

LAURA DANIELA BERMÚDEZ MONTOYA

$SL(n, \mathbb{Z})$ como reticulado de $SL(n, \mathbb{R})$ via
conjuntos de Siegel



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2023

LAURA DANIELA BERMÚDEZ MONTOYA

$SL(n, \mathbb{Z})$ como reticulado de $SL(n, \mathbb{R})$ via conjuntos de Siegel

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.

Linha de Pesquisa: Geometria e Topologia.

Orientador: Prof. Dr. Jean Venato Santos.

Coorientador: Prof. Dr. Plinio Guillel Pino Murillo.

UBERLÂNDIA - MG
2023

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

M798 Montoya, Laura Daniela Bermudez, 1997-
2023 SL(n,Z) como reticulado de SL(n,R) via conjuntos de
Siegel [recurso eletrônico] / Laura Daniela Bermudez
Montoya. - 2023.

Orientador: Jean Venato Santos.

Coorientador: Plínio Guillel Pino Murillo.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2023.396>

Inclui bibliografia.

1. Matemática. I. Santos, Jean Venato, 1979-,
(Orient.). II. Murillo, Plínio Guillel Pino, 1990-,
(Coorient.). III. Universidade Federal de Uberlândia.
Pós-graduação em Matemática. IV. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074


UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática
 Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 160 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
 Telefone: (34) 3239-4209/4154 - www.posgrad.famat.ufu.br - pmat@famat.ufu.br


ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Matemática				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, 109, PPGMAT				
Data:	26 de julho de 2023	Hora de início:	10:00	Hora de encerramento:	12:30
Matrícula do Discente:	12122MAT004				
Nome do Discente:	Laura Daniela Bermúdez Montoya				
Título do Trabalho:	SL(n,Z) como reticulado de SL(n,R) via conjuntos de Siegel				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Geometria e Topologia				
Projeto de Pesquisa de vinculação:					

Reuniu-se na Sala Multiuso da Biblioteca (Campus Santa Mônica) da Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática, assim composta: Professores(as) Doutores(as): Sebastian Hurtado Salazar - YALE UNIVERSITY; Luciana Aparecida Alves - FAMAT/UFU e Jean Venato Santos - FAMAT/UFU, orientador da candidata.

Destaca-se também a presença do Professor Doutor Plinio Guillel Pino Murillo - Universidade Federal Fluminense, coorientador da candidata.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Jean Venato Santos, apresentou a Comissão Examinadora e a candidata, agradeceu a presença do público, e concedeu a Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação da Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir a candidata. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando a candidata:

Aprovada.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Sebastian Hurtado Salazar, Usuário Externo**, em 26/07/2023, às 10:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Jean Venato Santos, Professor(a) do Magistério Superior**, em 26/07/2023, às 11:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Luciana Aparecida Alves, Professor(a) do Magistério Superior**, em 26/07/2023, às 13:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4673955** e o código CRC **34A8C226**.

Dedicatória

A minha mãe Diana Montoya.

À minha irmã querida Karen Bermúdez.

Novamente, por nós e para nós.

Para todas as mulheres que influenciaram minha vida.

Agradecimentos

Agradeço de coração a todas as pessoas que foram fundamentais para a conclusão de meu mestrado. Em primeiro lugar, gostaria de agradecer do fundo do coração à minha amada mãe Diana Montoya e à minha querida irmã Karen Bermúdez, por seu amor incondicional, apoio constante e encorajamento incansável ao longo de toda a minha vida.

Gostaria também de estender meus mais sinceros agradecimentos às pessoas que me receberam de braços abertos neste país encantador. Sua generosidade e apoio nos momentos difíceis foram verdadeiramente importantes para mim, e nunca vou esquecer todo esse apoio. Vocês tornaram minha estadia aqui uma experiência inesquecível e enriquecedora. Agradeço de todo coração por fazerem toda a diferença em minha vida aqui.

Gostaria de expressar minha gratidão ao meu orientador, Prof. Dr. Jean Venato Santos, por me dar uma grande oportunidade, por acreditar em mim e me apoiar. Também desejo agradecer especialmente ao meu coorientador Prof. Dr. Plinio Guillel Pino Murillo por sua orientação, paciência e compreensão ao longo de todo o processo de pesquisa. Sua dedicação e conhecimento foram fundamentais para o meu crescimento acadêmico e pessoal e ao Prof. Dr. Sebastian Hurtado, pela valiosa contribuição, apoio e paciência fornecidos durante as sessões de estudo. Não posso deixar de expressar minha profunda gratidão à Universidade Distrital Francisco José de Caldas, que desempenhou um papel fundamental em mim. Foi através dela que tive a oportunidade de expandir meus conhecimentos, explorar novos horizontes e alcançar este importante marco em minha vida. Gostaria de expressar meu sincero agradecimento à UFU e aos seus professores, que não apenas compartilharam seu vasto conhecimento, mas também me guiaram com paciência e dedicação ao longo das aulas. Agradeço à universidade por fornecer um ambiente acadêmico estimulante, onde fui desafiada a superar meus limites e a expandir meu potencial.

Agradeço novamente a todos que contribuíram para minha trajetória acadêmica e me ajudaram a alcançar este importante em minha vida, especialmente a Giselle León, Rafael Hernandez e Josimar Ramirez. Expresso também minha gratidão ao programa Capes, pelo suporte financeiro que me permitiu realizar meus estudos de mestrado. Sem o seu apoio, essa conquista não seria possível. Por fim, gostaria de enfatizar a importância da presença feminina na ciência e, especialmente, na Matemática, pois acho que é essencial para a construção de uma sociedade mais igualitária e diversa.

Resumo

Neste trabalho, apresentaremos uma reconstrução da demonstração de que o grupo $SL(n, \mathbb{Z})$ forma um reticulado em $SL(n, \mathbb{R})$. Com o objetivo de oferecer uma visão geométrica da definição de reticulado e de domínio fundamental, realizaremos uma introdução aos reticulados em \mathbb{R}^n . Além disso, exploraremos conceitos essenciais relacionados aos grupos de Lie [1]. Faremos também uma breve abordagem sobre a medida de Haar (veja [4] e [5]). Baseando-nos nas obras de referência [8] e [10], bem como na tese de Teixeira [9] e outras fontes, definiremos os conjuntos de Siegel como um domínio fundamental adequado para a ação de $SL(n, \mathbb{Z})$ em $SL(n, \mathbb{R})$. Mostraremos que $SL(n, \mathbb{Z})$ é um subgrupo discreto de $SL(n, \mathbb{R})$ e que os conjuntos de Siegel, definidos adequadamente, formam um domínio fundamental um pouco maior e mais simples para essa ação, com volume finito. Portanto, $SL(n, \mathbb{Z})$ constitui um reticulado em $SL(n, \mathbb{R})$.

Palavras-chave: Conjuntos de Siegel, grupos aritméticos, reticulados em grupos de Lie.

Abstract

We will present a reconstruction of the proof that the group $SL(n, \mathbb{Z})$ forms a lattice in $SL(n, \mathbb{R})$. With the aim of offering a geometric view of the definition of lattice and fundamental domain, we will provide an introduction to lattices in \mathbb{R}^n . Additionally, we will explore essential concepts related to Lie groups [1]. We will also briefly discuss the Haar measure (see [4] and [5]). Drawing from reference works such as [8] and [10], as well as Teixeira's thesis [9] and other sources, we will define Siegel sets as a suitable fundamental domain for the action of $SL(n, \mathbb{Z})$ on $SL(n, \mathbb{R})$. We will demonstrate that $SL(n, \mathbb{Z})$ is a discrete subgroup of $SL(n, \mathbb{R})$, and that the appropriately defined Siegel sets form a slightly larger and simpler fundamental domain for this action, with finite volume. Therefore, $SL(n, \mathbb{Z})$ constitutes a lattice in $SL(n, \mathbb{R})$.

Keywords: Siegel sets, arithmetic groups, lattices in Lie groups.

Conteúdo

Resumo	8
Abstract	9
Introdução	11
1 Reticulados em \mathbb{R}^n	14
1.1 Subgrupos discretos de \mathbb{R}^n	14
1.2 O toro quociente	17
1.3 O espaço dos reticulados em \mathbb{R}^n	18
2 Grupos de Lie e ações de grupo em variedades	21
2.1 Noções básicas sobre os grupos de Lie	21
2.2 Ações de grupos de Lie em variedades	23
2.3 Medida de Haar	25
3 Reticulados em grupos de Lie	29
3.1 Propriedades básicas dos reticulados	29
3.2 Conjuntos de Siegel para $SL(2, \mathbb{Z})$	31
4 $SL(n, \mathbb{Z})$ é um reticulado em $SL(n, \mathbb{R})$	37
4.1 Decomposição de Iwasawa	37
4.2 Conjuntos de Siegel para $SL(n, \mathbb{Z})$	39
4.3 Volume de conjuntos Siegel para $SL(n, \mathbb{Z})$	40
4.4 Resultados	47

Introdução

Os conjuntos de Siegel, também conhecidos como domínios de Siegel, são objetos matemáticos que surgiram no contexto da teoria das formas quadráticas e da teoria dos números. Esses conjuntos receberam o nome em homenagem ao matemático alemão Carl Ludwig Siegel, que fez importantes contribuições no estudo da teoria dos números e das formas quadráticas. Em 1939, Siegel realizou pesquisas fundamentais no campo da teoria dos números e da geometria diofantina. Neste contexto, Siegel estudou as propriedades geométricas e aritméticas das soluções dessas equações diofantinas quadráticas. Para isso, ele introduziu o conceito de domínio de Siegel, que é um conjunto no espaço de matrizes simétricas reais que satisfaz certas propriedades especiais. Segundo [9], Siegel usa esses conjuntos como regiões auxiliares para mostrar que um determinado domínio é um domínio fundamental da ação do grupo de matrizes unimodulares sobre o conjunto de matrizes simétricas definidas positivas, que é identificado com o conjunto de formas quadráticas definidas positivas.

A professora Teixeira em seu trabalho [9], estuda a medida de Haar desse conjunto de Siegel específico, apresentando uma equação que descreve o volume desse conjunto. Em 1962, Borel e Harish-Chandra generalizaram a definição de conjuntos de Siegel de $SL(n, \mathbb{R})$ para qualquer \mathbb{Q} -grupo algébrico semissimples [15]. Esse famoso teorema, estabelece que todo subgrupo aritmético de um grupo algébrico semissimples é um reticulado. Um grupo aritmético é um tipo especial de grupo matricial que é construído tomando pontos inteiros em certos grupos de matrizes. Um exemplo importante de grupo aritmético é $SL(n, \mathbb{Z})$. A construção de grupos aritméticos a partir de pontos inteiros envolve selecionar matrizes com coeficientes inteiros e impor restrições adicionais.

Existem diferentes aplicações dos conjuntos de Siegel em diferentes áreas da matemática devido à sua estrutura simples com relação à estrutura mais complexa dos domínios fundamentais.

Este trabalho aborda alguns subgrupos aritméticos presentes em grupos de Lie semissimples. Em particular, serão discutidos o grupo $SL(n, \mathbb{Z})$ e alguns subgrupos discretos de \mathbb{R}^n . Esse estudo combina conceitos de álgebra, relacionados a grupos de matrizes, com a teoria dos números, que explora propriedades dos números inteiros. No entanto, vale ressaltar que esses subgrupos também possuem aplicações relevantes na área da geometria. Especificamente, eles desempenham um papel fundamental na geometria diferencial clássica.

Em 1977, Margulis estabeleceu o teorema de aritmetividade [12]. Esse teorema afirma que dado o grupo $SL(n, \mathbb{R})$, para $n \geq 3$, se um subgrupo Γ é um reticulado em $SL(n, \mathbb{R})$ então Γ é um grupo aritmético de G . A investigação dos reticulados em grupos de Lie é uma tarefa fascinante e uma das principais motivações deste trabalho, pois a compreensão das técnicas utilizadas aqui para provar que $SL(n, \mathbb{Z})$ é um reticulado em $SL(n, \mathbb{R})$ poderia ser generalizada para demonstrar que outros subgrupos discretos de $SL(n, \mathbb{R})$ são reticulados.

O estudo dos grupos aritméticos tem sido de grande interesse em várias áreas diferentes da matemática, por exemplo:

1. Teoria dos números: o grupo unimodular é usado para definir as equações funcionais satisfeitas por formas modulares, que desempenham um papel central na teoria analítica dos números. Utilizando grupos aritméticos mais gerais em vez de $SL(2, \mathbb{Z})$, pode-se estender a noção de formas modulares para o contexto mais geral de formas automórficas.

Os grupos aritméticos estão intimamente relacionados com o estudo dos números inteiros e suas propriedades aritméticas. Eles são usados para investigar problemas fundamentais na teoria dos números, como a distribuição dos números primos, a conjectura de Riemann e as equações diofantinas.

2. Geometria hiperbólica: a n -esfera \mathbb{S}^n é uma variedade Riemanniana com curvatura seccional positiva constante e é uma variedade compacta. Além disso, existem variedades compactas n -dimensionais com curvatura seccional negativa constante. Essas variedades, sejam compactas ou não, são chamadas de hiperbólicas. O plano hiperbólico é uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante negativa. Em dimensões baixas (até 5), existem construções geométricas de variedades compactas hiperbólicas. No entanto, para $n > 5$, é necessário estudar grupos aritméticos para construir tais variedades n -dimensionais M , os grupos aritméticos surgirão como os grupos fundamentais $\pi_1(M)$.
3. Geometria Aritmética: a geometria aritmética é um campo que une a geometria algébrica e a teoria dos números. Os grupos aritméticos possuem um papel relevante nessa área ao estudar variedades algébricas definidas sobre corpos numéricos e investigar os seus pontos racionais, que apresentam características distintas daqueles presentes em outras variedades algébricas.
4. Teoria de representação: os grupos aritméticos fornecem exemplos interessantes para o estudo da teoria de representação. A teoria de representação de grupos aritméticos tem aplicações na física teórica, especialmente na teoria das cordas e na teoria quântica de campos.
5. Teoria de Lie: os grupos aritméticos são uma classe importante de grupos de Lie, que são objetos fundamentais na teoria de Lie. A estrutura algébrica e geométrica dos grupos aritméticos é estudada no contexto mais amplo da teoria de Lie.
6. Teoria dos grafos: os grafos expansores são construídos a partir de grupos aritméticos e seus quocientes finitos. A teoria dos grafos utiliza esses grafos expansores para investigar propriedades de conectividade e expansão em redes e sistemas complexos.

Essas são apenas algumas das áreas em que os grupos aritméticos são úteis e têm aplicações significativas. Seu estudo e compreensão têm implicações profundas em diversos campos da matemática e suas aplicações em ciência da computação, física e muito mais. A construção e o estudo dos grupos aritméticos se desenvolveram ao longo do tempo, com importantes contribuições de matemáticos renomados, como Emil Artin, André Weil, Jean-Pierre Serre e Gopal Prasad, entre outros.

O principal objetivo deste trabalho é demonstrar que $SL(n, \mathbb{Z})$ é um reticulado em $SL(n, \mathbb{R})$, utilizando conjuntos de Siegel. Para alcançar esse objetivo, o trabalho foi organizado da seguinte maneira:

No Capítulo 1, é explorado o conceito de reticulado em \mathbb{R}^n , que generaliza a estrutura discreta de \mathbb{Z} dentro de \mathbb{R} . Nesta abordagem, tem-se feito a reconstrução da demonstração de um resultado clássico na teoria de reticulados, que estabelece que um subgrupo de \mathbb{R}^n é um reticulado se e somente se for discreto. Também é demonstrado que o grupo $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ é o toro de dimensão n e são estudadas algumas propriedades topológicas do grupo $SL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{Z})$ em relação ao critério de Malher (Teorema 1.17).

