



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

PROJETO DE SISTEMAS DE
ENGENHARIA USANDO O
ALGORITMO DE PARTÍCULAS
VIBRANTES

JÉSSICA CRISTIANE ANDRADE

UBERLÂNDIA, MG

2023

JÉSSICA CRISTIANE ANDRADE

PROJETO DE SISTEMAS DE ENGENHARIA USANDO O
ALGORITMO DE PARTÍCULAS VIBRANTES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos para obtenção do título de **Mestre em Engenharia Mecânica**.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Linha de Pesquisa: Projetos de Sistemas Mecânicos.

Universidade Federal de Uberlândia (UFU)

Faculdade de Engenharia Mecânica

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Orientador: Fran Sérgio Lobato

Uberlândia, MG

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

A553p
2023 Andrade, Jéssica Cristiane, 1996-
 Projeto de Sistemas de engenharia usando o algoritmo de partículas
 vibrantes [recurso eletrônico] / Jéssica Cristiane Andrade. - 2023.

 Orientador: Fran Sérgio Lobato.
 Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
 Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

 Modo de acesso: Internet.

 Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2023.7101>

 Inclui bibliografia.

 Inclui ilustrações.

 1. Engenharia mecânica. I. Lobato, Fran Sérgio, 1976-, (Orient.). II.
 Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em
 Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 621.01

Glória Aparecida
Bibliotecária Documentalista - CRB-6/2047



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3239-4282 - www.posmecanicaufu.com.br - secposmec@mecanica.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, nº 634, PPGEM				
Data:	20/07/2023	Hora de início:	09:00	Hora de encerramento:	11 : 30
Matrícula do Discente:	12122EMC005				
Nome do Discente:	Jéssica Cristiane Andrade				
Título do Trabalho:	PROJETO DE SISTEMAS DE ENGENHARIA USANDO O ALGORITMO DE PARTÍCULAS VIBRANTES				
Área de concentração:	Mecânica dos Sólidos e Vibrações				
Linha de pesquisa:	Dinâmica de Sistemas Mecânicos				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Não se aplica				

Reuniu-se por meio de videoconferência a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Professores Doutores: Luiz Eduardo dos Santos Paes - FEMEC/UFU; Gustavo Mendes Platt - FURG; e Fran Sérgio Lobato - FEQUI/UFU, orientador da candidata.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Fran Sérgio Lobato, apresentou a Comissão Examinadora e a candidata, agradeceu a presença do público, e concedeu à Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação da Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimeada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovada.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Fran Sergio Lobato, Professor(a) do Magistério Superior**, em 20/07/2023, às 11:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Luiz Eduardo dos Santos Paes, Professor(a) do Magistério Superior**, em 20/07/2023, às 11:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gustavo Mendes Platt, Usuário Externo**, em 20/07/2023, às 11:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4595686** e o código CRC **2938C13C**.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por tantas graças recebidas, por sempre iluminar meu caminho e por me acompanhar em todos os momentos da minha vida. Agradeço principalmente por me permitir vivenciar mais essa conquista e compreender que tudo tem seu momento certo.

Dedico um agradecimento especial aos meus pais pela vida e por todo amor, apoio, educação e incentivo. Obrigada por estarem sempre comigo e por nunca medirem esforços para me verem feliz e realizada. Palavras não são suficientes para expressar o quanto sou grata pela vida de vocês. Obrigada por absolutamente tudo.

Ao meu irmão pelo amor, amizade e companheirismo. Um exemplo para mim a ser seguido e que me ensinou por meio de sua trajetória a nunca desistir dos meus sonhos.

Ao meu namorado por estar cada vez mais presente fisicamente nos últimos tempos. Gratidão pelo amor, afeto, carinho e por me apoiar, compreender e sonhar junto comigo.

A todos os meus amigos e familiares que estiveram presentes durante essa caminhada e que sempre acreditaram em mim.

Agradeço também à Universidade Federal de Uberlândia e à Faculdade de Engenharia Mecânica pela oportunidade de participar do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, realizando o curso de mestrado, e a todos professores que estiveram presentes neste processo.

Agradeço à FAPEMIG pelo apoio financeiro durante este período.

Por fim, sou e serei eternamente grata ao Prof. Dr. Fran Sérgio Lobato pela orientação tão bem conduzida, pela oportunidade, pela segurança e pelos conhecimentos transmitidos. Obrigada por todo o auxílio e acompanhamento. A todos que direta ou indiretamente tornaram esta conquista possível, os meus mais sinceros agradecimentos.

RESUMO

O projeto de sistemas configura um dos pilares mais importantes em engenharia. Isto se deve ao número de aplicações que podem ser desenvolvidas a partir deste princípio. Projetar significa reduzir custos, economizar tempo e recursos para garantir a qualidade, eficiência e segurança dos produtos. Para auxiliar a tomada de decisões, as ferramentas de otimização baseadas em população têm sido empregadas. Resolver um problema de projeto significa tratar um problema com mais de um objetivo, os quais são em sua maioria conflitantes, isto é, uma melhora em qualquer um desses objetivos não resulta, necessariamente, na melhora dos demais considerados. A solução ótima desses problemas, diferentemente do que ocorre na otimização com um único objetivo, consiste na obtenção de soluções não-dominadas que formam a Curva de Pareto. Nas últimas décadas, inúmeros algoritmos baseados em população têm sido propostos para o tratamento de problemas de otimização. Dentre estes, o Algoritmo de Partículas Vibrantes se destaca pelos resultados promissores na área de projetos no contexto mono-objetivo. Neste sentido, este trabalho tem como objetivos: *i*) avaliar o Algoritmo de Partículas Vibrantes como ferramenta para resolver problemas de projeto no contexto mono-objetivo; e *ii*) estender o Algoritmo de Partículas Vibrantes para o contexto multi-objetivo através da incorporação de três operadores ao algoritmo original: dominância de Pareto, distância da multidão e uma estratégia de mutação. Para agilizar o processo de convergência e evitar ótimos locais, um repositório externo é considerado. O desempenho da metodologia proposta é avaliado considerando problemas matemáticos e de projeto em engenharia. Os resultados obtidos demonstram que o Algoritmo de Partículas Vibrantes (nos contextos mono e multi-objetivo) configura uma interessante estratégia para o tratamento de problemas de otimização e projeto quando comparado a outras estratégias evolutivas em termos de parâmetros estatísticos, métricas de desempenho e análises gráficas.

Palavras-chave: Projeto de Sistemas de Engenharia, Algoritmo de Partículas Vibrantes, Otimização Heurística, Otimização Multi-objetivo.

ABSTRACT

Systems design is one of the most important pillars in engineering. This is due to number of applications that can be developed from this principle. Designing means reducing costs, saving time and resources to guarantee of quality, efficiency and safety of products. To assist decision-making, population-based optimization tools have been employed. Solving a design problem means treating a problem with more than one objective, most of which are conflicting, that is, an improvement in any one of these objectives doesn't result, necessarily, in an improvement of the others. The optimal solution for these problems, unlike the optimization with an single objective, is the attainment of non-dominated solutions that form the Pareto Curve, also know as Pareto Optimal. In recent decades, numerous population-based algorithms have been proposed for the treatment of optimization problems. Among these, the Vibrating Particles System algorithm configures a promising strategy to solve mono-objective problems. This work aims to: *i*) evaluate the Vibrating Particles System algorithm as a tool to solve design problems in mono-objective context; and *ii*) extend the Vibrating Particles System algorithm to multi-objective context by incorporating three operators to original algorithm: Pareto dominance, crowd distance and a mutation strategy. To expedite the convergence process and avoid local optima, an external repository is considered. The performance of the proposed methodology is evaluated considering mathematical and design problems in engineering. The obtained results demonstrate that the Vibrating Particles System algorithm (in single and multi-objective contexts) configures an interesting strategy for the treatment of optimization and design problems when compared to other evolutionary strategies in terms of statistical parameters, performance metrics and graphical analysis.

Keywords: Engineering Systems Design, Vibrating Particles System algorithm, Heuristic Optimization, Multi-objective Optimization.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Categorias dos algoritmos de otimização	6
Figura 2 – Métodos de resolução na otimização multi-objetivo	16
Figura 3 – Exemplo da compra de um carro: Preço x Conforto	20
Figura 4 – Metas na otimização multi-objetivo	22
Figura 5 – Vibração livre de um sistema com um grau de liberdade com amortecimento	26
Figura 6 – Comparação do movimento de sistemas com diferentes tipos de amortecimento	27
Figura 7 – Fluxograma do Algoritmo de Partículas Vibrantes	28
Figura 8 – Vibração do sistema subamortecido	30
Figura 9 – Movimento das partículas no plano para a função estudada	36
Figura 10 – Fluxograma do algoritmo <i>Multi-objective Vibrating Particles System</i> proposto	37
Figura 11 – Percentual de redução da parcela da população afetada pelo operador de mutação ao longo das gerações	40
Figura 12 – Influência do número de partículas no APV	46
Figura 13 – Influência do número de gerações no APV	48
Figura 14 – Influência do parâmetro α no APV	50
Figura 15 – Influência do parâmetro w_1 no APV	52
Figura 16 – Influência do parâmetro p no APV	54
Figura 17 – Projeto de uma mola de tensão/compressão	58
Figura 18 – Projeto de um vaso de pressão cilíndrico	62
Figura 19 – Projeto de uma viga soldada	65
Figura 20 – Projeto de uma treliça com três barras	69
Figura 21 – Projeto de um redutor de velocidade	71
Figura 22 – Curva de Pareto para a função ZDT-1	79
Figura 23 – Curva de Pareto para a função ZDT-2	80
Figura 24 – Curva de Pareto para a função ZDT-3	82
Figura 25 – Curva de Pareto para a função ZDT-4	83
Figura 26 – Curva de Pareto para a função ZDT-6	84
Figura 27 – Representação esquemática de uma treliça de duas barras	85
Figura 28 – Curva de Pareto para o projeto de uma treliça com duas barras	86
Figura 29 – Representação esquemática de uma viga I	88
Figura 30 – Curva de Pareto para o projeto de uma viga I	89
Figura 31 – Representação esquemática de uma viga soldada	90
Figura 32 – Curva de Pareto para o projeto de uma viga soldada	91
Figura 33 – Ótimo de Pareto para o problema do impacto lateral de um carro	94
Figura 34 – Representação esquemática do problema de planejamento de recursos hídricos	96

Figura 35 – Comparação entre as curvas de Pareto obtidas considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do planejamento de recursos hídricos	98
Figura 36 – Representação esquemática da garra robótica	99
Figura 37 – Relações geométricas entre as variáveis de projeto no problema da garra robótica	99
Figura 38 – Curva de Pareto para o problema da garra robótica	102
Figura 39 – Algumas configurações obtidas usando o MOVPS para o problema do projeto de uma garra robótica	103
Figura 40 – Comparação entre as variáveis de projeto obtidas pelo MOVPS e NSGA-II para o problema da garra robótica	104
Figura 41 – Representação esquemática de um absorvedor dinâmico de vibração com dois graus de liberdade	105
Figura 42 – Frequência versus amplitude de deslocamento para um absorvedor dinâmico de vibração linear e não linear	108
Figura 43 – Representação esquemática dos objetivos no problema do absorvedor dinâmico de vibração	108
Figura 44 – Curva de Pareto para o problema do projeto de um absorvedor dinâmico de vibração considerando diferentes estratégias de otimização	109
Figura 45 – Amplitude versus frequência considerando os pontos A e A ¹ do problema do absorvedor dinâmico de vibração	110
Figura 46 – Comparação entre as variáveis de projeto obtidas considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de um absorvedor dinâmico de vibração	112
Figura 47 – Amplitude versus frequência considerando alguns pontos obtidos pelo MOVPS para o problema do projeto de um absorvedor dinâmico de vibração	113
Figura 48 – Curva de Pareto para o problema da mistura de catalisadores considerando diferentes estratégias de otimização	115
Figura 49 – Perfis de concentração e controle ótimo para o problema da mistura de catalisadores	116
Figura 50 – Comparação entre as variáveis de projeto obtidas considerando diferentes estratégias de otimização para o problema da mistura de catalisadores	118
Figura 51 – Representação esquemática do secador rotativo	119
Figura 52 – Curva de Pareto para o problema do secador rotativo considerando diferentes estratégias de otimização	121
Figura 53 – Comparação entre as variáveis de projeto obtidas considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do secador rotativo	123
Figura 54 – Perfis de umidade e temperatura obtidos pelo MOVPS para o problema do secador rotativo	124

Figura 55 – Representação esquemática da produção de estireno via desidrogenação catalítica de etilbenzeno	125
Figura 56 – Curva de Pareto para o problema do reator de estireno considerando diferentes estratégias de otimização	134
Figura 57 – Comparação entre as variáveis de projeto obtidas pelo MOVPS e MODE para o problema do reator de estireno	137
Figura 58 – Perfis de temperatura, pressão e fluxo molar industriais e obtidos pelo MOVPS para o problema do reator de estireno	139

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros iniciais utilizados	31
Tabela 2 – Inicialização do APV	31
Tabela 3 – População inicial ordenada na matriz de memória	32
Tabela 4 – Seleção de <i>GP</i> e <i>BP</i> para cada partícula	33
Tabela 5 – Demais parâmetros necessários para atualização das partículas	33
Tabela 6 – Aleatórios gerados e novas posições obtidas	34
Tabela 7 – Novas posições adequadas ao espaço de busca e valores da função objetivo	34
Tabela 8 – Matriz de memória atualizada	35
Tabela 9 – Parâmetros considerados para a análise de sensibilidade no APV	45
Tabela 10 – Influência do tamanho da população no APV	47
Tabela 11 – Influência do número de gerações no APV	49
Tabela 12 – Influência do parâmetro α no APV	51
Tabela 13 – Influência do parâmetro w_1 no APV	53
Tabela 14 – Influência do parâmetro p no APV	55
Tabela 15 – Solução ótima encontrada considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de uma mola de tensão/compressão	59
Tabela 16 – Atendimento das restrições na solução ótima considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de uma mola de tensão/compressão	60
Tabela 17 – Consolidado dos resultados considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de uma mola de tensão/compressão	60
Tabela 18 – Solução ótima encontrada considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de um vaso de pressão	63
Tabela 19 – Atendimento das restrições na solução ótima considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de um vaso de pressão	63
Tabela 20 – Consolidado dos resultados considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de um vaso de pressão	64
Tabela 21 – Solução ótima encontrada considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de uma viga soldada	67
Tabela 22 – Atendimento das restrições na solução ótima considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de uma viga soldada	67
Tabela 23 – Consolidado dos resultados considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de uma viga soldada	68
Tabela 24 – Solução ótima encontrada e atendimento às restrições de desigualdade considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de uma treliça com três barras	70

Tabela 25 – Consolidado dos resultados considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de uma treliça com três barras	70
Tabela 26 – Solução ótima encontrada considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de um redutor de velocidade	73
Tabela 27 – Atendimento das restrições na solução ótima considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de um redutor de velocidade	73
Tabela 28 – Consolidado dos resultados considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de um redutor de velocidade	74
Tabela 29 – Parâmetros considerados para a otimização das funções ZDT	78
Tabela 30 – Métricas de desempenho para a função ZDT-1	79
Tabela 31 – Métricas de desempenho para a função ZDT-2	80
Tabela 32 – Métricas de desempenho para a função ZDT-3	81
Tabela 33 – Métricas de desempenho para a função ZDT-4	82
Tabela 34 – Métricas de desempenho para a função ZDT-6	84
Tabela 35 – Alguns pontos da curva de Pareto obtidos pelo algoritmo MOVPS para o projeto de uma treliça com duas barras	87
Tabela 36 – Alguns pontos da curva de Pareto obtidos pelo algoritmo MOVPS para o projeto de uma viga I	89
Tabela 37 – Alguns pontos da curva de Pareto obtidos pelo algoritmo MOVPS para o projeto de uma viga soldada	92
Tabela 38 – Alguns pontos da curva de Pareto obtidos pelo algoritmo MOVPS para o problema do impacto lateral de um carro	95
Tabela 39 – Alguns pontos da curva de Pareto obtidos pelo algoritmo MOVPS para o problema da garra robótica	102
Tabela 40 – Alguns pontos da curva de Pareto obtidos pelo algoritmo MOVPS para o problema do projeto de um absorvedor dinâmico de vibração	110
Tabela 41 – Alguns pontos da curva de Pareto obtidos pelo algoritmo MOVPS para o problema da mistura de catalisadores	115
Tabela 42 – Condições operacionais para o secador rotativo	121
Tabela 43 – Alguns pontos da curva de Pareto obtidos pelo algoritmo MOVPS para o problema do secador rotativo	122
Tabela 44 – Fator pré-exponencial e energia de ativação para cada reação no processo de produção de estireno	129
Tabela 45 – Constantes para determinação do calor de cada reação no processo de produção de estireno	129
Tabela 46 – Capacidade calorífica molar e peso molecular para os componentes do processo de produção de estireno	130
Tabela 47 – Parâmetros de projeto e condições de operação para o reator de estireno industrial	131

Tabela 48 – Valores simulados e industriais na saída do reator de estireno	131
Tabela 49 – Alguns pontos da curva de Pareto obtidos pelo algoritmo MOVPS para o problema do reator de estireno	135
Tabela 50 – Condições ótimas de operação para o reator adiabático considerando a função lucro	136

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
2.1	O QUE É OTIMIZAÇÃO?	5
2.2	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	5
2.3	CLASSIFICAÇÃO DOS MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO	6
2.4	MÉTODOS HEURÍSTICOS CLÁSSICOS	8
2.4.1	ALGORITMOS GENÉTICOS	8
2.4.2	ENXAME DE PARTÍCULAS	8
2.4.3	EVOLUÇÃO DIFERENCIAL	9
2.4.4	COLÔNIA DE VAGALUMES	9
2.4.5	RECOZIMENTO SIMULADO	9
2.4.6	COLÔNIA DE FORMIGAS	10
2.5	TRATAMENTO DE RESTRIÇÕES	10
2.5.1	MÉTODO DA PENA DE MORTE	10
2.5.2	MÉTODOS BASEADOS EM FUNÇÕES DE PENALIDADE	11
2.5.3	MÉTODOS BASEADOS NA PRESERVAÇÃO DAS SOLUÇÕES VIÁVEIS	12
2.6	TRATAMENTO DE PROBLEMAS COM VARIÁVEIS INTEIRAS E DISCRETAS	13
2.7	PROBLEMAS MONO X MULTI-OBJETIVOS	15
2.8	OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVO	15
2.8.1	TRANSFORMAÇÃO DO PROBLEMA MULTI EM MONO-OBJETIVO	16
2.8.2	ÓTIMO DE PARETO	19
2.8.3	METAS EM OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVO	21
3	ALGORITMO DE PARTÍCULAS VIBRANTES	25
3.1	CONCEPÇÃO CONCEITUAL	25
3.2	PASSOS BÁSICOS DO APV	27
3.3	APLICAÇÃO PASSO A PASSO DO APV	30
3.4	EXTENSÃO DO APV PARA O CONTEXTO MULTI-OBJETIVO	36
4	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	43
4.1	INFLUÊNCIA DO TAMANHO DA POPULAÇÃO	45
4.2	INFLUÊNCIA DO NÚMERO MÁXIMO DE GERAÇÕES	47
4.3	INFLUÊNCIA DO PARÂMETRO α	49
4.4	INFLUÊNCIA DO PARÂMETRO w_1	51

4.5	INFLUÊNCIA DO PARÂMETRO p	53
4.6	CONSOLIDADO DOS RESULTADOS	55
5	APLICAÇÕES MONO-OBJETIVOS	57
5.1	PROJETO DE UMA MOLA DE TENSÃO/COMPRESSÃO	58
5.2	PROJETO DE UM VASO DE PRESSÃO	61
5.3	PROJETO DE UMA VIGA SOLDADA	64
5.4	PROJETO DE UMA TRELIÇA COM 3 BARRAS	68
5.5	PROJETO DE UM REDUTOR DE VELOCIDADE	71
5.6	CONSOLIDADO DOS RESULTADOS	74
6	APLICAÇÕES MULTI-OBJETIVOS	77
6.1	FUNÇÕES MATEMÁTICAS	77
6.1.1	ZDT-1	78
6.1.2	ZDT-2	79
6.1.3	ZDT-3	81
6.1.4	ZDT-4	81
6.1.5	ZDT-6	83
6.1.6	CONSOLIDADO DOS RESULTADOS DAS FUNÇÕES ZDT	84
6.2	PROJETO DE SISTEMAS DE ENGENHARIA	85
6.2.1	TRELIÇA COM DUAS BARRAS	85
6.2.2	VIGA I	87
6.2.3	VIGA SOLDADA	90
6.2.4	IMPACTO LATERAL DE UM AUTOMÓVEL	92
6.2.5	PLANEJAMENTO DE RECURSOS HÍDRICOS	95
6.2.6	GARRA ROBÓTICA	97
6.2.7	ABSORVEDOR DINÂMICO DE VIBRAÇÃO	105
6.2.7.1	MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA	105
6.2.7.2	PERFIL DA AMPLITUDE VERSUS FREQUÊNCIA	107
6.2.7.3	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVO	108
6.2.8	MISTURA ÓTIMA DE CATALISADORES	113
6.2.9	SECADOR ROTATIVO	117
6.2.10	PRODUÇÃO DE ESTIRENO	123
6.2.10.1	PROCESSO QUÍMICO PARA A PRODUÇÃO DE ESTIRENO	125
6.2.10.2	MODELAGEM MATEMÁTICA DO PROCESSO	125
6.2.10.3	SIMULAÇÃO DO PROCESSO	130
6.2.10.4	OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVO	132
6.3	CONSOLIDADO DOS RESULTADOS	138
7	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	141

7.1	CONCLUSÕES	141
7.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	142
	REFERÊNCIAS	143

1 INTRODUÇÃO

A área de otimização pode ser considerada como um dos pilares fundamentais da engenharia, uma vez que esta ferramenta matemática é empregada, dentre outras finalidades, para o projeto de sistemas. Neste caso, o objetivo é o desenvolvimento de produtos mais eficientes e menos onerosos, bem como a elaboração de planos e procedimentos que aprimorem o funcionamento daqueles já existentes. Segundo [Ravindran, Ragsdell e Reklaitis \(2009\)](#), “o projeto é a essência da engenharia e a otimização é a essência do projeto”. Todo o desenvolvimento tecnológico e social presente no mundo atual se deve em grande parte à engenharia, a qual nas suas diversas áreas de atuação aplica princípios da matemática e da ciência para solucionar problemas.

Neste cenário, em áreas relacionadas aos processos de produção, logística e manutenção, comunicação, transportes, tecnologia e computação, os engenheiros são responsáveis pela obtenção de produtos e serviços práticos, eficientes, eficazes, seguros, ambientalmente corretos e econômicos. Para essa finalidade, os projetos configuram como a melhor ferramenta para alcançar tais objetivos, permitindo avaliar quais estratégias conduzirão à maior chance de sucesso. De forma metódica, com o ajuste das disponibilidades e necessidades relativas ao assunto de interesse, os projetos auxiliam no processo de tomada de decisões e na resolução de problemas de modo mais objetivo, além de possibilitar a percepção de experiências passadas sob um ponto de vista diferente: contratempos e falhas podem ser úteis em novas situações ([COOK, 2023](#)).

O desenvolvimento e aprimoramento das técnicas de otimização têm sido impulsionados pelas demandas crescentes de produtos competitivos no mercado, com aplicações em diferentes indústrias (aeroespacial, automotiva, química, elétrica, civil, entre outras). Neste contexto, [Rao \(2009\)](#) apresenta aplicações típicas da otimização na engenharia, dentre as quais podem ser citadas: o projeto de aeronaves e estruturas aeroespaciais com o menor peso; o projeto de estruturas da engenharia civil (fundações, pontes, torres, barragens) com mínimo custo; planejamento, controle e programação ótimos da produção; projeto ótimo de redes elétricas; projeto ótimo de equipamentos e plantas de processos químicos, entre outras.

Especificamente na engenharia mecânica, podem ser encontradas aplicações em projetos de sistemas de engenharia ([LOBATO, 2008](#)), problemas de otimização de trajetórias ([HUSSEIN et al., 2012](#)), determinação de parâmetros de corte em processos de usinagem ([ZAIN; HARON; SHARIF, 2010](#)), projeto de bombas, turbinas e trocadores de calor ([PATEL; SAVSANI; TAWHID, 2019](#)), projeto de engrenagens, molas, vasos de pressão, entre outros componentes mecânicos ([ESKANDAR et al., 2012](#)).

Para a resolução destes problemas de otimização em engenharia é importante que sejam claramente definidas as condições/restrições do sistema a ser investigado, as variáveis a serem

determinadas no projeto e o(s) objetivo(s) que deve(m) ser alcançado(s) (RAVINDRAN; RAGS-DELL; REKLAITIS, 2009). Para essa finalidade, as metodologias de otimização que podem ser utilizadas são divididas em dois grandes grupos principalmente (DEB, 2001): os métodos clássicos (ou determinísticos), nos quais, a partir de uma estimativa inicial, uma solução em potencial é atualizada a cada iteração, movendo-se em direção ao ótimo por meio de uma sequência definida de etapas (abordagem ponto a ponto); e os métodos heurísticos (ou randômicos), em que o ótimo é obtido a partir da interação entre os indivíduos, ou candidatos à solução, que compõem uma população (abordagem baseada em populações).

De acordo com Deb (2001), os métodos clássicos podem ser classificados como métodos diretos (apenas os valores da função objetivo e das restrições são usados para direcionar a busca) ou métodos baseados no gradiente (que utilizam derivadas de primeira e/ou segunda ordem da função objetivo e/ou restrições para guiar o processo de busca), sendo os primeiros mais lentos e os últimos, apesar da rápida convergência, inadequados para problemas descontínuos e não diferenciáveis. Algumas outras dificuldades relacionadas aos métodos determinísticos apresentadas pelo autor são: *i*) a convergência é dependente da estimativa inicial e *ii*) muitos desses algoritmos podem ficar “presos” em ótimos locais ou não ser eficientes ao lidar com espaços de busca discretos. Desse modo, as limitações relativas às dificuldades numéricas, problemas de robustez e campo de aplicação que surgiam com o uso dos métodos clássicos junto aos avanços dos recursos computacionais nas últimas décadas promoveram a intensificação dos estudos dos métodos baseados em população, isto é, heurísticos (SARAMAGO, 2003).

Fundamentados em processos da natureza ou em abordagens puramente estruturais, os métodos heurísticos são pseudo-aleatórios com um procedimento de exploração inteligente do espaço de busca. Possuem como vantagens a simplicidade conceitual, a facilidade de implementação, o fato de dispensarem o uso de informações sobre derivadas, a capacidade de escapar de ótimos locais, além do fácil tratamento de variáveis mistas e de problemas com descontinuidade (DEB, 2001; LOBATO, 2008). A principal desvantagem em seu uso refere-se ao elevado número de avaliações da função objetivo (por trabalharem com uma população de pontos), que vem sendo amenizada com a sofisticação e evolução dos computadores e *softwares* em geral, bem como com o desenvolvimento de estratégias para reduzir o número de avaliações (LOBATO, 2008). Isto faz com que estes métodos tornem-se, naturalmente, alternativas interessantes para o projeto de sistemas de engenharia, nos quais frequentemente são observadas dificuldades como a presença de não linearidades, multimodalidade, restrições e variáveis mistas (contínuas, binárias, discretas e inteiras) (LOBATO, 2008).

Outro fato relevante que deve ser destacado é que grande parte dos problemas reais, incluindo as aplicações em engenharia, além de apresentarem restrições, também são compostos por mais de um objetivo e, por esse motivo, a opção pelo uso dos métodos heurísticos é a mais recomendada. Isso ocorre porque os métodos clássicos não possibilitam a obtenção da solução do problema multi-objetivo (que é uma curva) em uma única execução, bem como não garante a

diversidade de pontos que compõem a solução ótima. Por outro lado, os métodos heurísticos, por fazerem uso de uma população de candidatos, possibilitam em uma única execução a obtenção de uma aproximação (em termos de convergência e diversidade) para a solução ótima (DEB, 2001). Como resultado disso e da maior flexibilidade no tratamento de problemas de naturezas distintas neste caso, o desenvolvimento e o aprimoramento de novas estratégias de otimização considerando como base os métodos heurísticos configuram uma das linhas de pesquisa de maior interesse na comunidade científica atualmente, a qual tem contribuído para avanços no projeto de sistemas de engenharia, permitindo a tomada de decisão em aplicações com diferentes níveis de complexidade (LOBATO, 2008).

Dentre os inúmeros algoritmos heurísticos existentes, alguns deles se destacam na literatura, a exemplo dos Algoritmos Genéticos - AG (GOLDBERG, 1989), Enxame de Partículas - EP (KENNEDY; EBERHART, 1995), Evolução Diferencial - ED (STORN; PRICE, 1995) e Algoritmo Colônia de Formigas - ACF (DORIGO; MANIEZZO; COLORNI, 1991). Com o sucesso dos tradicionais métodos de otimização randômicos em aplicações em diferentes campos da ciência, novas estratégias vêm sendo propostas neste cenário e dentre as abordagens meta-heurísticas mais recentes, destaca-se o Algoritmo de Partículas Vibrantes - APV (*Vibrating Particles System algorithm*), proposto por Kaveh e Ghazaan (2017). Inspirado na vibração livre de sistemas de um grau de liberdade com amortecimento viscoso, este algoritmo considera como candidatos à solução as partículas de um sistema subamortecido que gradualmente se aproximam de suas posições de equilíbrio. Bons resultados têm sido encontrados com o uso desta estratégia na resolução de problemas de otimização mono-objetivo. Mais recentemente, ele foi utilizado no projeto de estruturas de aço e em problemas de classificação (TALATAHARI; JALILI; AZIZI, 2021; WEDYAN et al., 2022), bem como em problemas de identificação de falhas estruturais, no projeto de sistemas fotovoltaicos e estruturas de aço arqueadas, e na detecção de fissuras em placas (KAVEH; VAEZ; HOSSEINI, 2018; KAVEH; VAEZ; HOSSEINI, 2019; GNETCHEJO et al., 2019; KAVEH et al., 2019; FATHI et al., 2021). Quanto à resolução de problemas multi-objetivos, o APV foi empregado nos trabalhos de Shahrouzi e Farah-Abadi (2018) e Kaveh e Ghazaan (2019), ambos no contexto do projeto de sistemas de engenharia.

O interesse particular pelo estudo desta técnica de otimização nesta dissertação recai sobre três aspectos principais: sua inspiração física que está fundamentada na teoria de vibrações, assunto relevante na engenharia mecânica; os resultados promissores na área de projetos; e os poucos estudos no contexto multi-objetivo. Com base nisso, a presente contribuição tem como objetivo principal o desenvolvimento de um algoritmo de otimização multi-objetivo baseado no APV. Para essa finalidade, os objetivos específicos são: *i*) estudar os operadores que compõem o APV; *ii*) realizar uma análise de sensibilidade; *iii*) aplicar o APV em problemas mono-objetivos (matemáticos e projeto de sistemas de engenharia); *iv*) propor uma extensão do APV para o contexto multi-objetivo; *v*) validar a metodologia proposta em problemas matemáticos e no projeto de sistemas de engenharia com diferentes níveis de complexidade.

Esta dissertação está organizada como segue. O Capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica que abrange tópicos da otimização fundamentais para a compreensão deste trabalho: formulação matemática, classificações dos métodos, principais métodos heurísticos, metodologias para o tratamento de restrições e resolução de problemas multi-objetivos, incluindo o conceito de otimalidade de Pareto e as métricas de avaliação dos algoritmos multi-objetivos. O Capítulo 3 apresenta a descrição do APV, seguida de um passo a passo para o bom entendimento do mesmo, além da metodologia proposta para a extensão desta técnica ao contexto multi-objetivo. A análise de sensibilidade para a avaliação da influência dos principais parâmetros do APV é apresentada no Capítulo 4. As aplicações do APV nos contextos mono e multi-objetivos são apresentadas nos Capítulos 5 e 6, respectivamente. Finalmente, o Capítulo 7 apresenta as considerações finais e as sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Como descrito anteriormente, os projetos representam a essência da engenharia e hoje em dia estão presentes em aplicações em diferentes campos da ciência para a concepção de novos produtos, equipamentos, serviços ou mesmo de melhorias e inovações em sistemas já existentes. Neste contexto, o presente capítulo tem por objetivo fornecer um panorama geral sobre otimização (conceitos básicos e classificações), métodos heurísticos (principais técnicas, definições e metodologias), problemas com restrições, variáveis mistas e problemas de otimização multi-objetivo.

2.1 O QUE É OTIMIZAÇÃO?

De forma geral, a otimização consiste na busca pela melhor opção dentro de um conjunto de possibilidades sem a necessidade de enumerar e avaliar todas as alternativas possíveis (RAVINDRAN; RAGSDELL; REKLAITIS, 2009). No contexto da engenharia, o uso de uma ferramenta de otimização tem por meta inovar extraindo a máxima eficiência e o mínimo custo, bem como aprimorar os sistemas já existentes. Em termos matemáticos, a otimização refere-se à obtenção das condições que fornecem o valor máximo ou mínimo da função que caracteriza o problema a ser otimizado. Sem perda de generalidade, a otimização pode ser sempre considerada como uma minimização, uma vez que o mínimo de uma função $f(x)$ corresponde ao máximo do negativo da mesma função ($-f(x)$) (RAO, 2009).

2.2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

O problema de otimização é caracterizado por três elementos principais, a saber, a função (ou vetor de funções) objetivo, as variáveis de projeto e as restrições (DEB, 2001):

- **Função objetivo:** é matematicamente expressa por uma equação dependente das variáveis de projeto e se refere à principal propriedade do sistema que se deseja otimizar;
- **Variáveis de projeto:** também denominadas variáveis de decisão ou variáveis de busca, representam parâmetros que influenciam os valores da função objetivo, devendo ser selecionados segundo a melhor configuração obtida pelo processo de otimização;
- **Restrições:** referem-se a limitações impostas às variáveis de projeto ou relações entre estas que devem ser satisfeitas para que a solução ótima encontrada seja válida. Tais restrições podem ser classificadas como restrições de desigualdade, de igualdade ou laterais.

Matematicamente, o problema geral de otimização pode ser descrito como (DEB, 2001):

$$\min f_m(x) \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (2.1)$$

sujeito às restrições:

$$\begin{cases} g_j(x) \leq 0 & j = 1, 2, \dots, J \\ h_k(x) = 0 & k = 1, 2, \dots, K \\ x_i^{inf} \leq x_i \leq x_i^{sup} & i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (2.2)$$

onde f é um vetor que possui M funções objetivo; x é o vetor que possui n variáveis de projeto (x_i), sendo x_i^{inf} e x_i^{sup} os valores mínimo e máximo, respectivamente, que a i -ésima variável de busca pode assumir; e as funções de restrições são representadas pelas K igualdades (h_k) e pelas J desigualdades (g_j). Cada função objetivo pode ser maximizada ou minimizada e o vetor $f(x)$ forma um espaço multi-dimensional denominado espaço de objetivos.

2.3 CLASSIFICAÇÃO DOS MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO

Os algoritmos de otimização podem ser classificados de acordo com sete categorias, conforme indicado na Fig. 1, que não necessariamente são mutuamente exclusivas, sendo descritas como se segue (HAUPT; HAUPT, 2004; LOBATO, 2008).

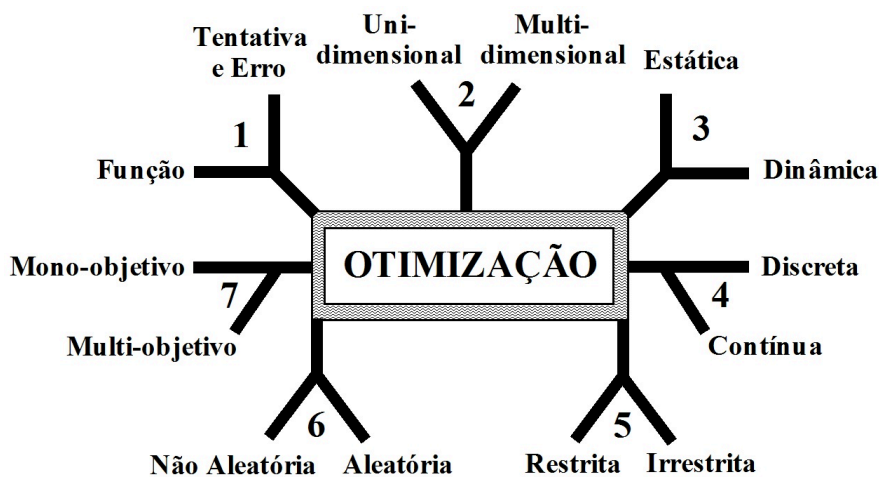


Figura 1 – Categorias dos algoritmos de otimização. Adaptado de Haupt e Haupt (2004).

1. Na Otimização por Tentativa e Erro ocorre o processo de ajuste de parâmetros sem o conhecimento da formulação do problema via uso de informações experimentais. Na Otimização por Função, por sua vez, a formulação que caracteriza o processo é conhecida, de modo que a solução ótima é obtida através de manipulações matemáticas.
2. Esta classificação se estabelece segundo a quantidade de variáveis de projeto, isto é, a otimização é dita unidimensional quando o problema apresenta apenas uma variável de projeto (ou decisão) e quando há mais do que uma a otimização é chamada multidimensional.

3. A Otimização Estática é independente do tempo, enquanto na Otimização Dinâmica a saída é função do tempo, sendo que esta dependência amplia ainda mais a dificuldade para a resolução dos problemas.
4. A classificação do processo de otimização como Discreto ou Contínuo diz respeito aos valores das variáveis de projeto (ou decisão). Na primeira classe tem-se um número finito dos possíveis valores a serem assumidos por elas, ao passo que na segunda são consideradas infinitas possibilidades.
5. Nos processos de otimização irrestritos, a inexistência de limitações permite que as variáveis de busca assumam quaisquer valores. Porém, as aplicações práticas do mundo real, por mais simples que possam ser, sempre apresentam algum tipo de restrição (física, ambiental, operacional) e, desse modo, configuram-se como processos restritos. Neste contexto, metodologias de transformação de problemas restritos em irrestritos e de tratamento de restrições laterais são frequentemente utilizadas, uma vez que os algoritmos de otimização são tradicionalmente idealizados para a solução de problemas sem restrições.
6. Os Métodos Clássicos (não aleatórios ou determinísticos) referem-se a técnicas baseadas no cálculo (normalmente com o uso de informações do gradiente da função a ser otimizada e das restrições) que direcionam a busca do valor ótimo por meio de uma sequência de passos. Algumas dificuldades que surgem neste caso ocorrem quando se trabalha com funções e/ou restrições descontínuas, funções não convexas, multimodalidade, presença de máximos ou mínimos locais. Por outro lado, na otimização Heurística (aleatória ou não determinística), as técnicas utilizadas fundamentam-se em processos ou fenômenos naturais, comportamentos de espécies ou em abordagens puramente estruturais, sendo possível caracterizá-las como pseudo-aleatórias e conceitualmente simples. Baseando-se no cálculo de probabilidades, as análises são realizadas considerando populações de candidatos potenciais e prescindem do uso de informações acerca do gradiente da função a ser otimizada e das restrições para o direcionamento da busca, o que amplia o campo de sua aplicação. Porém, normalmente seu desempenho é variável devido à sua estocasticidade e a quantidade de avaliações da função objetivo, em comparação com os métodos clássicos, é sensivelmente maior.
7. A última categoria de otimização está relacionada com a quantidade de objetivos que o problema apresenta. Quando existe apenas uma função a ser otimizada ele é caracterizado como mono-objetivo, enquanto o problema multi-objetivo apresenta, no mínimo, dois objetivos. Assim, a diferença central resultante é que no primeiro caso a solução ótima global é um ponto, enquanto no segundo caso a solução ótima é uma curva que é constituída por infinitos pontos (soluções não-dominadas que formam a Curva de Pareto). Com isso, a metodologia para resolução também é diferente e nos problemas de otimização multi-objetivo considera-se, além do espaço das variáveis de projeto, o espaço de objetivos.

2.4 MÉTODOS HEURÍSTICOS CLÁSSICOS

De acordo com [Saramago \(2003\)](#), dificuldades numéricas e problemas de robustez associados a certas características dos problemas de otimização que surgiam com o uso dos métodos clássicos favoreceram os estudos dos métodos heurísticos, caracterizados pela busca aleatória controlada segundo critérios probabilísticos. Algumas vantagens destes métodos que podem ser citadas são: simplicidade conceitual, facilidade de implementação, capacidade de escapar de ótimos locais, fácil tratamento de variáveis mistas e de problemas com descontinuidade ([DEB, 2001](#)). Estas, aliadas aos notáveis avanços dos recursos computacionais, que amenizam a principal limitação relacionada com o elevado número de avaliações da função objetivo, tornam a otimização heurística uma linha de pesquisa com grande interesse da comunidade científica nos dias atuais. Diante dessas considerações e tendo em vista o escopo deste trabalho, uma maior ênfase será dada apenas aos métodos heurísticos, sendo apresentadas a seguir, de modo sucinto, algumas das principais abordagens neste contexto.

2.4.1 ALGORITMOS GENÉTICOS

Os Algoritmos Genéticos (AG) são uma técnica de destaque na otimização heurística fundamentada nos princípios da seleção natural e da genética, desenvolvida por [Holland \(1975\)](#) e popularizada por [Goldberg \(1989\)](#) ([HAUPT; HAUPT, 2004](#)). De acordo com os autores, os indivíduos da população são representados por cromossomos. Após a inicialização aleatória, a população é atualizada através da aplicação da seleção natural e dos operadores genéticos de reprodução, recombinação e mutação e, assim, os indivíduos evoluem ao longo das gerações em busca da melhor solução. Este procedimento é minuciosamente detalhado em [Haupt e Haupt \(2004\)](#).

2.4.2 ENXAME DE PARTÍCULAS

O método Enxame de Partículas (EP) foi desenvolvido inicialmente na década de 1990, com sua ideia principal baseada na simulação de um meio social simplificado. Seu objetivo original foi de simular graficamente o movimento de um bando de pássaros ([KENNEDY; EBERHART, 1995](#)). Em resumo, a teoria sócio-cognitiva por trás do EP considera três princípios que regem o processo de adaptação cultural: a auto-avaliação, a comparação e a imitação, decorrentes da interação entre os indivíduos e deles com o ambiente e que influenciam o comportamento global da população ([KENNEDY; EBERHART; SHI, 2001](#)).

No algoritmo em questão, os candidatos à solução do problema são dados pela posição de cada partícula que compõe a população e, assim, os indivíduos são representados por pontos que se movimentam no espaço de busca. Cada partícula tem uma posição e uma velocidade associadas a ela, as quais são atualizadas a cada geração, levando em consideração a melhor posição alcançada pela partícula e pela população até aquele momento, de acordo com a avaliação

da função de adaptação (LOBATO, 2008). Com isso, a adaptação dos indivíduos ocorre a partir de sua própria experiência e estimativa da qualidade desta (aprendizagem individual) e do conhecimento sobre o comportamento de seus vizinhos (transmissão cultural). A formulação matemática e as etapas de implementação do algoritmo podem ser encontradas em Lobato (2008).

2.4.3 EVOLUÇÃO DIFERENCIAL

Proposto por Storn e Price (1995), o algoritmo da Evolução Diferencial (ED), apesar de classificado como evolucionário, não se trata de uma técnica bio-inspirada. Refere-se a uma estratégia puramente matemática, em que os indivíduos da população são representados por vetores, sendo utilizadas operações vetoriais e operadores de mutação, cruzamento e seleção no processo evolutivo (STORN; PRICE, 1997). Além disso, conforme os autores explicam, este método é versátil e apresenta simplicidade conceitual, facilidade de implementação, baixa dependência de parâmetros e rápida convergência. O detalhamento do algoritmo e comparações deste com outros métodos podem ser encontrados em Storn e Price (1997).

2.4.4 COLÔNIA DE VAGALUMES

A concepção conceitual do algoritmo Colônia de Vagalumes (CV) baseia-se na característica de bioluminescência destes insetos. Segundo Yang (2008), os flashes de luz emitidos por eles têm como função principal a atração de parceiros para reprodução e de presas em potencial, além de poderem servir como mecanismo de alerta e proteção em relação aos seus predadores. O algoritmo é proposto com as seguintes considerações: *i*) todos os vagalumes são assexuados, ou seja, qualquer um pode atrair ou ser atraído; *ii*) a atratividade é proporcional ao seu brilho (aquele com menor brilho se move em direção ao de maior brilho) e ambas as características reduzem com o aumento da distância entre vagalumes; *iii*) o brilho é determinado de acordo com a avaliação da função objetivo (quanto melhor esta avaliação, maior é o brilho do vagalume) (YANG, 2008). Os passos básicos e o modelo matemático que caracterizam o algoritmo CV são descritos em Yang (2008).

2.4.5 RECOZIMENTO SIMULADO

O algoritmo de Recozimento Simulado (RS) tem sua inspiração física baseada em um tratamento térmico da metalurgia chamado recozimento em que os metais, em uma primeira etapa, são aquecidos a elevadas temperaturas e, posteriormente, resfriados lentamente de modo que o sistema busque um ponto de equilíbrio caracterizado por uma microestrutura ordenada e estável (SARAMAGO, 2003). Matematicamente, as variáveis de busca sofrem perturbações randômicas e o melhor valor da função objetivo (que representa a energia do sistema) é armazenado a cada perturbação. A temperatura, usada como parâmetro de controle, é então reduzida (simulando o recozimento) e novas avaliações são realizadas, o que ocorre até se escapar de um mínimo

local. Ao final do processo, é possível que se obtenha um mínimo global. Um método numérico simples que representa o estado de equilíbrio de um conjunto de átomos a uma dada temperatura é introduzido por [Metropolis et al. \(1953\)](#) e as etapas de implementação do RS são indicadas em [Saramago \(2003\)](#).

2.4.6 COLÔNIA DE FORMIGAS

O Algoritmo Colônia de Formigas (ACF) teve sua ideia central originalmente proposta por [Dorigo, Maniezzo e Coloni \(1991\)](#), fundamentada na comunicação indireta que ocorre dentro de uma colônia de agentes ou formigas com base em trilhas de feromônios, evidenciada no processo de procura de alimento. Inicialmente, quando as formigas chegam em um ponto onde existe a necessidade de se decidir por qual direção seguir, elas escolhem aleatoriamente um caminho e depositam feromônio no solo, sem conhecimento da melhor escolha. Mas, depois de certo período de tempo, a diferença entre as quantidades desta substância nos possíveis caminhos torna-se suficientemente grande a ponto de influenciar a escolha de novas formigas que chegam ao mesmo ponto e impasse de decisão. Com isso, elas podem detectar o feromônio e optar, com determinada probabilidade, pelos caminhos marcados com as maiores concentrações desta substância ([COELHO, 2003](#)). Um exemplo ilustrativo da evolução no comportamento cooperativo de movimentação das formigas e a formulação matemática do ACF podem ser encontrados em [Coelho \(2003\)](#).

2.5 TRATAMENTO DE RESTRIÇÕES

Como já mencionado, os problemas de otimização reais apresentam limitações de algum tipo (restrições operacionais, físicas, ambientais, entre outras). Neste contexto, como os algoritmos de otimização foram, inicialmente, propostos para resolver problemas irrestritos, inúmeras estratégias foram desenvolvidas para possibilitar o tratamento de problemas restritos, conforme pode ser observado em [Vanderplaats \(1999\)](#), [Coelho \(2004\)](#) e [Lobato \(2008\)](#). Com base nestes trabalhos, algumas das principais metodologias são descritas a seguir.

2.5.1 MÉTODO DA PENA DE MORTE

Neste método, como o próprio nome sugere, propõe-se a eliminação das soluções não viáveis, tanto a partir da população inicial, quanto durante a seleção dos melhores indivíduos a cada geração ([COELHO, 2004](#)). Segundo [van Kampen, Strom e Buydens \(1996\)](#), bons resultados são alcançados em aplicações com espaço de projeto convexo e com baixa taxa de inviabilidade das soluções na totalidade do espaço de busca, mas neste caso tem-se a desvantagem da ausência de exploração de informações sobre o domínio não viável.

2.5.2 MÉTODOS BASEADOS EM FUNÇÕES DE PENALIDADE

O uso de funções de penalidade caracteriza a metodologia mais simples e mais utilizada na literatura para lidar com as restrições. Em linhas gerais, a ideia é incorporar as restrições originais à função objetivo de forma a transformá-la em um problema equivalente irrestrito. Neste caso, violar qualquer restrição implica na penalização da função objetivo (VANDERPLAATS, 1999). A expressão matemática que caracteriza estes métodos é dada por:

$$\min \Phi(x, r_p) = f(x) + r_p P(x) \quad (2.3)$$

onde $f(x)$ é a função objetivo (problema original), $P(x)$ é a função de penalidade, r_p é um escalar associado a esta função, conhecido como fator de penalidade, e $\Phi(x, r_p)$ é a denominada função pseudo-objetivo (problema irrestrito).

Dentre os métodos que utilizam funções de penalidade, podem ser destacados (VANDERPLAATS, 1999):

a) Método da Função de Penalidade Exterior:

É o método mais fácil de ser incorporado ao processo de otimização, em que a função de penalidade é representada por:

$$P(x) = \sum_{j=1}^m (\max [0, g_j(x)])^2 + \sum_{k=1}^l (h_k(x))^2 \quad (2.4)$$

sendo possível observar que nenhuma penalidade é imposta se todas as restrições são satisfeitas, isto é, quando $g_j(x) \leq 0$ e $h_k(x) = 0$ para todas elas. Valores pequenos de r_p fazem com que a função pseudo-objetivo seja facilmente minimizada, porém podem produzir grandes violações nas restrições. Por outro lado, valores elevados deste parâmetro asseguram o atendimento das restrições, mas podem levar a um mau condicionamento do problema do ponto de vista numérico. Por isso, usualmente considera-se r_p equivalente à unidade no início, o qual deve ser aumentado por um fator de correção ao longo do processo iterativo (VANDERPLAATS, 1999).

b) Método da Função de Penalidade Interior:

Segundo Vanderplaats (1999), a penalização neste método ocorre ainda no interior da região viável, por meio de uma tolerância pré-estabelecida pelo usuário. A diferença aqui está na forma de $P(x)$ aplicada às restrições de desigualdade e no fato de que o parâmetro de penalidade é reduzido durante o processo de otimização. Matematicamente, a função de penalidade é dada por:

$$P(x) = \sum_{j=1}^m \frac{-1}{g_j(x)} + \sum_{k=1}^l (h_k(x))^2 \quad (2.5)$$

podendo ser utilizada, alternativamente e com melhor condicionamento numérico, a expressão:

$$P(x) = \sum_{j=1}^m -\log[-g_j(x)] + \sum_{k=1}^l (h_k(x))^2 \quad (2.6)$$

Nota-se que $g_j(x)$ deve ser negativa para viabilidade e que $-1/g_j(x)$ será positiva, tendendo ao infinito quando $g_j(x) \rightarrow 0$. Quanto ao parâmetro de penalidade, r_p deve assumir inicialmente um valor elevado e ser reduzido por um fator de correção ao longo do processo iterativo (VANDERPLAATS, 1999).

c) Método dos Multiplicadores de Lagrange Aumentado:

A inclusão dos multiplicadores de Lagrange pode melhorar significativamente o processo de otimização de problemas restritos, obtendo-se como vantagem a redução da dependência da escolha dos parâmetros de penalidade e da forma pela qual eles são atualizados (VANDERPLAATS, 1999). A partir das condições de Kuhn-Tucker, este método considera a função objetivo original associada aos multiplicadores de Lagrange aplicados às restrições e combinados com funções de penalidade exterior, definindo-se a função pseudo-objetivo da seguinte forma:

$$\Phi(x, \lambda, r_p) = f(x) + \sum_{j=1}^m (\lambda_j \psi_j + r_p \psi_j^2) + \sum_{k=1}^l (\lambda_{k+m} h_k(x) + r_p (h_k(x))^2) \quad (2.7)$$

onde:

$$\psi_j = \max \left(g_j(x), -\frac{\lambda_j}{2r_p} \right) \quad (2.8)$$

E as fórmulas de atualização dos multiplicadores são dadas por:

$$\begin{cases} \lambda_j^{p+1} = \lambda_j^p + 2r_p \left(\max \left(g_j(x), -\frac{\lambda_j^p}{2r_p} \right) \right) & j = 1, \dots, m \\ \lambda_{k+m}^{p+1} = \lambda_{k+m}^p + 2r_p h_k(x) & k = 1, \dots, l \end{cases} \quad (2.9)$$

Coelho (2004) enfatiza que o uso dos métodos baseados em penalidades em geral é o modo mais comum de tratamento de restrições, pois eles fornecem bons resultados sem a necessidade de grandes modificações na estrutura do algoritmo. Reforça-se que a principal dificuldade se refere à escolha dos parâmetros de penalização, pois não há uma regra geral que possa ser aplicada para a determinação de seus valores.

2.5.3 MÉTODOS BASEADOS NA PRESERVAÇÃO DAS SOLUÇÕES VIÁVEIS

A ideia deste método é fundamentada na transformação de indivíduos inviáveis em indivíduos viáveis por meio do uso de operadores especializados. Tal abordagem assume apenas restrições lineares, além de uma configuração inicial factível. Utiliza-se então as restrições

lineares de igualdade para as possíveis eliminações de algumas variáveis e as de desigualdade são adequadamente atualizadas através de operadores que asseguram a viabilidade das soluções (MICHALEWICZ et al., 1999). O exemplo que melhor representa o uso desta técnica é chamado GENOCOP (*Genetic Algorithm for Numerical Optimization of Constrained Problems*) (MICHALEWICZ; JANIKOW, 1991; MICHALEWICZ; LOGAN; SWAMINATHAN, 1994).

2.6 TRATAMENTO DE PROBLEMAS COM VARIÁVEIS INTEIRAS E DISCRETAS

Na grande maioria dos problemas de otimização as variáveis de decisão são contínuas. Entretanto, frequentemente nos problemas de projeto podem ser encontradas variáveis mistas (binária, inteira e discreta), como, por exemplo, o número de dentes de uma engrenagem, o número de barras de uma treliça, diâmetros de tubulações e de eixos e espessuras de chapas que possuem valores pré-fixados quando encontrados no mercado, entre outros exemplos. Evidentemente, a presença simultânea de diferentes tipos de variáveis aumenta a complexidade dos problemas de otimização (KANNAN; KRAMER, 1994).

De acordo com Vanderplaats (1999), uma técnica que se mostrou bastante confiável para lidar com variáveis discretas e inteiras refere-se ao Método *Branch and Bound*, originalmente introduzido por Land e Doig (1960) para a resolução de problemas lineares. Sua aplicação na programação não linear (NLP - do inglês *Non Linear Programming*) pode ser encontrada, por exemplo, em Sandgren (1988) e ocorre através da geração de uma sequência de subproblemas NLP com variáveis contínuas, a qual é resolvida com o uso de um método NLP. A principal desvantagem neste caso trata-se da possibilidade de ser necessário um elevado número de resoluções de problemas NLP durante o uso desta abordagem (VANDERPLAATS, 1999).

Alternativamente, pode-se assumir inicialmente que todas as variáveis são contínuas e depois arredondá-las para o valor inteiro ou discreto mais próximo (maior ou menor). Embora possa ser eficiente em alguns casos, em outros tal abordagem pode fornecer resultados incorretos com soluções não só subótimas como também inviáveis (VANDERPLAATS, 1999; KANNAN; KRAMER, 1994).

Um método baseado no uso de funções de penalidade foi desenvolvido por Givold e Moe (1972) para o tratamento de problemas de otimização não linear com variáveis mistas. Neste caso, as variáveis discretas são tratadas como restrições explícitas e a função objetivo é formulada com a penalização de desvios nestes valores discretos. A dificuldade nesta técnica remete-se à escolha do parâmetro de penalidade e à grande dependência da qualidade da solução em relação a esta escolha inicial.

Kannan e Kramer (1994), por sua vez, propuseram um método geral para a resolução de problemas com variáveis discretas, inteiras, binárias e contínuas. Esta abordagem é fundamentada

no Método dos Multiplicadores de Lagrange Aumentado combinado com outras duas estratégias, a saber, o Método de Powell (método de ordem zero) e o Método do Gradiente Conjugado (método de primeira ordem) (VANDERPLAATS, 1999). Conforme os autores explicam, as variáveis binárias e inteiras são casos especiais de variáveis discretas e na metodologia proposta a penalização das violações nos valores destas é expressa como restrições de igualdade explícitas dadas por:

$$q_j (1 - q_j) = 0 \quad (2.10)$$

onde q_j é a variável inteira ou discreta normalizada que pode ser representada como:

$$q_j = \frac{x_j - s_j^l}{s_j^u - s_j^l} \quad (2.11)$$

em que s_j^u e s_j^l são, respectivamente, os valores superior e inferior mais próximos de x_j . Evidentemente, segundo a Eq. (2.10), q_j deve ser igual a zero ou um para satisfazer a restrição do tipo de variável. Mais detalhes sobre esta estratégia são encontrados em Kannan e Kramer (1994).

No contexto dos métodos heurísticos, Socha (2004) apresenta uma extensão do algoritmo Colônia de Formigas para o seu emprego na resolução de problemas com variáveis mistas. Para essa finalidade, o autor propõe o uso de uma função de distribuição de probabilidade para a geração de um novo conjunto de variáveis de projeto que podem ser implementadas como variáveis discretas.

Lobato (2008), ao propor uma extensão do algoritmo Evolução Diferencial (ED) ao contexto multi-objetivo, sugere o uso de uma metodologia simples para o tratamento de problemas de projeto com variáveis mistas que, em linhas gerais, consiste em redefinir o domínio das variáveis inteiras, discretas e binárias de forma a transformá-las em um domínio contínuo. É importante atentar-se ao fato de que apenas antes da avaliação da função objetivo e das restrições as variáveis contínuas devem ser reescritas no domínio de interesse. Conforme esse autor, a principal vantagem desta abordagem é manter a estrutura original do algoritmo, isto é, não é necessário realizar qualquer tipo de modificação no algoritmo para que as variáveis mistas possam ser tratadas.

Para o entendimento desta abordagem em um problema com variáveis discretas, considere o seguinte exemplo de aplicação (LOBATO, 2008):

- Seja um problema com uma única variável de projeto x_d que assume apenas valores discretos: $x_d \in \{1,24 \ 2,45 \ 3,09 \ 4,67 \ 5,87\}$. Inicialmente, define-se como domínio da variável de projeto um intervalo qualquer, por exemplo $0 \leq x_c \leq 1$. Dessa maneira, como se tem cinco valores discretos, pode-se escrever o seguinte critério de escolha, por exemplo:

$$x_d = \begin{cases} 1,24 & \text{se } 0,0 \leq x_c < 0,2 \\ 2,45 & \text{se } 0,2 \leq x_c < 0,4 \\ 3,09 & \text{se } 0,4 \leq x_c < 0,6 \\ 4,67 & \text{se } 0,6 \leq x_c < 0,8 \\ 5,87 & \text{se } 0,8 \leq x_c \leq 1,0 \end{cases} \quad (2.12)$$

- Se um candidato gerado possuir valor contínuo definido como 0,732, este é convertido para 4,67 (domínio discreto correspondente à variável contínua).

