

THIAGO FERNANDO SANTIAGO DE FREITAS

**MODELAGEM MATEMÁTICA E
COMPUTACIONAL DE CAMADA LIMITE
LAMINAR UTILIZANDO A METODOLOGIA
MISTA PSEUDOESPECTRAL DE FOURIER E
FRONTEIRA IMERSA**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
2023**

THIAGO FERNANDO SANTIAGO DE FREITAS

**MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL DE
CAMADA LIMITE LAMINAR UTILIZANDO A
METODOLOGIA MISTA PSEUDOESPECTRAL DE
FOURIER E FRONTEIRA IMERSA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de concentração: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos.

Orientador: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto

Coorientador: Prof. Dr. Felipe Pamplona Mariano

Uberlândia - MG

2023

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

F866 Freitas, Thiago Fernando Santiago de, 1996-
2023 Modelagem Matemática e Computacional de Camada Limite
Laminar Utilizando a Metodologia Mista Pseudoespectral
de Fourier e Fronteira Imersa [recurso eletrônico] /
Thiago Fernando Santiago de Freitas. - 2023.

Orientador: Aristeu Silveira Neto.

Coorientador: Felipe Pamplona Mariano.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
Uberlândia, Pós-graduação em Engenharia Mecânica.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2023.286>

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Engenharia mecânica. I. Silveira Neto, Aristeu ,
1955-, (Orient.). II. Mariano, Felipe Pamplona ,1981-
(Coorient.). III. Universidade Federal de Uberlândia.
Pós-graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título.

CDU: 621

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091

Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3239-4282 - www.posmecanicaufu.com.br - secposmec@mecanica.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, nº 636, PPGEM				
Data:	04/07/2023	Hora de início:	08:00	Hora de encerramento:	10:40
Matrícula do Discente:	12122EMC014				
Nome do Discente:	Thiago Fernando Santiago de Freitas				
Título do Trabalho:	Modelagem Matemática e Computacional de Camada Limite Laminar utilizando a Metodologia Mista Pseudo-Espectral de Fourier e Fronteira Imersa				
Área de concentração:	Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos				
Linha de pesquisa:	Dinâmica dos Fluidos e Transferência de Calor				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	"Desenvolvimento de Processos Numéricos de Alta Ordem de Convergência e Experimentais de Baixo Custo para o Estudo de Escoamento de Ventos sobre Terrenos: Estimativa do Potencial Eólico"				

Reuniu-se por meio de videoconferência a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Professores Doutores: João Marcelo Vedovotto - FEMEC/UFU; Marcello Augusto Faraco de Medeiros - USP-EESC; Felipe Pamplona Mariano (coorientador) - UFG e Aristeu da Silveira Neto - FEMEC/UFU, orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Aristeu da Silveira Neto, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimeada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Aristeu da Silveira Neto, Professor(a) do Magistério Superior**, em 04/07/2023, às 10:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **João Marcelo Vedovotto, Professor(a) do Magistério Superior**, em 04/07/2023, às 10:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Felipe Pamplona Mariano, Usuário Externo**, em 04/07/2023, às 10:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcello Augusto Faraco de Medeiros, Usuário Externo**, em 04/07/2023, às 10:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4600677** e o código CRC **E1ADA63E**.

À minha mãe, meu maior exemplo.

AGRADECIMENTOS

Primeiro, quero agradecer à minha mãe, Sônia, por sempre estar presente em todas as etapas da minha vida, me motivando e sendo meu suporte. Obrigado também pela dedicação, carinho, amor incondicional, respeito e, principalmente, pelos longos discursos provando que os problemas que apareciam não eram intransponíveis, eu que estava sendo dramático.

Aos meus irmãos Joaquim Neto, Pedro Henrique e Daniela por sempre me apoiarem e serem pessoas incríveis, às quais, tenho orgulho de ser irmão.

Ao meu orientador, Aristeu, e coorientador, Felipe, pelos ensinamentos, sugestões e paciência despendidos a mim durante a realização deste trabalho. Começamos essa caminhada ainda de forma remota, e em parte continuamos, mas sempre ficou claro a dedicação de vocês com o nosso trabalho. As contribuições de ambos foram inúmeras e imensuráveis. Os sentimentos que ficam, ao fim dessa etapa, são um misto de gratidão e carinho.

À professora Andreia, minha orientadora durante a graduação, pelos seus ensinamentos que ainda carrego comigo. Muito obrigado por ter ajudado a moldar o profissional que sou.

A todos os membros do MFLab, em especial, os colegas Pedro e Christopher.

Aos colegas do projeto de pesquisa que faço parte, principalmente o Leonardo e o Renato, por sempre serem solícitos e pacientes comigo.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior, CAPES, pelo suporte parcial.

À Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia juntamente com a Cordenação do seu programa de Pós-Graduação e a Escola de Engenharia: Elétrica, Mecânica e de Computação da Universidade Federal de Goiás pelo suporte e infra-estrutura necessários para a realização desse trabalho.

À FURNAS - Centrais Elétricas e o “Programa de Pesquisa e Desenvolvimento Tecnológico” da ANEEL pelo suporte financeiro.

RESUMO

A dinâmica dos fluidos computacional é uma ferramenta que pode auxiliar na compreensão e otimização de parques eólicos. A modelagem de fenômenos muito complexos como a interação de aerotransformadores com a camada limite atmosférica é obtida a partir de uma base de conhecimento sólida bem desenvolvida. Com base nesse argumento, na presente dissertação é utilizada uma metodologia híbrida do método pseudoespectral de Fourier (MPF) junto ao método de fronteira imersa (MFI), denominada IMERSPEC, para a modelagem bidimensional da camada limite laminar sobre uma placa plana. O IMERSPEC é uma metodologia de alta ordem de convergência e baixo custo computacional, comparado com outros métodos de alta ordem, que desacopla a pressão de seu processo de solução numérico-computacional. Destaca-se que o IMERSPEC é a abordagem pioneira na modelagem da camada limite de Blasius utilizando o domínio espectral de Fourier em todas as direções do escoamento. A fim de atingir o objetivo proposto são realizadas etapas de verificação numérico-computacional da metodologia e compreensão de seu funcionamento e usuais artifícios de implementação. A verificação do código bidimensional é realizada para os vórtices de Taylor-Green em que constata-se a elevada acurácia do IMERSPEC. Experimentos virtuais representando jatos planos bidimensionais em desenvolvimento temporal e espacial são realizados a fim de verificar a acurácia dessa metodologia na representação de fenômenos físicos e se familiarizar com a aplicação de métodos de periodização de escoamentos para modelagens espaciais em que se subdivide o domínio computacional em domínio complementar e domínio útil. A imposição de ruído branco numérico é necessária para que se desenvolva instabilidades em escoamentos cisalhantes livres em transição à turbulência. A camada limite de Blasius em desenvolvimento espacial é modelada com o IMERSPEC utilizando o método *fringe*, melhor alternativa para a periodização nesse tipo de modelagem. Análises de refinamento de malha e de *CFL* são realizadas em que nota-se que os erros computacionais mais significativos são decorrentes do método *fringe*. Sucede-se então uma otimização de parâmetros de implementação computacional, são eles: a forma de imposição da placa plana, possíveis condições de contorno do topo do domínio útil e a avaliação do tamanho do domínio não modelado. De modo geral, os resultados computacionais indicam uma modelagem da camada limite laminar em uma placa plana satisfatória.

Palavras-chave: método pseudoespectral de Fourier; método de fronteira imersa; método *fringe*; IMERSPEC; modelagem da camada limite laminar em uma placa plana.

ABSTRACT

Computational Fluid Dynamics is a tool that can assist in the understanding and optimization of wind farms. The modeling of complex phenomena, such as the interaction of wind turbines with the atmospheric boundary layer, is achieved through a well-developed solid knowledge base. Based on this argument, the present dissertation employs a hybrid methodology combining the pseudospectral Fourier method (MPF) with the immersed boundary method (MFI), called IMERSPEC, for the two-dimensional modeling of the laminar boundary layer over a flat plate. IMERSPEC is a high-order convergence methodology with low computational cost compared to other high-order methods. It decouples the pressure from its numerical-computational solution process. It is worth noting that IMERSPEC is the pioneering approach in modeling the Blasius boundary layer using the spectral Fourier domain in all flow directions. To achieve the proposed objective, numerical-computational verification steps of the methodology are performed, along with understanding its functioning and typical implementation techniques. The two-dimensional code verification is conducted for Taylor-Green vortices, demonstrating the high accuracy of IMERSPEC. Virtual experiments representing developing two-dimensional plane jets in temporal and spatial domains are conducted to verify the accuracy of this methodology in representing physical phenomena and to become familiar with the application of flow periodicity methods for spatial modeling, where the computational domain is subdivided into complementary and useful domains. The imposition of white numerical noise is necessary to develop instabilities in free shearing flows transitioning to turbulence. The spatially developing Blasius boundary layer is modeled with IMERSPEC using the fringe method, the best alternative for periodicity in this type of modeling. Mesh refinement and CFL analyses are performed, indicating that the most significant computational errors are due to the fringe method. Subsequently, an optimization of computational implementation parameters is carried out, including the flat plate imposition method, possible boundary conditions at the top of the useful domain, and the evaluation of the size of the non-modeled domain. Overall, the computational results indicate a satisfactory modeling of the laminar boundary layer over a flat plate.

Keywords: Fourier pseudospectral method; immersed boundary method; fringe method; IMERSPEC; laminar boundary layer over a flat plate.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Evolução da capacidade instalada.	1
Figura 2 – Matriz energética brasileira em 2021.	2
Figura 3 – Fator de capacidade eólico brasileiro em 2021.	2
Figura 4 – Esquema Geral de Camada limite.	5
Figura 5 – Esquema da camada limite sobre uma placa plana infinita.	10
Figura 6 – Solução da equação de Blasius.	14
Figura 7 – Perfis de u e v para y^*	15
Figura 8 – Analogia entre a camada limite e o escoamento invíscido para determinar δ_*	16
Figura 9 – Esquema do escoamento modelado com o método <i>fringe</i>	18
Figura 10 – Esquema de implementação do método híbrido espectral de Fourier e Chebychev aliado ao MFI para modelagem de camada limite.	22
Figura 11 – Estruturas turbilhonares sendo amortecidas pelo domínio complementar em modelagem de jato livre circular turbulento pelo IMERSPEC.	26
Figura 12 – Elemento Infinitesimal	29
Figura 13 – Distribuição de $\rho \vec{V} dA$ em um volume infinitesimal	30
Figura 14 – Distribuição dos produtos entre o momento linear e os elementos de área	32
Figura 15 – Balanço de tensões na direção x	34
Figura 16 – Esquema dos domínios Ω e Γ na modelagem de um escoamento qualquer.	37
Figura 17 – Diagrama de blocos do MFI utilizando o MDFM.	41
Figura 18 – Esquema do plano π com \hat{u}_j e k_j	43
Figura 19 – Esquema do plano π em relação aos termos das equações de <i>Momentum</i> Linear.	44
Figura 20 – Perfil horizontal no domínio complementar da modelagem do escoamento sobre um degrau utilizando o IMERSPEC.	48
Figura 21 – Comparativo das funções amortecedoras do método <i>fringe</i> e <i>buffer</i>	49
Figura 22 – Condições inicial para os vórtices de Taylor-Green.	52
Figura 23 – Esquema de implementação de pontos coincidentes no MFI	53
Figura 24 – Soluções numérico-computacionais em $t_f/4$ s.	54
Figura 25 – Normas L_2 de u , v e p sem MFI	54
Figura 26 – Normas L_2 de u com e sem MFI	55
Figura 27 – Condição inicial com $Re = 10$ e 128×64 pontos colocantes.	56
Figura 28 – $\ \vec{W}\ $ em $t = 16$ s com imposição de ruído.	57
Figura 29 – $\ \vec{W}\ $ de uma solução tridimensional em uma malha $120 \times 120 \times 120$ pontos colocantes.	58

Figura 30 – Solução computacional obtida pelo IMERSPEC2D a fim de comparação.	59
Figura 31 – Campos de $\ \vec{W}\ $ em $t = 60 s$ com e sem ruído.	60
Figura 32 – Esquema IMERSPEC para modelagens espaciais.	62
Figura 33 – Campo de $\ \vec{W}\ $ em t_f para 1024×256 pontos.	62
Figura 34 – Campo de $\ \vec{W}\ $ em diferentes t com 1% de ruído.	63
Figura 35 – Comparação da velocidade média do centro do jato das simulações com a solução contínua.	64
Figura 36 – Esquema para modelagem de camada limite sobre uma placa plana.	65
Figura 37 – Domínio complementar obtido pelo método <i>fringe</i> .	67
Figura 38 – Campos de u em diferentes malhas.	68
Figura 39 – Campos de v em diferentes malhas.	69
Figura 40 – Perfis verticais de velocidades em $x = 1 m$.	70
Figura 41 – Perfil horizontal de v/U_∞ em $y = 0,1 m$.	70
Figura 42 – C_f e seus respectivos erros absolutos para as malhas computacionais.	72
Figura 43 – Sonda temporal de v/U_∞ , malha de 1024×256 pontos.	73
Figura 44 – Distribuição de C_f para diferentes CFL .	73
Figura 45 – Perfis de u/U_∞ dos experimentos virtuais no domínio complementar e útil.	75
Figura 46 – Perfis de v/U_∞ no domínio complementar e útil.	76
Figura 47 – Perfis horizontais de v/U_∞ em $y = 0,1 m$.	77
Figura 48 – Distribuição de C_f para diferentes tipos de domínios complementares.	78
Figura 49 – Diferentes formas de implementação da placa plana.	79
Figura 50 – C_f e erros absolutos para diferentes implementações da placa plana.	79
Figura 51 – Perfis verticais de velocidades em $x = 1 m$.	81
Figura 52 – Velocidade v/U_∞ ao longo de x em $y = 0,1 m$.	82
Figura 53 – C_f e erros absolutos para diferentes configurações das condições de topo.	82
Figura 54 – C_f e erros absolutos para diferentes quantidades de pontos colocantes no domínio útil.	83