No Capítulo 2, são definidos alguns conceitos básicos sobre grupos de Lie, relacionando-os com variedades diferenciáveis além de estudar algumas ações de grupos nessas variedades. Além

disso, apresentaremos a definição da medida de Haar em grupos topológicos e é apresentado o Teorema 2.25, que estabelece a existência e unicidade da medida de Haar em grupos topológicos localmente compactos.

No Capítulo 3, é generalizado o conceito de reticulado em grupos de Lie. Definimos o conceito de cocompacidade e é demonstrado que um subgrupo discreto e cocompacto de um grupo de Lie é um reticulado. Apresentaremos o plano hiperbólico \mathbb{H}^2 como um exemplo de espaço homogêneo e estudaremos o clássico domínio fundamental para a ação $SL(2, \mathbb{Z})$ no plano hiperbólico. Logo, apresentamos os conjuntos de Siegel para $SL(2, \mathbb{Z})$, que resultam ser uma região auxiliar para a ação de $SL(2, \mathbb{Z})$ em $SL(2, \mathbb{R})$.

No Capítulo 4, são generalizados os conjuntos de Siegel apresentados no Capítulo 3 para $SL(2, \mathbb{Z})$, porém agora para $SL(n, \mathbb{Z})$, e é demonstrado que esse conjunto possui medida finita em relação à medida de Haar. Concluimos o capítulo mencionando dos principais resultados na teoria dos grupos aritméticos: primeiro, o teorema da aritmetividade, provado por Margulis [12]. Este teorema estabelece que, com certas características, um grupo de Lie G possui um reticulado aritmético. O segundo resultado apresentado é o teorema de Borel e Harish-Chandra [15], que generaliza o Teorema 4.13, estabelece que $SL(n, \mathbb{Z})$ é um reticulado em $SL(n, \mathbb{R})$, permitindo a construção de reticulados em grupos de Lie reais semissimples. O objetivo desta seção é incentivar a continuidade da pesquisa nesta área.

Laura Daniela Bermúdez Montoya
Uberlândia-MG, 26 de Julho de 2023.

Capítulo 1

Reticulados em \mathbb{R}^n

Neste capítulo, exploraremos o conceito de reticulado em \mathbb{R}^n que generalizam a estrutura discreta de \mathbb{Z} dentro de \mathbb{R} . Em seguida, apresentaremos um resultado clássico, que estabelece que um subgrupo de \mathbb{R}^n é um reticulado se e somente se é discreto. Em seguida, demonstraremos que o grupo $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ é o toro de dimensão n , e posteriormente exploraremos algumas de suas propriedades topológicas. Em seguida, abordaremos o critério de Mahler, que estabelece uma relação entre o covolume e a sístole dos reticulados. Além disso, estabeleceremos uma correspondência entre o grupo $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ e um subconjunto de todos os reticulados de \mathbb{R}^n . Com base no critério de Mahler, demonstraremos que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ não é compacto, o que será um resultado útil posteriormente.

1.1 Subgrupos discretos de \mathbb{R}^n

Começamos examinando as propriedades fundamentais dos reticulados, onde os reticulados são subconjuntos de \mathbb{R}^n que, de certa forma, generalizam a maneira como \mathbb{Z} está contido em \mathbb{R} .

Definição 1.1. Seja $\{e_1, \dots, e_m\}$ um conjunto de vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^n (com $m \leq n$). O subgrupo aditivo gerado por $\{e_1, \dots, e_m\}$ em $(\mathbb{R}^n, +)$ é chamado de reticulado de dimensão m , gerado por $\{e_1, \dots, e_m\}$. Isto é

$$L = \left\{ \sum a_i x_i \mid a_i \in \mathbb{Z} \text{ e } x_i \in \{e_1, \dots, e_m\} \right\}.$$

Exemplo 1.2. A Figura 1.1 ilustra o reticulado L de dimensão 2 em \mathbb{R}^2 , gerada pelos vetores $(0, 1)$ e $(1, 0)$, onde

$$L = \left\{ \sum a_i x_i \mid a_i \in \mathbb{Z} \text{ e } x_i \in \{(0, 1), (1, 0)\} \right\}.$$

Um reticulado de dimensão m é um grupo abeliano livre (isto é, um grupo abeliano com uma base). Em capítulos posteriores vamos generalizar este conceito de reticulado para outros grupos.

Definição 1.3. Seja \mathbb{R}^n dotado da métrica euclidiana usual. Um conjunto A é considerado discreto em \mathbb{R}^n se, para cada ponto $x \in A$, existe um raio $r > 0$ tal que a interseção da bola fechada $B_r[x]$ com A contém apenas uma quantidade finita de pontos.

Exemplo 1.4. Novamente considere o reticulado L em \mathbb{R}^2 como no Exemplo 1.2, note que o conjunto $L \cap B_4[0]$ tem uma quantidade finita de pontos (ver Figura 1.2). Da mesma forma, para cada ponto $x \in L$, existe um raio $r > 0$ tal que a interseção da bola fechada $B_r[x]$ com L contém apenas uma quantidade finita de pontos. Consequentemente L é discreto.

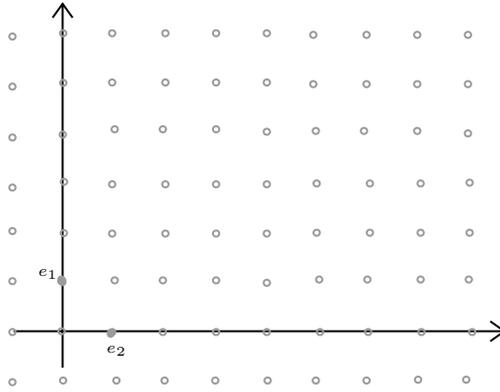


Figura 1.1: O reticulado em \mathbb{R}^2 gerado por $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$.

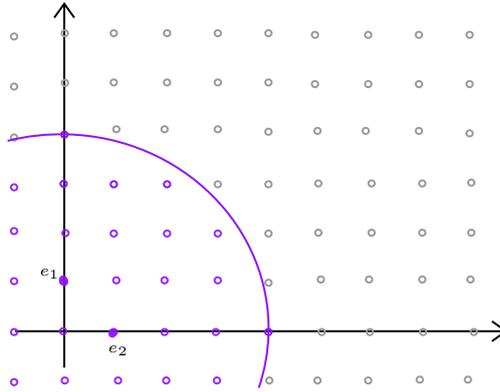


Figura 1.2: O conjunto $L \cap B_4[0]$.

Exemplo 1.5. \mathbb{Z}^n é discreto em \mathbb{R}^n , os reticulados gerados por $\{(0, \pi), (\pi, 0)\}$, $\{(-1, 2), (2, 2)\}$, $\{(-2, -7), (4, -3)\}$ são discretos em \mathbb{R}^2 .

A seguir, vamos apresentar um resultado que estabelece que todo subgrupo discreto de \mathbb{R}^n é um reticulado [6]. A importância desse resultado é que qualquer subgrupo discreto de pontos em \mathbb{R}^n pode ser gerado por uma base de vetores linearmente independentes.

Teorema 1.6. *Um subgrupo aditivo de \mathbb{R}^n é um reticulado se e somente se for discreto.*

Demonstração. Suponha que L seja um reticulado, considerando o subespaço gerado por L podemos supor que L tem dimensão n . Seja L gerado por $\{e_1, \dots, e_n\}$. Isto é,

$$L = \left\{ \sum a_i x_i \mid a_i \in \mathbb{Z} \text{ e } x_i \in \{e_1, \dots, e_n\} \right\}.$$

Observe que esses vetores constituem uma base para o espaço \mathbb{R}^n . Portanto, cada $v \in \mathbb{R}^n$ pode ser expresso como

$$v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \quad (\lambda_i \in \mathbb{R}).$$

Defina $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\phi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Então o conjunto $\phi(B_r[0])$ é limitado em \mathbb{R}^n , já que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|\phi(v)\| \leq M \text{ para todo } v \in B_r[0].$$

Tome $v = \sum a_i e_i$ ($a_i \in \mathbb{Z}$), para $v \in B_r[0]$ então

$$\|\phi(v)\| = \|(a_1, \dots, a_n)\| \leq M,$$

e como

$$|a_i| \leq \|(a_1, \dots, a_n)\| \leq M, \quad (1.1)$$

obtemos que número de soluções inteiras de (1.1) é finito e portanto $L \cap B_r[0]$ é finito, e portanto L é discreto. Reciprocamente, seja G um subgrupo discreto de \mathbb{R}^n . Provamos por indução sobre n que G é um reticulado. Seja $\{g_1, \dots, g_m\}$ um subconjunto linearmente independente máximo de G e seja $V = \text{span}\{g_1, \dots, g_{m-1}\}$. Tome $\tilde{G} = G \cap V$. Note que \tilde{G} é um subgrupo discreto de V por construção, logo, por indução, \tilde{G} é um reticulado de V de dimensão $m - 1$. Portanto existem elementos linearmente independentes gerando \tilde{G} . Sem perda de generalidade suponha que $\{g_1, \dots, g_{m-1}\}$ gera \tilde{G} . Seja

$$A = \left\{ x \in G \mid x = \sum_{i=1}^m a_i g_i, 0 \leq a_i < 1 \ (i = 1, \dots, m-1) \text{ e } 0 \leq a_m \leq 1 \right\}.$$

Então A é limitado, portanto finito pois G é discreto, e podemos escolher $x' \in A$ com o menor coeficiente diferente de zero a_m . Tome

$$x' = b_1 g_1 + \dots + b_m g_m.$$

Certamente $\{g_1, \dots, g_{m-1}, x'\}$ é linearmente independente. Agora, começando com qualquer vetor $g \in G$, podemos selecionar coeficientes inteiros c_i para que

$$g' = g - c_m x' - c_1 g_1 - \dots - c_{m-1} g_{m-1} \in A,$$

e o coeficiente de g_m em g' é menor que b_m , mas não negativo. Pela escolha de x' este coeficiente deve ser zero, então $g' \in \tilde{G}$, portanto $\{x', g_1, \dots, g_{m-1}\}$ gera G e G é um reticulado. \square

Definição 1.7. Seja L um reticulado de \mathbb{R}^n gerado por $\{e_1, \dots, e_n\}$. O domínio fundamental T consiste em todos os elementos $\sum a_i e_i$ ($a_i \in \mathbb{R}$) onde $0 \leq a_i < 1$.

Observação 1.8. O domínio fundamental depende da escolha dos geradores.

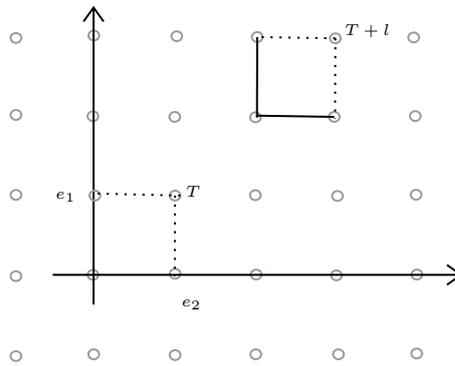


Figura 1.3: Conceito de domínio fundamental, para o reticulado da Figura 1.1.

Mais adiante, iremos generalizar esses conceitos, mas por enquanto, é bastante interessante e intuitivo entender esses conceitos, pois \mathbb{R}^n é um espaço conhecido. A Figura 1.3 ilustra um domínio fundamental T para o reticulado em \mathbb{R}^2 gerado por $(0, 1)$ e $(1, 0)$ e uma translação $T + l$ para $l \in L$. Linhas pontilhadas indicam a omissão das fronteiras.

1.2 O toro quociente

Nesta seção, relacionamos os reticulados em \mathbb{R}^n com o toro quociente $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Esse conjunto possui estrutura de grupo com a multiplicação. Sua topologia é herdada de \mathbb{R}^n , o que o torna um espaço bastante interessante, uma vez que \mathbb{T}^n , com essa topologia induzida, é compacto e conexo.

O grupo circular \mathbb{S} é composto por todos os números complexos z tais que $|z| = 1$. Em termos geométricos, \mathbb{S} representa a circunferência unitária no plano complexo, com o elemento neutro sendo o número complexo $1 + 0i$ e a operação binária sendo a multiplicação de números complexos. Em resumo, o grupo circular \mathbb{S} é definido como

$$\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Lema 1.9. *O grupo quociente \mathbb{R}/\mathbb{Z} é isomorfo ao grupo circular \mathbb{S} .*

Demonstração. Defina a aplicação $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}$ por

$$\phi(x) = e^{2\pi i x},$$

então

$$\phi(x + y) = e^{2\pi i(x+y)} = e^{2\pi i x} e^{2\pi i y} = \phi(x)\phi(y),$$

portanto, ϕ é um homomorfismo. Sabemos a função exponencial complexa é sobrejetiva e além disso,

$$\ker(\phi) = \{x \in \mathbb{R} \mid e^{2\pi i x} = (1, 0)\} = \mathbb{Z},$$

logo, pelo primeiro teorema de isomorfismo segue o resultado. \square

\mathbb{T}^n representa o espaço topológico formado pelo produto cartesiano de n cópias do grupo circular \mathbb{S} . Em outras palavras, \mathbb{T}^n consiste em todas as n -tuplas ordenadas de elementos de \mathbb{S} . Levando em consideração esse fato e o Lema 1.9, estabeleceremos o isomorfismo para demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 1.10. *Se L é um reticulado n -dimensional em \mathbb{R}^n então \mathbb{R}^n/L é isomorfo ao toro n -dimensional \mathbb{T}^n .*

Demonstração. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ o conjunto gerador de L . Então $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base para \mathbb{R}^n . Defina $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ por

$$\phi(a_1 e_1 + \dots + a_n e_n) = (e^{2\pi i a_1}, \dots, e^{2\pi i a_n}). \quad (1.2)$$

Provaremos que ϕ é um homomorfismo sobrejetivo. A operação no toro n -dimensional \mathbb{T}^n com a topologia produto de \mathbb{S} é a operação de multiplicação componente por componente:

$$(z_1, z_2, \dots, z_n) \cdot (w_1, w_2, \dots, w_n) = (z_1 w_1, z_2 w_2, \dots, z_n w_n).$$

Sejam $v, w \in \mathbb{R}^n$, e considere

$$\begin{aligned} \phi(v + w) &= \phi((a_1 + b_1)e_1 + \dots + (a_n + b_n)e_n), \\ &= (e^{2\pi i(a_1+b_1)}, \dots, e^{2\pi i(a_n+b_n)}), \\ &= (e^{2\pi i a_1} \cdot e^{2\pi i b_1}, \dots, e^{2\pi i a_n} \cdot e^{2\pi i b_n}), \\ &= (e^{2\pi i a_1}, \dots, e^{2\pi i a_n}) \cdot (e^{2\pi i b_1}, \dots, e^{2\pi i b_n}), \\ &= \phi(v) \cdot \phi(w). \end{aligned}$$

Portanto, ϕ é um homomorfismo. Agora, vamos mostrar que ϕ é sobrejetiva. Como a função exponencial complexa é sobrejetiva, ϕ é sobrejetiva e o kernel de ϕ é L , seguindo a mesma lógica do lema anterior. Portanto $\mathbb{R}^n/L \cong \mathbb{T}^n$. \square

Corolário 1.11. A transformação ϕ definida acima, quando restrita ao domínio fundamental T , produz uma bijeção $\tilde{\phi} : T \rightarrow \mathbb{T}^n$.

Para qualquer subconjunto X de \mathbb{T}^n , definimos o volume $v(X)$ como

$$v(X) = v\left(\tilde{\phi}^{-1}(X)\right)$$

que existe se, e somente se, $\tilde{\phi}^{-1}(X)$ tem um volume em \mathbb{R}^n . Essa bijeção irá estabelecer uma relação entre a noção de medida e volume nos domínios fundamentais em \mathbb{R}^n e o volume de subconjuntos de \mathbb{T}^n . Posteriormente, essa noção de volume será generalizada.

