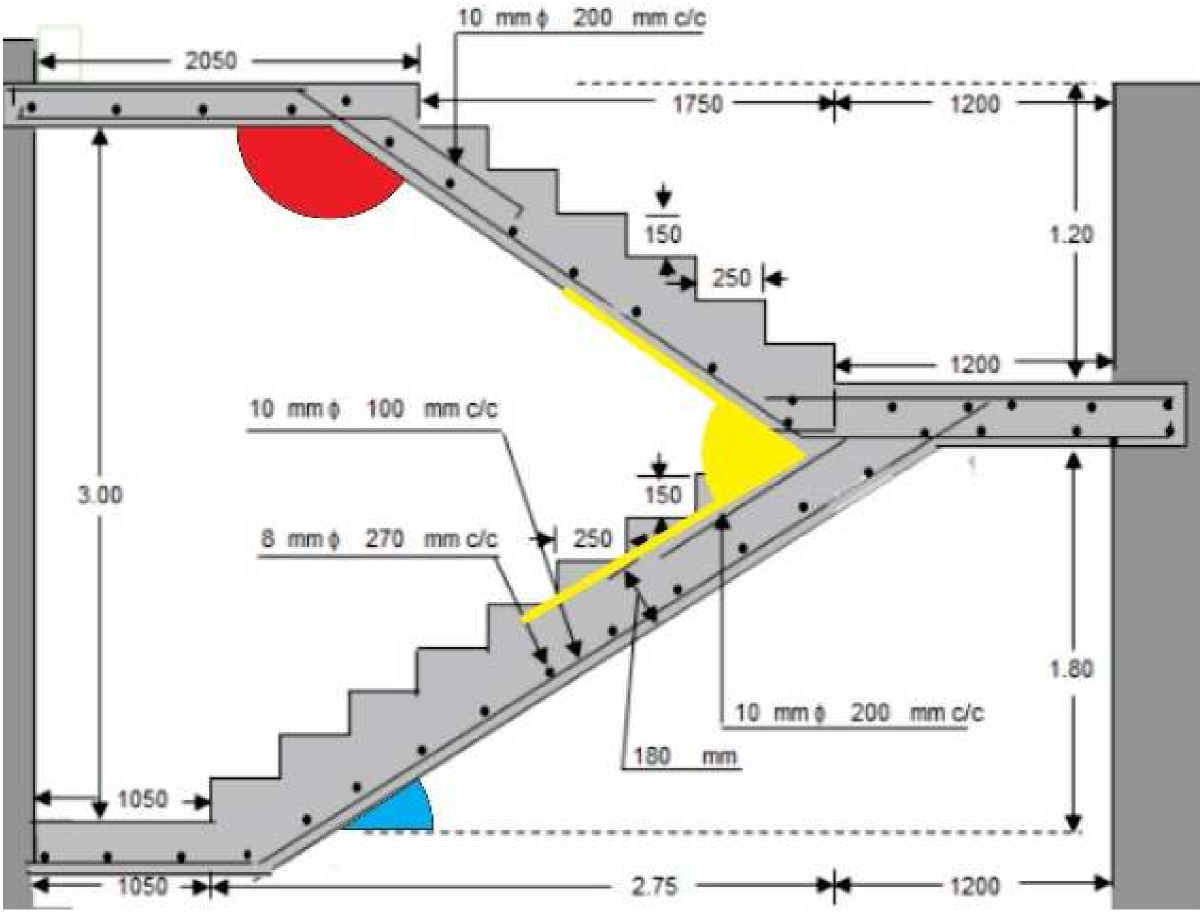
b) 38 cm²

c) 21 cm²

d) 17 cm²

QUESTÃO 10

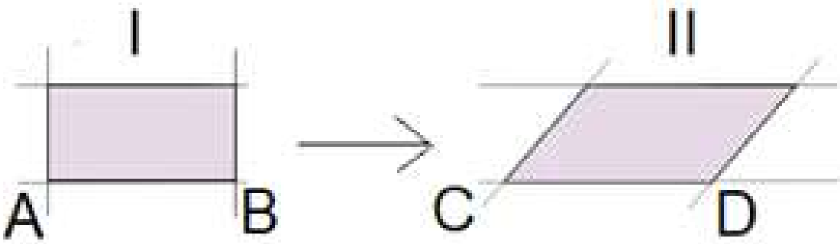
Abaixo temos uma planta de uma escada. Sabendo que o ângulo em azul mede 33° e o ângulo em vermelho mede 145°. Qual o valor do ângulo em amarelo?



a) 66°
b) 68°
c) 70°
d) 90°

QUESTÃO 11

O quadrilátero presente em I é "deformado" obtendo II, sendo que os lados AB e CD possuem as mesmas medidas.