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros de MRK46.	50
Tabela 2 – Parâmetros da verificação numérica.	52
Tabela 3 – Parâmetros dos experimentos virtuais do jato temporal.	56
Tabela 4 – Parâmetros dos experimentos virtuais do jato temporal.	61
Tabela 5 – Parâmetros dos experimentos virtuais da camada limite 2D.	68
Tabela 6 – Possíveis configurações das condições de contorno do topo.	80

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Objetivos	3
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
2.1	Origem da Teoria da Camada Limite e a Solução de Blasius	4
2.2	Estado da arte	17
2.2.1	IMERSPEC	24
3	METODOLOGIA	28
3.1	Modelagem Matemática	28
3.1.1	Equação da Continuidade	28
3.1.2	Equações da Quantidade de Movimento Linear	31
3.2	Método da Fronteira Imersa	36
3.3	Método Pseudoespectral de Fourier	41
3.4	Aspectos Numérico-Computacionais	45
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	51
4.1	Verificação Numérico-Computacional	51
4.2	Jato Livre Plano em Desenvolvimento Temporal	55
4.3	Jato Livre Plano em Desenvolvimento Espacial	60
4.4	Camada Limite Bidimensional em uma Placa Plana	64
4.4.1	Análise Domínio Complementar	74
4.4.2	Condição de Contorno da Placa Plana	78
4.4.3	Condições de Contorno Topo	80
4.4.4	Altura do Domínio Útil	83
5	CONCLUSÕES	85
5.1	Trabalhos Futuros	87
	REFERÊNCIAS	88

1 INTRODUÇÃO

O Brasil vem explorando exponencialmente a fonte energética eólica para a conversão em energia elétrica. A evolução da capacidade das usinas eólicas instaladas no Brasil desde o ano de 2005 é apresentada na Fig. 1. Percebe-se que em especial nos anos de 2020 e 2021 a nova capacidade energética instalada foi positivamente discrepante, sugerindo maior preocupação com a diversificação da matriz energética brasileira.

Figura 1 – Evolução da capacidade instalada.



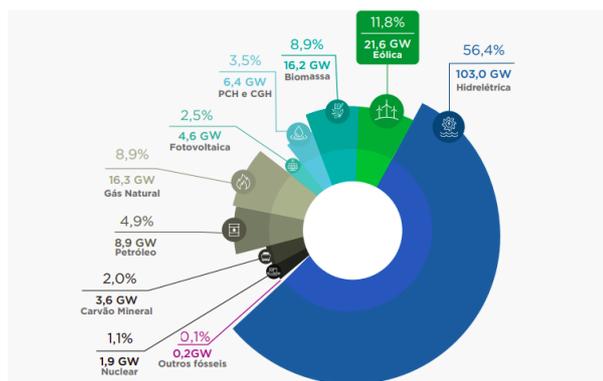
Fonte: ABEEólica¹.

A matriz energética brasileira, conforme visto na Fig. 2, é majoritariamente composta de hidrelétricas seguida de usinas eólicas. Sendo assim, as duas maiores fontes energéticas do país são reféns da sazonalidade do clima brasileiro. Por exemplo, caso haja períodos longos de estiagem, cenário mais provável devido ao aquecimento global, as reservas hídricas do país podem ser comprometidas gerando uma crise energética nacional.

Para contornar essa fragilidade da matriz nacional, é necessária a diversificação da matriz e projetos de engenharia otimizados que explorem massivamente o recurso natural disponível. A diversificação da matriz energética tem sido aplicada conforme visto na Fig. 1 e resta o desenvolvimento de projetos que possam otimizar a conversão de energia elétrica.

O melhor indicador de produtividade de um sistema de conversão de energia eólica em energia elétrica é o fator de capacidade que é a relação, em porcentagem, do quanto uma usina converte energia em relação ao máximo que ela poderia realizar. O fator de capacidade das usinas eólicas brasileiras ao longo de 2021 é apresentada na Fig. 3 em que a média anual foi de 43,6%. Em geral, o fator de capacidade aumenta ao longo do tempo na medida que a tecnologia dos aerotransformadores instalados também aumenta e muitos

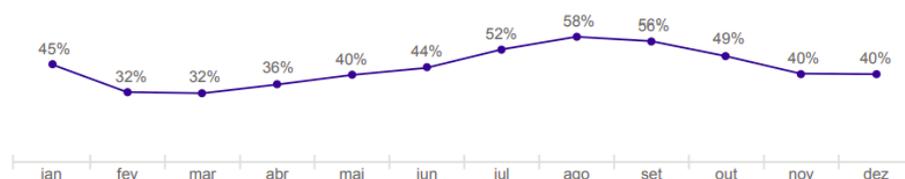
Figura 2 – Matriz energética brasileira em 2021.



Fonte: ABEEólica¹.

países tem aumentado significativamente seu indicador através da instalação de turbinas mais modernas².

Figura 3 – Fator de capacidade eólico brasileiro em 2021.



Fonte: ABEEólica¹.

Para que a energia eólica se torne ainda mais significativa na matriz brasileira, a instalação de mais parques eólicos com quantidade significativa de aerotransformadores modernos devem ser instalados. A proposta de implementações em grande quantidade necessita que haja uma maior compreensão das interações entre as turbinas e a camada limite atmosférica (CLA). O aperfeiçoamento do layout de parques eólicos através da otimização da distribuição espacial dos aerotransformadores entre si tem o papel de minimizar carregamentos instáveis e melhorar a predições de falhas³.

A CLA é um escoamento meteorológico turbulento onde existem estruturas turbilhonares com multiplicidades de comprimentos, desde comprimentos equiparáveis a valores atmosféricos até estruturas milimétricas relacionadas a camada limite das pás eólicas. A estrutura da CLA envolve um ciclo diário, de forças térmicas diurnas causando condições flutuantes significativas enquanto o resfriamento de superfícies a noite geram condições estratificantes³. Assim, aerogeradores operam neste cenário volátil e o fenômeno físico deve ser bem compreendido para ocasionar melhor predições dos recursos eólicos intermitentes e posteriormente causar aumento do fator de capacidade dos parques eólicos nacionais.

A Dinâmica dos Fluidos Computacional (*Computational Fluid Dynamics*), CFD, possibilita modelar esse tipo de escoamento tão complexo além de sua interação com as

turbinas eólicas. Uma metodologia espectral é interessante nesse tipo de modelagem visto que o escoamento possui dimensões atmosféricas e os recursos computacionais atuais ainda limitam o refinamento de malhas computacionais para esse tipo de problema físico. O fenômeno físico de interesse é significativamente complexo e sua implementação direta em qualquer abordagem numérico-computacional é desaconselhada.

Dessa forma, torna-se atraente a modelagem inicial de um problema físico com maiores simplificações possíveis mas que ainda sim possibilite posteriores aperfeiçoamentos até a modelagem da CLA e sua interação com um aerogerador ou um parque eólico. O fenômeno físico escolhido para a modelagem, na presente dissertação, foi o clássico escoamento uniforme laminar sobre uma placa plana sem gradiente de pressão.

A ferramenta computacional escolhida para a modelagem foi a hibridização do método pseudoespectral de Fourier (MPF) com o Método de Fronteira Imersa (MFI) denominando por IMERSPEC e desenvolvido no laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU) por Mariano⁴, Moreira⁵, Villela⁶, Kinoshita⁷ e Nascimento⁸. O IMERSPEC possui acurácia significativa devido ao uso do MPF e assim pode apresentar bons resultados na modelagem de fenômenos complexos com malhas computacionais robustas.

Com base em tudo o que foi exposto, o presente trabalho visa iniciar o processo para a modelagem de camada limite atmosférica através da modelagem do escoamento de camada limite sobre uma superfície plana sem gradiente de pressão através da metodologia IMERSPEC.

1.1 Objetivos

Os objetivos principais da presente dissertação são propiciar contato do estudante com um método computacional de alta ordem através da modelagem física, matemática e computacional do escoamento canônico sobre uma placa plana sem gradiente de pressão e, ao mesmo tempo, promover resultados que serão aproveitados em etapas posteriores dentro do grupo de pesquisa que esse trabalho está inserido.

Para cumprir os objetivos gerais, os seguintes objetivos específicos são definidos:

- Verificar numericamente a acurácia do IMERSPEC bidimensional sem e com o MFI;
- Modelar o escoamento bidimensional cisalhante livre do tipo jato livre em desenvolvimento temporal;
- Modelar o escoamento bidimensional cisalhante livre do tipo jato livre em desenvolvimento espacial;
- Modelar o escoamento bidimensional da camada limite de Blasius.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Origem da Teoria da Camada Limite e a Solução de Blasius

Ludwig Prandtl foi o criador do conceito de camada limite. O seu interesse na mecânica de fluidos foi despertado após montar um difusor cônico em um largo duto de ar, e não obter a recuperação de pressão esperada⁹. Especula-se que o ângulo cônico utilizado foi grande o bastante para provocar descolamento da camada limite.

A perda de pressão não era um sério problema no âmbito industrial, mas a questão do porquê do fenômeno, foi o motivador para Prandtl desenvolver posteriormente o conceito de camada limite. É interessante saber que um conceito tão importante dentro da mecânica dos fluidos surgiu a partir de um projeto de difusor cônico falho e foi responsável por unir dois campos divergentes da época que, atualmente, são congruentes: a hidrodinâmica e a hidráulica.

As soluções de escoamentos disponíveis até então eram provenientes dos estudos de Stokes onde as equações de Navier-Stokes eram resolvidas em casos onde os termos advectivos não lineares eram desprezíveis e da teoria de escoamentos potenciais para escoamentos invíscidos. Como esse não era o caso para os escoamentos viscosos práticos, soluções aproximadas eram necessárias. As aproximações mais simples negligenciavam os efeitos viscosos nos escoamentos analisados mas os resultados ilustravam o paradoxo de D'Alembert. Esse paradoxo ocorre na aplicação da teoria do escoamento potencial para um corpo sólido simétrico posicionado em um escoamento uniforme, o qual segundo a análise, não apresenta forças de resistências o que é contrário ao fenômeno físico observado⁹.

De acordo com todo o contexto histórico comentado, Prandtl apresentou o conceito da camada limite no ano de 1905. Prandtl¹⁰ reconheceu que o principal aspecto de um escoamento viscoso sobre um sólido é o comportamento do fluido próximo ao corpo e que o fenômeno físico só poderia ser completamente compreendido assumindo que o fluido aderisse na superfície do sólido e, portanto, a velocidade do fluido seria zero ou igual a velocidade do corpo. Assim, considera-se que o escoamento é quase todo irrotacional até uma região próxima ao sólido onde há a variação da velocidade do escoamento irrotacional até a condição de não deslizamento.

Prandtl¹⁰ inferiu que a medida que a viscosidade do fluido é menor, menor é essa região de transição ao passo que o gradiente de velocidade se torna mais íngreme. Essa “região de transição” marca a única parte do escoamento onde os efeitos viscosos são relevantes e recebeu o nome de camada limite. O termo camada limite é utilizado apenas uma vez em todo o artigo de Prandtl¹⁰, ele preferia o termo “camada de transição” mas

camada limite se popularizou a partir do trabalho de Blasius¹¹, seu orientando, publicado posteriormente⁹.

A publicação de Prandtl se destaca por três aspectos significativos⁹. Primeiro, por ter sido um trabalho sem precedentes mas ao mesmo tempo propondo um conceito já totalmente desenvolvido. Em seu trabalho, além do conceito de camada limite, já são desenvolvidas as equações diferenciais simplificadas para a camada limite e apresenta-se a noção de separação do escoamento tal qual visto por Prandtl em seu projeto de difusor cônico falho.

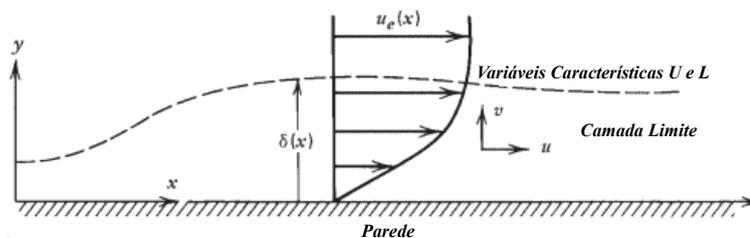
O segundo aspecto se deve à lenta aceitação do trabalho apresentado apesar de seu conteúdo. Na primeira década após a publicação de Prandtl¹⁰ existiam apenas 7 artigos sobre camada limite. Todos provenientes do grupo de pesquisa de Prandtl localizados na universidade onde ele lecionava⁹. A teoria da camada limite apesar de extremamente relevante a época foi ignorada inicialmente pela comunidade científica.

Por fim, o terceiro aspecto extraordinário é que o próprio artigo de Prandtl¹⁰ apresenta fenômenos físicos, mesmo que superficialmente, que seriam amplamente explorados dentro da camada limite ao longo das décadas seguintes por outros intelectuais⁹.

Diante da revolução causada por Prandtl, a teoria da camada limite passa a ser um complemento da teoria de escoamentos invíscidos com o propósito de correção do escoamento próximo às paredes¹². Sendo assim, considera-se um escoamento bidimensional sobre uma parede qualquer conforme visto na Fig. 4. A parede analisada não apresenta nenhuma curvatura significativa em relação a espessura da camada limite.

O eixo y é perpendicular a parede analisada e o eixo x corresponde a direção de desenvolvimento espacial da camada limite. Termos da equação referentes a curvatura da parede são ignorados¹². A espessura da camada limite é definida por δ e durante a análise realizada, considera-se o caso em que o número de Reynolds tende ao infinito, ou seja, $Re \rightarrow \infty$, causando a redução de δ durante o processo.