1.3 O espaço dos reticulados em \mathbb{R}^n

Nesta seção, apresentaremos um resultado importante para a teoria dos reticulados, o critério de Mahler, que é uma ferramenta fundamental para entender os reticulados e suas propriedades geométricas. Ele estabelece uma relação entre o covolume e a sístole, com aplicações em geometria diferencial, teoria de códigos e teoria dos números. Além disso, estudaremos algumas propriedades topológicas dos grupos $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ e $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ em relação a esse critério.

Em álgebra linear, o volume n -dimensional do paralelepípedo em \mathbb{R}^n formado pelos vetores é igual à raiz quadrada do determinante da matriz de Gram, ver em [17, página 141].

Definição 1.12. O determinante de Gram $G(x_1, \dots, x_n)$ de n vetores, é o determinante da matriz formada pelos n^2 produtos internos formados com esses vetores

$$G(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \dots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \dots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \dots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix}.$$

Definição 1.13. Para $L \subset \mathbb{R}^n$ reticulado, definimos o covolume de L denotado $\mathrm{covol}(L)$, como a medida de Lebesgue $\lambda(T)$ do domínio fundamental T . Ou seja, o covolume de L é definido como o volume euclidiano do paralelepípedo T , isto é

$$\mathrm{covol}(L) = \sqrt{G(e_1, \dots, e_n)},$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é o conjunto gerador de L .

Definição 1.14. Para um reticulado $L \subset \mathbb{R}^n$, definimos sua sístole como o número real (positivo)

$$\mathrm{syst}(L) = \min_{x \in L \setminus \{0\}} \|x\|.$$

Exemplo 1.15. Seja L o reticulado gerado por $\{(-2, -7), (4, -3)\}$. O covolume é dado pela raiz do determinante

$$\begin{vmatrix} \langle (-2, -7), (-2, -7) \rangle & \langle (-2, -7), (4, -3) \rangle \\ \langle (4, -3), (-2, -7) \rangle & \langle (4, -3), (4, -3) \rangle \end{vmatrix} = 1156,$$

portanto $\mathrm{covol}(L) = \sqrt{1156} = 34$, e

$$\mathrm{syst}(L) = \min_{x \in L \setminus \{0\}} \|x\| = 5.$$

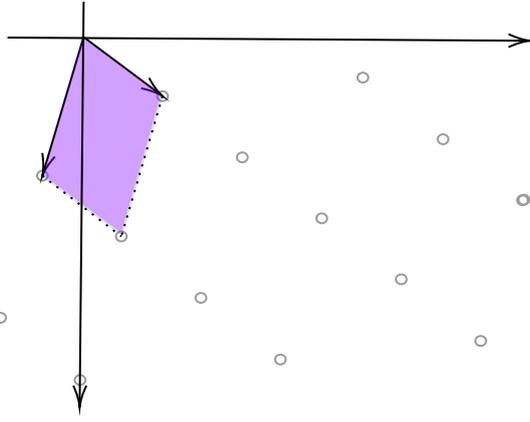


Figura 1.4: Reticulado gerado por $\{(-2, -7), (4, -3)\}$ e seu domínio fundamental T .

Observação 1.16. Um subconjunto é considerado relativamente compacto se estiver contido em um subespaço compacto de X , ou equivalentemente, se o seu fecho for compacto.

Demonstração. Ver em [14, página 16]. □

Teorema 1.17 (Critério de Compacidade de Mahler). *Para um n fixo, vamos denotar por X o conjunto de reticulados em \mathbb{R}^n . Seja A um subconjunto de X , A é dito relativamente compacto se e somente se $\text{covol}(\cdot)$ e $\text{syst}(\cdot)^{-1}$ são funções limitadas em A .*

Observação 1.18. Lembremos que uma ação de um grupo em um espaço topológico é uma atribuição que descreve como os elementos do grupo transformam os pontos do espaço, respeitando a estrutura topológica. Neste contexto, dizemos que a ação é transitiva se, para qualquer par de pontos x e y no espaço topológico, existe pelo menos um elemento do grupo que pode levar x a y . Mais adiante, vamos definir o que é uma ação transitiva de grupos de Lie em variedades diferenciáveis, mas com a definição anterior é suficiente para entender o exemplo seguinte.

Exemplo 1.19. Sendo X o conjunto de reticulados em \mathbb{R}^n . O grupo $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ age transitivamente sobre X à esquerda, Pois qualquer reticulado L pode ser escrito como $L = gL_0$ para algum $g \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ e $L_0 = \mathbb{Z}^n$. O estabilizador de L_0 é o subgrupo

$$G_{L_0} = \{g \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) \mid gL_0 = L_0\} = \text{GL}(n, \mathbb{Z}).$$

Isso forma uma identificação

$$X = \text{GL}(n, \mathbb{R}) / \text{GL}(n, \mathbb{Z}).$$

Usando esta identificação, podemos dotar X de topologia, ou seja, a topologia quociente, onde a topologia em $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ é a usual, induzida como um subconjunto do espaço vetorial real $\text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$, o espaço de todas as matrizes de tamanho $n \times n$ com entradas reais. Queremos estudar agora o quociente $\text{SL}(n, \mathbb{R}) / \text{SL}(n, \mathbb{Z})$, onde $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ é o grupo das matrizes de tamanho $n \times n$, com determinante um e entradas reais. Temos que $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ é um subgrupo de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ e que a ação de $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ em X não é transitiva. Para provar que a ação de $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ em X não é transitiva, precisamos mostrar que não é possível transformar qualquer reticulado em \mathbb{R}^n em outro através de uma matriz em $\text{SL}(n, \mathbb{R})$. No caso em que temos dois reticulados L_1 e L_2 em \mathbb{R}^n , podemos procurar por uma matriz $g \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ que transforme L_1 em L_2 . Suponha que tenhamos dois conjuntos linearmente independentes que gerem os reticulados, ou seja, para L_1 temos o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e, para L_2 , temos o conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Nesse contexto, a matriz de mudança de base nos permite expressar as coordenadas de um vetor em termos de outra base. Essa matriz pertence ao grupo geral linear $\text{GL}(n, \mathbb{R})$, a qual não necessariamente possui determinante igual a 1.

Isso mostra que a ação de $SL(n, \mathbb{R})$ em X não é transitiva, pois existem pares de reticulados que não podem ser transformados um no outro através de uma matriz em $SL(n, \mathbb{R})$. Mas podemos afirmar que

$$SL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{Z}) \subset X,$$

o que significa que podemos identificar $SL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{Z})$ como um subespaço de reticulados em \mathbb{R}^n . No entanto, ao utilizar o critério de Mahler para compacidade (Teorema 1.17), que estabelece que um subconjunto A de reticulados em \mathbb{R}^n é dito relativamente compacto se e somente se $\text{covol}(\cdot)$ e $\text{syst}(\cdot)^{-1}$ são limitados em X . No entanto, ao considerar $A = SL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{Z})$, podemos observar que as distâncias ao ponto zero podem ser tomadas arbitrariamente pequenas, já que X é o conjunto de reticulados em \mathbb{R}^n . Isso implica que o conjunto $\text{syst}(\cdot)^{-1}$ não é limitado em $SL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{Z})$. Portanto, concluímos que $SL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{Z}) \subset X$ não é um conjunto compacto.

É importante destacar o interessante critério de compacidade de Mahler que foi provado por Kurt Mahler em 1946 é um resultado fundamental sobre reticulados no espaço euclidiano. O teorema da compacidade de Mahler foi generalizado para outros tipos de grupos por David Mumford. Não vamos abordar mais sobre esse critério, nem vamos estudar sua generalização, apenas vamos utilizar posteriormente o resultado do Exemplo 1.19. Como já foi mencionado, este capítulo é utilizado de forma introdutória para conceitos mais gerais na teoria dos reticulados.

Capítulo 2

Grupos de Lie e ações de grupo em variedades

Neste capítulo, faremos uma abordagem bastante rápida aos conceitos básicos sobre grupos de Lie, uma vez que precisamos de alguns conceitos topológicos de grupos de Lie matriciais especiais, como por exemplo os grupos de Lie $GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$ e \mathbb{R}^n , além de relacionar esses grupos com variedades diferenciáveis para posteriormente definir algumas ações de grupos sobre elas.

2.1 Noções básicas sobre os grupos de Lie

Nesta seção, vamos abordar os Grupos de Lie, cuja importância reside em sua ampla aplicação em diversas áreas da matemática e da física teórica. Esses grupos desempenham um papel fundamental no estudo de simetrias, transformações contínuas e estruturas diferenciáveis. Dado que este trabalho se concentrará no estudo de alguns grupos de Lie, como $SL(n, \mathbb{R})$ e \mathbb{R}^n , é necessário ter algumas noções básicas e propriedades desses grupos.

Definição 2.1 (Grupo linear). O grupo linear sobre os números reais, denotado como $GL(n, \mathbb{R})$, é o grupo de todas as matrizes invertíveis $n \times n$ com entradas reais.

Denotamos por $M_n(\mathbb{C})$ como o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ com entradas complexas.

Definição 2.2. Seja A_m uma sequência de matrizes em $M_n(\mathbb{C})$. Dizemos que A_m converge para uma matriz A se, cada entrada de A_m converge quando $m \rightarrow \infty$, para cada entrada correspondente de A , ou seja, se $A_{m_{kl}}$ converge para A_{kl} , para todo $1 \leq k, l \leq n$.

Um grupo topológico é um grupo G munido de uma topologia Hausdorff para a qual a operação e a inversão do grupo são contínuas. Mais precisamente, temos a seguinte definição:

Definição 2.3. Um grupo topológico é um grupo G no qual é definida uma topologia que torna as operações do grupo contínuas. A maneira mais concisa de expressar esse requisito é postular a continuidade pela aplicação $\phi : G \times G \rightarrow G$ definida por

$$\phi(x, y) = xy^{-1},$$

e para cada $a \in G$, as aplicações $x \mapsto ax$ e $x \mapsto xa$ são homeomorfismos de G sobre G ; assim como $x \mapsto x^{-1}$.

Definição 2.4. Um grupo de Lie G é um grupo topológico que também é uma variedade diferenciável, com a propriedade de que as funções de multiplicação e inversão

$$\begin{aligned}(x, y) \in G \times G &\mapsto xy \in G \\ x \in G &\mapsto x^{-1} \in G\end{aligned}$$

são diferenciáveis.

Definição 2.5 (Grupo de Lie de matrizes). Seja G um subgrupo de $GL(n, \mathbb{C})$, G é de Lie se satisfaz a seguinte propriedade: Se A_m é uma sequência qualquer de matrizes em G e A_m converge para alguma matriz A , então $A \in G$. Isto é, G é subgrupo fechado de $GL(n, \mathbb{C})$.

Teorema 2.6. *Todo grupo de Lie matricial é uma subvariedade suave de $M_n(\mathbb{C})$ e é, portanto, um grupo de Lie.*

Demonstração. Ver em [1, página 22]. □

Exemplo 2.7. A seguir apresentaremos alguns exemplos de Grupos de Lie de matrizes.

1. Os grupos lineares $GL(n, \mathbb{R})$ e $GL(n, \mathbb{C})$. Claramente, $GL(n, \mathbb{C})$ são Grupos de Lie de matrizes. Os grupos lineares especiais $SL(n, \mathbb{R})$ e $SL(n, \mathbb{C})$ que é o grupo de $n \times n$ matrizes inversíveis (com entradas reais ou complexas) tendo determinante um.
2. O grupo das matrizes ortogonais $O(n)$ e $SO(n)$, também conhecido como grupo especial ortogonal, é um subgrupo do grupo $GL(n, \mathbb{R})$ que consiste de matrizes ortogonais de determinante 1.

Definição 2.8. Um grupo de Lie de matrizes G é dito compacto se as duas condições a seguir forem satisfeitas:

1. Se A_m é qualquer sequência de matrizes em G e A_m converge para uma matriz A , então A está em G .
2. Existe uma constante C tal que para todo $A \in G$, $|A_{ij}| \leq C$ para todo $1 \leq i, j \leq n$

Exemplo 2.9.

1. Os grupos $O(n)$ e $SO(n)$ são compactos. Primeiro, vamos considerar o caso de $O(n)$. Como cada matriz A_n é ortogonal, temos que $A_n^T A_n = I$. Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$, temos que $A^T A = I$ com $A \in GL(n, \mathbb{R})$, o que mostra que A é uma matriz ortogonal e, portanto, pertence a $O(n)$. Agora, vamos considerar o caso de $SO(n)$. Como cada matriz A_n é ortogonal com determinante igual a 1, temos que $\det(A_n) = 1$. Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$, temos que $\det(A) = 1$, o que mostra que A é uma matriz ortogonal com determinante igual a 1 e, portanto, pertence a $SO(n)$.

A segunda propriedade é satisfeita porque, se uma matriz A é ortogonal, então as colunas de A têm norma igual a um. Isso implica que os elementos da matriz, denotados por A_{kl} , satisfazem a desigualdade $|A_{kl}| \leq 1$, para todos os índices k e l que variam de 1 a n . Portanto, todas as entradas das matrizes em $O(n)$ e $SO(n)$ estão limitadas pelo valor absoluto de 1.

2. Os grupos $GL(n, \mathbb{R})$ e $GL(n, \mathbb{C})$ não satisfazem a condição 1, uma vez que é possível que um limite de matrizes invertíveis seja não invertível ou podemos mostrar que seu complemento é fechado. O complemento de $GL(n, \mathbb{R})$ é o conjunto de todas as matrizes que têm determinante igual a 0. Tome a função $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e a imagem inversa de $\{0\}$ são as matrizes não invertíveis, ou seja, o complemento do conjunto $GL(n, \mathbb{R})$. Da mesma forma, os grupos $SL(n, \mathbb{R})$ e $SL(n, \mathbb{C})$ não satisfazem a condição 2, exceto no caso trivial $n = 1$. Para ilustrar, suponha que $n \neq 1$ e considere a matriz

$$A_m = \begin{pmatrix} m & & & & \\ & \frac{1}{m} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

que tem determinante igual a um. Portanto, $A_m \in \text{SL}(n, \mathbb{R})$, mas o valor absoluto de m não é limitado. Como resultado, os grupos $O(n, \mathbb{C})$, $\text{SO}(n, \mathbb{C})$, $O(n)$, $\text{SO}(n)$, \mathbb{R} , \mathbb{R}^n , \mathbb{C} , \mathbb{C}^n não satisfazem a condição 2 e, portanto, não são grupos compactos.

Definição 2.10. Um grupo de Lie de matrizes G é dito conexo se dadas quaisquer duas matrizes A e B em G , existe um caminho contínuo $A(t)$ em G tal que $a \leq t \leq b$, com $A(a) = A$ e $A(b) = B$.

Exemplo 2.11.

1. O grupo $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ e o grupo $\text{SL}(n, \mathbb{C})$ são grupos conexos para todo $n \geq 1$. A demonstração desse fato pode ser encontrada em [1, página 12].
2. O grupo $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ não é um grupo conexo. Isso ocorre porque, se $\det A > 0$ e $\det B < 0$, qualquer caminho contínuo que conecte A a B teria que incluir uma matriz com determinante igual a zero. No entanto, uma matriz com determinante igual a zero não pertence a $\text{GL}(n, \mathbb{R})$.

Apesar disso, o grupo $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ possui duas componentes conexas distintas. Essas componentes são denotadas de $\text{GL}(n, \mathbb{R})^+$ e $\text{GL}(n, \mathbb{R})^-$. A componente $\text{GL}(n, \mathbb{R})^+$ é o conjunto de todas as matrizes reais $n \times n$ com determinante positivo e a componente $\text{GL}(n, \mathbb{R})^-$ é o conjunto de todas as matrizes reais $n \times n$ com determinante negativo.

Observação 2.12. Um grupo topológico G cuja topologia é compacta é chamado de grupo compacto.

Definição 2.13 (Grupo localmente compacto). Um grupo localmente compacto G é um grupo topológico que é Hausdorff e localmente compacto, isto é, todo $g \in G$ possui uma vizinhança compacta.