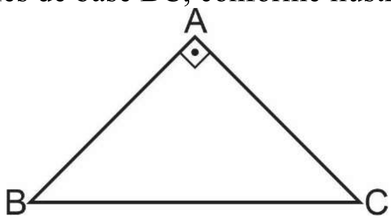


Qual das afirmações que seguem relacionam corretamente as propriedades presentes nessas figuras?

a) Os ângulos opostos em I são congruentes, isso se preserva em II.
b) A soma dos ângulos internos difere entre as figuras apresentadas.
c) Os ângulos adjacentes, suplementares em I, perdem essa característica em II.
d) As áreas das regiões sombreadas em I e II são distintas.

QUESTÃO 12

Seja ABC um triângulo retângulo isósceles de base BC, conforme ilustra a figura.



Qual dos procedimentos de desenho **<u>NÃO</u>** darão origem a uma visualização da altura desse triângulo.

a) Trace uma paralela r à BC e, posteriormente, uma perpendicular a r passando por A.
b) Trace a mediatriz de BC.
c) Trace a reta pelo ponto médio de BC e o ponto médio de AB.
d) Trace r, perpendicular a AC, por C e s, perpendicular a AB por B, seja H a interseção de r e s, ligue H até A.

QUESTÃO 13

Abaixo temos três afirmativas:

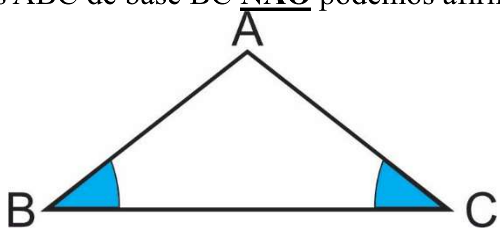
I. A figura é um paralelogramo.
II. As diagonais se cruzam formando ângulo reto.
III. As diagonais são congruentes.

Qual das afirmativas abaixo está correta?

a) Se I e II são verdadeiras então a figura pode ser classificada como um retângulo
b) Se I e III são verdadeiras então a figura pode ser classificada como um losango
c) Se I e III são falsas então a figura pode ser classificada como um triângulo.
d) Se II e III são falsas então a figura não pode ser, quadrado, nem retângulo, nem losango.

QUESTÃO 14

Considerando um triângulo isósceles ABC de base BC **<u>NÃO</u>** podemos afirmar que:



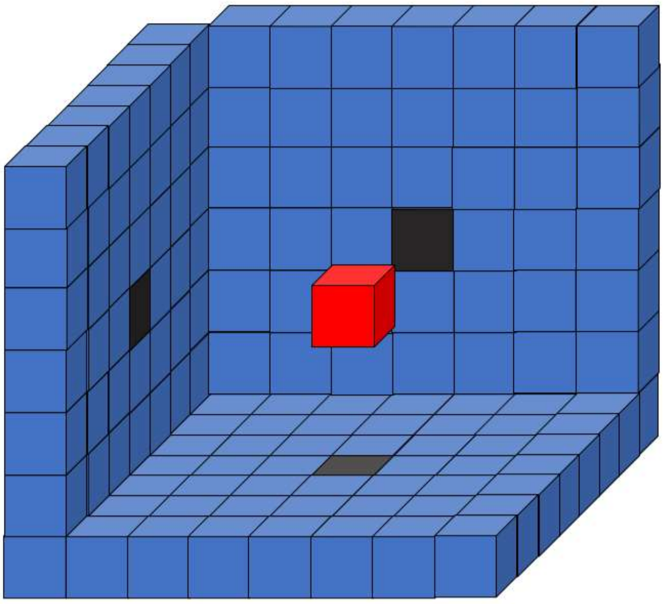
a) Ao traçar a bissetriz relativa ao lado BC, temos que ela intersecta o lado BC em um ponto N, sendo assim, os triângulos ΔABN e ΔACN são congruentes, pois $B\hat{A}N \equiv C\hat{A}N, AB \equiv AC, A\hat{B}N \equiv A\hat{C}N$ pelo caso ALA (ângulo, lado, ângulo).
b) Ao traçar a mediatriz relativa ao lado BC, temos que ela intersecta o lado BC no ponto Q, sendo assim, os triângulos ΔABQ e ΔACQ são congruentes, pois $AB \equiv AC, A\hat{B}Q \equiv A\hat{C}Q, A\hat{Q}B \equiv A\hat{Q}C,$ pelo caso LAAo (lado, ângulo, ângulo oposto) .
c) Ao traçar a mediana relativa ao lado BC, temos que ela intersecta o lado BC no ponto M, sendo assim, os triângulos ΔABM e ΔACM são congruentes, pois $AB \equiv AC, A\hat{B}M \equiv A\hat{C}M, BM \equiv CM$ pelo caso LAL (lado, ângulo, lado).
d) Ao traçar a altura relativa ao lado BC, temos que ela intersecta o lado BC no ponto H, sendo assim, os triângulos ΔABH e ΔACH são congruentes, pois $AB \equiv AC, BH \equiv CH, AH \equiv AH$ pelo caso LLL (lado, lado, lado).

QUESTÃO 15

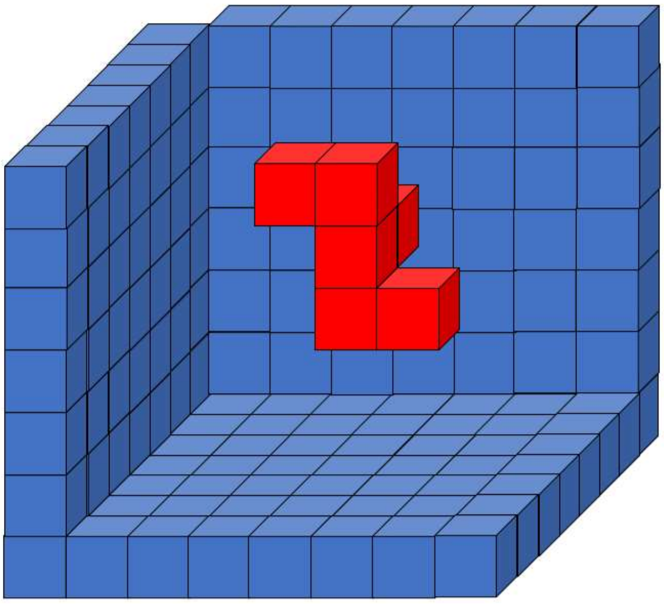
Uma nova versão do jogo Tetris consiste em empilhar e encaixar objetos tridimensionais formados por cubos que descem a tela, numa velocidade que cresce gradativamente enquanto o jogo evolui, de forma que completem planos horizontais. Quando um plano se forma, ela se desfaz, as camadas superiores caem, e o jogador ganha pontos.

O jogador pode girar ou mover cada objeto durante a descida para posicioná-lo adequadamente no plano horizontal. Para ajudar a movimentação do objeto pelo jogador, durante sua descida, o programa projeta ortogonalmente esse sólido em três planos quadriculados perpendiculares entre si.

Na ilustração abaixo, temos a representação de um único cubo. Observe que ele gera três projeções (quadrados), sendo um quadrado representado em cada plano.



Na próxima figura temos um outro objeto que é formado pela justaposição de seis cubos idênticos, formando assim um sólido rígido.



Esse sólido vai gerar outras três projeções, uma em cada plano, ao somar os quadrados formados nas três projeções teremos um total de quantos quadrados?