Figura 4 – Esquema Geral de Camada limite.



Fonte: Adaptado de Panton¹².

Analisando a Fig. 4 pode-se afirmar que em $y = 0$ a velocidade do fluido na direção x , u , corresponde a condição de não deslizamento e existe uma variação dessa incógnita

até o valor correspondente do escoamento irrotacional fora da camada limite, u_e , aqui considerada como uma função constante e igual a U_∞ .

Em relação a análise do comprimento característico do eixo y tem-se duas alternativas: L e δ . O comprimento L nada influi sobre a direção y , mas determina o escoamento na direção x enquanto a medida δ corresponde a região onde os efeitos viscosos são significativos ao escoamento na direção y . Dessa forma, o comprimento característico do eixo perpendicular à parede é δ .

Com os comprimentos característicos e a variação de velocidade dentro da camada limite compreendidos. Pode-se definir a ordem de grandeza de $\partial u/\partial y$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{U_\infty - 0}{\delta - 0} = \frac{U_\infty}{\delta}. \quad (2.1)$$

Tem-se as propriedades características de ambos os eixos e de u , mas nada pode-se afirmar a cerca de v , inicialmente. Com base nisso, considera-se uma constante qualquer, c , como propriedade característica da camada limite. Com essas propriedades definidas pode-se analisar a ordem de grandeza dos termos presentes na equação de continuidade bidimensional:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{o\left[\frac{U_\infty}{L}\right]} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{o\left[\frac{c}{\delta}\right]} = 0. \quad (2.2)$$

Observando-se a Eq. 2.2, destaca-se que a equação da continuidade garante o balanço de massa dentro do escoamento e, para um escoamento incompressível bidimensional, possui apenas dois termos. Portanto, para que não haja ganho ou perda de massa na partícula do fluido, o termo $\partial v/\partial y$ deve possuir a mesma ordem de grandeza de $\partial u/\partial x$, resultando,

$$c \sim \delta \frac{U_\infty}{L}. \quad (2.3)$$

Após a equação da continuidade, analisa-se a ordem de grandeza dos termos na equação de *momentum* linear da direção y para um escoamento incompressível em regime permanente,

$$\underbrace{u \frac{\partial v}{\partial x}}_{o\left[U_\infty \frac{\delta U_\infty}{L^2}\right]} + \underbrace{v \frac{\partial v}{\partial y}}_{o\left[\frac{\delta U_\infty}{L} \frac{\delta U_\infty}{L \delta}\right]} = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}}_{o\left[\frac{p_{og}}{\rho \delta}\right]} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{o\left[\nu \frac{\delta U_\infty}{L L^2}\right]} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{o\left[\nu \frac{\delta U_\infty}{L \delta^2}\right]}, \quad (2.4)$$

em que p_{og} representa a ordem de grandeza da pressão. Considerando que o número de Reynolds seja definido como $Re = \frac{U_\infty L}{\nu}$, a multiplicação de todos os termos por δ/U^2 e

apenas as ordens de grandeza da Eq. 2.4, tem-se:

$$O\left[\left(\frac{\delta}{L}\right)^2\right] + O\left[\left(\frac{\delta}{L}\right)^2\right] = O\left[\frac{p_{og}}{\rho U^2}\right] + O\left[\frac{1}{Re}\left(\frac{\delta}{L}\right)^2\right] + O\left[\frac{1}{Re}\right]. \quad (2.5)$$

Assumindo $Re \rightarrow \infty$, o que implica $\delta \rightarrow 0$, e que a ordem de grandeza da pressão seja próxima da propriedade característica invíscida, da região do escoamento fora da camada limite, tem-se:

$$O[0] + O[0] = O[1] + O[0] + O[0]. \quad (2.6)$$

Assim, o único termo da equação de balanço de *momentum* linear na direção y não desprezível é o termo referente a pressão, resultando em:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \rightarrow p(x). \quad (2.7)$$

A Equação 2.7 indica que não há variação da pressão dentro da camada limite, na direção normal à parede, *i.e.*, a pressão do escoamento é definida a partir de sua região irrotacional.

Após a análise da equação de balanço de *momentum* linear na direção y , investiga-se a equação análoga na direção x com o enfoque na ordem de grandeza de cada termo, conforme visto na Eq. 2.8,

$$\underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x}}_{O\left[U_\infty \frac{U_\infty}{L}\right]} + \underbrace{v \frac{\partial u}{\partial y}}_{O\left[\frac{\delta U_\infty}{L} \frac{U_\infty}{\delta}\right]} = -\underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}_{O\left[\frac{\rho U_\infty^2}{\rho L}\right]} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{O\left[\nu \frac{U_\infty}{L^2}\right]} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{O\left[\nu \frac{U_\infty}{\delta^2}\right]}, \quad (2.8)$$

onde destaca-se que a consideração de $p_{og} \sim \rho U_\infty^2$ segue válida. Analisando apenas a ordem de grandeza dos termos e multiplicando cada termo por L/U^2 obtêm-se:

$$O[1] + O[1] = O[1] + O\left[\frac{1}{Re}\right] + O\left[\left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \frac{1}{Re}\right]. \quad (2.9)$$

Aplicando-se $Re \rightarrow \infty$ na Eq. 2.9 constata-se que a ordem de grandeza do penúltimo termo é nula, porém, a ordem do último termo precisa de uma avaliação maior. Reorganizando-se a ordem de grandeza do termo sob o limite considerado, tem-se:

$$\frac{1/Re}{(\delta/L)^2} \sim ? \quad (2.10)$$

Nas outras análises realizadas não se considerou a velocidade que $1/Re$ e δ/L se reduzem até 0 a medida que $Re \rightarrow \infty$. Assim, há três possibilidades na análise da Eq.

2.10: a primeira é se $(\delta/L)^2$ tender a zero mais devagar que $1/Re$; a segunda possibilidade é o inverso e a terceira é o caso em que o numerador e o denominador da Eq. 2.10 tendam a zero segundo uma mesma taxa.

Analisando a primeira possibilidade tem-se que o termo da Eq. 2.10 passa a ser nulo e por consequência a equação de *momentum* linear na direção x para a teoria da camada limite seria igual a equação obtida segundo a teoria potencial. Esse fato não corresponde ao fenômeno físico e portanto essa possibilidade não é válida.

Na segunda possibilidade, em que $(\delta/L)^2$ tende a zero mais rapidamente que $1/Re$, o termo da Eq. 2.10 se torna ∞ a medida que $Re \rightarrow \infty$. Para contornar matematicamente esse resultado multiplica-se o termo $(\delta/L)^2 Re$ em toda a Eq. 2.9, obtendo-se:

$$O \left[\frac{(\delta/L)^2}{1/Re} \right] + O \left[\frac{(\delta/L)^2}{1/Re} \right] = O \left[\frac{(\delta/L)^2}{1/Re} \right] + O \left[\left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \right] + O[1], \quad (2.11)$$

e segundo a mesma hipótese, para $Re \rightarrow \infty$, chega-se à Eq. 2.12

$$O[0] + O[0] = O[0] + O[0] + O[1], \quad (2.12)$$

resultando na seguinte equação diferencial de *momentum* linear:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (2.13)$$

Adotando-se como resposta à equação obtida pela segunda possibilidade, nota-se que a equação diferencial pode ser resolvida e a solução resultante é igual a:

$$u(x,y) = c_1(x)y + c_2(x). \quad (2.14)$$

Considerando a condição de não escorregamento na parede, $u = 0$ para $y = 0$, tem-se que c_2 é nulo. Caso c_2 seja nulo essa modelagem do escoamento passa a indicar que a camada limite sempre possui uma tensão cisalhante constante e um perfil de velocidade linear¹². Esse resultado não condiz com o fenômeno físico que se busca modelar visto que não apresenta uma passagem suave do perfil de velocidade da camada limite para o escoamento irrotacional, o qual é visto em experimentos materiais.

A última possibilidade elencada é de que o numerador e o denominador da Eq. 2.10 tendam a zero segundo a mesma taxa. Com essa possibilidade, o termo analisado possui uma ordem de grandeza igual a unidade gerando a seguinte equação diferencial de *momentum* linear:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (2.15)$$

Com base na Eq. 2.7 sabe-se que não há variação de pressão dentro da camada limite, portanto a pressão imediatamente na borda da camada limite é a mesma pressão no interior da região cisalhante do escoamento. Assim, pode-se utilizar a equação de Bernoulli na interface da camada limite, obtendo-se:

$$\frac{p(x)}{\rho} + \frac{1}{2}u_e^2(x) = k \quad (2.16)$$

onde $u_e(x)$ é a velocidade do escoamento irrotacional e k uma constante qualquer. Aplicando a operação diferencial em relação a x para todos os termos da Eq. 2.16, tem-se:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = u_e \frac{du_e}{dx}. \quad (2.17)$$

Substituindo a Eq. 2.17 na Eq. 2.15 desacopla-se a pressão do modelo diferencial, resultando em:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (2.18)$$

Sendo assim, o conjunto das equações diferenciais que modelam camadas limites definidas por Prandtl¹⁰ para um regime permanente são as Eq. 2.2 e 2.18. As condições de contorno definidas até então são as condições de não deslizamento na parede $u(x, y = 0) = 0$, $v(x, y = 0) = 0$ e que $u(x, y \rightarrow \infty) = u_e(x)$, *i.e.*, fora da camada limite. Inicialmente, nada pode-se afirmar sobre a velocidade v fora da camada limite.

Após o artigo de Prandtl¹⁰, nas primeiras décadas do século XX, seus orientandos continuaram o desenvolvimento da teoria da camada limite. Blasius, um dos orientandos de Prandtl, analisou o escoamento laminar sobre uma placa semi-infinita plana sem gradiente de pressão e o escoamento laminar sobre um cilindro¹¹. Dentre essas análises, o trabalho de Blasius em relação ao escoamento sobre uma placa plana é de interesse no presente trabalho.

Destaca-se que serão apresentadas as mesmas ideias desenvolvidas por Blasius¹¹, entretanto, a solução proposta por esse autor não será adotada, uma série matemática de potências, visto que essa solução foi descartada por apresentar problemas de convergência¹³.

Assumindo um escoamento uniforme sem gradiente de pressão sobre uma placa plana delgada semi-infinita em que a origem do sistema cartesiano é posicionado no bordo de ataque da placa plana e adotando o regime permanente na modelagem do escoamento que possui velocidade $u_e = U_\infty$. Com base nessas considerações, a velocidade do escoamento invíscido é uniforme e o termo $u_e \partial u_e / \partial x$ é nulo. A Figura 5 apresenta o modelo icônico do fenômeno físico e o seu modelo diferencial é visto através do sistema de Eqs. 2.19,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.19a)$$

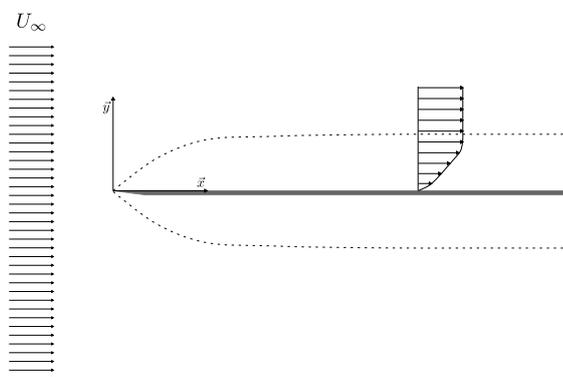
$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2.19b)$$

com as condições de contorno da Eq. 2.20,

$$\begin{cases} u(x > 0, y = 0) = 0 & v(x > 0, y = 0) = 0 \\ u(x > 0, y \rightarrow \infty) = U_\infty \end{cases}, \quad (2.20)$$

que são responsáveis por modelar o problema físico segundo a teoria da camada limite.

Figura 5 – Esquema da camada limite sobre uma placa plana infinita.



Fonte: Próprio autor.

Não há nenhum comprimento característico para o problema físico. Entretanto, pode-se considerar que os perfis de velocidade à jusante do bordo de ataque da placa sejam semelhantes entre si. Como base nessa similitude, pode-se adimensionalizar a velocidade u a partir da velocidade do escoamento irrotacional U_∞ enquanto a variável y passa pela mesma operação, porém, com o comprimento característico $\delta(x)$, uma medida pré-definida que mensura a espessura da camada limite.

A quantidade de $\delta(x)$ é proporcional a espessura da camada limite que por sua vez é influenciada pelos efeitos viscosos do fenômeno físico. A viscosidade causa um transporte de *momentum* linear com sentido da placa para a região invíscida do escoamento. Assim, a velocidade característica de transporte, U_v , é dependente de δ e de ν com ordem de grandeza ν/δ^{14} .