Exemplo 2.14. \mathbb{R}^n e $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ são localmente compactos, pela mesma definição de variedade diferenciável [7]. Em particular $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ é localmente compacto. Qualquer grupo discreto é localmente compacto.

2.2 Ações de grupos de Lie em variedades

As ações de grupos de Lie em variedades são uma ferramenta importante para estudar as propriedades geométricas das variedades e as simetrias presentes nelas. Uma ação de um grupo de Lie em uma variedade é uma associação de cada elemento do grupo de Lie a uma transformação da variedade que preserva a estrutura diferenciável. Esta seção contém apenas definições importantes para o desenvolvimento dos próximos capítulos.

Definição 2.15. Diremos que um grupo de Lie G age à esquerda sobre uma variedade diferenciável M se existe uma aplicação diferenciável

$$\theta : G \times M \longrightarrow M$$

satisfazendo as condições:

1. Para o elemento neutro $e \in G$ e qualquer $x \in M$

$$\theta(e, x) = x.$$

2. Para quaisquer $a, b \in G$ e $x \in M$

$$\theta(a, \theta(b, x)) = \theta(ab, x).$$

Exemplo 2.16. Os seguintes são exemplos importantes de ações de qualquer subgrupo H de um grupo de Lie G sobre G :

1. Translação à esquerda por elementos de H :

$$\begin{aligned} L : H \times G &\rightarrow G \\ (g, x) &\mapsto gx; \end{aligned}$$

2. Translação à direita por elementos H :

$$\begin{aligned} R : H \times G &\rightarrow G \\ (g, x) &\mapsto xg^{-1}; \end{aligned}$$

3. Conjugação por elementos de H :

$$\begin{aligned} \alpha : H \times G &\rightarrow G \\ (g, x) &\mapsto gxg^{-1}; \end{aligned}$$

4. Para $F : G_1 \rightarrow G_2$ uma aplicação de grupos de Lie,

$$\begin{aligned} \theta : G_1 \times G_2 &\rightarrow G_2 \\ (x, y) &\mapsto \theta(x, y) = F(x)y; \end{aligned}$$

5. A ação natural de $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$ em \mathbb{R}^n ,

$$\begin{aligned} \theta : \text{Gl}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \theta(\mathbf{A}, x) &= \mathbf{A}x. \end{aligned}$$

Observação 2.17. Chamaremos de G -variedade uma variedade diferenciável na qual o grupo de Lie G age.

Definição 2.18. Uma órbita de $x \in M$ sob a ação de G é definida como o conjunto

$$Gx := \{\theta(g, x) \mid g \in G\} \subset M.$$

Definição 2.19. O grupo $\text{Isom}(X)$ é o grupo de isometrias de um espaço métrico X . Ou seja, é o grupo de todas as transformações que preservam as distâncias entre os pontos de X .

Definição 2.20. A ação é dita transitiva se, para todo $x \in M$, temos $Gx = M$. Ou seja, para todo $x, y \in M$, existe uma isometria $\phi \in G$, tal que $\phi(x) = y$.

Definição 2.21. Uma ação é própria se, para quaisquer compactos $K, L \subset M$ o conjunto

$$\{g \in G \mid gK \cap L \neq \emptyset\}$$

é finito.

Definição 2.22. Seja Γ um grupo agindo sobre um espaço localmente compacto X . Então, dizemos que Γ age de forma propriamente descontínua se, para quaisquer subconjuntos compactos K e L de X , o conjunto

$$\{g \in \Gamma \mid gK \cap L \neq \emptyset\}$$

é finito. Em outras palavras, a ação de Γ em X é própria.

Definição 2.23. Se X é um conjunto com uma ação à esquerda de G , o conjunto de órbitas será denotado por $G \backslash X$. Da mesma forma, se X é um conjunto com uma ação à direita, as órbitas serão denotadas por X/G . Por exemplo, se Γ é um subgrupo de G , então Γ age sobre G por translação à esquerda ou à direita:

$$\Gamma \backslash G = \{\Gamma x \mid x \in G\}, \quad G/\Gamma = \{x\Gamma \mid x \in G\}.$$

Observação 2.24. Alguns dos resultados deste trabalho são apresentados para o espaço G/Γ que é o conjunto quociente da ação à direita de um subgrupo Γ por multiplicação no grupo de Lie G . Porém, em algumas situações, é mais fácil trabalhar com o espaço $\Gamma \backslash G$ dos conjuntos quocientes à esquerda.

2.3 Medida de Haar

Neste seção, apresentaremos a definição da medida de Haar. Na primeira parte, estudaremos algumas definições básicas e fatos sobre grupos topológicos e a medida sobre eles. Apresentaremos o Teorema de Haar, que estabelece a existência e unicidade da medida de Haar. A medida de Haar desempenha um papel fundamental na teoria dos grupos topológicos. Essa medida, nomeada em homenagem ao matemático Alfréd Haar, permite definir uma medida invariante no grupo, fornecendo uma base sólida para a análise e integração nessas estruturas. Não nos aprofundaremos nesta medida, uma vez que não é o objetivo deste trabalho. No entanto, ela é uma ferramenta essencial que utilizaremos posteriormente para comprovar resultados importantes da teoria. Para obter mais informações, veja as seguintes referências: [4], [5] e [13].

Vamos considerar a σ -álgebra \mathcal{B} dos conjuntos de Borel, ou seja, \mathcal{B} é a σ -álgebra gerada pelos subconjuntos abertos de G . Uma medida μ no espaço de medida (G, \mathcal{B}) é chamada de (esquerda) invariante se, para qualquer $g \in G$ e $A \in \mathcal{B}$, temos

$$\mu(gA) = \mu(A).$$

Teorema 2.25 (Teorema de Haar [18]). *Seja G um grupo localmente compacto. Existe em (G, \mathcal{B}) uma medida m invariante à esquerda regular diferente de zero que é finita em subconjuntos compactos K . Adicionalmente, mesmo em uma escala diferente, essa medida é única: se μ' é outra medida do mesmo tipo, então $\mu' = \lambda\mu$, para algum valor $\lambda \in \mathbb{R}^+$.*

Definição 2.26 (Medida de Haar). A medida m dada pelo teorema anterior é chamada de medida de Haar em G .

Exemplo 2.27. O grupo $\mathbb{R}^\times = \text{GL}(1, \mathbb{R})$ é localmente compacto. Uma medida de Haar m em $\text{GL}(1, \mathbb{R})$ é dada por

$$m(E) = \int_E \frac{1}{|x|} d\lambda(x),$$

onde λ é a medida de Lebesgue de \mathbb{R}^\times .

Este último exemplo é generalizado para o seguinte.

Exemplo 2.28. Seja $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$, visto como um subconjunto de \mathbb{R}^{n^2} e seja λ a medida de Lebesgue de \mathbb{R}^n . Então uma medida de Haar m em G é dada por

$$m(E) = \int_E \frac{1}{|\det(g)|^n} d\lambda(g).$$

Fixamos um grupo topológico Hausdorff localmente compacto G . Se m é uma medida de Haar invariante à esquerda em G e $g \in G$, então a função $E \mapsto m(gE)$ na σ -álgebra de conjuntos de Borel fornece outra medida de Haar invariante à esquerda em G . Pela unicidade no Teorema 2.25, existe uma constante $\Delta_G(g)$ tal que, para todo conjunto de Borel $E \subset G$, temos

$$m(gE) = \Delta_G(g)m(E).$$

A função $\Delta_G : G \rightarrow \mathbb{R}^+$ é um homomorfismo de G no grupo multiplicativo \mathbb{R}^+ de números reais positivos.

Definição 2.29. Se G é um grupo topológico Hausdorff localmente compacto e Δ_G é o homomorfismo $\Delta_G : G \rightarrow \mathbb{R}^+$, a função Δ_G é chamada de função modular de G .

Definição 2.30. Um grupo topológico Hausdorff localmente compacto é dito unimodular se a função modular Δ_G for identicamente igual a 1.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos clássicos onde estudaremos a invariância da medida de Haar para alguns grupos. Se o grupo é unimodular a medida de Haar invariante à esquerda também é uma medida de Haar invariante à direita.

Exemplo 2.31. O grupo aditivo \mathbb{R}^n é unimodular.

Observação 2.32. Um grupo Γ é discreto se, e somente se, para cada sequência $\{T_n\} \subset \Gamma$ com $T_n \rightarrow Id$, temos $T_n = Id$ para n suficientemente grande.

Exemplo 2.33. Se Γ é um grupo discreto com a topologia discreta, então a medida μ é definida como a medida que atribui a qualquer conjunto, sua cardinalidade. Então, μ é uma medida de Haar invariante à esquerda e à direita, e Γ é unimodular.

Exemplo 2.34. Seja

$$G = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{R}) : a \neq 0, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Temos que

$$d\mu \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{|a|^2} dadb$$

é uma medida de Haar invariante à esquerda em G . De fato, sejam A um conjunto mensurável qualquer em G , $g \in G$ e

$$g_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & a_0^{-1} \end{pmatrix},$$

então

$$g_0g = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & a_0^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0a & a_0b + b_0a^{-1} \\ 0 & a_0^{-1}a^{-1} \end{pmatrix}.$$

Vamos agora calcular a medida de Haar de g_0A utilizando a mudança de variáveis para $\bar{a} = a_0a$ e $\bar{b} = a_0b$. Nesse caso, a matriz associada à transformação é $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida da seguinte maneira

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \varphi(a, b) = (a_0a, a_0b).$$

O determinante jacobiano dessa transformação é a_0^2 , e temos que $d\bar{a} = a_0da$ e $d\bar{b} = a_0db$. Portanto, para qualquer função contínua f em A com suporte compacto, a medida de Haar de g_0A pode ser calculada da seguinte forma

$$\mu(g_0A) = \int_{g_0A} f(g_0g) \frac{|a_0|^2}{|a_0a|^2} dadb = \int_A f(g') \frac{|a_0|^2}{|\bar{a}|^2} \frac{d\bar{a}d\bar{b}}{|a_0|^2} = \int_A f(g') \frac{1}{|\bar{a}|^2} d\bar{a}d\bar{b} = \mu(A).$$

Onde

$$g' = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} + a_0 b_0 \bar{a}^{-1} \\ 0 & \bar{a}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Assim, concluímos que $\mu(g_0 A) = \mu(A)$, o que mostra a invariância à esquerda da medida. Além disso, μ não é uma medida de Haar invariante à direita em G . Na verdade, ao calcularmos $g g_0$ e o determinante jacobiano da transformação associada à mudança de parâmetros

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \varphi(a, b) = (a_0 a, a_0^{-1} b),$$

obtemos um determinante jacobiano igual a 1. Portanto,

$$\mu(A g_0) = \int_{A g_0} f(g g_0) \frac{1}{|a_0 a|^2} da db = \int_A f(g g_0) \frac{1}{|\bar{a}|^2 |a_0|^2} d\bar{a} d\bar{b} = \frac{1}{|a_0|^2} \mu(A).$$

Logo a função modular é dada por

$$\Delta_G \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{|a|^2},$$

e portanto G não é unimodular.

Este exemplo é interessante, pois apresenta um caso em que o grupo no qual a medida de Haar não é invariante à direita, mas é à esquerda. É um exemplo ilustrativo de como a medida de Haar funciona em grupos desse tipo.

Observação 2.35. Se A e B são grupos e $G = A \times B$ é o produto deles, então a medida de Haar à esquerda em G é $da \times db$, onde da e db são as medidas de Haar à esquerda em A e B , respectivamente. Além disso, se Δ_A e Δ_B são as funções modulares em A e B , respectivamente, então a função modular Δ_G em $g = (a, b) \in G$ é dada por

$$\Delta_G(a, b) = \Delta_A(a) \Delta_B(b).$$

O grupo $\text{GL}(n, \mathbb{R})^+$ de matrizes $n \times n$ não singulares com determinante positivo é um subconjunto aberto do conjunto $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ de matrizes $n \times n$. Como nosso objetivo é estudar o grupo $\text{SL}(n, \mathbb{R})$, vamos aproveitar o fato de que $\text{GL}(n, \mathbb{R})^+ = \text{SL}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+$ ([13, página 9]) para demonstrar que $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ é unimodular. Para isso, vamos provar que $\text{GL}(n, \mathbb{R})^+$ é unimodular.

Lema 2.36. A medida de Haar em $\text{GL}(n, \mathbb{R})^+$ é dada por

$$d\mu(g) = \frac{dg}{(\det g)^n}.$$

Além disso, $\text{GL}(n, \mathbb{R})^+$ é unimodular.

Demonstração. Vamos demonstrar que $d\mu$ é invariante à esquerda e à direita em $\text{GL}(n, \mathbb{R})^+$. De fato, sejam A um conjunto mensurável qualquer em $\text{GL}(n, \mathbb{R})^+$, $g \in \text{GL}(n, \mathbb{R})^+$ e $a \in A$. Vamos calcular a medida de Haar de gA usando a mudança de variáveis $b = g^{-1}a$, onde $a \in A$. Nesse caso, $a = gb$. Para calcular o Jacobiano dessa transformação (definida por g), escreva a como um vetor coluna

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2},$$

onde a_i é a i -ésima coluna de a , e faça o mesmo com b . Nessa notação, a equação $a = gb$ se torna

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & & & \\ & g & & \\ & & \ddots & \\ & & & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

onde os elementos não indicados na matriz $n^2 \times n^2$ são 0. Esta transformação linear relacionando a a b tem determinante igual $\det(g)^n$. Assim $da = |\det(g)^n| db = |\det(g)|^n db$. Logo,

$$\mu(gA) = \int_{gA} f(g^{-1}a) \frac{da}{|\det(a)^n|} = \int_A f(g^{-1}a) \frac{|\det(g)|^n db}{|\det(gb)^n|} = \int_A f(b) \frac{db}{|\det(b)|^n} = \mu(A).$$

Realizando o mesmo procedimento, demonstramos que μ é uma medida de Haar invariante à direita, e

$$\mu(gA) = \mu(Ag).$$

Portanto, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})^+$ é unimodular. □

Corolário 2.37. O grupo $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ é unimodular.

Demonstração. O grupo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})^+ = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+$ é o produto direto entre $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ e o grupo multiplicativo \mathbb{R}^+ de números reais positivos. De acordo com o Lema 2.36, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})^+$ é unimodular, além disso \mathbb{R}^+ com

$$d\mu(x) = \frac{dx}{x}$$

é unimodular. Pelo Lema 2.36, concluímos que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ é necessariamente unimodular. □

Exemplo 2.38. Seja A o grupo de matrizes diagonais com determinante igual a 1. Então

$$da = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{da_i}{a_i}$$

é uma medida de Haar em A .

Exemplo 2.39. Seja $N = \{(u_{ij}) \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \mid u_{ii} = 1 \text{ e } u_{ij} = 0 \text{ para } i < j\}$. Então

$$du = \prod_{i < j} du_{ij}$$

é uma medida de Haar em N .

Mais tarde, vamos utilizar essa medida em alguns grupos especiais. Vamos utilizar técnicas de cálculo de integrais de Haar semelhantes às apresentadas nos exemplos mostrados neste capítulo.

Capítulo 3

Reticulados em grupos de Lie

Neste capítulo, iremos generalizar o conceito de reticulado em grupos de Lie G . Um reticulado em um grupo de Lie G é um subgrupo discreto Γ de G no qual o quociente G/Γ possui uma medida de Haar finita. Também faremos uma breve introdução ao plano hiperbólico \mathbb{H}^2 e ao domínio fundamental para a ação de $SL(2, \mathbb{Z})$ em \mathbb{H}^2 , que é um triângulo hiperbólico com um vértice no infinito e área finita. Em seguida, caracterizaremos os conjuntos de Siegel para $SL(2, \mathbb{R})$ como um domínio auxiliar para a ação de $SL(2, \mathbb{Z})$, mas agora em $SL(2, \mathbb{R})$.