Sendo assim, este mesmo raciocínio pode ser utilizado na implementação para a resolução de problemas em que se trabalha com variáveis inteiras e binárias.

2.7 PROBLEMAS MONO X MULTI-OBJETIVOS

Resolver um problema de otimização mono-objetivo é diferente de resolver um multi-objetivo. Em linhas gerais, no mono-objetivo a solução ótima é dada por um ponto. Já no multi-objetivo a solução é uma curva composta por infinitos pontos (soluções não-dominadas que formam ao final do processo de busca a Curva de Pareto) (DEB, 2001). Neste caso, as metodologias para a resolução destes problemas são diferentes, especialmente quando elas não consideram a transformação do problema multi em um mono-objetivo. Por fim, destaca-se que no contexto multi-objetivo, além do espaço das variáveis de projeto (presente na otimização mono-objetivo) tem-se o espaço de objetivos, sendo necessário pontuar que nem sempre uma proximidade de soluções no espaço de busca corresponderá a uma proximidade delas no espaço de objetivos e que os objetivos são normalmente conflitantes entre si (DEB, 2001). Nas próximas seções serão apresentadas classificações, metodologias, conceitos e métricas relevantes para o estudo da otimização multi-objetivo.

2.8 OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVO

Como na resolução de problemas multi-objetivos obtém-se um conjunto de pontos (que constituem a solução do problema), o usuário deve fornecer informações adicionais relacionadas com suas preferências a fim de encontrar o ponto a ser implementado na prática. Nesse sentido, são diferenciadas três categorias principais relacionadas à metodologia empregada para a resolução, conforme a Fig. 2 (COELHO, 2004).

- **Métodos *a posteriori***: são aqueles em que a Curva de Pareto (conjunto das soluções não-dominadas no espaço de funções objetivo) é completamente determinada e depois disso as preferências podem ser utilizadas (COELHO, 2004).

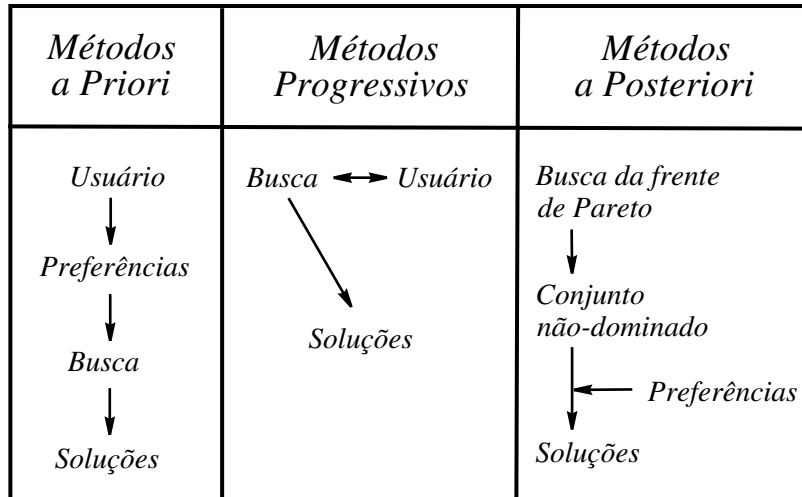


Figura 2 – Métodos de resolução na otimização multi-objetivo. Reproduzido de [Coelho \(2004\)](#).

- **Métodos progressivos:** as preferências do usuário neste caso são utilizadas durante o processo de otimização, de modo interativo, sendo que de tempo em tempo devem ser fornecidas informações acerca da direção da busca, pesos, pontos de referências, entre outras ([COELHO, 2004](#); [DEB, 2001](#)).
- **Métodos a priori:** as preferências são incluídas antes de se iniciar o processo de busca, de modo que o usuário atribui ponderações aos critérios ou hierarquiza os m objetivos. Nesta abordagem, que é a mais simples, o problema original multi-objetivo é convertido em um problema mono-objetivo, através da agregação de funções ([COELHO, 2004](#); [LOBATO, 2008](#)). Alguns representantes dos métodos *a priori* são apresentados a seguir.

2.8.1 TRANSFORMAÇÃO DO PROBLEMA MULTI EM MONO-OBJETIVO

Neste tipo de abordagem a ideia é reescrever um problema multi-objetivo como sendo um equivalente mono-objetivo, sendo o mesmo resolvido n vezes por uma das técnicas de otimização apresentadas em busca da obtenção da Curva de Pareto (cujo conceito será formalizado na Seção [2.8.2](#)). Para essa finalidade, faz-se necessário apresentar o conceito de **Solução Ideal**. Esta representa a solução ótima para cada objetivo otimizado individualmente considerando todas as restrições do problema original ([DEB, 2001](#)).

i) Método da Soma Ponderada:

É a abordagem mais simples e mais utilizada entre os métodos *a priori*, consistindo na transformação da formulação vetorial do problema original (multi-objetivo) em um escalar (mono-objetivo), pela agregação das m funções objetivo. Matematicamente, tem-se:

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^m w_i f_i(x) \quad (2.13)$$

onde o somatório dos pesos deve ser equivalente a unidade, conforme a Eq. (2.14):

$$\sum_{i=1}^m w_i = 1 \quad (2.14)$$

É importante destacar que os resultados obtidos são fortemente dependentes dos coeficientes w_i , os quais não representam proporcionalmente a importância relativa dos objetivos, configurando-se apenas como ponderações (OSY CZKA, 1984). Para que esses pesos reflitam a importância de cada objetivo, todas as funções devem apresentar ordens de grandeza próximas, o que pode ser feito pela normalização dos objetivos (DEB, 2001). Assim, alternativamente, pode ser utilizada a expressão:

$$\min f^*(x) = \sum_{i=1}^m w_i f_i(x) c_i \quad (2.15)$$

em que c_i são constantes que normalizam a função objetivo, as quais, de acordo com Osyczka (1984), fornecem os melhores resultados quando $c_i = 1/f_i^\circ$, onde f_i° representa a solução ideal referente ao i -ésimo objetivo.

O Método da Soma Ponderada é indicado principalmente para a resolução de problemas convexos. Porém, apesar de sua simplicidade, ele apresenta algumas desvantagens. No caso da sua aplicação em problemas não-convexos e com a presença de descontinuidades, não há a garantia de que a variação dos pesos fornecerá todas as soluções possíveis nem que estas estarão bem distribuídas ao longo da Curva de Pareto (DEB, 2001). Além disso, assim como nos demais métodos *a priori*, é necessária a definição de parâmetros adicionais, os quais devem ser variados, não sendo possível construir a Curva de Pareto em uma só execução.

ii) Método da Otimização de Compromisso:

Esta metodologia baseia-se em uma combinação dos objetivos a serem alcançados de acordo com a expressão (VANDERPLAATS, 1999):

$$\min f(x) = \left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{w_k (f_k(x) - f_k^*(x))}{f_k^{worst}(x) - f_k^*(x)} \right)^2 \right]^{0,5} \quad (2.16)$$

onde w_k é o fator de ponderação da k -ésima função objetivo (indicada por $f_k(x)$), $f_k^*(x)$ é o melhor valor e $f_k^{worst}(x)$ é o pior valor da k -ésima função objetivo.

Segundo Vanderplaats (1999), a principal dificuldade no uso deste método refere-se à escolha dos parâmetros que o caracterizam: pesos, além do melhor e pior valor de cada função objetivo. Os fatores de ponderação usualmente são unitários, a não ser que alguns objetivos tenham maior importância que outros, sendo considerados neste caso maiores valores de w_i . Para $f_k^{worst}(x)$ normalmente se associa o valor da função objetivo referente à estimativa inicial de projeto (x°). O maior desafio se encontra na atribuição do valor de $f_k^*(x)$, que é o valor desejado

desta função objetivo. Neste caso, uma possibilidade é a consideração do valor ótimo de cada objetivo individualmente com atendimento de todas as restrições (solução ideal). Por fim, esta metodologia apresenta bom desempenho na otimização multi-objetivo, porém a solução obtida não é única e qualquer mudança em seus parâmetros pode resultar em valores ótimos distintos (VANDERPLAATS, 1999).

iii) Método do Critério Global:

Neste método a solução ótima é encontrada ao se minimizar um critério global pré-definido pelo usuário, de modo a se obter uma solução que seja a mais próxima da ideal (f_i°) (OSYCZKA, 1984). A forma mais comum da função a ser minimizada nesta técnica é dada por:

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{f_i^\circ - f_i(x)}{f_i^\circ} \right)^s \quad (2.17)$$

Algumas sugestões de valores para o expoente encontradas na literatura são $s=1$ e $s=2$ (BOYCHUK; OVCHINNIKOV, 1973; SALUKVADZE, 1974), mas outros valores também podem ser utilizados. Evidentemente, os resultados diferirão de acordo com s , sendo a escolha deste parâmetro uma dificuldade do método, além da possibilidade de obtenção de soluções inviáveis.

Outra possível medida de proximidade da solução ideal é uma família de métrica L_p , definida como:

$$L_p(f) = \left[\sum_{i=1}^m |f_i^\circ - f_i(x)|^s \right]^{1/s}, \quad 1 \leq s \leq \infty \quad (2.18)$$

que, alternativamente, pode considerar distâncias relativas:

$$L_p(f) = \left[\sum_{i=1}^m \left| \frac{f_i^\circ - f_i(x)}{f_i^\circ} \right|^s \right]^{1/s}, \quad 1 \leq s \leq \infty \quad (2.19)$$

iv) Método da Otimização Hierárquica:

Proposta por Waltz (1967), esta abordagem considera a hierarquização dos objetivos em termos de importância. Cada função objetivo é otimizada separadamente a partir daquela mais importante. Seguindo a ordem de importância decrescente das funções objetivo estabelecida pelo usuário, adiciona-se em cada passo uma nova restrição definida a partir da função objetivo limitada por um fator (ξ_{h_i}) previamente adotado. O procedimento geral deste método se dá de acordo com as seguintes etapas (LOBATO, 2008):

- A otimização é realizada com respeito ao primeiro critério, obtendo-se $x^1 = [x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1]^T$ tal que f_1 é determinada:

$$f_1(x^{(1)}) = \min f_1(x), \quad x \in X \quad (2.20)$$

- Para as demais funções objetivo ($i = 2, \dots, m$), otimiza-se a i -ésima função objetivo, encontrando $x^i = [x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i]^T$ de modo que:

$$f_i(x^{(i)}) = \min f_i(x), \quad x \in X \quad (2.21)$$

com as restrições adicionais:

$$f_{j-1}(x) \leq \left(1 \pm \frac{\xi_{h_{j-1}}}{100}\right) f_{j-1}(x^{j-1}), \quad j = 2, \dots, i \quad (2.22)$$

onde $\xi_{h_{j-1}}$ são coeficientes percentuais para acréscimos ou decréscimos das funções dadas percentualmente e os sinais “+” e “-” indicam, respectivamente, se as funções estão sendo minimizadas ou maximizadas.

2.8.2 ÓTIMO DE PARETO

De acordo com Deb (2001), a extensão do conceito de otimização com um único objetivo para o contexto multi-objetivo não é trivial, pois neste a escolha do ótimo depende de diversos critérios que podem ser conflitantes entre si. Os métodos *a posteriori*, mencionados anteriormente, tratam os problemas multi-objetivos em sua forma original e estão associados ao chamado “Ótimo de Pareto”, representando a classe de métodos que mais tem sido utilizada atualmente para a resolução das aplicações reais.

A noção de “ótimo” foi inicialmente proposta em 1881 por Francis Ysidro Edgeworth (EDGEWORTH, 1881) e aperfeiçoada pelo economista e socialista Vilfredo Pareto (PARETO, 1896). O conceito de ótimo segundo tais idealizadores baseia-se na convicção intuitiva de que um ponto x^* é ótimo se nenhum critério utilizado puder melhorar a solução sem piorar pelo menos um outro critério. E, com isso, o ótimo de Edgeworth-Pareto normalmente fornece não apenas uma solução única, mas sim um conjunto das chamadas soluções não-dominadas.

Para a melhor compreensão deste assunto, o exemplo da situação hipotética de compra de um carro a partir da avaliação dos critérios preço e conforto é apresentado (TICONA, 2003). As cinco opções disponíveis são indicadas pelos números na Fig. 3.

Claramente, o objetivo neste exemplo é obter a solução que apresente o máximo conforto pelo menor preço possível, isto é, o melhor custo-benefício. Analisando as opções, inicialmente já é possível descartar a solução 1, pois a solução 5 oferece mais conforto pelo mesmo preço. Além disso, a solução 2 também pode ser desprezada, pois ela possui menor conforto e maior preço em relação a solução 5. Com isso, as soluções 3, 4 e 5 restam como boas alternativas de compra, uma vez que quantitativamente nenhuma delas é necessariamente melhor que a outra, havendo assim um compromisso entre os objetivos: quanto maior o preço, maior o conforto do automóvel e vice-versa.

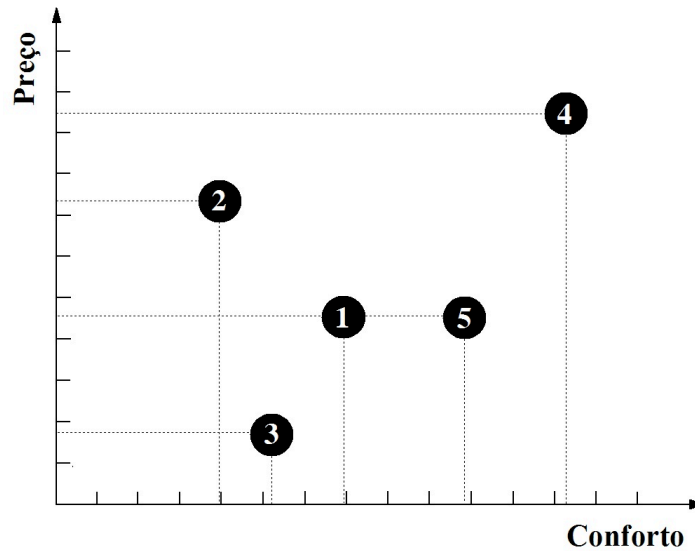


Figura 3 – Exemplo da compra de um carro: Preço x Conforto. Reproduzido de [Ticona \(2003\)](#).

Quanto à dominância, diz-se que uma solução domina uma outra se seus valores são melhores em todos os objetivos. Neste caso, a solução 5 domina as soluções 1 e 2, não sendo dominada por nenhuma outra, o que também ocorre com as soluções 3 e 4. Não se conhecendo a importância relativa de cada objetivo *a priori*, é possível afirmar que as soluções 3, 4 e 5 são igualmente boas e que elas constituem o conjunto de soluções ótimas, denominado **conjunto não-dominado**. As demais soluções (1 e 2) formam o **conjunto dominado**. Sobre estes conjuntos, tem-se que ([DEB, 2001](#)):

- Qualquer solução do conjunto não-dominado deve ser não-dominada em relação a outra solução do mesmo conjunto, ou seja, no exemplo, as soluções 3, 4 e 5 não devem ser dominadas por elas mesmas de nenhuma forma;
- Qualquer solução não contida no conjunto não-dominado deve ser dominada por pelo menos uma solução do conjunto não-dominado (no exemplo, as soluções 1 e 2 são dominadas pela solução 5).

Como grande parte dos algoritmos de otimização multi-objetivo utilizam o conceito de dominância de Pareto, a seguir serão formalizadas algumas definições importantes sobre este tema, de acordo com [Deb \(2001\)](#). Primeiramente, assumindo a existência de m funções objetivo f_j , com $j = 1, \dots, m$, o operador \triangleleft é utilizado para relacionar duas soluções em termos de um objetivo em particular: sendo x_1 e x_2 duas soluções distintas, $x_1 \triangleleft x_2$ indica que x_1 é melhor que x_2 para determinado objetivo. Reciprocamente, $x_1 \triangleright x_2$ significa que x_1 é pior que x_2 para algum objetivo. E o operador que denota a negação de \triangleright é representado por \ntriangleright .

Definição 1 (Dominância de Pareto): Uma solução x_1 domina uma outra solução x_2 se ambas as condições abaixo são satisfeitas:

- A solução x_1 não é pior que x_2 para todos objetivos, isto é, $f_j(x_1) \not\geq f_j(x_2)$ para todo $j = 1, 2, \dots, m$;
- A solução x_1 é estritamente melhor que x_2 em pelo menos um objetivo, ou seja, $f_{\bar{j}}(x_1) < f_{\bar{j}}(x_2)$ para pelo menos algum $\bar{j} \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Neste caso, com o atendimento de tais exigências, são equivalentes as expressões “ x_1 domina x_2 ”, “ x_2 é dominada por x_1 ” e “ x_1 é não-dominada com relação a x_2 ”.

Definição 2 (Conjunto não-dominado): Dado um conjunto de soluções P , o conjunto não-dominado P' é constituído pelas soluções que são não-dominadas em relação a qualquer elemento de P .

Definição 3 (Conjunto ótimo de Pareto global): O conjunto não-dominado dentro da totalidade do espaço de busca factível é denominado conjunto ótimo de Pareto global, sendo muitas vezes referido simplesmente como conjunto ótimo de Pareto.

Definição 4 (Curva de Pareto): A Curva (ou Fronteira ou Frente) de Pareto é formada pelo conjunto de vetores de funções objetivo $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))^T$ para cada ponto x que está no conjunto ótimo de Pareto.

2.8.3 METAS EM OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVO

Quando a ordem de prioridade dos objetivos não é conhecida, todas as soluções ótimas de Pareto são igualmente importantes. Nesse sentido, o critério utilizado para avaliar a qualidade da solução encontrada é caracterizado por métricas de desempenho que ponderam o alcance das duas principais metas na otimização multi-objetivo, que são (DEB, 2001):

- Encontrar um conjunto de pontos que seja o mais próximo possível da Curva de Pareto (solução do problema multi-objetivo);
- Obter uma curva com a maior diversidade possível.

De certa forma, estas metas são ortogonais entre si, conforme apresenta a Fig. 4: a primeira requer uma busca em direção à região ótima de Pareto, enquanto a segunda requer uma busca ao longo da frente ótima de Pareto. Como convergência e diversidade são metas distintas que podem ser conflitantes entre si, o uso de apenas uma métrica não possibilita a avaliação completa do desempenho de um algoritmo (DEB, 2001). A seguir são especificadas algumas métricas de convergência e diversidade comumente utilizadas na literatura.

Métricas de Convergência

As métricas de convergência apresentadas abaixo aferem a proximidade entre o conjunto Q de N pontos fornecido pelo algoritmo e a solução ótima de Pareto P^* .

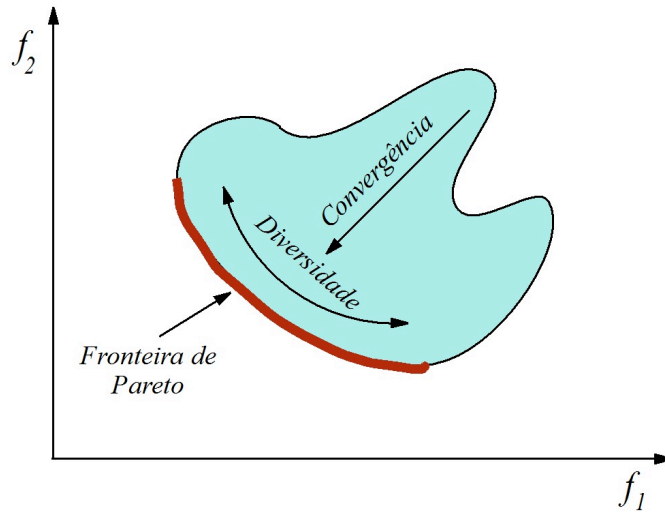


Figura 4 – Metas na otimização multi-objetivo. Reproduzido de Deb (2001).

o Taxa de Erro (ER)

Esta métrica (ER) refere-se à contagem do número de pontos de Q que não pertencem a P^* (DEB, 2001):

$$ER = \frac{\sum_{i=1}^{|Q|} e_i}{|Q|} \quad (2.23)$$

onde $e_i = 1$ se $i \notin P^*$ e, caso contrário, $e_i = 0$. Quanto menor o valor de ER melhor a convergência e se $ER = 0$ então todos os pontos obtidos pelo algoritmo pertencem à Curva de Pareto.

o Distância Geracional (DG)

Ao invés de buscar quais pontos de Q pertencem ao conjunto P^* , esta métrica determina a distância média entre os pontos de Q em relação à P^* (DEB, 2001):

$$DG = \frac{\left(\sum_{i=1}^{|Q|} d_i^p\right)^{1/p}}{|Q|} \quad (2.24)$$

Para $p = 2$, o parâmetro d_i é a distância Euclidiana (no espaço de objetivos) entre a solução $i \in Q$ e o elemento mais próximo de P^* :

$$d_i = \min_{k=1}^{|P^*|} \sqrt{\sum_{m=1}^M (f_m^i - f_m^{*k})^2} \quad (2.25)$$

onde f_m^{*k} é o m -ésimo objetivo do k -ésimo ponto de P^* . Quanto menor o valor de DG , melhor é a convergência da solução Q .

o Convergência Métrica (Υ)

O cálculo desta métrica é baseado na formulação da Distância Geracional para $p = 1$, sendo o valor de Υ confiável para baixos valores de desvio-padrão desta medida considerando várias execuções. Matematicamente, tem-se (DEB, 2001; DEB et al., 2002):

$$\Upsilon = \frac{\sum_{i=1}^{|Q|} d_i}{|Q|} \quad (2.26)$$

Métricas de Diversidade

o Diversidade Métrica (Δ)

A Diversidade Métrica mensura o espalhamento dos pontos ao longo da solução ótima encontrada considerando os extremos. Sua formulação matemática é dada por (DEB et al., 2002):

$$\Delta = \frac{d_f + d_l + \sum_{i=1}^{|Q|-1} |d_i - \bar{d}|}{d_f + d_l + (|Q| - 1) \bar{d}} \quad (2.27)$$

onde d_i é a distância Euclidiana (no espaço de objetivos) entre os pontos consecutivos obtidos em Q e \bar{d} é a média destas distâncias. Os parâmetros d_f e d_l são as distâncias Euclidianas entre os pontos extremos de P^* e os pontos limites no espaço de objetivos de Q .

o Espaçamento (Spc)

Sugerida por Schott (1995), o Espaçamento calcula o desvio-padrão das distâncias de pontos consecutivos de acordo com a expressão:

$$Spc = \sqrt{\frac{1}{|Q|} \sum_{i=1}^{|Q|} (d_i - \bar{d})^2} \quad (2.28)$$

onde d_i é o valor mínimo do somatório das diferenças absolutas entre os valores das funções objetivo de um ponto i e qualquer outro ponto obtido em Q :

$$d_i = \min_{k \in Q, k \neq i} \sum_{m=1}^M |f_m^i - f_m^k| \quad (2.29)$$

enquanto \bar{d} representa a média dos valores de d_i :

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{|Q|} d_i}{|Q|} \quad (2.30)$$

Quanto menor o valor de Spc , mais uniformemente distribuídos estarão os pontos de Q .

Apresentado os principais conceitos e definições para o bom entendimento desta dissertação, o próximo capítulo traz a descrição dos operadores do APV, o passo a passo da utilização destes operadores e a sua extensão para o contexto multi-objetivo.

3 ALGORITMO DE PARTÍCULAS VIBRANTES

Em linhas gerais, o Algoritmo de Partículas Vibrantes (APV), conforme mencionado anteriormente, classifica-se como um método heurístico baseado em população que faz uso de determinados operadores para atualizar os candidatos à solução de um problema de otimização. A fim de permitir uma boa compreensão acerca do algoritmo em questão, este capítulo tem por objetivo apresentar a sua inspiração física, bem como os seus operadores, finalizando com um passo a passo considerando um estudo de caso matemático. Além disso, também objetiva-se apresentar a extensão desse algoritmo para o contexto multi-objetivo.

3.1 CONCEPÇÃO CONCEITUAL

O APV, proposto por [Kaveh e Ghazaan \(2017\)](#), é uma estratégia de otimização originalmente desenvolvida para a resolução de problemas de otimização relacionados ao projeto de treliças. De acordo com esses autores, a ideia por trás desta abordagem consiste na simulação da vibração de sistemas com um grau de liberdade e que apresentam amortecimento viscoso. No contexto da otimização, os candidatos à solução são as partículas de um sistema que, gradativamente, se aproxima de sua posição de equilíbrio. Além disso, durante o processo de otimização, no APV consideram-se a exploração do espaço de busca e o refinamento das soluções candidatas ([KAVEH; GHAZAN, 2017](#)).

Segundo a teoria de vibrações, estas podem ser classificadas em livres e forçadas. Na primeira classe, o movimento é mantido apenas por forças conservativas, isto é, o sistema sofre uma perturbação inicial e continua a vibrar por conta própria. Já na segunda, uma força externa periódica é aplicada ao sistema ([RAO, 2010](#)). Além disso, geralmente nas vibrações não amortecidas os efeitos do atrito podem ser desprezados. Todavia, na realidade observa-se que todas as vibrações (livres ou forçadas) são amortecidas em algum nível devido à presença de forças de atrito ([KAVEH; GHAZAN, 2017](#)).

A partir destes princípios, o objeto de estudo que fundamenta o APV refere-se à vibração livre de sistemas que podem ser representados de acordo com a Fig. 5, os quais possuem um grau de liberdade e amortecimento viscoso, sendo este caracterizado pela proporcionalidade direta e pelo sentido oposto da força de atrito em relação ao vetor velocidade. O sistema presente nesta figura é constituído por um bloco de massa m , uma mola de constante elástica k e um amortecedor com coeficiente c . Ao se deslocar o bloco em uma distância x em relação à posição

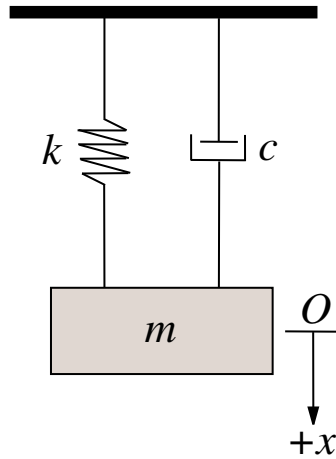


Figura 5 – Vibração livre de um sistema com um grau de liberdade com amortecimento. Adaptado de Kaveh e Ghazaan (2017).

de equilíbrio (indicada por O), a equação do movimento do bloco é dada por:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (3.1)$$

em que t é o tempo.

O coeficiente de amortecimento crítico (c_c) é definido a partir da frequência natural do sistema (ω_n), cujas expressões estão indicadas nas Eqs. (3.2) e (3.3), respectivamente:

$$c_c = 2m\omega_n \quad (3.2)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.3)$$

O valor do coeficiente de amortecimento crítico diferencia três tipos de sistemas: superamortecido, criticamente amortecido e subamortecido (KAVEH; GHAZAAN, 2017). Para a concepção do APV, considerou-se apenas o sistema subamortecido, pois ele é o único que resulta em um movimento oscilatório, como pode ser observado na Fig. 6.

Dessa maneira, a solução da equação diferencial descrita pela Eq. (3.1) é dada pela Eq. (3.4), na qual devem ser conhecidas a frequência de vibração amortecida (ω_D) e a taxa de amortecimento (ξ), definidas pelas Eqs. (3.5) e (3.6).

$$x(t) = \rho \exp(-\xi\omega_n t) \sin(\omega_D t + \phi) \quad (3.4)$$

$$\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.5)$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (3.6)$$

A solução $x(t)$ demanda ainda a determinação das constantes ρ e ϕ , as quais são geralmente definidas a partir das condições iniciais do problema.

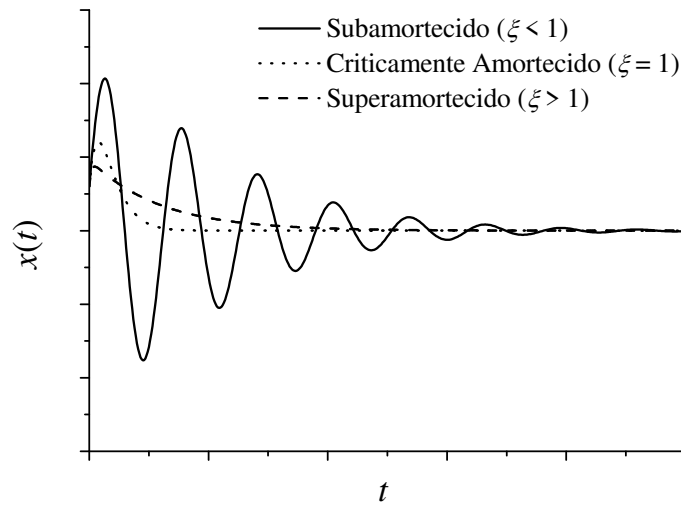


Figura 6 – Comparação do movimento de sistemas com diferentes tipos de amortecimento. Adaptado de Rao (2010).

3.2 PASSOS BÁSICOS DO APV

A partir da apresentação da fundamentação teórica do APV, torna-se possível compreender como este método de otimização baseado em populações atua. Ao simular a vibração livre de um sistema com um grau de liberdade subamortecido, o APV considera uma série de soluções candidatas que representam as partículas do sistema, as quais são inicializadas de forma aleatória em um espaço de busca n -dimensional, sendo que, gradualmente, estas se aproximam de suas posições de equilíbrio, conforme já mencionado.

As etapas básicas do APV para o problema mono-objetivo são apresentadas na Fig. 7 e descritas a seguir (KAVEH, 2017):

1. *Inicialização*: O problema de interesse (função objetivo, espaço de projeto e restrições) e os parâmetros do APV são definidos. Além disso, as posições iniciais de todas as partículas são determinadas (aleatoriamente) dentro do espaço de busca definido, segundo a Eq. (3.7):

$$x_i^j = x_{min} + r(x_{max} - x_{min}) \quad (3.7)$$

onde x_i^j é a j -ésima variável da partícula i , x_{min} e x_{max} representam os limites inferior e superior do espaço de projeto, respectivamente, e r é um número aleatório com distribuição normal e que pertence ao intervalo fechado $[0, 1]$.

2. *Avaliação das soluções candidatas*: Cada candidato (partícula) em potencial é avaliado de acordo com a função objetivo.
3. *Atualização das posições das partículas*: Para cada candidato em potencial (partícula), três posições de equilíbrio com diferentes pesos são definidas, de forma que sejam consi-

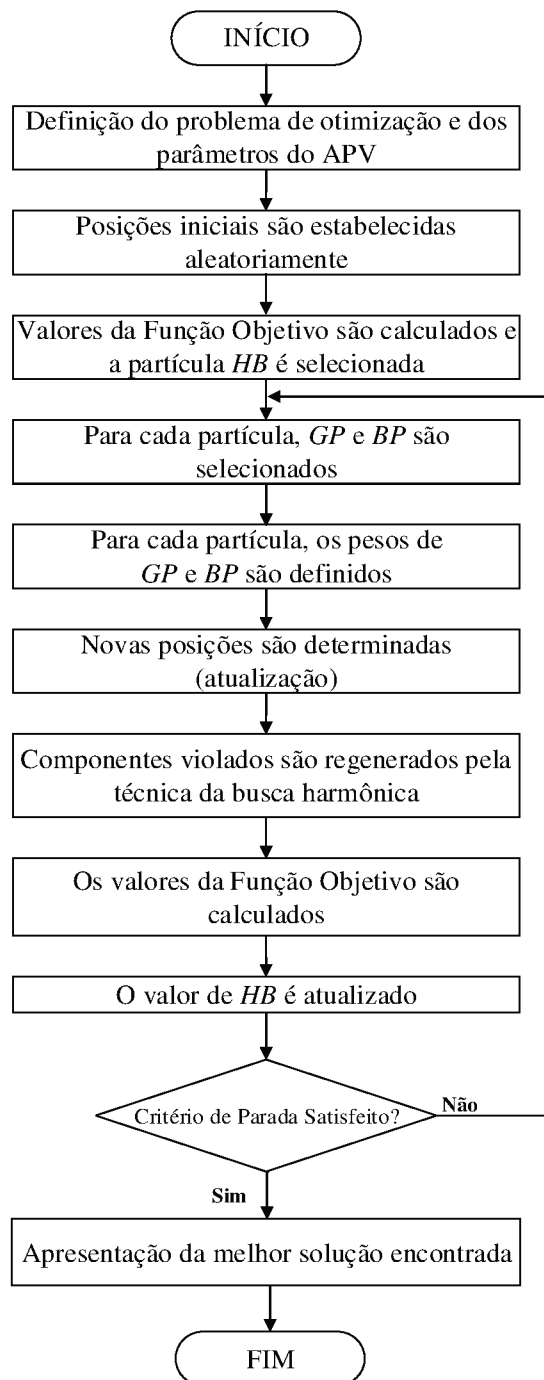


Figura 7 – Fluxograma do Algoritmo de Partículas Vibrantes.

deradas na atualização dos candidatos à solução. A primeira considera a melhor posição encontrada até a presente iteração (HB); a segunda representa uma boa partícula (GP); e a terceira representa uma partícula ruim (BP). Intuitivamente, a melhor partícula é fácil de ser definida. Já para selecionar GP e BP , a população atual é ordenada de modo crescente de acordo com os valores da função objetivo (considerando como padrão o problema de minimização), sendo a mesma dividida pela metade. Da primeira metade

escolhe-se, aleatoriamente, a partícula *GP*. Similarmente, da segunda metade escolhe-se, aleatoriamente, a partícula *BP*. Com isso, os representantes de *GP* (boa partícula) e de *BP* (partícula ruim) serão selecionados dentro dos grupos que possuem, respectivamente, os melhores e os piores valores da função objetivo. Para modelar o efeito do amortecimento das vibrações no algoritmo de otimização é proposta uma função decrescente baseada no número de iterações:

$$D = \left(\frac{q}{q_{max}} \right)^{-\alpha} \quad (3.8)$$

onde q é a iteração (ou geração) atual, q_{max} é o número total de iterações e α é uma constante definida pelo usuário. Desse modo, as posições das partículas no APV são atualizadas como:

$$x_i^j(q+1) = w_1 [DAr_1 + HB^j(q)] + w_2 [DAr_2 + GP^j(q)] + w_3 [DAr_3 + BP^j(q)] \quad (3.9)$$

$$A = w_1 [HB^j(q) - x_i^j(q)] + w_2 [GP^j(q) - x_i^j(q)] + w_3 [BP^j(q) - x_i^j(q)] \quad (3.10)$$

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1 \quad (3.11)$$

onde w_1 , w_2 e w_3 são os parâmetros que ponderam *HB*, *GP* e *BP*, respectivamente; r_1 , r_2 e r_3 são números aleatórios com distribuição uniforme entre $[0, 1]$; e $x_i^j(q+1)$ é a j -ésima variável da partícula i atualizada com base também em seu valor na geração anterior $x_i^j(q)$. A partir do exposto, observa-se que os parâmetros A e D apresentam efeito similar ao de ρ e $\exp(-\xi\omega_n t)$ presentes na Eq. (3.4), enquanto o valor de $\sin(\omega_D t + \phi)$ é considerado equivalente à unidade. Na Equação (3.10) o parâmetro A assumirá um valor diferente e que dependerá da posição de cada partícula e das contribuições de *HB*, *GP* e *BP*, podendo assim ser relacionado com ρ . O valor de D , conforme a Eq. (3.8), é definido pelo decaimento exponencial no decorrer das gerações e representará o amortecimento ao longo do tempo indicado por $\exp(-\xi\omega_n t)$. Destaca-se ainda que a Eq. (3.9) considera uma certa aleatoriedade associada a tais parâmetros (reduzida de acordo com o processo evolutivo), além das contribuições das partículas *HB*, *GP* e *BP* com suas respectivas ponderações. E em relação à função seno, na Fig. 8 é ilustrado o efeito desejado durante a execução do APV, isto é, proporcionar uma boa diversidade ao longo do processo evolutivo, sendo este efeito amortecido quando o número de gerações tende ao seu valor máximo.

É importante ressaltar que nem sempre a contribuição referente a partícula ruim (*BP*) é levada em conta na atualização das posições. Isto foi proposto por [Kaveh e Ghazaan \(2017\)](#) para tentar melhorar a convergência do algoritmo. Para esta finalidade, uma probabilidade p é definida pelo usuário. Assim, para cada partícula, esta probabilidade é comparada com um número aleatório $rand$ sorteado (com distribuição uniforme entre $[0, 1]$). Se $p < rand$, então o peso relacionado à partícula *BP* é nulo ($w_3 = 0$) e, com isso, $w_2 = 1 - w_1$. Por outro lado, se $p \geq rand$, todas as contribuições são consideradas durante a atualização do candidato em potencial.

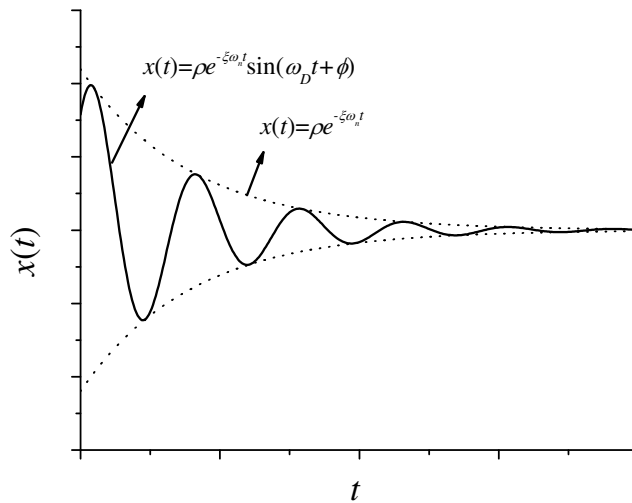


Figura 8 – Vibração do sistema subamortecido. Adaptado de [Kaveh e Ghazaan \(2017\)](#).

4. *Tratamento das restrições laterais:* Considerando a possibilidade de violação do espaço de busca quando as partículas se movem para as novas posições, o algoritmo propõe o uso de uma técnica baseada na Busca Harmônica com a finalidade de garantir que os candidatos à solução do problema de otimização estejam dentro do espaço de projeto definido pelo usuário, conforme destacado por [Kaveh e Talatahari \(2009\)](#). Nesta, o parâmetro *HMCR* (*Harmony Memory Considering Rate*) especifica se a troca do componente violado será realizada com o *HB* de uma partícula aleatória ou com um novo valor aleatório dentro do espaço de projeto. Além disso, caso seja feita a opção pelo *HB*, o parâmetro *PAR* (*Pitch Adjusting Rate*) determina se este valor deve ser modificado por um novo valor da vizinhança (maior ou menor de acordo com a contribuição do parâmetro *BW*) ou não.
5. *Critério de parada:* As etapas 2 a 4 são repetidas até que o critério de parada estabelecido seja satisfeito. Quando isso ocorre, o procedimento iterativo é interrompido e, então, a melhor solução encontrada pelo algoritmo é apresentada.

3.3 APLICAÇÃO PASSO A PASSO DO APV

Para demonstrar as operações realizadas pelo APV, a seguir é apresentada a execução do algoritmo ao longo de uma geração. O código que implementa o APV está disponível em linguagem de programação MATLAB[®] ([KAVEH; BAKHSHPOORI, 2019](#)). Para fins de aplicação considera-se a minimização da seguinte função matemática (Eq. (3.12)):

$$\min f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \quad (3.12)$$

onde x_1 e x_2 são as duas variáveis de projeto, ambas pertencentes ao intervalo $[-10, 10]$, e f é a função objetivo. A solução ótima para este estudo de caso é $x_1 = x_2 = 1$, o que corresponde a f

igual a 0.

Considerando os fins didáticos deste estudo, o número de indivíduos (n_{VP}) e o número máximo de avaliações da função objetivo (NFE_{max}) são iguais a 5. Com isso, somente uma iteração é realizada. Os outros parâmetros do APV são inicialmente estabelecidos de acordo com a Tab. 1:

Tabela 1 – Parâmetros iniciais utilizados.

α	0,01
w_1	0,3
w_2	0,3
w_3	0,4
p	0,1
$HMCR$	0,95
PAR	0,1
BW	0,1

a) População Inicial:

Para a inicialização do algoritmo (a população é gerada aleatoriamente) utiliza-se a Eq. (3.13) como uma adaptação da Eq. (3.7):

$$VP_i = LB + r(UB - LB) \quad (3.13)$$

onde VP_i é o vetor que representa cada partícula, LB e UB são os vetores que apresentam os limites inferior e superior das variáveis de projeto, respectivamente, e r é o vetor com números aleatórios com distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$.

Considerando a semente no gerador de números aleatórios como sendo igual a 0, a população inicial, bem como os valores da função objetivo para cada uma das partículas (calculados por meio da Eq. (3.12)) são dados na Tab. 2.

Tabela 2 – Inicialização do APV.

VP_i	r_1	r_2	x_1	x_2	$f(x)$
1	0,8147	0,9058	6,2945	8,1158	78,6666
2	0,1270	0,9134	-7,4603	8,2675	124,3929
3	0,6324	0,0975	2,6472	-8,0492	84,6011
4	0,2785	0,5469	-4,4300	0,9376	29,4892
5	0,9575	0,9649	9,1501	9,2978	135,2777

Para a seleção de HB , as partículas da população inicial são classificadas em ordem crescente em relação ao valor da função objetivo (lembrando que o problema de otimização refere-se à minimização da função), como mostra a Tab. 3.

Tabela 3 – População inicial ordenada na matriz de memória.

VP_{M_i}	x_1	x_2	$f(x)$
1	-4,4300	0,9376	29,4892
2	6,2945	8,1158	78,6666
3	2,6472	-8,0492	84,6011
4	-7,4603	8,2675	124,3929
5	9,1501	9,2978	135,2777

E HB é representado pelo vetor cujos elementos são os valores de x_1 e x_2 de VP_{M_1} (Eq. (3.14)).

$$HB = \begin{bmatrix} -4,4300 & 0,9376 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Como a função decrescente que modela o efeito de amortecimento (Eq. (3.8)) é considerada para a atualização das posições, sendo dependente da geração atual do algoritmo (q) e, indiretamente, do número máximo de avaliações da função objetivo (NFE_{max}) - o qual determina o número máximo de gerações (q_{max}) além de ser estabelecido como critério de parada, os parâmetros variáveis q e NFE não consideram a população inicial em sua contagem.

Assim, logo no início do algoritmo (após a inicialização dos candidatos), o número atual de avaliações da função objetivo e de iterações são zerados. Já o número máximo de gerações do algoritmo é determinado pela razão entre NFE_{max} e o número de partículas vibrantes (n_{VP}), ambos definidos pelo usuário. Com isso:

$$NFE = 0 \quad (3.15)$$

$$q = 0 \quad (3.16)$$

$$q_{max} = \frac{NFE_{max}}{n_{VP}} = \frac{5}{5} = 1 \quad (3.17)$$

Quanto aos contadores, o valor de q é atualizado antes da determinação das novas posições (mais especificamente antes do cálculo de D) e o de NFE após o cálculo dos valores da função objetivo das novas partículas. Ambas as atualizações ocorrem já no interior do procedimento iterativo principal que constitui o algoritmo.

b) Atualização das Partículas Vibrantes:

Enquanto o critério de parada não for satisfeito, em outras palavras, enquanto $NFE < NFE_{max}$, diversas operações são realizadas, as quais serão indicadas a seguir de acordo com o problema em análise. Primeiramente, atualiza-se q para o cálculo de D , o qual é necessário para a atualização das posições, assim como são as escolhas de GP e BP com base na última população, que devem ser realizadas na sequência.

$$q = 1 \quad (3.18)$$

$$D = \left(\frac{q}{q_{max}} \right)^{-\alpha} = \left(\frac{1}{1} \right)^{-0,01} = 1 \quad (3.19)$$

De acordo com os idealizadores do APV, a seleção de GP e BP ocorre para cada candidato à solução através do ordenamento das partículas segundo o valor de $f(x)$ e escolha aleatória dentro da primeira e segunda metades, respectivamente, porém sem considerar o próprio candidato. Este procedimento resulta nos dados apresentados pela Tab. 4, a qual indica também que, no caso do problema analisado, a seleção de GP ocorre considerando apenas as partículas VP_4 , VP_1 e VP_3 , enquanto para BP considera-se apenas VP_3 , VP_2 e VP_5 .

Tabela 4 – Seleção de GP e BP para cada partícula.

VP_i	x_1	x_2	$f(x)$	VP_{M_i}	GP		BP	
1	6,2945	8,1158	78,6666	2	-4,4300	0,9376	2,6472	-8,0492
2	-7,4603	8,2675	124,3929	4	2,6472	-8,0492	2,6472	-8,0492
3	2,6472	-8,0492	84,6011	3	-4,4300	0,9376	-7,4603	8,2675
4	-4,4300	0,9376	29,4892	1	2,6472	-8,0492	-7,4603	8,2675
5	9,1501	9,2678	135,2777	5	2,6472	-8,0492	-7,4603	8,2675

Para a atualização dos indivíduos, previamente são confirmados os valores de w_2 e w_3 , lembrando que não é sempre que o efeito de BP é considerado, a depender da relação entre o parâmetro p e um aleatório gerado. Além disso, o parâmetro A é calculado (Eq. (3.10)) para cada variável de decisão que constitui a partícula vibrante.

Tabela 5 – Demais parâmetros necessários para atualização das partículas.

VP_i	$p < rand$	w_3	w_2	A	
1	Não	0,4	0,3	-7,8936	-10,7729
2	Sim	0	0,7	7,9843	-13,6207
3	Sim	0	0,7	-7,0772	8,9868
4	Sim	0	0,7	4,9541	-6,2908
5	Sim	0	0,7	-8,6261	-14,6509

De posse dos valores de todos os parâmetros necessários para a determinação das novas posições das partículas vibrantes (Tabs. 4 e 5), estas são determinadas a partir da Eq. (3.9), resultando nos valores apresentados pela Tab. 6, que exhibe também os aleatórios gerados (r_1 , r_2 e r_3) utilizados nos cálculos.

Tabela 6 – Aleatórios gerados e novas posições obtidas.

VP_{new_i}	r_1		r_2		r_3		x_1	x_2
1	0,8491	0,9340	0,6787	0,7577	0,7431	0,3922	-7,5637	-9,8148
2	0,1712	0,7060	0,0318	0,2769	0,0462	0,0971	1,1120	-10,8785
3	0,6948	0,3171	0,9502	0,0344	0,4387	0,3816	-10,6127	2,0092
4	0,7952	0,1869	0,4898	0,4456	0,6463	0,7094	3,4043	-7,6680
5	0,2760	0,6797	0,6551	0,1626	0,1190	0,4984	-4,1460	-10,0083

c) Tratamento das Restrições Laterais:

Analisando os dados da Tab. 6, verifica-se que, em algumas partículas, determinados valores das variáveis de projeto violaram as faixas nas quais estas foram definidas após o processo de atualização das posições (valores em destaque na tabela). Dessa maneira, o algoritmo propõe o uso de uma técnica baseada na Busca Harmônica (KAVEH; TALATAHARI, 2009), a qual irá identificar os componentes violados e reinseri-los no espaço de busca.

Para isso, primeiramente, comparando-se o valor de um aleatório gerado entre 0 e 1 com o parâmetro $HMCR$, é decidido se a troca do componente violado será realizada com o valor HB de uma partícula escolhida aleatoriamente a partir dos elementos da matriz de armazenamento (VP_M). Em caso afirmativo, a troca é realizada e, além disso, na sequência, compara-se o valor de um aleatório gerado no intervalo $[0, 1]$ com o parâmetro PAR para determinar se o valor que foi alterado sofrerá uma leve perturbação (positiva ou negativa e ponderada pelo produto entre um aleatório e o parâmetro BW), assumindo um valor da vizinhança ou não. Em caso negativo, o procedimento adotado para a regeneração segue o uso da Eq. (3.7), semelhante ao que ocorre no processo de inicialização, apenas para os valores que ultrapassaram os limites inferiores ou superiores. Após o uso desta técnica, com todas as partículas devidamente inseridas no espaço de busca, são estabelecidos todos os valores atualizados das novas posições e os correspondentes valores da função objetivo, conforme apresenta a Tab. 7.

Tabela 7 – Novas posições adequadas ao espaço de busca e valores da função objetivo.

VP_{new_i}	x_1	x_2	$f(x)$
1	-7,5637	-9,8148	190,2953
2	1,1120	-3,1923	17,5878
3	6,2945	2,0092	29,0500
4	3,4043	-7,6680	80,9144
5	-4,1460	-8,0492	108,3687

c) Atualização de HB :

Por fim, a quantidade de avaliações da função objetivo é atualizada ($NFE = 5$). A matriz de memória (VP_M) mantém o ordenamento crescente e nela são armazenados apenas

os novos vetores VP_i que fornecem um valor menor de $f(x)$ em relação aos valores atuais, isto é, cada nova posição é comparada com o último registro dos elementos da matriz de armazenamento de acordo com a função objetivo. Se uma nova partícula é considerada melhor, a substituição é imediata, sendo possível que partículas da mesma geração sejam eliminadas neste processo. Desse modo, garante-se sempre que a primeira linha (ou partícula) da nova matriz VP_M representará a melhor posição histórica global. Através da comparação dos dados presentes nas Tabs. 3 e 7, a matriz de memória resultante em termos das variáveis de busca e da função objetivo é representada pela Tab. 8.

Tabela 8 – Matriz de memória atualizada.

$VP_{M_{new}}$	x_1	x_2	$f(x)$
1	1,1120	-3,1923	17,5878
2	6,2945	2,0092	29,0500
3	3,4043	-7,6680	80,9144
4	-4,1460	-8,0492	108,3687
5	9,1501	9,2978	135,2777

Com isso, para esta aplicação, o vetor HB atualizado e o respectivo valor da função objetivo são dados por:

$$HB = \begin{bmatrix} 1,1120 & -3,1923 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$f(x)_{HB} = 17,5878 \quad (3.21)$$

E assim finaliza-se a primeira iteração/geração do APV. Caso o critério de parada seja satisfeito, isto é, se $NFE \geq NFE_{max}$, o processo é interrompido e a melhor solução encontrada para $f(x)$ é apresentada. Caso contrário, o procedimento iterativo continua a ocorrer, atualizando-se o número de iterações do algoritmo (q) e seguindo todos os demais passos apresentados na sequência, até que se obtenha $NFE \geq NFE_{max}$.

Como neste exemplo considerou-se $NFE_{max} = 5$ e o último valor atualizado de NFE também é 5, encerra-se o processo de otimização via APV e a melhor solução obtida é representada pelas Eqs. (3.20) e (3.21). Para ilustrar a atualização da população ao longo desta geração, a Fig. 9 apresenta um gráfico do tipo curva de nível em que se destacam as populações inicial e atualizada (ao final da geração apresentada). Neste caso, verifica-se que os candidatos gerados pelo APV (população atualizada) estão, em geral, mais próximos da solução ótima conhecida (neste caso a global).

É importante destacar que os parâmetros aqui definidos seguem o propósito didático desta seção e, por isso, com um reduzido número de partículas e apenas uma geração, a solução ótima prevista não foi encontrada. Porém, constata-se que a população atualizada fornece uma solução melhor em relação à população original (puramente aleatória), conforme já mencionado e evidenciado na Fig. 9. Assim, utilizando uma população e um número de gerações bem

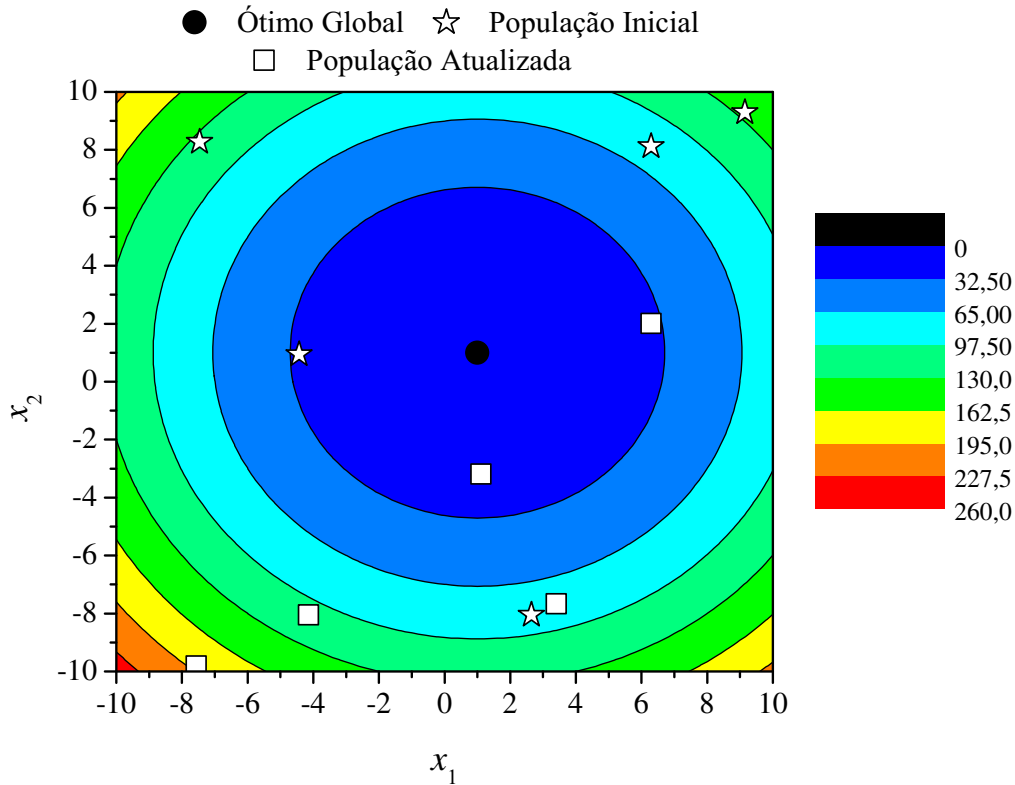


Figura 9 – Movimento das partículas no plano para a função estudada.

superiores aos considerados, espera-se que a aplicação do APV a este e outros problemas de otimização resulte em uma boa aproximação para a solução ótima.

3.4 EXTENSÃO DO APV PARA O CONTEXTO MULTI-OBJETIVO

Em linhas gerais, estender um algoritmo heurístico mono-objetivo para o contexto multi-objetivo consiste em associar a técnica de otimização a dois operadores, a saber, o que analisa o critério de dominância de Pareto e o de truncamento de soluções. O primeiro consiste em avaliar a dominância entre os pontos que fazem parte da população corrente. Já o segundo consiste em garantir, no decorrer do processo evolutivo, que o número de pontos que fazem parte da solução corrente não aumente indefinidamente (DEB, 2001). Neste caso, as soluções candidatas geradas pelo algoritmo heurístico são avaliadas considerando os dois operadores. Se esta abordagem resultar na diversidade de pontos que compõem a solução obtida, ao final do processo evolutivo existe a possibilidade de que o algoritmo proposto resulte em uma boa aproximação para a solução ótima.

Em relação ao APV, devido ao sucesso desta abordagem em aplicações no contexto mono-objetivo, naturalmente pode-se estender o mesmo para problemas multi-objetivos. Neste contexto, esta seção tem por objetivo apresentar as características do algoritmo *Multi-objective*

Vibrating Particles System (MOVPS) proposto na presente dissertação. De forma geral, este algoritmo multi-objetivo é estruturado conforme a Fig. 10 e os principais passos são descritos a seguir.

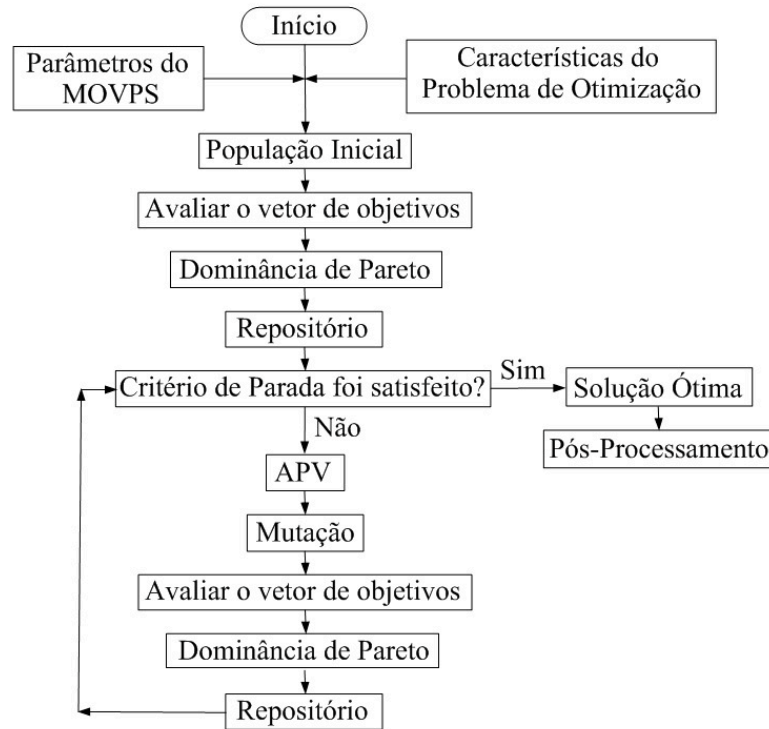


Figura 10 – Fluxograma do algoritmo *Multi-objective Vibrating Particles System* proposto.

- 1) Definir os parâmetros do MOVPS (NP - tamanho da população; N_{gen} - número de gerações; w_i ($i = 1, 2$) - peso que mensura a importância relativa entre as partículas da população; p - probabilidade que define se a pior partícula será ou não considerada como contribuição na geração de um candidato em potencial; α - parâmetro considerado para atualizar o valor de D ; e p_m - probabilidade de mutação) e as características que definem o problema em análise (n_{obj} - número de objetivos, N - número de variáveis de projeto; limites laterais (x^{min} - limites inferiores e x^{max} - limites superiores); tipo de problema (algébrico ou diferencial); solução analítica (caso esta seja conhecida)).
- 2) Gerar a população inicial. Neste caso, conhecendo-se o tamanho da população, o número de variáveis de projeto e os limites laterais, a população inicial é gerada de forma aleatória.
- 3) Avaliar cada indivíduo da população segundo o vetor de objetivos. Esta avaliação depende do tipo de problema, isto é, algébrico ou diferencial. Neste caso, se a avaliação do vetor de objetivos requerer a integração de um modelo, este deve ser resolvido considerando a abordagem mais indicada para essa finalidade.
- 4) Aplicar o critério de dominância de Pareto a cada indivíduo da população corrente. Neste caso, o operador utilizado realiza a comparação de cada solução i com todas as demais para

verificar se ela é dominada por alguma outra solução dentro da população. Caso a solução i seja dominada por alguma outra, isso significa que existe pelo menos um candidato que é melhor do que i considerando a totalidade dos objetivos. Com isso, a partícula i não pode pertencer ao conjunto não-dominado. Por outro lado, se nenhuma solução domina i , então esta constituirá o conjunto não-dominado. Esta metodologia simples é implementada matricialmente de modo que os objetivos correspondentes de cada partícula são confrontados entre si em todas as possibilidades de comparação, sendo importante lembrar que formalmente uma solução x só é considerada não-dominada em relação a outra solução y (em outras palavras, x domina y) quando x não é pior em todos os objetivos e quando x é melhor em pelo menos um objetivo em relação a y , simultaneamente (DEB, 2001).