Analisando o fenômeno físico, nota-se dois comportamentos no interior da camada limite. O primeiro comportamento é o deslocamento das partículas de fluido que estavam anteriormente próximas a placa plana e é causada pelo processo de difusão que influencia a propriedade $\delta(x)$. A outra ação envolvida é a simples translação das partículas de fluido em relação a direção x com a velocidade U_∞ . O tempo para a translação das partículas

é definido por x/U_∞ enquanto o tempo relacionado ao transporte de *momentum* linear é dado por $\delta/U_v = \delta^2/\nu^{14}$. Considerando-se esses dois tempos com a mesma ordem de grandeza, tem-se:

$$\delta(x) \sim \sqrt{\frac{x\nu}{U_\infty}}. \quad (2.21)$$

Conforme já mencionado, uma medida para adimensionalizar a variável y é a medida $\delta(x)$. Essa propriedade do escoamento também depende de x e assim o processo de adimensionalização passa a ter características de y e de x . O comprimento característico para y é o comprimento de difusão em uma distância x da placa ¹². Sendo assim, a variável adimensionalizada, η , é definida por:

$$\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}. \quad (2.22)$$

É comum em tópicos relacionados a camada limite que se utiliza a função de corrente adimensional f^{12} ,

$$f(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{\nu x U_\infty}}, \quad (2.23)$$

enquanto u é definido por $\partial\psi/\partial y$. Substituindo as Eq. 2.22 e 2.23 na identidade de u , tem-se:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial(f\sqrt{\nu x U_\infty})}{\partial\left(\eta\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}\right)}, \quad (2.24)$$

$$u = \frac{\sqrt{\nu x U_\infty}}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}} \frac{df}{d\eta} = \sqrt{U_\infty^2} \frac{df}{d\eta}, \quad (2.25)$$

$$u = U_\infty f'. \quad (2.26)$$

Pela Equação da continuidade, v tem de ser definido por $-\frac{\partial\psi}{\partial x}$. Substituindo as Eq. 2.22 e 2.23 nessa identidade e aplicando a regra da cadeia, obtêm-se:

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial x}\right), \quad (2.27)$$

$$v = -\left[\frac{\partial(f\sqrt{\nu x U_\infty})}{\partial x} + \frac{\partial(f\sqrt{\nu x U_\infty})}{\partial\eta} \frac{\partial\left(y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}\right)}{\partial x}\right], \quad (2.28)$$

$$v = - \left[\frac{f}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} + \sqrt{\nu x U_\infty} \frac{df}{d\eta} \left(\frac{-1}{2x} \underbrace{y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}}_{\eta} \right) \right], \quad (2.29)$$

$$v = - \left(\frac{f}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} - \frac{\eta f'}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} \eta \right), \quad (2.30)$$

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} (\eta f' - f). \quad (2.31)$$

Definidos os componentes u e v em função de f , deseja-se definir todos os termos da Eq. 2.19b em função de f . Assim, para $\partial u / \partial x$ considerando a Eq. 2.26, resulta em:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (U_\infty f') = U_\infty \frac{\partial f'}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U_\infty f'' \left(-\frac{\eta}{2x} \right) = -\frac{\eta U_\infty}{2x} f''. \quad (2.33)$$

Para $\partial u / \partial y$, simplifica-se:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial (U_\infty f')}{\partial (\eta \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}})}, \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{x\nu}} f''. \quad (2.35)$$

Para $\partial^2 u / \partial y^2$, tem-se:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial (\eta \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}})} \left(U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{x\nu}} f'' \right), \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U_\infty^2}{x\nu} f'''. \quad (2.37)$$

Substituindo as Eq. 2.26, 2.31, 2.33, 2.35 e 2.37 na Eq. 2.19b, obtêm-se em:

$$(U_\infty f') \left(-\frac{\eta U_\infty}{2x} f'' \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} (\eta f' - f) \left(U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{x\nu}} f'' \right) = \frac{\nu U_\infty^2}{x\nu}, \quad (2.38)$$

$$-\frac{\eta U_\infty^2}{2x} f' f'' + \frac{U_\infty}{2} \sqrt{\frac{U_\infty^2}{x^2}} f'' (\eta f' - f) = \frac{U_\infty^2}{x} f''', \quad (2.39)$$

$$-\frac{\eta U_\infty^2}{2x} f' f'' + \frac{U_\infty^2}{2x} (\eta f'' f' - f f''') = \frac{U_\infty^2}{x} f''', \quad (2.40)$$

$$-\eta f' f'' + \eta f'' f' - f f''' = 2f''', \quad (2.41)$$

$$2f''' + f f'' = 0. \quad (2.42)$$

A Equação 2.42 é a forma desenvolvida por Blasius¹¹. Esta é uma equação diferencial ordinária não linear de terceira ordem e foi obtida a partir da redução de um sistema de equações diferenciais parciais, Eq. 2.19. As condições de contorno apresentadas pela Eq. 2.20 também devem ser reescritas em função de $f(\eta)$. Analisando a Eq. 2.26 para $u(x, y = 0) = 0$, resulta-se em:

$$u(x, y = 0) = 0 \rightarrow f'(\eta = 0) = 0. \quad (2.43)$$

A partir da Eq. 2.31 e de $v(x, y = 0) = 0$, chega-se a:

$$0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} (0f' - f) \rightarrow f(\eta = 0) = 0. \quad (2.44)$$

Observando-se a terceira condição de contorno apresentada junto a Eq. 2.26, tem-se:

$$u(x, y \rightarrow \infty) U_\infty \rightarrow f'(\eta \rightarrow \infty) = 1. \quad (2.45)$$

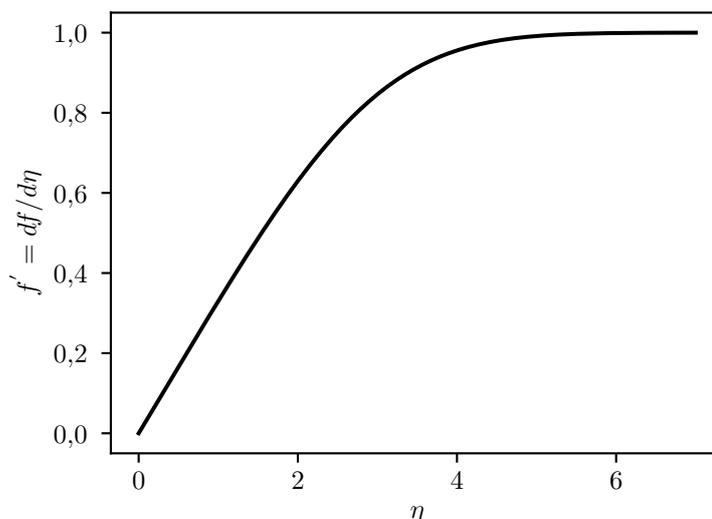
A condição para $x \rightarrow \infty$ equivale a condição apresentada pela Eq. 2.45 devido a definição adotada para η .

A fim de se resolver a Eq. 2.42, Blasius¹¹ propôs uma série de potências que, ao passar do século passado, foi descartada por apresentar problemas de convergências¹³. Dessa maneira, a Eq. 2.42 foi resolvida com maior acurácia por Howarth¹⁵ e seus resultados ainda são utilizados como referência¹⁴.

A Eq. 2.42 pode ser resolvida computacionalmente através de um método de Runge-Kutta denominado por método *shooting*¹⁴. Com esse método, a Eq. 2.42 é resolvida a com $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ e um valor estimado para $f'''(0)$. O valor estimado é então iterado até que se consiga satisfazer $f'(\infty) = 1$, usualmente o valor de $\eta > 5$ é utilizado como correspondente a $\eta \rightarrow \infty$. A Figura 6 apresenta solução obtida para a Eq. 2.42 segundo o algoritmo apresentado.

A velocidade v também pode ser determinada a partir da solução de Blasius através da Eq. 2.31. Nada foi explorado até aqui sobre a velocidade de v fora da camada limite,

Figura 6 – Solução da equação de Blasius.



Fonte: Próprio autor.

$y \rightarrow \infty$, uma hipótese é de que esse valor seja nulo. Entretanto, à medida que $\eta \rightarrow \infty$ o valor das operações entre parênteses da Eq. 2.31 assume um valor constante. Assim, v_∞ é definido pela Eq. 2.46¹⁴,

$$v_\infty = 0,8604U_\infty \sqrt{\frac{\nu}{xU_\infty}} = 0,8604U_\infty \sqrt{\frac{1}{Re_x}}, \quad (2.46)$$

em que Re_x é o número de Reynolds local do escoamento. O valor de v_∞ não nulo é decorrente do efeito de deslocamento do escoamento sobre a placa.

A partir da solução de Blasius, pode-se determinar algumas propriedades do escoamento sobre a placa plana tais como a espessura da camada limite, $\delta(x)$ ou o atrito originado pelo escoamento sobre a placa.

A determinação do arrasto é mais usual do que a do atrito para caracterizar escoamentos, entretanto, para o escoamento ao longo da placa plana sem gradiente de pressão o arrasto formado é composto apenas de arrasto devido ao atrito¹⁴. O coeficiente de atrito, $C_f(x)$, é definido por

$$C_f(x) = \frac{\tau_w(x)}{\frac{\rho}{2}U_\infty^2}, \quad (2.47)$$

em que τ_w é a tensão cisalhante local da parede, igual a:

$$\tau_w(x) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \approx 0,332\mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}. \quad (2.48)$$

Substituindo a Eq. 2.48 na Eq. 2.47, tem-se uma expressão para determinar o coeficiente de atrito para o escoamento sobre a placa plana segundo a solução de Blasius apresentada pela Eq. 2.49,

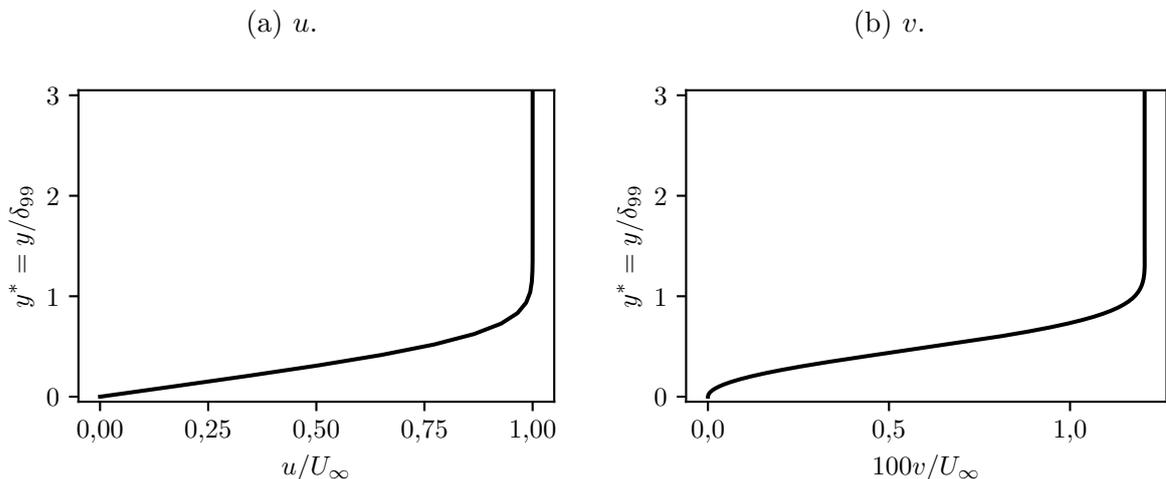
$$c_f(x) = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}}. \quad (2.49)$$

A espessura da camada limite, $\delta(x)$, é definida para esse tipo de escoamento como a posição em que $u = 0,99U_\infty$ ¹⁴. Apesar da espessura da camada limite assumir um papel importante no conceito de camada limite, em experimentos materiais é difícil mensurar essa propriedade com acurácia e seu significado físico é subjetivo já que a escolha da porcentagem de U_∞ que a define também é arbitrária¹⁶. Ainda sim, a espessura da camada limite é definida por:

$$\delta_{99}(x) \approx 5\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}. \quad (2.50)$$

É atraente utilizar a Eq. 2.50 para adimensionalizar y , $y^* = y/\delta_{99}(x)$, na apresentação dos perfis de velocidade u e v já que assim a camada limite fica normalizada para qualquer $x > 0$. As Figuras 7a e 7b apresentam perfis de u e v com y^* para $\nu = 10^{-4} m^2/s$ e $x = 0,5 m$ em que a camada limite corresponde a região $y^* \leq 1$.

Figura 7 – Perfis de u e v para y^* .

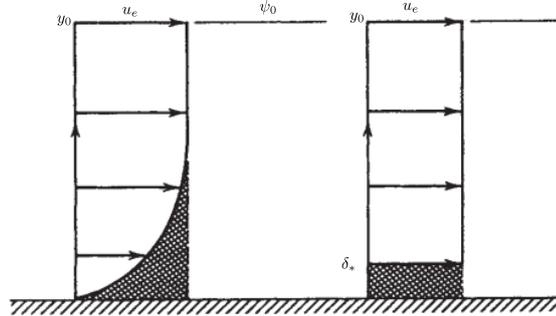


Fonte: Próprio autor.

Outra espessura utilizada para caracterizar a camada limite é a espessura de deslocamento, $\delta_*(x)$. Analisando a Fig. 8 e considerando a linha de corrente ψ_0 posicionada em y_0 no escoamento invíscido com a velocidade u_e , tem-se dois cenários para comparação. No lado esquerdo da Fig. 8 observa-se a camada limite em um escoamento com velocidade u_e e no lado direito da mesma figura tem-se um escoamento totalmente invíscido hipotético que é esta distribuído de $\delta_* \leq y \leq y_0$. A espessura de deslocamento é definida como a

posição onde o escoamento hipotético invíscido tem a mesma vazão mássica da camada limite¹².

Figura 8 – Analogia entre a camada limite e o escoamento invíscido para determinar δ_* .



Fonte: Adaptado de Panton¹².

Para um escoamento incompressível, δ_* é definido matematicamente como:

$$\delta_* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy. \quad (2.51)$$

Considerando a solução da equação de Blasius, a Eq. 2.51 se torna

$$\delta_* = 1,72 \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}}, \quad (2.52)$$

em que esse valor corresponde a $\delta_{99}(x)/3$ aproximadamente¹⁶.