3.1 Propriedades básicas dos reticulados

No Capítulo 1, definimos e classificamos reticulados em \mathbb{R}^n como subgrupos discretos Γ com quociente compacto (Teorema 1.6), que naturalmente possuem medida de Haar finita. Para $G = GL(n, \mathbb{R})$, nesta seção mostraremos que o subgrupo $SL(n, \mathbb{Z})$ é discreto, e pelo critério de compacidade de Mahler, provamos que não tem quociente compacto.

Para uma definição geral de reticulados, começaremos com a definição de domínios fundamentais para a ação de um subgrupo discreto Γ por multiplicação à direita em G .

Definição 3.1 (Domínio Fundamental). Seja Γ um subgrupo discreto, em um grupo de Lie G . Um subconjunto \mathcal{F} de G é um domínio fundamental para G/Γ significa

1. $\mathcal{F}\Gamma = G$,
2. \mathcal{F} é um conjunto fechado tal que seu interior $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ é denso em \mathcal{F} , e sua fronteira $\mathcal{F} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{F}}$ tem medida 0, e
3. $\mathcal{F}\lambda \cap \overset{\circ}{\mathcal{F}} = \emptyset$, para todo $\lambda \in \Gamma - \{e\}$.

Observação 3.2. A medida de Haar μ em G é dada por uma forma de volume suave, então a medida associada m em G/Γ também é dada por uma forma de volume, portanto, dizemos que G/Γ tem volume finito se $m(G/\Gamma) < \infty$.

A Definição 1.1, dá uma caracterização topológica de reticulados em \mathbb{R}^n , sugere definir um reticulado em um grupo topológico G como um subgrupo discreto $\Gamma \subset G$ com G/Γ compacto (ver Teorema 1.10). Mas outra característica importante de qualquer reticulado em $L \subset \mathbb{R}^n$ é a existência de um domínio fundamental T de volume finito. Acontece que este ponto de vista é mais conveniente para estender a noção de reticulado para grupos mais gerais.

Definição 3.3 (Reticulado). Seja G um grupo localmente compacto, com medida de Haar μ . Um subgrupo discreto $\Gamma \subset G$ é chamado de reticulado se existe um conjunto mensurável $\mathcal{F} \subset G$ tal que $\mathcal{F}\Gamma = G$ e $\mu(\mathcal{F}) < \infty$. Neste caso dizemos que Γ tem covolume finito.

Observação 3.4. Pela unicidade da medida de Haar, esta definição não depende da escolha de μ . Seja $\pi : G \rightarrow G/\Gamma$ a aplicação de projeção. A condição $\mathcal{F}\Gamma = G$ equivale a dizer que $\pi(\mathcal{F}) = G/\Gamma$.

Um domínio fundamental bem conhecido na literatura é o domínio fundamental para a ação de $SL(2, \mathbb{Z})$ em \mathbb{H}^2 . O exemplo a seguir permite visualizar esse domínio no modelo do semiplano superior de Poincaré para o plano hiperbólico verificar que, de fato, a medida desse domínio fundamental é finita.

Exemplo 3.5 (O plano hiperbólico). O plano hiperbólico é uma superfície bidimensional que possui uma curvatura negativa constante e é um exemplo de uma geometria não euclidiana, definido como

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\},$$

onde o produto interno em $T_z\mathbb{H}^2$ é dado por

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{H}^2} = \frac{1}{4(\text{Im } z)^2} \langle u, v \rangle_{\mathbb{R}^2}.$$

Seja

$$\mathcal{F} = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z| \geq 1, -1/2 \leq \text{Re } z \leq 1/2\}$$

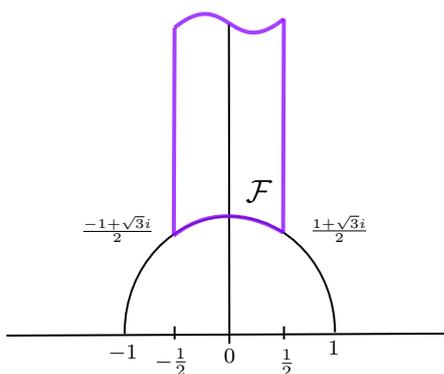


Figura 3.1: Domínio fundamental clássico para a ação de $SL(2, \mathbb{Z})$ em \mathbb{H}^2 .

É conhecido que \mathcal{F} é um domínio fundamental para a ação de $SL(2, \mathbb{Z})$ em \mathbb{H}^2 [2], portanto, basta mostrar que \mathcal{F} tem volume finito, ou, mais precisamente, área hiperbólica finita. Desde que

$$\mu(A) = \int_A \frac{dx dy}{y^2},$$

temos que

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{F}) &= \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx dy}{y^2}, \\ &= - \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{y} \Big|_{\sqrt{3}/2}^y \right), \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} < \infty. \end{aligned}$$

Portanto, $\mu(\mathcal{F}) < \infty$. No entanto, \mathcal{F} é um domínio fundamental para a ação de $SL(2, \mathbb{Z})$ em \mathbb{H}^2 . Para demonstrar que $SL(2, \mathbb{Z})$ é um reticulado em $SL(2, \mathbb{R})$, precisamos de uma região auxiliar para a ação de $SL(2, \mathbb{Z})$ em $SL(2, \mathbb{R})$. A estrutura dessa região será apresentada na próxima seção.

Definição 3.6. Um subgrupo fechado Γ de G é cocompacto se G/Γ for compacto.

O objetivo principal deste trabalho, que começamos a desenvolver a partir de agora, é mostrar que mesmo não sendo cocompacto, o quociente tem medida de Haar finita.

Exemplo 3.7. \mathbb{Z}^n é um subgrupo cocompacto de \mathbb{R}^n . O subgrupo \mathbb{Z}^n é fechado em \mathbb{R}^n e pelo Teorema 1.10 o grupo $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ é compacto.

Observação 3.8. É comum ver o grupo $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ como um espaço métrico, utilizando a métrica herdada como um subconjunto de \mathbb{R}^4 com a métrica euclidiana usual. Portanto, o grupo $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ é um subconjunto de \mathbb{R}^4 .

Considerando esse fato, vamos demonstrar que o subgrupo $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ é discreto em $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

Proposição 3.9. $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ é discreto em $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

Demonstração. Como a topologia em $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ tem origem na topologia euclidiana usual, utilizando a métrica herdada como um subconjunto de \mathbb{R}^{n^2} , segue que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ deve ser discreto. \square

Exemplo 3.10. Pelo Exemplo 1.19, sabemos que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}) \subset X$ não é compacto, onde X é o espaço de todos os reticulados de \mathbb{R}^n . Logo, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ não é cocompacto.

Teorema 3.11. Um subgrupo discreto e cocompacto de um grupo de Lie é um reticulado.

Demonstração. Seja Γ um subgrupo discreto de um grupo de Lie G , tal que Γ é discreto e cocompacto, então por definição G/Γ é compacto. Suponhamos que G é localmente compacto, seja $U_x \subset G$ uma vizinhança aberta para qualquer $x \in G$, como G é localmente compacto podemos escolher um subconjunto compacto K_G tal que $U_x \subset K_G$. Assim, U_x tem medida finita. Seja $\pi : G \rightarrow G/\Gamma$ a função de projeção, como π é uma função aberta, a coleção de subconjuntos $\pi(U_x)$ é uma cobertura aberta de G/Γ . Pela compacidade de G/Γ , existe uma subcobertura finita $\pi(U_{x_1}), \dots, \pi(U_{x_n})$ que cobre todo G . Então, $A = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$ é um conjunto mensurável e pela propriedade de aditividade da medida de Haar, temos que $\mu(A) \leq \mu(U_{x_1}) + \mu(U_{x_2}) + \dots + \mu(U_{x_n})$, e como cada U_{x_i} tem medida finita, logo $\mu(A) < \infty$. Assim, $K = G/\Gamma$ tem volume finito. Portanto Γ é um reticulado em G . \square

O teorema anterior desempenha um papel fundamental na teoria dos reticulados. No entanto, ele não nos permite atingir nosso objetivo, que é $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ é um reticulado em $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, pois já foi provado que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ não é cocompacto. Portanto, precisamos explorar outras ferramentas para alcançar esse propósito. No próximo capítulo, encontraremos essas ferramentas.

3.2 Conjuntos de Siegel para $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$

Nesta seção, apresentaremos o plano hiperbólico como um exemplo de espaço homogêneo, que é uma variedade diferenciável na qual existe uma ação transitiva de um grupo de Lie. Veremos que a propriedade de ser um espaço homogêneo significa que, em qualquer ponto do plano hiperbólico, é possível encontrar uma transformação contínua que leva esse ponto para qualquer outro ponto do plano. Essa transformação é realizada por elementos de um grupo de Lie, que como já vimos é um conjunto de transformações que preservam a estrutura do espaço. Além disso, apresentamos os conjuntos de Siegel para $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Os conjuntos de Siegel, também conhecidos como domínios de Siegel, desempenham um papel crucial no estudo das ações de grupos de matrizes lineares. No contexto geral para $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$, os conjuntos de Siegel são usados regiões auxiliares que contem domínios fundamentais, para a ação desse grupo em $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

Uma variedade riemanniana consiste em uma variedade suave M com a escolha de um produto interno no espaço tangente $T_x M$ para cada $x \in M$, chamada métrica Riemanniana. Essa escolha é feita de forma que o produto interno varie suavemente à medida que x varia. O plano hiperbólico é uma variedade diferenciável que possui uma métrica riemanniana, de curvatura seccional constante igual a -1 .

Definição 3.12. Uma variedade Riemanniana X é um espaço homogêneo se o grupo de isometrias $\text{Isom}(X)$ age transitivamente em X .

Observação 3.13. Usamos G° para denotar a componente conexa da identidade do grupo de Lie G .

Exemplo 3.14. Uma transformação de Möbius é uma aplicação $T : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ da forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc = 1$. O conjunto de transformações de Möbius é um grupo com a composição é dentado como $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. É possível mostrar que cada transformação de Möbius preserva $\langle u, v \rangle_{\mathbb{H}^2}$. Desta maneira, podemos identificar a $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ como subgrupo de $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$. Além disso, $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ é um grupo conexo já que $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ é conexo (ver Exemplo 2.11). Com tudo o grupo $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ é gerado por $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ junto com a transformação $z \mapsto \bar{z}$ (ver [2]).

O grupo $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ age transitivamente no plano hiperbólico. De fato, vamos construir uma transformação que leva i para qualquer ponto em \mathbb{H}^2 . Seja $A \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, tal que

$$A \cdot i = \frac{ai + b}{ci + d} = \frac{ac + bd + i(ad - bc)}{c^2 + d^2},$$

como $A \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, temos que $ad - bc = 1$, logo

$$\frac{ac + bd + i(ad - bc)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{1}{c^2 + d^2}.$$

Suponha que $c = 0$, então $a \neq 0, d \neq 0$ e $ad - bc = 1$, assim $ad = 1$. Portanto,

$$\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{1}{c^2 + d^2} = \frac{bd}{d^2} + i \frac{1}{d^2} = \frac{b}{d} + i \frac{1}{d^2} = ab + a^2 i.$$

Considere $z = x + iy \in \mathbb{H}^2$ e tal que $ab + a^2 i = x + iy$ então

$$A \cdot i = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \cdot i = z.$$

Como z era arbitrário, a órbita de i é todo o semi plano superior. Além disso, como qualquer ponto w pode ser levado para i usando o inverso dessa matriz, então qualquer w pode ser levado para qualquer z , por composição dessas transformações. Logo o plano hiperbólico \mathbb{H}^2 é um exemplo de espaço homogêneo.

Agora, suponha que X seja um espaço homogêneo conexo. Isso implica que qualquer ponto em X pode ser transformado em qualquer outro ponto através de isometrias. Dessa forma, podemos identificar o espaço X com o espaço quociente G/K , onde G é o grupo das isometrias de X e K é o estabilizador de algum ponto em X . Essa identificação significa que cada classe de equivalência em G/K representa um ponto único em X . Mais precisamente

Um variedade Riemanniana X é um espaço simétrico se X for conexo, X for homogêneo e se existe uma isometria γ de X tal que $\gamma^2 = Id$, e γ com pelo menos um ponto fixo isolado, que significa que $\gamma(x) = x$ e não existem outros pontos em X que são fixos por γ .

Proposição 3.15. Para qualquer espaço simétrico X , se $G = \text{Isom}(X)^\circ$ e $K = G_p$ o estabilizador de p , com p sendo um ponto fixo isolado, então X é isométrico a G/K .

Demonstração. Ver em [8, Proposição (1.2.2)]. □

Essa abordagem permite uma melhor compreensão da estrutura e propriedades de X ao relacioná-lo com o grupo de isometrias G e o estabilizador K . Essa caracterização em termos de espaço quociente simplifica o estudo e a análise de X , bem como de suas propriedades geométricas.

Exemplo 3.16. Para $G = \text{Isom}(\mathbb{H}^2)^\circ$, seja $K = \text{Stab}_G(i)$, onde

$$\text{Stab}_G(i) = \{gi = i \mid g \in G\}.$$

Seja $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ tal que $T(i) = i$, então

$$\frac{ai + i}{ci + d} = i,$$

assim $a = d$ e $b = -c$. Dessa forma, para a matriz A associada a T temos que

$$A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = A^{-1}$$

portanto, $\text{Stab}_G(i) \cong \text{SO}(2, \mathbb{R})$. Então

$$\mathbb{H}^2 \cong \text{PSL}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(2, \mathbb{R}).$$

Agora vamos descrever um conjunto para a ação de $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ em $\text{SL}(2, \mathbb{R})$, sabemos que

$$\mathcal{F}_0 = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z| \geq 1, -1/2 \leq \text{Re } z \leq 1/2\},$$

é um domínio fundamental para a ação de $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ no semiplano superior \mathbb{H}^2 (ver Exemplo 3.5). Estamos procurando um domínio para a ação de $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ em $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ que seja um pouco maior em comparação ao \mathcal{F}_0 . A forma do domínio fundamental \mathcal{F}_0 não é trivial e se torna mais complexa quando $n \neq 2$. Sendo assim, iremos descrever um conjunto que possa ser expresso de maneira mais simples e que se aproxime a um domínio fundamental.

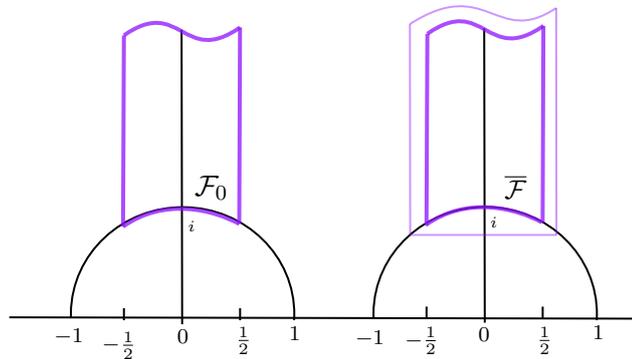


Figura 3.2: O domínio fundamental \mathcal{F}_0 e uma aproximação $\bar{\mathcal{F}}$.

Precisamos criar uma região mais simplificada em comparação com \mathcal{F}_0 . Podemos substituir a curva inferior por uma reta e ampliar a região, conforme mostrado na figura 3.3. Além disso, como não precisamos determinar com precisão um domínio fundamental, vamos aumentar ligeiramente a região movendo as bordas um pouco para fora.

Essa nova região, denotada por $\overline{\mathcal{F}}$, tem área um pouco maior do que um domínio fundamental. Uma característica importante dessa nova região é a facilidade de sua descrição:

$$\overline{\mathcal{F}} = \left\{ x + yi \mid \begin{array}{l} c_1 \leq x \leq c_2, \\ y \geq c_3 \end{array} \right\},$$

para c_1, c_2, c_3 apropriados em \mathbb{R} .