- 5) Registrar as soluções não-dominadas no repositório. Para essa finalidade, o usuário deve definir o tamanho máximo desta população. Assim, se o número de indivíduos dessa população for maior que o número definido, a mesma é truncada de acordo com o critério denominado de distância da multidão (DEB, 2001). Este operador descreve a densidade de soluções presentes na solução atual de modo que os pontos que são mais próximos sejam eliminados e os pontos extremos sejam sempre preservados. Para esse cálculo para um dado conjunto de pontos da população os vetores são classificados de acordo com seu valor de função objetivo. Os candidatos com os menores ou maiores valores são assumidos como tendo uma distância infinita (para que estes não sejam eliminados). Para todos os outros candidatos, a distância da multidão é calculada de acordo com a seguinte relação:

$$d_{I_i^m} = d_{I_i^m} + \frac{f_m^{I_{i+1}^m} - f_m^{I_{i-1}^m}}{f_m^{max} - f_m^{min}} \quad (3.22)$$

onde m representa o m -ésimo objetivo, $f_m^{I_{i+1}^m}$ e $f_m^{I_{i-1}^m}$ representam os valores dos vizinhos de i da m -ésima função objetivo, e f_m^{max} e f_m^{min} representam os limites máximo e mínimo para o m -ésimo objetivo. Como destacado por Deb (2001), o operador de distância da multidão da i -ésima solução representa uma estimativa do perímetro formado pelo cubóide cujos vértices são os seus vizinhos mais próximos.

- 6) Empregar os operadores do APV (ver a Seção 3.2) para gerar uma nova população de candidatos à solução do problema de otimização. Conforme apresentado anteriormente, o APV proposto para o contexto mono-objetivo requer, em cada geração, a determinação da melhor posição encontrada (HB); de uma boa partícula (GP) e de uma partícula ruim (BP). Em se tratando de um problema mono-objetivo tais valores são obtidos facilmente. HB corresponde ao melhor candidato histórico global (em termos do valor da função objetivo). E os valores de GP e BP são determinados pelo ordenamento da população de acordo com os valores da função objetivo da população corrente. Entretanto, no contexto multi-objetivo, esta ideia não faz sentido, visto que a solução ótima corrente é composta por candidatos não-dominados. Para que a estratégia proposta por Kaveh (2017) no APV

possa ser empregada no MOVPS, tal ordenamento será realizado considerando a distância Euclidiana computada entre cada ponto da solução atual e a origem do espaço de objetivos. Assim, após a determinação das distâncias, GP e BP são escolhidos, aleatoriamente, na primeira e segunda metades da população corrente, respectivamente. Desse modo, as partículas com maiores chances de serem selecionadas para representar GP são aquelas que apresentam uma tendência a um melhor compromisso no atendimento dos objetivos, enquanto que as consideradas para representar BP referem-se àqueles candidatos que tendem a priorizar um ou outro objetivo, isto é, que apresentam as maiores distâncias Euclidianas em relação à origem do espaço de objetivos. HB , por sua vez, é determinado através de uma escolha aleatória dentro do conjunto das soluções não-dominadas que constituem a população armazenada no repositório. Esta escolha é realizada após o emprego do método da roleta para a seleção do cubóide que conterà a partícula que representará HB (COELLO; PULIDO; LECHUGA, 2004). Considerando que no contexto multi-objetivo não existirá um único candidato com o melhor valor histórico global (como acontece no contexto mono-objetivo), a metodologia proposta garante que a partícula que representará HB sempre fará parte do conjunto de soluções não-dominadas mais atualizado.

- 7) Aplicar o operador de mutação para evitar convergência prematura. Conforme demonstrado por Coello, Pulido e Lechuga (2004), algoritmos multi-objetivos baseados em população podem convergir para uma solução local. Neste caso, para minimizar essa possibilidade considera-se o mecanismo de exploração da população proposto por Coello, Pulido e Lechuga (2004). Em linhas gerais este consiste na exploração das vizinhanças dos candidatos pertencentes à população, de forma a evitar a convergência para uma solução local. Para a aplicação do operador de mutação inicialmente a população é dividida em três partes de modo que: *i*) a primeira não sofre perturbação; *ii*) a segunda é submetida a uma mutação uniforme ao longo das gerações de acordo com uma probabilidade definida; *iii*) e a terceira é perturbada por uma mutação não-uniforme ao longo das gerações. Neste último caso, os autores adotaram uma função de decaimento (P_f) para quantificar o percentual de indivíduos que seriam afetados por tal tipo de refinamento, que é definida como:

$$P_f = 1 - \left(\frac{i}{N_{gen}} \right)^{(1/p_m)} \quad (3.23)$$

em que i é a geração corrente, N_{gen} é o número máximo de gerações e p_m é a probabilidade de mutação. A Figura 11 apresenta o comportamento característico observado para P_f . Ao analisá-la percebe-se que, no início do processo evolutivo, todas as partículas deste grupo da população são afetadas pelo operador de mutação, isto é, todas elas são perturbadas. Por outro lado, com o decorrer do processo evolutivo, o operador de mutação deixa de influenciar esta parcela da população corrente.

- 8) Avaliar cada indivíduo da população segundo o vetor de objetivos. Caso algum candidato

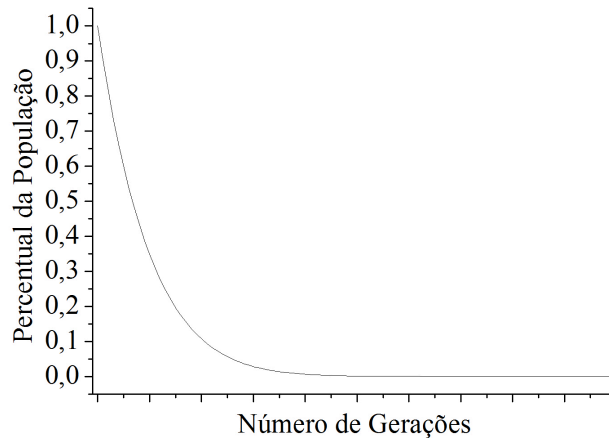


Figura 11 – Percentual de redução da parcela da população afetada pelo operador de mutação ao longo das gerações. No eixo x tem-se o número de gerações e no eixo y tem-se a porcentagem da população que é afetada pelo operador de mutação.

viole o espaço de projeto, utilizar uma regra de reparo para corrigi-lo antes da referida avaliação.

- 9) Agrupar os candidatos presentes no arquivo repositório com aqueles gerados pela aplicação do MOVPS. Aplicar o critério de dominância de Pareto e, caso o tamanho da população supere aquele que foi estabelecido, eliminar o excedente de indivíduos via utilização do operador de distância da multidão. Atualizar o arquivo repositório considerando os candidatos não-dominados.
- 10) Se o critério de parada for satisfeito, a população corrente do repositório representa a solução do problema em análise. De posse da solução ótima, realizar o pós-processamento. Este consiste: *i*) do cálculo das métricas de convergência e diversidade, caso a solução analítica para o problema em questão seja conhecida; e *ii*) da apresentação dos resultados.
- 11) Por outro lado, se o critério de parada não for satisfeito, voltar para o passo 6.

Neste trabalho considera-se o número máximo de gerações como critério de parada, porém outros critérios podem ser utilizados para essa finalidade.

Finalizada a descrição do algoritmo proposto, é importante apontar que foram poucos os estudos encontrados considerando o Algoritmo de Partículas Vibrantes no contexto multi-objetivo, conforme mencionado na introdução (Capítulo 1). Neste caso, é válido destacar as diferenças entre o algoritmo proposto neste trabalho e aquele concebido por [Kaveh e Ghazaan \(2019\)](#) que são, principalmente, o critério utilizado para o ordenamento da população corrente anterior à escolha de GP e BP ; a maneira como a melhor partícula histórica (HB) é selecionada; a abordagem utilizada para o tratamento das restrições laterais; e a presença ou ausência do

operador de mutação. Mais detalhes acerca deste assunto podem ser encontrados em [Kaveh e Ghazaan \(2019\)](#).

Em síntese, no presente capítulo foram apresentadas as estratégias de otimização APV e MOVPS. A primeira consiste no algoritmo mono-objetivo proposto por [Kaveh e Ghazaan \(2017\)](#) e que é inspirado na vibração livre de um sistema subamortecido com um grau de liberdade. Já a segunda consiste na extensão do APV para o contexto multi-objetivo em que se considera a associação entre os operadores propostos no APV com aqueles empregados para aplicação do critério de dominância de Pareto, cômputo da distância da multidão e refinamento das soluções especialmente no estágio inicial do processo evolutivo.

Para avaliar a qualidade dos resultados obtidos pelos algoritmos APV e MOVPS, nos próximos capítulos são apresentadas a análise de sensibilidade do APV considerando funções matemáticas, bem como aplicações mono e multi-objetivos em diferentes áreas da ciência.

4 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Considerando que a determinação dos valores mais adequados para os parâmetros dos algoritmos heurísticos pode não configurar uma tarefa trivial, a realização de uma análise de sensibilidade tem papel importante para compreender como a variação destes parâmetros influencia a qualidade da solução encontrada, bem como auxilia na obtenção de possíveis intervalos de utilização destes algoritmos (LOBATO, 2008). Nesse sentido, este capítulo tem como objetivo avaliar a influência dos principais parâmetros do APV em problemas matemáticos com diferentes características e níveis de complexidade, os quais são apresentados a seguir.

- Problema $F_1(x)$ (MOLGA; SMUTNICKI, 2005):

$$\min F_1(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (4.1)$$

A função $F_1(x)$ (também conhecida como *Sphere*) é um dos estudos de caso matemáticos mais empregados para a avaliação de algoritmos, sendo caracterizada como contínua, convexa e unimodal. O mínimo global de $F_1(x_{ótimo}) = 0$ é obtido para $x_i = 0, i = 1, \dots, n$. Neste estudo considerou-se $n = 5$ e x_i pertencente a $[-5,12; 5,12]$.

- Problema $F_2(x)$ (COUTO; SILVA; BARSANTE, 2015):

$$\begin{aligned} \min F_2(x) = & -\exp(-(x_1 - 4)^2 - (x_2 - 4)^2) - \exp(-(x_1 + 4)^2 - (x_2 - 4)^2) + \\ & -2 \exp(-x_1^2 - (x_2 + 4)^2) - 2 \exp(-x_1^2 - x_2^2) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Com duas variáveis de projeto, esta função apresenta dois mínimos locais em $x = (-4, 4)$ e $x = (4, 4)$ nos quais $F_2(x) = -1$ e dois mínimos globais em $x_{ótimo} = (0, -4)$ e $x_{ótimo} = (0, 0)$ em que $F_2(x_{ótimo}) = -2$. O espaço de busca é definido como $-10 \leq x_i \leq 10, i = 1, 2$, de modo a incluir os ótimos locais e globais.

- Problema $F_3(x)$ (KRAMER, 2008):

$$\min F_3(x) = (x_1 - 10)^3 + (x_2 - 20)^3 \quad (4.3)$$

sujeito às restrições:

$$g_1(x) \equiv -(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 5)^2 + 100 \leq 0 \quad (4.4a)$$

$$g_2(x) \equiv (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 5)^2 - 82,81 \leq 0 \quad (4.4b)$$

Este estudo de caso foi selecionado para possibilitar uma análise aplicada em problemas com restrições. São duas as variáveis de busca e o ótimo global ocorre em $x_{ótimo} = (14,0950; 0,8430)$ com $F_3(x_{ótimo}) = -6961,8139$, sendo que $13 \leq x_1 \leq 100$ e $0 \leq x_2 \leq 100$.

- Problema $F_4(x)$ (KRAMER, 2008):

$$\min F_4(x) = 5 \sum_{i=1}^4 x_i - 5 \sum_{i=1}^4 (x_i^2) - \sum_{i=5}^{13} x_i \quad (4.5)$$

sujeito às restrições:

$$g_1(x) \equiv 2x_1 + 2x_2 + x_{10} + x_{11} - 10 \leq 0 \quad (4.6a)$$

$$g_2(x) \equiv 2x_1 + 2x_3 + x_{10} + x_{12} - 10 \leq 0 \quad (4.6b)$$

$$g_3(x) \equiv 2x_2 + 2x_3 + x_{11} + x_{12} - 10 \leq 0 \quad (4.6c)$$

$$g_4(x) \equiv -8x_1 + x_{10} \leq 0 \quad (4.6d)$$

$$g_5(x) \equiv -8x_2 + x_{11} \leq 0 \quad (4.6e)$$

$$g_6(x) \equiv -8x_3 + x_{12} \leq 0 \quad (4.6f)$$

$$g_7(x) \equiv -2x_4 - x_5 + x_{10} \leq 0 \quad (4.6g)$$

$$g_8(x) \equiv -2x_6 - x_7 + x_{11} \leq 0 \quad (4.6h)$$

$$g_9(x) \equiv -2x_8 - x_9 + x_{12} \leq 0 \quad (4.6i)$$

Possuindo uma quantidade maior de restrições, este problema de otimização é também multidimensional ($n = 13$). O espaço de projeto é dado por $0 \leq x_i \leq 1$, para $i = 1, \dots, 9, 13$ e $0 \leq x_j \leq 100$ para $j = 10, 11, 12$. E o mínimo global $F_4(x_{ótimo}) = -15$ é obtido para $x_{ótimo} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 1)$.

- Problema $F_5(x)$ (COUTO; SILVA; BARSANTE, 2015):

$$\min F_5(x) = \sum_{i=1}^{10} [(\ln(x_i - 2))^2 + (\ln(10 - x_i))^2] - \left(\prod_{i=1}^{10} x_i \right)^{0,2} \quad (4.7)$$

A função *Paviani* é multimodal e multidimensional ($n = 10$), cujo valor mínimo global é aproximadamente $F_5(x_{ótimo}) \approx -45,778$ localizado em $x_{ótimo} = (9,351; \dots; 9,351)$, sendo as variáveis de busca limitadas no intervalo $2,0001 \leq x_i \leq 10$, $i = 1, 2, \dots, n$.

- Problema $F_6(x)$ (MOLGA; SMUTNICKI, 2005):

$$\min F_6(x) = 10n + \sum_{i=1}^n [x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i)] \quad (4.8)$$

A função *Rastrigin* ($F_6(x)$) caracteriza-se por ser multimodal com uma grande quantidade de mínimos locais regularmente distribuídos. Seu mínimo global é dado por $F_6(x_{ótimo}) = 0$ para $x_i = 0$, $i = 1, \dots, n$ e, para esta análise, a dimensão e o espaço de projeto foram definidos como $n = 2$ e $-5,12 \leq x_i \leq 5,12$, $i = 1, 2$, respectivamente.

Quando o estudo de sensibilidade considera a variação de um determinado parâmetro para a observação de sua influência sobre o desempenho do algoritmo, o ideal é que os demais permaneçam constantes para se evitar uma hiper-heurística. Dessa forma, na Tab. 9 são apresentados os parâmetros *default*, bem como aqueles escolhidos para realização da análise de sensibilidade (n_{VP} , q_{max} , α , w_1 e p). Cabe mencionar que esta escolha foi feita a partir de simulações preliminares. Para a realização da análise de sensibilidade o APV foi executado 30 vezes para determinação dos valores de média e desvio-padrão, além de sempre terem sido consideradas sementes aleatórias para a inicialização do algoritmo.

Tabela 9 – Parâmetros considerados para a análise de sensibilidade no APV.

Parâmetro	Default	Análise de Sensibilidade
n_{VP}	25	[10 25 50 100]
q_{max}	250	[100 250 500 1000]
α	0,05	[0,01 0,05 0,1 0,5]
w_1	0,3	[0,1 0,3 0,5 0,6]
w_2	0,3	0,3
w_3	0,4	[0,6 0,4 0,2 0,1]
p	0,1	[0,05 0,1 0,4 0,8]
$HMCR$	0,95	0,95
PAR	0,1	0,1
BW	0,1	0,1

4.1 INFLUÊNCIA DO TAMANHO DA POPULAÇÃO

Na Figura 12, são apresentados os gráficos do tipo *boxplot* relativos à análise da influência do número de indivíduos (ou partículas vibrantes) realizada para cada uma das funções matemáticas apresentadas no início deste capítulo. A variação deste parâmetro considerou populações com 10, 25, 50 e 100 indivíduos.

Analisando-se a Fig. 12 para as funções $F_1(x)$ e $F_2(x)$ é possível observar que o APV sempre convergiu para a solução ótima, visto os valores de média e desvio-padrão encontrados. Além disso, não se observa diferenças significativas para os tamanhos de população considerados. Já as funções $F_3(x)$, $F_4(x)$, $F_5(x)$ e $F_6(x)$ apresentaram maior dispersão para o menor tamanho de população ($n_{VP} = 10$). Este resultado já era esperado devido à influência que este parâmetro tem na qualidade da solução obtida. Para as funções $F_3(x)$ e $F_6(x)$ o aumento no valor do parâmetro implica na redução do desvio-padrão. Finalmente, para as funções $F_4(x)$ e $F_5(x)$, o aumento no valor do tamanho da população não resultou na melhora do valor da função objetivo. Na prática, isto significa que nem todas as simulações realizadas convergiram para a melhor solução reportada na literatura. Provavelmente, esse resultado se deve as não linearidades destes estudos de caso (presença de grande quantidade de restrições e multimodali-

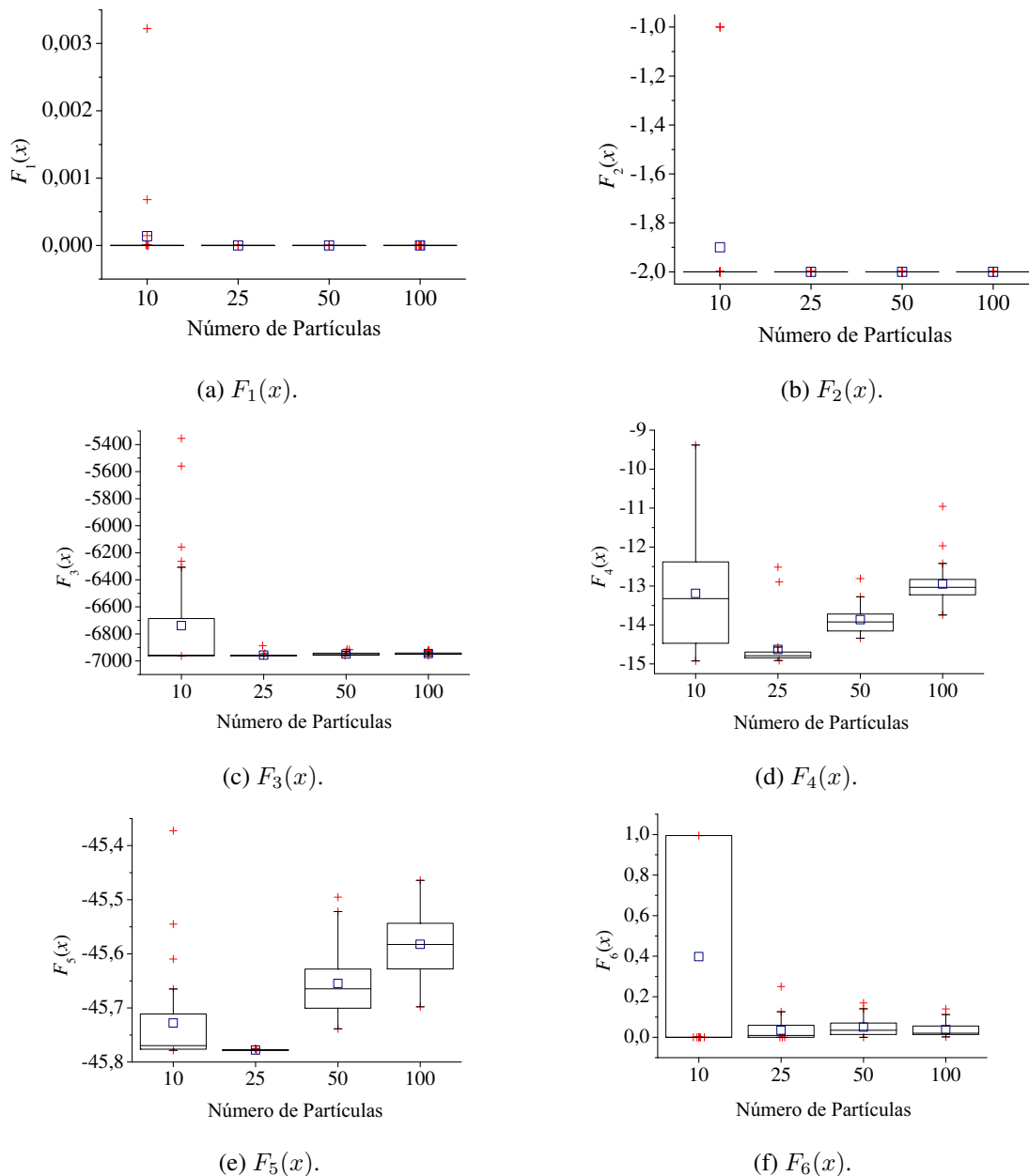


Figura 12 – Influência do número de partículas no APV. \square = valor médio, $+$ = outlier.

dade/multidimensionalidade, respectivamente). Em geral, o melhor resultado para as funções estudadas em termos da estimativa do ótimo global foi para uma população com 25 indivíduos.

Os resultados destacados na Tab. 10 reforçam a análise apresentada para as funções $F_1(x)$ e $F_2(x)$ e indicam que para a primeira, observando a ordem de grandeza dos valores de média e desvio-padrão, a população com 25 indivíduos apresenta o melhor resultado. Além disso, os valores médios da solução ótima para $F_3(x)$, $F_4(x)$ e $F_5(x)$ também são os mais próximos do esperado quando $n_{VP} = 25$ e, em contrapartida, os maiores desvios ocorrem para $n_{VP} = 10$. E, por fim, verifica-se para a função $F_6(x)$ que o APV foi capaz de obter a solução ótima global para $n_{VP} = 10$ e $n_{VP} = 25$, sendo que a média e o desvio-padrão foram bastante próximos para as populações analisadas com 25 ou mais indivíduos. Assim, pode-se dizer que n_{VP} igual a 25 é

Tabela 10 – Influência do tamanho da população no APV.

	n_{VP}	Média	Desvio	Melhor Valor
$F_1(x)$	10	$1,4 \times 10^{-4}$	$5,9 \times 10^{-4}$	$1,9 \times 10^{-17}$
	25	$1,5 \times 10^{-11}$	$3,3 \times 10^{-11}$	$2,0 \times 10^{-15}$
	50	$1,4 \times 10^{-9}$	$1,6 \times 10^{-9}$	$2,5 \times 10^{-11}$
	100	$3,7 \times 10^{-8}$	$6,4 \times 10^{-8}$	$6,8 \times 10^{-10}$
$F_2(x)$	10	-1,9000	0,3051	-2,0000
	25	-2,0000	$1,3 \times 10^{-14}$	-2,0000
	50	-2,0000	$1,3 \times 10^{-14}$	-2,0000
	100	-2,0000	$1,3 \times 10^{-14}$	-2,0000
$F_3(x)$	10	-6738,7413	425,3199	-6961,8145
	25	-6957,1978	13,8448	-6961,8061
	50	-6948,1268	12,0598	-6960,9710
	100	-6945,0240	11,2846	-6961,6090
$F_4(x)$	10	-13,1900	1,3739	-14,9251
	25	-14,6312	0,5340	-14,9130
	50	-13,8627	0,3515	-14,3394
	100	-12,9490	0,5075	-13,7453
$F_5(x)$	10	-45,7279	0,0880	-45,7782
	25	-45,7777	0,0008	-45,7785
	50	-45,6548	0,0585	-45,7387
	100	-45,5824	0,0644	-45,6980
$F_6(x)$	10	0,3980	0,4958	0,0000
	25	0,0345	0,0537	0,0000
	50	0,0501	0,0460	0,0003
	100	0,0377	0,0362	0,0026

considerada uma boa escolha para o tamanho da população em termos do binômio convergência versus custo computacional.

4.2 INFLUÊNCIA DO NÚMERO MÁXIMO DE GERAÇÕES

A Figura 13 apresenta a avaliação do número máximo de gerações em relação à aplicação do APV considerando as funções matemáticas. Nesta percebe-se que, como esperado, quanto maior o número de gerações, melhor é a estimativa encontrada para a solução ótima. Como para esta análise foram consideradas 25 partículas, a quantidade de avaliações da função objetivo é de 2525, 6275, 12525 e 25025 para o número máximo de gerações de 100, 250, 500 e 1000, respectivamente. Este resultado está de acordo com o esperado, pois quanto maior o valor deste parâmetro, mais vezes os operadores do APV são utilizados para a evolução da população dos candidatos em potencial à solução do problema de otimização. Nos problemas mais simples ($F_1(x)$ e $F_2(x)$), o número máximo de gerações igual a 100 já se mostra como uma boa escolha (atentando-se para a ordem de grandeza da escala do eixo vertical), porém, nos problemas de maior complexidade ($F_3(x)$ a $F_6(x)$), os resultados encontrados neste caso mostram uma maior

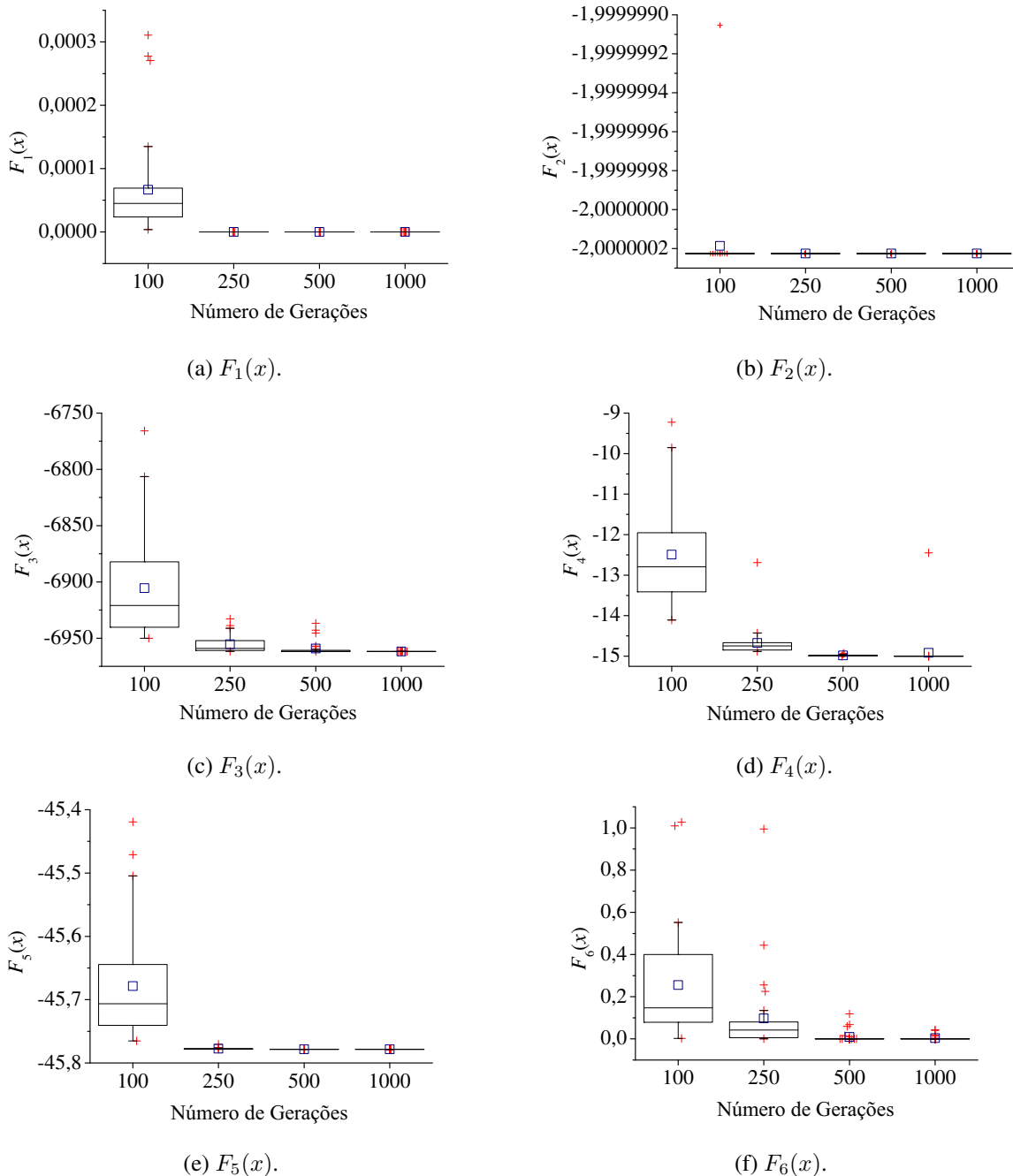


Figura 13 – Influência do número de gerações no APV. \square = valor médio, $+$ = outlier.

dispersão, de modo que nem sempre o APV convergiu para a solução esperada. Para a função *Paviani* 250 gerações já é uma boa escolha e para as demais o número máximo de 500 gerações se mostra o mais adequado, pensando em redução do custo computacional.

De acordo com a Tab. 11 nota-se, no geral, que os desvios são reduzidos com o aumento do número de iterações/gerações. O APV apresenta uma boa convergência para as funções $F_1(x)$ e $F_2(x)$ mesmo com o menor valor do parâmetro considerado ($q_{max} = 100$). Para as funções $F_3(x)$, $F_4(x)$ e $F_6(x)$, tanto os resultados de média quanto de melhor valor encontrado se aproximam mais do esperado para 500 e 1000 gerações, enquanto para a função *Paviani*

Tabela 11 – Influência do número de gerações no APV.

	q_{max}	Média	Desvio	Melhor Valor
$F_1(x)$	100	$6,6 \times 10^{-5}$	$8,0 \times 10^{-5}$	$3,5 \times 10^{-6}$
	250	$3,8 \times 10^{-12}$	$6,7 \times 10^{-12}$	$4,7 \times 10^{-15}$
	500	$1,8 \times 10^{-21}$	$7,5 \times 10^{-21}$	$1,5 \times 10^{-27}$
	1000	$5,1 \times 10^{-44}$	$2,3 \times 10^{-43}$	$1,0 \times 10^{-51}$
$F_2(x)$	100	-2,0000	$2,1 \times 10^{-7}$	-2,0000
	250	-2,0000	$1,3 \times 10^{-14}$	-2,0000
	500	-2,0000	$1,3 \times 10^{-14}$	-2,0000
	1000	-2,0000	$1,3 \times 10^{-14}$	-2,0000
$F_3(x)$	100	-6905,4817	44,6918	-6950,0591
	250	-6955,3585	8,0490	-6961,7303
	500	-6959,2060	6,1714	-6961,8145
	1000	-6961,7865	0,0741	-6961,8146
$F_4(x)$	100	-12,4915	1,2690	-14,1060
	250	-14,6735	0,3937	-14,8835
	500	-14,9798	0,0162	-14,9981
	1000	-14,9146	0,4658	-14,9999
$F_5(x)$	100	-45,7651	0,0883	-45,7651
	250	-45,7784	0,0015	-45,7784
	500	-45,7785	$8,1 \times 10^{-6}$	-45,7785
	1000	-45,7785	$5,6 \times 10^{-12}$	-45,7785
$F_6(x)$	100	0,2549	0,2667	0,0022
	250	0,0969	0,1941	0,0000
	500	0,0091	0,0263	0,0000
	1000	0,0040	0,0111	0,0000

($F_5(x)$) constata-se que isso já ocorre a partir de 250 gerações. Assim, para iniciar o APV pode ser indicado um número máximo de 500 gerações.

4.3 INFLUÊNCIA DO PARÂMETRO α

A análise da influência do parâmetro α (ver a Eq. (3.8)) para cada uma das funções matemáticas consideradas é apresentada na Fig. 14. Para essa finalidade consideram-se os seguintes valores para este parâmetro: 0,01, 0,05, 0,1 e 0,5.

De acordo com a Fig. 14, valores de α menores do que 0,1 não produziu em geral, para as funções consideradas, grandes diferenças nos resultados obtidos. Por outro lado, α igual a 0,5 resultou, exceto para a função $F_2(x)$, em maiores variações da média e do desvio-padrão. A justificativa para essa piora nos resultados considerando este valor de α está, provavelmente, na finalidade deste parâmetro. Conforme pode ser observado na Eq. (3.8), α tem por objetivo contribuir com o refinamento das soluções ao longo do procedimento iterativo, isto é, ajudar a refinar a melhor solução obtida ao longo das gerações. Dessa maneira, um valor elevado para este parâmetro como 0,5 não favoreceu o desempenho do algoritmo na busca pela solução ótima

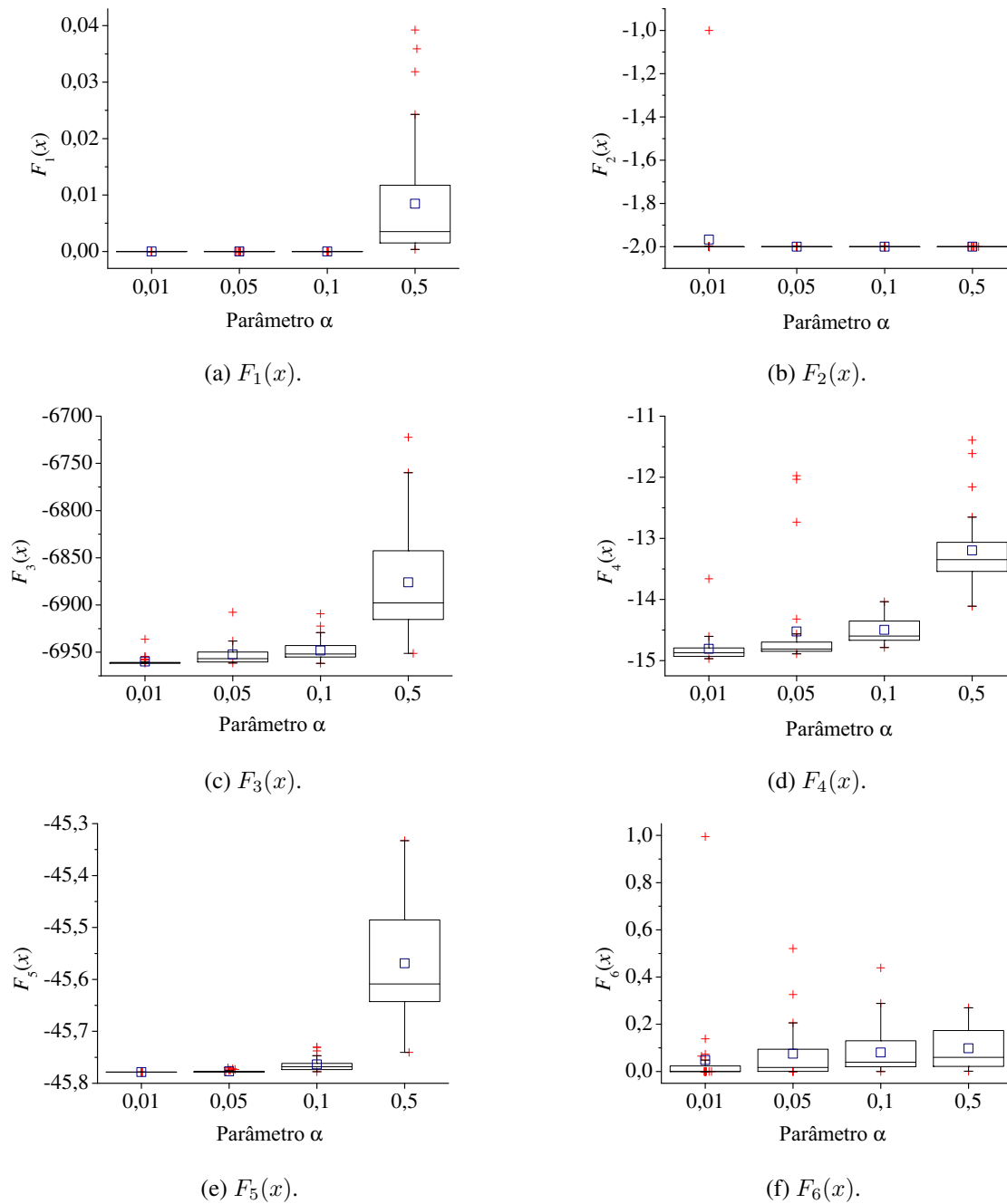


Figura 14 – Influência do parâmetro α no APV. \square = valor médio, $+$ = outlier.

global em termos de convergência.

Na Tabela 12 observa-se que menores valores para o parâmetro α favorecem a obtenção de uma boa aproximação para a solução ótima. Isto está relacionado ao refinamento das soluções introduzido por este parâmetro, conforme observado na Eq. (3.8). Cabe destacar que, para a função $F_2(x)$, é observado a presença de um outlier na Fig. 14 para $\alpha = 0,01$. Isto significa que o algoritmo não conseguiu escapar de um ótimo local. Já para a função $F_6(x)$, uma boa aproximação para a solução ótima foi obtida apenas para os valores de α menores que 0,1. Neste caso, pode-se sugerir $\alpha \leq 0,1$ para inicializar o APV em uma nova aplicação.

Tabela 12 – Influência do parâmetro α no APV.

	α	Média	Desvio	Melhor Valor
$F_1(x)$	0,01	$7,9 \times 10^{-15}$	$1,9 \times 10^{-14}$	$2,2 \times 10^{-18}$
	0,05	$1,9 \times 10^{-11}$	$3,9 \times 10^{-11}$	$1,8 \times 10^{-14}$
	0,1	$1,7 \times 10^{-8}$	$3,7 \times 10^{-8}$	$5,5 \times 10^{-11}$
	0,5	$8,5 \times 10^{-3}$	$1,1 \times 10^{-2}$	$3,7 \times 10^{-4}$
$F_2(x)$	0,01	-1,9667	$1,8 \times 10^{-1}$	-2,0000
	0,05	-2,0000	$1,3 \times 10^{-14}$	-2,0000
	0,1	-2,0000	$1,3 \times 10^{-14}$	-2,0000
	0,5	-2,0000	$1,5 \times 10^{-6}$	-2,0000
$F_3(x)$	0,01	-6959,7687	4,8848	-6961,8145
	0,05	-6952,2715	11,3883	-6961,4707
	0,1	-6948,1380	11,6227	-6961,7155
	0,5	-6876,0937	58,4690	-6951,2664
$F_4(x)$	0,01	-14,8088	0,2402	-14,9686
	0,05	-14,5260	0,7890	-14,8907
	0,1	-14,4987	0,2152	-14,7865
	0,5	-13,1985	0,6146	-14,1096
$F_5(x)$	0,01	-45,7785	$1,5 \times 10^{-5}$	-45,7785
	0,05	-45,7771	0,0021	-45,7784
	0,1	-45,7638	0,0136	-45,7776
	0,5	-45,5690	0,1067	-45,7406
$F_6(x)$	0,01	0,0483	0,1815	0,0000
	0,05	0,0754	0,1145	0,0000
	0,1	0,0806	0,0996	$1,8 \times 10^{-10}$
	0,5	0,0983	0,0871	0,0012

4.4 INFLUÊNCIA DO PARÂMETRO w_1

A Figura 15 apresenta a análise da influência do parâmetro w_1 (medida da importância relativa de HB , que é a melhor partícula até a presente iteração) considerando as funções matemáticas $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, $F_4(x)$, $F_5(x)$ e $F_6(x)$. Como w_1 deve estar no intervalo de (0,1) e a soma deste com os parâmetros w_2 e w_3 resulta na unidade, os valores estabelecidos para sua variação foram de 0,1, 0,3, 0,5 e 0,6.

Ao avaliar a Fig. 15 é possível observar que, no geral, para as funções mais simples a variação desse parâmetro não tem tanta influência sobre o valor ótimo encontrado. Todavia, ressalta-se que no estudo da função $F_1(x)$ o APV não convergiu para a solução ótima somente para o menor valor de w_1 especificado na análise. Nas funções restritas ($F_3(x)$ e $F_4(x)$), o valor do parâmetro analisado para o qual o algoritmo apresenta a melhor estimativa para a solução ótima global é claramente 0,3; o que também pode ser afirmado sobre a função $F_5(x)$, na qual o uso de $w_1 = 0,5$ também não se mostraria totalmente inadequado. Avaliando a função $F_6(x)$ os valores de 0,5 e 0,6 para este parâmetro não forneceram bons resultados e, pelo que a figura indica, 0,3 neste caso também é evidentemente o valor mais adequado.

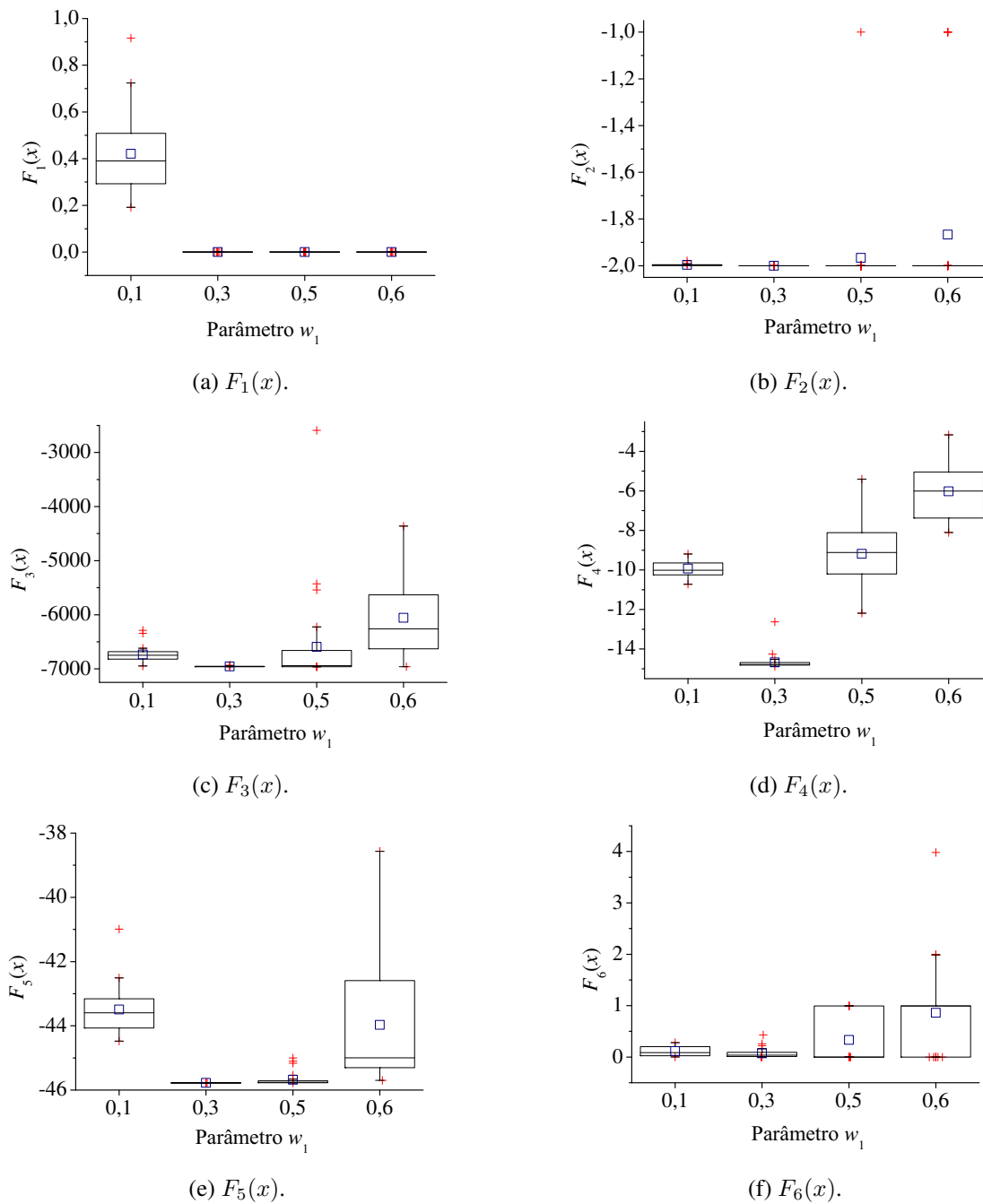


Figura 15 – Influência do parâmetro w_1 no APV. \square = valor médio, $+$ = outlier.

Considerando a média, o desvio-padrão e o melhor valor apresentados na Tab. 13, verifica-se que, pela ordem de grandeza, para $F_1(x)$ a melhor aproximação do ótimo global foi obtida para w_1 igual a 0,5; para as funções $F_2(x)$ a $F_5(x)$ as melhores médias (mais próximas do ótimo esperado) associadas aos menores desvios ocorreram sempre para $w_1 = 0,3$; e para $F_6(x)$ uma boa aproximação para a solução ótima foi encontrada para valores de $w_1 \geq 0,3$.

A partir desta análise, conclui-se que a solução é bem sensível a escolha do parâmetro w_1 e que valores próximos a 0,3 fornecem os melhores resultados, sendo esta uma boa indicação para iniciar o uso do APV.

Tabela 13 – Influência do parâmetro w_1 no APV.

	w_1	Média	Desvio	Melhor Valor
$F_1(x)$	0,1	0,4210	0,1731	0,1916
	0,3	$1,9 \times 10^{-11}$	$4,0 \times 10^{-11}$	$4,9 \times 10^{-14}$
	0,5	$1,6 \times 10^{-30}$	$8,5 \times 10^{-30}$	$1,3 \times 10^{-55}$
	0,6	$9,9 \times 10^{-14}$	$5,4 \times 10^{-13}$	$2,4 \times 10^{-75}$
$F_2(x)$	0,1	-1,9967	0,0041	-1,9999
	0,3	-2,0000	$1,2 \times 10^{-14}$	-2,0000
	0,5	-1,9667	0,1826	-2,0000
	0,6	-1,8667	0,3457	-2,0000
$F_3(x)$	0,1	-6735,3752	142,3457	-6947,3511
	0,3	-6955,2967	6,6472	-6961,8000
	0,5	-6594,8409	851,2693	-6961,8146
	0,6	-6056,1868	752,8920	-6961,2730
$F_4(x)$	0,1	-9,9354	0,4169	-10,7225
	0,3	-14,6747	0,4058	-14,8828
	0,5	-9,1821	1,5162	-12,1853
	0,6	-6,0256	1,4473	-8,1056
$F_5(x)$	0,1	-43,4926	0,7162	-44,4790
	0,3	-45,7762	0,0028	-45,7784
	0,5	-45,6780	0,2074	-45,7785
	0,6	-43,9691	1,8069	-45,6990
$F_6(x)$	0,1	0,1145	0,0925	0,0025
	0,3	0,0718	0,0953	0,0000
	0,5	0,3317	0,4770	0,0000
	0,6	0,8623	0,8560	0,0000

4.5 INFLUÊNCIA DO PARÂMETRO p

O último parâmetro avaliado neste capítulo é a probabilidade p , sendo considerados para este estudo os seguintes valores 0,05; 0,1; 0,4 e 0,8. Este parâmetro está relacionado com a probabilidade de se desprezar a influência da partícula ruim na atualização da população que equivale a $1 - p$. Os resultados da análise considerando o parâmetro p são apresentados na Fig. 16.

Nesta, nota-se que para as funções mais simples, a variação do parâmetro estudado não apresentou tanta influência sobre a convergência. Nas demais funções, comportamentos distintos foram identificados, de modo que com o maior valor de p (0,8) a solução encontrada convergiu para o valor esperado de ótimo na maior parte das execuções para as funções $F_3(x)$ e $F_6(x)$, enquanto que para as funções $F_4(x)$ e $F_5(x)$ a Fig. 16 evidencia que quanto menor o valor do parâmetro p , melhores são os resultados para a estimativa do ótimo global.

Na Tabela 14 observa-se que para $F_1(x)$ os resultados mais precisos são obtidos para $p = 0,05$ e para $F_2(x)$ os valores de $p \leq 0,4$ foram bastante próximos entre si e condizentes com a expectativa. A tendência de melhoria da estimativa da solução ótima para os menores

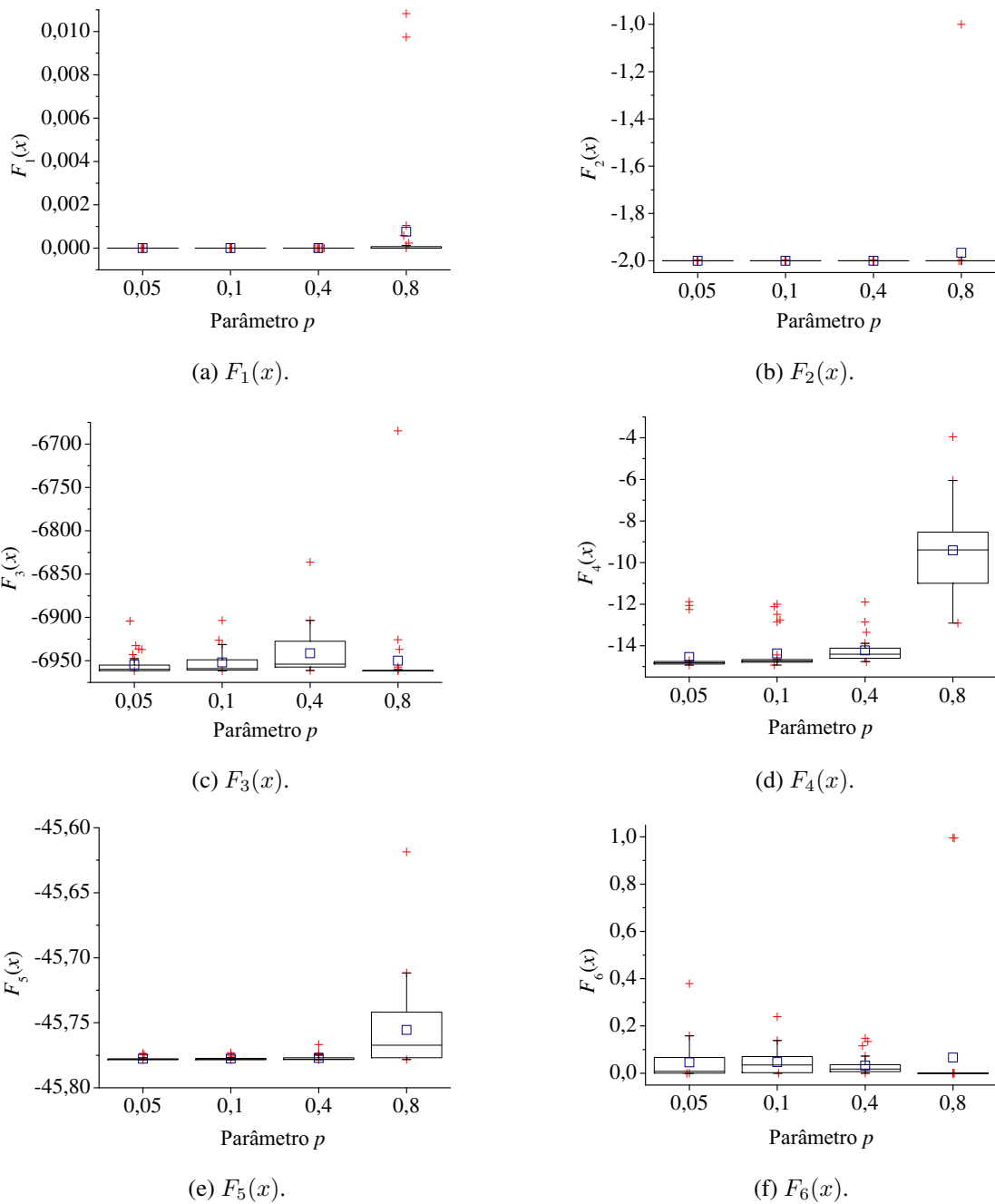


Figura 16 – Influência do parâmetro p no APV. \square = valor médio, $+$ = outlier.

valores do parâmetro considerado é enfatizada pelos resultados numéricos apresentados para as funções $F_4(x)$ e $F_5(x)$. E para as funções $F_3(x)$ e $F_6(x)$, os maiores desvios são identificados para $p = 0,8$, provavelmente devido à presença de alguns *outliers* (ver a Fig. 16). Nestas, o melhor valor encontrado apresentou resultados próximos entre si para a variação do parâmetro e, analisando especificamente a média e o desvio-padrão, os valores mais adequados de p seriam de 0,05 para a função restrita ($F_3(x)$) e de 0,4 para a função $F_6(x)$.

Logo, a avaliação da influência de p sobre o desempenho do APV é inconclusiva, uma vez que, a depender do problema de otimização, os resultados do algoritmo podem ser melhores

Tabela 14 – Influência do parâmetro p no APV.

	p	Média	Desvio	Melhor Valor
$F_1(x)$	0,05	$1,6 \times 10^{-12}$	$3,7 \times 10^{-12}$	$8,5 \times 10^{-16}$
	0,1	$1,3 \times 10^{-11}$	$2,7 \times 10^{-11}$	$2,0 \times 10^{-14}$
	0,4	$3,6 \times 10^{-8}$	$1,1 \times 10^{-7}$	$1,7 \times 10^{-10}$
	0,8	$7,6 \times 10^{-4}$	$2,6 \times 10^{-3}$	$6,9 \times 10^{-10}$
$F_2(x)$	0,05	-2,0000	$1,3 \times 10^{-14}$	-2,0000
	0,1	-2,0000	$1,3 \times 10^{-14}$	-2,0000
	0,4	-2,0000	$1,2 \times 10^{-14}$	-2,0000
	0,8	-1,9667	0,1826	-2,0000
$F_3(x)$	0,05	-6954,3795	12,6511	-6961,7941
	0,1	-6952,0424	13,6658	-6961,8065
	0,4	-6941,4646	26,0276	-6961,3028
	0,8	-6950,0026	50,7013	-6961,8129
$F_4(x)$	0,05	-14,5456	0,8443	-14,9262
	0,1	-14,3695	0,8908	-14,9235
	0,4	-14,2244	0,6014	-14,7629
	0,8	-9,4160	2,07889	-12,9082
$F_5(x)$	0,05	-45,7777	0,0013	-45,7785
	0,1	-45,7776	0,0012	-45,7785
	0,4	-45,7771	0,0024	-45,7784
	0,8	-45,7555	0,0327	-45,7783
$F_6(x)$	0,05	0,0460	0,0758	0,0000
	0,1	0,0469	0,0529	$2,1 \times 10^{-13}$
	0,4	0,0321	0,0390	$4,3 \times 10^{-8}$
	0,8	0,0663	0,2524	$8,6 \times 10^{-12}$

com valores de p maiores, menores ou, ainda, não dependerem disso. Em outras palavras, não foi percebida nenhuma tendência de melhor comportamento do APV diante da variação deste parâmetro.

4.6 CONSOLIDADO DOS RESULTADOS

Em síntese, o estudo de sensibilidade resultou nas seguintes conclusões:

- Diferentemente do que normalmente se espera, o aumento do número de partículas no APV não promoveu, necessariamente, uma melhora na qualidade da solução obtida para algumas funções. Quando este for o caso, recomenda-se a realização de simulações preliminares com um maior número de gerações, aumentando-se o número de partículas até que este não tenha mais influência sobre a solução obtida. Por outro lado, como esperado, foi confirmado que populações com tamanhos muito reduzidos não fornecem bons resultados.
- O aumento do número máximo de gerações, por sua vez, apresentou a tendência natural de gerar melhores estimativas do ótimo global, em virtude da maior quantidade de evoluções

da população no processo de otimização. Porém, deve-se lembrar que este crescimento não pode ser ilimitado visando apenas a convergência, pois a ele também está associada a elevação do custo computacional.

- O parâmetro α demonstrou que influencia no desempenho do APV de tal forma que quanto menor o seu valor numérico, melhor é a convergência para uma boa aproximação da solução ótima.
- A importância relativa de HB , representada por w_1 , foi avaliada e o melhor valor encontrado neste caso, considerando as funções estudadas, em geral foi de 0,3.
- Para o parâmetro p , que representa a probabilidade de se considerar o efeito de partículas ruins na atualização dos indivíduos, a análise realizada foi inconclusiva quanto ao valor mais adequado para a melhor resolução por meio do algoritmo em pauta. Neste caso, para uma nova aplicação pode-se escolher um valor pertencente ao intervalo $[0, 1]$ e avaliar o seu desempenho.
- Como observado para outras estratégias heurísticas de otimização, não existe um conjunto de valores *default* que pode ser empregado para todos os estudos de caso. Todavia, pode-se avaliar, caso a caso, a melhor opção para que a melhor solução seja obtida. No caso específico do APV sugere-se os seguintes parâmetros para a sua inicialização: $n_{VP} = 25$, $q_{max} = 500$, $\alpha = 0,01$, $w_1 = 0,3$, $p = 0,1$. Finalmente, cabe enfatizar que estes foram sugeridos a partir da análise dos estudos de caso apresentados neste capítulo. Assim, nada garante que estes são os melhores parâmetros para outras aplicações, mas apenas sugestões para a inicialização do APV.

Nos próximos capítulos serão apresentados os resultados obtidos pelo APV e pela metodologia proposta neste trabalho (*Multi-objective Vibrating Particles System - MOVPS*) no projeto de sistemas de engenharia considerando problemas mono e multi-objetivos, respectivamente.

5 APLICAÇÕES MONO-OBJETIVOS

No capítulo anterior foi realizada a análise de sensibilidade dos principais parâmetros do APV. A partir desta análise foi possível sugerir valores para a inicialização do APV em novas aplicações. No presente capítulo o APV será empregado como ferramenta para a otimização de estudos de caso mono-objetivos. Para essa finalidade são considerados problemas de otimização na área de projetos de sistemas de engenharia frequentemente utilizados para validar algoritmos.

Para um bom entendimento destas aplicações que seguem, faz-se necessário destacar as seguintes informações:

- Para o tratamento de restrições foi considerado o Método da Penalidade Exterior (VAN-[DERPLAATS, 1999](#)), conforme apresentado na Subseção [2.5.2](#). Para essa finalidade o fator de penalidade foi considerado como sendo fixo e igual a 10^{20} em todas as aplicações.
- É importante destacar que os estudos de caso que apresentam variáveis mistas (contínuas, inteiras, binárias e discretas), isto é, o projeto de um vaso de pressão e o projeto de um redutor de velocidade, foram tratados de acordo com a estratégia proposta por [Lobato \(2008\)](#), conforme a Seção [2.6](#).
- Quanto aos parâmetros iniciais do APV, foram considerados os seguintes valores: $\alpha = 0,01$, $w_1 = 0,3$, $w_2 = 0,3$, $w_3 = 0,4$ e $p = 0,1$, diferindo apenas o parâmetro α no problema do projeto do vaso de pressão (Seção [5.2](#)), em que este assume o valor de 0,05. No que tange a técnica utilizada para o tratamento das restrições laterais (Busca Harmônica), os parâmetros foram fixados como $HMCR = 0,95$, $PAR = 0,1$ e $BW = 0,1$. E em relação aos parâmetros característicos dos métodos de otimização baseados em população, a quantidade de indivíduos foi definida como $n_{VP} = 20$ e o número máximo de gerações, utilizado como critério de parada, variou de acordo com as aplicações, sendo indicado seu valor em cada uma das análises. É importante destacar que estes parâmetros foram escolhidos considerando os resultados apresentados no capítulo de análise de sensibilidade e simulações preliminares.
- Nas tabelas que serão apresentadas oportunamente, f^{opt} , f^w , f_m^{opt} e f^{std} representam, nesta ordem, o melhor, o pior, o valor médio e o desvio-padrão em relação à função objetivo. Para o cômputo destes valores, foram consideradas 30 execuções do APV em cada estudo de caso. E o número de avaliações da função objetivo em cada execução é designado por n_{eval} .
- Os resultados são obtidos considerando o APV implementado em linguagem MATLAB[®] em um computador com processador Intel Core i7-1165G7, 2,80 GHz com 8 GB de memória RAM, sistema operacional Windows 11 e versão do MATLAB[®] R2020a.