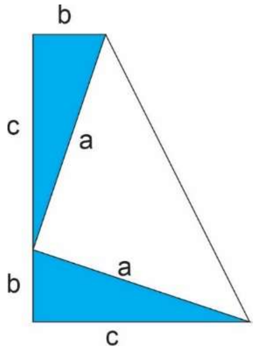
a) 12
b) 13
c) 15
d) 18

QUESTÃO 16

O enunciado do Teorema de Pitágoras, diz que

O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Esse enunciado possui diversas formas de demonstração. Observe uma delas:



A partir de um triângulo retângulo de lados **a, b, c,** sendo "**a**" sua hipotenusa, faz-se a duplicação desse triângulo de forma que os lados **b** e **c** estejam alinhados. Conforme figura ao lado, ao unir os outros vértices dos dois triângulos temos que a figura forma um trapézio retângulo, sendo a base maior **c**, base menor **b** e altura **b+c**.

Ao calcular a área das figuras temos que a área do trapézio é igual a área dos dois triângulos retângulos de lados a, b, c, somada a área do triângulo isósceles de cateto a.

Sendo assim:

$$A_{triângulo\ retângulo} + A_{triângulo\ retângulo} + A_{triângulo\ isósceles} = A_{trapézio} \Rightarrow$$

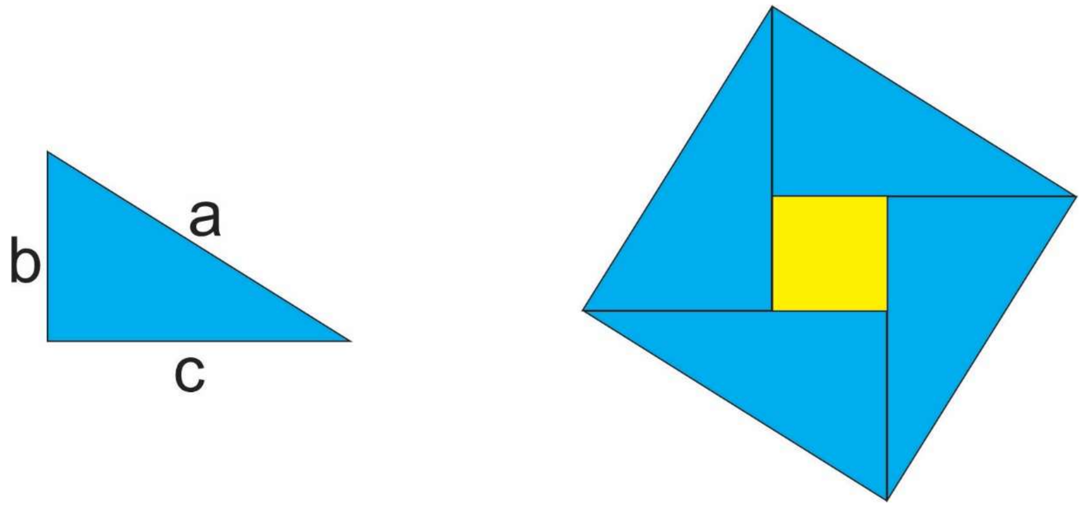
$$\left(\frac{b.c}{2}\right) + \left(\frac{b.c}{2}\right) + \frac{a.a}{2} = \frac{(b+c).(b+c)}{2} \Rightarrow$$

$$2.\left(\frac{b.c}{2}\right) + \frac{a.a}{2} = \frac{(b+c).(b+c)}{2} \Rightarrow$$

$$2bc + a^2 = b^2 + 2bc + c^2 \Rightarrow$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Outra demonstração para o teorema pode ser feita usando a figura abaixo.



Observando a última imagem, é possível observar que a área do quadrado maior é dada por a^2. Com objetivo de demonstrar o Teorema de Pitágoras podemos concluir que a área desse quadrado é igual a: $a^2=b^2+c^2$, nessa construção temos que o quadrado é formado por quatro triângulos retângulos congruentes mais um quadrado interno (amarelo). Para efetivar a demonstração precisamos da área do quadrado amarelo. Qual é a área do quadrado interno (amarelo)?

a) $b^2 - 2bc + c^2$
b) $b^2 + 2ab + a^2$
c) $a^2 - 2ab + b^2$
d) $a^2 + 2bc + c^2$

APÊNDICE B

Fotos

Figura B.1: Alunos na sala de projeção da escola realizando uma atividade de intervenção formativa .