Definição 3.17 (Conjuntos de Siegel para $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$). Qualquer conjunto da forma

$$\mathcal{F} = \tilde{N}_{c_1, c_2} \tilde{A}_{c_3} K. \quad (3.1)$$

é chamado de conjunto de Siegel, onde

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{c_1, c_2} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \leq t \leq c_2 \right\}, \\ \tilde{A}_{c_3} &= \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \mid e^{2t} \geq c_3 \right\}, \\ K &= \mathrm{SO}(2). \end{aligned}$$

Além disso $\mathcal{F} = \{g \in G \mid g(i) \in \overline{\mathcal{F}}\}$. É importante mencionar que $\mathcal{F} \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ e $\mathcal{F}_0 \subset \mathbb{H}^2$ (ver Figura 3.3).

Vamos encontrar os parâmetros adequados c_1, c_2 e c_3 da região auxiliar \mathcal{F} para ação de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ em $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Tome $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ e $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Como \mathcal{F}_0 é um domínio fundamental para a ação de Γ em $\mathbb{H}^2 \cong \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$, em particular toda Γ -órbita em \mathbb{H}^2 se intersecta com o conjunto

$$\overline{\mathcal{F}} = \left\{ z \in \mathbb{H}^2 \mid \mathrm{Im} z \geq \sqrt{3}/2, |\mathrm{Re} z| \leq 1/2 \right\}.$$

Consideramos

$$\begin{aligned} N_{1/2} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid -1/2 \leq t \leq 1/2 \right\}, \\ A_{\frac{\sqrt{3}}{2}} &= \left\{ \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix} \mid e^{2s} \geq \sqrt{3}/2 \right\}. \end{aligned}$$

Vamos demonstrar que $\overline{\mathcal{F}} = N_{1/2} A_{\sqrt{3}/2} i$. Notemos que

$$\begin{aligned} N_{1/2} A_{\sqrt{3}/2} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix} \mid -1/2 \leq t \leq 1/2, e^{2s} \geq \sqrt{3}/2 \right\}, \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} e^s & te^{-s} \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix} \mid -1/2 \leq t \leq 1/2, e^{2s} \geq \sqrt{3}/2 \right\}. \end{aligned}$$

Por exemplo, a matriz

$$A = \begin{pmatrix} e^{1/2} & 1/2e^{-1/2} \\ 0 & e^{-1/2} \end{pmatrix} \in N_{1/2} A_{\sqrt{3}/2},$$

e, como $\mathrm{Re}(A(i)) = 1/2$ e $\mathrm{Im}(A(i)) = e$, então $A(i) \in \overline{\mathcal{F}}$. Em geral, temos que

$$N_{1/2} A_{\sqrt{3}/2}(i) = \left\{ e^{2s}i + t \mid -1/2 \leq t \leq 1/2, e^{2s} \geq \sqrt{3}/2 \right\}.$$

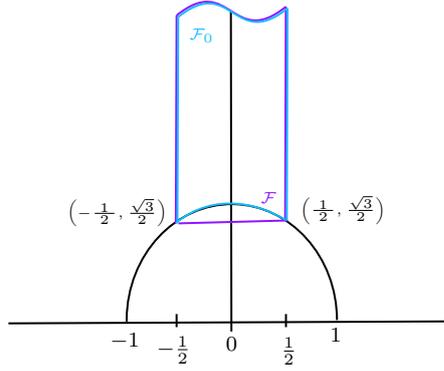


Figura 3.3: Conjunto de Siegel \mathcal{F} , para $c_1 = c_2 = 1/2$ e $c_3 = \sqrt{3}/2$.

Tome $z \in \overline{\mathcal{F}}$, assim $|\operatorname{Re}(z)| \leq 1/2$ e $\operatorname{Im}(z) \geq \sqrt{3}/2$, então $z \in N_{1/2}A_{\sqrt{3}/2}(i)$, portanto $N_{1/2}A_{\sqrt{3}/2}i = \overline{\mathcal{F}}$. Logo, considere a aplicação $p : G \rightarrow \mathbb{H}^2, g \mapsto g \cdot i$, obtemos que

$$G = \Gamma p^{-1}(\overline{\mathcal{F}}) = \Gamma N_{1/2}A_{\sqrt{3}/2}K.$$

Observe que para $c_1 = c_2 = 1/2$ e $c_3 = \sqrt{3}/2$ em (3.1), obtemos $p^{-1}(\overline{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}$. Então $p^{-1}(\overline{\mathcal{F}})$ é um conjunto de Siegel para a ação de Γ em G .

Considere agora o plano hiperbólico, mas agora no modelo de espaço homogêneo,

$$\mathbb{H}^2 = \{x + iy : x \in \mathbb{R}, y > 0\}.$$

O grupo $G = \operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$ age sobre \mathbb{H}^2 transitivamente, então \mathbb{H}^2 pode ser obtido como uma órbita de um ponto

$$\mathbb{H}^2 = \{gz : g \in G\}.$$

O estabilizador do ponto i pelo Exemplo 3.16 é o grupo ortogonal

$$K = G_i,$$

A decomposição Iwasawa de G é representada por KAN . Onde

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^+ \right\},$$

e

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

No próximo capítulo, vamos definir isso com mais detalhes. Podemos pensar

$$\mathbb{H}^2 \cong G/K \cong NA = AN,$$

pela identificação

$$x + iy \rightarrow a(y)n(x),$$

onde

$$a(y) = \begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix},$$

e

$$n(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Isso nos ajuda a construir a medida invariante à esquerda, como vemos

$$dn = dx, da = dy/y^2,$$

para P um subespaço mensurável de \mathbb{H}^2 , obtemos que

$$\begin{aligned} \int_P f(p) dp &= \int_A \int_N f(an) dadn, \\ &= \int_A \int_N f(a(y)n(x)) \frac{dx dy}{y^2}. \end{aligned}$$

Ao fazer uma análise similar, para $\mathcal{F} = N_{1/2}A_{\sqrt{3}/2}K$ um subespaço mensurável de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ para cada função de suporte compacto f em G , a medida de Haar de G/Γ nas coordenadas k, n, a é dada por

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{F}) &= \mu(N_{1/2}A_{\sqrt{3}/2}K) = \int_{N_{\frac{1}{2}}} \int_{A_{\frac{\sqrt{3}}{2}}} \int_K \frac{dx dy dk}{y^2} \\ &= \mu(K) \int_{N_{\frac{1}{2}}} \int_{A_{\frac{\sqrt{3}}{2}}} \frac{dx dy}{y^2}, \end{aligned}$$

como vimos, que para $c_1 = c_2 = 1/2$ e $c_3 = \sqrt{3}/2$ em (3.1), obtemos $\mathcal{F} = p^{-1}(\overline{\mathcal{F}})$, então $p(\mathcal{F}) = \overline{\mathcal{F}}$, além disso

$$\mu(p(\mathcal{F})) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\infty} \frac{dx dy}{y^2},$$

E, como vimos no exemplo 3.5, $\mu(p(\mathcal{F})) < \infty$ e, como a medida de Haar de um subgrupo compacto é finita, concluímos que $\mu(\mathcal{F}) < \infty$ em relação à medida de Haar e, assim $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ é um reticulado em $\text{SL}(2, \mathbb{R})$, de acordo com a Definição 3.3.

Capítulo 4

$SL(n, \mathbb{Z})$ é um reticulado em $SL(n, \mathbb{R})$

Neste capítulo, vamos explorar conceitos fundamentais que são necessários para demonstrar que $SL(n, \mathbb{Z})$ é um reticulado em $SL(n, \mathbb{R})$. Primeiramente, vamos definir o que são conjuntos de Siegel para $SL(n, \mathbb{Z})$. Apresentaremos uma região que se assemelha a um domínio fundamental para a ação do grupo $SL(n, \mathbb{Z})$ em $SL(n, \mathbb{R})$, Generalizando as técnicas que utilizamos na seção 3.2. Essa nova região auxiliar é um conjunto que possui propriedades semelhantes a um domínio fundamental que possui a propriedade de ser “um pouco maior” do que o domínio fundamental para essa ação e sua definição depende da decomposição de Iwasawa de $SL(n, \mathbb{R})$. Vamos demonstrar que, em relação à medida de Haar, essa região auxiliar possui medida finita.

4.1 Decomposição de Iwasawa

A decomposição de Iwasawa para $SL(n, \mathbb{R})$ está relacionada ao trabalho do matemático japonês Yasutaka Iwasawa (1917-1998) na teoria dos grupos de Lie e álgebra de Lie. A decomposição de Iwasawa foi introduzida por ele como uma ferramenta importante na análise de grupos de Lie. Nesta seção provaremos que cada elemento do grupo especial linear $SL(n, \mathbb{R})$ tem uma representação única como o produto de três fatores, cada um pertencente a um subgrupo específico. A decomposição de Iwasawa é expressa como $G = KAN$, onde K representa o subgrupo de matrizes ortogonais especiais $SO(n)$, A é o subgrupo das matrizes diagonais com determinante igual a um, e N é o subgrupo das matrizes triangulares superiores N , com elementos da diagonal principal iguais a um. Mais especificamente, a definição segue o seguinte teorema.

Teorema 4.1 (Decomposição de Iwasawa de $SL(n, \mathbb{R})$). *Em $G = SL(n, \mathbb{R})$, seja*

$$K = SO(n), \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \right\}^\circ.$$

Então $G = KAN$. De fato, todo $g \in G$ tem uma representação única da forma $g = kau$ com $k \in K, a \in A$ e $u \in N$. Além disso, $a_1 \cdots a_n = 1$.

É importante observar que, devido ao sobrescrito “ \circ ” em sua definição, A é apenas o componente da identidade do grupo de matrizes diagonais. Apresentamos a demonstração deste teorema seguindo as referências [8], [9] e [10]. Para reconstruir a demonstração do Teorema 4.1, é necessário demonstrar a seguinte proposição.

Observação 4.2. Sejam

$$a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N, \quad b = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \in A,$$

então $ab \in NA$. Note que

$$ab = \begin{pmatrix} a_1 & ab_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{ab_1}{a_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

assim $ab \in AN$. Em geral, fazendo um análise similar ao anterior obtemos que $AN = NA$.

Proposição 4.3. *Dados $k_1 a_1 u_1 = k_2 a_2 u_2$, com $k_i \in K, a_i \in A$ e $u_i \in N$, então $k_1 = k_2, a_1 = a_2$ e $u_1 = u_2$.*

Demonstração. Para começar, mostraremos que $K \cap AN = \{e\}$. Tome $n \in N$ e $a \in A$. Seja $n \in N$ e $a \in A$ da seguinte forma

$$n = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$an = \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix} \in AN.$$

Note que $(an)^T$ é uma matriz triangular inferior, e $(an)^{-1}$ é uma matriz triangular superior. Portanto $K \cap AN = \{e\}$. Agora, suponha que $k_1 a_1 u_1 = k_2 a_2 u_2$. Então, para $a_i \in A$ e $u_i \in N$, temos que $a_1 u_1 u_2^{-1} a_2^{-1} \in AN = NA$, então como $k_1 a_1 u_1 = k_2 a_2 u_2$ temos que $k_1^{-1} k_2 = a_1 u_1 u_2^{-1} a_2^{-1}$. Logo $k_1^{-1} k_2 \in AN$, mas $k_1^{-1} k_2 \in K$. Portanto, $k_1^{-1} k_2 = a_1 u_1 u_2^{-1} a_2^{-1} \in \{e\}$, logo $k_1^{-1} k_2 = e$, assim $k_1 = k_2$. Além disso $a_1 u_1 u_2^{-1} a_2^{-1} = e$, portanto $a_2^{-1} a_1 = u_2 u_1^{-1}$, como $a_2^{-1} a_1 \in A, u_2 u_1^{-1} \in N$ e $A \cap N = \{e\}$, temos que $a_1 = a_2$ e $u_1 = u_2$. \square

Demonstração Teorema 4.1. Sejam $g \in G$ e $\{v_1, \dots, v_n\}$ as colunas de g . Usamos o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para construir uma base ortonormal

$$\begin{aligned} u_1^* &= v_1 \\ u_2^* &= v_2 - \text{proj}_{u_1}(v_2), \\ u_3^* &= v_3 - \text{proj}_{u_1}(v_3) - \text{proj}_{u_2}(v_3), \\ u_4^* &= v_4 - \text{proj}_{u_1}(v_4) - \text{proj}_{u_2}(v_4) - \text{proj}_{u_3}(v_4), \\ &\vdots \\ u_n^* &= v_n - \sum_{j=1}^{n-1} \text{proj}_{u_j}(v_n), \end{aligned}$$

onde

$$\text{proj}_u(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u, \quad (4.1)$$

e $\langle v, u \rangle$ denota o produto interno dos vetores v e u . A sequência u_1^*, \dots, u_n^* é o sistema de vetores ortogonais e denotamos u_1, \dots, u_n como os vetores normalizados os quais formam um conjunto ortonormal de \mathbb{R}^n . Seja $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ a base canônica de \mathbb{R}^n . Como u_1, \dots, u_n é também uma base ortonormal para \mathbb{R}^n , então existe uma matriz ortogonal $k \in \text{SO}(n)$ tal que $ku_i = \varepsilon_i$, para todo $i = 1, \dots, n$. Portanto,

$$\begin{aligned} ku_i^* &= k \|u_i^*\| u_i, \\ &= \|u_i^*\| ku_i, \\ &= \|u_i^*\| \varepsilon_i, \end{aligned}$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Assim, a matriz triangular $a = \text{diag}(\|u_1^*\|, \dots, \|u_n^*\|)$ é tal que $ku_i^* = a\varepsilon_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Como $u_i \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, para todo $i = 1, \dots, n$, temos

$$\begin{aligned} g^{-1}u_i^* &= g^{-1} \left(v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \text{proj}_{u_j}(v_i) \right), \\ &= g^{-1}v_i - g^{-1} \left(\sum_{j=1}^{i-1} \text{proj}_{u_j}(v_i) \right), \\ &\in g^{-1}v_i - g^{-1} \langle v_1, \dots, v_n \rangle, \end{aligned}$$

Então, $g^{-1}u_i^* \in \varepsilon_i + \langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{i-1} \rangle$. Logo existe $u \in N$ tal que $g^{-1}u_i^* = u\varepsilon_i$, para todo $i = 1, \dots, n$. Portanto,

$$u^{-1}g^{-1}u_i^* = \varepsilon_i = a^{-1}ku_i^*, \text{ para todo } i.$$

Pela Proposição 4.3, $u^{-1}g^{-1} = a^{-1}k$, portanto $g = k^{-1}au^{-1} \in KAN$. Note que, de fato, $a \in A$ e $k \in K$, pois $1 = \det(g) = \det(k^{-1}au^{-1}) = \det(k^{-1}) \det(a) \det(u^{-1})$, logo $1 = \det(k^{-1}) \det(a) = \det(k)^{-1} \det(a)$, como $\det(a) > 0$ e $\det k = \{\pm 1\}$, então $\det(k) = \det(a) = 1$. Portanto, todo $g \in \text{SL}(n, \mathbb{R})$ tem uma representação única da forma $g = kau$ com $k \in K$, $a \in A$ e $u \in N$. \square

4.2 Conjuntos de Siegel para $\text{SL}(n, \mathbb{Z})$

Nesta seção generalizamos a noção de conjunto Siegel para $\text{SL}(n, \mathbb{R})$, e iremos mostrar que tal conjunto é um conjunto que para , mas por enquanto vamos ver que por definição os conjuntos de Siegel são conjuntos que contem um domínio fundamental para a ação de $\text{SL}(n, \mathbb{Z})$ em $\text{SL}(n, \mathbb{R})$.

Seja $G = \text{SL}(n, \mathbb{R})$ e considere a decomposição de Iwasawa $G = NAK$, construímos um “conjunto Siegel” $\tilde{\Sigma}$ escolhendo os subconjuntos apropriados \overline{N} de N e \overline{A} de A , e deixando $\tilde{\Sigma} = \overline{NAK}$.