5.1 PROJETO DE UMA MOLA DE TENSÃO/COMPRESSÃO

A primeira aplicação refere-se ao projeto de uma mola de tensão/compressão (Fig. 17), componente mecânico importante devido à sua flexibilidade, que possibilita o controle durante a aplicação de forças, além do armazenamento e da liberação de energia quando solicitado pelo sistema projetado (BUDYNAS; NISBETT, 2011).

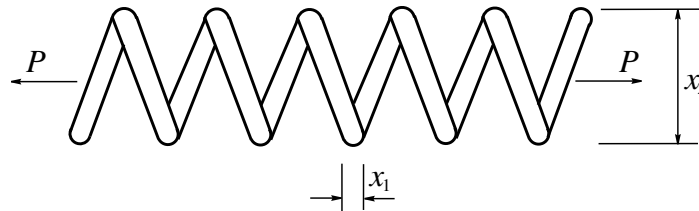


Figura 17 – Projeto de uma mola de tensão/compressão. Adaptado de Coello e Montes (2002).

Neste estudo de caso, descrito detalhadamente em Arora (1989), as variáveis de projeto são o diâmetro da seção transversal (x_1), o diâmetro médio da espira (x_2) (ambos representados em polegadas) e o número de espiras (x_3) (adimensional). O objetivo é minimizar a massa da mola submetida a um carregamento axial sem que ocorra a falha do material. O modelo matemático que representa este sistema é apresentado a seguir em termos do volume da mola e das restrições de deflexão mínima, tensão cisalhante, frequência crítica, diâmetro externo e das variáveis de busca (Eq. (5.1) e Eq. (5.2)).

$$\min f(x) = (x_3 + 2) x_2 x_1^2 \quad (5.1)$$

$$g_1(x) \equiv 1 - \frac{x_2^3 x_3}{71785 x_1^4} \leq 0 \quad (5.2a)$$

$$g_2(x) \equiv \frac{4x_2^2 - x_1 x_2}{12566 (x_2 x_1^3 - x_1^4)} + \frac{1}{5108 x_1^2} - 1 \leq 0 \quad (5.2b)$$

$$g_3(x) \equiv 1 - \frac{140,45 x_1}{x_2^2 x_3} \leq 0 \quad (5.2c)$$

$$g_4(x) \equiv \frac{(x_1 + x_2)}{1,5} - 1 \leq 0 \quad (5.2d)$$

$$0,05 \leq x_1 \leq 2,00 \quad (5.2e)$$

$$0,25 \leq x_2 \leq 1,30 \quad (5.2f)$$

$$2 \leq x_3 \leq 15 \quad (5.2g)$$

Este estudo de caso clássico foi resolvido considerando diferentes abordagens. Belegundu (1982) avaliou oito estratégias de otimização, sendo a melhor solução viável encontrada naquela identificada por M-5, que consiste em um método de multiplicadores com a transformação de problemas restritos em irrestritos baseado no algoritmo de Fletcher (FLETCHER, 1975). Já Arora (1989) baseou-se em uma combinação das técnicas CC (*Constraint Correction*), CR (*Cost*

Reduction), CCC (*Constraint Correction at Constant Cost*) e CCS (*Constraint Correction at a Specified Increase in Cost*) para a resolução deste estudo de caso. Coello (2000) e Coello e Montes (2002) empregaram estratégias baseadas em Algoritmos Genéticos (AG). Já a estratégia Enxame de Partículas (EP) foi empregada por Ray e Saini (2001) e He e Wang (2007), os quais consideraram compartilhamento de informações entre indivíduos e co-evolução, respectivamente. Zahara e Kao (2009) e Liu, Cai e Wang (2010) utilizaram o EP hibridizado com outras abordagens. Ray e Liew (2003) avaliaram um algoritmo baseado na simulação do comportamento social, que faz uso das interações intra e inter-sociais e do modelo de civilização. Tsai (2005) propôs a utilização de programação não linear fracionária para a resolução deste estudo de caso. Zhang, Luo e Wang (2008) consideraram o algoritmo da Evolução Diferencial (ED) como estratégia de otimização. Montes e Coello (2008) aplicaram estratégias evolutivas (ES - *Evolution Strategies*) em problemas restritos, enquanto Wang et al. (2009) utilizaram um algoritmo evolucionário (EA - *Evolutionary Algorithm*) híbrido associado a uma técnica adaptativa para restrições. Kaveh e Talatahari (2010) usaram o algoritmo Colônia de Formigas (CF). E Eskandar et al. (2012) avaliaram o algoritmo Ciclo da Água (CA).

Na Tabela 15 são apresentados os resultados obtidos para o problema do projeto de uma mola de tensão/compressão considerando o APV (com uma população de 20 partículas vibrantes e 200 gerações), bem como as outras referidas estratégias de otimização. Nesta, observa-se que o APV foi capaz de convergir para a melhor solução reportada pela literatura, a saber, $0,0127 \text{ in}^3$.

Tabela 15 – Solução ótima encontrada considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de uma mola de tensão/compressão.

Referência	x_1 (in)	x_2 (in)	x_3 (-)	f^{opt} (in^3)
Belegundu (1982)	0,0500	0,3159	14,2500	0,0128
Arora (1989)	0,0534	0,3992	9,1854	0,0127
Coello (2000)	0,0515	0,3517	11,6322	0,0127
Ray e Saini (2001)	0,0504	0,3215	13,9799	0,0131
Coello e Montes (2002)	0,0520	0,3640	10,8905	0,0127
Ray e Liew (2003)	0,0522	0,3682	10,6484	0,0127
Tsai (2005)	0,0517	0,3567	11,2890	0,0127
He e Wang (2007)	0,0517	0,3576	11,2445	0,0127
Montes e Coello (2008)	0,0516	0,3554	11,3979	0,0127
Zhang, Luo e Wang (2008)	0,0517	0,3567	11,2890	0,0127
Wang et al. (2009)	0,0517	0,3567	11,2883	0,0127
Zahara e Kao (2009)	0,0516	0,3555	11,3332	0,0126
Kaveh e Talatahari (2010)	0,0519	0,3615	11,0000	0,0126
Liu, Cai e Wang (2010)	0,0517	0,3567	11,2893	0,0127
Eskandar et al. (2012)	0,0517	0,3565	11,3004	0,0127
Neste Trabalho	0,0517	0,3577	11,2310	0,0127

Em relação ao atendimento das restrições de desigualdade, nota-se na Tab. 16 que o APV, assim como a maioria dos trabalhos reportados, foi capaz de satisfazer as restrições do problema

de otimização formulado. Nesta tabela destacam-se os trabalhos em que uma ou mais restrições são violadas.

Tabela 16 – Atendimento das restrições na solução ótima considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de uma mola de tensão/compressão.

Referência	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
Belegundu (1982)	-0,0013	-0,0038	-3,9383	-0,7561
Arora (1989)	-0,0012	0,0000	-4,1238	-0,6983
Coello (2000)	-0,0033	-0,0001	-4,0263	-0,7312
Coello e Montes (2002)	-0,0013	0,0000	-4,0613	-0,7227
He e Wang (2007)	-0,0008	0,0000	-4,0513	-0,7271
Zhang, Luo e Wang (2008)	0,0000	0,0000	-4,0538	-0,7277
Wang et al. (2009)	0,0000	0,0000	-4,0538	-0,7277
Zahara e Kao (2009)	0,0010	0,0010	-4,0619	-0,7286
Kaveh e Talatahari (2010)	-0,0004	0,0012	-4,0674	-0,7244
Eskandar et al. (2012)	-0,0001	0,0001	-4,0534	-0,7279
Neste Trabalho	0,0000	0,0000	-4,0555	-0,7270

A Tabela 17 apresenta o melhor, o pior, o valor médio e o desvio-padrão em relação à função objetivo.

Tabela 17 – Consolidado dos resultados considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de uma mola de tensão/compressão.

Referência	f^{opt} (in ³)	f^w (in ³)	f_m^{opt} (in ³)	f^{std} (in ³)	n_{eval}
Coello (2000)	0,0127	0,0128	0,0128	$3,9 \times 10^{-5}$	2190
Ray e Saini (2001)	0,0131	0,0190	0,0155	-	1291
Coello e Montes (2002)	0,0127	0,0130	0,0127	$5,9 \times 10^{-5}$	80200
Ray e Liew (2003)	0,0127	0,0167	0,0129	$5,9 \times 10^{-4}$	25167
He e Wang (2007)	0,0127	0,0129	0,0127	$5,2 \times 10^{-5}$	1480
Montes e Coello (2008)	0,0127	0,0165	0,0135	$9,7 \times 10^{-4}$	25000
Zhang, Luo e Wang (2008)	0,0127	0,0127	0,0127	$1,3 \times 10^{-5}$	24000
Wang et al. (2009)	0,0127	0,0127	0,0127	$1,4 \times 10^{-9}$	24000
Zahara e Kao (2009)	0,0126	0,0126	0,0126	$8,5 \times 10^{-7}$	80000
Kaveh e Talatahari (2010)	0,0126	0,0129	0,0127	$3,5 \times 10^{-5}$	-
Liu, Cai e Wang (2010)	0,0127	0,0127	0,0127	$1,2 \times 10^{-8}$	24950
Eskandar et al. (2012)	0,0127	0,0130	0,0127	$8,1 \times 10^{-5}$	11750
Neste Trabalho	0,0127	0,0130	0,0127	$7,3 \times 10^{-5}$	4020

Nesta tabela verifica-se que o APV sempre convergiu, assim como as outras estratégias de otimização reportadas, para uma boa estimativa do ótimo, visto a ordem de magnitude do desvio-padrão, dos piores valores e dos valores médios. No que tange ao número de avaliações da função objetivo, observa-se um aumento de, aproximadamente, 45,5%; 67,9% e 63,2% para o APV em relação aos trabalhos de Coello (2000); Ray e Saini (2001) e He e Wang (2007), respectivamente. Por outro lado, percebe-se uma redução percentual no número de avaliações da função objetivo da ordem de, aproximadamente, 95,0%; 84,0%; 83,9%; 83,3%; 83,3%; 95,0%;

83,9% e 65,8% em relação aos trabalhos de Coello e Montes (2002), Ray e Liew (2003), Montes e Coello (2008), Zhang, Luo e Wang (2008), Wang et al. (2009), Zahara e Kao (2009), Liu, Cai e Wang (2010) e Eskandar et al. (2012), nesta ordem. Em resumo, em relação à maioria dos trabalhos considerados, o APV foi capaz de reduzir o número de avaliações da função objetivo requeridas para a resolução do problema do projeto de uma mola de tensão/compressão.

Em relação ao tempo de processamento, o APV demandou, em média, 0,08 s em cada execução. Já nos trabalhos de Ray e Saini (2001), utilizando um SGI Origin 2000, e Ray e Liew (2003), com implementação em um Pentium III 1 GHz, foram requeridos tempos da ordem de 0,20 s (médio) e 0,84 s (melhor resultado), respectivamente.

A partir dos resultados apresentados pode-se concluir que o APV apresentou um bom desempenho frente a outras estratégias de otimização em termos dos valores da função objetivo, número de avaliações desta e custo computacional. Além disso, os resultados encontrados pelo APV são condizentes com os reportados pela literatura especializada.

5.2 PROJETO DE UM VASO DE PRESSÃO

Os vasos de pressão são equipamentos fundamentais e presentes em diversos setores industriais, tais como refinarias de petróleo, indústrias químicas e petroquímicas, grande parte das indústrias alimentícias e farmacêuticas, entre outras. Tratam-se de reservatórios que contêm fluidos pressurizados, apresentando-se em diferentes formatos, tipos e tamanhos. E suas principais destinações referem-se ao armazenamento de gases sob pressão, processamento de gases e líquidos e acumulação intermediária de fluidos em processos industriais (TELLES, 1996).

Uma vez que as operações que envolvem esses equipamentos configuram condições de grande risco (devido às características dos fluidos, elevadas pressões e/ou temperaturas), é exigido o máximo de segurança e confiabilidade no funcionamento dos mesmos, o que requer cuidados especiais desde as etapas iniciais de projeto até a montagem e realização de testes finais. Enfatiza-se ainda que, segundo Telles (1996), os projetos de vasos de pressão são específicos e que, além do dimensionamento apropriado para resistência à pressão e às cargas atuantes, deve ser considerada também a seleção técnica e econômica dos materiais adequados e dos processos de fabricação.

O presente estudo de caso considera a minimização do custo total no projeto de um vaso de pressão cilíndrico (ver a Fig. 18), incluindo custos de material, conformação e soldagem. Para essa finalidade, consideram-se quatro variáveis de projeto, a saber, as espessuras (x_1) do costado (seção cilíndrica do vaso de pressão) e (x_2) do tampo, o raio interno (x_3) e o comprimento (x_4) do costado, todas com valores expressos em polegadas.

Cabe destacar que nesta aplicação as espessuras são definidas como variáveis discretas (assumem valores pré-fixados e múltiplos inteiros de 0,0625 in). Matematicamente, a função

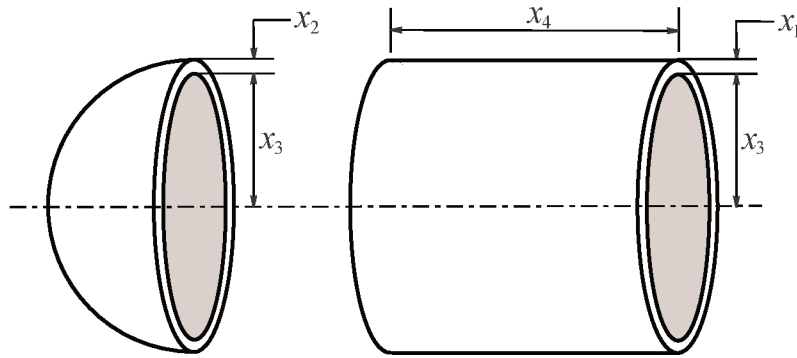


Figura 18 – Projeto de um vaso de pressão cilíndrico. Adaptado de He e Wang (2007).

objetivo, as restrições e o espaço de projeto são dados como (KANNAN; KRAMER, 1994):

$$\min f(x) = 0,6224x_1x_3x_4 + 1,7781x_2x_3^2 + 3,1661x_1^2x_4 + 19,84x_1^2x_3 \quad (5.3)$$

$$g_1(x) \equiv -x_1 + 0,0193x_3 \leq 0 \quad (5.4a)$$

$$g_2(x) \equiv -x_2 + 0,00954x_3 \leq 0 \quad (5.4b)$$

$$g_3(x) \equiv -\pi x_3^2 x_4 - \frac{4}{3}\pi x_3^3 + 1296000 \leq 0 \quad (5.4c)$$

$$g_4(x) \equiv x_4 - 240 \leq 0 \quad (5.4d)$$

$$x_1 = \{0,0625t \mid t \in \mathbb{Z}, 1 \leq t \leq 21\} \quad (5.4e)$$

$$x_2 = \{0,0625t \mid t \in \mathbb{Z}, 1 \leq t \leq 21\} \quad (5.4f)$$

$$10 \leq x_3 \leq 200 \quad (5.4g)$$

$$10 \leq x_4 \leq 200 \quad (5.4h)$$

onde a primeira e a segunda restrições de desigualdade relacionam as espessuras do costado e do tampo com o raio interno, a terceira garante que o volume interno seja maior que um valor fixado e a quarta limita o comprimento do costado.

Na Tabela 18 é apresentado um consolidado dos resultados obtidos considerando o APV e diferentes estratégias de otimização (algumas já indicadas no estudo de caso anterior). Destaca-se que Sandgren (1988) baseou-se no método *Branch and Bound* e Kannan e Kramer (1994) fizeram uso dos multiplicadores de Lagrange. Deb (1997), por sua vez, utilizou uma abordagem baseada nos AG. Akhtar, Tai e Ray (2002) (assim como Ray e Liew (2003)) avaliaram um algoritmo baseado no conceito sócio-comportamental de sociedade e civilização, enquanto Gandomi, Yang e Alavi (2013) aplicaram o algoritmo de Busca Cuco (*Cuckoo Search*) para a otimização do projeto de um vaso de pressão.

Observando esta tabela nota-se uma tendência de melhoria indicada pela redução do custo, considerando os primeiros trabalhos publicados (entre 1988 e 2002). Entre as demais referências, destacam-se pelo valor de f^{opt} os resultados de Zahara e Kao (2009) e de Eskandar et al. (2012), porém verifica-se que exatamente neles as espessuras do costado e do tampo

Tabela 18 – Solução ótima encontrada considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de um vaso de pressão.

Referência	x_1 (in)	x_2 (in)	x_3 (in)	x_4 (in)	f^{opt} (\$)
Sandgren (1988)	1,1250	0,6250	47,7000	117,7010	8129,1036
Kannan e Kramer (1994)	1,1250	0,6250	58,2910	43,6900	7198,0428
Deb (1997)	0,9375	0,5000	48,3290	112,6790	6410,3811
Coello (2000)	0,8125	0,4375	40,3239	200,0000	6288,7445
Akhtar, Tai e Ray (2002)	0,8125	0,4375	41,9768	182,2845	6171,0000
Coello e Montes (2002)	0,8125	0,4375	42,0973	176,6540	6059,9463
He e Wang (2007)	0,8125	0,4375	42,0912	176,7465	6061,0777
Montes e Coello (2008)	0,8125	0,4375	42,0980	176,6405	6059,7456
Zahara e Kao (2009)	0,8036	0,3972	41,6392	182,4120	5930,3137
Kaveh e Talatahari (2010)	0,8125	0,4375	42,0983	176,6377	6059,7258
Liu, Cai e Wang (2010)	0,8125	0,4375	42,0984	176,6365	6059,7143
Eskandar et al. (2012)	0,7781	0,3846	40,3196	200,0000	5885,3327
Gandomi, Yang e Alavi (2013)	0,8125	0,4375	42,0984	176,6365	6059,7143
Neste Trabalho	0,8125	0,4375	42,0984	176,6366	6059,7146

(variáveis x_1 e x_2) não foram tratadas como variáveis discretas, não sendo possível assumir como viáveis tais soluções. Assim, a melhor solução ótima foi obtida nos trabalhos de Liu, Cai e Wang (2010) e de Gandomi, Yang e Alavi (2013), sendo muito próximo desta o correspondente valor fornecido pelo APV (com 20 partículas e 200 gerações). Além disso, ressalta-se que a técnica proposta por Lobato (2008) foi eficiente para o controle das variáveis discretas.

Quanto às restrições de desigualdade, seus valores são apresentados na Tab. 19. Nesta, observa-se que apenas uma delas (g_3 em destaque) não foi atendida quando foi utilizado o método *Branch and Bound* (SANDGREN, 1988).

Tabela 19 – Atendimento das restrições na solução ótima considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de um vaso de pressão.

Referência	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
Sandgren (1988)	-0,2044	-0,1699	54,2260	-122,2990
Kannan e Kramer (1994)	0,0000	-0,0689	-21,2201	-196,3100
Deb (1997)	-0,0048	-0,0389	-3652,8783	-127,3210
Coello (2000)	-0,0343	-0,0528	-27,1058	-40,0000
Akhtar, Tai e Ray (2002)	-0,0023	-0,0370	-23420,5966	-57,7155
Coello e Montes (2002)	0,0000	-0,0359	-27,8861	-63,3460
He e Wang (2007)	-0,0001	-0,0359	-116,3827	-63,2535
Zahara e Kao (2009)	0,0000	0,0000	-1,5914	-57,5879
Eskandar et al. (2012)	0,0000	0,0000	0,0000	-40,0000
Neste Trabalho	0,0000	-0,0359	-0,0084	-63,3634

A Tabela 20, por sua vez, exibe os resultados estatísticos e a quantidade de chamadas da função objetivo para o problema do projeto de um vaso de pressão considerando diferentes estratégias de otimização. Nesta tabela percebe-se que o APV gerou resultados condizentes com

os reportados pela literatura e que mesmo o pior valor obtido dentre as 30 execuções não se distanciou do melhor valor encontrado, tendo em vista a comparação com os demais resultados. Além disso, os valores de média e desvio-padrão reforçam que o APV sempre convergiu para uma boa estimativa da solução ótima. No que diz respeito ao número de avaliações da função objetivo foi observado um aumento de cerca de 45,5% e 63,2% com relação aos trabalhos de Coello (2000) e He e Wang (2007). Enquanto que, considerando os trabalhos de Akhtar, Tai e Ray (2002), Coello e Montes (2002), Montes e Coello (2008), Zahara e Kao (2009), Liu, Cai e Wang (2010), Eskandar et al. (2012) e Gandomi, Yang e Alavi (2013), foram verificadas reduções percentuais na quantidade de chamadas da função objetivo pelo APV da ordem de 68,2%, 95,0%, 83,9%, 95,0%, 83,9%, 65,8% e 73,2%, respectivamente. Diante disso, o Algoritmo de Partículas Vibrantes foi capaz de alcançar uma redução do parâmetro n_{eval} para a resolução do problema de projeto de um vaso de pressão comparativamente à maioria dos trabalhos reportados na literatura.

Tabela 20 – Consolidado dos resultados considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de um vaso de pressão.

Referência	f^{opt} (\$)	f^w (\$)	f_m^{opt} (\$)	f^{std} (\$)	n_{eval}
Coello (2000)	6288,7445	6308,1497	6293,8432	7,4133	2190
Akhtar, Tai e Ray (2002)	6171,0000	6453,6500	6335,0500	-	12630
Coello e Montes (2002)	6059,9463	6469,3220	6177,2533	130,9297	80200
He e Wang (2007)	6061,0777	6363,8041	6147,1332	86,4545	1480
Montes e Coello (2008)	6059,7456	7332,8799	6850,0049	426,0000	25000
Zahara e Kao (2009)	5930,3137	5960,0557	5946,7901	9,1614	80000
Kaveh e Talatahari (2010)	6059,7258	6150,1289	6081,7812	67,2418	-
Liu, Cai e Wang (2010)	6059,7143	6059,7143	6059,7143	0,0000	42100
Eskandar et al. (2012)	5885,3327	6590,2129	6198,6172	213,0490	27500
Gandomi, Yang e Alavi (2013)	6059,7143	6495,3470	6447,7360	502,6930	15000
Neste Trabalho	6059,7146	6141,3115	6080,9478	21,8291	4020

Ao avaliar o tempo de processamento, o APV requereu, em média, 0,11 s para cada execução. Em contrapartida, nos trabalhos de Kannan e Kramer (1994), em que o algoritmo foi implementado utilizando um GATEWAY 2000 "486" PC, e de Gandomi, Yang e Alavi (2013), no qual não foram informados o software e/ou processador utilizados, foram necessários tempos de 2,61 s e 2,51 s (médio), respectivamente.

Sendo assim, conclui-se que o APV foi capaz de obter bons resultados em relação às demais estratégias apresentadas considerando a função objetivo, o número de avaliações e o custo computacional, mostrando-se como uma interessante alternativa para a resolução deste estudo de caso.

5.3 PROJETO DE UMA VIGA SOLDADA

Na terceira aplicação deste capítulo considera-se o problema clássico do projeto de uma viga com solda, que tem como objetivo a minimização de seu custo, conforme a Eq. (5.5). Para

a formulação do modelo matemático foi considerada uma viga de aço 1010, em balanço e de seção transversal retangular e as variáveis de projeto (características geométricas da solda e da viga) são indicadas por x_1 , x_2 , x_3 e x_4 , de acordo com a Fig. 19.

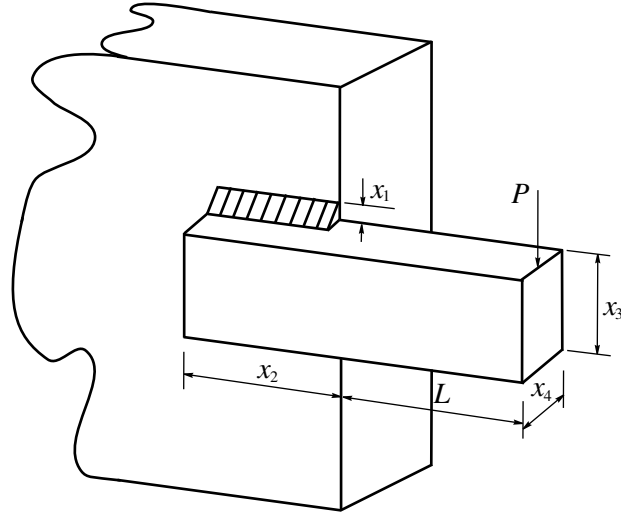


Figura 19 – Projeto de uma viga soldada. Adaptado de Coello e Montes (2002).

As dimensões em questão são definidas em polegadas e este problema apresenta restrições relacionadas com a tensão cisalhante (τ), tensão normal devido à flexão (σ), carga de flambagem (P_c), deflexão da viga (δ) e relações entre as variáveis de busca, além das restrições laterais (Eq. (5.6)) (RAO, 2009):

$$\min f(x) = 1,10471x_1^2x_2 + 0,04811x_3x_4(14,0 + x_2) \quad (5.5)$$

$$g_1(x) \equiv \tau(x) - \tau_{max} \leq 0 \quad (5.6a)$$

$$g_2(x) \equiv \sigma(x) - \sigma_{max} \leq 0 \quad (5.6b)$$

$$g_3(x) \equiv x_1 - x_4 \leq 0 \quad (5.6c)$$

$$g_4(x) \equiv 0,10471x_1^2 + 0,04811x_3x_4(14,0 + x_2) - 5,0 \leq 0 \quad (5.6d)$$

$$g_5(x) \equiv 0,125 - x_1 \leq 0 \quad (5.6e)$$

$$g_6(x) \equiv \delta(x) - \delta_{max} \leq 0 \quad (5.6f)$$

$$g_7(x) \equiv P - P_c(x) \leq 0 \quad (5.6g)$$

$$0,1 \leq x_1 \leq 2,0 \quad (5.6h)$$

$$0,1 \leq x_2 \leq 10,0 \quad (5.6i)$$

$$0,1 \leq x_3 \leq 10,0 \quad (5.6j)$$

$$0,1 \leq x_4 \leq 2,0 \quad (5.6k)$$

em que são definidas as seguintes relações:

$$\tau(x) = \sqrt{(\tau')^2 + 2\tau'\tau''\frac{x_2}{2R(x)} + (\tau'')^2} \quad (5.7a)$$

$$\tau'(x) = \frac{P}{\sqrt{2}x_1x_2} \quad (5.7b)$$

$$\tau''(x) = \frac{M(x)R(x)}{J(x)} \quad (5.7c)$$

$$M(x) = P\left(L + \frac{x_2}{2}\right) \quad (5.7d)$$

$$R(x) = \sqrt{\frac{x_2^2}{4} + \left(\frac{x_1 + x_3}{2}\right)^2} \quad (5.7e)$$

$$J(x) = 2\left[\frac{x_1x_2}{\sqrt{2}}\left(\frac{x_2^2}{12} + \left(\frac{x_1 + x_3}{2}\right)^2\right)\right] \quad (5.7f)$$

$$\sigma(x) = \frac{6PL}{x_4x_3^2} \quad (5.7g)$$

$$\delta(x) = \frac{4PL^3}{Ex_4x_3^3} \quad (5.7h)$$

$$P_c(x) = \frac{4,013\sqrt{\frac{EGx_3^2x_4^6}{36}}}{L^2}\left(1 - \frac{x_3}{2L}\sqrt{\frac{E}{4G}}\right) \quad (5.7i)$$

onde τ' e τ'' são duas componentes da tensão de cisalhamento das soldas, M é o momento da força P em relação ao centro de gravidade do conjunto das soldas (CG_s), J é o momento polar de inércia deste e R é a distância máxima de qualquer ponto de uma das soldas à CG_s (SHIGLEY, 1963).

Para a resolução desta aplicação são considerados os seguintes parâmetros (RAVINDRAN; RAGSDELL; REKLAITIS, 2009): $L = 14$ in (comprimento em balanço); $P = 6000$ lb (força aplicada); $E = 30 \times 10^6$ psi (módulo de elasticidade); $G = 12 \times 10^6$ psi (módulo de cisalhamento); $\sigma_{max} = 30000$ psi (tensão máxima normal); $\tau_{max} = 13600$ psi (tensão máxima de cisalhamento); $\delta_{max} = 0,25$ in (deflexão máxima).

É importante destacar que, em algumas referências, existem divergências no equacionamento utilizado para a determinação dos parâmetros J e P_c (Eqs. (5.7f) e (5.7i)). Como estes são determinantes para a avaliação das restrições, em alguns trabalhos a função objetivo resulta em um valor próximo de 1,73; enquanto em outros o valor se aproxima de 2,40. Neste caso, nos trabalhos de Shigley (1963) e Timoshenko e Gere (1961), a dúvida quanto à determinação de tais parâmetros foi esclarecida e notou-se as diferenças na formulação que fazem com que um

valor mais baixo (1,73) seja obtido. Estas diferenças são destacadas a seguir (COELLO, 2000):

$$J(x) = 2 \left[\sqrt{2}x_1x_2 \left(\frac{x_2^2}{12} + \left(\frac{x_1 + x_3}{2} \right)^2 \right) \right] \quad (5.8a)$$

$$P_c(x) = \frac{4,013E \sqrt{\frac{x_3^2 x_4^6}{36}}}{L^2} \left(1 - \frac{x_3}{2L} \sqrt{\frac{E}{4G}} \right) \quad (5.8b)$$

Desse modo, na Tab. 21 são apresentados os resultados obtidos considerando o modelo matemático representado pelas Eq. (5.5) a Eq. (5.7i). Além disso, são considerados os resultados obtidos por Ragsdell e Phillips (1976) usando programação geométrica e por Deb (1991) usando AG.

Tabela 21 – Solução ótima encontrada considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de uma viga soldada.

Referência	x_1 (in)	x_2 (in)	x_3 (in)	x_4 (in)	f^{opt} (\$)
Ragsdell e Phillips (1976)	0,2455	6,1960	8,2730	0,2455	2,3859
Deb (1991)	0,2489	6,1730	8,1789	0,2533	2,4331
Akhtar, Tai e Ray (2002)	0,2407	6,4851	8,2399	0,2497	2,4426
Ray e Liew (2003)	0,2444	6,2380	8,2886	0,2446	2,3854
Zhang, Luo e Wang (2008)	0,2444	6,2175	8,2914	0,2444	2,3810
Wang et al. (2009)	0,2444	6,2175	8,2915	0,2444	2,3810
Neste Trabalho	0,2444	6,2175	8,2914	0,2444	2,3810

De acordo com a Tab. 21, o APV foi capaz de obter uma estimativa próxima daquelas melhores reportadas pela literatura. Além disso, conforme é observado na Tab. 22, nenhuma violação de qualquer uma das restrições é verificada em todas as estratégias analisadas.

Tabela 22 – Atendimento das restrições na solução ótima considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de uma viga soldada.

Referência	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$	$g_5(x)$	$g_6(x)$	$g_7(x)$
Ragsdell e Phillips (1976)	-1,4467	-4,7151	0,0000	-3,0203	-0,1205	-0,2342	-74,2769
Deb (1991)	-11,2070	-255,5769	-0,0044	-2,9829	-0,1239	-0,2342	-618,8185
Akhtar, Tai e Ray (2002)	-129,8545	-270,4023	-0,0090	-2,9663	-0,1157	-0,2343	-372,4990
Ray e Liew (2003)	-32,4102	-3,2454	-0,0001	-3,0201	-0,1194	-0,2342	-13,0793
Zhang, Luo e Wang (2008)	0,0000	0,0000	0,0000	-3,0230	-0,1194	-0,2342	0,0000
Wang et al. (2009)	-0,0016	-0,0397	0,0000	-3,0230	-0,1194	-0,2342	-0,0011
Neste Trabalho	-0,0001	-0,0018	0,0000	-3,0230	-0,1194	-0,2342	-0,0003

Na Tabela 23 é possível observar que, com uma precisão de quatro casas decimais, os valores referentes à melhor solução (f^{opt}), pior solução (f^w) e média (f_m^{opt}) correspondentes às 30 execuções do APV coincidiram com aqueles reportados por Zhang, Luo e Wang (2008) e por Wang et al. (2009), com um desvio-padrão na mesma ordem de grandeza do último. Todavia, às custas de uma menor quantidade de avaliações da função objetivo em cada execução comparada às demais referências.

Tabela 23 – Consolidado dos resultados considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de uma viga soldada.

Referência	f^{opt} (\$)	f^w (\$)	f_m^{opt} (\$)	f^{std} (\$)	n_{eval}
Deb (1991)	2,4331	-	-	-	4600
Akhtar, Tai e Ray (2002)	2,4426	2,6315	2,5215	-	19259
Ray e Liew (2003)	2,3854	6,3997	3,2551	$9,6 \times 10^{-1}$	33095
Zhang, Luo e Wang (2008)	2,3810	2,3810	2,3810	$3,2 \times 10^{-10}$	24000
Wang et al. (2009)	2,3810	2,3810	2,3810	$1,3 \times 10^{-5}$	30000
Neste Trabalho	2,3810	2,3810	2,3810	$1,0 \times 10^{-5}$	10020

Para esta aplicação no APV considerou-se uma população com 20 partículas e 500 gerações, totalizando 10020 chamadas da função objetivo em cada execução. Assim, em relação ao trabalho de Deb (1991) houve um aumento percentual de 54,1%. E quanto aos trabalhos de Akhtar, Tai e Ray (2002), Ray e Liew (2003), Zhang, Luo e Wang (2008) e Wang et al. (2009), foram observadas reduções de 48,0%, 69,7%, 58,3% e 66,6%, respectivamente, na quantidade de avaliações da função objetivo.

Além disso, o APV demandou, nesta aplicação, um tempo de processamento médio da ordem de 0,14 s enquanto no trabalho de Ray e Liew (2003) foram necessários 3,35 s na execução que forneceu o melhor resultado (utilizando um Pentium III 1 GHz, como já mencionado).

Portanto, o APV novamente demonstrou um bom desempenho diante de outras estratégias de otimização, apresentando resultados condizentes com a literatura em termos dos valores obtidos para a função objetivo, como também em relação ao número de avaliações e ao tempo de processamento.

5.4 PROJETO DE UMA TRELIÇA COM 3 BARRAS

Segundo Meriam e Kraige (2009), as treliças são estruturas rígidas constituídas por elementos como vigas, cantoneiras ou barras unidas pelas suas extremidades. Fundamentais no campo da engenharia estrutural, são encontradas, por exemplo, em pontes e apoios para telhados, na forma de estruturas metálicas que fornecem resistência a esforços normais de compressão e tração.

Para o estudo destas estruturas, considera-se nesta aplicação a otimização do projeto de uma treliça de três barras, sujeita a restrições de tensão. Na Figura 20, as variáveis de projeto x_1 e x_2 referem-se às áreas da seção transversal das barras que constituem a estrutura (dadas em centímetros quadrados) e o objetivo é a minimização do seu volume. Matematicamente, o modelo que representa este estudo de caso é descrito a seguir (Eqs. (5.9) e (5.10)).

$$\min f(x) = (2\sqrt{2}x_1 + x_2) l \quad (5.9)$$

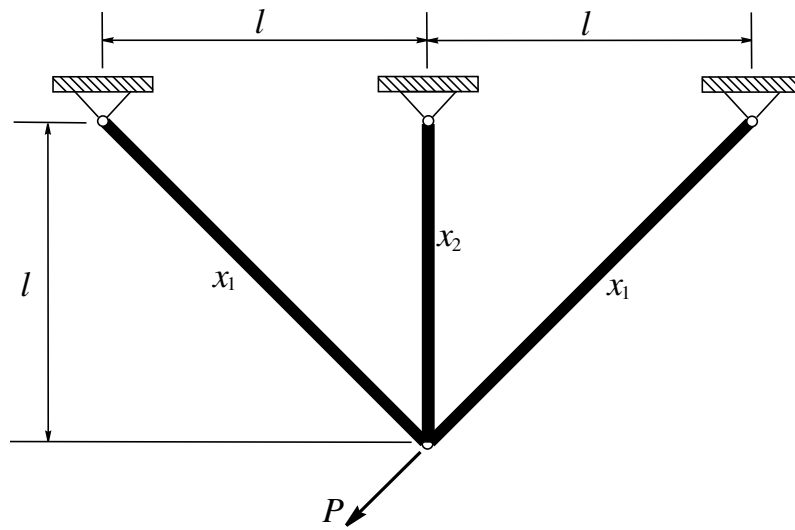


Figura 20 – Projeto de uma treliça com três barras. Adaptado de [Gandomi, Yang e Alavi \(2013\)](#).

$$g_1(x) \equiv \frac{\sqrt{2}x_1 + x_2}{\sqrt{2x_1^2 + 2x_1x_2}}P - \sigma \leq 0 \quad (5.10a)$$

$$g_2(x) \equiv \frac{x_2}{\sqrt{2x_1^2 + 2x_1x_2}}P - \sigma \leq 0 \quad (5.10b)$$

$$g_3(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}x_2 + x_1}P - \sigma \leq 0 \quad (5.10c)$$

$$0 \leq x_1 \leq 1 \quad (5.10d)$$

$$0 \leq x_2 \leq 1 \quad (5.10e)$$

onde $l = 100 \text{ cm}$, $P = 2 \text{ kN/cm}^2$ e $\sigma = 2 \text{ kN/cm}^2$.

Considerando as estratégias de otimização já apresentadas, o problema de projeto da treliça de três barras foi resolvido por [Ray e Saini \(2001\)](#), [Ray e Liew \(2003\)](#), [Tsai \(2005\)](#), [Zhang, Luo e Wang \(2008\)](#), [Wang et al. \(2009\)](#), [Liu, Cai e Wang \(2010\)](#), [Eskandar et al. \(2012\)](#) e [Gandomi, Yang e Alavi \(2013\)](#). Além desses, [Yang e Gandomi \(2012\)](#) resolveram este mesmo estudo de caso considerando o Algoritmo de Morcegos (*Bat Algorithm - BA*).

A Tabela 24 apresenta a solução ótima em termos das variáveis de projeto, restrições e função objetivo obtida pelo APV para uma população com 20 partículas e 375 gerações, bem como para outras estratégias. Nesta, nota-se que na maioria dos trabalhos as restrições de desigualdade foram devidamente atendidas e que o APV foi capaz de encontrar a melhor solução reportada pela literatura, a saber, $263,8958 \text{ cm}^3$.

Na Tabela 25 são apresentados os melhores valores, os piores, as médias e os desvios-padrão em relação à função objetivo. Nesta tabela verifica-se que o APV sempre convergiu para a melhor solução reportada pela literatura, visto os valores de média e desvio-padrão da função objetivo. Quanto ao número de avaliações da função objetivo, constata-se um aumento percentual de 63,9% e 30,2% do APV em relação aos trabalhos de [Ray e Saini \(2001\)](#) e [Eskandar](#)

Tabela 24 – Solução ótima encontrada e atendimento às restrições de desigualdade considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de uma treliça com três barras.

Referência	x_1 (cm ²)	x_2 (cm ²)	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	f^{opt} (cm ³)
Ray e Saini (2001)	0,7950	0,3950	-0,0034	-1,4809	-0,5225	264,3000
Ray e Liew (2003)	0,7886	0,4084	0,0000	-1,4639	-0,5361	263,8958
Tsai (2005)	0,7880	0,4080	0,0016	-1,4636	-0,5348	263,6800
Zhang, Luo e Wang (2008)	0,7886	0,4082	0,0000	-1,4641	-0,5359	263,8958
Wang et al. (2009)	0,7886	0,4082	0,0000	-1,4641	-0,5359	263,8958
Liu, Cai e Wang (2010)	0,7886	0,4082	0,0000	-1,4641	-0,5359	263,8958
Eskandar et al. (2012)	0,7886	0,4083	0,0000	-1,4640	-0,5360	263,8958
Yang e Gandomi (2012)	0,7886	0,4083	0,0000	-1,4640	-0,5360	263,8962
Gandomi, Yang e Alavi (2013)	0,7886	0,4090	-0,0006	-1,4635	-0,5371	263,9716
Neste Trabalho	0,7886	0,4083	0,0000	-1,4640	-0,5360	263,8958

et al. (2012), respectivamente. Em contrapartida, são percebidas reduções de, aproximadamente, 49,9% em relação aos trabalhos de Zhang, Luo e Wang (2008), Wang et al. (2009), Yang e Gandomi (2012) e Gandomi, Yang e Alavi (2013) e de 57,3% em relação aos trabalhos de Ray e Liew (2003) e Liu, Cai e Wang (2010).

Tabela 25 – Consolidado dos resultados considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de uma treliça com três barras.

Referência	f^{opt} (cm ³)	f^w (cm ³)	f_m^{opt} (cm ³)	f^{std} (cm ³)	n_{eval}
Ray e Saini (2001)	264,3763	265,2808	264,9086	-	2712
Ray e Liew (2003)	263,8958	263,9698	263,9033	$1,3 \times 10^{-2}$	17610
Zhang, Luo e Wang (2008)	263,8958	263,8958	263,8958	$9,7 \times 10^{-7}$	15000
Wang et al. (2009)	263,8958	263,8961	263,8959	$4,9 \times 10^{-5}$	15000
Liu, Cai e Wang (2010)	263,8958	263,8958	263,8958	$4,5 \times 10^{-10}$	17600
Eskandar et al. (2012)	263,8958	263,8962	263,8959	$8,7 \times 10^{-5}$	5250
Yang e Gandomi (2012)	263,8962	263,9025	263,9061	$3,5 \times 10^{-3}$	15000
Gandomi, Yang e Alavi (2013)	263,9716	-	264,0669	$9,0 \times 10^{-5}$	15000
Neste Trabalho	263,8958	263,8963	263,8960	$1,2 \times 10^{-4}$	7520

No que se refere ao tempo de processamento, o APV requereu, aproximadamente, 0,10 s em cada execução. Já nos trabalhos de Ray e Saini (2001) (SGI Origin 2000), Ray e Liew (2003) (Pentium III 1 GHz), Yang e Gandomi (2012) e Gandomi, Yang e Alavi (2013), foram reportados tempos da ordem de 0,18 s, 0,46 s, 0,53 s e 0,72 s, respectivamente, não sendo informados o *software* ou processador nos dois últimos.

Neste caso, pode-se concluir que o APV foi capaz de obter resultados coerentes em relação ao valor da função objetivo, da quantidade de avaliações e do tempo de processamento.

5.5 PROJETO DE UM REDUTOR DE VELOCIDADE

Presentes em diversos tipos de máquinas, os redutores de velocidade são dispositivos mecânicos constituídos principalmente por engrenagens, eixos, mancais, rolamentos e carcaça. Eles transferem energia de uma fonte de potência para um eixo acionador através do movimento rotativo reduzindo a velocidade de rotação deste e possibilitando um aumento do torque transmitido (JELASKA, 2012).

Nesta última aplicação considera-se o projeto de um redutor de velocidade (Fig. 21), cujo objetivo é a minimização do seu peso. As variáveis de projeto a serem definidas são a largura de face (x_1), o módulo (x_2) e o número de dentes (x_3) do pinhão, os comprimentos entre os rolamentos do primeiro (x_4) e do segundo (x_5) eixos e os seus respectivos diâmetros (x_6 e x_7).

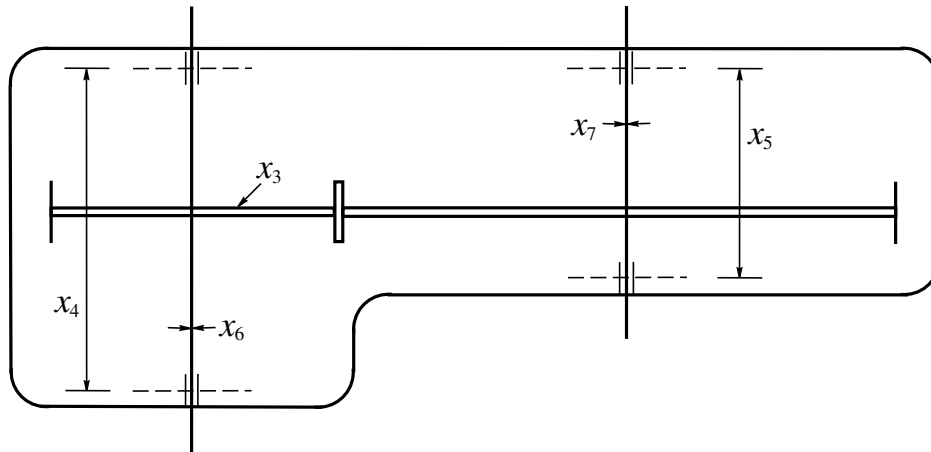


Figura 21 – Projeto de um redutor de velocidade. Adaptado de Gandomi, Yang e Alavi (2013).

Este problema apresenta restrições relacionadas com a tensão devido à flexão nos dentes da engrenagem, tensão superficial de compressão, deflexão transversal dos eixos devido à força de transmissão, tensões normais que atuam sobre os eixos, condições relativas à largura de face e restrições de projeto que relacionam o diâmetro do eixo com o respectivo comprimento entre os rolamentos. O modelo matemático em questão, em termos da função objetivo, restrições de desigualdade e espaço de busca, é representado pelas Eqs. (5.11) e (5.12) (RAY; LIEW, 2003):

$$\begin{aligned} \min f(x) = & 0,7854x_1x_2^2 (3,3333x_3^2 + 14,9334x_3 - 43,0934) - 1,508x_1(x_6^2 + x_7^2) \\ & + 7,4777(x_6^3 + x_7^3) + 0,7854(x_4x_6^2 + x_5x_7^2) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Deve-se destacar que este problema de otimização apresenta uma variável inteira, a saber, o número de dentes do pinhão (x_3). Neste caso, a metodologia apresentada na Seção 2.6 foi empregada para o tratamento deste tipo de variável.

$$g_1(x) \equiv \frac{27}{x_1 x_2^2 x_3} - 1 \leq 0 \quad (5.12a)$$

$$g_2(x) \equiv \frac{397,5}{x_1 x_2^2 x_3^2} - 1 \leq 0 \quad (5.12b)$$

$$g_3(x) \equiv \frac{1,93x_4^3}{x_2 x_6^4 x_3} - 1 \leq 0 \quad (5.12c)$$

$$g_4(x) \equiv \frac{1,93x_5^3}{x_2 x_7^4 x_3} - 1 \leq 0 \quad (5.12d)$$

$$g_5(x) \equiv \frac{[(745x_4/x_2 x_3)^2 + 16,9 \times 10^6]^{1/2}}{110x_6^3} - 1 \leq 0 \quad (5.12e)$$

$$g_6(x) \equiv \frac{[(745x_5/x_2 x_3)^2 + 157,5 \times 10^6]^{1/2}}{85x_7^3} - 1 \leq 0 \quad (5.12f)$$

$$g_7(x) \equiv \frac{x_2 x_3}{40} - 1 \leq 0 \quad (5.12g)$$

$$g_8(x) \equiv \frac{5x_2}{x_1} - 1 \leq 0 \quad (5.12h)$$

$$g_9(x) \equiv \frac{x_1}{12x_2} - 1 \leq 0 \quad (5.12i)$$

$$g_{10}(x) \equiv \frac{1,5x_6 + 1,9}{x_4} - 1 \leq 0 \quad (5.12j)$$

$$g_{11}(x) \equiv \frac{1,1x_7 + 1,9}{x_5} - 1 \leq 0 \quad (5.12k)$$

$$2,6 \leq x_1 \leq 3,6 \quad (5.12l)$$

$$0,7 \leq x_2 \leq 0,8 \quad (5.12m)$$

$$x_3 = \{t \in \mathbb{Z} \mid 17 \leq t \leq 28\} \quad (5.12n)$$

$$7,3 \leq x_4 \leq 8,3 \quad (5.12o)$$

$$7,3 \leq x_5 \leq 8,3 \quad (5.12p)$$

$$2,9 \leq x_6 \leq 3,9 \quad (5.12q)$$

$$5,0 \leq x_7 \leq 5,5 \quad (5.12r)$$

Os resultados obtidos para o problema do projeto de um redutor de velocidade considerando o APV (com uma população de 20 partículas vibrantes e 750 gerações), assim como outras estratégias, são apresentados na Tab. 26. Nesta tabela observa-se que o APV foi capaz de encontrar uma boa estimativa para a solução ótima (2994,4711 cm³), condizente com aquelas reportadas pela literatura. Já na Tabela 27 é possível observar que a estratégia proposta por Ray e Saini (2001) foi a única em que houve violação de restrições de desigualdade ($g_5(x)$ e $g_6(x)$ como destacado).

Tabela 26 – Solução ótima encontrada considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de um redutor de velocidade.

Referência	x_1 (cm)	x_2 (cm)	x_3 (-)	x_4 (cm)	x_5 (cm)	x_6 (cm)	x_7 (cm)	f^{opt} (cm ³)
Ray e Saini (2001) (SO)	3,5142	0,7000	17	7,4973	7,8346	2,9018	5,0022	2732,9006
Akhtar, Tai e Ray (2002) (SBO)	3,5061	0,7000	17	7,5491	7,8593	3,3656	5,2898	3008,0800
Ray e Liew (2003)	3,5000	0,7000	17	7,3276	7,7153	3,3503	5,2867	2994,7442
Zhang, Luo e Wang (2008) (DSS-MDE)	3,5000	0,7000	17	7,3000	7,7153	3,3502	5,2867	2994,4711
Wang et al. (2009) (HEA-ACT)	3,5000	0,7000	17	7,3004	7,7154	3,3502	5,2867	2994,4991
Liu, Cai e Wang (2010)	3,5000	0,7000	17	7,3000	7,8000	3,3502	5,2867	2996,3482
Eskandar et al. (2012)	3,5000	0,7000	17	7,3000	7,7153	3,3502	5,2867	2994,4711
Yang e Gandomi (2012) (BA)	3,5000	0,7000	17	7,3000	7,7153	3,3502	5,2867	2994,4671
Gandomi, Yang e Alavi (2013) (CS)	3,5015	0,7000	17	7,6050	7,8181	3,3520	5,2875	3000,9810
Neste Trabalho (APV)	3,5000	0,7000	17	7,3000	7,7153	3,3502	5,2867	2994,4711

Tabela 27 – Atendimento das restrições na solução ótima considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de um redutor de velocidade.

	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$	$g_5(x)$	$g_6(x)$	$g_7(x)$	$g_8(x)$	$g_9(x)$	$g_{10}(x)$	$g_{11}(x)$
Ray e Saini (2001)	-0,0777	-0,2012	-0,0360	-0,8754	0,5395	0,1805	-0,7025	-0,0040	-0,5816	-0,1660	-0,0552
Akhtar, Tai e Ray (2002)	-0,0755	-0,1994	-0,4562	-0,8994	-0,0132	-0,0017	-0,7025	-0,0017	-0,5826	-0,0796	-0,0179
Zhang, Luo e Wang (2008)	-0,0739	-0,1980	-0,4992	-0,9046	0,0000	0,0000	-0,7025	0,0000	-0,5833	-0,0513	0,0000
Wang et al. (2009)	-0,0739	-0,1980	-0,4991	-0,9046	0,0000	0,0000	-0,7025	0,0000	-0,5833	-0,0514	0,0000
Yang e Gandomi (2012)	-0,0740	-0,1980	-0,4990	-0,9050	0,0000	0,0000	-0,7030	0,0000	-0,5830	-0,0510	0,0000
Gandomi, Yang e Alavi (2013)	-0,0743	-0,1983	-0,4349	-0,9008	-0,0011	-0,0004	-0,7025	-0,0004	-0,5832	-0,0890	-0,0130
Neste Trabalho (APV)	-0,0739	-0,1980	-0,4992	-0,9046	0,0000	0,0000	-0,7025	0,0000	-0,5833	-0,0513	0,0000

Na Tabela 28 são apresentados o melhor, o pior, a média e o desvio-padrão em relação à função objetivo obtidos considerando diferentes estratégias de otimização. É possível observar que o APV sempre convergiu para uma boa estimativa da solução ótima, visto os valores de média e pior resultado comparados à melhor solução, bem como o valor do desvio-padrão. No que se refere à quantidade de avaliações da função objetivo foi observado um aumento de cerca de 73,2% em relação ao trabalho de Ray e Saini (2001). Por outro lado, foram verificadas reduções percentuais de 21,6%, 72,4%, 49,9%, 62,5%, 72,4%, 94,0%, 0,9% e 93,3% do APV em relação aos trabalhos de Akhtar, Tai e Ray (2002), Ray e Liew (2003), Zhang, Luo e Wang (2008), Wang et al. (2009), Liu, Cai e Wang (2010), Eskandar et al. (2012), Yang e Gandomi (2012) e Gandomi, Yang e Alavi (2013), respectivamente.

Tabela 28 – Consolidado dos resultados considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de um redutor de velocidade.

Referência	f^{opt} (cm ³)	f^w (cm ³)	f_m^{opt} (cm ³)	f^{std} (cm ³)	n_{eval}
Ray e Saini (2001)	2732,9006	2757,8581	2741,5642	-	4020
Akhtar, Tai e Ray (2002)	3008,0800	3028,2800	3012,1200	-	19154
Ray e Liew (2003)	2994,7442	3009,9647	3001,7583	4,0000	54456
Zhang, Luo e Wang (2008)	2994,4711	2994,4711	2994,4711	$3,6 \times 10^{-12}$	30000
Wang et al. (2009)	2994,4991	2994,7523	2994,6134	$7,0 \times 10^{-2}$	40000
Liu, Cai e Wang (2010)	2996,3482	2996,3482	2996,3482	$6,4 \times 10^{-6}$	54350
Eskandar et al. (2012)	2994,4711	2994,5056	2994,4744	$7,4 \times 10^{-3}$	15150
Yang e Gandomi (2012)	2994,4671	4973,8644	2994,4671	721,5000	225015
Gandomi, Yang e Alavi (2013)	3000,9810	3009,0000	3007,1997	5,0000	250050
Neste Trabalho	2994,4711	2994,4756	2994,4715	$1,0 \times 10^{-3}$	15020

Em termos do tempo de processamento, o APV requereu, aproximadamente, 0,23 s em média para cada execução. Enquanto que nos trabalhos de Ray e Saini (2001) (com um SGI Origin 2000), Ray e Liew (2003) (com um Pentium III 1 GHz), Yang e Gandomi (2012) e Gandomi, Yang e Alavi (2013) foram registrados tempos da ordem de 0,38 s, 9,62 s, 0,65 s e 2,53 s, respectivamente.

Finalmente, conclui-se que o APV sempre foi capaz de convergir para uma aproximação da solução ótima reportada pela literatura. Esse bom desempenho foi alcançado considerando um número de avaliações da função objetivo reduzido em relação a vários trabalhos, bem como foram observados tempos de processamento inferiores na comparação com outras técnicas de otimização.

5.6 CONSOLIDADO DOS RESULTADOS

De um modo geral, em todos os estudos de caso analisados neste capítulo, boas aproximações para a solução ótima foram encontradas considerando o APV. Cabe destacar que o algoritmo nunca violou as restrições em cada aplicação. Também enfatiza-se os bons resultados

para os problemas com variáveis mistas. De forma geral, o APV sempre forneceu resultados com boa precisão em relação à literatura especializada, tendo em vista a média e o desvio-padrão associado ao valor da função objetivo considerando as 30 execuções realizadas.

É importante ressaltar que comparar diferentes estratégias de otimização é uma tarefa extremamente difícil, uma vez que o ideal seria o cômputo do número de operações aritméticas para fins de uma comparação mais justa. Por este motivo foi utilizado para essa finalidade o número de avaliações da função objetivo. Neste cenário, em relação à maioria dos trabalhos considerados, o APV sempre requereu um número menor de avaliações da função objetivo, todavia mantendo a qualidade da solução encontrada. Além disso, no que tange o tempo de processamento médio, o APV demonstrou ser uma alternativa interessante sempre que foi possível a comparação com o resultado reportado na literatura. Todavia, ressalta-se que esta métrica deve ser analisada cuidadosamente, visto que esta depende do sistema operacional, da linguagem de programação escolhida para implementar o algoritmo, da capacidade de processamento do computador utilizado e se o código implementado está otimizado ou não.

No próximo capítulo serão apresentados os resultados obtidos considerando a metodologia proposta, a saber, o algoritmo *Multi-objective Vibrating Particles System* (MOVPS).

6 APLICAÇÕES MULTI-OBJETIVOS

O presente capítulo tem por objetivo avaliar o desempenho do algoritmo *Multi-objective Vibrating Particles System* (MOVPS) proposto nesta dissertação. Para esta finalidade serão avaliadas funções matemáticas e problemas de projeto.

6.1 FUNÇÕES MATEMÁTICAS

Para avaliar a estratégia de otimização multi-objetivo MOVPS, as funções-teste desenvolvidas por Zitzler, Deb e Thiele (2000) serão estudadas. Em linhas gerais, estas apresentam as seguintes características: convexidade, não-convexidade, fronteiras discretas ou descontínuas, multimodalidade, problemas enganosos com espaços de busca tendenciosos.

Cada função-teste é constituída por um problema de minimização com dois objetivos, sendo todas estruturadas como segue:

$$\text{ZDT} = \begin{cases} \min f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = x_1 \\ \min f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = g(x)h(f_1(x), g(x)) \end{cases} \quad (6.1)$$

onde f_1 é função apenas da variável x_1 e g é uma função das $m-1$ variáveis de projeto restantes. A função h envolve f_1 e g , sendo, portanto, dependente das m variáveis do problema. Todas as variáveis são definidas no intervalo $[0, 1]$ e a solução ótima para cada um dos problemas abordados (ZDT- i ($i = 1, 2, 3, 4, 6$)) corresponde a $x_1 \in [0, 1]$ e $x_j = 0$ para $j = 2, \dots, m$. Em todas as aplicações foi considerado m igual a 10.

Para avaliar a qualidade da solução obtida pelo algoritmo MOVPS, as métricas de convergência (Υ), diversidade (Δ) e distância geracional (DG) (ver a Subseção 2.8.3) são consideradas. Nesse caso, os estudos de caso matemáticos foram resolvidos 20 vezes para a obtenção dos valores médios ($\bar{\Upsilon}$, $\bar{\Delta}$ e \bar{DG}) e das variâncias (σ_{Υ}^2 , σ_{Δ}^2 e σ_{DG}^2). É importante ressaltar que, para fins de comparação entre as soluções analítica e numérica, 1000 pontos pertencentes à curva de Pareto analítica foram gerados.