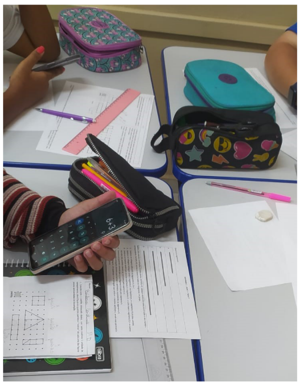


Figura B.2: Alunos na sala intitulada Sala de Desenho Geométrico, que possui mesas ao invés de cadeiras de braço, realizando uma das atividade de intervenção formativa.

Figura B.3: Alunos visitando outros grupos com objetivo de concluirem a resposta de uma das atividade de intervenção formativa.

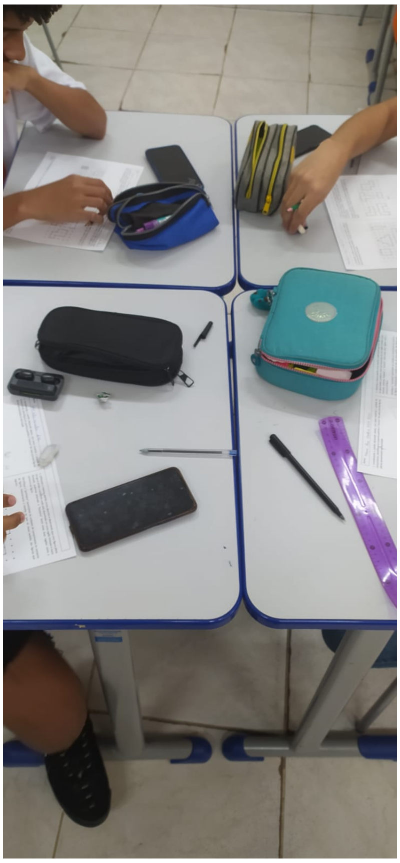


Figura B.4: Alunos na sala de Desenho Geométrico, realizando uma das atividade de intervenção formativa.

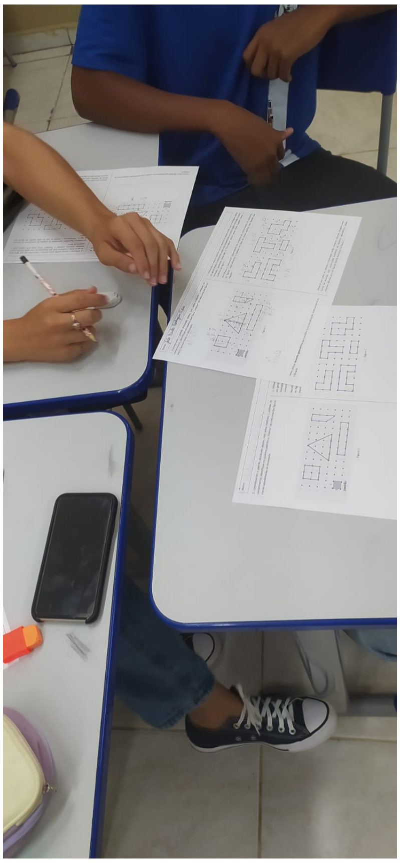


Figura B.5: Alunos na sala de Desenho Geométrico, realizando uma das atividade de intervenção formativa.

Figura B.6: Alunos na sala de Desenho Geométrico, realizando uma das atividade de intervenção formativa - sendo realizada de forma individual.

Figura B.7: Alunos do grupo de controle realizando uma das atividade de intervenção formativa dentro da própria sala de aula.