A velocidade v da solução de Blasius não é nula e esse fato é decorrente do conceito de δ_* . Analisando-se um escoamento invíscido com $u_e(x)$ e v , tem-se que a equação da continuidade é

$$\frac{du_e}{dx} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2.53)$$

Integrando a Eq. 2.53 com respeito a y e considerando que u_e é uma função dependente apenas de x , tem-se:

$$v = -\frac{du_e}{dx} y. \quad (2.54)$$

Com base na Eq. 2.54, constata-se que v varia linearmente na região irrotacional do escoamento, *i.e.*, fora da camada limite. Seguindo o mesmo conceito e o aplicando a todo o escoamento, obtêm-se:

$$v = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} (u_e - u) dy - \frac{du_e}{dx} y. \quad (2.55)$$

Analisando-se a Eq. 2.55, nota-se que o segundo termo corresponde a característica invíscida do escoamento. O primeiro termo corresponde ao termos viscoso visto que a diferença $u_e - u$ corresponde a redução da velocidade do escoamento devido a presença de fluido rotacional dentro da camada limite¹⁷. Reorganizando a Eq. 2.55 com base na definição de δ_* , Eq. 2.51, e em uma posição y fora da camada limite, chega-se a

$$v = \frac{d(u_e \delta_*)}{dx} - \frac{du_e}{dx} y. \quad (2.56)$$

Considerando o caso do escoamento uniforme sobre uma placa plana sem gradiente de pressão, a Eq. 2.56 se reduz a Eq. 2.57,

$$v = U_\infty \frac{d(\delta_*)}{dx}. \quad (2.57)$$

A Eq. 2.57 representa a influencia do perfil da camada limite sobre a componente v de velocidade na região invíscida do escoamento e é comumente vista como um efeito de correção que a camada limite impõe sobre a região irrotacional do escoamento¹².

As soluções de Blasius são válidas apenas para escoamentos laminares sobre uma placa plana semi infinita sem gradiente de pressão, entretanto, as noções de espessura da camada limite ou a espessura de deslocamento não são exclusivas para esse tipo de escoamento.

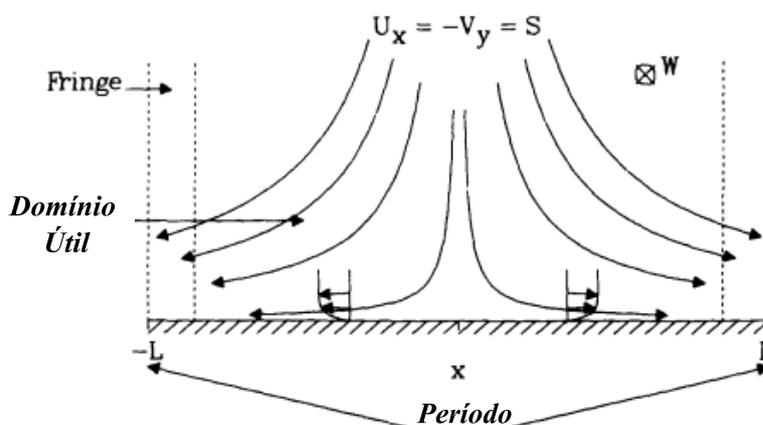
2.2 Estado da arte

Kim, Moin e Moser¹⁸ desenvolveram um código computacional com base em séries de Fourier em duas direções do escoamento enquanto, na terceira, utilizava a expansão polinomial de Chebychev para discretização espacial das equações da continuidade e de Navier-Stokes. O método de avanço temporal utilizado foi de Crank-Nicholson para os termos viscosos e de Adams-Bashforth para termos não lineares, ambos semi-implicitamente. Nesse código modelou o escoamento turbulento ao longo de um duto utilizando a simulação numérica direta (*Direct Numerical Simulation*), DNS, visto que a direção perpendicular à parede dos dutos foi discretizada com Chebychev que apresenta refinamento local não controlável enquanto as demais direções foram discretizadas com Fourier que apresenta acurácia espectral. O código híbrido apresentou resultados estatísticos comparáveis a resultados materiais. Entretanto, houve discrepâncias entre os resultados obtidos e os materiais nas regiões próximas à parede. Kim, Moin e Moser¹⁸ apesar de não modelarem uma camada limite em seu trabalho, apresentaram uma ferramenta computacional com acurácia significativa que seria adaptada para tal modelagem em anos posteriores.

O primeiro código computacional que utilizou o método *fringe* para a periodização de escoamentos foi desenvolvido por Spalart¹⁹ que buscava modelar o escoamento plano

com ponto de estagnação. A metodologia utilizada apresentava periodicidade na direção x e z do escoamento, enquanto o escoamento modelado apresenta periodicidade apenas na direção z . O artifício utilizado para a periodização do escoamento foi a utilização do método fringe implementado de acordo com o esquema visto na Fig. 9. Para a implementação desse método cada componente da velocidade foi subdividido em dois: uma parte referente a solução computacional e outra referente ao método fringe com velocidades prescritas que são diferentes de 0 apenas nas zonas “fringe”. O papel do método fringe é de tornar o escoamento periódico na direção x sem interferir na solução do domínio útil, por causa disso, a periodização é feita a partir de uma função suave do tipo gaussiana para que se minimize o impacto da operação sobre a resposta computacional. Apesar de satisfazer as condições de periodicidade na direção x esse tipo de implementação com as zonas fringe foram utilizadas como “buracos negros” onde se destruiu a informação do escoamento para que nas bordas do domínio as condições de periodicidade não causassem distorções na modelagem. Os resultados obtidos no domínio útil se mostraram condizentes com a literatura da época e não se observou perda de acurácia devida ao emprego do método *fringe*. Entretanto, esse método foi considerado apenas para escoamentos similares ao escoamento plano com ponto de estagnação.

Figura 9 – Esquema do escoamento modelado com o método fringe.



Fonte: Adaptado de Spalart¹⁹.

Lund, Wu e Squires²⁰ propuseram um novo método para a geração de condições de entrada turbulentas, tridimensionais e dependentes do tempo para a simulação da camada limite turbulenta sobre uma placa plana em desenvolvimento espacial utilizando a simulação das grandes estruturas da turbulência (*Large Eddy Simulation*), LES. O método desenvolvido parte de uma simulação auxiliar, também espacial, a qual origina as condições de entrada da simulação principal através de uma sequência de operações onde o campo de velocidade é redimensionado e reintroduzido na entrada do domínio da simulação principal em todo instante t . Esse método foi aplicado para soluções computacionais obtida

através do método de passo fracionado em que as derivadas espaciais foram discretizadas utilizando diferenças centradas de ordem dois e o avanço temporal imposto semi-implícito com termos calculado através do método de Crank-Nicholson implícito e outros através do método de Runge-Kutta de terceira ordem explícito. As condições de contorno de topo do domínio numérico foram de derivada nula na direção perpendicular a placa para u e w filtrados enquanto v filtrado foi determinado pela Eq. 2.57 em que δ_* era computado a partir do campo de velocidade médio do escoamento. Os resultados estatísticos obtidos se mostraram comparáveis a resultados materiais e quando comparado a outros métodos de geração de *inlets* turbulentos da época, essa proposta se mostrou superior por não causar transições próximas a entrada do domínio computacional que prejudicam a modelagem do escoamento. Destaca-se nesse trabalho o emprego da condição de contorno proveniente da Eq. 2.57 e o seu sucesso em modelar escoamentos parietais turbulentos.

Lundbladh et al.²¹ aperfeiçoaram o código desenvolvido por Kim, Moin e Moser¹⁸ para a modelagem de uma camada limite em desenvolvimento temporal ou espacial. A solução computacional se manteve com os mesmos processos de discretização espaciais e temporais entretanto, para modelagens de desenvolvimento espacial passou-se a implementar o método *fringe* para a periodização do escoamento. A implementação desse método no código diverge da imposta no trabalho de Spalart¹⁹ visto que o método passa a ser imposto através de um termo fonte nas equações de *momentum* linear e não mais diretamente nos componentes da velocidade. O termo forçante, f_i , nas equações tem a forma de:

$$f_i = \lambda(x)(U_i - u_i), \quad (2.58)$$

onde $\lambda(x)$ é uma função não negativa que é diferente de 0 apenas na região do domínio onde há quebra de periodicidade, denominada de zona *fringe*; u_i é a solução computacional da metodologia; e U_i é o mesmo campo de velocidades utilizado para prescrever as condições de contorno. A velocidade prescrita na direção x é definida como:

$$U_x(x,y) = U(x,y) + [U(x + x_L,y) - U(x,y)]S\left(\frac{x - x_{mix}}{\Delta_{mix}}\right), \quad (2.59)$$

em que $U(x,y)$ é a solução da equação de Blasius; x_{mix} e Δ_{mix} são os parâmetros que indicam a faixa de variação dos valores obtidos no final do domínio útil até aqueles necessários na entrada do domínio útil; S é uma função exponencial suave; e x_L é a posição da entrada do domínio útil. A componente U_y é definida a partir da equação da continuidade enquanto a componente U_z é nula visto que o escoamento modelado é majoritariamente bidimensional.

As condições de contorno do topo do domínio são impostas no domínio espectral e tem formato igual a:

$$\left[\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial y} + |k| \hat{u}_i \right]_{y=y_L} = \left[\frac{\partial \hat{U}_i}{\partial y} + |k| \hat{U}_i \right]_{y=y_L}, \quad (2.60)$$

onde $\hat{}$ corresponde as variáveis no domínio espectral, k é a norma dos números de onda nas duas direções que utilizam o domínio espectral de Fourier e y_L a posição do topo do domínio computacional. Essas condições representam um decaimento da solução do escoamento potencial em relação a placa e como consequência as condições de contorno do topo podem ser posicionadas mais próximas da placa do que outras alternativas.

Nordström, Nordin e Henningson²² estudaram o método *fringe* através de análises algébricas e experimentos virtuais, esses últimos realizados com a metodologia desenvolvida por Lundbladh et al.²¹. Através dos resultados, é visto que o método *fringe* interfere no escoamento, considerando as condições de periodicidade, à montante de sua aplicação e à jusante mesmo que sua principal função seja o amortecimento de desvios da velocidade em relação a condição de entrada do domínio útil. A fim de se minimizar os efeitos do método à montante, utiliza-se um desenvolvimento espacial fictício da camada limite com base na Eq. 2.59 para a componente de velocidade na direção x e no balanço da massa para a componente na direção y . Por outro lado, o impacto da zona *fringe* à jusante é determinado pela altura do domínio computacional de interesse. Quanto menor a altura do domínio, menor é o efeito da zona *fringe* sobre o começo do domínio útil. Com a constatação desse último fato, fica clara a escolha das condições de contorno de topo realizadas por Lundbladh et al.²¹.

Em resumo, as análises algébricas e computacionais de Nordström, Nordin e Henningson²² indicam dois fatos necessários para o correto uso do método *fringe* na modelagem da camada limite sobre uma placa plana em desenvolvimento espacial. O primeiro é a importância de determinar a solução das velocidades na região próxima a entrada da zona *fringe*, não são suficientes apenas os perfis de velocidade em uma posição de x . O segundo fato é que aumentando-se a altura do domínio computacional, aumenta-se a influência indesejável da zona *fringe* no início do domínio útil.

A partir do código computacional de Lundbladh et al.²¹, Brandt, Schlatter e Henningson²³ analisaram os efeitos de altos níveis de turbulência no escoamento livre turbulento presente na transição da camada limite de Blasius sob uma modelagem DNS. A metodologia computacional utilizada na modelagem permaneceu com as mesmas características já apresentadas salvo a introdução de perturbações das soluções alvos dentro da zona *fringe* para a modelagem de escoamento incidente no domínio útil já perturbado. A perturbação é necessária visto a alta acurácia da metodologia devido ao uso do séries espectrais de Fourier nas duas direções paralelas a placa plana.

Schlatter, Adams e Kleiser²⁴ utilizaram a modelagem de escoamentos não periódicos bidirecionais em um código periódico para comparar o método *fringe* com o método de

enjanelamento. Dois tipos de escoamentos foram modelados durante os experimentos: a advecção de um distúrbio localizado e um jato em desenvolvimento espacial sobre um meio quiescente. O método de enjanelamento é comumente usado no tratamento de sinais em que a transformada de Fourier é amplamente utilizada. Esse método modifica as equações responsáveis pela modelagem dos escoamentos de forma que a solução computacional seja obtida apenas em uma “janela” dentro do domínio computacional. A solução computacional nas regiões próximas ao “enjanelamento” são obtidas através de operações regularizadas de “desenjanelamento” que utilizam soluções alvo baseadas no escoamento modelado. Embora as soluções alvo utilizadas no método de enjanelamento sejam análogas ao método fringe, as utilizadas para esse método não necessitam ser periódicas. Os métodos de enjanelamento e fringe apresentaram acurácia similar entre si com os autores favorecendo o método de enjanelamento devido às suas soluções alvos utilizadas serem mais simples.

A modelagem da camada limite sobre uma placa plana sem gradiente de pressão é considerado um escoamento canônico e como tal pode ser utilizado na validação de novos métodos numérico-computacionais. Wang e Zhang²⁵ desenvolveram uma nova metodologia no cálculo de fronteira imersa e utilizaram tal escoamento dentre outros para validação da nova metodologia proposta. Na nova metodologia, o termo fonte presente na imposição da fronteira imersa é calculado implicitamente em um sistema linear que possui a quantidade de variáveis igual a quantidade de pontos lagrangianos. Os resultados obtidos com a nova metodologia foram validados para baixos números de Reynolds, $Re \leq 300$, e comparados com resultados de experimentos materiais e computacionais de outros trabalhos.