A Tabela 29 apresenta os parâmetros considerados para a otimização das funções ZDT através do emprego de diferentes estratégias. Além do MOVPS, são empregados os algoritmos MOGA I - *Multi-objective Genetic Algorithm I* (SILVA, 2004), PMOGA - *Pareto Multi-objective Genetic Algorithm* (CASTRO, 2001) e MODE - *Multi-objective Differential Evolution* (LOBATO, 2008). Em relação aos parâmetros tem-se o número máximo de gerações (N_{gen}), o tamanho da população (NP), probabilidades de cruzamento (p_c) e mutação (p_m). F (taxa de perturbação), R (número de pseudo-curvas) e r (taxa de redução) são parâmetros exclusivos do algoritmo MODE (LOBATO, 2008). Por fim, os parâmetros do MOVPS são os pesos w_1 e w_2 , a probabilidade p e a constante α .

Tabela 29 – Parâmetros considerados para a otimização das funções ZDT.

	PMOGA	MOGA I	MODE	MOVPS
N_{gen}	250	50000	150	150
NP	80	20	100	100
p_c	0,80	0,80	0,85	-
p_m	0,01	0,05	-	0,05
F	-	-	0,50	-
R	-	-	10	-
r	-	-	0,90	-
w_1	-	-	-	0,3
w_2	-	-	-	0,3
p	-	-	-	0,1
α	-	-	-	0,05

A partir desta tabela observa-se que os algoritmos PMOGA, MOGA I e MOVPS consideram 20080, 1000020 e 15100 avaliações da função objetivo, respectivamente. Em relação ao algoritmo MODE, diferentemente do esperado, esta quantidade equivale a 30100 em virtude da incorporação de uma estratégia de refinamento (Exploração das Vizinhanças), conforme destacado por Lobato (2008).

A seguir são definidas as funções ZDT e apresentados os resultados obtidos considerando diferentes estratégias. Para a comparação das métricas de desempenho são considerados os algoritmos MODE (LOBATO, 2008) e NSGA-II - *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II* (DEB et al., 2002), sendo que este último considera 25100 chamadas da função objetivo.

6.1.1 ZDT-1

A função ZDT-1 apresenta como solução ótima uma curva convexa. Além disso, esta tem distribuição uniforme dos pontos ao longo da solução. Matematicamente, ela é definida como:

$$\text{ZDT-1} = \begin{cases} f_1(x_1) = x_1 \\ g(x_2, \dots, x_m) = 1 + \frac{9}{m-1} \sum_{i=2}^m x_i \\ h(f_1(x_1), g(x_2, \dots, x_m)) = 1 - \sqrt{f_1(x_1)/g(x_2, \dots, x_m)} \end{cases} \quad (6.2)$$

A Tabela 30 apresenta as métricas de desempenho obtidas pelos algoritmos NSGA-II, MODE e MOVPS. Nesta, observa-se que, com uma menor quantidade de avaliações da função objetivo, o MOVPS apresentou uma convergência média melhor, porém a diversidade das soluções ao longo da curva de Pareto se mostrou inferior em relação aos resultados obtidos por outros dois algoritmos. A distância geracional para o MOVPS, que também está relacionada com a métrica de convergência, é condizente com a reportada pela literatura.

As soluções obtidas pelos algoritmos MOVPS, PMOGA, MOGA I e MODE, bem como a solução analítica para a função ZDT-1 são apresentadas na Fig. 22.

Tabela 30 – Métricas de desempenho para a função ZDT-1.

	NSGA-II	MODE	MOVPS
$\bar{\Upsilon}$	0,0008	0,0016	0,0006
σ_{Υ}^2	0	0	0
$\bar{\Delta}$	0,4632	0,1988	0,7155
σ_{Δ}^2	0,0416	0,0025	0,0120
\overline{DG}	0,0006	0,0001	0,0001
σ_{DG}^2	0	0	0

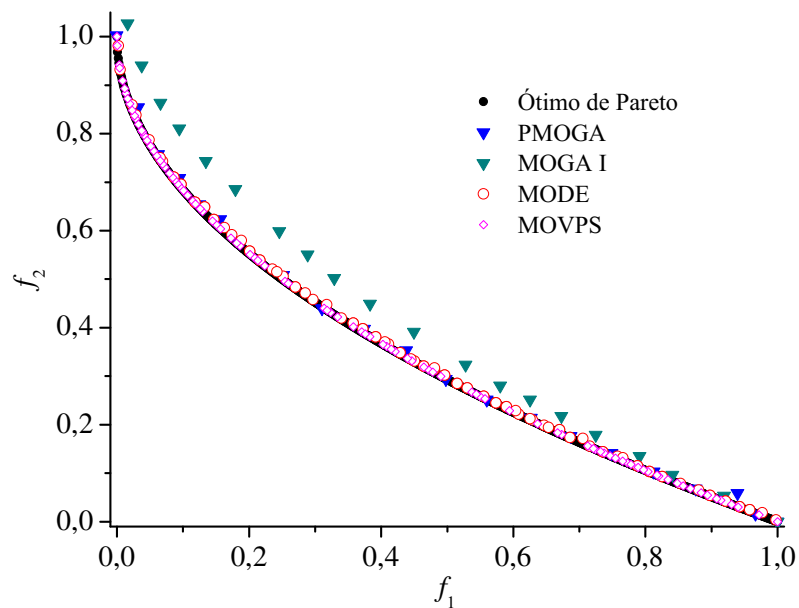


Figura 22 – Curva de Pareto para a função ZDT-1.

Nesta figura verifica-se que apenas o algoritmo MOGA I, apesar do elevado número de chamadas da função objetivo, não foi capaz de se aproximar da curva de Pareto analítica ao término do seu processo evolutivo.

6.1.2 ZDT-2

A função ZDT-2 apresenta fronteira ótima de Pareto não-convexa. Esta é definida como:

$$\text{ZDT-2} = \begin{cases} f_1(x_1) = x_1 \\ g(x_2, \dots, x_m) = 1 + \frac{9}{m-1} \sum_{i=2}^m x_i \\ h(f_1(x_1), g(x_2, \dots, x_m)) = 1 - (f_1(x_1)/g(x_2, \dots, x_m))^2 \end{cases} \quad (6.3)$$

A Tabela 31 apresenta as métricas de desempenho obtidas pelos algoritmos NSGA-II, MODE e MOVPS considerando a função ZDT-2.

Tabela 31 – Métricas de desempenho para a função ZDT-2.

	NSGA-II	MODE	MOVPS
$\bar{\Upsilon}$	0,0008	0,0011	0,0004
σ_{Υ}^2	0	0	0
$\bar{\Delta}$	0,4351	0,2549	0,5553
σ_{Δ}^2	0,0246	0,0009	0,0014
\overline{DG}	0,0006	0,0001	0
σ_{DG}^2	0	0	0

De acordo com essa tabela observa-se que o algoritmo proposto foi capaz de obter uma boa convergência em relação à solução analítica, como indicam os valores da convergência métrica e da distância geracional. Entretanto, a métrica de diversidade foi inferior em comparação com os outros algoritmos considerados. Apesar disso, as métricas de desempenho obtidas pelo MOVPS estão em concordância com aquelas reportadas pela literatura, uma vez que a diversidade métrica não se distanciou excessivamente dos resultados considerando os algoritmos NSGA-II e MODE.

A Figura 23 apresenta a solução obtida pelos algoritmos PMOGA, MOGA I, MODE e MOVPS, bem como o ótimo de Pareto da função ZDT-2. Neste caso, constata-se que todos eles foram capazes de obter uma boa aproximação da solução analítica. Todavia, um elevado número de avaliações da função objetivo foi requerido pelo algoritmo MOGA I (um total de 1000020 avaliações).

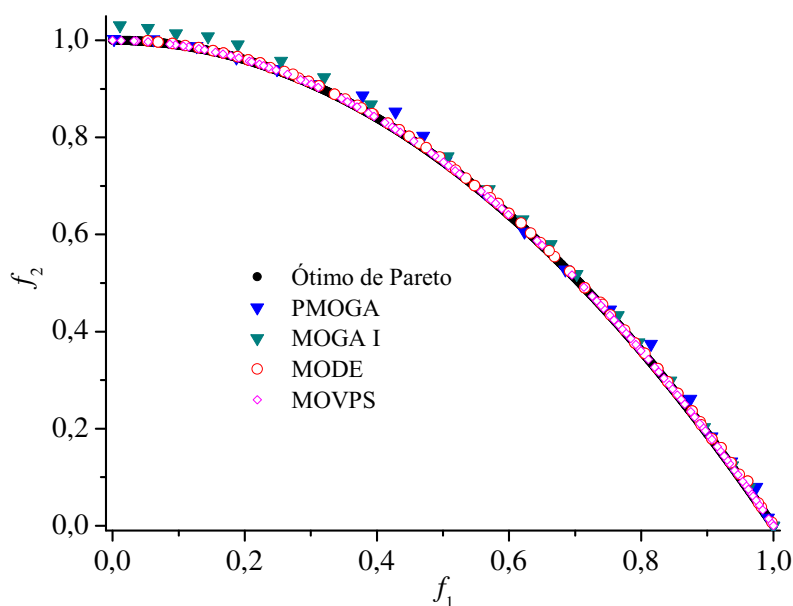


Figura 23 – Curva de Pareto para a função ZDT-2.

6.1.3 ZDT-3

A função ZDT-3 apresenta curva de Pareto formada por partes descontínuas devido à presença da função trigonométrica seno em h . Este problema é definido como:

$$\text{ZDT-3} = \begin{cases} f_1(x_1) = x_1 \\ g(x_2, \dots, x_m) = 1 + \frac{9}{m-1} \sum_{i=2}^m x_i \\ h(f_1(x_1), g(x_2, \dots, x_m)) = 1 - \sqrt{f_1(x_1)/g(x_2, \dots, x_m)} + \\ \quad - (f_1(x_1)/g(x_2, \dots, x_m)) \sin(10\pi f_1(x_1)) \end{cases} \quad (6.4)$$

As métricas de desempenho dos algoritmos NSGA-II (25100 avaliações da função objetivo), MODE (30100 avaliações da função objetivo) e MOVPS (15100 avaliações da função objetivo) para a função ZDT-3 são apresentadas na Tab. 32.

Tabela 32 – Métricas de desempenho para a função ZDT-3.

	NSGA-II	MODE	MOVPS
$\bar{\Upsilon}$	0,0434	0,0010	0,0006
σ_{Υ}^2	0	0	0
$\bar{\Delta}$	0,5756	0,2881	0,6360
σ_{Δ}^2	0,0050	0,0032	0,0038
\overline{DG}	0,0005	0,0001	0,0001
σ_{DG}^2	0	0	0

Segundo os resultados apresentados nesta tabela, a melhor convergência métrica média foi obtida pelo algoritmo MOVPS. A melhor média em termos de diversidade métrica, por sua vez, foi obtida pelo algoritmo MODE, sendo os resultados obtidos pelos algoritmos NSGA-II e MOVPS próximos. Os valores da distância geracional foram próximos à zero, os quais apontam para uma boa convergência da solução obtida.

A Figura 24 apresenta a comparação entre os resultados obtidos considerando os algoritmos PMOGA, MOGA I, MODE e MOVPS. Nesta figura nota-se que todos os algoritmos obtiveram boas aproximações em relação à solução analítica.

6.1.4 ZDT-4

A função ZDT-4 apresenta 21⁹ ótimos locais, o que representa um grande desafio na busca pelo ótimo global. Matematicamente, esta função é descrita como:

$$\text{ZDT-4} = \begin{cases} f_1(x_1) = x_1 \\ g(x_2, \dots, x_m) = 1 + 10(m-1) + \sum_{i=2}^m (x_i^2 - 10 \cos(4\pi x_i)) \\ h(f_1(x_1), g(x_2, \dots, x_m)) = 1 - \sqrt{f_1(x_1)/g(x_2, \dots, x_m)} \end{cases} \quad (6.5)$$

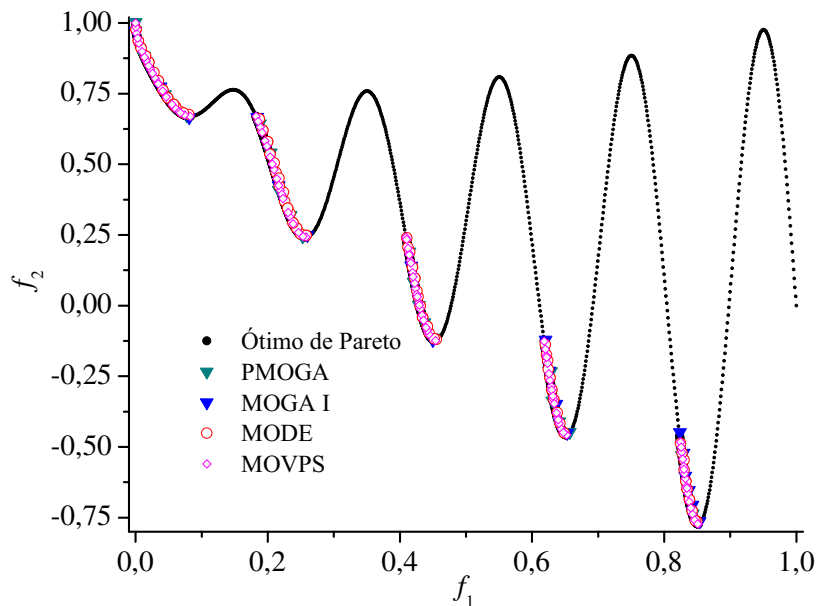


Figura 24 – Curva de Pareto para a função ZDT-3.

A Tabela 33 apresenta as métricas de desempenho considerando os algoritmos NSGA-II, MODE e MOVPS. Nesta tabela é possível observar que o MOVPS apresentou resultados concordantes em termos da convergência métrica (Υ) e de distância geracional (DG). O espalhamento das soluções ao longo da curva de Pareto obtido pelo MOVPS, por sua vez, foi condizente com aquele encontrado pelo NSGA-II, como indicam os resultados apresentados nesta tabela.

Tabela 33 – Métricas de desempenho para a função ZDT-4.

	NSGA-II	MODE	MOVPS
$\bar{\Upsilon}$	0,2965	0,0016	0,0006
σ_{Υ}^2	0,0131	0,0003	0
$\bar{\Delta}$	0,6680	0,3763	0,6694
σ_{Δ}^2	0,0099	0,0078	0,0064
\overline{DG}	0,0023	0,0001	0,0001
σ_{DG}^2	0,0003	0	0

A Figura 25 apresenta as soluções obtidas para a função ZDT-4 considerando os algoritmos PMOGA (20080 avaliações da função objetivo), MOGA I (1000020 avaliações da função objetivo), MODE (30100 avaliações da função objetivo) e MOVPS (15100 avaliações da função objetivo). Nesta verifica-se que somente o algoritmo PMOGA não conseguiu uma boa aproximação da solução analítica.

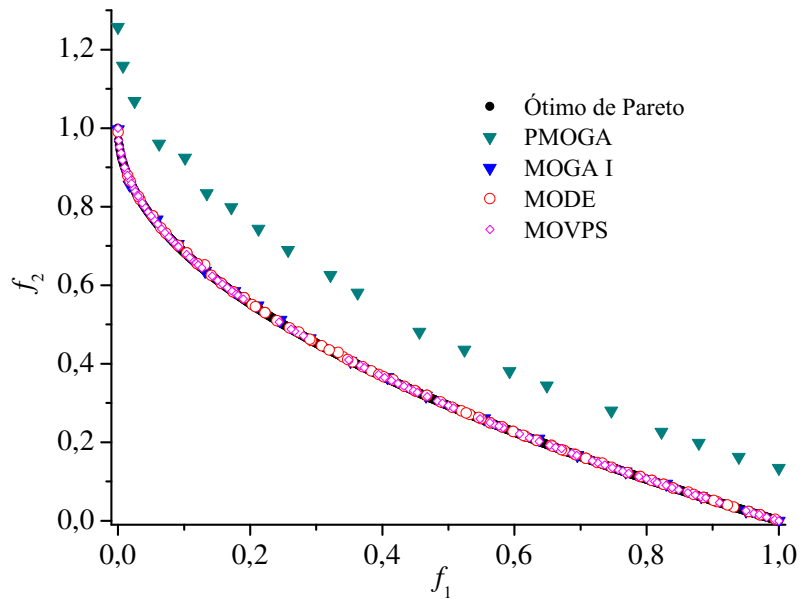


Figura 25 – Curva de Pareto para a função ZDT-4.

6.1.5 ZDT-6

A função ZDT-6 apresenta duas características, a saber, a solução ótima de Pareto não é uniformemente distribuída ao longo da fronteira global de Pareto e a densidade da solução é menor perto da fronteira ótima de Pareto e maior na região afastada dela (ZITZLER; DEB; THIELE, 2000; DEB, 2001). Esta função é definida como:

$$\text{ZDT-6} = \begin{cases} f_1(x_1) = 1 - \exp(-4x_1) \sin^6(6\pi x_1) \\ g(x_2, \dots, x_m) = 1 + 9 \left(\sum_{i=2}^m \frac{x_i}{m-1} \right)^{0,25} \\ h(f_1(x_1), g(x_2, \dots, x_m)) = 1 - (f_1(x_1)/g(x_2, \dots, x_m))^2 \end{cases} \quad (6.6)$$

As métricas de desempenho considerando os algoritmos NSGA-II (25100 avaliações da função objetivo), MODE (30100 avaliações da função objetivo) e MOVPS (15100 avaliações da função objetivo) são apresentadas na Tab. 34 para a função ZDT-6. Nesta tabela é possível observar que as métricas de convergência foram condizentes com aquelas reportadas pela literatura, sendo intermediários os valores de convergência métrica (Υ) e distância geracional (DG) do MOVPS em relação aos algoritmos MODE e NSGA-II. Já o espalhamento da solução ótima obtida pelo MOVPS para a função ZDT-6 teve uma qualidade inferior, conforme apontam os valores de diversidade métrica (Δ) de outras estratégias.

As soluções obtidas pelo algoritmo proposto e pelos algoritmos PMOGA (20080 avaliações da função objetivo), MOGA I (1000020 avaliações da função objetivo) e MODE ao final do processo evolutivo em comparação com a solução analítica da função ZDT-6 são apresentadas a seguir na Fig. 26.

Tabela 34 – Métricas de desempenho para a função ZDT-6.

	NSGA-II	MODE	MOVPS
$\bar{\Upsilon}$	0,2965	0,0016	0,0032
σ_{Υ}^2	0,0131	0,0003	0
$\bar{\Delta}$	0,6680	0,3763	0,9023
σ_{Δ}^2	0,0099	0,0078	0,0012
\overline{DG}	0,0023	0,0001	0,0005
σ_{DG}^2	0,0003	0	0

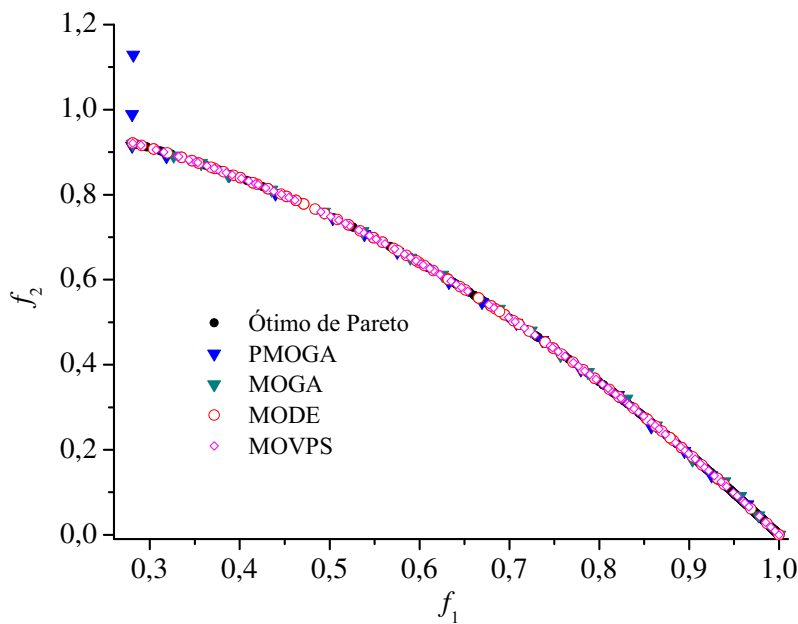


Figura 26 – Curva de Pareto para a função ZDT-6.

Neste caso, observa-se que todos os algoritmos analisados forneceram boas aproximações para a curva de Pareto da função ZDT-6, apesar do algoritmo PMOGA apresentar alguns pontos divergentes da curva.

6.1.6 CONSOLIDADO DOS RESULTADOS DAS FUNÇÕES ZDT

A partir dos resultados obtidos, é possível concluir que o MOVPS foi capaz de obter métricas de desempenho condizentes com as reportadas pela literatura para as funções ZDT. O algoritmo proposto apresentou métrica de convergência (Υ), em geral, melhor em relação aos algoritmos NSGA-II e MODE. Já os valores da distância geracional (DG) encontrados foram bem próximos daqueles reportados pelo algoritmo MODE. Em relação à métrica de diversidade (Δ), apesar desta apresentar uma qualidade inferior para o MOVPS, na maior parte dos casos não se distanciou tanto dos resultados reportados pelo algoritmo NSGA-II.

Cabe ressaltar que todos estes resultados obtidos pelo MOVPS foram alcançados com uma menor quantidade de chamadas da função objetivo em relação a outras abordagens. Sendo assim, é possível afirmar que o MOVPS obteve um bom desempenho no que tange o trinômio convergência, diversidade e número de avaliações da função objetivo.

6.2 PROJETO DE SISTEMAS DE ENGENHARIA

Para avaliar o desempenho do MOVPS em problemas mais próximos da realidade, na presente seção serão apresentados os resultados obtidos considerando o projeto de sistemas de engenharia no contexto multi-objetivo.

Para essa finalidade, os parâmetros (*default*) para o MOVPS são: $\alpha = 0,05$, $p = 0,1$, $w_1 = 0,3$, $w_2 = 0,3$ e $p_m = 0,5$. É importante ressaltar que, apenas nos três primeiros problemas, o operador de mutação teve um peso diferente (p_m), sendo os valores indicados nos respectivos casos. Quanto aos parâmetros característicos dos métodos baseados em população, o tamanho da população (NP) e o número máximo de gerações (N_{gen}) foram estabelecidos para cada aplicação (a partir de execuções preliminares). Para o tratamento das restrições de desigualdade foi empregado o Método da Penalidade Exterior (VANDERPLAATS, 1999) considerando um fator de penalidade da ordem de 10^6 .

6.2.1 TRELIÇA COM DUAS BARRAS

A primeira aplicação de projeto no contexto multi-objetivo foi estudada por Rao (1987), Cheng e Li (1999) e Ray, Tai e Seow (2001). A Figura 27 apresenta uma treliça cujo peso estrutural (f_1) e o deslocamento (f_2) da junta 3 devem ser minimizados considerando restrições de tensão em cada um dos links. Para essa finalidade, a área transversal A das barras e a meia distância x entre os links 1 e 2 devem ser determinadas de modo a manter a geometria da treliça simétrica.

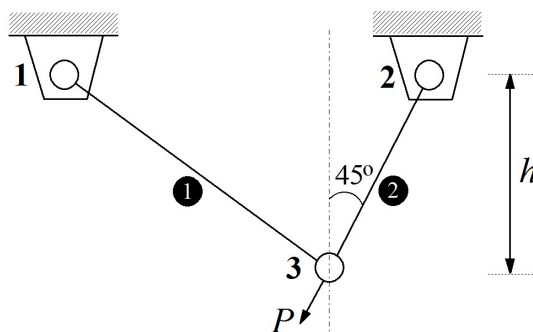


Figura 27 – Representação esquemática de uma treliça de duas barras. Adaptado de Rao (1987).

Matematicamente, este problema pode ser formulado como segue:

$$\min f_1 = 2\rho h x_2 \sqrt{1 + x_1^2} \quad (6.7a)$$

$$\min f_2 = \frac{Ph(1 + x_1^2)^{1,5}(1 + x_1^4)^{0,5}}{2\sqrt{2}Ex_1^2x_2} \quad (6.7b)$$

$$g_1(x) \equiv \frac{P(1 + x_1)(1 + x_1^2)^{0,5}}{2\sqrt{2}x_1x_2} - \sigma_0 \leq 0 \quad (6.7c)$$

$$g_2(x) \equiv \frac{P(1 - x_1)(1 + x_1^2)^{0,5}}{2\sqrt{2}x_1x_2} - \sigma_0 \leq 0 \quad (6.7d)$$

$$0,10 \leq x_1 \leq 2,25 \quad (6.7e)$$

$$0,50 \leq x_2 \leq 2,50 \quad (6.7f)$$

onde ρ é a densidade ($0,283 \text{ lb/in}^3$), h é a altura relativa ao link 3 (100 in) (conforme a Fig. 27), P é a força aplicada no link 3 (10^4 lb), E é o módulo de Young ($3,0 \times 10^7 \text{ lb/in}^2$), σ_0 é a tensão máxima permitida ($2,0 \times 10^4 \text{ lb/in}^2$). Quanto às variáveis de projeto, $x_1 = x/h$ e $x_2 = A/A_{min}$, em que $A_{min} = 1,0 \text{ in}^2$, representam os adimensionais referentes ao comprimento x e a área A .

As soluções obtidas pelo algoritmo proposto com uma probabilidade de mutação de 0,05 (p_m), 88 indivíduos e 8 gerações (792 avaliações do vetor de funções objetivo), bem como pelo algoritmo MOEA - *Multi-objective Evolutionary Algorithm* (RAY; TAI; SEOW, 2001) com 95 pontos ótimos (793 avaliações do vetor de funções objetivo) são apresentadas na Fig. 28.

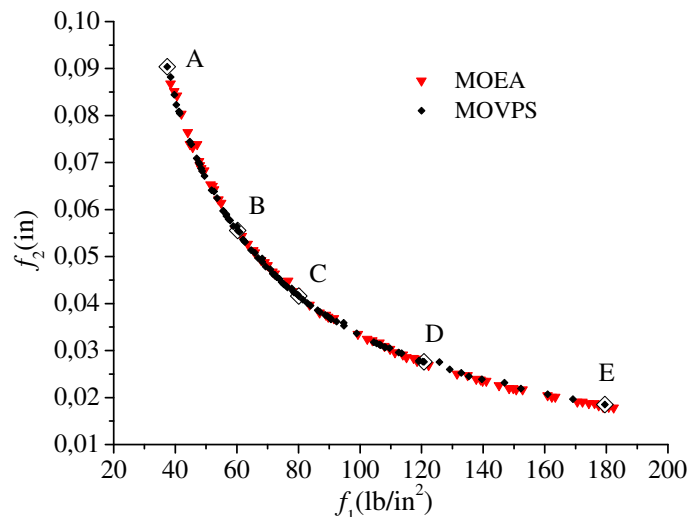


Figura 28 – Curva de Pareto para o projeto de uma treliça com duas barras.

Nesta figura observa-se que, com uma quantidade próxima de avaliações e com uma população menor, o MOVPS obteve uma boa aproximação da curva de Pareto em relação ao MOEA. Os objetivos são evidentemente conflitantes entre si, uma vez que a melhoria de um objetivo significa a piora do outro e vice-versa. É importante lembrar que, do ponto de vista

matemático, todos os pontos da curva têm mesma importância, isto é, são pontos não-dominados. Assim, a tomada de decisão em relação às variáveis de projeto deve ocorrer no pós-processamento e, nesse sentido, as soluções A, B, C, D e E destacadas na Fig. 28 e apresentadas na Tab. 35, representam potenciais escolhas do projetista.

Tabela 35 – Alguns pontos da curva de Pareto obtidos pelo algoritmo MOVPS para o projeto de uma treliça com duas barras.

	A	B	C	D	E
x_1 (-)	0,6918	0,7118	0,8045	0,8076	0,7929
x_2 (-)	0,5431	0,8678	1,1024	1,6601	2,4848
f_1 (lb/in ²)	37,3767	60,2863	80,0835	120,7735	179,4813
f_2 (in)	0,0904	0,0556	0,0416	0,0276	0,0185

Neste caso, os pontos A e E são soluções extremas que priorizam a minimização dos objetivos f_1 e f_2 individualmente. O ponto C é uma boa escolha no que tange o compromisso entre os objetivos, enquanto que os demais pontos (B e D) apresentam certa tendência em favorecer a minimização de f_1 (solução B) ou de f_2 (solução D). Quanto às variáveis adimensionais, nota-se que para os pontos destacados, x_1 assume valores próximos de 0,7 ou 0,8; ao passo que x_2 , que está relacionado com a área, varia ao longo da faixa de projeto estabelecida de forma que seu aumento implica na elevação do peso da estrutura (f_1), de acordo com o esperado.

6.2.2 VIGA I

O segundo problema de otimização multi-objetivo refere-se ao projeto de uma viga com seção transversal no formato de I, conforme a Fig. 29 (CASTRO, 2001). Nesta figura as variáveis de projeto são as dimensões da viga (x_1 , x_2 , x_3 e x_4). E os objetivos a serem minimizados são a área da seção transversal (cm²) e o deslocamento estático máximo (cm), dados respectivamente por:

$$\min f_1 = 2x_2x_4 + x_3(x_1 - 2x_4) \quad (6.8a)$$

$$\min f_2 = \frac{PL^3}{48EI} \quad (6.8b)$$

onde o momento de inércia I é calculado segundo a relação:

$$I = \frac{x_3(x_1 - 2x_4)^3 + 2x_2x_4(4x_4^2 + 3x_1(x_1 - 2x_4))}{12} \quad (6.9)$$

e E é o Módulo de Young (2×10^4 kN/cm²), σ é a tensão de projeto da viga (16 kN/cm²), P e Q são as cargas vertical (600 kN) e horizontal (50 kN), aplicadas no ponto médio da viga, respectivamente.

Em relação às restrições laterais, as variáveis de projeto devem obedecer às seguintes faixas: $10 \text{ cm} \leq x_1 \leq 80 \text{ cm}$, $10 \text{ cm} \leq x_2 \leq 50 \text{ cm}$, $0,9 \text{ cm} \leq x_3 \leq 5 \text{ cm}$ e $0,9 \text{ cm} \leq x_4 \leq 5 \text{ cm}$.

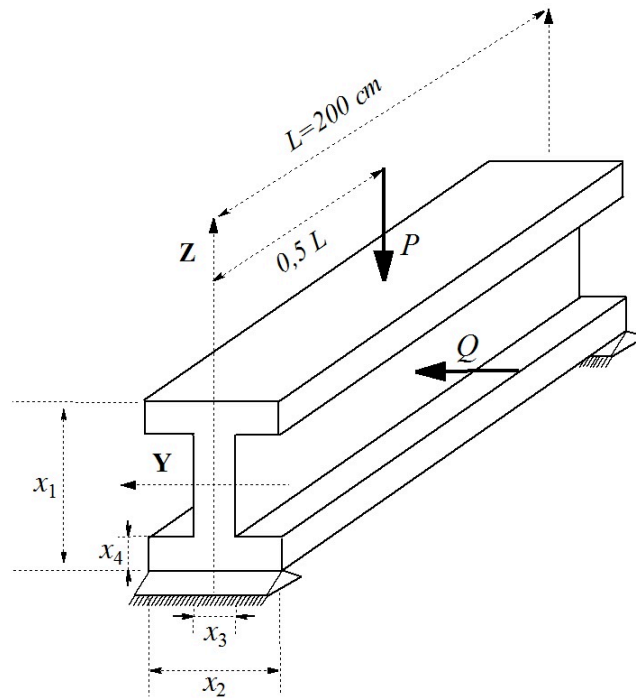


Figura 29 – Representação esquemática de uma viga I. Adaptado de [Castro \(2001\)](#).

Além disso, a seguinte restrição de projeto deve ser atendida:

$$g(x) \equiv \frac{M_Y}{W_Y} + \frac{M_Z}{W_Z} \leq \sigma \quad (6.10)$$

onde M_Y (30000 kN cm) e M_Z (25000 kN cm) são os momentos máximos nas direções **Y** e **Z**; W_Y e W_Z são os módulos de resistência da seção nas direções **Y** e **Z**; e σ é a tensão limite estabelecida. Os módulos de resistência são calculados pelas seguintes expressões:

$$W_Y = \frac{x_3(x_1 - 2x_4)^3 + 2x_2x_4(4x_4^2 + 3x_1(x_1 - 2x_4))}{6x_1} \quad (6.11)$$

$$W_Z = \frac{(x_1 - 2x_4)x_3^3 + 2x_4x_2^3}{6x_2} \quad (6.12)$$

Os parâmetros utilizados pelo MOVPS foram: probabilidade de mutação igual a 0,8; 60 indivíduos e 200 gerações. Um comparativo entre as soluções obtidas pelos algoritmos MODE ([LOBATO, 2008](#)), PMOGA ([CASTRO, 2001](#)) e MOVPS considerando 15030, 25050 e 12060 avaliações é apresentado na Fig. 30. Nesta figura é possível observar que o algoritmo MOVPS foi capaz de obter uma boa aproximação das curvas de Pareto obtidas pelos algoritmos PMOGA e MODE. As diferenças que podem ser apontadas referem-se à qualidade de espalhamento inferior do MOVPS nas proximidades das soluções extremas encontradas e uma sutil dominância dos pontos do MOVPS situados na vizinhança da solução C em relação aos resultados dos demais algoritmos.

Neste caso, a redução da área da seção transversal da viga I (f_1) implica no aumento do deslocamento estático máximo (f_2), e vice-versa. Além disso, nota-se na Fig. 30 que pequenas variações em um objetivo podem resultar em grandes variações no outro objetivo. Para a

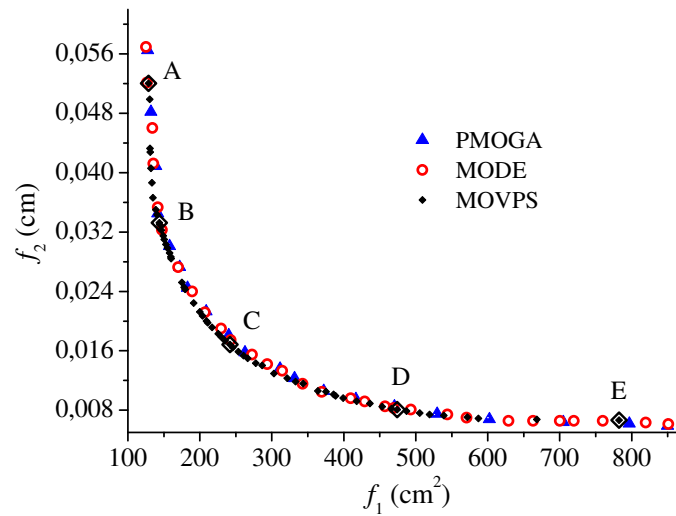


Figura 30 – Curva de Pareto para o projeto de uma viga I.

implementação prática deste resultado faz-se necessário definir um ou mais pontos. Para essa finalidade, na Fig. 30 e na Tab. 36 são identificados alguns pontos pertencentes à solução ótima obtida pelo MOVPS.

Tabela 36 – Alguns pontos da curva de Pareto obtidos pelo algoritmo MOVPS para o projeto de uma viga I.

	A	B	C	D	E
x_1 (cm)	66,5244	80,0000	80,0000	80,0000	79,7800
x_2 (cm)	39,0870	38,5006	43,2309	50,0000	44,3796
x_3 (cm)	0,9000	0,9000	0,9000	0,9000	4,9675
x_4 (cm)	0,9000	0,9527	2,0082	4,0939	4,8991
f_1 (cm ²)	128,6086	143,6477	242,0177	474,0221	782,4778
f_2 (cm)	0,0520	0,0333	0,0168	0,0081	0,0066

Os pontos extremos obtidos pelo MOVPS priorizam um único objetivo possibilitando ou a mínima deflexão com uma área de 782,4778 cm² (ponto E) ou a área mínima com uma deflexão de 0,0520 cm (ponto A), conforme os dados da Tab. 36. Os pontos intermediários, por sua vez, apresentam duas variáveis de projeto com resultados comuns (x_1 assumindo seu valor máximo e x_3 assumindo seu valor mínimo). Os pontos B e D apresentam uma inclinação maior pela minimização de f_1 e f_2 , respectivamente, enquanto o ponto C é um ponto com bom compromisso entre os objetivos, isto é, não privilegia de modo evidente a minimização exclusiva de nenhum objetivo.

6.2.3 VIGA SOLDADA

A próxima aplicação considera uma viga submetida a uma força F em sua extremidade e que precisa ser soldada a um outro componente estrutural satisfazendo as condições de estabilidade e às limitações de projeto, objetivando a minimização do custo da viga (f_1) e do deslocamento da extremidade livre da viga (f_2). As quatro variáveis de projeto, espessura da solda (h), comprimento da solda (l), largura da viga (t) e espessura da viga (b), são indicadas na Fig. 31:

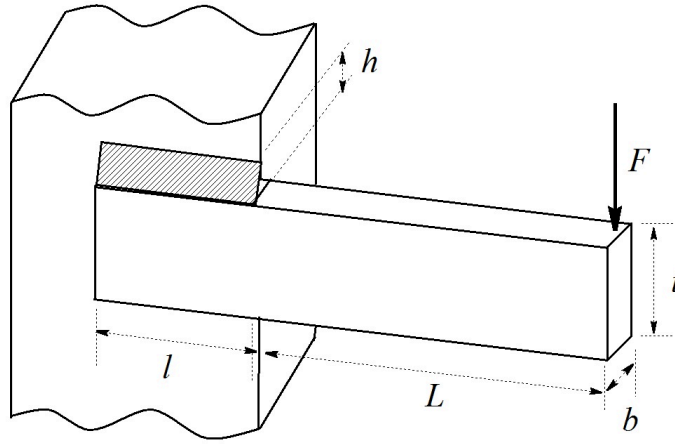


Figura 31 – Representação esquemática de uma viga soldada. Adaptado de Castro (2001).

Assim, os objetivos deste problema são definidos como (CASTRO, 2001):

$$\min f_1 = 1,10471h^2l + 0,04811tb(L + l) \quad (6.13a)$$

$$\min f_2 = \frac{4FL^3}{t^3bE} \quad (6.13b)$$

sujeito às seguintes restrições:

$$\tau - \tau_{max} \leq 0 \quad (6.14a)$$

$$\sigma - \sigma_{max} \leq 0 \quad (6.14b)$$

$$F - P_c \leq 0 \quad (6.14c)$$

$$\frac{4FL^3}{t^3bE} - u_{max} \leq 0 \quad (6.14d)$$

$$h - b \leq 0 \quad (6.14e)$$

para $0,125 \text{ in} \leq h, b \leq 5 \text{ in}, 0,1 \text{ in} \leq l, t \leq 10 \text{ in}$. Na Equação (6.13a), os coeficientes 1,10471 e 0,04811 estão relacionados ao custo do material por unidade de volume.

As duas primeiras restrições garantem que a tensão de cisalhamento e a tensão normal desenvolvidas ao longo do apoio da viga sejam respectivamente menores que as tensões permisíveis de cisalhamento (τ_{max}) e normal (σ_{max}) do material. A terceira restrição garante que o esforço resistente (ao longo da direção de t) da viga seja maior que a carga aplicada F . A quarta

restrição é um limite máximo (u_{max}) para o deslocamento na extremidade da viga. Já a quinta restrição garante que a espessura da viga não seja menor que a espessura da solda.

Os dados adotados para o problema são (CASTRO, 2001): $F=6000$ lb, $\tau_{max}=13600$ psi, $E=30 \times 10^6$ psi, $\sigma_{max}=30000$ psi, $u_{max}=0,25$ in e $L=14$ in.

As tensões e os termos das expressões anteriores são dadas por:

$$\tau = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \frac{l\tau_1\tau_2}{\sqrt{0,25(l^2 + (h+t)^2)}}} \quad (6.15a)$$

$$\tau_1 = \frac{6000}{\sqrt{2}hl} \quad (6.15b)$$

$$\tau_2 = \frac{6000(14 + 0,5l)\sqrt{0,25(l^2 + (h+t)^2)}}{2(0,707hl(l^2/12 + 0,25(h+t)^2))} \quad (6.15c)$$

$$\sigma = \frac{504000}{t^2b} \quad (6.15d)$$

$$P_c = 64746,022(1 - 0,0282346t)tb^3 \quad (6.15e)$$

Os parâmetros usados pelo MOVPS são: probabilidade de mutação de 5%, 100 partículas vibrantes e 240 gerações. Em relação aos algoritmos PMOGA e MODE utilizados para fins de comparação, seus parâmetros podem ser encontrados em Castro (2001) e Lobato (2008). Todavia, destaca-se que foram consideradas 100200, 25050 e 24100 avaliações da função objetivo para o PMOGA, MODE e MOVPS, respectivamente.

As soluções ótimas obtidas para o projeto da viga com solda considerando os algoritmos citados são apresentadas na Fig. 32.

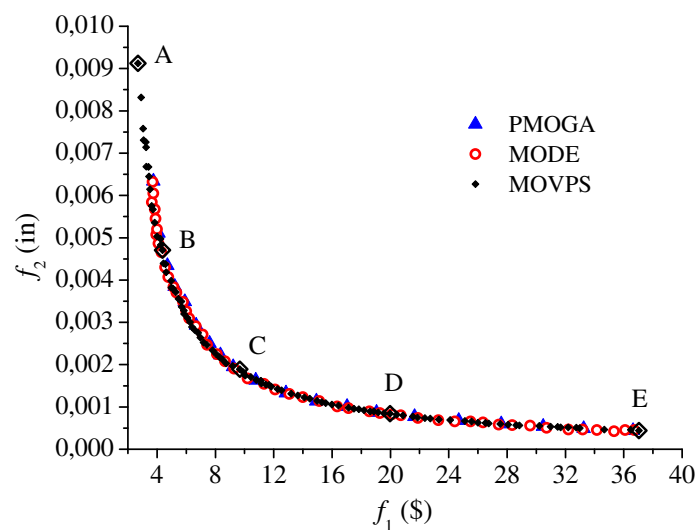


Figura 32 – Curva de Pareto para o projeto de uma viga soldada.

Nesta figura observa-se que os objetivos são conflitantes entre si. Também nota-se que o MOVPS foi capaz de obter uma boa aproximação da curva de Pareto em comparação com

os algoritmos PMOGA e MODE. A única diferença mais evidente refere-se ao fato de que, em relação às soluções que minimizam preferencialmente o custo (f_1), o MOVPS conseguiu encontrar configurações de projeto não registradas pelas outras estratégias avaliadas nesta comparação, como sugerem os pontos próximos do ponto A. Ainda nesta figura e na Tab. 37 são destacados alguns pontos (A, B, C, D e E). Neste caso, em todas as configurações de projeto, a largura da viga (t) ideal se aproxima do limite máximo de 10 in. Em relação às demais variáveis de projeto, verifica-se que o aumento das espessuras (h e b) acompanhado da redução do comprimento da viga (l) levam à minimização da deflexão da viga à custa da elevação do preço, e vice-versa. Os pontos extremos A e E priorizam, de modo particular, o menor custo (\$2,66) e a menor deflexão (0,0004 in). Já os pontos B e D representam aqueles que tendem a favorecer um objetivo ou outro, enquanto o ponto C busca balancear o atendimento de ambos os objetivos, resultando em um custo de \$8,0255 a uma deflexão de 0,0022 in.

Tabela 37 – Alguns pontos da curva de Pareto obtidos pelo algoritmo MOVPS para o projeto de uma viga soldada.

	A	B	C	D	E
h (in)	0,2394	0,3080	0,6920	0,8604	1,1167
l (in)	5,2426	3,7144	1,3983	1,0727	0,8962
t (in)	9,9671	10,0000	9,9797	10,0000	10,0000
b (in)	0,2523	0,4349	0,9855	2,3275	5,0000
f_1 (\$)	2,6600	4,0960	8,0255	17,7553	37,0673
f_2 (in)	0,0088	0,0050	0,0022	0,0009	0,0004

6.2.4 IMPACTO LATERAL DE UM AUTOMÓVEL

Este estudo de caso tem como objetivo minimizar o peso do carro, a força experimentada por um passageiro e a velocidade média do dispositivo responsável por suportar a carga de impacto (PASSOS; LUERSEN, 2018). Os três objetivos são conflitantes, portanto, espera-se uma solução ótima tridimensional. Nesta aplicação são consideradas dez restrições envolvendo valores limitantes de carga abdominal, força, velocidade do dispositivo, deflexão, entre outras (JAIN; DEB, 2014). Tanto os objetivos quanto as restrições são representadas matematicamente por meta-modelos que dependem de sete variáveis de projeto. Estas representam geometrias relacionadas com as espessuras dos pilares, piso, travessas, viga da porta e trilho do teto (PASSOS; LUERSEN, 2018).

Matematicamente, as funções objetivo e as restrições são dadas como:

$$\min f_1 = 1,98 + 4,9x_1 + 6,67x_2 + 6,98x_3 + 4,01x_4 + 1,78x_5 + 0,00001x_6 + 2,73x_7 \quad (6.16a)$$

$$\min f_2 = F \quad (6.16b)$$

$$\min f_3 = 0,5(v_{mbp} + v_{fd}) \quad (6.16c)$$

$$g_1(x) \equiv 1,16 - 0,3717x_2x_4 - 0,0092928x_3 - 1 \leq 0 \quad (6.16d)$$

$$g_2(x) \equiv 0,261 - 0,0159x_1x_2 - 0,06486x_1 - 0,019x_2x_7 + 0,0144x_3x_5 + \\ + 0,0154464x_6 - 0,32 \leq 0 \quad (6.16e)$$

$$g_3(x) \equiv 0,214 + 0,00817x_5 - 0,045195x_1 - 0,0135168x_1 + 0,03099x_2x_6 + \\ - 0,018x_2x_7 + 0,007176x_3 + 0,023232x_3 - 0,00364x_5x_6 - 0,018x_2^2 - 0,32 \leq 0 \quad (6.16f)$$

$$g_4(x) \equiv 0,74 - 0,61x_2 - 0,031296x_3 - 0,031872x_7 + 0,227x_2^2 - 0,32 \leq 0 \quad (6.16g)$$

$$g_5(x) \equiv 28,98 + 3,818x_3 - 4,2x_1x_2 + 1,27296x_6 - 2,68065x_7 - 32 \leq 0 \quad (6.16h)$$

$$g_6(x) \equiv 33,86 + 2,95x_3 - 5,057x_1x_2 - 3,795x_2 - 3,4431x_7 + 1,45728 - 32 \leq 0 \quad (6.16i)$$

$$g_7(x) \equiv 46,36 - 9,9x_2 - 4,4505x_1 - 32 \leq 0 \quad (6.16j)$$

$$g_8(x) \equiv F - 4 \leq 0 \quad (6.16k)$$

$$g_9(x) \equiv v_{mbp} - 9,9 \leq 0 \quad (6.16l)$$

$$g_{10}(x) \equiv v_{fd} - 15,7 \leq 0 \quad (6.16m)$$

$$0,500 \leq x_1 \leq 1,500 \quad (6.16n)$$

$$0,450 \leq x_2 \leq 1,350 \quad (6.16o)$$

$$0,500 \leq x_3 \leq 1,500 \quad (6.16p)$$

$$0,500 \leq x_4 \leq 1,500 \quad (6.16q)$$

$$0,875 \leq x_5 \leq 2,625 \quad (6.16r)$$

$$0,400 \leq x_6 \leq 1,200 \quad (6.16s)$$

$$0,400 \leq x_7 \leq 1,200 \quad (6.16t)$$

em que F é a força experimentada pelo passageiro, v_{mbp} e v_{fd} representam as contribuições que definem a velocidade média do dispositivo responsável por suportar o impacto. Estas são definidas como:

$$F = 4,72 - 0,19x_2x_3 - 0,5x_4 \quad (6.17a)$$

$$v_{mbp} = 10,58 - 0,674x_1x_2 - 0,67275x_2 \quad (6.17b)$$

$$v_{fd} = 16,45 - 0,489x_3x_7 - 0,843x_5x_6 \quad (6.17c)$$

Os parâmetros do MOVPS utilizados nesta aplicação são: 150 indivíduos (NP) e número máximo de 500 gerações (N_{gen}), além do conjunto *default* já definido (Seção 6.2). Neste caso, a metodologia proposta requer 75150 avaliações da função objetivo. Para fins de comparação, são considerados os resultados obtidos via emprego do algoritmo clássico NSGA-II com a mesma quantidade de avaliações (150+150×500) (JAIN; DEB, 2014).

A Figura 33 apresenta as soluções obtidas para o problema do impacto lateral de um automóvel considerando os algoritmos MOVPS e NSGA-II. A curva de Pareto, que neste caso relaciona os três objetivos, é representada graficamente no espaço tridimensional conforme a Fig. 33a. Para facilitar a visualização e comparação dos resultados, as projeções no plano entre f_1 , f_2 e f_3 são apresentadas nas Figs. 33b a 33d.

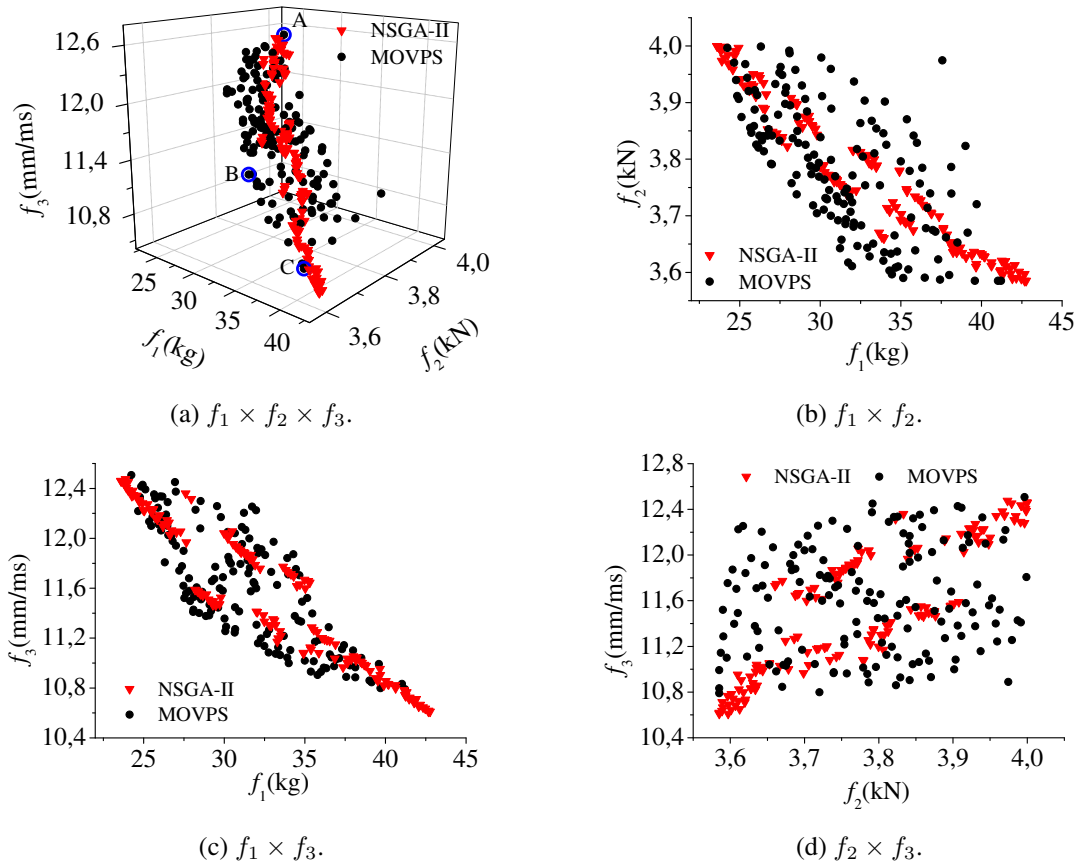


Figura 33 – Ótimo de Pareto para o problema do impacto lateral de um carro.

Como pode ser observado na Fig. 33c, no espaço de objetivos $f_1 \times f_3$, o perfil das soluções obtidas pela metodologia proposta se assemelhou bastante ao padrão fornecido pelo algoritmo NSGA-II. Em relação à análise dos gráficos que relacionam $f_1 \times f_2$ (Fig. 33b) e $f_2 \times f_3$ (Fig. 33d), os perfis obtidos se apresentam de forma um pouco mais distinta, porém guardam certa semelhança entre si, sendo mais evidente um maior espalhamento das soluções encontradas pelo MOVPS. Destaca-se também o fato de que nos espaços bi-objetivos que consideram f_1 , o MOVPS alcançou uma série de soluções que concilia melhor a minimização do peso com cada um dos objetivos restantes avaliados individualmente. Já na correlação de f_2 e f_3 , a discrepância entre os algoritmos foi maior e o NSGA-II encontrou soluções melhores desconsiderando o valor de f_1 . Mesmo com as diferenças apontadas, pode-se dizer que a metodologia proposta foi capaz de obter bons resultados em termos da curva de Pareto para o problema do impacto lateral de um carro.

A Tabela 38 apresenta as três soluções destacadas na Fig. 33a. O ponto A prioriza

exclusivamente o objetivo f_1 . Neste caso, a minimização do peso do carro promove uma elevação dos valores da força (f_2) e da velocidade média (f_3). Já o ponto C, por sua vez, concilia a minimização dos objetivos f_2 e f_3 , porém isso só ocorre mediante o aumento do peso. E o ponto B, entre os destacados, é aquele que mais aponta para o sentido da minimização simultânea dos três objetivos. Os valores das funções objetivo desta solução são intermediários em relação aos respectivos objetivos dos pontos A e C, de modo que o ponto B pode ser considerado representativo entre aqueles que buscam o melhor compromisso entre f_1 , f_2 e f_3 .

Tabela 38 – Alguns pontos da curva de Pareto obtidos pelo algoritmo MOVPS para o problema do impacto lateral de um carro.

	A	B	C
x_1 (mm)	0,5000	0,7834	1,2196
x_2 (mm)	1,2365	0,9555	1,3500
x_3 (mm)	0,5000	0,7679	1,5000
x_4 (mm)	1,2120	1,5000	1,5000
x_5 (mm)	0,8750	2,2634	2,5224
x_6 (mm)	0,8397	1,1389	1,2000
x_7 (mm)	0,6062	0,4000	1,2000
f_1 (kg)	24,2403	35,1548	41,2113
f_2 (kN)	3,9965	3,5902	3,5853
f_3 (mm/ms)	12,5069	11,5205	10,7901

6.2.5 PLANEJAMENTO DE RECURSOS HÍDRICOS

Esta aplicação refere-se ao problema de recursos hídricos cujo objetivo é o planejamento ótimo para sistemas de drenagem de tempestades em áreas urbanas, descrito por [Musselman e Talavage \(1980\)](#), representado esquematicamente na Fig. 34.

Os objetivos a serem minimizados são os custos da rede de drenagem (f_1), das instalações de armazenamento (f_2) e de tratamento (f_3), o custo previsto dos danos e as perdas econômicas esperadas devido a inundações (f_4 e f_5). Para o projeto, as variáveis de decisão são a capacidade de armazenamento local (x_1), a taxa máxima de tratamento (x_2) e a taxa máxima de transbordamento admissível (x_3).

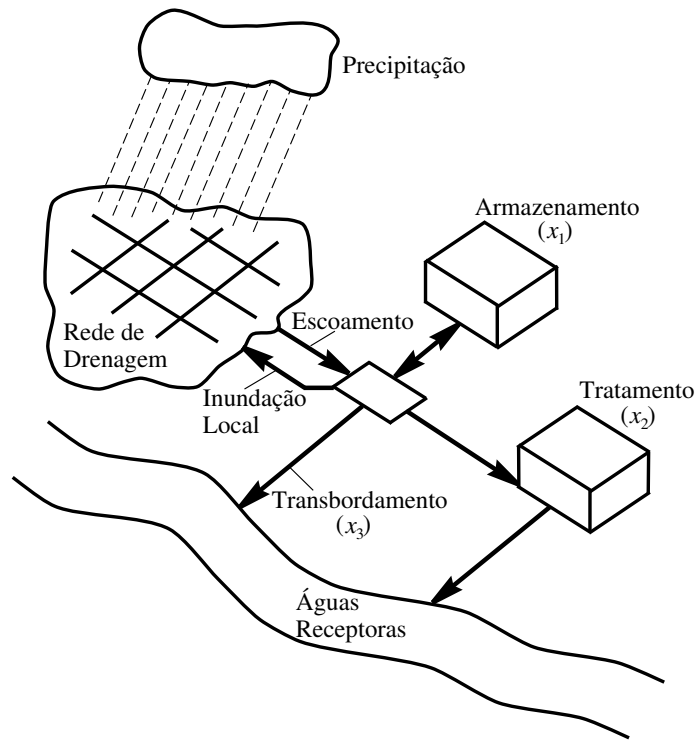


Figura 34 – Representação esquemática do problema de planejamento de recursos hídricos. Adaptado de Musselman e Talavage (1980).

Matematicamente, as funções objetivo e as restrições são dadas como:

$$\min f_1 = \frac{106780,37x_2 + 106780,37x_3 + 61704,67}{8 \times 10^4} \quad (6.18a)$$

$$\min f_2 = \frac{3000x_1}{1500} \quad (6.18b)$$

$$\min f_3 = \frac{28534689,65x_2}{3 \times 10^6} \quad (6.18c)$$

$$\min f_4 = \frac{572250 \exp(-39,75x_2 + 9,9x_3 + 2,74)}{6 \times 10^6} \quad (6.18d)$$

$$\min f_5 = \frac{34,75/(x_1x_2) + 123500x_3 - 2000}{8 \times 10^3} \quad (6.18e)$$

$$g_1(x) \equiv 0,139 \times 10^{-2}/(x_1x_2) + 4,94x_3 - 1,08 \leq 0 \quad (6.18f)$$

$$g_2(x) \equiv 0,306 \times 10^{-3}/(x_1x_2) + 1,082x_3 - 1,0986 \leq 0 \quad (6.18g)$$

$$g_3(x) \equiv 12,307/(x_1x_2) + 49408,24x_3 - 45948,98 \leq 0 \quad (6.18h)$$

$$g_4(x) \equiv 2,098/(x_1x_2) + 8046,33x_3 - 16696,71 \leq 0 \quad (6.18i)$$

$$g_5(x) \equiv 2,138/(x_1x_2) + 7883,39x_3 - 10705,04 \leq 0 \quad (6.18j)$$

$$g_6(x) \equiv 0,417(x_1x_2) + 1721,26x_3 - 2136,54 \leq 0 \quad (6.18k)$$

$$g_7(x) \equiv 0,164/(x_1x_2) + 631,13x_3 - 604,48 \leq 0 \quad (6.18l)$$

$$0,01 \leq x_1 \leq 0,45 \quad (6.18m)$$

$$0,01 \leq x_2 \leq 0,10 \quad (6.18n)$$

$$0,01 \leq x_3 \leq 0,10 \quad (6.18o)$$

em que as restrições de desigualdade (g_1 a g_7) estão relacionadas com os números médios por ano de cheias, de volume de inundação e de massa de sólidos suspensos, de sólidos sedimentáveis, de demanda bioquímica de oxigênio, de nitrogênio total e de ortofosfato.