1. O conjunto \overline{N} pode ser qualquer subconjunto compacto (não vazio) de N . Por exemplo, poderíamos deixar

$$\overline{N} = \tilde{N}_{c_1, c_2} = \{u \in N \mid c_1 \leq u_{i,j} \leq c_2, \text{ para } i < j\}.$$

2. Observe que o conjunto \tilde{A}_{c_3} da Definição 3.17 tem a seguinte descrição alternativa

$$\tilde{A}_{c_3} = \{a \in A \mid a_{1,1} \geq c_3 a_{2,2}\}.$$

Portanto, podemos generalizar para $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ definindo

$$\tilde{A}_c = \{a \in A \mid a_{i,i} \geq ca_{i+1, i+1}, \text{ para } i = 1, \dots, n-1\}.$$

Dessa forma, para $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e $c_3 \in \mathbb{R}^+$, o conjunto Siegel possui a seguinte estrutura

$$\tilde{\Sigma}_{c_1, c_2, c_3} = \tilde{N}_{c_1, c_2} \tilde{A}_{c_3} K.$$

Portanto para a construção dos conjuntos de Siegel para $\text{SL}(n, \mathbb{Z})$, necessitamos da decomposição de Iwasawa para $\text{SL}(n, \mathbb{R})$, impondo restrições adequadas às entradas das matrizes.

Definição 4.4. O conjunto de Siegel para $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ é

$$\Sigma_{t,\lambda} = N_\lambda A_t K.$$

onde t, λ reais positivos, $K = \mathrm{SO}(n)$ e

$$A_t = \left\{ a \in A; \frac{a_i}{a_{i+1}} \leq t, \text{ para todo } i = 1, \dots, n \right\},$$

$$N_\lambda = \{ u \in N \mid |u_{ij}| \leq \lambda, \text{ para todo } i, j = 1, \dots, n \}.$$

Observação 4.5. Na definição anterior a_i é a entrada $a_{i,i}$. Se $a \in A_t$ então

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} \leq t.$$

Agora considere a^{-1} , onde

$$a^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \frac{1}{a_2} & & \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

Como $a^{-1} \in A_t$, então

$$\frac{a_i^{-1}}{a_{i+1}^{-1}} \leq t,$$

Tome $c = 1/t$ e obtemos

$$a_i \geq ca_{i+1},$$

portanto $a^{-1} \in \tilde{A}_c$. Logo a notação definida e a Definição 3.17 dos conjuntos de Siegel para $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ e juntamente com a Definição 4.4 são definições equivalentes. À medida que avançamos, utilizaremos as duas notações e a escolha será feita às vezes por conveniência.

Definição 4.6 (Domínio fundamental grosseiro). Suponha que Γ age de forma propriamente descontínua em um espaço topológico Y . Um subconjunto \mathcal{F} de Y é um domínio fundamental grosseiro para Γ se

1. $\Gamma \mathcal{F} = Y$, e
2. $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \mathcal{F} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset\}$ é finito.

Alguns autores referem-se a \mathcal{F} como conjunto fundamental, em vez de domínio fundamental grosseiro.

Os conjuntos de Siegel aparecem na teoria como conjuntos auxiliares que servem como domínios fundamentais grosseiros para a ação de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ em $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, para certos t, λ na Definição 4.4. Os conjuntos de Siegel $\Sigma_{t,\lambda} \subset \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ são domínios fundamentais grosseiros para a ação de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$. As provas dos resultados podem ser encontradas em [8], [9].

4.3 Volume de conjuntos Siegel para $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$

A importância central deste trabalho reside no papel fundamental desempenhado pelos conjuntos de Siegel na prova de que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ é um reticulado em $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Como já discutido anteriormente, é necessário demonstrar que o conjunto de Siegel $\tilde{\Sigma}_{c_1, c_2, c_3}$ para a ação de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ em $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ possui medida de Haar finita. Teixeira, em [9], aborda a medida de Haar desse conjunto e fornece uma equação para o volume desse domínio fundamental aproximado. Essa equação será apresentada nesta seção.

Dada a decomposição de Iwasawa $G = KAN$ e a Definição 4.4 em [10, página 145] e em [9, página 56] é demonstrado que para cada função de suporte compacto f em G , a medida de Haar de G nas coordenadas k, u, a é dada por

$$\int_G f(g)dg = \int_{N_u} \int_{A_t} \int_K f(auk) \prod_{i < j} \frac{a_i}{a_j} dk da du, \quad (4.2)$$

onde da , du e dk são as medidas de Haar em A , N e K , respectivamente.

A seguir, encontramos uma fórmula para o volume de $(\Sigma_{t,\lambda})$, cuja demonstração pode ser encontrada em [9], mas aqui apresentaremos todos os detalhes e cálculos pertinentes que não estão na referência.

Lema 4.7. *Seja $a \in A$, consideremos*

$$b_i = \frac{a_i}{a_{i+1}}, \text{ para todo } i = 1, \dots, n-1,$$

onde $a_i > 0$ para todo i , e $\prod_{i=1}^n a_i = 1$. Então,

$$\prod_{i=1}^{n-1} b_i^{i(n-i)} = \prod_{i < j} \frac{a_i}{a_j}.$$

Demonstração. Desenvolvendo o segundo produtório, obtemos para $i, j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \prod_{i < j} \frac{a_i}{a_j} &= \left(\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_1}{a_3} \cdot \frac{a_1}{a_4} \dots \frac{a_1}{a_n} \right) \cdot \left(\frac{a_2}{a_3} \cdot \frac{a_2}{a_4} \cdot \frac{a_2}{a_5} \dots \frac{a_2}{a_n} \right) \dots \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} \right) \\ &= \frac{a_1^{n-1}}{\prod_{i=2}^n a_i} \cdot \frac{a_2^{n-2}}{\prod_{i=3}^n a_i} \dots \frac{a_{n-2}^2}{a_{n-1} \cdot a_n} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned} \prod_{i < j} \frac{a_i}{a_j} &= \left(\prod_{i=2}^n (a_i)^{i-1} \right)^{-1} \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i^{n-i} \right) \\ &= \left(\prod_{i=2}^n (a_i)^{i-1} \right)^{-1} \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i^{n-i} \right) \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i^{(-i^2+i(n+1)-n)} \right) \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i^{(-i^2+i(n+1)-n)} \right)^{-1} \\ &= (a_n^{n-1})^{-1} \left(\prod_{i=1}^{n-2} (a_{i+1})^i a_{i+1}^{(-(i+1)^2+(i+1)(n+1)-n)} \right) \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i^{n-i} a_i^{(-i^2+i(n+1)-n)} \right)^{-1} \\ &= (a_n^{n-1})^{-1} \left(\prod_{i=1}^{n-2} a_{i+1}^{i(n-i)} \right)^{-1} \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i^{i(n-i)} \right) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_{i+1}^{i(n-i)} \right)^{-1} \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i^{i(n-i)} \right) = \prod_{i=1}^{n-1} b_i^{i(n-i)}. \end{aligned}$$

□

O Lema 4.7 é uma conveniente mudança de coordenadas. Nesta parte do texto, realizamos o cálculo dos volumes dos conjuntos de Siegel em $SL(n, \mathbb{R})$. Para isso, faremos uso da medida de Haar em G .

Teorema 4.8. *O volume de um conjunto Siegel $\text{vol}(\Sigma_{t,\lambda})$ é dado pela seguinte fórmula*

$$\text{vol}(\Sigma_{t,\lambda}) = \frac{1}{2} \text{vol}(\text{SO}(n))(2\lambda)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{t^{\frac{n(n^2-1)}{6}}}{((n-1)!)^2}.$$

Demonstração. Como exibimos anteriormente em (4.2)

$$\int_G f(g)dg = \int_{N_u} \int_{A_t} \int_K \prod_{i<j} \frac{a_i}{a_j} dkdadu,$$

onde da , du e dk são as medidas de Haar em A , N e K , respectivamente. Assim

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Sigma_{t,\lambda}) &= \text{vol}(A_t N_\lambda K), \\ &= \int_{N_u} \int_{A_t} \int_K \prod_{i<j} \frac{a_i}{a_j} dkdadu. \end{aligned}$$

Pelos exemplos 2.38 e 2.39, obtemos que

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Sigma_{t,\lambda}) &= \int_{N_u} \int_{A_t} \int_K \prod_{i<j} \frac{a_i}{a_j} dk \prod_{i=1}^{n-1} \frac{da_i}{a_i} \prod_{i<j} du_{ij} \\ &= \int_{|u_{ij}| \leq \lambda} \int_{\frac{a_i}{a_j} \leq t} \int_K \prod_{i<j} \frac{a_i}{a_j} dk \prod_{i=1}^{n-1} \frac{da_i}{a_i} \prod_{i<j} du_{ij} \\ &= \int_{|u_{ij}| \leq \lambda} \int_{\frac{a_i}{a_j} \leq t} \text{vol}(K) \prod_{i<j} \frac{a_i}{a_j} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{da_i}{a_i} \prod_{i<j} du_{ij}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Sigma_{t,\lambda}) &= \text{vol}(K) \int_{|u_{ij}| \leq \lambda} \prod_{i<j} du_{ij} \int_{\frac{a_i}{a_j} \leq t} \prod_{i<j} \frac{a_i}{a_j} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{da_i}{a_i} \\ &= \text{vol}(K) [(2\lambda)^{n-1} (2\lambda)^{n-2} (2\lambda)^{n-3} \dots (2\lambda)] \int_{\frac{a_i}{a_j} \leq t} \prod_{i<j} \frac{a_i}{a_j} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{da_i}{a_i} \\ &= \text{vol}(K) (2\lambda)^{\frac{n(n-1)}{2}} \int_{\frac{a_i}{a_j} \leq t} \prod_{i<j} \frac{a_i}{a_j} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{da_i}{a_i}. \end{aligned}$$

Além disso, pelo Lema 4.7, temos que as derivadas parciais da mudança de coordenadas são

$$\frac{\partial b_i}{\partial a_j} = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq i, i+1; \\ \frac{1}{a_{i+1}} & \text{se } j = i, i = 1, \dots, n-2; \\ -\frac{a_i}{a_{i+1}^2} & \text{se } j = i+1, i = 1, \dots, n-2; \\ 2a_{n-1} (a_1 \dots a_{n-2}) & \text{se } j = i = n-1. \end{cases}$$

Logo, a matriz jacobiana $\left(\frac{\partial b_i}{\partial a_j}\right)$ é dada por

$$\left(\frac{\partial b_i}{\partial a_j}\right)_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial b_1}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial b_1}{\partial a_n} \\ \frac{\partial b_2}{\partial a_2} & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \frac{\partial b_{n-1}}{\partial a_{n-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2^{-1} & -\frac{a_1}{a_2^2} & \dots & 0 \\ \dots & a_3^{-1} & -\frac{a_2}{a_3^2} & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \frac{\partial b_n}{\partial a_n} \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\det \left(\left(\frac{\partial b_i}{\partial a_j} \right) \right) = a_2^{-1} a_3^{-1} \cdots a_{n-1}^{-1} 2a_{n-1} a_1 a_2 \cdots a_{n-2} = 2a_1$$

Logo, $db = 2a_1 da$, e assim, $da = (2a_1)^{-1} db$. Daí obtemos que

$$\prod_{i=1}^{n-1} \frac{da_i}{a_i} = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2a_1} \frac{db_i}{a_i} = \frac{1}{2a_1} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{db_i}{a_i}$$

Assim, dado que $\prod_{i=1}^n a_i = 1$, a expressão pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \int_{\substack{a_i \leq t \\ a_j \leq t}} \prod_{i < j} \frac{a_i}{a_j} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{da_i}{a_i} &= \int_{b_i \leq t} \prod_{i=1}^{n-1} b_i^{i(n-i)} \frac{1}{2a_1} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{db_i}{a_i} \\ &= \int_{b_i \leq t} \prod_{i=1}^{n-1} b_i^{i(n-i)} \frac{1}{2a_1} \frac{1}{a_1} \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} db_i \\ &= \int_{b_i \leq t} \prod_{i=1}^{n-1} b_i^{i(n-i)} \frac{1}{2a_1} \frac{1}{a_1} \frac{a_2}{a_2} \frac{1}{a_2} \frac{a_3}{a_3} \cdots \frac{1}{a_{n-1}} \frac{a_n}{a_n} \prod_{i=1}^{n-1} db_i \\ &= \int_{b_i \leq t} \prod_{i=1}^{n-1} b_i^{i(n-i)} \frac{1}{2a_1} \frac{1}{b_1} \frac{1}{a_2} \frac{1}{b_2} \frac{1}{a_3} \cdots \frac{1}{b_{n-1}} \frac{1}{a_n} \prod_{i=1}^{n-1} db_i \\ &= \frac{1}{2} \int_{b_i \leq t} \prod_{i=1}^{n-1} b_i^{i(n-i)-1} \prod_{i=1}^{n-1} db_i, \end{aligned}$$

Como $b_i > 0$ para todo i , obtemos que

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Sigma_{t,\lambda}) &= \frac{1}{2} \text{vol}(K) (2\lambda)^{\frac{n(n-1)}{2}} \int_{b_i \leq t} \prod_{i=1}^{n-1} b_i^{(in-i^2-1)} \prod_{i=1}^{n-1} db_i \\ &= \frac{1}{2} \text{vol}(K) (2\lambda)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{t^{(in-i^2)}}{(in-i^2)} \\ &= \frac{1}{2} \text{vol}(K) (2\lambda)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(in-i^2)} t^{(\sum_{i=1}^{n-1} (in-i^2))} \\ &= \frac{1}{2} \text{vol}(K) (2\lambda)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(in-i^2)} t^{\frac{n(n^2-1)}{6}} \\ &= \frac{1}{2} \text{vol}(K) (2\lambda)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{t^{\frac{n(n^2-1)}{6}}}{((n-1)!)^2} \\ &= \frac{1}{2} \text{vol}(\text{SO}(n)) (2\lambda)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{t^{\frac{n(n^2-1)}{6}}}{((n-1)!)^2}. \end{aligned}$$

□

Corolário 4.9. $\Sigma_{t,\lambda}$ tem medida finita (em relação à medida de Haar em $\text{SL}(n, \mathbb{R})$).

Relembremos que um subgrupo discreto $\Gamma \subset G$ é um reticulado se existe um conjunto mensurável $\mathcal{F} \subset G$ tal que $\mathcal{F}\Gamma = G$ e a medida $\mu(\mathcal{F})$ é finita. No Corolário 4.9, demonstramos que $\Sigma_{t,\lambda}$ possui medida finita em relação à medida de Haar em $\text{SL}(n, \mathbb{R})$. Agora, precisamos provar que $\Sigma_{t,\lambda}\Gamma = G$. Para alcançar tal objetivo, os seguintes resultados são relevantes, e seguimos as referências [9] e [10].

Lema 4.10. Para $N_{\mathbb{Z}} = N \cap \Gamma$, tem-se $N = N_{1/2}N_{\mathbb{Z}}$.

Demonstração. Vamos fazer a prova por indução em n . Seja

$$u = (u_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in N.$$

Temos que mostrar que $|(u\gamma)_{ij}| \leq 1/2$ para algum $\gamma \in N_{\mathbb{Z}}$. Considere

$$u = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & u' \end{pmatrix} \in N,$$

onde u' é uma matriz unipotente $(n-1) \times (n-1)$, isto é, $(u')^2 = Id$ e $x = (u_{1i})_{2 \leq i \leq n}$. Por indução, para $n=1$ não há nada a provar. Para $n=2$, seja

$$u = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N,$$

considere

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N_{\mathbb{Z}},$$

tal que $|x-y| \leq 1/2$, então podemos escrever u como

$$u = \begin{pmatrix} 1 & x-y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N_{1/2}N_{\mathbb{Z}}.$$

Agora, para $n-1$ podemos encontrar uma matriz inteira γ' , $(n-1) \times (n-1)$, tal que $|(u'\gamma')_{ij}| \leq 1/2$. Então

$$v = u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x\gamma' \\ 0 & u'\gamma' \end{pmatrix}.$$

Seja $y = (y_{1i})_{2 \leq i \leq n} \in \mathbb{Z}^{n-1}$ tal que $|v_i + y_{1i}| \leq 1/2$, onde $x\gamma' = (v_i)_{2 \leq i \leq n}$. Então

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & Id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & \gamma' \end{pmatrix},$$

tem a propriedade necessária. Pois

$$(u\gamma)_j = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & u' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y + x\gamma' \\ 0 & u'\gamma' \end{pmatrix},$$

e pela hipótese de indução temos que $|(u'\gamma')_{ij}| \leq 1/2$ e $|y + x\gamma'| = |(y_{1i}) + (v_i)| \leq 1/2$, para todo $2 \leq i \leq n$. Portanto

$$N = N_{1/2}N_{\mathbb{Z}}.$$

□

Proposição 4.11. Seja $g \in G$ com decomposição de Iwasawa $g = kan$. Suponha que $\|ge_1\| \leq \|gv\|$ para todo $v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Então $a_{11}/a_{22} \leq 2/\sqrt{3}$, onde a_{ii} denota o i -ésimo elemento diagonal de a .