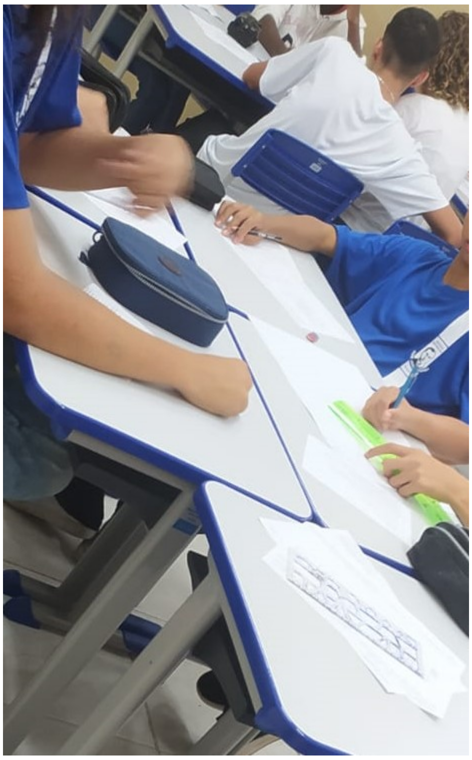


Figura B.8: Alunos na sala de Desenho Geométrico, realizando uma das atividade de intervenção formativa.

Figura B.9: Alunos na sala de projeção, realizando uma das atividade de intervenção formativa - sentados no chão por opção uma vez que a sala só possui cadeiras do tipo longarinas.

Figura B.10: Aluna na sala de Desenho Geométrico, realizando uma das atividade de intervenção formativa .

Figura B.11: Alunos na sala de projeção, realizando uma das atividade de intervenção formativa.

Figura B.12: Aluno na sala de Desenho Geométrico, realizando uma das atividade de intervenção formativa.

Figura B.13: Uma aula de Desenho Geométrico realizado com a turma livre.

Referências Bibliográficas

[1] ALVES, Andréia Rodrigues. “**O desenho geométrico no 9º ano como estratégia didática no ensino da geometria**”. Dissertação de Mestrado. PROFMAT - UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS, 2017 (citado na página 12).

[2] BALOMENOS, R, FERRINI-MUNDY, J e DICK, Thomas. “**Geometria: prontidão para o Cálculo**”. Em: ***LINDQUIST, M, M, e SHULTE, AP Aprendendo e Ensinando Geometria. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual*** (1994) (citado na página 4).

[3] CALDATTO, Marlova e PAVANELLO, Regina. “**Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais**”. Em: ***Quadrante*** 24.1 (2015), pp. 103–128 (citado nas páginas 22–24).

[4] CASTRO E OLIVEIRA, Mariângela de. “**Ressignificando conceitos de geometria plana a partir do estudo de sólidos geométricos**”. Dissertação de Mestrado. Pontifíca Universidade Católica de Minas Gerais, 2012 (citado na página 31).

[5] CROWLEY, Mary L. “**O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico**”. Em: ***Aprendendo e ensinando geometria. São Paulo: Atual*** (1994), pp. 1–19 (citado nas páginas 26, 32).

[6] DANA, Márcia E. “**Geometria: um enriquecimento para a escola elementar**”. Em: ***Aprendendo e ensinando geometria. São Paulo: Atual*** (1994), pp. 141–155 (citado na página 2).

[7] DE VILLIERS, Michael. “**Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele.**” Em: ***Educação matemática pesquisa: Revista do programa de estudos pós-graduados em educação matemática*** 12.3 (2010) (citado na página 31).

[8] DEGUIRE, Linda J. “**Geometria: um caminho para o ensino da resolução de problemas do jardim-de-infância à nona série**”. Em: ***Aprendendo e ensinando Geometria. São Paulo: Atual*** (1994), pp. 73–85 (citado na página 2).

[9] DIÁRIO DO EXECUTIVO DO ESTADO DE MINAS GERAIS. ***RESOLUÇÃO SEE Nº 4.234, DE 22 DE NOVEMBRO DE 2019.*** Disponível em: https://srepassos.educacao.mg.gov.br/index.php/9-noticias/137-resolucao-see-n-4-234-de-22-de-novembro-de-2019. Acesso em: 22 de outubro de 2022. (2019) (citado na página 6).

[10] DIÁRIO DO EXECUTIVO DO ESTADO DE MINAS GERAIS. ***RESOLUÇÃO SEE Nº 4.657/2021, DE 10 DE NOVEMBRO DE 2021.*** url: https://www2.educacao.mg.gov.br/images/Resolu%5C%C3%5C%A7%5C%C3%5C%A3o_SEE_n._4657_de_10_novembro_de_2021_PDF_IOF.pdf (citado nas páginas 6, 10).