Além do conjunto *default* estabelecido na Seção 6.2, o MOVPS utilizou 100 indivíduos (NP) e 20 gerações (N_{gen}). Para fins de comparação, são considerados os resultados obtidos via implementação do algoritmo NSGA-II com os parâmetros utilizados por Jain e Deb (2014) (212 indivíduos e 1000 gerações). A partir disso, a Fig. 35 exibe o comparativo mencionado para o problema do planejamento de recursos hídricos.

Como este estudo de caso apresenta cinco objetivos, a melhor forma de análise dos resultados se refere à associação das funções objetivo duas a duas, de acordo com os gráficos das Figs. 35a a 35j. Nestas figuras, nota-se que o MOVPS forneceu uma boa aproximação da curva de Pareto em comparação com o algoritmo NSGA-II, considerando todas as correlações possíveis no espaço de objetivos. O conjunto de soluções não-dominadas resultante apresentou perfis bastante semelhantes aos reportados por um algoritmo consolidado na literatura da otimização heurística no contexto multi-objetivo, sendo este um fato indicativo do bom desempenho da estratégia de otimização proposta. É importante destacar que, com os parâmetros citados anteriormente, o custo computacional relacionado com o MOVPS é bem inferior ao requerido pelo NSGA-II, o que representa uma evidente vantagem.

6.2.6 GARRA ROBÓTICA

A garra robótica é um dispositivo mecânico muito interessante devido ao grande número de aplicações que podem ser desenvolvidas a partir do mesmo. Dentre estas pode-se citar aplicações relacionadas a: *i*) exploração espacial, *ii*) soldagem à alta temperatura, *iii*) manuseio de materiais radioativos, *iv*) desarmamento de bombas, minas e exploração de naufrágios, *v*) fabricação de estruturas microeletrônicas e *vi*) cirurgias médicas (OSYCZKA, 2002; OSYCZKA; KRENICH, 2003; SARAVANAN et al., 2009; RAO; SAVSANI; VAKHAIRA, 2011).

Nos últimos anos, o projeto de garras robóticas tem sido objeto de estudo para fins de aumento do desempenho desses mecanismos (CUTKOSKI, 1989; OSYCZKA, 2002; CABRERA et al., 2007; ZITAR, 2005; LI et al., 2010; RAO; SAVSANI; VAKHAIRA, 2011). No contexto multi-objetivo, Osyczka e Krenich (2003) projetaram uma garra robótica usando uma estratégia baseada em Algoritmos Genéticos considerando diferentes configurações de garras. Saravanan et al. (2009) estudaram três configurações diferentes de garras robóticas considerando três estratégias evolutivas baseadas em Algoritmos Genéticos e Evolução Diferencial. Datta e Deb (2011) estudaram duas configurações diferentes de garras usando o clássico NSGA-II. Neste mesmo contexto, Avder, Sahin e Dörterler (2019) empregaram o algoritmo SPEA-2 (*Strength Pareto Evolutionary Algorithm*). Em todas estas aplicações os autores consideraram um problema de otimização com dois objetivos, a saber, a minimização da relação de transferência de potência entre o atuador e as extremidades da garra e a minimização da variação da força aplicada a um

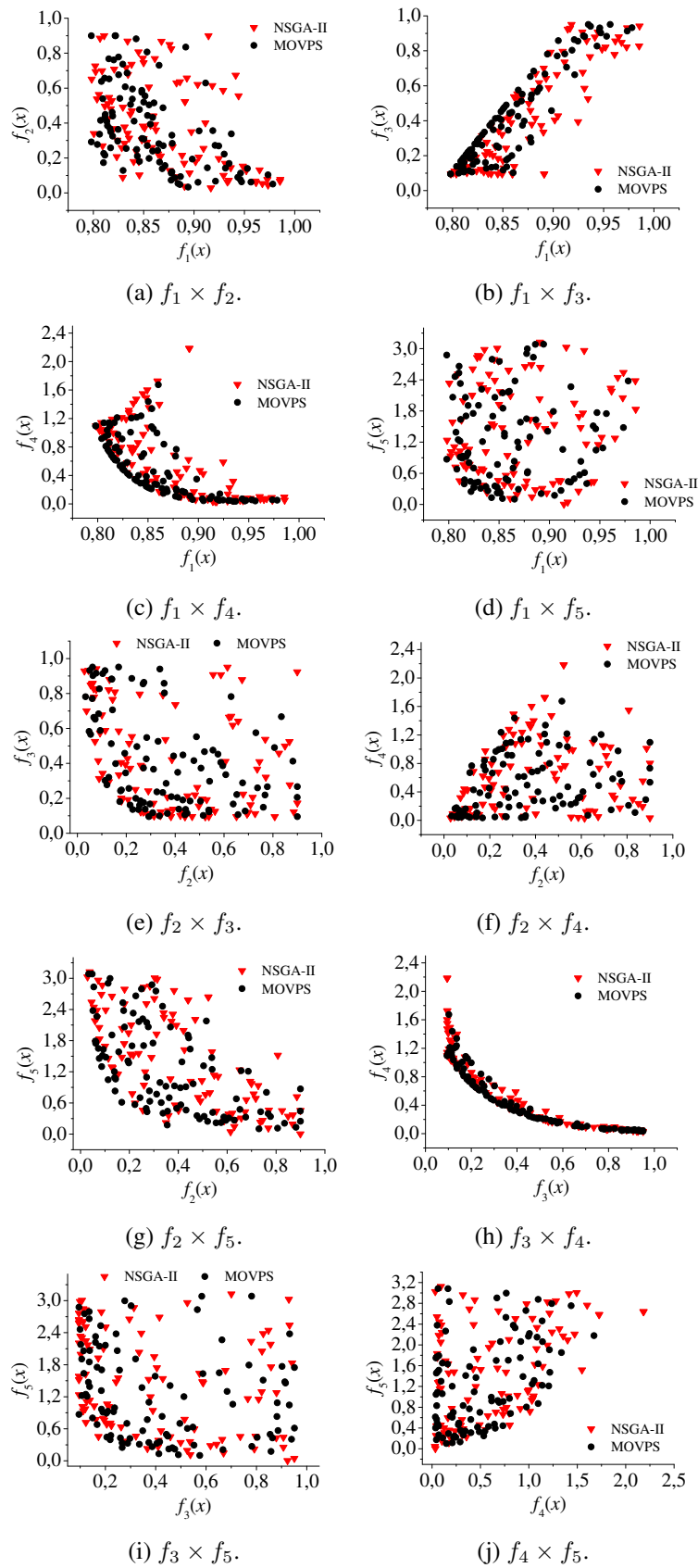


Figura 35 – Comparação entre as curvas de Pareto obtidas considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do planejamento de recursos hídricos.

objeto pela garra.

Na presente aplicação considera-se o problema de projeto formulado e resolvido por Datta e Deb (2011), em que se deseja projetar a estrutura de uma garra robótica conforme ilustrado na Fig. 36. Para essa finalidade é necessário determinar as dimensões características dos elementos que constituem a garra (a, b, c, e, f e l) e o ângulo (δ) entre os elementos b e c .

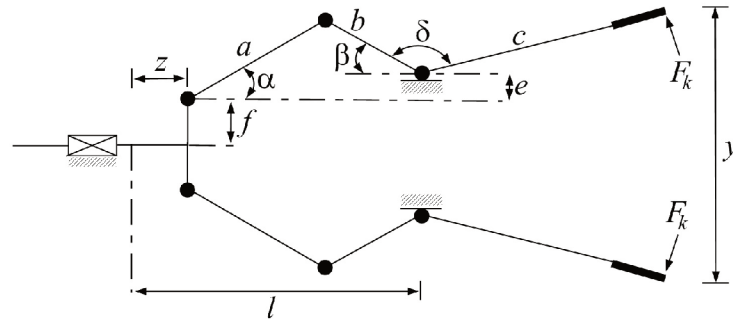


Figura 36 – Representação esquemática da garra robótica. Adaptado de Datta e Deb (2011).

Já na Fig. 37 são apresentadas as relações geométricas entre as variáveis de projeto. Matematicamente, estas relações são dadas de acordo com o conjunto de Eqs. (6.19).

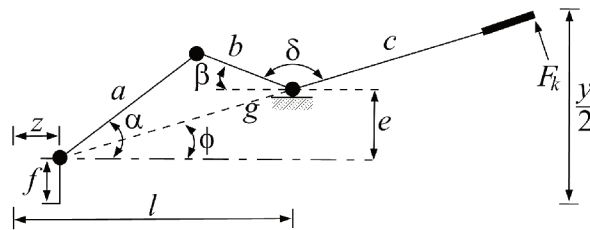


Figura 37 – Relações geométricas entre as variáveis de projeto no problema da garra robótica. Adaptado de Datta e Deb (2011).

$$g = \sqrt{(l - z)^2 + e^2} \quad (6.19a)$$

$$b^2 = a^2 + g^2 - 2ag \cos(\alpha - \phi) \quad (6.19b)$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{a^2 + g^2 - b^2}{2ag}\right) + \phi \quad (6.19c)$$

$$a^2 = b^2 + g^2 - 2bg \cos(\beta + \phi) \quad (6.19d)$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{b^2 + g^2 - a^2}{2bg}\right) - \phi \quad (6.19e)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{e}{l - z}\right) \quad (6.19f)$$

Nestas equações enfatiza-se que as dimensões g e y e os ângulos α , β e ϕ são variáveis auxiliares empregadas para ajudar na caracterização das relações geométricas apresentadas.

Além disso, z é o deslocamento permitido para o atuador da garra ($0 \leq z \leq z_{max}$, onde z_{max} é o deslocamento máximo permitido para o atuador da garra).

Neste problema de projeto são considerados dois objetivos:

- O primeiro objetivo consiste na minimização da diferença entre os valores máximo e mínimo referente a força atuante na garra (F_k) para a faixa assumida para o deslocamento z . Matematicamente este pode ser formulado como:

$$\min f_1(\mathbf{x}) = \max F_k(\mathbf{x}, z) - \min F_k(\mathbf{x}, z) \quad (6.20)$$

em que:

$$F_k(\mathbf{x}, z) = \frac{Pb \sin(\alpha + \beta)}{2c \cos(\alpha)} \quad (6.21)$$

É importante mencionar que a minimização deste objetivo garante que não exista muita variação na força de prensão durante toda a gama de operação da pinça, conforme destacado por [Datta e Deb \(2011\)](#).

- O segundo objetivo representa a razão de transmissão de força, isto é, a relação entre a força de atuação aplicada P e a força de prensão mínima resultante na ponta do link c . Esta é dada como:

$$\min f_2(\mathbf{x}) = \frac{P}{\min F_k(\mathbf{x}, z)} \quad (6.22)$$

Conforme mencionado por [Datta e Deb \(2011\)](#), a minimização desse objetivo garante que a força experimentada na ponta do link c tenha o maior valor possível.

No problema de otimização multi-objetivo apresentado, ambos os objetivos dependem do vetor de variáveis de projeto $\mathbf{x} = (a, b, c, e, f, l, \delta)$ e do deslocamento z . Assim, para um dado candidato à solução do problema de otimização, f_1 e f_2 exigem a determinação dos valores máximo e mínimo para a força F_k ao longo do domínio de z ($0 \leq z \leq z_{max}$), a qual é realizada através do emprego do Método da Seção Áurea ([VANDERPLAATS, 1999](#)). É importante destacar que a função F_k é unimodal com relação à z , o que permite a aplicação da referida técnica de busca sem maiores dificuldades ([DATTA; DEB, 2011](#)).

Apresentados os objetivos, a próxima etapa é a descrição das restrições. Estas são dadas como segue.

- Para o máximo deslocamento do atuador, a distância entre as extremidades da garra deve ser menor do que a dimensão mínima do objeto (Y_{min}), isto é:

$$g_1(\mathbf{x}) \equiv Y_{min} - y(\mathbf{x}, z_{max}) \geq 0 \quad (6.23)$$

onde $y(x, z) = 2[e + f + c \sin(\alpha + \beta)]$ é o deslocamento das extremidades das garras.

- A distância entre as extremidades da garra correspondente a z_{max} deve ser maior que zero:

$$g_2(\mathbf{x}) \equiv y(\mathbf{x}, z_{max}) \geq 0 \quad (6.24)$$

- A distância entre as extremidades do atuador na condição estática deve ser maior que a dimensão máxima do objeto (Y_{max}), isto é:

$$g_3(\mathbf{x}) \equiv y(\mathbf{x}, 0) - Y_{max} \geq 0 \quad (6.25)$$

- O deslocamento máximo entre as extremidades da garra (Y_G) deve ser maior ou igual à distância entre as extremidades de aplicação do atuador na condição estática:

$$g_4(\mathbf{x}) \equiv Y_G - y(\mathbf{x}, 0) \geq 0 \quad (6.26)$$

- Geometricamente, as seguintes restrições devem ser atendidas:

$$g_5(\mathbf{x}) \equiv (a + b)^2 - l^2 - e^2 \geq 0 \quad (6.27)$$

$$g_6(\mathbf{x}) \equiv (l - z_{max})^2 + (a - e)^2 - b^2 \geq 0 \quad (6.28)$$

- Da geometria da garra tem-se a seguinte relação:

$$g_7(\mathbf{x}) \equiv l - z_{max} \geq 0 \quad (6.29)$$

- A força mínima no atuador deve ser maior ou igual à força limite (F_G) definida, isto é:

$$g_8(\mathbf{x}) \equiv \min F_k(\mathbf{x}, z) - F_G \geq 0 \quad (6.30)$$

Para projetar a garra robótica considerando o algoritmo MOVPS, os seguintes domínios são empregados (DATTA; DEB, 2011): $10 \leq a \leq 250$ mm, $10 \leq b \leq 250$ mm, $100 \leq c \leq 300$ mm, $0 \leq e \leq 50$ mm, $10 \leq f \leq 250$ mm, $100 \leq l \leq 300$ mm, e $1,0 \leq \delta \leq 3,14$ (rad). Além disso, também são considerados os seguintes parâmetros do modelo (DATTA; DEB, 2011): $Y_{min} = 50$ mm, $Y_{max} = 100$ mm, $Y_G = 150$ mm, $z_{max} = 50$ mm, $P = 100$ N e $F_G = 50$ N. Já os parâmetros do algoritmo MOVPS são aqueles indicados na Seção 6.2, além de 100 indivíduos na população e 250 gerações. Com isso, o número de avaliações da função objetivo é igual a 25100. Para fins de comparação dos resultados obtidos pela metodologia proposta, as seguintes estratégias são analisadas: abordagem evolutiva baseada em Algoritmos Genéticos - AG (OSYCZKA; KRENICH, 2003) (160400 avaliações), NSGA¹ (DATTA; DEB, 2011) (200200 avaliações), SPEA-2 (AVDER; SAHIN; DORTERLER, 2019) (1000200 avaliações) e NSGA² (AVDER; SAHIN; DORTERLER, 2019) (15100 avaliações).

A Figura 38 apresenta a curva de Pareto obtida considerando diferentes estratégias de otimização para o projeto de garras robóticas. Nesta figura é possível observar o comportamento conflitante entre os objetivos, independentemente do método empregado. Além disso, a curva de

Pareto obtida usando o MOVPS supera todas aquelas reportadas na literatura. Em relação ao número de avaliações da função objetivo, o valor requerido pelo MOVPS é menor que o exigido para o AG, NSGA¹ e SPEA-2. Por outro lado, é maior que o exigido pelo NSGA². Todavia, ressalta-se mais uma vez que a solução obtida pela metodologia proposta é melhor do que todas já publicadas.

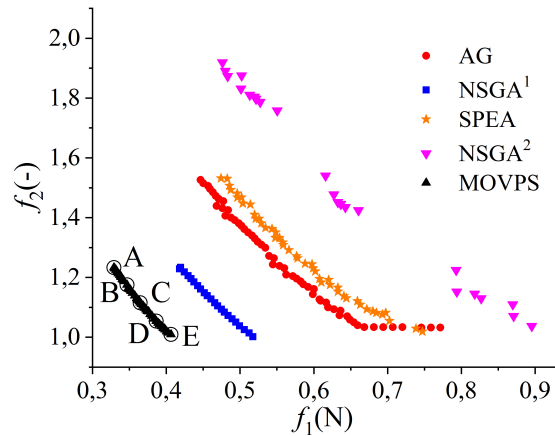


Figura 38 – Curva de Pareto para o problema da garra robótica.

A Tabela 39 apresenta alguns pontos da curva de Pareto para o problema da garra robótica considerando o algoritmo MOVPS. De forma geral, observa-se que as garras diferem nas dimensões c , e e f e no ângulo δ , enquanto as demais (a , b e l), praticamente, permanecem constantes.

Tabela 39 – Alguns pontos da curva de Pareto obtidos pelo algoritmo MOVPS para o problema da garra robótica.

	A	B	C	D	E
a (mm)	249,9713	249,8894	249,9326	249,9508	249,7258
b (mm)	249,8352	249,2861	249,7499	249,6528	248,6108
c (mm)	300,0000	285,3775	271,1837	256,1352	244,3823
e (mm)	0,0064	0,4728	0,0504	0,1628	0,9763
f (mm)	63,2863	60,8385	65,1895	64,5504	62,9422
l (mm)	100,0373	100,0971	100,3699	100,7769	101,1081
δ (rad)	1,8000	1,8000	1,8213	1,8270	1,8309
f_1 (N)	0,3291	0,3468	0,3646	0,3865	0,4065
f_2 (-)	1,2332	1,1753	1,1153	1,0540	1,0094

Para avaliar a diferença nas configurações das garras obtidas, na Fig. 39 são apresentadas as estruturas obtidas considerando os pontos A, B, C, D e E. Nesta figura fica evidente que as diferenças entre as configurações das garras representadas pelos pontos destacados são imperceptíveis, sendo a dimensão c a mais aparente visualmente.

Para investigar como as variáveis de projeto variam com relação à solução reportada pelo NSGA², na Fig. 40 são apresentados os valores destas em função da taxa de transmissão de força

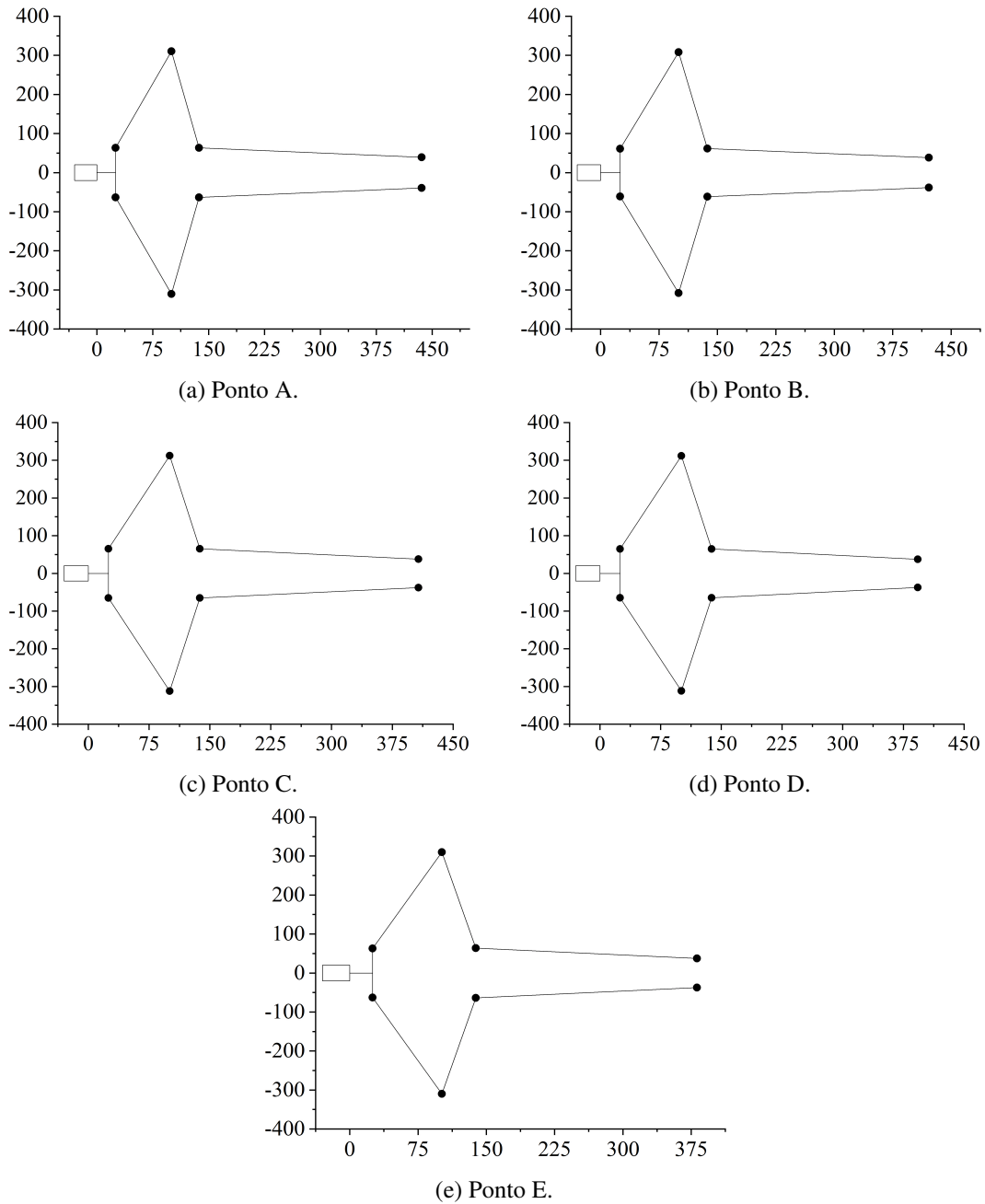


Figura 39 – Algumas configurações obtidas usando o MOVPS para o problema do projeto de uma garra robótica.

(objetivo f_2). Nesta figura, assim como comentado anteriormente, observa-se que as dimensões a , b e l são, praticamente, valores constantes próximos aos seus valores limites permitidos. Esses são próximos daqueles reportados considerando o NSGA². Já as variáveis f e δ são, praticamente constantes, mas com valores distantes daqueles reportados considerando o NSGA². A variável e é aquela que apresenta a maior discrepância em relação ao NSGA². Por fim, o parâmetro c varia linearmente com o segundo objetivo. Esse comportamento é muito semelhante ao obtido considerando o NSGA². Conforme mencionado por [Datta e Deb \(2011\)](#), para uma taxa de transmissão de força maior, a dimensão c deve assumir maiores valores, e vice-versa. Isso pode ser explicado pelo fato de que para um grande comprimento do link c , a força experimentada na

ponta será pequena, o que na prática aumenta o valor de f_2 .

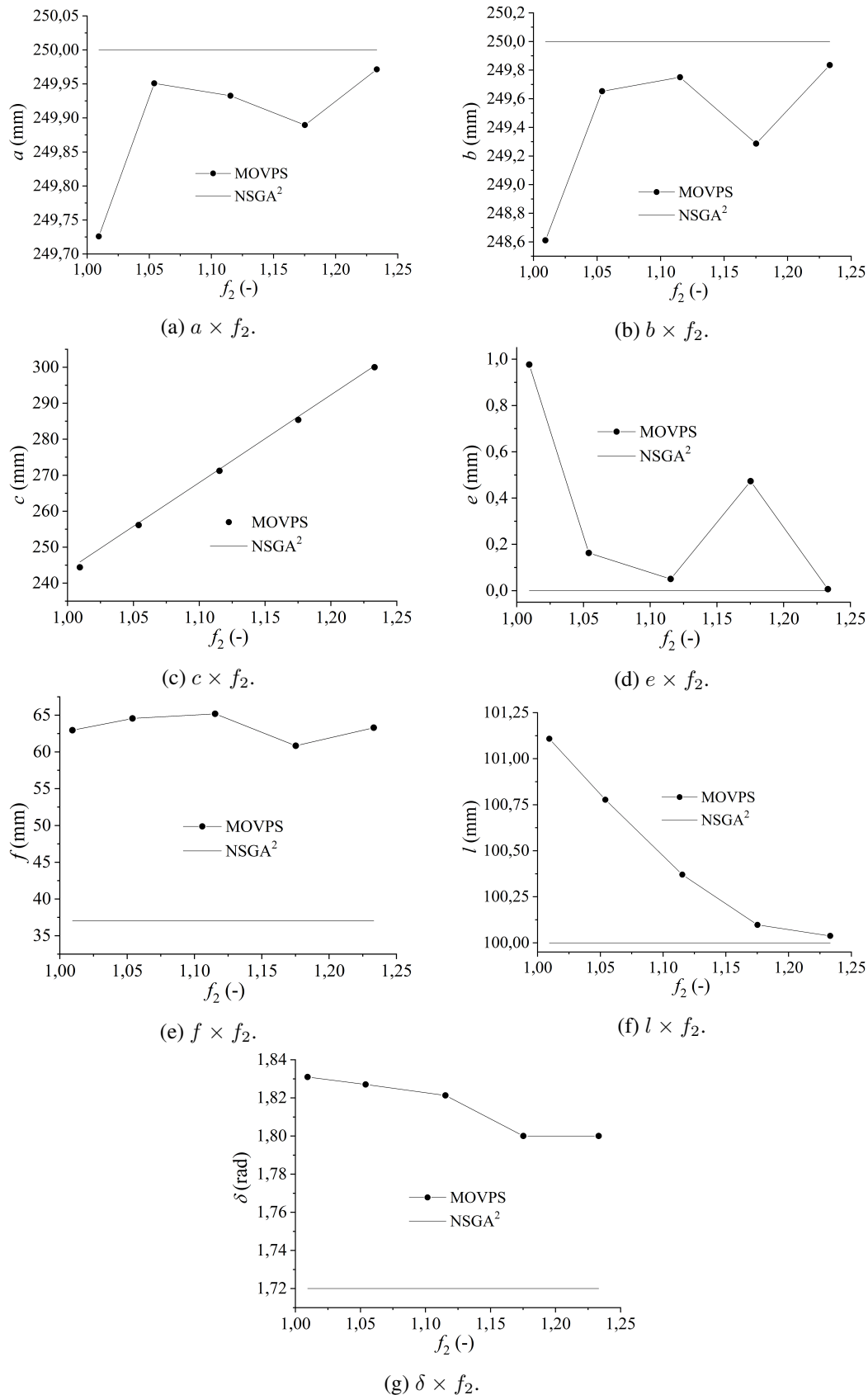


Figura 40 – Comparação entre as variáveis de projeto obtidas pelo MOVPS e NSGA-II para o problema da garra robótica.

Em resumo, enfatiza-se que a diferença entre as curvas de Pareto apresentadas pode ser explicada pelos valores obtidos para determinadas variáveis de projeto (aquelas que não são constantes nos resultados relatados por [Datta e Deb \(2011\)](#)).

6.2.7 ABSORVEDOR DINÂMICO DE VIBRAÇÃO

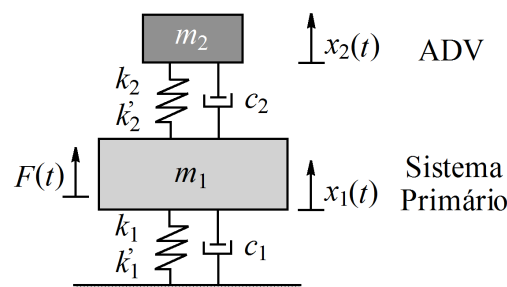
Um Absorvedor Dinâmico de Vibração (ADV) é um dispositivo mecânico do tipo massa-mola-amortecedor conectado à estrutura na qual se deseja atenuar vibrações indesejadas. Sua atuação consiste na absorção parcial ou total da energia vibratória do sistema no ponto de acoplamento, levando assim a uma redução do nível de vibração do mesmo ([BORGES, 2008](#)). Uma das grandes vantagens no estudo de um absorvedor não linear está relacionada à banda de supressão, que é ampliada em relação à versão linear ([LOBATO; BORGES; STEFFEN Jr, 2015](#)).

Para fins de aplicação do MOVPS ao projeto de um ADV não linear são considerados os seguintes objetivos: minimização da amplitude de vibração e maximização da banda de supressão. A seguir é apresentada uma breve descrição do modelo matemático que representa o fenômeno em questão.

6.2.7.1 MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA

A representação esquemática de um ADV não linear com dois graus de liberdade é apresentada na Fig. 41. O sistema é constituído por uma massa principal ligada a um ponto fixo estacionário (base), além de uma massa secundária conectada ao sistema primário. Ambas as conexões são realizadas através de uma mola com características não lineares e de um amortecedor.

Figura 41 – Representação esquemática de um absorvedor dinâmico de vibração com dois graus de liberdade. Adaptado de [Borges \(2008\)](#).



Nesta figura, x_1 se refere ao deslocamento da massa principal (m_1) com relação à base e x_2 se refere ao deslocamento da massa secundária (m_2 - absorvedor) com relação a m_1 . Os amortecedores são lineares com coeficientes c_i , enquanto k_i e k'_i representam, respectivamente, os coeficientes linear e não linear das molas ($i = 1, 2$). A massa principal está sujeita a uma força externa do tipo harmônica dada por:

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (6.31)$$

onde F_0 é a amplitude da força e ω é a frequência de excitação.

As forças restauradoras devido à presença das molas são dadas por:

$$r_i(x_i) = k_i x_i + k'_i x_i^3, \quad i = 1, 2 \quad (6.32)$$

Aplicando a Segunda Lei de Newton, as equações do movimento do sistema não linear são dadas como (LOBATO; BORGES; STEFFEN Jr, 2015):

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 = F_0 \cos(\omega t) - k'_1x_1^3 \\ m_2\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_2x_2 = -k'_2x_2^3 \end{cases} \quad (6.33)$$

Para a obtenção das equações do movimento do sistema dinâmico em questão na forma adimensional, o deslocamento e o tempo são normalizados de acordo com as Eqs. (6.34a) e (6.34b):

$$y_i = \frac{x_i}{x_c}, \quad i = 1, 2 \quad (6.34a)$$

$$\tau = \omega t \quad (6.34b)$$

em que $x_c = F_0/k_1$. Além disso, os seguintes parâmetros são introduzidos (BORGES, 2008):

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_i^2 &= \frac{k_i}{m_i}, \quad \omega_i = \frac{\bar{\omega}_i}{\omega}, \quad \zeta_i = \frac{c_i}{2\sqrt{k_i m_i}}, \quad \delta_i = 2\zeta_i \omega_i, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1}, \\ \varepsilon_i &= \frac{k'_i x_c^2}{m_i \omega^2}, \quad \rho = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad P = \frac{F_0}{m_1 \bar{\omega}_1^2 x_c}, \quad \beta = \frac{P}{\omega_1^2}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\bar{\omega}_1} \end{aligned} \quad (6.35)$$

onde $\bar{\omega}_i$ é a frequência natural e ω_i é a frequência adimensionalizada, com $i \in \{1, 2\}$.

Com isso, após manipulações algébricas, as equações do movimento normalizadas podem ser escritas na forma matricial como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{y}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (6.36)$$

onde as matrizes de massa (\mathbf{M}), amortecimento (\mathbf{C}) e rigidez (\mathbf{K}) são dadas por:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 + \mu & \mu \\ \mu & \mu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \mu\delta_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \mu\omega_2^2 \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

e os vetores de deslocamento (\mathbf{y}) e força (\mathbf{F}) são expressos como:

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} P \cos \tau - \varepsilon_1 y_1^3 \\ -\mu \varepsilon_2 y_2^3 \end{Bmatrix} \quad (6.38)$$

Para a obtenção da resposta em regime permanente, Borges (2008) utilizou o método de Krylov-Bogoliubov para a resolução do sistema não linear representado pela Eq. (6.36), além da

transformação de variáveis segundo as Eqs. (6.39a) e (6.39b), chamada *Transformação de Van der Pol*:

$$\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{u}(\tau) \cos(\tau) + \mathbf{v}(\tau) \sin(\tau) \quad (6.39a)$$

$$\dot{\mathbf{y}}(\tau) = -\mathbf{u}(\tau) \sin(\tau) + \mathbf{v}(\tau) \cos(\tau) \quad (6.39b)$$

onde a dependência do tempo com relação a $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ é considerada pequena.

Através das manipulações matemáticas descritas em [Borges \(2008\)](#), o sistema algébrico não linear resultante, composto de quatro equações nas variáveis u_1, u_2, v_1, v_2 , é dado por:

$$\begin{cases} (1 + \mu - \omega_1^2)u_1 + \mu u_2 - 2\zeta_1\omega_1 v_1 - \frac{3}{4}\varepsilon_1 u_1(u_1^2 + v_1^2) + P = 0 \\ \mu u_1 + (\mu - \mu\rho^2\omega_1^2)u_2 - \mu(2\zeta_2\rho\omega_1^2 v_2 + \frac{3}{4}\varepsilon_2 u_2(u_2^2 + v_2^2)) = 0 \\ (\omega_1^2 - 1 - \mu)v_1 - \mu v_2 - 2\zeta_1\omega_1 u_1 + \frac{3}{4}\varepsilon_1 v_1(u_1^2 + v_1^2) = 0 \\ -\mu v_1 + (\mu\rho^2\omega_1^2 - \mu)v_2 - \mu(2\zeta_2\rho\omega_1^2 u_2 - \frac{3}{4}\varepsilon_2 v_2(u_2^2 + v_2^2)) = 0 \end{cases} \quad (6.40)$$

Finalmente, as amplitudes de vibração do sistema não linear podem ser computadas a partir das relações $\sqrt{u_1^2 + v_1^2}$ para a massa principal e $\sqrt{u_2^2 + v_2^2}$ para o absorvedor.

6.2.7.2 PERFIL DA AMPLITUDE VERSUS FREQUÊNCIA

A partir da análise de sensibilidade apresentada por [Borges \(2008\)](#), pode-se concluir que os parâmetros relacionados com os coeficientes de amortecimento (ζ_1 e ζ_2) e com o coeficiente não linear da mola que liga o sistema primário à base (ε_1) não interferem significativamente na avaliação da banda de supressão. Assim, fundamentado nesta análise são definidas as variáveis de projeto desta aplicação, a saber, $\varepsilon_2, \beta, \mu$ e ρ , que, efetivamente, influenciam o pico de ressonância e a banda de supressão para o projeto ótimo.

Dentre as simulações realizadas por [Lobato, Borges e Steffen Jr \(2015\)](#), considera-se o perfil típico da frequência versus amplitude de deslocamento para um ADV não linear apresentado na Fig. 42. Neste caso, os parâmetros utilizados foram $\rho = 1; \mu = 0,05; \beta = 0,1; \varepsilon_1 = 0; \varepsilon_2 = 0,01; \zeta_1 = 0,01; \zeta_2 = 0,01$ e $0,7 \leq \Omega \leq 1,3$ (para 300 pontos igualmente espaçados nesta faixa). Para fins de comparação, também é apresentado o perfil para a amplitude considerando o ADV linear, cujo modelo matemático pode ser encontrado em [Borges \(2008\)](#). É importante ressaltar que, para cada valor de Ω , um sistema linear (ou não linear) deve ser resolvido. Para essa finalidade foram empregados os Métodos da Decomposição LU e de Newton para a avaliação dos sistemas lineares e não lineares, respectivamente.

Nesta figura é possível observar que, devido à presença do absorvedor, o sistema primário (no caso do ADV linear), apresenta duas frequências naturais, de modo que sua amplitude se anula quando a frequência da massa principal equivale à frequência de excitação externa. Por outro lado, observa-se que, para a configuração de parâmetros estabelecida, na resposta do sistema não linear surge uma região de instabilidade na faixa de frequência de 0,91 a 0,94. Apesar disso,

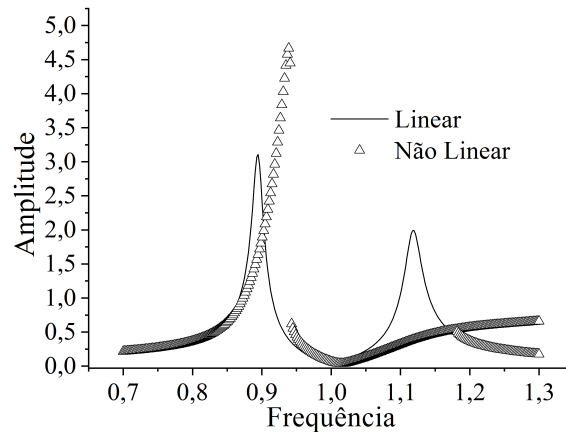


Figura 42 – Frequência versus amplitude de deslocamento para um absorvedor dinâmico de vibração linear e não linear considerando $\rho = 1$; $\mu = 0,05$; $\beta = 0,1$; $\varepsilon_1 = 0$; $\varepsilon_2 = 0,01$; $\zeta_1 = 0,01$; $\zeta_2 = 0,01$.

neste caso, uma expressiva atenuação da amplitude de vibração do sistema primário é alcançada para $\Omega > 1$ em comparação com o ADV linear, com a ausência de um segundo pico de amplitude no perfil não linear e o surgimento de uma incerteza em uma frequência próxima de 1,18; onde se inicia uma bifurcação na resposta do sistema.

6.2.7.3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVO

O problema de otimização multi-objetivo proposto por [Borges \(2008\)](#) consiste na minimização da amplitude (f_1) e na maximização da banda de supressão (f_2 , neste caso tratado como a minimização de $-f_2$), conforme ilustrado na Fig. 43.

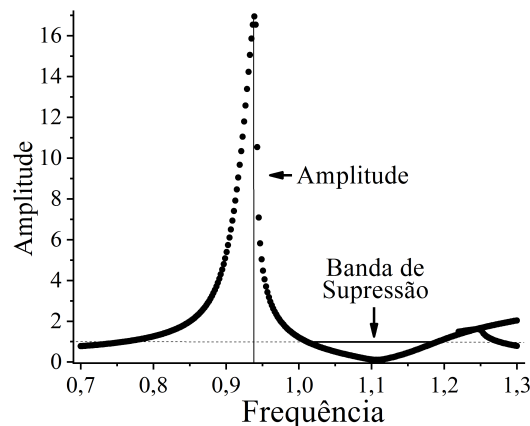


Figura 43 – Representação esquemática dos objetivos no problema do absorvedor dinâmico de vibração.

A banda de supressão (objetivo f_2) é definida como a região do espectro para a qual o deslocamento estático adimensional é igual ou inferior à unidade ([RICE; MCCRAITH, 1987](#)), como ilustrado na Fig. 43. Para que a avaliação deste objetivo seja possível é necessário que, para o primeiro valor da frequência Ω definido, a amplitude seja igual a unidade. Neste caso, após a obtenção do perfil da amplitude e verificação desta condição, determina-se o valor indicado

para a correção. Se o primeiro valor for menor do que um, tem-se um deslocamento *positivo* de todo o perfil de amplitude até que ele seja igual a unidade. Por outro lado, se for maior do que um, tem-se um deslocamento *negativo* de todo o perfil de amplitude. Tal estratégia tem por objetivo padronizar o cálculo da banda de supressão, conforme sugerido e desenvolvido por [Borges \(2008\)](#). Ressalta-se que é possível, para o modelo não linear, que exista um salto entre os valores de amplitude logo após o pico ser encontrado, como ilustrado na Fig. 42. Neste caso, o limite inferior (e que define o ponto de partida para computar a largura da banda de supressão) é calculado como sendo a frequência de excitação cujo valor de amplitude está mais próximo da unidade (inferior). Já o limite superior é calculado como sendo a frequência de excitação em que a amplitude é igual a unidade (e esta deve ser superior àquela determinada como ponto de partida para computar a banda de supressão). É justamente a diferença entre estes dois pontos que define a largura da banda de supressão.

Para a determinação da curva de Pareto consideram-se as seguintes variáveis de projeto: $0,9 \leq \rho \leq 1,1$; $0,045 \leq \mu \leq 0,055$; $0,09 \leq \beta \leq 0,11$; $0,009 \leq \varepsilon_2 \leq 0,011$. Cabe destacar que estas são baseadas nas análises de sensibilidade realizadas por [Borges \(2008\)](#). Também são considerados os seguintes parâmetros fixos: $\varepsilon_1 = 0,0001$; $\zeta_1 = 0,01$; $\zeta_2 = 0,01$; além da faixa de frequência analisada como sendo de $0,7 \leq \Omega \leq 1,3$. Para a resolução deste estudo de caso foram considerados os algoritmos NSGA-II, MODE, MOPSO e MOVPS. Neste caso, em todos os algoritmos o número total de avaliações da função objetivo foi equivalente a $50+50 \times 100$ (50 indivíduos e 100 gerações) e os parâmetros específicos do MOVPS empregados são aqueles indicados na Seção 6.2.

A Figura 44 apresenta a curva de Pareto para o problema do projeto de um absorvedor dinâmico de vibração não linear considerando diferentes estratégias de otimização. Além disso, são apresentados os resultados com a correção sugerida por [Borges \(2008\)](#) (Fig. 44(a)) e sem a correção (Fig. 44(b)).

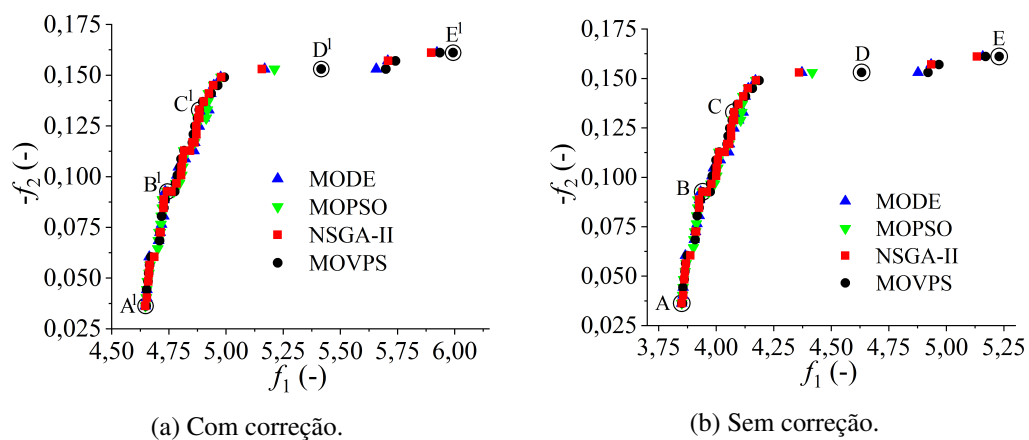


Figura 44 – Curva de Pareto para o problema do projeto de um absorvedor dinâmico de vibração considerando diferentes estratégias de otimização.

Neste caso, ambas as curvas têm o mesmo formato, as quais se diferenciam unicamente

pela correção no valor de f_1 . Os perfis encontrados pelo MOVPS são condizentes com aqueles obtidos considerando outras estratégias de otimização. Pelo formato da curva de Pareto, verifica-se que os objetivos concorrem entre si de forma que a redução da amplitude máxima (f_1) leva a uma menor largura da banda de supressão (f_2). Na Figura 44b, A e E representam pontos extremos que favorecem um único objetivo, pois, dentre os pontos obtidos, o primeiro possui o menor valor em relação ao pico de amplitude, enquanto o segundo possui a maior banda de supressão. O ponto C representa um bom compromisso entre os objetivos, enquanto os pontos B e D tendem a priorizar um objetivo ou outro, sendo f_1 e f_2 as respectivas preferências. Do ponto de vista matemático, ressalta-se que todos os pontos pertencentes à solução encontrada são igualmente importantes. Também é possível constatar que pequenas variações na amplitude máxima nas proximidades de 4 ($f_1=4$) podem alterar significativamente a largura da banda de supressão.

Para avaliar a diferença entre os perfis com e sem correção, na Fig. 45 são apresentadas as amplitudes calculadas a partir dos pontos A^1 (com correção) e A (sem correção), conforme a Fig. 44 e a Tab. 40, onde são apresentados alguns pontos da curva de Pareto obtidos pelo algoritmo MOVPS para o problema do projeto de um absorvedor dinâmico de vibração.

Figura 45 – Amplitude versus frequência considerando os pontos A e A^1 (ver a Fig. 44) do problema do absorvedor dinâmico de vibração.

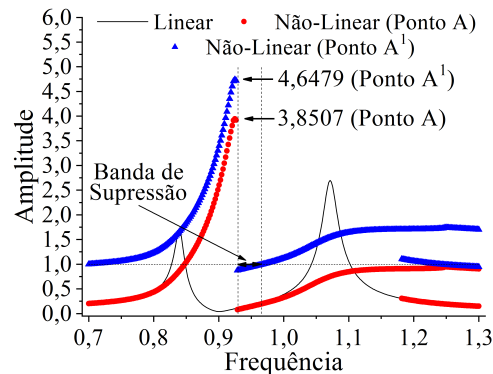


Tabela 40 – Alguns pontos da curva de Pareto obtidos pelo algoritmo MOVPS para o problema do projeto de um absorvedor dinâmico de vibração.

	A^1	A	B^1	B	C^1	C	D^1	D	E^1	E
ρ (-)	0,9000		0,9715		1,0794		1,1000		1,1000	
μ (-)	0,0536		0,0550		0,0550		0,0550		0,0544	
β (-)	0,0900		0,0900		0,0900		0,1001		0,1100	
ϵ_2 (-)	0,0090		0,0090		0,0091		0,0097		0,0110	
f'_1 (-)	4,6479	-	4,7437	-	4,8829	-	5,4165	-	5,9933	-
f_1 (-)	-	3,8507	-	3,9418	-	4,0769	-	4,6320	-	5,2297
$-f_2$ (-)	0,0362		0,0926		0,1328		0,1530		0,1610	

Na Figura 45 é possível observar a diferença entre os perfis com e sem correção, isto é, no ponto A^1 (com correção) a amplitude, na frequência de excitação igual a 0,7, é igual a

unidade, diferentemente da amplitude sem correção (ponto A), que se inicializa em 0,2027. Neste caso, a diferença entre as amplitudes para cada um dos pontos é igual a 0,7973. Assim, com relação ao ponto A, a curva de A^1 é deslocada considerando um acréscimo de 0,7973 de modo que a mesma se inicie com valor unitário, conforme apresentado na Fig. 45. Como consequência deste acréscimo, as amplitudes máximas em cada um destes pontos são diferentes. Para o ponto A^1 é igual a 4,6479 e para o ponto A é igual a 3,8507. Como esperado, a diferença entre estes picos influencia o valor do objetivo f_1 , conforme apresentado na Tab. 40 para os pontos da curva de Pareto destacados. Por este motivo, também são apresentados os valores sem a correção. Ainda nesta figura observa-se a banda de supressão, computada em relação a curva com correção (Ponto A^1). É importante enfatizar que a referida correção é necessária para padronizar e facilitar o cálculo desta grandeza, como sugerido por Borges (2008).

Na Tabela 40 é possível observar que a diferença entre os pontos está justamente na correção realizada na função objetivo que caracteriza a amplitude, isto é, em f'_1 e f_1 . Os valores referentes às amplitudes máximas sempre foram superiores considerando a correção. Entretanto, as variáveis de projeto e a função objetivo f_2 não são afetadas e por este motivo elas são idênticas nas duas situações.

A Figura 46 apresenta um comparativo entre as variáveis de projeto obtidas considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de um absorvedor dinâmico de vibração. Nesta figura é possível observar comportamentos semelhantes entre as soluções obtidas pelo MOVPS em relação aos demais algoritmos considerados. De acordo com as Figs. 46a e 46b, verifica-se que quanto menor o parâmetro ρ (que relaciona as frequências do absorvedor e da massa principal), menores são os valores da amplitude máxima e da largura da banda de supressão. O parâmetro μ , que relaciona as massas do sistema, se distribui entre valores mais próximos do limite superior para bons valores de f_1 e de f_2 (Figs. 46c e 46d). O valor de 0,09 pode ser considerado como ótimo para o parâmetro β (relacionado à excitação externa), uma vez que ele caracteriza a maior parte das soluções encontradas, fornecendo bons valores para f_2 (Fig. 46e) e, principalmente, para f_1 (Fig. 46f). E em relação ao parâmetro ε_2 (relativo à não linearidade do sistema), predominam as soluções com os valores na faixa de 0,009 a 0,01 e, de modo especial, no limite mínimo para o favorecimento da minimização do pico de ressonância; quanto à maximização da banda de supressão, o valor de 0,009 para este parâmetro é de certa forma desfavorável, sendo melhor neste caso as soluções cujos valores de ε_2 são mais próximos de 0,0096.

A Figura 47 apresenta os perfis de amplitude versus frequência considerando alguns pontos obtidos pelo MOVPS (ver a Tab. 40) para o problema do projeto de um absorvedor dinâmico de vibração não linear. Nesta figura é possível observar que os perfis obtidos estão em concordância com aquele apresentado na Fig. 42, guardando apenas algumas diferenças entre si. Primeiramente, verifica-se que o valor da amplitude máxima aumenta da Fig. 47a à Fig. 47e, confirmando os resultados apresentados na Fig. 44 e na Tab. 40. A largura da banda de supressão

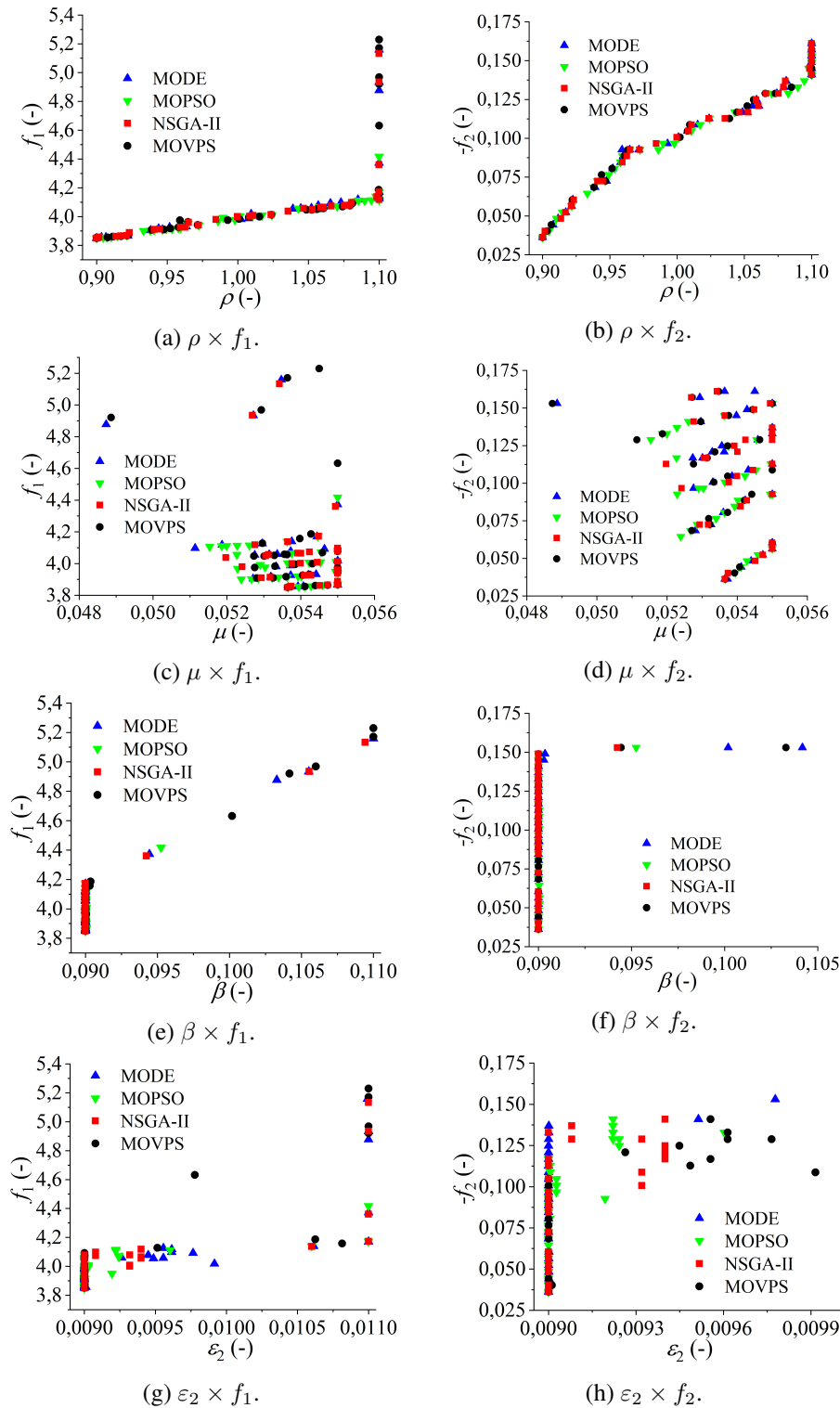


Figura 46 – Comparação entre as variáveis de projeto obtidas considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do projeto de um absorvedor dinâmico de vibração.

aumenta no mesmo sentido, o que pode ser percebido em virtude do fato de que o perfil, após o pico de ressonância, apresenta um comportamento cada vez mais suave para a variação da amplitude a partir do ponto A em direção ao ponto E. Finalmente, para os pontos A e B nota-se que as incertezas devido às não linearidades surgem a partir de frequências entre 1,1 e 1,15;

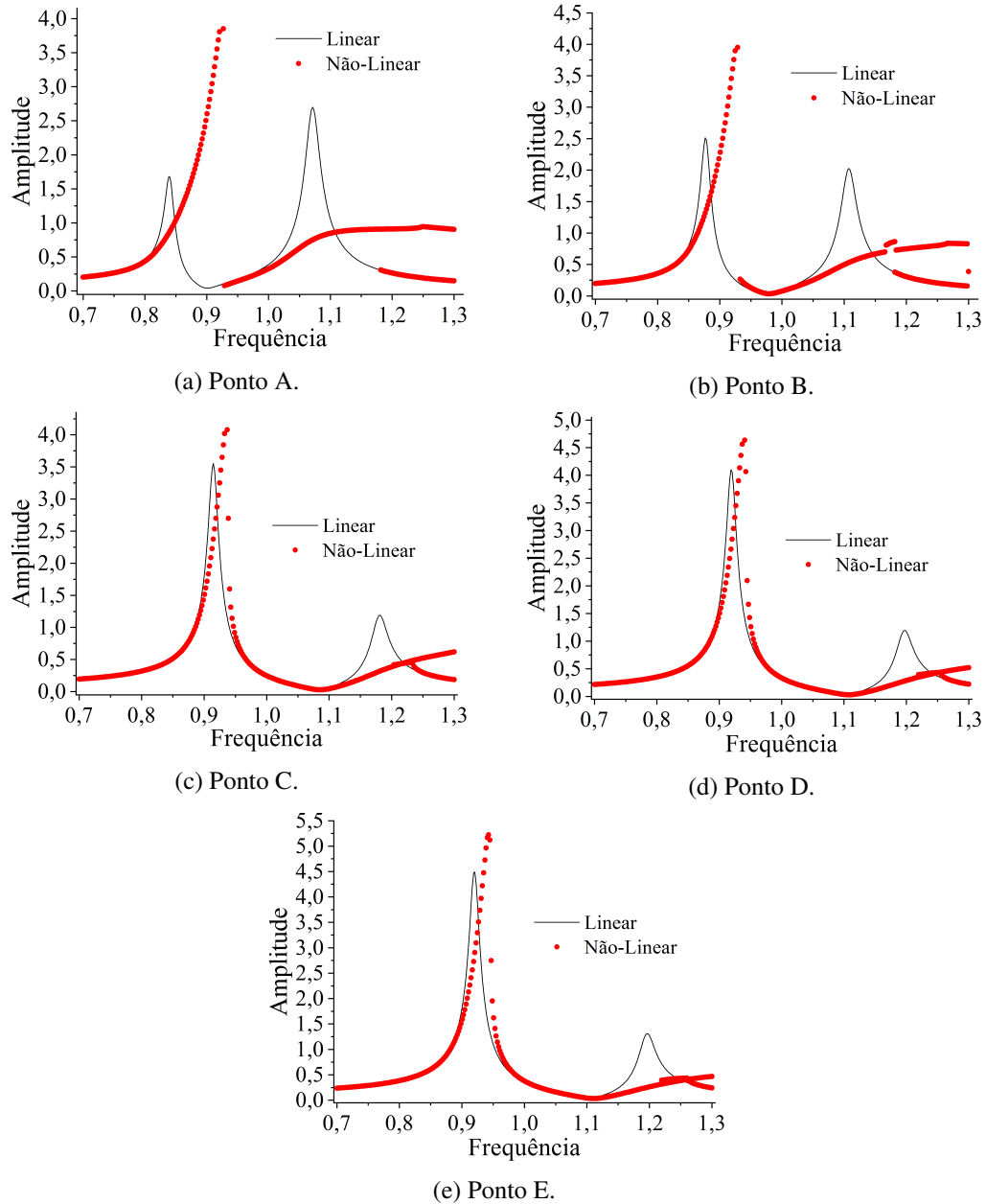


Figura 47 – Amplitude versus frequência considerando alguns pontos obtidos pelo MOVPS para o problema do projeto de um absorvedor dinâmico de vibração.

enquanto que para os demais pontos tais indeterminações na resposta do sistema caracterizadas pela bifurcação presente no perfil da amplitude são identificadas para frequências maiores que 1,2.

6.2.8 MISTURA ÓTIMA DE CATALISADORES

Considere um reator de fluxo contínuo com comprimento fixo em que se deseja obter a mistura ótima entre dois catalisadores C_A e C_B em uma série de reações reversíveis e reações irreversíveis ($S_1 \rightleftharpoons S_2 \rightarrow S_3$) operando em estado estacionário (LOGSDON, 1990; LOGIST et al., 2012; SOUZA; LOBATO; GEDRAITE, 2015). Matematicamente, este processo é descrito

pelos seguintes balanços de massa (na forma adimensional):

$$\frac{dx_1}{dz} = u(10x_2 - x_1), \quad x_1(0) = 1 \quad (6.41a)$$

$$\frac{dx_2}{dz} = u(x_1 - 10x_2) - (1 - u)x_2, \quad x_2(0) = 0 \quad (6.41b)$$

onde z representa o comprimento do reator ($0 \leq z \leq 1$); x_1 e x_2 são as concentrações das espécies S_1 e S_2 , respectivamente; u é a fração do catalisador mais caro C_A ($0 \leq u \leq 1$) presente na mistura.