Demonstração. Para $u \in N$, temos que $gu = kanu \in KAN = G$. Então, $a_{gu} = a_g$ e $\|gue_1\| = \|ge_1\|$, para qualquer $u \in N$, já que

$$ge_1 = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} \\ \vdots \\ g_{n1} \end{pmatrix},$$

e

$$gve_1 = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} \\ \vdots \\ g_{n1} \end{pmatrix},$$

Note que

$$\|ge_1\| = \|kan(e_1)\| = \|an(e_1)\| = \|ae_1\| = a_{11}.$$

Como $ne_2 = e_2 + n_{12}e_1$, e como $\|ge_1\| \leq \|gv\|$ para todo $v \in \mathbb{Z}^n$, temos que

$$\begin{aligned} a_{11}^2 &= \|g(e_1)\|^2 = \|kan(e_2)\|^2, \\ &= \|an(e_2)\|^2, \\ &= \|a(e_2 + n_{12}e_1)\|^2, \\ &= a_{22}^2 + n_{12}^2 a_{11}^2. \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.10, temos que $|n_{ij}| \leq 1/2$ para todo $i < j$. Assim $|n_{12}| \leq 1/2$, e obtemos que

$$\begin{aligned} a_{11}^2 &\leq a_{11}^2/4 + a_{22}^2, \\ \Rightarrow 4a_{11}^2 &\leq a_{11}^2 + 4a_{22}^2, \\ \Rightarrow 3a_{11}^2 &\leq 4a_{22}^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{a_{11}}{a_{22}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

□

Teorema 4.12. Para $t \geq 2/\sqrt{3}$ e $u \geq 1/2$, tem-se $G = \Sigma_{t,u}\Gamma$.

Demonstração. A prova será feita por indução sob n . Para $n = 1$ não há nada a provar pois $G = \{1\}$. Suponha que $n > 1$ e que a afirmação é verdadeira para $\text{SL}(n-1, \mathbb{R})$. Sejam $g \in G$ e a função

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ v &\mapsto \|gv\| \end{aligned}$$

que toma seu mínimo m em $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Pelo Teorema 1.6, \mathbb{Z}^n é um reticulado em \mathbb{R}^n , então $g\mathbb{Z}^n$ é discreto em \mathbb{R}^n . Seja $v_0 \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ tal que

$$\|gv_0\| = \min \{ \|gv\| \mid v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \}.$$

Se $v_0 = \alpha v$ para algum $\alpha \in \mathbb{Z}, v \in \mathbb{Z}^n$, então $\alpha = 1$ ou -1 . Em outras palavras, v_0 é um vetor primitivo. Como $\Gamma = \text{SL}(n, \mathbb{Z})$ age transitivamente sobre o conjunto de tais vetores, podemos encontrar $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma e_1 = v_0$. Defina $g'(v) = g\gamma(v)$. Então

$$\|g'e_1\| = \|g\gamma e_1\| = \|gv_0\| \leq \|gv\| = \|g'v\|, \quad \forall v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}.$$

Basta encontrar $\gamma' \in \Gamma$ tal que $g'\gamma' \in \Sigma_{t,u}$. Seja $g' = k'a'n'$ a decomposição Iwasawa de g' . Seja $h = a'n'$. Tendo em vista o lema acima, procuraremos um $\gamma' \in \Gamma$ tal que $h\gamma' \in KA_tN$, pois, pelo Lema 4.10, temos que $N = N_{\mathbb{Z}}N_{1/2}$. Agora, h é da forma

$$h = \begin{pmatrix} a'_1 & * \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

com $a'_1 \in \mathbb{R}^+$ o primeiro elemento da diagonal e A uma matriz triangular em $\text{GL}(n-1, \mathbb{R})$ com determinante $1/a'_1$, pois $\det h = 1$. Seja $\beta \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\beta^{n-1} = 1/a'_1 = \det A,$$

então

$$A = (\beta^{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{\beta} & \cdots & \frac{a_{1(n-1)}}{\beta} \\ \vdots & & \\ \frac{a_{(n-1)1}}{\beta} & & \frac{a_{(n-1)(n-1)}}{\beta} \end{pmatrix},$$

Logo, $\det(A) = \beta^{n-1} \det(A')$, e concluímos que $A' \in \mathrm{SL}(n-1, \mathbb{R})$. Pela hipótese de indução, existe $\gamma'' \in \mathrm{SL}(n-1, \mathbb{Z})$ tal que $A'\gamma''$ está em $\Sigma_{t,u}^{n-1}$, o conjunto de Siegel para $\mathrm{SL}(n-1, \mathbb{R})$. Agora definindo

$$\gamma' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma'' \end{pmatrix},$$

obtemos que $\gamma' \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ e que

$$h\gamma' = \begin{pmatrix} a'_1 & * \\ 0 & \beta A'\gamma'' \end{pmatrix}.$$

Seja $A'\gamma'' = k''a''n''$ a decomposição Iwasawa de $A'\gamma''$, então

$$kan = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_1 & 0 \\ 0 & \beta a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & n' \end{pmatrix},$$

é a decomposição de Iwasawa de $h\gamma'$. Então, a tem entradas diagonais

$$a_1 = a'_1, \quad a_i = \beta a'_i \quad (2 \leq i \leq n).$$

Além disso, como

$$a'_i/a'_{i+1} \leq 2/\sqrt{3} \quad (2 \leq i \leq n-1),$$

resta mostrar que

$$a_1/a_2 \leq 2/\sqrt{3},$$

Como a matriz γ' fixa e_1 , então

$$\|h\gamma'(e_1)\| = \|he_1\| = \|a'n'(e_1)\| = \|k'a'n'(e_1)\| = \|g'e_1\|,$$

portanto

$$\|g'e_1\| \leq \|g'v\| = \|hv\|,$$

para todo $v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Logo,

$$\|h\gamma'(e_1)\| \leq \|h\gamma'(v)\|, \quad \forall v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}.$$

Então, pela Proposição 4.11, temos que $a_1/a_2 \leq 2/\sqrt{3}$. Portanto,

$$a'_i/a'_{i+1} \leq 2/\sqrt{3} \quad (1 \leq i \leq n-1).$$

□

Teorema 4.13. $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ é um reticulado em $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

Demonstração. Para $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $\Gamma = \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ e $\Sigma_{t,u} = N_t A_u K$, onde o conjunto de Siegel é dado na Definição 3.17. Pelo Teorema 4.12, para $t \geq 2/\sqrt{3}$ e $u \geq 1/2$, temos $G = \Sigma_{t,u} \Gamma$. Portanto, podemos concluir que $G/\Gamma = \Sigma_{t,u} \Gamma/\Gamma \cong \Sigma_{t,u}$ possui medida finita em relação à medida de Haar em $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, conforme estabelecido no Corolário 4.9. Dessa forma, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ é um reticulado em $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. □

4.4 Resultados

Nesta seção apresentamos algumas conclusões sobre este trabalho e destacamos algumas razões pelas quais é importante e interessante continuar a pesquisa nesta área. Para alcançar esse objetivo, gostaríamos de enunciar dois resultados importantes para a teoria: o teorema de Borel e Harish-Chandra e o teorema de aritmetividade de Margulis [12]. O Teorema 4.13 foi generalizado por Borel e Harish-Chandra e permite a construção de vários exemplos de reticulados em todos os grupos de Lie reais semissimples. Esses grupos são conhecidos como grupos aritméticos. O teorema de aritmetividade de Margulis estabelece que para certos grupos de Lie, todo reticulado é aritmético. Para obter mais informações, consulte as referências [12], [15], [14]. Para apresentar esses importantes teoremas, é necessário definir alguns conceitos prévios.

Definição 4.14. Seja H um subgrupo fechado de $SL(n, \mathbb{R})$. Dizemos que H é definido sobre \mathbb{Q} (ou que H é um \mathbb{Q} -subgrupo) se existe um subconjunto \mathcal{Q} de $\mathbb{Q}[x_{1,1}, \dots, x_{n,n}]$, tal que

1. $\text{Var}(\mathcal{Q}) = \{g \in SL(n, \mathbb{R}) \mid Q(g) = 0, \forall Q \in \mathcal{Q}\}$ é um subgrupo de $SL(n, \mathbb{R})$,
2. $H^\circ = \text{Var}(\mathcal{Q})^\circ$, e
3. H tem apenas um número finito de componentes.

Exemplo 4.15. $SL(n, \mathbb{R})$ é definido sobre \mathbb{Q} . De fato, seja $\mathcal{Q} = \emptyset$, então $\text{Var}(\mathcal{Q}) = \text{Var}(\emptyset) = SL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})^\circ = SL(n, \mathbb{R}) = \text{Var}(\emptyset)^\circ$, e $SL(n, \mathbb{R})$ só tem uma componente conexa, pois é um grupo conexo.

Definição 4.16. Um grupo de Lie semissimples é um grupo de Lie que não contém subgrupos normais fechados não triviais, exceto por si mesmo e pelo grupo trivial.

Teorema 4.17 (Borel e Harish-Chandra). *Se G é definido sobre \mathbb{Q} , então $G_{\mathbb{Z}} = G \cap SL(n, \mathbb{Z})$ é um reticulado em G .*

Demonstração. Ver em [12, página 88]. □

Definição 4.18 (Comensurável). Dizemos que dois subgrupos Γ_1 e Γ_2 de um grupo H são comensuráveis se $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ é um subgrupo de índice finito de Γ_1 e Γ_2 .

Definição 4.19 (Subgrupo Aritmético). Seja G um \mathbb{Q} -grupo algébrico e seja $k = \mathbb{Q}$ ou \mathbb{R} . Um subgrupo Γ de $G(k)$ é chamado de subgrupo aritmético se for comensurável a $G_{\mathbb{Z}}$.

Assim podemos dizer que um grupo aritmético é um grupo obtido tomando os pontos inteiros de um grupo algebraico como, por exemplo, $SL(n, \mathbb{Z})$. A aritmetividade de $SL(n, \mathbb{Z})$ é representada pela aritmética de \mathbb{Z}^n e ele vai ser nosso protótipo de grupo aritmético.

Teorema 4.20 (Borel e Harish-Chandra). *Seja G um \mathbb{Q} -grupo algébrico semissimples e seja Γ um subgrupo aritmético de G . Então Γ tem covolume finito em $G(\mathbb{R})$. Além disso, Γ é cocompacto se, e somente se, $G(\mathbb{Q})$ não possui elemento unipotente não trivial.*

Demonstração. Ver em [15]. □

Teorema 4.21 (Teorema da Aritmetividade de Margulis). *Sejam $G = SL(n, \mathbb{R})$, onde $n \geq 3$, e Γ um reticulado em G . Então, Γ é um grupo aritmético de G .*

Demonstração. Ver em [12, Página 92]. □

O Teorema da aritmetividade de Margulis representa uma espécie de inverso parcial do Teorema de Borel e Harish-Chandra. Verificamos que, para certos grupos de Lie, todo reticulado é aritmético. Essa descoberta é de extrema importância para a teoria dos grupos aritméticos, uma vez que caracterizá-los não é uma tarefa fácil. A contribuição de Margulis amplia o conhecimento sobre a estrutura e as propriedades desses grupos, permitindo caracterizar os reticulados de $SL(n, \mathbb{R})$ como subgrupos aritméticos, se $n \geq 3$.

Este trabalho é interessante, pois fornece ferramentas que podem ser usadas para provar que outros subgrupos discretos de $SL(n, \mathbb{R})$ são reticulados. Por exemplo, ao contrário do que é feito classicamente nas referências [10] e [12], neste documento é calculado explicitamente o volume da região que definimos para a ação de $SL(n, \mathbb{Z})$ em $SL(n, \mathbb{R})$, com base no trabalho de Teixeira [9], fornecendo um valor exato para o volume dessa região auxiliar. Além disso, o documento apresenta de maneira gráfica, didática e intuitiva conceitos como domínios fundamentais, reticulados, cocompacidade, entre outros, em um contexto familiar como \mathbb{R}^n , para depois defini-los em um contexto mais geral, permitindo que este documento seja uma boa ferramenta para se introduzir nessa área.

Bibliografia

- [1] HALL, B.C. “Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction”, Graduate Texts in Mathematics 222, Springer-Verlag New York, 2003.
<https://doi.org/10.1007/978-0-387-21554-9>
- [2] KATOK, S. “Fuchsian groups”, Chicago Lectures in Mathematics Series, University of Chicago Press, 1992.
- [3] NICHOLLS P.J. “The Ergodic Theory of Discrete Groups”, London Mathematical Society Lecture Note Series 143, Cambridge University Press, 1989.
<https://doi.org/10.1017/S0143385700005630>
- [4] RUDIN, W. “Functional Analysis”, 2nd ed, McGraw-Hill, International series in pure and applied mathematics, 1991.
- [5] ROYDEN, H.L. FITZPATRICK, P.M. “Real Analysis”, 4th ed. Prentice Hall. 2010.
- [6] STEWART, I. TALL, D. “Algebraic number theory and Fermat’s last theorem”, 3rd ed, AK Peters, 2002.
<https://doi.org/10.1201/9781439864081>
- [7] SPIVAK, M. “A Comprehensive Introduction to Differential Geometry”, Volume 1, Publish or Perish, 1999.
- [8] MORRIS D.W. “Introduction to arithmetic groups”, 2008.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0106063>
- [9] TEIXEIRA, G. “On geometry of Siegel sets for lattices in SL_n ”, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada IMPA, PHD. THESIS, 2018.
- [10] BEKKA, B. MAYER, M. “Ergodic Theory and Topological Dynamics of Group Actions on Homogeneous Spaces”, Cambridge University Press, London Mathematical Society Lecture Note Series.
- [11] STEWART I. TALL D. “Algebraic number theory and Fermat’s last theorem”, third ed., CRC Press, 2002.
<https://doi.org/10.1201/9781439864081>
- [12] MARGULIS, G.A. “Discrete Subgroups of Semisimple Lie Groups”, Springer Verlag, 1991.
- [13] VENKATARAMANA, T.N. “Lattices in Lie Groups”. In Workshop on Geometric Group Theory, India , 2010.
- [14] BOREL A. “Introduction aux groupes arithmétiques”, Hermann, 1969.

- [15] BOREL, A. HARISH-CHANDRA, “Arithmetic Subgroups of Algebraic Groups” *Annals of Mathematics*, Second Series, Vol. 75, No. 3 (May, 1962), pp. 485-535.
<https://doi.org/10.2307/1970210>
- [16] PINO, P. HURTADO, S. “Notas curso de grupos aritméticos, reticulados y rigidez”, *Arithmetic, Groups and Analysis (AGRA) IV – Part II*, 20 – 25 Junho, 2022.
- [17] HORN, R. JOHNSON C. “Matrix Analysis”, Cambridge University Press, 2013.
<https://doi.org/10.1017/CB09781139020411>
- [18] EMERY V. “Lecture notes on an introductory course on arithmetic lattices”, 2014.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2308.03752>