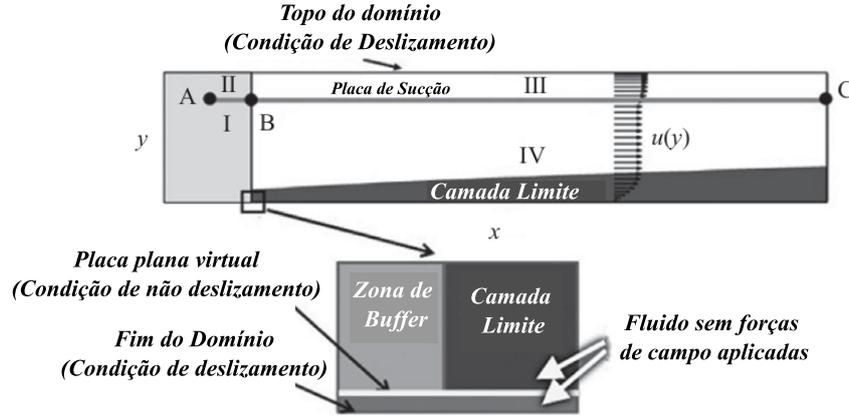
Strand e Goldstein²⁶ modelaram a camada limite turbulenta sobre uma placa plana e utilizaram DNS em um código espectral em que as séries de Fourier são empregadas nas direções paralelas a placa plana e a terceira direção é discretizada com a expansão de Chebychev. O MFI foi utilizado para imposição de condições de contorno assim como o método de Buffer para a periodização do escoamento modelado. O esquema de implementação é apresentado na Fig. 10. O MFI é imposto sobre o escoamento através do vetor termo-fonte, $\vec{F}(\vec{x}, t)$, definido na Eq. 2.61,

$$\vec{F}(\vec{x}, t) = \alpha \int_0^t [\vec{U}(\vec{x}, t') - \vec{U}_{des}(\vec{x}, t')] dt' + \beta [\vec{U}(\vec{x}, t) - \vec{U}_{des}(\vec{x}, t)], \quad (2.61)$$

em que $\vec{U}(\vec{x}, t)$ é o vetor velocidade em cada ponto que faz parte da interface imersa; $\vec{U}_{des}(\vec{x}, t)$ é o vetor das velocidades com o valor a ser imposto pelo MFI; e α e β são constantes negativas.

A zona de Buffer, região I na Fig. 10, é imposta no código computacional da mesma forma que o MFI, porém com constantes α e β diferentes. Para que o *buffer* possa amortecer a solução computacional para que seja imposto um perfil de Blasius para determinada posição da placa plana, α e β se tornam dependentes de x . O parâmetro β é

Figura 10 – Esquema de implementação do método híbrido espectral de Fourier e Chebyshev aliado ao MFI para modelagem de camada limite.



Fonte: Adaptado de Strand e Goldstein²⁶.

$$\beta = 20 \exp \left\{ -24 \left[(x - x_{centro}) / L_B \right]^2 \right\}, \quad (2.62)$$

em que x_{centro} é a posição do meio e L_B se refere ao tamanho da zona de buffer. O parâmetro α é zero exceto no 1/3 central da região de buffer que apresenta a seguinte expressão:

$$\alpha = 20 \exp \left\{ -240 \left[(x - x_{centro}) / L_B \right]^2 \right\}. \quad (2.63)$$

Conforme visto na Fig. 10, nos limites verticais do domínio complementar são impostas condições de deslizamento devido a uma limitação do código utilizado. Com isso, o domínio útil da modelagem é delimitado pela placa plana virtual imposta pelo MFI até o segmento de reta \overline{BC} e delimitada por IV . Para que haja o desenvolvimento espacial de camada limite, modela-se uma placa de sucção através da imposição de v_∞ de Blasius ao longo de \overline{BC} . Não há nenhuma imposição ao longo da placa de sucção para os demais componentes da velocidade e essa modelagem de sucção na direção vertical é análoga a um pequeno aumento da seção transversal da seção de teste do tunnel de vento ao longo da direção do escoamento para que se possa manter um escoamento modelado sem gradientes de pressão na seção de teste²⁶. Para que haja sucção vertical desde o início do domínio útil a placa de sucção é imposta em parte do Buffer, \overline{AB} , originando uma região diferente da zona de Buffer, região II . Por fim, a região III apresenta uma região de aceleração do fluido devido a sucção modelada que não faz parte do domínio útil.

Zhu, He e Zhang²⁷ aprimoraram o MFI proposto por Wang e Zhang²⁵ para que oscilações não físicas presentes na determinação das forças na interface imersa relacionadas à forçagem lagrangiana fossem suprimidas. Com essa medida, a acurácia da distribuição

do coeficiente de atrito ao longo da placa plana não apresentou mais oscilações mesmo que as áreas de menor exatidão continuassem no bordo de ataque e de fuga da placa plana.

Suzuki, Okada e Yoshino²⁸ modelaram o escoamento laminar, $Re = 1000$, sobre uma placa plana sem gradiente de pressão através do MFI junto ao método Lattice Boltzmann. Apesar do método Lattice Boltzmann não utilizar as equações de Navier-Stokes para a obtenção da solução computacional tal qual é feito pelo IMERSPEC é válido salientar que o método de múltiplas imposições diretas em inglês *Multi Direct Forcing Method*, (MDFM) é utilizado para a implementação do MFI responsável por modelar as condições de contorno da placa plana. O MDFM é o método de cálculo do termo-fonte do MFI utilizado usualmente no IMERSPEC. Os melhores resultados obtidos da implementação dessa modelagem apresentaram discordância em torno de 5% com os perfis de velocidade computacionais provenientes da solução da equação de Blasius e discordância de 3,4% em relação ao coeficiente de arrasto da placa.

Lanzilao e Meyers²⁹ propuseram uma variação do método *fringe* na modelagem da camada limite atmosférica. O código utilizado na modelagem é uma versão aperfeiçoada do código desenvolvido por Lundbladh et al.²¹. Com o novo método *fringe* evitam-se ondas gravitacionais espúrias quando se modela a estratificação da atmosfera através de um amortecimento dos termos advectivos na equação de *momentum* linear vertical. A variação do novo método é utilizada com sucesso na modelagem LES da camada limite atmosférica em um parque eólico.

Com base nos trabalhos apresentados, constata-se que qualquer método de discretização espacial que envolva o domínio espectral de Fourier ocasiona a não modelagem do bordo de ataque da placa plana na modelagem da camada limite de Blasius a fim de se evitar efeitos de Gibbs. Sendo assim, algum método de periodização na direção do desenvolvimento espacial do escoamento é aplicado para que as condições de periodicidade inerente ao domínio espectral não prejudiquem a modelagem. Até o presente momento, não se tem nenhuma modelagem computacional em que direção perpendicular à placa plana utiliza a transformada ou as séries de Fourier para sua discretização espacial conforme proposto na presente dissertação.

Outro fato de destaque é que há poucos trabalhos nos quais foi utilizada a metodologia espectral de Fourier na última década e nenhum com a metodologia pseudoespectral na modelagem da camada limite indicando um campo científico ainda inexplorado. Esse tipo de metodologia foi popular nas décadas de 1980 e 1990 por apresentar significativa acurácia com malhas computacionais grosseiras. Essa era uma necessidade a época em vista do baixo poder computacional até então disponível. Hoje, malhas altamente refinadas ou malhas com refinamento localizado podem ser empregadas para metodologias diferentes obtendo resultados satisfatórios ou até melhores do que os obtidos por abordagens de Fourier na maioria das representações computacionais de escoamentos, visto que não há

necessidade de quebra de não periodicidade.

O cenário descrito se altera quando o escoamento de interesse apresenta comprimento característico com dimensões atmosféricas tal qual a camada limite atmosférica. Para esses tipos de escoamentos, abordagens espectrais ainda são de interesse uma vez que, ainda hoje, deve-se obter resultados com exatidão para malhas grosseiras.

As modelagens da camada limite de Blasius que utilizaram o MFI indicam possíveis adversidades que podem surgir no presente estudo, tais como instabilidades numéricas na determinação de coeficientes de atrito ou baixa acurácia dos resultados computacionais em regiões específicas do escoamento modelado.

2.2.1 IMERSPEC

O acoplamento dos métodos pseudo-espectral de Fourier e fronteira imersa, denominado por IMERSPEC, foi criado em 2007 dentro do Laboratório de Mecânica dos Fluidos, MFLab, da Universidade Federal de Uberlândia. Mariano⁴ desenvolveu o primeiro trabalho que utilizou essa ferramenta computacional para a modelagem do escoamento de uma cavidade bidirecional com tampa deslizante a baixos números de Reynolds. Neste trabalho foram apresentadas as vantagens do IMERSPEC tais como a acurácia significativa para modelar detalhes do escoamento com $Re = 400$ até então não observados em outras publicações à época. A fronteira imersa, neste trabalho, foi implementada através do Método Físico Virtual (MFV) com o qual apresentaram-se resultados classificados como satisfatórios, entretanto, esse método apenas era considerado para malhas lagrangianas e eulerianas coincidentes.

A metodologia IMERSPEC foi expandida para a modelagem de escoamento tridimensionais através do trabalho de Moreira⁵ o qual modelou jatos turbulentos livres circulares em desenvolvimento temporal utilizando LES junto ao modelo sub-malha de Smagorinsky. Os resultados obtidos foram consistentes com análises físicas em que se verificou a transição do escoamento a turbulência e as respectivas estruturas turbilhonares típicas relacionados ao fenômeno modelado. Em especial, destaca-se que na modelagem de escoamentos em desenvolvimento temporal, as condições de periodicidade inerentes ao uso da transformada rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform*), FFT, são desejáveis.

Mariano³⁰ aperfeiçoou o IMERSPEC substituindo o método físico virtual pelo MDFM, onde os processos de validação e verificação indicaram quarta ordem de convergência. Esse foi o primeiro trabalho onde modelagens de escoamentos em desenvolvimento espacial foram implementadas com o IMERSPEC através do uso do método de *Buffer* junto a uma região de forçagem do MDFM, responsáveis pela periodização na direção de desenvolvimento do escoamento e condição de entrada no domínio útil. Mariano³⁰ modelou escoamentos clássicos bidimensional e tridimensional sobre degrau, além de escoamentos

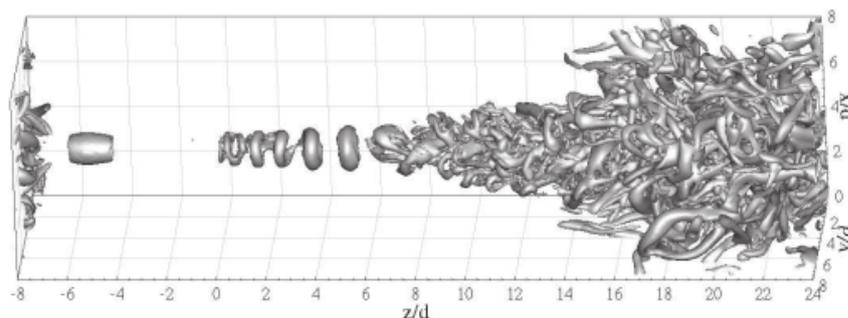
sobre cilindros e na queda de corpos rígidos, *i.e.*, o IMERSPEC foi utilizado na modelagem de escoamentos complexos e de um escoamento gravitacional. Seus resultados mostraram-se de acordo com a literatura e parte deles foram publicados posteriormente³¹.

Escoamentos bifásicos bidimensionais foram modelados no trabalho de Villela⁶, a qual adaptou o IMERSPEC que modelava interfaces rígidas, utilizando o MFV ou MDFM, até então, para a representação de interfaces móveis e deformáveis típicas do escoamento de interesse. Para a modelagem desse novo tipo de interface imersa foi utilizado o método híbrido *Front-Tracking/Front-Capturing*. O escoamento modelado no trabalho foi a ascensão de uma bolha em um escoamento de formato cilíndrico onde notou-se o fenômeno de Gibbs na solução desse tipo de escoamento para grandes saltos de propriedades físicas entre as suas fases. As simulações realizadas mais sofisticadas envolveram a remalhagem de pontos lagrangianos durante a ascensão da bolha e enquanto esta se deforma, em que notou-se que os pontos lagrangianos se acumulavam na região inferior da bolha e para melhores resultados seria necessária a regularização de tais pontos durante a remalhagem do domínio lagrangiano.

Moreira³² modelou tridimensionalmente jatos livres circulares turbulentos em desenvolvimento espacial, utilizando a versão do IMERSPEC aprimorada de Mariano³⁰ junto a modelagem LES e com modelos sub-malha de Smagorinsky e Smagorinsky Dinâmico. Como os jatos foram modelados em desenvolvimento espacial foi necessária a implementação do método de *Buffer* junto a zona de forçagem com MDFM para garantir o amortecimento da condição do escoamento de saída do domínio útil e reformulação da condição de entrada do domínio útil. Essa região formada pelo agrupamento do método de Buffer junto a zona de forçagem com MDFM recebeu o nome de domínio complementar. O processo de amortecimento de estruturas turbilhonares para esse escoamento é apresentado na Fig. 11 em que o domínio complementar é definido em $-8 \leq z/d \leq 0$ para d igual ao diâmetro do orifício de saída do jato. Os resultados para essa modelagem foram validados comparando-se à resultados proveniente de um experimento material para o escoamento com $Re = 1050$, considerando um escoamento em transição. Destaca-se que a inserção de um ruído numérico para esse Re modelado na entrada do domínio útil é necessária visto que a exatidão de erro de máquina do IMERSPEC inviabiliza perturbações numéricas inerentes a métodos de baixa ordem e necessárias para desencadear a transição do escoamento.

Até então apenas escoamentos isotérmicos haviam sido modelado com o IMERSPEC. Kinoshita⁷ estendeu a metodologia para a modelagem de escoamentos com transferência de energia térmica. O algoritmo numérico implementado foi baseado na resolução computacional das Equações da continuidade, Navier-Stokes e de balanço de energia térmica através do MPF com a determinação das condições de contorno através do MFI utilizando MDFM. Nesse trabalho exploram-se condições de contorno de primeira, segunda e terceira espécies em que foi verificado que para problemas físicos não isotérmicos, a metodologia

Figura 11 – Estruturas turbilhonares sendo amortecidas pelo domínio complementar em modelagem de jato livre circular turbulento pelo IMERSPEC.



Fonte: Moreira³².

apresentada possui uma taxa de convergência de segunda ordem. Os resultados obtidos em sua tese foram publicados posteriormente³³.