Neste trabalho consideram-se a maximização da produção da espécie S_3 , isto é, $1 - x_1 - x_2$ em z igual a unidade (que pode ser convertido em um problema de minimização) e a minimização da quantidade do catalisador C_A utilizado ao longo do comprimento do reator. Matematicamente, estes objetivos são definidos como:

$$\min f_1 = -(1 - x_1 - x_2) \quad (6.42a)$$

$$\min f_2 = \int_0^1 u dz \quad (6.42b)$$

Do ponto de vista matemático, esta aplicação representa um problema de controle ótimo devido à presença da variável de controle u . Assim, resolver este problema consiste na determinação do perfil de controle ao longo do comprimento para que os objetivos sejam minimizados. Este perfil é uma função que pode, a priori, assumir diferentes formatos. Conforme apresentado por [Logsdon \(1990\)](#), a solução ótima para este estudo de caso consiste de três fases em que a variável de controle é constante em cada uma. Assim, o problema original pode ser convertido em um equivalente definido como:

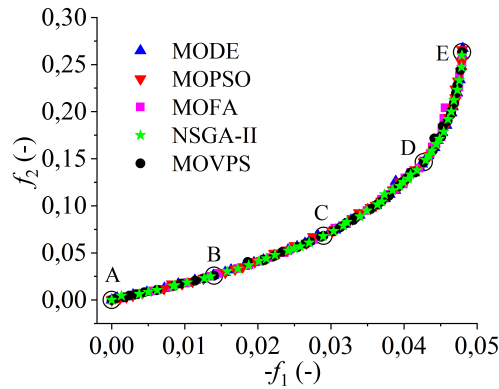
$$u = \begin{cases} u_1, & 0 \leq z \leq z_{s1} \\ u_2, & z_{s1} < z \leq z_{s2} \\ u_3, & z_{s2} < z \leq 1 \end{cases} \quad (6.43)$$

em que u_i ($i = 1, 2, 3$) representa a variável de controle discretizada para a i -ésima fase e z_{sj} ($j = 1, 2$) representa os comprimentos que dividem as fases. Em resumo, deseja-se minimizar os objetivos dados pelas Eqs. (6.42a)-(6.42b) via determinação de u_i e de z_{sj} . Para essa finalidade consideram-se as seguintes restrições: $0 \leq u_i \leq 1$ ($i = 1, 2, 3$), $0 \leq z_{s1} \leq 1$ ($j = 1, 2$) e $z_{s2} > z_{s1}$. Esta última restrição é necessária para garantir que o sistema diferencial seja integrado com valores crescentes em relação à variável independente z . Cabe destacar que para a resolução do modelo numérico foi empregado o Método de Runge-Kutta 4ª ordem (com 100 pontos de discretização igualmente espaçados).

A Figura 48 apresenta a curva de Pareto para o problema da mistura de catalisadores considerando diferentes estratégias de otimização, a saber, os algoritmos *Multiobjective Differential Evolution* - MODE, *Multiobjective Particle Swarm Optimization* - MOPSO, *Multiobjective Firefly Algorithm* - MOFA, *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm* - NSGA-II, assim como

o algoritmo proposto no presente trabalho. Em todos esses algoritmos considera-se o mesmo número de avaliações do vetor de funções objetivo ($50+50 \times 100$) e, de modo específico, para o MOVPS foram utilizados os parâmetros definidos no início da Seção 6.2.

Figura 48 – Curva de Pareto para o problema da mistura de catalisadores considerando diferentes estratégias de otimização.



Nesta figura verifica-se que o conjunto de pontos não-dominados obtido pelo MOVPS é condizente com aqueles encontrados considerando outros métodos de otimização. Além disso, o formato da curva de Pareto se diferencia de casos anteriores devido à presença da maximização de f_1 . A partir da solução encontrada, confirma-se que a maximização de S_3 e a minimização da quantidade de catalisador são objetivos conflitantes entre si, isto é, menores quantidades de catalisador implicam em menores concentrações de produto S_3 , e vice-versa.

Na Tabela 41 são apresentados os pontos destacados na Fig. 48. Ao se analisar o ponto A, percebe-se que o mesmo representa uma condição física do processo que pode acontecer, todavia não é desejada visto que neste caso como não se tem catalisador, não se tem reação química. Para os demais pontos observa-se que, em todos eles, a fração do catalisador C_A deve ser máxima na primeira fase e mínima na última, enquanto na segunda verifica-se uma variação crescente de u na faixa de 0 a 26,2% caminhando do ponto B ao ponto E. Neste caso, o comprimento da primeira e segunda fases, z_{s1} e $z_{s2} - z_{s1}$ respectivamente, também sofrem aumentos na mesma direção, sendo a primeira consideravelmente menor que a segunda.

Tabela 41 – Alguns pontos da curva de Pareto obtidos pelo algoritmo MOVPS para o problema da mistura de catalisadores.

	A	B	C	D	E
z_{s1} (-)	0,410	0,026	0,058	0,099	0,124
z_{s2} (-)	0,412	0,233	0,473	0,574	0,657
u_1 (-)	0,000	1,000	1,000	1,000	1,000
u_2 (-)	0,476	0,000	0,016	0,102	0,262
u_3 (-)	0,000	0,000	0,001	0,001	0,012
$-f_1$ (-)	0,000	0,014	0,029	0,042	0,048
f_2 (-)	0,000	0,025	0,068	0,146	0,263

Em relação aos objetivos, os pontos A e E representam soluções extremas que priorizam os objetivos individualmente. O ponto C é aquele que apresenta um bom compromisso entre os dois objetivos, enquanto B e D apresentam tendências de favorecer moderadamente a minimização da quantidade do catalisador C_A e a maximização da produção de S_3 , respectivamente.

A Figura 49 apresenta os perfis de concentração e controle ótimo considerando os pontos apresentados na Tab. 41. Nesta figura pode ser constatado que o ponto A, conforme mencionado anteriormente, representa uma condição em que não há reação, uma vez que a fração do catalisador C_A é zero ao longo de todo o reator (Fig. 49d), a concentração da espécie S_1 é máxima (Fig. 49a) e não há produção das espécies S_2 e S_3 (Figs. 49b e 49c). O ponto E representa a condição em que há uma priorização exclusiva do objetivo de maximização da obtenção do produto final (S_3), isto é, da reação química no sentido direto. Neste caso, a espécie S_1 tem sua concentração reduzida, a espécie S_2 é formada principalmente na primeira fase, havendo um decréscimo de sua concentração na fase final, enquanto a espécie S_3 é produzida nas duas últimas fases, seguindo o perfil de controle ótimo de máxima fração no comprimento inicial, mínima fração no final e maior comprimento do estágio intermediário com 26,2% de u .

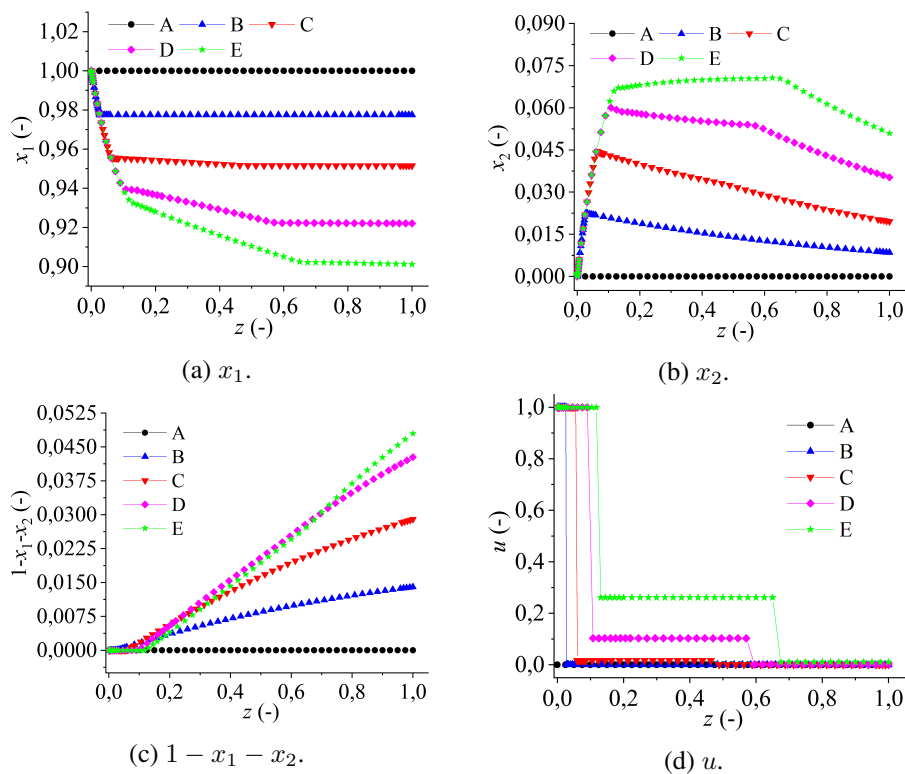


Figura 49 – Perfis de concentração e controle ótimo para o problema da mistura de catalisadores.

Quanto aos demais pontos (B, C e D), o aumento da concentração de S_3 na segunda e terceira fases apresenta concentrações intermediárias entre os níveis dos pontos A e E, sendo bastante próximo o perfil de concentração de S_3 ($1 - x_1 - x_2$) de D em relação a E (Fig. 49c). Também nestas fases, os níveis da concentração x_1 permanecem quase constantes para as soluções B e C após a redução na primeira fase, sendo que a solução D apresenta um decaimento

de x_1 ainda na segunda fase (Fig. 49a). Em relação à espécie S_2 , após o aumento da concentração, observa-se a redução de x_2 a partir da segunda fase, diferentemente do que se verifica para o ponto E (Fig. 49b). Em relação ao controle ótimo, os pontos B, C e D apresentam perfis que seguem aquele referente ao ponto E, porém com a segunda fase apresentando comprimentos pouco menores e com inícios anteriores, além de menores valores de u (Fig. 49d).

O comparativo entre as variáveis de projeto obtidas considerando diferentes estratégias de otimização para o problema da mistura de catalisadores é apresentado na Fig. 50. Em todos os gráficos é possível observar que o comportamento das variáveis de projeto com relação aos objetivos seguiu a mesma tendência verificada para os outros algoritmos, isto é, a solução obtida pelo MOVPS é condizente com aquelas obtidas por outros métodos de otimização. Nas Figuras 50a e 50b é possível notar que os valores de z_{s1} tendem para a faixa $[0,1; 0,2]$. A variável z_{s2} , por sua vez, apresenta uma maior dispersão, conforme as Figs. 50c e 50d. Porém, pontos com z_{s2} na faixa de $[0,4; 0,6]$ favorecem a maximização da produção de S_3 ($-f_1$) e desfavorecem a minimização da quantidade de catalisador C_A (f_2). Em relação à variável de controle u , constata-se que a tendência geral é de que u_1 se aproxima cada vez mais dos maiores valores que pode assumir, isto é, a mistura com maior quantidade do catalisador C_A na primeira fase favorece ambos os objetivos. Na segunda fase, as soluções em que u_2 tende para 0,2 fornecem melhores resultados de $-f_1$ mas prejudicam a minimização de f_2 , sendo verificado que para a maior parte dos indivíduos da população esta variável se concentra na faixa de 0 a 0,2. Na terceira fase a tendência natural observada é de u_3 assumindo valores cada vez mais próximos de zero em favor de ambos os objetivos.

6.2.9 SECADOR ROTATIVO

Esta aplicação considera o projeto de um secador rotativo (ver a Fig. 51), cuja modelagem matemática foi desenvolvida por Arruda (2008) para fins de determinação dos perfis de temperatura e umidade do sólido e do ar de secagem.

Com as hipóteses utilizadas por Arruda (2008), o modelo proposto para previsão dos perfis de umidade do sólido (M) e do ar (W), bem como a temperatura do sólido (T_s) e do ar (T_f) de secagem no interior do secador rotativo operando em contracorrente é composto pelo seguinte sistema de equações (adimensionalizado com relação a coordenada espacial):

$$\frac{dW}{dz} = -\frac{R_w H}{G_f}, \quad W(1) = W_o \quad (6.44a)$$

$$\frac{dM}{dz} = -\frac{R_w H}{G_s}, \quad M(0) = M_o \quad (6.44b)$$

$$\frac{dT_f}{dz} = \frac{(U_a V(T_f - T_s) + R_w H(\lambda + C_{p_v} T_f) + U_P \pi D L(T_f - T_{amb}))}{G_f(C_{p_f} + W C_{p_v})}, \quad T_f(1) = T_{f_o} \quad (6.44c)$$

$$\frac{dT_s}{dz} = \frac{(U_a V(T_f - T_s) + R_w H C_{p_l} T_s - R_w H(\lambda + C_{p_v}(T_f - T_s)))}{G_s(C_{p_s} + M C_{p_l})}, \quad T_s(0) = T_{s_o} \quad (6.44d)$$

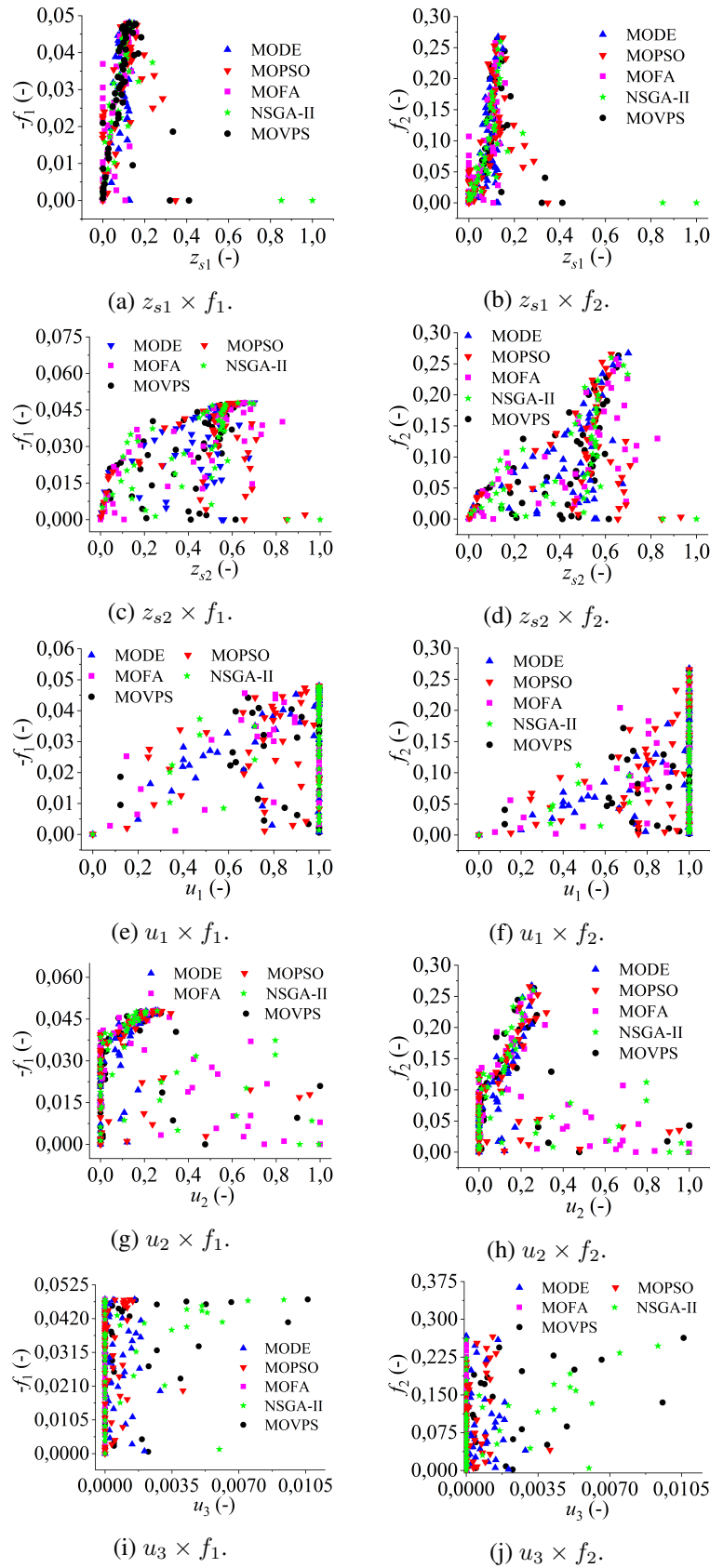


Figura 50 – Comparação entre as variáveis de projeto obtidas considerando diferentes estratégias de otimização para o problema da mistura de catalisadores.

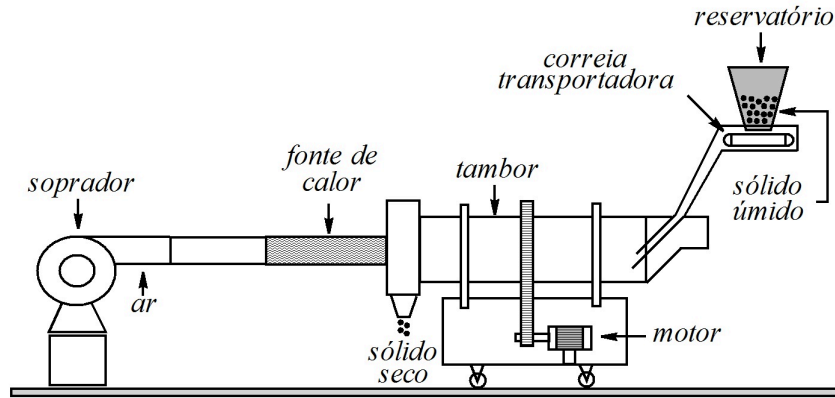


Figura 51 – Representação esquemática do secador rotativo. Adaptado de [Arruda \(2008\)](#).

onde C_p é o calor específico ($\text{kJ}/(\text{kg}^\circ\text{C})$), D é o diâmetro interno do tambor (m), G é a vazão mássica (kg/s), H é a carga total do secador (kg), L é o comprimento total do tambor (m), M é a umidade do sólido (kg/kg), R_w é a taxa de secagem (s^{-1}), T é a temperatura ($^\circ\text{C}$), T_{amb} é a temperatura ambiente ($^\circ\text{C}$), U_a é o coeficiente de transferência volumétrica ($\text{kJ}/(\text{m}^3\text{s}^\circ\text{C})$), U_P é o coeficiente de calor perdido ($\text{kJ}/(\text{m}^3\text{s}^\circ\text{C})$), V é o volume do tambor (m^3), W é a umidade absoluta do ar (kg/kg), z é a coordenada cartesiana, λ é o calor latente de vaporização da água (kJ/kg) e os subscritos são: f para fluido, s para sólido, l para líquido e v para vapor. Finalmente, T_{fo} , T_{so} , W_o e M_o representam as condições de contorno para as variáveis dependentes T_f , T_s , W e M , respectivamente.

A taxa de secagem local é dada por:

$$-R_w = \frac{(MR - 1)(M_o - M_{eq})}{t} \quad (6.45)$$

onde t relaciona o comprimento do secador z e a velocidade do sólido (v_s):

$$t = \frac{z}{v_s} = \frac{\tau z}{L} \quad (6.46)$$

onde τ é o tempo de residência do sólido no secador.

Já a umidade adimensional MR é dada pela equação de Page ([PAGE, 1949](#)):

$$MR = \exp\left(-C_1 \exp\left(\frac{-C_2}{T_f}\right) t^{C_3}\right), \quad 0 \leq t \leq \tau \quad (6.47)$$

em que C_1 , C_2 e C_3 são parâmetros do modelo.

A umidade de equilíbrio M_{eq} é dada pela equação de Halsey modificada ([OSBORN et al., 1989](#)), com parâmetros obtidos a partir dos dados experimentais para o material particulado utilizado, sendo UR a umidade relativa do ar.

$$M_{eq} = \left(\frac{-\exp(-0,0445T_s - 2,0795)}{\ln(UR)}\right)^{0,6969} \quad (6.48)$$

Os coeficientes de transferência volumétrica e de perda de calor são dados pelas seguintes equações:

$$U_a = k(G_f)^m(G_s)^n \quad (6.49a)$$

$$U_P = k_P(G_f)^{m_P} \quad (6.49b)$$

em que k , m , n , k_P e m_P são parâmetros que dependem do tipo de material a ser seco. Já as vazões G_f e G_s são dadas como:

$$G_f = \frac{v_{ar}SPMM_{ar}}{R(T_{fo} + 273,15)(1 + W_o)} \quad (6.50a)$$

$$G_s = \frac{G_{SU}}{(1 + M_o)} \quad (6.50b)$$

em que v_{ar} é a velocidade do fluido, S é a área da seção transversal do secador, P é a pressão do processo, MM_{ar} é a massa molar do ar, R é a constante dos gases ideais e G_{SU} é a vazão mássica de sólido úmido.

A carga total do secador (H) é dada por:

$$H = \frac{G_s TRz}{1 + M_o} \quad (6.51)$$

O calor latente (λ) é dado pela equação a seguir (ARRUDA, 2008):

$$\lambda = 2492,71 - 2,144T_s - 0,001577T_s^2 - 7,3353 \times 10^{-6}T_s^3 \quad (6.52)$$

Já o calor perdido (Q_p) é dado pela seguinte correlação (ARRUDA, 2008):

$$Q_P = U_P \pi DL(T_f - T_{amb}) \quad (6.53)$$

Para fins de aplicação da técnica de otimização multi-objetivo proposta, alguns pontos devem ser destacados:

- Objetivos: minimizar a umidade do sólido ao final de comprimento do secador (f_1) e minimizar o calor perdido (f_2) através da determinação da temperatura de ar em $z = 1$ (T_{fo}), da velocidade do ar (v_{ar}) e da vazão mássica de sólido úmido (G_{SU}). Matematicamente tem-se:

$$\min f_1 = M(1) \quad (6.54a)$$

$$\min f_2 = \int_0^1 Q_p dz \quad (6.54b)$$

- Espaço de Projeto (ARRUDA, 2008): $71 \text{ °C} \leq T_{fo} \leq 99 \text{ °C}$; $1,1 \text{ m/s} \leq v_{ar} \leq 3,9 \text{ m/s}$ e $0,72 \text{ kg/s} \leq G_{SU} \leq 1,28 \text{ kg/s}$;

- O material particulado utilizado no processo de secagem é o fertilizante do tipo SSP (superfosfato simples) com composição aproximada de 16 a 24% de P_2O_5 solúvel em água, 7 a 8% de ácidos livres, água e outros componentes;
- Para integrar o modelo diferencial apresentado (problema de valor no contorno) é empregado o Método da Colocação Ortogonal (com 100 pontos de discretização igualmente espaçados).

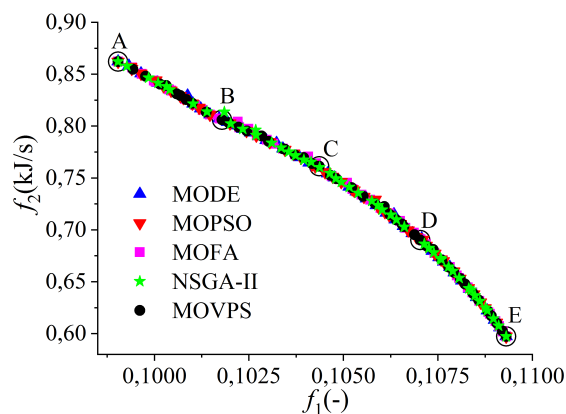
A Tabela 42 apresenta condições de operação, propriedades físico-químicas do sólido e do gás e outros parâmetros considerados no modelo.

Tabela 42 – Condições operacionais para o secador rotativo.

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
$M_o(z=0)$ (-)	0,1124	$W_o(z=1)$ (-)	0,0057	$T_s(z=0)$ (°C)	32,3
UR (-)	0,1721	τ (s)	327	Cp_s (kJ/(kg°C))	1,0258
Cp_f (kJ/(kg°C))	1	Cp_l (kJ/(kg°C))	4,1868	Cp_v (kJ/(kg°C))	1,1723
R (atm m ³ /(mol K))	$8,2 \times 10^{-5}$	P (atm)	0,91	$MMar$ (g/mol)	28,9
S (m ²)	πr^2	r (m)	0,15	L (m)	1,40
V (m ³)	LS	D (m)	$2r$	T_{amb} (°C)	35
k (-)	3,535	m (-)	0,289	n (-)	0,541
C_1 (s ⁻¹)	98,922	C_2 (°C)	368,079	C_3	-0,697
k_P (KJ/(m ² s°C))	46,373	m_P (-)	3,016		

A Figura 52 apresenta a curva de Pareto para o problema do secador rotativo considerando diferentes estratégias de otimização. Em todos os algoritmos foram consideradas 5050 avaliações da função objetivo ($50+50 \times 100$) e os parâmetros utilizados pelo MOVPS são os definidos na Seção 6.2.

Figura 52 – Curva de Pareto para o problema do secador rotativo considerando diferentes estratégias de otimização.



Nesta figura observa-se que todos os algoritmos convergiram para o mesmo formato de curva, isto é, os formatos obtidos são equivalentes. Isto demonstra que o MOVPS obteve o mesmo resultado que as outras abordagens consideradas. Além disso, o formato da curva de Pareto se aproxima de um linear, principalmente para menores valores de f_1 . Também observa-se o comportamento conflitante entre os objetivos, isto é, os pontos com os menores valores para a umidade do sólido (f_1) possuem os maiores valores em relação à perda de calor (f_2), e vice-versa.

Os pontos destacados na Fig. 52 são apresentados na Tab. 43. Estes representam condições ótimas distribuídas ao longo da curva de Pareto.

Tabela 43 – Alguns pontos da curva de Pareto obtidos pelo algoritmo MOVPS para o problema do secador rotativo.

	A	B	C	D	E
T_{fo} (°C)	99,000	98,036	88,945	80,479	71,000
v_{ar} (m/s)	1,100	1,100	1,100	1,100	1,100
G_{SU} (kg/s)	0,720	1,280	1,146	1,244	1,280
f_1 (-)	0,099	0,101	0,104	0,107	0,109
f_2 (KJ/s)	0,862	0,806	0,761	0,690	0,597

Nesta tabela observa-se que os pontos A e E representam soluções extremas, isto é, os objetivos individuais. Os pontos B e D apresentam uma inclinação maior no sentido de favorecer um dos objetivos, de modo que o ponto B fornece uma umidade do sólido relativamente baixa mediante uma perda de calor maior, enquanto o ponto D se encontra na situação contrária. Já o ponto C é uma solução de compromisso, isto é, uma que é interessante para ambos os objetivos. Além disso, nota-se que, independentemente do ponto escolhido, a velocidade ótima do fluido deve ser a mínima (1,1 m/s). Em relação à temperatura do ar ao final do comprimento do secador, observa-se que quanto maior seu valor, maior é a perda de calor apresentada pela solução, como esperado. Os pontos extremos representam temperaturas limites. A vazão mássica de sólido úmido, por sua vez, com exceção do ponto A, em que assume o limite inferior, apresenta-se mais próxima do limite superior para os pontos B, C, D e E.

Na Figura 53 é apresentado um comparativo entre as variáveis de projeto considerando diferentes estratégias de otimização. Nesta figura observa-se que as soluções encontradas pelo MOVPS são condizentes com aquelas obtidas pelos demais algoritmos. Além disso, nas Figs. 53a e 53c observa-se que a velocidade ótima do fluido deve ser de fato 1,1 m/s, enquanto os valores de T_{fo} e G_{SU} varrem o espaço de projeto para o conjunto de soluções resultante do MOVPS. A relação entre estas duas últimas variáveis é exibida na Fig. 53b, na qual constata-se que uma parcela expressiva dos pontos da curva de Pareto apresentam, para $T_{fo} \in [70, 99)$ °C, valores de G_{SU} principalmente no intervalo de [1,15; 1,28] kg/s. Por outro lado, também se observa um valor constante para a temperatura (99 °C) com a vazão mássica de sólido úmido varrendo todo o espaço de projeto ($0,72 \text{ kg/s} \leq G_{SU} \leq 1,28 \text{ kg/s}$).

Os perfis de umidade e temperatura obtidos pelo MOVPS para o problema do secador

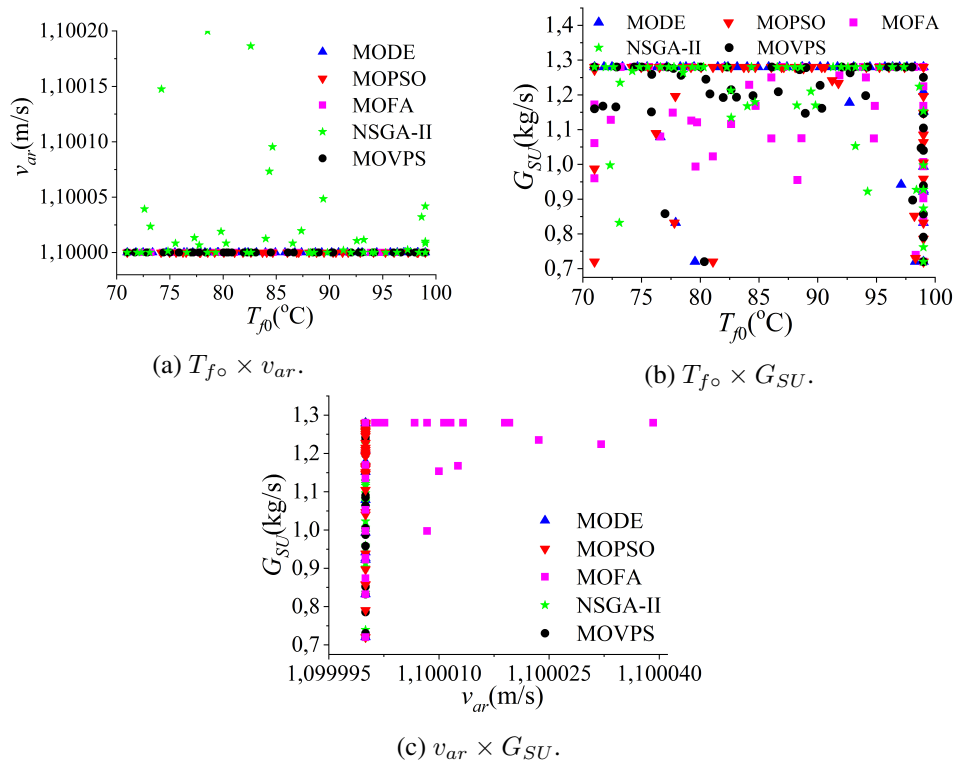


Figura 53 – Comparação entre as variáveis de projeto obtidas considerando diferentes estratégias de otimização para o problema do secador rotativo.

rotativo são apresentados na Fig. 54. Nesta figura é possível observar que a umidade do sólido parte de um mesmo ponto no início do secador (condição de contorno M_o) divergindo de acordo com as diferentes soluções consideradas ao longo de seu comprimento para valores mais baixos, conforme esperado. Neste caso, o ponto A fornece a menor umidade final e o ponto E a maior, conforme os valores de f_1 já analisados (Fig. 54a). Em relação à temperatura do sólido, os perfis apresentados são muito próximos entre si para os pontos B, C, D e E, diferindo levemente os valores assumidos por T_s para o ponto A, especialmente na segunda metade do comprimento do secador, como indica a Fig. 54c. A umidade do gás, como esperado, assume valores maiores do que a condição de contorno (W_o) no início do secador (Fig. 54b). Já para a temperatura do gás nota-se na Fig. 54d que os perfis apresentados pelos pontos A a E são crescentes ao longo do secador, tendendo aos valores encontrados para a variável de projeto T_{fo} , indicados na Tab. 43. Do ponto de vista físico, tais perfis estão em concordância com os esperados para o processo em análise, isto é, para a secagem do fertilizante.

6.2.10 PRODUÇÃO DE ESTIRENO

O estireno é um monômero aromático usado para a produção de vários polímeros plásticos na indústria petroquímica, que incluem poliestireno, polímero de acrilonitrila-butadieno-estireno, resinas de estireno-acrilonitrila, bem como látex de estireno-butadieno, estireno borracha de butadieno e várias outras resinas de poliéster insaturado (LI; HUBBELL, 1982; CHEN, 1992; DENIS; CASTOR, 1982)

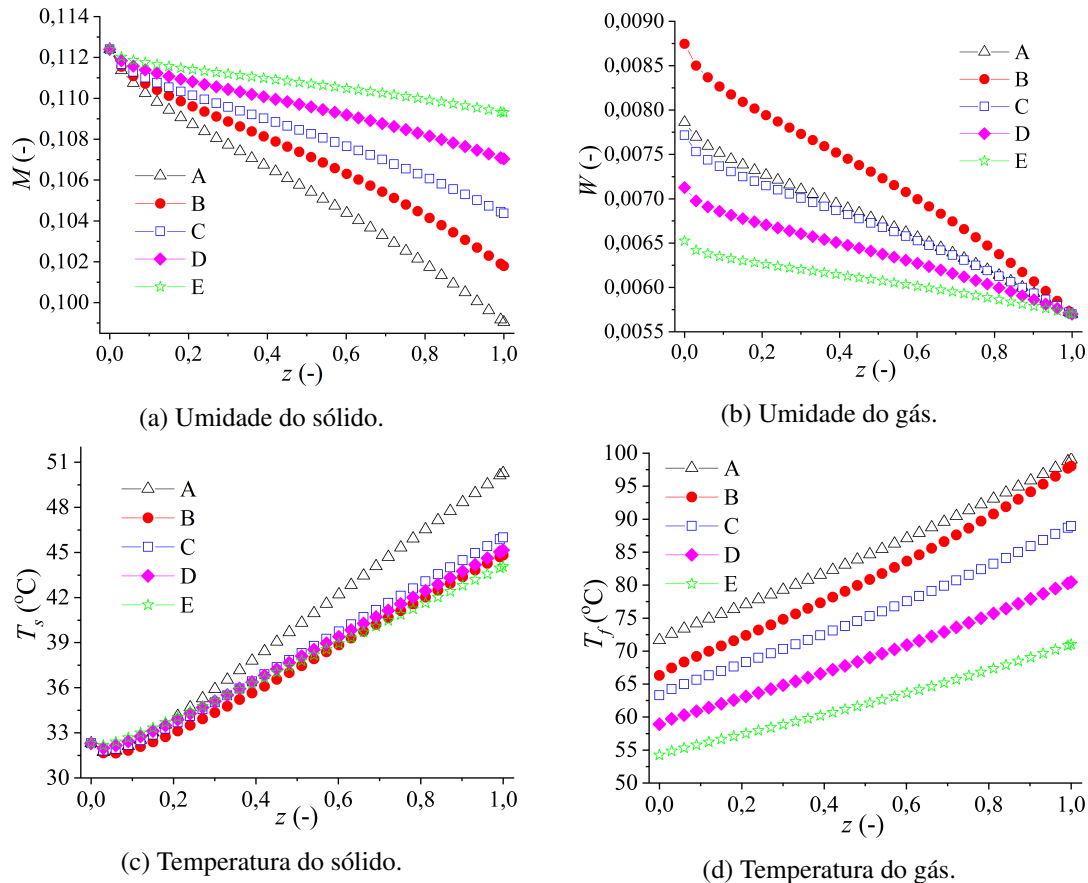


Figura 54 – Perfis de umidade e temperatura obtidos pelo MOVPS para o problema do secador rotativo.

De forma geral, a produção de estireno pode ser realizada por meio de duas rotas químicas, a saber, a desidrogenação e a coprodução com óxido de propileno, ambas usando etilbenzeno como reagente. A primeira é a mais utilizada, sendo esta responsável por mais de 90% do estireno produzido (FETTAKA, 2012). Essa rota oferece diversas vantagens por ser mais simples e versátil, pois a produção pode ser escalonada de acordo com a demanda, ao contrário da rota do óxido de propileno na qual a rentabilidade depende da demanda de mercado de ambos os sub-produtos (óxido de propileno e estireno), tornando-a menos flexível quando o preço destes sub-produtos sofre alterações (CHEN, 1992).

Conforme destacado por Fettaka (2012), apesar do histórico de produção industrial do estireno, ainda são vislumbradas possibilidades para melhorar a produtividade, a seletividade e o rendimento do processo, bem como a redução de custos.

Diante do que foi apresentado, nesta aplicação objetiva-se propor e resolver um problema de otimização multi-objetivo usando o algoritmo MOVPS para fins da produção do estireno via desidrogenação catalítica de etilbenzeno em reatores adiabáticos, conforme estudado por Yee, Ray e Rangaiah (2003), Babu, Chakole e Mubeen (2005) e Gujarathi e Babu (2010). Para essa finalidade, nas próximas subseções são apresentadas, brevemente, a descrição do processo químico, a modelagem matemática e os objetivos da presente aplicação.

6.2.10.1 PROCESSO QUÍMICO PARA A PRODUÇÃO DE ESTIRENO

Considere a produção de estireno via desidrogenação catalítica de etilbenzeno conforme ilustrado na Fig. 55 (CHEN, 1992; LI; HUBBELL, 1982; DENIS; CASTOR, 1982; YEE; RAY; RANGAIAH, 2003; FETTAKA, 2012; GUJARATHI; BABU, 2010; BABU; CHAKOLE; MUBEEN, 2005). O processo se inicia com a mistura de etilbenzeno fresco e reciclado com vapor, sendo esta pré-aquecida com a corrente de saída do reator em trocadores de calor. A temperatura da corrente é então elevada acima de 857 K (devido a mistura desta com vapor superaquecido) antes de entrar no reator catalítico de leito fixo (LI; HUBBELL, 1982; DENIS; CASTOR, 1982). A temperatura dentro do reator diminui ao longo do seu comprimento como resultado da reação endotérmica que acontece. Além de fornecer o calor necessário para a reação, o vapor superaquecido evita a formação de coque, bem como reduz a pressão parcial de estireno e hidrogênio, favorecendo assim a reação direta para produzir estireno. A relação molar entre vapor e etilbenzeno na alimentação é um fator importante no projeto e na operação do reator e está, tipicamente, na faixa de 7 a 20 (YEE; RAY; RANGAIAH, 2003). A corrente de saída do reator é resfriada em uma série de trocadores de calor (pré-aquecendo a mistura da alimentação de vapor de etilbenzeno), sendo em seguida enviada para a separação do estireno dos subprodutos presentes na corrente de saída do reator.

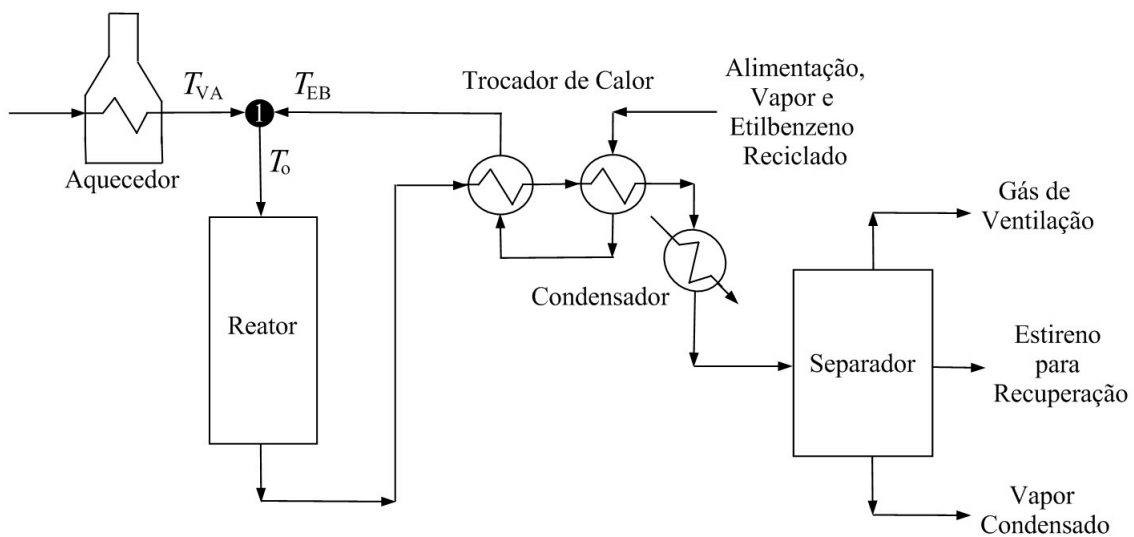


Figura 55 – Representação esquemática da produção de estireno via desidrogenação catalítica de etilbenzeno. Adaptado de Yee, Ray e Rangaiah (2003).

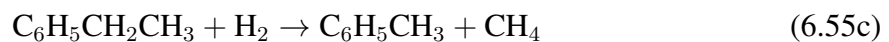
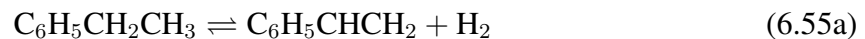
6.2.10.2 MODELAGEM MATEMÁTICA DO PROCESSO

O primeiro passo para a modelagem do processo de produção de estireno via desidrogenação catalítica de etilbenzeno é o conhecimento da cinética das reações que ocorrem. Para essa finalidade, vários estudos sobre a cinética e a modelagem da desidrogenação catalítica de etilbenzeno para produzir estireno podem ser encontrados na literatura especializada. Dentre estes pode-se citar o trabalho de Wenner e Dybdal (1948), que foi o primeiro a apresentar a

cinética da desidrogenação catalítica do estireno via dados experimentais de taxa produzidos para dois tipos de catalisadores. No entanto, foi somente no trabalho de [Sheel e Crowe \(1969\)](#) que a modelagem, simulação e otimização do reator de estireno usando um pseudo modelo homogêneo foi estudado. Estes autores avaliaram a cinética e o calor de reação para um reator industrial adiabático considerando um catalisador a base de óxido de ferro-potássio (62% Fe₂O₃, 36% K₂CO₃ e 2% Cr₂O₃). [Sheppard, Maier e Caram \(1986\)](#) determinaram modelos para representar a cinética de reação com base nos dados fornecidos por fabricantes para catalisadores a base de óxido de ferro-potássio. Com base nos dados industriais relatados por [Sheel e Crowe \(1969\)](#) e [Elnashaie, Abdalla e Hughes \(1993\)](#), desenvolveram um modelo heterogêneo que considera a difusão no *pellet* de catalisador. [Abdalla et al. \(1994\)](#) obtiveram dados cinéticos para modelos pseudo-homogêneo e heterogêneo considerando três catalisadores a base de óxido de ferro.

Dentre os modelos cinéticos apresentados, o pseudo-homogêneo desenvolvido por [Sheel e Crowe \(1969\)](#) tem sido amplamente utilizado para fins da otimização multi-objetivo do reator industrial de estireno ([YEE; RAY; RANGAIAH, 2003](#); [BABU; CHAKOLE; MUBEEN, 2005](#); [TARAFDAR; RANGAIAH; RAY, 2005](#); [GUJARATHI; BABU, 2010](#)). Isso se deve ao fato de que os modelos pseudo-homogêneos e heterogêneos resultam em perfis próximos ao modelo homogêneo, todavia, com um menor tempo de processamento ([YEE; RAY; RANGAIAH, 2003](#); [BABU; CHAKOLE; MUBEEN, 2005](#)). Como as expressões cinéticas para o modelo pseudo-homogêneo foram obtidas experimentalmente a partir de um reator industrial, é importante ressaltar que estas são válidas para o projeto e simulação do reator ([FETTAKA, 2012](#)).

As seis principais reações que ocorrem no reator de estireno são ([YEE; RAY; RANGAIAH, 2003](#)):



A reação de desidrogenação do etilbenzeno (C₆H₅CH₂CH₃) (Eq. (6.55a)) é endotérmica reversível e acontece na presença de um catalisador a base de óxido de ferro. Nesta reação, baixa pressão e alta temperatura deslocam o equilíbrio termodinâmico em direção à produção de estireno (C₆H₅CHCH₂) e de hidrogênio (H₂). Embora a conversão de equilíbrio de etilbenzeno possa chegar a 80% ([YEE; RAY; RANGAIAH, 2003](#)), o tempo e a temperatura necessários para atingir tal conversão resultaria no craqueamento térmico do catalisador. Além disso, o rendimento de estireno é ainda mais reduzido por reações concorrentes (Eq. (6.55b) e Eq. (6.55c)), onde benzeno (C₆H₆), etileno (C₂H₄), tolueno (C₆H₅CH₃) e metano (CH₄) são produzidos. A taxa de formação de subprodutos aumenta com a temperatura e, como resultado, há um compromisso que

deve ser alcançado com a escolha da temperatura operacional ideal para maximizar a conversão de estireno. Além disso, a corrente de saída do reator deve ter um alto rendimento de estireno em comparação com os subprodutos para facilitar a separação e reduzir os custos com tal operação (YEE; RAY; RANGAIAH, 2003). Finalmente, as reações descritas pelas Eqs. (6.55d)-(6.55f) representam subprodutos da reação de desidrogenação do etilbenzeno, a saber, vapor (H_2O), monóxido de carbono (CO) e dióxido de carbono (CO_2).

Para modelar o reator industrial de estireno usando o modelo pseudo-homogêneo (SHEEL; CROWE, 1969), considera-se, além do estado estacionário, que o reator se comporta como um de fluxo pistonado ideal e que as expressões de taxa cinéticas respondem pela transferência de massa dentro dos grânulos de catalisador. A seguir são apresentados os respectivos balanços de massa, energia e momento que representam o processo em análise (YEE; RAY; RANGAIAH, 2003).

- Balanços de Massa

Neste estudo de caso consideram-se os balanços de massa escritos em função do fluxo molar (F_j) de cada componente. Estes são dados como:

– Fluxo molar de Etilbenzeno (EB):

$$\frac{dF_{EB}}{dz} = \rho_b A(-r_1 - r_2 - r_3), \quad F_{EB}(z = 0) = F_{EB}^{\circ} \quad (6.56)$$

– Fluxo molar de Estireno (ES):

$$\frac{dF_{ES}}{dz} = \rho_b A(r_1), \quad F_{ES}(z = 0) = F_{ES}^{\circ} \quad (6.57)$$

– Fluxo molar de Hidrogênio (H):

$$\frac{dF_H}{dz} = \rho_b A(r_1 - r_3 + 4r_4 + 3r_5 + r_6), \quad F_H(z = 0) = F_H^{\circ} \quad (6.58)$$

– Fluxo molar de Etileno (ET):

$$\frac{dF_{ET}}{dz} = \rho_b A(r_2 - r_4), \quad F_{ET}(z = 0) = F_{ET}^{\circ} \quad (6.59)$$

– Fluxo molar de Tolueno (T):

$$\frac{dF_T}{dz} = \rho_b A(r_3), \quad F_T(z = 0) = F_T^{\circ} \quad (6.60)$$

– Fluxo molar de Monóxido de Carbono (CO):

$$\frac{dF_{CO}}{dz} = \rho_b A(2r_4 + r_5 - r_6), \quad F_{CO}(z = 0) = F_{CO}^{\circ} \quad (6.61)$$

– Fluxo molar de Dióxido de Carbono (CO_2):

$$\frac{dF_{CO_2}}{dz} = \rho_b A(r_6), \quad F_{CO_2}(z = 0) = F_{CO_2}^{\circ} \quad (6.62)$$

– Fluxo molar de Metano (ME):

$$\frac{dF_{ME}}{dz} = \rho_b A (r_3 - r_5), \quad F_{ME}(z=0) = F_{ME}^\circ \quad (6.63)$$

– Fluxo molar de Vapor (VA):

$$\frac{dF_{VA}}{dz} = \rho_b A (-2r_4 - r_5 - r_6), \quad F_{VA}(z=0) = F_{VA}^\circ \quad (6.64)$$

– Fluxo molar de Benzeno (BE):

$$\frac{dF_{BE}}{dz} = \rho_b A (r_2), \quad F_{BE}(z=0) = F_{BE}^\circ \quad (6.65)$$

onde F_j° é o fluxo molar do j -ésimo componente na alimentação ($j \in NC = \{EB, ES, H, ET, T, CO, CO_2, ME, VA, BE\}$), z é a coordenada espacial ($0 \leq z \leq L$, onde L é o comprimento do reator), ρ_b é a densidade do catalisador, A é a área da seção transversal ao escoamento ($A = \pi R^2$, em que R é o raio do reator).

As taxas de reação r_i ($i = 1, \dots, 6$) para o modelo pseudo-homogêneo são dadas como (SHEEL; CROWE, 1969; ELNASHAIE; ELSHISHINI, 1994):

$$r_1 = k_1 \left(P_{EB} - \frac{P_{ES} P_H}{K_{EB}} \right) \quad (6.66a)$$

$$r_2 = k_2 P_{EB} \quad (6.66b)$$

$$r_3 = k_3 P_{EB} P_H \quad (6.66c)$$

$$r_4 = k_4 P_{VA}^2 P_{ET} \quad (6.66d)$$

$$r_5 = k_5 P_{VA} P_{ME} \quad (6.66e)$$

$$r_6 = k_6 P_{VA} P_{CO} \left(\frac{P}{T^3} \right) \quad (6.66f)$$

em que P_j representa a pressão parcial do j -ésimo componente em relação à pressão total P dentro do reator ($j \in NC$), e T é a temperatura dentro do reator. K_{EB} (bar) é a constante de equilíbrio dada como (YEE; RAY; RANGAIAH, 2003):

$$K_{EB} = \exp \left(\frac{-\Delta G_o}{R_g T} \right) \quad (6.67)$$

em que $\Delta G_o = a_g + b_g T + c_g T^2$, onde $a_g = 122725,157$ kJ/kmol; $b_g = -126,267$ kJ/(kmol K) e $c_g = -0,002194$ kJ/(kmol K²). E k_i (kmol/(kg s bar ^{n}), onde n é uma potência relacionada a i -ésima reação) representa a i -ésima constante de taxa, dada como:

$$k_i = \exp \left(A_i - \frac{E_i}{R_g T} \right) \quad (6.68)$$

em que R_g é a constante dos gases ideais, A_i é o fator pré-exponencial e E_i é a energia de ativação da i -ésima reação ($i = 1, \dots, 6$). Os valores para estes parâmetros são dados na Tab. 44.

Tabela 44 – Fator pré-exponencial e energia de ativação para cada reação no processo de produção de estireno (SHEEL; CROWE, 1969; ELNASHAIE; ELSHISHINI, 1994).

Reação	A_i (-)	E_i (kJ/kmol)
1	-0,0854	90887
2	13,2392	207979
3	0,2961	91511
4	-0,0724	103992
5	-2,9344	65720
6	21,2402	73625

- Balanço de Energia

O perfil de temperatura ao longo do reator adiabático é dado por:

$$\frac{dT}{dz} = \frac{\sum_{i=1}^6 (-\Delta H_i) \rho_b A r_i}{\sum_{j \in NC} F_j C_{pj}}, \quad T(z=0) = T_o \quad (6.69)$$

em que T_o é a temperatura inicial dentro do reator, $-\Delta H_i$ ($i=1, \dots, 6$) é o calor de reação dado como (SHEEL; CROWE, 1969):

$$-\Delta H_i = a_{\Delta i} + b_{\Delta i} T \quad (6.70)$$

onde $a_{\Delta i}$ e $b_{\Delta i}$ são constantes dadas na Tab. 45.

Tabela 45 – Constantes para determinação do calor de cada reação no processo de produção de estireno (SHEEL; CROWE, 1969; ELNASHAIE; ELSHISHINI, 1994).

Reação	$a_{\Delta i}$ (kJ/kmol)	$b_{\Delta i}$ (kJ/(kmol K))
1	120760	4,56361
2	108823	-7,95492
3	-53181	-13,18840
4	82070	8,83415
5	211266	16,57973
6	-45226	10,46700

As capacidades caloríficas molares (C_{pj} , $j \in NC$) são dadas como (SMITH; VAN NESS; ABBOTT, 2005):

$$\frac{C_{pj}}{R_g} = a_j + b_j T + c_j T^2 + \frac{d_j}{T^2} \quad (6.71)$$

onde a_j , b_j , c_j e d_j são constantes dadas na Tab. 46.

- Balanço de Momento

Tabela 46 – Capacidade calorífica molar e peso molecular para os componentes do processo de produção de estireno (SMITH; VAN NESS; ABBOTT, 2005).

Componente	a	b (1/K)	c (1/K ²)	d (K ²)	PM (g/mol)
C ₆ H ₅ CH ₂ CH ₃	1,124	55,38 × 10 ⁻³	-18,476 × 10 ⁻⁶	-	106,17
C ₆ H ₅ CHCH ₂	2,05	50,192 × 10 ⁻³	-16,662 × 10 ⁻⁶	-	104,15
C ₆ H ₆	-0,206	39,064 × 10 ⁻³	-13,301 × 10 ⁻⁶	-	78,11
C ₆ H ₅ CH ₃	0,29	47,052 × 10 ⁻³	-15,716 × 10 ⁻⁶	-	92,14
C ₂ H ₄	1,424	14,394 × 10 ⁻³	-4,392 × 10 ⁻⁶	-	28,05
CH ₄	1,702	9,081 × 10 ⁻³	-2,164 × 10 ⁻⁶	-	16,04
H ₂ O	3,47	1,45 × 10 ⁻³	-	0,121 × 10 ⁵	18,02
H ₂	3,249	0,422 × 10 ⁻³	-	0,083 × 10 ⁵	2,02
CO	3,376	0,557 × 10 ⁻³	-	-0,031 × 10 ⁵	28,01
CO ₂	5,457	1,045 × 10 ⁻³	-	-1,157 × 10 ⁵	44,01

A queda de pressão ao longo do comprimento do reator é dada pela equação de Ergun (ELNASHAIE; ELSHISHINI, 1994):

$$\frac{dP}{dz} = \frac{G_o(1 - \epsilon)}{D_p \epsilon^3 \rho_G} \left(\frac{150(1 - \epsilon)\mu_G}{D_p} + 1,75G_o \right), \quad P(z = 0) = P_o \quad (6.72)$$

em que P_o é a pressão inicial dentro do reator, ϵ é a fração de vazios no leito, D_p é o diâmetro da partícula, μ_G é a viscosidade da mistura, G_o é a vazão da mistura, dada como:

$$G_o = \sum_{j \in NC} F_j R_g \frac{T_o}{P_o} \quad (6.73)$$

Já a densidade da mistura (ρ_G) é dada como:

$$\rho_G = \sum_{j \in NC} F_j x_j \frac{\overline{PM}}{G_o} \quad (6.74)$$

em que \overline{PM} é o peso molecular médio e x_j é a fração molar do j -ésimo componente, ambos computados como:

$$\overline{PM} = \sum_{j \in NC} PM_j x_j \quad (6.75)$$

$$x_j = \frac{F_j}{\sum_{p \in NC} F_p}, \quad j \in NC \quad (6.76)$$

em que PM_j é o peso molecular do j -ésimo componente (ver a Tab. 46).

6.2.10.3 SIMULAÇÃO DO PROCESSO

Para verificar se os resultados obtidos considerando o modelo descrito apresentam concordância com os industriais, os parâmetros descritos na Tab. 47 para um catalisador com

Tabela 47 – Parâmetros de projeto e condições de operação para o reator de estireno industrial (YEE; RAY; RANGAIAH, 2003; BABU; CHAKOLE; MUBEEN, 2005; GUJARATHI; BABU, 2010; FETTAKA, 2012).

Parâmetro	Nomenclatura	Valor/Unidade
Diâmetro do reator	D	1,95 m
Comprimento do reator	L	1,7 m
Densidade do catalisador	ρ_b	2146 kg/m ³
Viscosidade da mistura	μ_G	$2,86 \times 10^{-5}$ Pa s
Diâmetro da partícula	D_p	0,0047 m
Fração de vazios no leito	ϵ	0,445
Pressão inicial	P_o	2,4 bar
Temperatura inicial	T_o	922,59 K
Fluxo molar de etilbenzeno	F_{EB}^o	36,87 kmol/h
Fluxo molar de estireno	F_{ES}^o	0,67 ^a kmol/h
Fluxo molar de benzeno	F_{BE}^o	0,11 ^a kmol/h
Fluxo molar de tolueno	F_T^o	0,88 ^a kmol/h
Fluxo molar de vapor	F_{VA}^o	453,1 kmol/h

^aComponentes presentes como impurezas na alimentação de etilbenzeno.

a composição 62% Fe₂O₃, 36% K₂CO₃, 2% Cr₂O₃ são empregados. Para resolver o modelo numérico foi considerado o Método de Runge-Kutta-Fehlberg (com 100 pontos de discretização igualmente espaçados).

Na Tabela 48 são apresentados os valores simulados considerando informações na saída do reator industrial (SHEEL; CROWE, 1969), bem como os resultados reportados por diferentes autores.

Tabela 48 – Valores simulados e industriais na saída do reator de estireno.

P (bar)	2,32 ¹	2,33 ²	2,33 ³	2,32 ⁴	2,305 ⁵
T (K)	850,00	849,75	850,08	849,94	851,6959
X_{EB} (%)	47,25	46,74	46,78	46,84	47,6682
F_{EB} (kmol/h)	19,45	19,63	19,61	19,60	19,2947
F_{ES} (kmol/h)	15,57	15,40	15,37	15,42	15,8658
F_{BE} (kmol/h)	1,50	1,44	1,46	1,45	1,4885
F_T (kmol/h)	2,03	2,05	2,07	2,05	1,8810

¹Reator Industrial. ²Yee, Ray e Rangaiah (2003).

³Babu, Chakole e Mubeen (2005). ⁴Fettaka (2012).

⁵Neste trabalho.

Ao se analisar esta tabela verifica-se uma boa concordância entre os resultados simulados neste trabalho com aqueles reportados na literatura, bem como em relação aos reportados na indústria. Neste caso, o menor erro relativo foi observado para a temperatura (0,20%) e o maior erro relativo foi constatado para o fluxo molar do tolueno (7,34%). Assim, considera-se que os resultados simulados são coerentes visto que em outras simulações também são observadas discrepâncias com relação ao industrial reportado. Tais diferenças podem ser atribuídas aos

dados cinéticos e determinação de propriedades como a capacidade calorífica, a velocidade da mistura e a viscosidade, conforme mencionado por Yee, Ray e Rangaiah (2003), Babu, Chakole e Mubeen (2005) e Fettaka (2012).

6.2.10.4 OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVO

Conforme destacado anteriormente, a otimização do processo de produção do estireno configura um tema de grande interesse para engenheiros químicos e tem sido abordada considerando diferentes configurações. Assim, estudos de caso considerando diferentes tipos de objetivos, bem como diferentes tipos de modelos (adiabático, isotérmico e com injeção de vapor) podem ser encontrados na literatura (YEE; RAY; RANGAIAH, 2003; BABU; CHAKOLE; MUBEEN, 2005; GUJARATHI; BABU, 2010; FETTAKA, 2012).

Neste contexto, tradicionalmente consideram-se como principais objetivos a maximização simultânea da produtividade (F_{ES}), da seletividade (S_{ES}) e do rendimento (Y_{ES}) do estireno. Estes são definidos como (YEE; RAY; RANGAIAH, 2003):

$$\max F_{ES} \quad (6.77a)$$

$$\max S_{ES} = \frac{F_{ES} - F_{ES}^{\circ}}{F_{EB}^{\circ} - F_{EB}} \quad (6.77b)$$

$$\max Y_{ES} = \frac{F_{ES} - F_{ES}^{\circ}}{F_{EB}^{\circ}} \quad (6.77c)$$

Por se tratar de um produto com grande valor agregado, justifica-se a maximização do fluxo molar do estireno ao final da operação (YEE; RAY; RANGAIAH, 2003). Além disso, também se deseja minimizar a formação dos produtos indesejados (tolueno e benzeno), já que estes provocam a redução da produtividade de estireno, bem como aumenta o custo de separação. Nesse sentido, a seletividade do estireno também é um objetivo interessante. Baseado nestas informações, no presente trabalho considera-se a formulação de um problema de otimização com dois objetivos em um processo cujo reator opera de forma adiabática, a saber, a maximização da produtividade (Eq. (6.77a)) e da seletividade (Eq. (6.77b)).