[11] GIONGO, Affonso Rocha. ***Curso de desenho geométrico***. Nobel, 1984 (citado nas páginas 33, 40).

[12] GOVERNO FEDERAL. ***Escolha PNLD 2021 – Objeto 2 - Áreas do conhecimento***. Disponível em: https://www.gov.br/fnde/pt-br/acesso-a-informacao/acoes-e-programas/programas/programas-do-livro/pnld/escolha-pnld-2021-2013-objeto-2-areas-do-conhecimento#:~:text=A%20escolha%20dos%20livros%20did%C3%A1ticos,a%2011%2F08%2F2021.. Acesso em: 22 de outubro de 2022. (2020).

[13] GOVERNO FEDERAL. ***LEI Nº 13.415 DE 16 DE FEVEREIRO DE 2017***. Disponível em: https://legislacao.presidencia.gov.br/atos/?tipo=LEI&numero=13415&ano=2017&ato=115MzZE5EeZpWT9be. Acesso em: 22 de outubro de 2022. (2017) (citado na página 5).

[14] HERSHKOWITZ, Rina, BRUCKHEIMER, Maxim e VINNER, Sholomo. "**Atividades com professores baseadas em pesquisa cognitiva**". Em: ***Aprendendo e Ensinando Geometria. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual*** (1994) (citado na página 2).

[15] MILAUSKAS, George A. "**Problemas de geometria criativos podem levar à resolução criativa de problemas**". Em: ***Aprendendo e ensinando Geometria. São Paulo: Atual*** (1994), pp. 1–19 (citado na página 3).

[16] NASSER, Lilian e SANT'ANNA, Neide P. ***Geometria segundo a teoria de Van Hiele***. 3ª ed. Vol. 1. Projeto Fundão, 2000 (citado na página 26).

[17] NETO, Antonio Caminha Muniz. ***Coleção PROFMAT: Geometria***. 1ª ed. Vol. 1. SBM, 2013.

[18] PAVANELLO, Regina Maria. "**O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências**". Em: ***Zetetiké*** 1.1 (1993) (citado na página 12).

[19] POLYA, George. ***A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático***. TRADUÇÃO E ADAPTAÇÃO: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995 (citado na página 40).

[20] PUC-SP. ***Instituto São Paulo Geogebra***. Disponível em: https://www.pucsp.br/geogebrasp/geogebra.html. Acesso em: 4 de janeiro de 2023. (2009) (citado na página 32).

[21] SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO DE MINAS GERAIS. ***CATÁLOGO DE ELETIVAS***. Disponível em: https://www2.educacao.mg.gov.br/images/documentos/Novo%20Ensino%20M%C3%A9dio%202022_Cat%C3%A1logo%20de%20Eletivas.pdf. Acesso em: 22 de outubro de 2022. (2019) (citado nas páginas 7–9, 11).

[22] SEE-MG. ***Planos de Curso CRMG***. Disponível em: https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/index.php/plano-de-cursos-crmg. Acesso em: 23 de outubro de 2022. (2020) (citado nas páginas 11, 66–69).

[23] SEE-MG. ***Planos de Estudos Tutorados - PET 2020 - Ensino Fundamental Anos Finais***. Disponível em: https://estudeemcasa.educacao.mg.gov.br/REANP-2020/ef-anos-finais-2020. Acesso em: 25 de janeiro de 2023. (2020) (citado na página 69).

[24] SEE-MG. ***Planos de Estudos Tutorados - PET 2021 - Ensino Fundamental Anos Finais***. Disponível em: https://estudeemcasa.educacao.mg.gov.br/REANP-2021/ens-fund-anos-finais-2021_. Acesso em: 25 de janeiro de 2023. (2021) (citado na página 69).

[25] USISKIN, Zalman. ***Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry***. Universidade de Chicago, 1982.

[26] WAGNER, Eduardo. "**Uma introdução às construções geométricas**". Em: ***Rio de Janeiro: OBMEP*** (2009) (citado nas páginas 13, 16).