Jacob³⁴ modelou o escoamento de esteiras tridimensionais em transição e turbulentas em desenvolvimento temporal utilizando abordagem LES e DNS. A necessidade de perturbações randômicas de diferentes amplitudes se mostrou necessária para a correta modelagem desse tipo de escoamento cisalhante livre tal qual observado por Moreira⁵ e Moreira³² para os jatos livres circulares devido a alta acurácia do IMERSPEC. Os resultados quantitativos foram apresentados em termos do espectro de energia cinética turbulenta em diferentes instantes temporais, os quais validaram as modelagens realizadas. Análises complementares de estudo da topologia do escoamento no espaço dos invariantes permitiram uma interpretação física dos estágios do desenvolvimento de diversos comprimentos de estruturas presentes na modelagem turbulenta e correlações qualitativas da transformação viscosa da energia cinética.

A modelagem de escoamentos bifásicos bidimensionais dentro do IMERSPEC foi aperfeiçoada por Villela³⁵. Dois métodos para a representação da interface móvel e deformável foram acopladas ao IMERSPEC para propriedades física variáveis: *Front-Tracking* (FT) e *Volume of Fluid* (VOF). De forma geral, a metodologia IMERSPEC-FT foi validada para simulações de ascensão de bolha com baixas razões de propriedades físicas em diferentes regimes de movimentação da bolha enquanto o IMERSPEC-VOF foi validado apenas para a ascensão da bolha em regime cilíndrico comparando-se os resultados obtidos com resultados de experimentos materiais e os obtidos previamente para o IMERSPEC-FT.

O IMERSPEC também foi utilizado por Nascimento⁸ em problemas que envolvem interação fluido estrutura como a modelagem bidimensional simplificada de perfurações de poços de petróleo e gás onde foi possível observar padrões de escoamentos nas tubulações de extração de petróleo para diferentes razões de aspecto e números de Reynolds. No

trabalho foi realizada a validação da acoplagem da interação fluido-estrutura através de escoamentos sobre cilindros com um e dois graus de liberdade. De maneira geral, o IMERSPEC bidimensional possibilitou modelar escoamentos de Couette-circular concêntrico ou excêntrico e escoamentos em canais anulares: fixos, com constrição na extremidade e ancorado por uma mola.

A metodologia IMERSPEC continua sendo aprimorada, mesmo em diferentes locais. O Laboratório de Engenharia Térmica e Fluidos da Universidade Federal de Goiás, LATEF, tem-se dedicado ao desenvolvimento dessa ferramenta computacional. Monteiro e Mariano³⁶ utilizaram esta metodologia na modelagem de escoamentos bidimensionais sobre aerofólios e em turbinas eólicas verticais. O escoamento sobre o aerofólio NACA 0012 com um ângulo de ataque nulo foi utilizado na validação da metodologia com $Re = 1000$. Os coeficientes de arrasto e de sustentação obtidos foram comparáveis a literatura assim como o número de Strouhal obtido. Também foi explorado o comportamento do escoamento em relação a variação do ângulo de ataque desse aerofólio. Além disso, a modelagem bidimensional do escoamento sobre uma turbina com três pás para $Re = 100$ foi implementada em que o giro do equipamento foi imposto segundo modelo matemático e os resultados obtidos, coeficientes adimensionais da força tangencial e normal ou os campos de velocidade, foram comparados com outros resultados computacionais e considerados convergentes entre si e com acurácia promissora.

Desde sua apresentação o IMERSPEC foi utilizado nas mais diversas modelagens, todavia, nunca para escoamentos parietais, como por exemplo, escoamento sobre a placa plana. Com base nisso, o principal interesse no presente trabalho é aplicar essa ferramenta nesse tipo de modelagem, explorando as características de implementação e seus respectivos desafios, ao passo que possa-se posteriormente, em outros trabalhos, estender os resultados para a modelagem de escoamentos parietais mais complexos.

3 METODOLOGIA

Neste capítulo é apresentada a metodologia híbrida do Método pseudoespectral de Fourier com o Método da Fronteira Imersa denominado por IMERSPEC. Para maior compreensão do IMERSPEC o capítulo é subdividido em: modelagem matemática, Método da Fronteira Imersa (MFI), Método pseudoespectral de Fourier (MPF) e aspectos numérico-computacionais. Essa última seção é necessária para apresentar mecanismos necessários a implementação discreta do MPF assim como o detalhamento do método de avanço temporal empregado no código computacional. A Metodologia IMERSPEC pode ser vista com maior especificidade nos trabalhos de Mariano³⁰, Moreira³², Nascimento⁸ e Kinoshita⁷.

3.1 Modelagem Matemática

3.1.1 Equação da Continuidade

A equação da continuidade ou equação da conservação da massa em sua forma diferencial é obtida através da aplicação do teorema de transporte de Reynolds (TTR) aplicado em um volume cartesiano infinitesimal.

A equação 3.1³⁷ apresenta a fórmula geral do teorema de transporte de Reynolds para um volume de controle fixo e arbitrário,

$$\frac{d}{dt} (B_{sist.}) = \frac{d}{dt} \left(\int_{V.C.} \beta \rho d\mathcal{V} \right) + \int_{S.C.} \beta \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA, \quad (3.1)$$

onde $B_{sist.}$ se refere a uma propriedade de interesse (massa, momento linear, momento angular ou energia); β representa a propriedade intensiva referente a $B_{sist.}$; ρ a massa específica do fluido; $d\mathcal{V}$ o termo que representa o volume infinitesimal; e \vec{n} refere-se a um vetor unitário normal a superfície em que o TTR é aplicado. O subscrito *sist.* se refere a uma variável do sistema, o termo *V.C* representa volume de controle e *S.C.* superfície de controle.

Aplicando $B_{sist.}/dt = dm/dt = 0$ e $\beta = dm/dm = 1$ na equação 3.1 tem-se a equação 3.2. A equação é igual a 0 pois a massa de um fluido não pode variar dentro de um sistema, *i.e.*, é sempre constante.

$$\left(\frac{dm}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\int_{V.C.} \rho d\mathcal{V} \right) + \int_{S.C.} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = 0 \quad (3.2)$$

A Equação 3.2 transforma-se na Eq. 3.3 considerando que o volume de controle seja fixo e que apenas haja fluxos de massa unidimensionais nas entradas e/ou saídas das

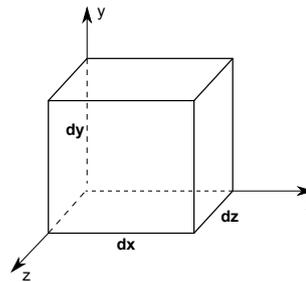
superfícies de controle.

$$\int_{V.C.} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \sum_i (\rho_i A_i V_i)_s - \sum_i (\rho_i A_i V_i)_e = 0 \quad (3.3)$$

Os subscritos i , s e e indicam, respectivamente, o número de fluxos mássicos nas superfícies de controle, fluxo mássico saindo e fluxo mássico entrando na superfície de controle.

A forma final da propriedade massa (m) aplicada ao TTR é apresentada na Eq. 3.3, nesta forma pode-se determinar fluxos mássicos grosseiros em escoamentos. Apesar de uma poderosa ferramenta esse abordagem não é a desejada neste trabalho, o objetivo é detalhar a propriedade considerada em todos os pontos do escoamento na chamada abordagem diferencial. Para se obter a equação da conservação de massa em sua forma diferencial, aplica-se a Eq. 3.3 em um elemento cartesiano infinitesimal (Fig. 12) com dimensões dx , dy , dz .

Figura 12 – Elemento Infinitesimal



Fonte: Próprio Autor

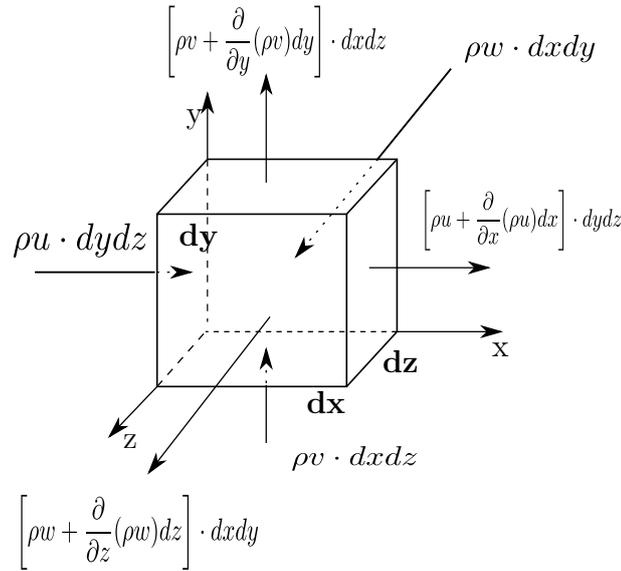
A integral da Eq. 3.3 se reduz a um termo diferencial devido aos valores infinitesimais do volume considerado (Fig. 12).

$$\int_{V.C.} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \quad (3.4)$$

O fluxo de massa sobre cada face do elemento infinitesimal é unidimensional. Assume-se que é conhecido os termos ρu , ρv e ρw . As propriedades ρ , u , v e w são lineares ao longo do tempo e do espaço segundo a hipótese do contínuo. As funções multiplicação de ρ com cada componente de \vec{V} , portanto, podem ser aproximadas em cada respectiva face seguinte referente, segundo a expansão em série de Taylor. A expansão de uma função em série de Taylor será aproximada para cada termo $\rho \cdot \vec{V}$ desprezando-se ordem superiores ou iguais a 2. Sendo assim, a função ρu , por exemplo, pode ser aproximada pela Eq. 3.5.

$$\rho u \approx \rho u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx \quad (3.5)$$

Figura 13 – Distribuição de $\rho \vec{V} dA$ em um volume infinitesimal



Fonte: Próprio Autor

A figura 3.5 apresenta os fluxos de massa em cada direção e sentido presentes no elemento infinitesimal e abaixo apresenta-se o balanço dos fluxos mássicos no elemento infinitesimal.

$$\sum_i (\rho_i A_i V_i)_s - \sum_i (\rho_i A_i V_i)_e = \left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dx \right] dy dz - \rho u dy dz +$$

$$+ \left[\rho v + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) dy \right] dx dz - \rho v dx dz + \left[\rho w + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) dz \right] dx dy - \rho w dx dy \quad (3.6)$$

Substituindo o balanço de fluxos mássicos e a Eq. 3.4 na Eq. 3.3 chega-se na Eq. 3.7 onde os termos $dx dy dz$ são comuns a todos os termos e podem ser simplificados.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) dx dy dz = 0 \quad (3.7)$$

A equação da continuidade é apresentada na Eq. 3.8, essa equação é válida para qualquer escoamento que siga a hipótese do contínuo e pode ser utilizada em escoamento incompressíveis com propriedades constantes, assim, respectivamente, o termo $\partial \rho / \partial t = 0$ e todos os termos ρ saem das derivadas. A soma das derivadas de cada componente da velocidade avaliadas em sua respectiva direção é definida como divergente da velocidade.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (3.8)$$

A Eq. 3.9 apresenta a equação da continuidade de um escoamento incompressível com propriedades constantes.

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (3.9)$$

A forma tensorial da Equação de continuidade é a Eq. 3.10,

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.10)$$

em que u_j é a velocidade do escoamento em $[m/s]$, x_j a sua posição no espaço em $[m]$, para $j = 1$ e 2 .

3.1.2 Equações da Quantidade de Movimento Linear

Aplicando a Eq. 3.1 para $B_{sist.} = m\vec{V}$ e $\beta = dB_{sist.}/dm = \vec{V}$ em um volume de controle qualquer tem-se a Eq. 3.11.

$$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{V.C.} \vec{V} \rho d\mathcal{V} \right) + \int_{S.C.} V \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \quad (3.11)$$

Ao aplicar a Eq. 3.11 em um volume de controle infinitesimal o termo contendo a integral pode ser aproximado para a forma presente na Eq. 3.12.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{V.C.} \rho \vec{V} d\mathcal{V} \right) \approx \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) \cdot dxdydz \quad (3.12)$$

Conforme as aproximações realizadas no desenvolvimento da equação de continuidade, assume-se que todos os fluxos pelas superfícies de controle sejam aproximadamente unidimensionais e que os seguintes fluxos sejam conhecidos: $\rho u \vec{V}$, $\rho v \vec{V}$ e $\rho w \vec{V}$. Os valores dos demais fluxos em cada face são aproximados segundo a expansão de Taylor desprezando os termos superiores ou iguais a 2, a Eq. 3.13 ilustra um exemplo de aproximação pela série de Taylor a partir da função $\rho u \vec{V}$. A figura 14 apresenta o volume infinitesimal considerado todos os fluxos em toda superfície de controle.

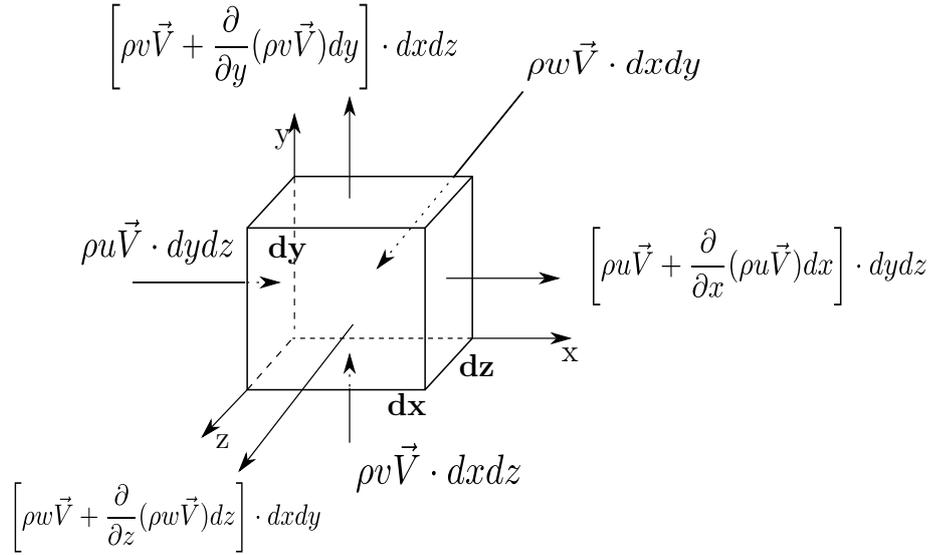
$$\rho u \vec{V} \approx \rho u \vec{V} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \vec{V}) dx \quad (3.13)$$

Realizando o balanço de fluxos da fig. 14 e aplicando a aproximação da Eq. 3.13 na Eq. 3.12 tem-se a Eq. 3.14.

$$\sum \vec{F} = \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \vec{V}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \vec{V}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w \vec{V}) \right]}_A dxdydz \quad (3.14)$$

O termo A representa todos os termos entre colchetes, cada um dos termos podem ser desenvolvidos pela regra da cadeia (Eq. 3.15) e reagrupados para expressões conhecidas (Eq. 3.16).