Com este intuito, as variáveis de projeto são definidas dentre aquelas operacionais da planta de estireno (SHEEL; CROWE, 1969; ELNASHAIE; ELSHISHINI, 1994; YEE; RAY; RANGAIAH, 2003; BABU; CHAKOLE; MUBEEN, 2005; FETTAKA, 2012). Nestes estudos, a temperatura do vapor sempre era fixada em 1025 K. Todavia, em qualquer processo é quase impossível obter o vapor a uma temperatura constante. Portanto, Gujarathi e Babu (2010) incluíram uma nova variável àquelas tradicionalmente consideradas: a temperatura do vapor. Assim, as variáveis de projeto consideradas neste estudo são: a temperatura de alimentação da corrente de etilbenzeno (T_{EB}), a pressão na entrada do reator (P_{\circ}), a relação entre os fluxos molares de vapor e de etilbenzeno na corrente de alimentação (SOR - *Steam Over Reactant*), o fluxo molar de etilbenzeno na alimentação (F_{EB}°) e a temperatura do vapor (T_{VA}). Os limites

para cada variável de projeto são definidos como (GUJARATHI; BABU, 2010):

$$500 \leq T_{EB} \leq 800 \text{ K} \quad (6.78a)$$

$$1 \leq P_o \leq 2,63 \text{ bar} \quad (6.78b)$$

$$7 \leq SOR \leq 20 \quad (6.78c)$$

$$27,56 \leq F_{EB}^{\circ} \leq 40,56 \text{ kmol/h} \quad (6.78d)$$

$$1000 \leq T_{VA} \leq 1050 \text{ K} \quad (6.78e)$$

A temperatura de entrada do reator (T_o) não deve ser muito baixa, já que isso não favorece a produção de estireno (reação endotérmica). Neste caso, o limite inferior para a temperatura de etilbenzeno na corrente de alimentação (T_{EB}) é ajustado em 500 K. Por outro lado, um aumento demasiado na temperatura pode favorecer reações indesejadas (CHEN, 1992). Portanto, considera-se um limite superior de 800 K para T_{EB} . Já para a temperatura do vapor T_{VA} considera-se uma faixa próxima do valor fixo que é tradicionalmente considerado ([1000 1050] K). Os limites para a pressão da corrente de entrada no reator P_o são escolhidos com base na pressão em que, usualmente, os reatores industriais de estireno operam. O limite inferior para a relação entre as vazões molares de vapor e etilbenzeno (SOR) é definido como sendo igual a 7 para inibir a formação de coque na superfície do catalisador. Já o limite superior é mantido a 20 pois a lucratividade do processo depende da quantidade de vapor empregado. Os limites inferior e superior para a vazão molar de etilbenzeno na corrente de alimentação (F_{EB}°) são definidos como sendo iguais a -25% e +10% do valor nominal normalmente empregado (36,87 kmol/h) (YEE; RAY; RANGAIAH, 2003).

A temperatura da corrente na entrada do reator é função das temperaturas das correntes de vapor e de etilbenzeno. Neste caso, para estimar o seu valor realiza-se um balanço de energia no ponto 1 (ver a Fig. 55). Para essa finalidade, são assumidas as seguintes hipóteses: *i*) que a corrente de etilbenzeno é, praticamente, pura (apesar de existir estireno, benzeno e tolueno, conforme apresentado na Tab. 47 para a simulação do reator industrial); *ii*) e que, após a mistura, assume-se uma capacidade calorífica média (\overline{C}_p), calculada em função das frações molares. Matematicamente, o balanço de energia pode ser escrito como:

$$F_{VA}^{\circ} C_{pVA} T_{VA} + F_{EB}^{\circ} C_{pEB} T_{EB} = (F_{VA}^{\circ} + F_{EB}^{\circ}) \overline{C}_p T_o \quad (6.79)$$

em que:

$$\overline{C}_p = x_{VA} C_{pVA} + x_{EB} C_{pEB} \quad (6.80)$$

Assim, T_o pode ser aproximado como sendo:

$$T_o \approx \frac{F_{VA}^{\circ} C_{pVA} T_{VA} + F_{EB}^{\circ} C_{pEB} T_{EB}}{(F_{VA}^{\circ} + F_{EB}^{\circ}) \overline{C}_p} \quad (6.81)$$

Em resumo, o problema de otimização proposto considera dois objetivos, a saber a maximização da produtividade e da seletividade do estireno. Este é sujeito a restrições laterais, bem como ao modelo diferencial ordinário descrito pelos balanços de massa, energia e momento.

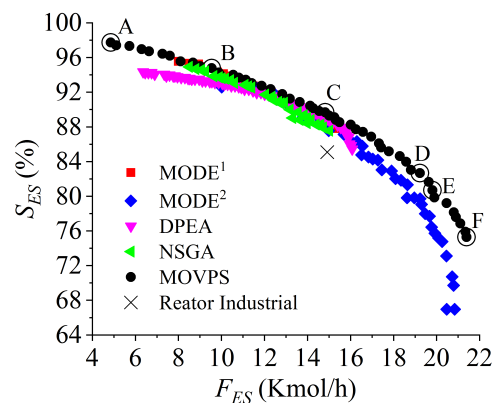
Para escolher uma condição de operação pertencente à solução ótima (curva de Pareto), Yee, Ray e Rangaiah (2003) propuseram uma função lucro (*Lucro*) simplificada. Isto se deve ao fato desta não incluir o custo operacional (exceto o custo de etilbenzeno e vapor), os custos de separação de estireno e subprodutos, bem como de reagente não convertido. Assim, a referida função é definida como sendo a diferença entre a receita (venda de estireno e subprodutos) e os custos de etilbenzeno e de vapor. Matematicamente, ela é formulada como (YEE; RAY; RANGAIAH, 2003):

$$Lucro = F_{ES}C_{ES} + F_{BE}C_{BE} + F_T C_T - (F_{EB}^o - F_{EB})C_{EB} - F_{H_2O}C_{H_2O} \quad (6.82)$$

em que C_{ES} é o custo do estireno (\$103/kmol), C_{BE} é o custo do benzeno (\$30,8/kmol), C_T é o custo do tolueno (\$33,9/kmol), C_{EB} é o custo do etilbenzeno (\$45,6/kmol) e C_{H_2O} é o custo do vapor (\$0,36/kmol).

A Figura 56 apresenta a curva de Pareto para o problema do reator de estireno considerando diferentes estratégias de otimização, a saber, o *Multiobjective Differential Evolution* MODE¹ (BABU; CHAKOLE; MUBEEN, 2005) (90150 avaliações) e MODE² (GUJARATHI; BABU, 2010) (51000 avaliações), o *Dual Population Evolutionary Algorithm* - DPEA (FET-TAKA, 2012)) (não é possível estimar o número de avaliações), o *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm* - NSGA (YEE; RAY; RANGAIAH, 2003) (5050 avaliações), o MOVPS (5050 avaliações), bem como o valor dos objetivos na condição industrial.

Figura 56 – Curva de Pareto para o problema do reator de estireno considerando diferentes estratégias de otimização.



Nesta figura é possível observar que a solução obtida pelo MOVPS considerando o conjunto de parâmetros *default* (Seção 6.2) é coerente com as reportadas considerando outros algoritmos. Todavia, por se tratar de um problema em que se deseja maximizar os dois objetivos, a curva de Pareto obtida é superior aos outros algoritmos evolutivos, isto é, foram encontrados maiores valores para ambos os objetivos, principalmente nas extremidades da solução ótima

obtida. Como esperado, todas as soluções otimizadas, independentemente do algoritmo considerado, são superiores àquela considerando a condição industrial reportada por [Gujarathi e Babu \(2010\)](#), demonstrando que o processo pode ser melhorado.

Em relação ao número de avaliações da função objetivo é possível observar que o valor requerido pelo MOVPS é bem inferior aos considerados por [Babu, Chakole e Mubeen \(2005\)](#) e [Gujarathi e Babu \(2010\)](#) e idêntico ao reportado por [Yee, Ray e Rangaiah \(2003\)](#). Neste caso, como observado na Fig. 56, a curva de Pareto obtida usando a metodologia proposta é superior a todos os reportados por estes autores, todavia sem aumentar o número de avaliações da função objetivo.

Na Tabela 49 são apresentados os pontos destacados na Fig. 56. Estes representam condições ótimas distribuídas ao longo da curva de Pareto, bem como a melhor condição (Ponto E) considerando a função lucro. De forma geral, nesta tabela observa-se uma boa distribuição no que tange a faixa obtida para cada uma das variáveis de projeto, isto é, os valores obtidos para T_{EB} , P_o , SOR e T_{VA} varrem o domínio especificado para cada uma. Por outro lado, para F_{EB}^o observa-se uma faixa que vai desde o seu valor médio até o limite superior definido para a mesma. Isto faz com que os valores de F_{ES} e de S_{ES} estejam nas faixas de 4 a 22 kmol/h e 75 a 98%, respectivamente. Há que se destacar que os fluxos molares para o benzeno e para o tolueno aumentam com a elevação do valor de F_{ES} e com a redução da seletividade do etilbenzeno. Como consequência, a lucratividade do processo assume valores desde, aproximadamente, 250 a 970\$/h, visto que o seu valor aumenta com o incremento dos fluxos molares de estireno, benzeno e tolueno.

Tabela 49 – Alguns pontos da curva de Pareto obtidos pelo algoritmo MOVPS para o problema do reator de estireno.

	A	B	C	D	E	F
T_{EB} (K)	521,2094	575,4313	707,8482	733,7018	800	800
P_o (bar)	1,0677	1,8389	1,8521	2,6300	2,2661	2,6300
SOR	7,2949	9,7062	10,1587	16,3767	11,9427	20
F_{EB}^o (kmol/h)	34,6236	40,3176	40,4946	40,4017	40,5600	40,5600
T_{VA} (K)	1000,4	1000,7	1028,1	1032,4	1050	1050
F_{ES} (kmol/h)	4,8522	9,5508	14,8242	19,2295	19,8040	21,3909
S_{ES} (%)	97,7313	94,7808	89,6785	82,6641	80,6998	75,2884
F_{BE} (kmol/h)	0,1648	0,3631	1,1293	2,8187	3,1699	5,4845
F_T (kmol/h)	0,9223	1,1160	1,4897	2,0635	2,3962	2,3066
$Lucro$ (\$/h)	250,0576	464,6712	744,7070	877,3407	965,1224	907,5298

A Tabela 50 apresenta as condições ótimas de operação para o reator adiabático considerando a função lucro como estratégia para a escolha em cada uma das curvas de Pareto obtidas por diferentes algoritmos de otimização. Nesta tabela é possível observar que o maior valor para a função lucro foi obtido pelo MOVPS. Isto se deve ao melhor formato da curva de Pareto obtida pela metodologia proposta em relação a outros algoritmos de otimização, conforme

a Fig. 56. Apesar disso, é importante destacar que esta comparação é mais complexa do que simplesmente avaliar cada ponto de cada solução ótima obtida. Isto se deve ao fato de cada curva de Pareto apresentar uma quantidade de pontos distribuídos de forma diferente. Além disso, como existem formatos de curvas distintos entre si (as curvas não convergem para o mesmo formato), a comparação se torna ainda mais difícil de ser realizada.

Tabela 50 – Condições ótimas de operação para o reator adiabático considerando a função lucro.

T_{EB} (K)	799,98 ¹	799,58 ²	795,74 ³	638,24 ⁴	800 ⁵
P_o (bar)	2,03	1,76	1,98	1,74	2,27
SOR	10,94	10,60	10,74	9,48	11,95
F_{EB}^o (kmol/h)	40,74	39,87	39,71	39,60	40,56
T_{VA} (K)	1025*	1025*	1025*	-	1050**
F_{ES} (kmol/h)	16,52	15,57	15,92	15,67	19,81
S_{ES} (%)	86,20	87,58	86,76	86,96	80,70
F_{BE} (kmol/h)	1,62	1,47	1,49	1,80	3,17
F_T (kmol/h)	1,91	1,64	1,83	2,52	2,39
$Lucro$ (\$/h)	817,18	776,23	792,69	861,69	965,13

¹ Yee, Ray e Rangaiah (2003). * Valor fixo.

² Babu, Chakole e Mubeen (2005). * Valor fixo.

³ Fettaka (2012). * Valor fixo.

⁴ Gujarathi e Babu (2010).

⁵ Neste trabalho. **Otimizado neste trabalho.

A Figura 57 apresenta o comparativo entre as variáveis de projeto versus cada função objetivo obtidas pelo MOVPS (pontos destacados da Fig. 56) e pelo algoritmo MODE² (GUJARATHI; BABU, 2010), bem como a condição industrial reportada por Gujarathi e Babu (2010). Nas Figuras 57a a 57h observa-se uma similaridade entre as regiões que definem cada variável de projeto obtidas por ambos os algoritmos. Isto evidencia que a metodologia proposta foi capaz de encontrar valores condizentes com aqueles reportados por uma tradicional estratégia de otimização, a saber, uma baseada no algoritmo de Evolução Diferencial. Além disso, conforme comentado anteriormente, a única variável que tende a se concentrar no limite superior é o fluxo molar na alimentação de etilbenzeno (F_{EB}^o). Já as outras (T_{EB} , P_o e SOR) tendem a se distribuir ao longo do domínio definido. Em relação à temperatura, observa-se que para a variável T_{EB} alguns pontos pertencentes à curva de Pareto obtida pelo MOVPS tendem ao limite superior para ambos os objetivos, assim como o referido ponto industrial. Já para a variável F_{EB}^o a tendência, para ambos os objetivos, é que os valores obtidos pelos otimizadores fiquem próximos ao limite superior estabelecido, diferentemente do observado industrialmente. Já para as variáveis P_o e SOR observa-se que a condição industrial está contida nas faixas obtidas pelo MOVPS. Apesar de não ter sido apresentado, o perfil de T_{VA} tende ao seu valor máximo, visto que isto favorece o processo no que tange a temperatura da corrente de alimentação do reator.

A Figura 58 apresenta os perfis de temperatura, pressão e fluxo molar para o problema do reator de estireno considerando os pontos apresentados na Tab. 49, bem como aqueles

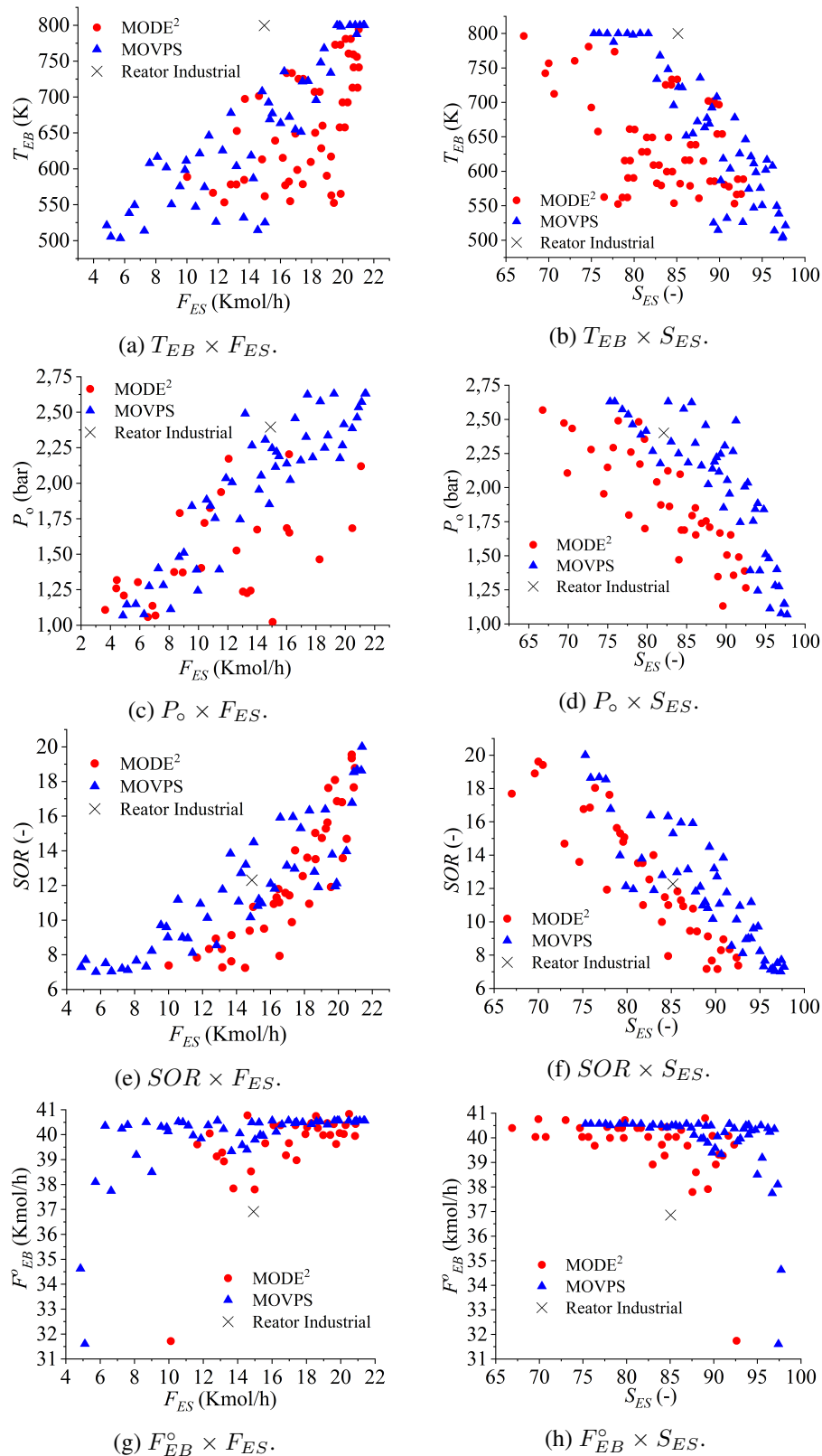


Figura 57 – Comparação entre as variáveis de projeto obtidas pelo MOVPS e MODE para o problema do reator de estireno.

simulados usando os parâmetros de projeto e condições de operação listados na Tab. 47 para o reator industrial. No caso do perfil de temperatura apresentado na Fig. 58a, observa-se que o aumento no valor de T_{EB} implica no incremento da temperatura na entrada do reator (T_o), como

esperado. Além disso, por se tratar de uma reação endotérmica, a temperatura ao longo do reator vai reduzindo. Em comparação com o perfil industrial, observa-se que a melhor condição de operação (Ponto E) apresenta uma temperatura inicial superior, o que favorece o processo por se tratar de uma sistema endotérmico. Em relação ao perfil de pressão apresentado na Fig. 58b, observa-se que o mesmo é praticamente linear. Além disso, a grande maioria dos perfis (inclusive o ponto de operação ótimo) ficaram abaixo do industrial. Já para o perfil de estireno apresentado na Fig. 58c observa-se, como esperado, que o fluxo molar aumenta ao longo do comprimento do reator. Além disso, a condição de operação ótima (Ponto E) resulta em um perfil superior ao reportado industrialmente. Em contraste ao perfil de estireno, o de etilbenzeno apresentado na Fig. 58d reduz ao longo do comprimento do reator, visto que este é um reagente. Em relação ao perfil industrial, observa-se que o fluxo de etilbenzeno ao final do comprimento do reator é menor, como esperado por se tratar de uma condição otimizada para um reagente. Finalmente nas Fig. 58e e Fig. 58f, observa-se a formação dos subprodutos (benzeno e tolueno) ao longo do comprimento do reator. Como esperado, a condição otimizada resulta em maiores fluxos molares de ambos os produtos em relação à condição industrial.

Em resumo, a condição otimizada (Ponto E) sempre resultou na melhoria do processo em relação à condição industrial. Este resultado já era esperado visto que este ponto foi encontrado a partir da aplicação de uma técnica de otimização, cuja premissa é melhorar a condição que, normalmente, é empregada industrialmente.

Finalmente, é importante ressaltar que o problema multi-objetivo considerando os três objetivos (produtividade, seletividade e rendimento) poderia ter sido resolvido pelo algoritmo MOVPS. Além disso, a função lucro também poderia ter sido considerada como um novo objetivo do problema.

6.3 CONSOLIDADO DOS RESULTADOS

Este capítulo teve por objetivo verificar a qualidade da solução obtida pelo algoritmo proposto nesta dissertação, a saber, o *Multi-objective Vibrating Particles System* (MOVPS). Para essa finalidade foram analisados estudos de caso com diferentes níveis de complexidade. Estes englobam problemas algébricos e diferenciais (de valor inicial e de contorno) e que apresentam restrições. Os resultados obtidos foram comparados com aqueles considerando técnicas já consolidadas.

De forma geral, pode-se concluir que a metodologia proposta mostrou-se competitiva visto a qualidade da aproximação da curva de Pareto obtida em cada aplicação. Em relação aos problemas com mais de dois objetivos, reitera-se que, apesar do comparativo a partir das projeções do espaço de objetivos ser uma tarefa complexa (para uma comparação mais justa o ideal seria que o tamanho da população tendesse ao infinito), o propósito foi verificar a tendência das projeções obtidas pelo algoritmo proposto e outras estratégias já consolidadas na literatura.

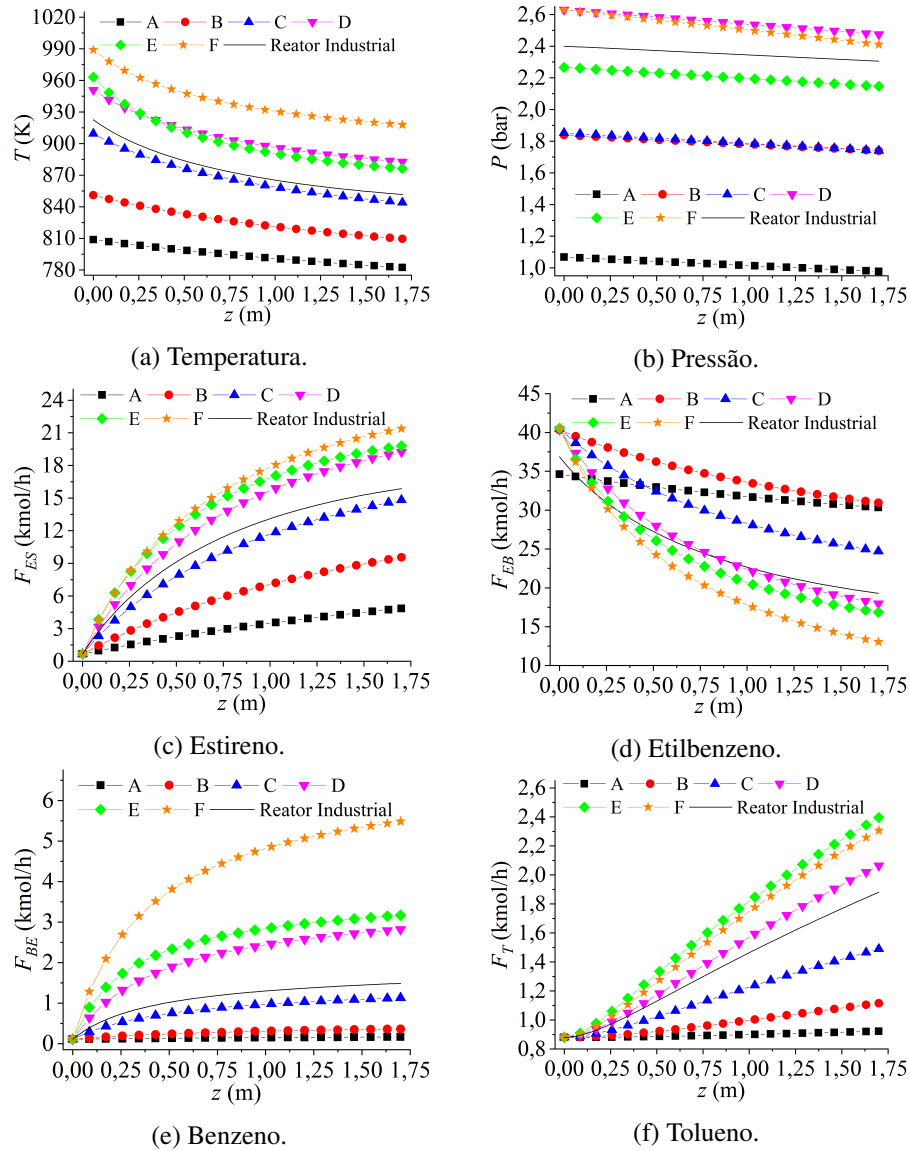


Figura 58 – Perfis de temperatura, pressão e fluxo molar industriais e obtidos pelo MOVPS para o problema do reator de estireno.

Além disso, a avaliação de estudos de caso mais realísticos permitiu demonstrar a boa capacidade de exploração do algoritmo proposto, sendo também evidente a vantagem deste em relação à quantidade de parâmetros que devem ser definidos pelo usuário, o que torna este um método de fácil calibração. Finalmente, enfatiza-se que o MOVPS pode ser adotado como uma estratégia de otimização para o estudo de novas aplicações.

7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

7.1 CONCLUSÕES

Esta dissertação teve como objetivo estudar e avaliar o Algoritmo de Partículas Vibrantes (APV), bem como propor a sua extensão para o contexto multi-objetivo com aplicação ao projeto de sistemas de engenharia. Para essa finalidade, inicialmente foi realizado um estudo sobre o referido algoritmo, assim como foi avaliada a influência dos seus parâmetros em problemas mono-objetivos. Com base nos resultados obtidos, é possível destacar-se os seguintes pontos:

- Os resultados obtidos com a análise de sensibilidade demonstraram que, para os casos analisados, o aumento do número de partículas não necessariamente aumenta a chance de convergência para o ótimo. Além disso, a elevação do número de gerações pode sim ser bastante positiva no desempenho do algoritmo, apesar de naturalmente aumentar o custo computacional. Os menores valores de α avaliados forneceram melhores resultados. O melhor valor encontrado para o parâmetro w_1 foi identificado como sendo 0,3; enquanto que para p a análise foi inconclusiva. Assim, como sugestão para inicializar o APV pode-se considerar: $n_{VP} = 25$, $q_{max} = 500$, $\alpha = 0,01$, $w_1 = 0,3$, $p = 0,1$.
- Em relação à aplicação do APV no contexto mono-objetivo foram avaliados projetos de sistemas de engenharia com diferentes características. De forma geral, o APV sempre foi capaz de obter boas aproximações para a solução ótima em comparação com outras estratégias de otimização. Além disso, também se observa bons resultados no que tange o número de avaliações da função objetivo e o tempo de processamento.
- Nesta dissertação foi proposto o algoritmo *Multi-objective Vibrating Particles System* (MOVPS). Este consiste na extensão do APV para o contexto multi-objetivo. Para fins de aplicação, foram avaliadas funções matemáticas clássicas (funções-teste ZDT) e problemas de projeto. Em linhas gerais, em ambas as aplicações o algoritmo proposto foi capaz de obter boas estimativas para a curva de Pareto quando comparado com as soluções analíticas e numéricas. Diante dos resultados obtidos, é possível recomendar o uso do MOVPS para a resolução de outros problemas de otimização multi-objetivo com diferentes níveis de complexidade.
- Finalmente, pode-se afirmar que a principal contribuição desta dissertação é o desenvolvimento de uma ferramenta de otimização para o tratamento de problemas de projeto de sistemas de engenharia, a qual pode ser utilizada em outros tipos de problemas.

7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como propostas de trabalhos futuros pretende-se:

- Avaliar a inclusão de outros operadores e verificar a sua influência nos resultados obtidos pelo MOVPS.
- Associar o algoritmo MOVPS a métodos clássicos ou outras estratégias heurísticas para avaliação de sua capacidade no contexto híbrido.
- Propor e resolver problemas de projeto com a presença de incertezas usando o MOVPS.

REFERÊNCIAS

ABDALLA, B.; ELNASHAIE, S.; ALKHOWAITER, S.; ELSHISHINI, S. Intrinsic kinetics and industrial reactors modeling for the dehydrogenation of ethyl benzene to styrene on promoted iron oxide catalysts. *Applied Catalysis A: General*, v. 113, n. 1, p. 89–102, 1994. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0926-860X\(94\)80243-2](https://doi.org/10.1016/0926-860X(94)80243-2)>. Citado na página 126.

AKHTAR, S.; TAI, K.; RAY, T. A socio-behavioural simulation model for engineering design optimization. *Engineering Optimization*, Taylor & Francis, v. 34, n. 4, p. 341–354, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/03052150212723>>. Citado 7 vezes nas páginas 62, 63, 64, 67, 68, 73 e 74.

ARORA, J. S. *Introduction to Optimum Design*. New York: McGraw-Hill, 1989. Citado 3 vezes nas páginas 58, 59 e 60.

ARRUDA, E. B. *Comparação do Desempenho do Secador Rotofluidizado com o Secador Rotatório Convencional: Secagem de Fertilizantes*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Química, Universidade Federal de Uberlândia, 2008. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/15102>>. Citado 3 vezes nas páginas 117, 119 e 120.

AVDER, A.; SAHIN, I.; DORTERLER, M. Multi-objective design optimization of the robot grippers with spea2. *International Journal of Intelligent Systems and Applications in Engineering*, v. 7, n. 2, p. 83–87, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.18201/ijisae.2019252785>>. Citado 2 vezes nas páginas 97 e 101.

BABU, B.; CHAKOLE, P. G.; MUBEEN, J. S. Multiobjective differential evolution (mode) for optimization of adiabatic styrene reactor. *Chemical Engineering Science*, Elsevier, v. 60, n. 17, p. 4822–4837, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ces.2005.02.073>>. Citado 8 vezes nas páginas 124, 125, 126, 131, 132, 134, 135 e 136.

BELEGUNDU, A. D. *A Study of Mathematical Programming Methods for Structural Optimization*. Tese (Doutorado) — University of Iowa, 1982. Citado 3 vezes nas páginas 58, 59 e 60.

BORGES, R. A. *Contribuição ao Estudo de Absorvedores Dinâmicos de Vibrações Não-Lineares*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2008. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/14692>>. Citado 6 vezes nas páginas 105, 106, 107, 108, 109 e 111.

BOYCHUK, L. M.; OVCHINNIKOV, V. O. Principal methods of solution of multicriterial optimization problems. *Soviet Automatic Control*, v. 6, n. 3, p. 1–4, 1973. Citado na página 18.

BUDYNAS, R. G.; NISBETT, J. K. *Elementos de máquinas de Shigley*. 8. ed. Porto Alegre: McGraw Hill Brasil, 2011. Citado na página 58.

CABRERA, J.; NADAL, F.; MUNOZ, J.; SIMON, A. Multiobjective constrained optimal synthesis of planar mechanisms using a new evolutionary algorithm. *Mechanism and Machine Theory*, v. 42, n. 7, p. 791–806, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2006.07.004>>. Citado na página 97.

- CASTRO, R. E. d. *Otimização de Estruturas com Multi-objetivos via Algoritmos Genéticos de Pareto*. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia Civil - COPPE/UFRJ, 2001. Disponível em: <<http://www.coc.ufrj.br/pt/teses-de-doutorado/145-2001/915-rodrigo-evangelista-de-castro>>. Citado 5 vezes nas páginas 77, 87, 88, 90 e 91.
- CHEN, S. *Styrene*. First edition. Encyclopedia of chemical technology. J. I. Kroschwitz H. G. Mary (Eds.): New York: Wiley, 1992. Citado 4 vezes nas páginas 123, 124, 125 e 133.
- CHENG, F. Y.; LI, X. S. Generalized center method for multiobjective engineering optimization. *Engineering Optimization*, Taylor & Francis, v. 31, n. 5, p. 641–661, 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/03052159908941390>>. Citado na página 85.
- COELHO, L. S. Fundamentos, potencialidades e aplicações de algoritmos. In: *Notas em Matemática Aplicada*. São Carlos, SP: SBMAC, 2003. v. 2. Citado na página 10.
- COELHO, R. F. *Multicriteria Optimization with Expert Rules for Mechanical Design*. Tese (Doutorado) — Université Libre de Bruxelles, Faculté des Sciences Appliquées, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 10, 12, 15 e 16.
- COELLO, C.; PULIDO, G.; LECHUGA, M. Handling multiple objectives with particle swarm optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, v. 8, n. 3, p. 256–279, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TEVC.2004.826067>>. Citado na página 39.
- COELLO, C. A. C. Use of a self-adaptive penalty approach for engineering optimization problems. *Computers in Industry*, Elsevier, v. 41, n. 2, p. 113–127, 2000. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0166-3615\(99\)00046-9](https://doi.org/10.1016/S0166-3615(99)00046-9)>. Citado 5 vezes nas páginas 59, 60, 63, 64 e 67.
- COELLO, C. A. C.; MONTES, E. M. Constraint-handling in genetic algorithms through the use of dominance-based tournament selection. *Advanced Engineering Informatics*, Elsevier, v. 16, n. 3, p. 193–203, 2002. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S1474-0346\(02\)00011-3](https://doi.org/10.1016/S1474-0346(02)00011-3)>. Citado 7 vezes nas páginas 58, 59, 60, 61, 63, 64 e 65.
- COOK, B. *Why the Engineering Design Process is Important*. 2023. Disponível em: <<https://fellow.app/blog/engineering/why-the-engineering-design-process-is-important/>>. Acesso em: 5 Mar 2023. Citado na página 1.
- COUTO, D.; SILVA, C. A.; BARSANTE, L. S. Otimização de funções multimodais via técnica de inteligência computacional baseada em colônia de vagalumes. In: *Proceedings of the XXXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*. CILAMCE. Rio de Janeiro, RJ: ABMEC, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.20906/CPS/CILAMCE2015-0506>>. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 44.
- CUTKOSKI, M. On grasp choice, grasp models, and the design of hands for manufacturing tasks. *IEEE Trans. Robot. Automat*, v. 5, n. 3, p. 269–279, 1989. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/70.34763>>. Citado na página 97.
- DATTA, R.; DEB, K. Multi-objective design and analysis of robot gripper configurations using an evolutionary-classical approach. In: *Proceedings of the 13th annual conference on Genetic and evolutionary computation*. Dublin, Ireland: ACM, 2011. p. 1843–1850. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/2001576.2001823>>. Citado 6 vezes nas páginas 97, 99, 100, 101, 103 e 105.

DEB, K. Optimal design of a welded beam via genetic algorithms. *AIAA Journal*, v. 29, n. 11, p. 2013–2015, 1991. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/3.10834>>. Citado 2 vezes nas páginas 67 e 68.

DEB, K. GeneAS: A robust optimal design technique for mechanical component design. In: *Evolutionary Algorithms in Engineering Applications*. Berlin: Springer, 1997. p. 497–514. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-03423-1_27>. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 63.

DEB, K. *Multi-objective Optimization using Evolutionary Algorithms*. Chichester, England: John Wiley & Sons, 2001. Citado 16 vezes nas páginas 2, 3, 5, 6, 8, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 36, 38 e 83.

DEB, K.; PRATAP, A.; AGARWAL, S.; MEYARIVAN, T. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, v. 6, n. 2, p. 182–197, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/4235.996017>>. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 78.

DENIS, H.; CASTOR, W. *Styrene*. First edition. Ullmann's encyclopedia of industrial chemistry. B. Elvers, S. Hawkin W. Russey (Eds.): New York: Wiley, 1982. 325-335 p. Citado 2 vezes nas páginas 123 e 125.

DORIGO, M.; MANIEZZO, V.; COLORNI, A. Positive feedback as a search strategy. *Technical Report TR-91-016*, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 10.

EDGEWORTH, F. Y. *Mathematical Psychics: an essay on the application of mathematics to the moral sciences*. London: C Kegan Paul, 1881. Citado na página 19.

ELNASHAIE, S.; ABDALLA, B.; HUGHES, R. Simulation of the industrial fixed bed catalytic reactor for the dehydrogenation of ethyl benzene to styrene: heterogeneous dusty gas model. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, v. 32, n. 1, p. 2537–2541, 1993. Disponível em: <<https://doi.org/10.1021/ie00023a016>>. Citado na página 126.

ELNASHAIE, S. S. E. H.; ELSHISHINI, S. S. *Modelling, Simulation and Optimization of Industrial Fixed Bed Catalytic Reactors*. First edition. Yverdon, Switzerland: Gordon and Breach Science Publisher, 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1201/9780203746769>>. Citado 4 vezes nas páginas 128, 129, 130 e 132.

ESKANDAR, H.; SADOLLAH, A.; BAHREININEJAD, A.; HAMDÍ, M. Water cycle algorithm - a novel metaheuristic optimization method for solving constrained engineering optimization problems. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 110-111, p. 151–166, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.07.010>>. Citado 11 vezes nas páginas 1, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 69, 70, 73 e 74.

FATHI, H.; VAEZ, S. R. H.; ZHANG, Q.; ALAVI, A. H. A new approach for crack detection in plate structures using an integrated extended finite element and enhanced vibrating particles system optimization methods. *Structures*, Elsevier, v. 29, p. 638–651, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.istruc.2020.11.017>>. Citado na página 3.

FETTAKA, S. *Application of Multiobjective Optimization in Chemical Engineering Design and Operation*. Dissertação (Mestrado) — Department of Chemical and Biological Engineering, Faculty of Engineering, University of Ottawa, 2012. Disponível em:

<http://dx.doi.org/10.20381/ruor-5954>>. Citado 7 vezes nas páginas 124, 125, 126, 131, 132, 134 e 136.

FLETCHER, R. An ideal penalty function for constrained optimization. *IMA Journal of Applied Mathematics*, Oxford University Press, v. 15, n. 3, p. 319–342, 1975. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/imamat/15.3.319>>. Citado na página 58.

GANDOMI, A. H.; YANG, X.-S.; ALAVI, A. H. Cuckoo search algorithm: a metaheuristic approach to solve structural optimization problems. *Engineering with Computers*, Springer, v. 29, n. 1, p. 17–35, 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00366-011-0241-y>>. Citado 8 vezes nas páginas 62, 63, 64, 69, 70, 71, 73 e 74.

GISVOLD, K. M.; MOE, J. A method for nonlinear mixed-integer programming and its application to design problems. *Journal of Engineering for Industry*, v. 94, p. 353–364, 1972. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.3428163>>. Citado na página 13.

GNETCHEJO, P. J.; ESSIANE, S. N.; ELE, P.; WAMKEUE, R.; WAPET, D. M.; NGOFFE, S. P. Enhanced vibrating particles system algorithm for parameters estimation of photovoltaic system. *Journal of Power and Energy Engineering*, Scientific Research Publishing, v. 7, p. 1–26, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.4236/jpee.2019.78001>>. Citado na página 3.

GOLDBERG, D. E. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. USA: Addison-Wesley, 1989. Disponível em: <https://dl.acm.org/doi/10.5555/534133>>. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 8.

GUJARATHI, A.; BABU, B. Multi-objective optimization of industrial styrene reactor: Adiabatic and pseudo-isothermal operation. *Chemical Engineering Science*, v. 65, n. 2010, p. 2009–2026, 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ces.2009.11.041>>. Citado 9 vezes nas páginas 124, 125, 126, 131, 132, 133, 134, 135 e 136.

HAUPT, R. L.; HAUPT, S. E. *Practical Genetic Algorithms*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/0471671746>>. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 8.

HE, Q.; WANG, L. An effective co-evolutionary particle swarm optimization for constrained engineering design problems. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Elsevier, v. 20, n. 1, p. 89–99, 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2006.03.003>>. Citado 5 vezes nas páginas 59, 60, 62, 63 e 64.

HOLLAND, J. H. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1975. Citado na página 8.

HUSSEIN, A.; MOSTAFA, H.; BADREL-DIN, M.; SULTAN, O.; KHAMIS, A. Metaheuristic optimization approach to mobile robot path planning. In: *2012 International Conference on Engineering and Technology (ICET)*. Cairo, Egypt: IEEE, 2012. p. 1–6. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/ICEngTechnol.2012.6396150>>. Citado na página 1.

JAIN, H.; DEB, K. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point based non-dominated sorting approach, part II: Handling constraints and extending to an adaptive approach. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 18, n. 4, p. 602–622, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/TEVC.2013.2281534>>. Citado 3 vezes nas páginas 92, 93 e 97.

JELASKA, D. *Gears and gear drives*. Chichester: John Wiley & Sons, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/9781118392393>>. Citado na página 71.

KANNAN, B. K.; KRAMER, S. N. An augmented Lagrange multiplier based method for mixed integer discrete continuous optimization and its applications to mechanical design. *Journal of Mechanical Design*, v. 116, n. 2, p. 405–411, 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.2919393>>. Citado 5 vezes nas páginas 13, 14, 62, 63 e 64.

KAVEH, A. Vibrating particles system algorithm. *Advances in Metaheuristic Algorithms for Optimal Design of Structures*, Springer, p. 511–539, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-46173-1_17>. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 38.

KAVEH, A.; BAKHSHPOORI, T. Metaheuristics: outlines, MATLAB codes and examples. Springer, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-3-030-04067-3>>. Citado na página 30.

KAVEH, A.; GHAZAAN, M. I. Vibrating particles system algorithm for truss optimization with multiple natural frequency constraints. *Acta Mechanica*, Springer, v. 228, n. 1, p. 307–322, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00707-016-1725-z>>. Citado 6 vezes nas páginas 3, 25, 26, 29, 30 e 41.

KAVEH, A.; GHAZAAN, M. I. A new VPS-based algorithm for multi-objective optimization problems. *Engineering with Computers*, Springer, v. 36, p. 1029–1040, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00366-019-00747-8>>. Citado 3 vezes nas páginas 3, 40 e 41.

KAVEH, A.; TALATAHARI, S. Particle swarm optimizer, ant colony strategy and harmony search scheme hybridized for optimization of truss structures. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 87, n. 5-6, p. 267–283, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2009.01.003>>. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 34.

KAVEH, A.; TALATAHARI, S. An improved ant colony optimization for constrained engineering design problems. *Engineering Computations*, Emerald Group Publishing Limited, v. 27, n. 1, p. 155–182, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1108/02644401011008577>>. Citado 4 vezes nas páginas 59, 60, 63 e 64.

KAVEH, A.; VAEZ, S. R. H.; HOSSEINI, P. MATLAB code for an enhanced vibrating particles system algorithm. *International Journal of Optimization in Civil Engineering*, v. 8, n. 3, p. 401–414, 2018. Disponível em: <<http://ijoce.iust.ac.ir/article-1-352-en.html>>. Citado na página 3.

KAVEH, A.; VAEZ, S. R. H.; HOSSEINI, P. Enhanced vibrating particles system algorithm for damage identification of truss structures. *Scientia Iranica*, v. 26, n. 1, p. 246–256, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.24200/SCI.2017.4265>>. Citado na página 3.

KAVEH, A.; VAEZ, S. R. H.; HOSSEINI, P.; BAKHTIYARI, M. Optimal design of steel curved roof frames by enhanced vibrating particles system algorithm. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, v. 63, n. 4, p. 947–960, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.3311/PPci.14812>>. Citado na página 3.

KENNEDY, J.; EBERHART, R. Particle swarm optimization. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks*. Perth, Australia: IEEE, 1995. p. 1942–1948. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/488968>>. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 8.

- KENNEDY, J.; EBERHART, R. C.; SHI, Y. *Swarm Intelligence*. USA: Academic Press, 2001. Citado na página 8.
- KRAMER, O. *Self-adaptive heuristics for evolutionary computation*. Berlin: Springer, 2008. v. 147. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-3-540-69281-2>>. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 44.
- LAND, A. H.; DOIG, A. G. An automatic method of solving discrete programming problems. *Econometrica*, v. 28, n. 3, p. 497–520, 1960. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/1910129>>. Citado na página 13.
- LI, C.; HUBBELL, O. *Styrene*. First edition. Encyclopedia of chemical processing and design. J. J. Mcketta G. E. Weismantel (Eds.): New York: Wiley, 1982. 197-217 p. Citado 2 vezes nas páginas 123 e 125.
- LI, M.; QIN, Q.; ZHANG, S.; DENG, H. Optimal design for heavy forging robot grippers. *Applied Mechanics and Materials*, v. 44–47, n. 1, p. 743–747, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.44-47.743>>. Citado na página 97.
- LIU, H.; CAI, Z.; WANG, Y. Hybridizing particle swarm optimization with differential evolution for constrained numerical and engineering optimization. *Applied Soft Computing*, Elsevier, v. 10, n. 2, p. 629–640, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.asoc.2009.08.031>>. Citado 9 vezes nas páginas 59, 60, 61, 63, 64, 69, 70, 73 e 74.
- LOBATO, F. S. *Otimização Multi-objetivo para o Projeto de Sistemas de Engenharia*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2008. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/14677>>. Citado 16 vezes nas páginas 1, 2, 3, 6, 9, 10, 14, 16, 18, 43, 57, 63, 77, 78, 88 e 91.
- LOBATO, F. S.; BORGES, R. A.; STEFFEN Jr, V. *Bio-inspired Optimization Methods - Modeling, Design, Inverse Problem and Robust Optimization of a Representative Mechanical System*. London, United Kingdom: LAP Lambert Academic Publishing, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 105, 106 e 107.
- LOGIST, F.; VALLERIO, M.; HOUSKA, B.; DIEHL, M.; VAN IMPE, J. Multi-objective optimal control of chemical processes using ACADO toolkit. *Computers & Chemical Engineering*, v. 37, p. 191–199, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2011.11.002>>. Citado na página 113.
- LOGSDON, J. S. *Efficient Determination of Optimal Control Profiles for Differential Algebraic Systems*. Tese (Doutorado) — Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA 1990., 1990. Citado 2 vezes nas páginas 113 e 114.
- MERIAM, J. L.; KRAIGE, L. G. *Mecânica para engenharia: estática*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. Citado na página 68.
- METROPOLIS, N.; ROSENBLUTH, A. W.; ROSENBLUTH, M. N.; TELLER, A. H.; TELLER, E. Equation of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics*, v. 21, p. 1087–1092, 1953. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1699114>>. Citado na página 10.

MICHALEWICZ, Z.; DEB, K.; SCHMIDT, M.; STIDEN, T. Evolutionary algorithms for engineering applications. In: MIETTINEN, K.; NEITTAANMAKI, P.; MAKELA, M. M.; PÉRIAUX, J. (Ed.). *Evolutionary Algorithms in Engineering and Computer Science*. England: John Wiley & Sons, 1999. Citado na página 13.

MICHALEWICZ, Z.; JANIKOW, C. Z. Handling constraints in genetic algorithms. In: *Proceedings of the 4th International Conference on Genetic Algorithms*. EUA: Morgan Kaufmann, 1991. p. 151–157. Citado na página 13.

MICHALEWICZ, Z.; LOGAN, T.; SWAMINATHAN, S. Evolutionary operators for continuous convex parameter spaces. In: *Proceedings of the 3rd Annual Conference on Evolutionary Programming*. Singapore: World Scientific, 1994. p. 84–97. Citado na página 13.

MOLGA, M.; SMUTNICKI, C. Test functions for optimization needs. *Test functions for optimization needs*, v. 101, p. 48, 2005. Disponível em: <<https://robertmarks.org/Classes/ENGR5358/Papers/functions.pdf>>. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 44.

MONTES, E. M.; COELLO, C. A. C. An empirical study about the usefulness of evolution strategies to solve constrained optimization problems. *International Journal of General Systems*, Taylor & Francis, v. 37, n. 4, p. 443–473, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/03081070701303470>>. Citado 5 vezes nas páginas 59, 60, 61, 63 e 64.

MUSSELMAN, K.; TALAVAGE, J. A tradeoff cut approach to multiple objective optimization. *Operations Research*, INFORMS, v. 28, n. 6, p. 1424–1435, 1980. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287/opre.28.6.1424>>. Citado 2 vezes nas páginas 95 e 96.

OSBORN, G. S.; WHITE, G. M.; SULAIMAN, A. H.; WELTON, L. R. Predicting equilibrium moisture proportions of soybeans. *Transactions of the ASAE*, v. 32, p. 2109–2113, 1989. Disponível em: <<https://doi.org/10.13031/2013.31271>>. Citado na página 119.

OSYCZKA, A. *Multicriterion Optimization in Engineering with FORTRAN Programs*. England: Ellis Horwood Limited, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

OSYCZKA, A. *Evolutionary Algorithms for Single and Multicriteria Design Optimization*. First edition. Berlin: Physica Heidelberg, 2002. Citado na página 97.

OSYCZKA, A.; KRENICH, S. *New Methods for Multicriteria Design Optimization using Evolutionary Algorithms*. First edition. France: Optimal Design Laboratories de Mécanique des Solides École Polytechnique Palaiseau, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 97 e 101.

PAGE, G. E. *Factors Influencing the Maximum Rates of Air Drying Shelled Corn in Thin-Layers*. Dissertação (Mestrado) — Indiana-USA, Purdue University., 1949. Disponível em: <<https://docs.lib.purdue.edu/dissertations/AAI1300089/>>. Citado na página 119.

PARETO, V. *Cours D'Économie Politique*. France: F. Rouge, Lausanne, 1896. Vol I and II. Citado na página 19.

PASSOS, A. G. d.; LUERSEN, M. A. Multi-objective optimization with kriging surrogates using “moko”, an open source package. *Latin American Journal of Solids and Structures*, SciELO Brasil, v. 15, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1679-78254324>>. Citado na página 92.

- PATEL, V. K.; SAVSANI, V. J.; TAWHID, M. A. Thermal design and optimization of heat exchangers. In: *Thermal System Optimization: A Population-Based Metaheuristic Approach*. Cham: Springer, 2019. p. 33–98. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-10477-1_3>. Citado na página 1.
- RAGSDELL, K. M.; PHILLIPS, D. T. Optimal design of a class of welded structures using geometric programming. *ASME Journal of Engineering for Industry*, v. 98, n. 3, p. 1021–1025, 1976. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3438995>>. Citado na página 67.
- RAO, R.; SAVSANI, V.; VAKHARIA, D. Teaching–learning–based optimization: A novel method for constrained mechanical design optimization problems. *Computer-Aided Design*, v. 43, n. 1, p. 303–315, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cad.2010.12.015>>. Citado na página 97.
- RAO, S. S. Game theory approach for multiobjective structural optimization. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 25, n. 1, p. 119–127, 1987. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90223-9](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90223-9)>. Citado na página 85.
- RAO, S. S. *Engineering Optimization: Theory and Practice*. 4. ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/9780470549124>>. Citado 3 vezes nas páginas 1, 5 e 65.
- RAO, S. S. *Mechanical Vibrations*. 5th. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 27.
- RAVINDRAN, A.; RAGSDELL, K. M.; REKLAITIS, G. V. *Engineering Optimization: Methods and Applications*. 2. ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 1, 2, 5 e 66.
- RAY, T.; LIEW, K.-M. Society and civilization: an optimization algorithm based on the simulation of social behavior. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 7, n. 4, p. 386–396, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TEVC.2003.814902>>. Citado 11 vezes nas páginas 59, 60, 61, 62, 67, 68, 69, 70, 71, 73 e 74.
- RAY, T.; SAINI, P. Engineering design optimization using a swarm with an intelligent information sharing among individuals. *Engineering Optimization*, Taylor & Francis, v. 33, n. 6, p. 735–748, 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/03052150108940941>>. Citado 8 vezes nas páginas 59, 60, 61, 69, 70, 72, 73 e 74.
- RAY, T.; TAI, K.; SEOW, K. C. Multiobjective design optimization by an evolutionary algorithm. *Engineering Optimization*, Taylor & Francis, v. 33, n. 4, p. 399–424, 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/03052150108940926>>. Citado 2 vezes nas páginas 85 e 86.
- RICE, H.; MCCRAITH, J. Practical non-linear vibration absorber design. *Journal of Sound and Vibration*, v. 116, n. 3, p. 545–559, 1987. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(87\)81383-4](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(87)81383-4)>. Citado na página 108.
- SALUKVADZE, M. On the existence of solutions in problems of optimization under vector-valued criteria. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 13, p. 203–217, 1974. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF00935540>>. Citado na página 18.

- SANDGREN, E. Nonlinear integer and discrete programming in mechanical design. In: ASME. *International Design Engineering Technical Conference & Computers and Information in Engineering*. Florida, USA, 1988. v. 26584, p. 95–105. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/DETC1988-0012>>. Citado 3 vezes nas páginas 13, 62 e 63.
- SARAMAGO, S. F. P. Métodos de otimização randômica: algoritmos genéticos e simulated annealing. In: *Notas em Matemática Aplicada*. São Carlos, SP: SBMAC, 2003. v. 6. Citado 4 vezes nas páginas 2, 8, 9 e 10.
- SARAVANAN, R.; RAMABALAN, S.; EBENEZER, N.; DHARMARAJA, C. Evolutionary multi criteria design optimization of robot grippers. *Applied Soft Computing*, v. 9, n. 1, p. 159–172, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.asoc.2008.04.001>>. Citado na página 97.
- SCHOTT, J. R. *Fault Tolerant Design using Single and Multicriteria Genetic Algorithm Optimization*. Dissertação (Mestrado) — Massachusetts Institute of Technology, 1995. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/1721.1/11582>>. Citado na página 23.
- SHAHROUZI, M.; FARAH-ABADI, H. Optimal seismic design of steel moment frames by un-damped multi-objective vibrating particles system. *Asian Journal of Civil Engineering*, Springer, v. 19, p. 877–891, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s42107-018-0070-z>>. Citado na página 3.
- SHEEL, J.; CROWE, C. Simulation and optimization of an existing ethyl benzene dehydrogenation reactor. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, v. 47, n. 1, p. 183–187, 1969. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/cjce.5450470215>>. Citado 6 vezes nas páginas 126, 127, 128, 129, 131 e 132.
- SHEPPARD, C.; MAIER, E.; CARAM, H. Ethyl benzene dehydrogenation reactor model. *Industrial and Engineering Chemistry Process Design Development*, v. 25, n. 1, p. 207–210, 1986. Disponível em: <<https://doi.org/10.1021/i200032a033>>. Citado na página 126.
- SHIGLEY, J. E. *Mechanical Engineering Design*. New York: McGraw-Hill, 1963. Citado na página 66.
- SILVA, C. M. *Desenvolvimento de um Algoritmo de Otimização Multiobjetivo usando Algoritmos Genéticos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2004. Citado na página 77.
- SMITH, J.; VAN NESS, H.; ABBOTT, M. *Introduction to Chemical Engineering Thermodynamics*. 7th. ed. New York: McGraw-Hill, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 129 e 130.
- SOCHA, K. ACO for continuous and mixed-variable optimization. In: *Ant Colony Optimization and Swarm Intelligence*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. p. 25–36. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-28646-2_3>. Citado na página 14.
- SOUZA, D. L.; LOBATO, F. S.; GEDRAITE, R. Robust multiobjective optimization applied to optimal control problems using differential evolution. *Chemical Engineering & Technology*, v. 38, p. 721–726, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/ceat.201400571>>. Citado na página 113.

- STORN, R.; PRICE, K. Differential evolution - a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces. *Technical Report TR-95-012*, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 9.
- STORN, R.; PRICE, K. Differential evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, v. 11, n. 4, p. 341–359, 1997. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1008202821328>>. Citado na página 9.
- TALATAHARI, S.; JALILI, S.; AZIZI, M. Optimum design of steel building structures using migration-based vibrating particles system. *Structures*, Elsevier, v. 33, p. 1394–1413, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.istruc.2021.05.028>>. Citado na página 3.
- TARAFDAR, A.; RANGAIAH, G.; RAY, A. Multiobjective optimization of an industrial styrene monomer manufacturing process. *Chemical Engineering Science*, v. 60, n. 1, p. 347–363, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ces.2004.07.120>>. Citado na página 126.
- TELLES, P. C. d. S. *Vasos de Pressão*. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996. Citado na página 61.
- TICONA, W. G. C. *Aplicação de Algoritmos Genéticos Multi-Objetivo para Alinhamento de Sequências Biológicas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.11606/D.55.2003.tde-09052003-215914>>. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.
- TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. *Theory of Elastic Stability*. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1961. Citado na página 66.
- TSAI, J.-F. Global optimization of nonlinear fractional programming problems in engineering design. *Engineering Optimization*, Taylor & Francis, v. 37, n. 4, p. 399–409, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/03052150500066737>>. Citado 3 vezes nas páginas 59, 69 e 70.
- VAN KAMPEN, A. H. C.; STROM, C. S.; BUYDENS, L. M. C. Lethalization, penalty and repair functions for constraint handling in the genetic algorithm methodology. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, Elsevier, v. 34, p. 55–68, 1996. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0169-7439\(96\)00010-X](https://doi.org/10.1016/0169-7439(96)00010-X)>. Citado na página 10.
- VANDERPLAATS, G. N. *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*. 3. ed. USA: Vanderplaats Research & Development Inc, 1999. Citado 10 vezes nas páginas 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 57, 85 e 100.
- WALTZ, F. M. An engineering approach: hierarchical optimization criteria. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 12, p. 179–180, 1967. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TAC.1967.1098537>>. Citado na página 18.
- WANG, Y.; CAI, Z.; ZHOU, Y.; FAN, Z. Constrained optimization based on hybrid evolutionary algorithm and adaptive constraint-handling technique. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, v. 37, n. 4, p. 395–413, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00158-008-0238-3>>. Citado 9 vezes nas páginas 59, 60, 61, 67, 68, 69, 70, 73 e 74.
- WEDYAN, M.; ELSHAWEESH, O.; RAMADAN, E.; ALTURKI, R. Vibrating particles system algorithm for solving classification problems. *Computer Systems Science & Engineering*, v. 43, n. 3, p. 1189–1206, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.32604/csse.2022.024210>>. Citado na página 3.

WENNER, R.; DYBDAL, E. Catalytic dehydrogenation of ethyl benzene. *Chemical Engineering Progress*, v. 44, n. 1, p. 275–286, 1948. Citado na página 125.

YANG, X.-S. *Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms*. University of Cambridge, United Kingdom: Luniver Press, 2008. Citado na página 9.

YANG, X.-S.; GANDOMI, A. H. Bat algorithm: a novel approach for global engineering optimization. *Engineering Computations*, Emerald Publishing, v. 29, n. 5, p. 464–483, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1108/02644401211235834>>. Citado 4 vezes nas páginas 69, 70, 73 e 74.

YEE, A.; RAY, A.; RANGAIAH, G. Multiobjective optimization of an industrial styrene reactor. *Computers and Chemical Engineering*, v. 27, n. 1, p. 111–130, 2003. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0098-1354\(02\)00163-1](https://doi.org/10.1016/S0098-1354(02)00163-1)>. Citado 11 vezes nas páginas 124, 125, 126, 127, 128, 131, 132, 133, 134, 135 e 136.

ZAHARA, E.; KAO, Y.-T. Hybrid nelder-mead simplex search and particle swarm optimization for constrained engineering design problems. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 36, n. 2, p. 3880–3886, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.eswa.2008.02.039>>. Citado 6 vezes nas páginas 59, 60, 61, 62, 63 e 64.

ZAIN, A. M.; HARON, H.; SHARIF, S. Application of GA to optimize cutting conditions for minimizing surface roughness in end milling machining process. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 37, p. 4650–4659, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.eswa.2009.12.043>>. Citado na página 1.

ZHANG, M.; LUO, W.; WANG, X. Differential evolution with dynamic stochastic selection for constrained optimization. *Information Sciences*, Elsevier, v. 178, n. 15, p. 3043–3074, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ins.2008.02.014>>. Citado 9 vezes nas páginas 59, 60, 61, 67, 68, 69, 70, 73 e 74.

ZITAR, R. A. A. Optimum gripper using ant colony intelligence. *Industrial Robot: An International Journal*, v. 31, n. 1, p. 17–23, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1108/01439910510573246>>. Citado na página 97.

ZITZLER, E.; DEB, K.; THIELE, L. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results. *Evolutionary Computation Journal*, v. 8, n. 2, p. 173–195, 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.1162/106365600568202>>. Citado 2 vezes nas páginas 77 e 83.