Figura 14 – Distribuição dos produtos entre o momento linear e os elementos de área



Fonte: Próprio Autor

$$A = \underbrace{\vec{V} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \rho \frac{\partial}{\partial t} \vec{V}}_{\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V})} + \underbrace{\vec{V} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \rho u \frac{\partial}{\partial x} \vec{V}}_{\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \vec{V})} + \underbrace{\vec{V} \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \rho v \frac{\partial}{\partial y} \vec{V}}_{\frac{\partial}{\partial y}(\rho v \vec{V})} + \underbrace{\vec{V} \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) + \rho w \frac{\partial}{\partial z} \vec{V}}_{\frac{\partial}{\partial z}(\rho w \vec{V})} \quad (3.15)$$

$$A = \underbrace{\vec{V} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \right]}_{EC=0} + \rho \underbrace{\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right]}_{\rho \frac{d}{dt} \vec{V}} \quad (3.16)$$

O termo A simplificado na Eq. 3.16 é substituído na Eq. 3.14.

$$\sum \vec{F} = \rho \frac{d}{dt} \vec{V} dx dy dz \quad (3.17)$$

As forças envolvidas em um volume de controle podem ser de dois tipos: forças de campo ou forças de superfícies³⁷. Forças de campo são decorrente de algum campo e atuam em todo volume de controle, neste trabalho a única força de campo considerada será a força gravitacional. A Eq. 3.18 modela essa força em um volume infinitesimal,

$$d\vec{F}_g = \rho \vec{g} dx dy dz \quad (3.18)$$

onde \vec{g} se refere ao vetor gravidade.

De acordo com Çengel e Cimbala³⁸, as forças de superfície agem sobre uma superfície de controle como, por exemplo, a pressão, forças viscosas e forças de reação em pontos de contato.

As forças de superfície podem ser modeladas segundo um tensor de segundo grau (Eq. 3.19) contendo tensões. Forças de superfície são fisicamente independentes da orientação de coordenadas em referência mas cada componente tem sua descrição variável de acordo com a orientação das coordenadas adotadas, sendo necessário assim um tensor de segundo grau para modelar corretamente essas forças.

As forças de superfície são causadas pelas tensões presentes na superfície de controle. Essas tensões são formadas pela soma das pressões hidrostáticas mais as tensões viscosas τ_{ij} que surgem do movimento do fluido.

O subscrito i representa um vetor normal a direção i enquanto o termo j representa a direção da força considerada. Valores positivos dentro do tensor indicam que as forças estão aplicadas no mesmo sentido dos eixos adotados enquanto valores negativos indicam forças aplicadas em sentido contrário aos eixos de referência.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p^* + \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & -p^* + \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & -p^* + \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Os componentes da diagonal principal do tensor de tensões, σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{zz} são tensões normais compostas pela pressão e por tensões viscosas. Os componentes fora da diagonal principal do tensor são tensões de cisalhamento e não tem nenhum termo referente a pressões, já que estas só atuam apenas na direção normal a face considerada.

Embora o tensor de segundo grau descreva satisfatoriamente os estados de tensões nas três direções do volume de controle, a força resultante provém do balanço de forças superficiais ao longo do volume infinitesimal. Este balanço é obtido pelo gradiente das tensões atuantes no volume de controle.

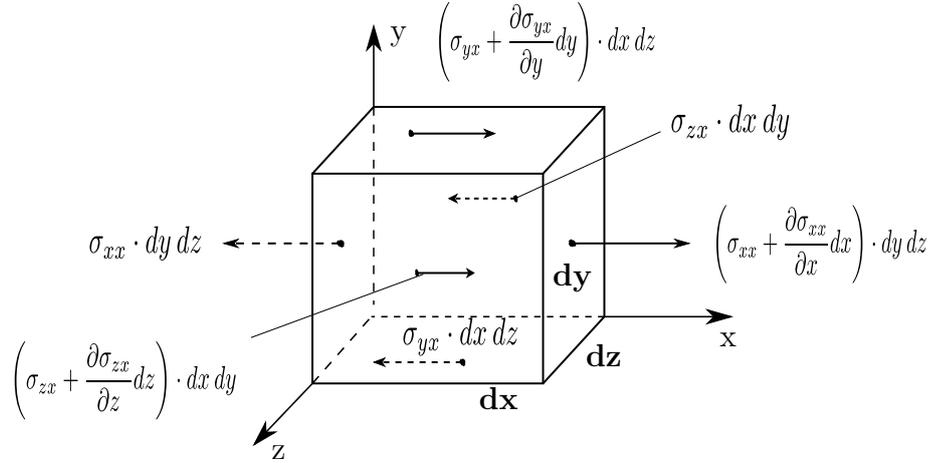
A figura 15 apresenta três tensões conhecidas normais a direção x e as suas respectivas aproximações segundo a expansão das séries de Taylor desprezando ordens superiores ou iguais a 2. Destaca-se que as aproximações podem ser feitas para as demais seis tensões, entretanto caso adicionada, o esquema da figura 15 ficaria carregado.

A partir do balanço das tensões na direção x da fig. 15 tem-se a Eq. 3.20.

$$dF_{x,sup} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{zx}) \right] dx dy dz \quad (3.20)$$

De acordo com a Eq. 3.19 $\sigma_{xx} = -p^* + \tau_{xx}$, $\sigma_{yx} = \tau_{yx}$ e $\sigma_{zx} = \tau_{zx}$. As relações mencionadas são substituídas na Eq. 3.20 originando a Eq. 3.21.

$$dF_{x,sup} = \left[-\frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}) \right] dx dy dz \quad (3.21)$$

Figura 15 – Balanço de tensões na direção x 

Fonte: Próprio Autor

Aplicando o mesmo desenvolvimento para as tensões na direção y e z tem-se, respectivamente, as Eq. 3.22 e 3.23.

$$dF_{y,sup} = \left[-\frac{\partial p^*}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zy}) \right] dx dy dz \quad (3.22)$$

$$dF_{z,sup} = \left[-\frac{\partial p^*}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zz}) \right] dx dy dz \quad (3.23)$$

O termo dF representado pelos seus três componentes nas Eq. 3.21, 3.22 e 3.23 podem ser condensados para a Eq. 3.24.

$$dF_{sup} = \left(-\vec{\nabla} p^* + \vec{\nabla} \cdot \tau_{ij} \right) dx dy dz \quad (3.24)$$

Substituindo as Eq. 3.18 e 3.24 na Eq. 3.17 gerando a 3.25. Como o termo $dx dy dz$ é comum a ambos os membros da equação, ele pode ser simplificado.

$$\left(-\vec{\nabla} p^* + \vec{\nabla} \cdot \tau_{ij} + \rho \vec{g} \right) dx dy dz = \rho \frac{d}{dt} \vec{V} dx dy dz \quad (3.25)$$

A forma final da Eq. 3.25 é apresentada na Eq. 3.26, essa equação é chamada de equação de Cauchy. A equação de Cauchy é uma forma diferencial geral para conservação de momento linear que é válida para todo o domínio do escoamento de um fluido seja ele newtoniano ou não-newtoniano, compressível ou incompressível³⁸.

$$-\vec{\nabla} p^* + \vec{\nabla} \cdot \tau_{ij} + \rho \vec{g} = \rho \frac{d}{dt} \vec{V} \quad (3.26)$$

Considerando que possa haver outras forças envolvidas no elemento infinitesimal além das forças devido ao divergente das tensões viscosas ($\vec{\nabla} \cdot \tau_{ij}$), ao gradiente da pressão

($\vec{\nabla} p^*$) ou devido a gravidade ($\rho \vec{g}$) é adicionado um termo f^* que representa qualquer outra força que possa estar presente no domínio do escoamento analisado.

$$-\vec{\nabla} p^* + \vec{\nabla} \cdot \tau_{ij} + \rho \vec{g} + f^* = \rho \frac{d}{dt} \vec{V} \quad (3.27)$$

Considerando escoamentos newtonianos, assume-se que todas as tensões viscosas são proporcionais a viscosidade e a taxa de deformação do elemento considerado. As Eq. 3.28 apresentam todas as tensões viscosas para um fluido newtoniano.

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} & \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Abrindo o termo do divergente das tensões e substituindo as relações das Eq. 3.28 tem-se o conjunto das Eq. 3.29.

$$\vec{\nabla} \cdot \tau_{ij} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (2\mu \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} [\mu (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})] + \frac{\partial}{\partial z} [\mu (\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})] \\ \frac{\partial}{\partial x} [\mu (\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})] + \frac{\partial}{\partial y} (2\mu \frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} [\mu (\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y})] \\ \frac{\partial}{\partial x} [\mu (\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z})] + \frac{\partial}{\partial y} [\mu (\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z})] + \frac{\partial}{\partial z} (2\mu \frac{\partial w}{\partial z}) \end{cases} \quad (3.29)$$

Considerando que as funções u , v e w são funções suaves as derivadas mistas são iguais, *i. e.*, $\partial/\partial y(\partial u/\partial x) = \partial/\partial x(\partial u/\partial y)$, por exemplo. Aplicando essa ideia e admitindo que o escoamento seja incompressível, as expressões das Eq. 3.29 podem ser reorganizadas.

$$\vec{\nabla} \cdot \tau_{ij} = \begin{cases} \mu \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right] \\ \mu \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \right] \\ \mu \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \right] \end{cases} \quad (3.30)$$

A partir das Eq. 3.30 as tensões viscosas podem ser reescritas segundo a Eq. 3.31 e essa notação pode ser substituída na Equação de Cauchy. O resultado dessa substituições são as Equações de Navier-Stokes (Eq. 3.32). As equações aqui desenvolvidas são aplicadas para escoamentos newtonianos e incompressíveis.

$$\vec{\nabla} \cdot \tau_{ij} = \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (3.31)$$

$$\rho \frac{d}{dt} \vec{V} = -\vec{\nabla} p^* + \mu \nabla^2 \vec{V} + \rho \vec{g} + f^* \quad (3.32)$$

Dividindo todos os termos da Eq. 3.32 por ρ e abrindo a derivada material de \vec{V} tem-se a Eq. 3.33:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{V} + \nabla \cdot (\vec{V} \otimes \vec{V}) = -\vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{V} + f, \quad (3.33)$$

onde $p = p^*/\rho + \vec{g} \cdot \vec{p}\vec{o}$; p é a pressão estática em N/m^2 ; $\vec{p}\vec{o}$ é o vetor posição; \vec{g} é o vetor gravidade na direção vertical e sentido oposto ao positivo (para cima); $f = f^*/\rho$ é o termo fonte resultante da divisão pela massa específica ρ .

A forma tensorial da Eq. 3.33 é a Eq. 3.34,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i, \quad (3.34)$$

onde t representa o tempo físico em $[s]$, ρ é a massa específica do fluido em $[kg/m^3]$, p a pressão estática em $[N/m^2]$, ν é a viscosidade cinemática do fluido em $[m^2/s]$ e f_i representa um termo fonte, $[kg/(m^2 \cdot s^2)]$, dividido pela massa específica do fluido, em $[kg/m^3]$, logo, se encontra em $[m/s^2]$.

Na Equação 3.34, o termo advectivo é reescrito, em relação a Eq. 3.33, na sua forma antissimétrica. Matematicamente, para escoamentos incompressíveis, a forma divergente, $\frac{\partial(u_j u_i)}{\partial x_j}$, é equivalente a forma não divergente, $u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, entretanto isso não ocorre para as suas respectivas formas discretas. Assim, utiliza-se a média entre as duas formas, forma antissimétrica, para estabilidade numérico-computacional conforme apresentado por Canuto et al.³⁹ e validado para a metodologia IMERSPEC no trabalho de Mariano⁴.

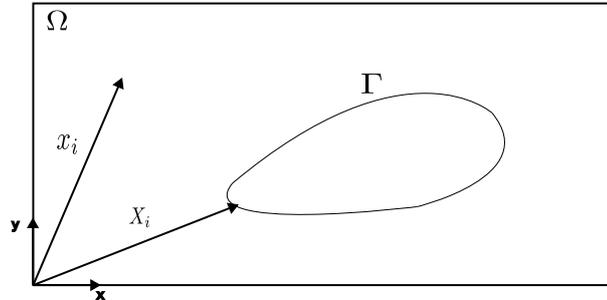
3.2 Método da Fronteira Imersa

Na abordagem IMERSPEC, utiliza-se o método da fronteira imersa (MFI), o qual faz uso de dois domínios de cálculo: um euleriano (Ω) e um lagrangeano (Γ). Em Ω são resolvidas computacionalmente as Eq. 3.10 e 3.34 através do Método pseudoespectral de Fourier (MPF) e em Γ , as condições de contorno do escoamento modelado são impostas através de interfaces. Dependendo do escoamento modelado, Γ pode representar uma interface de um sólido fixo com um fluido ou a interface entre dois tipos de fluidos.

Na Figura 16 são apresentados os dois domínios de cálculo sob uma perspectiva geral, destaca-se que as variáveis maiúsculas representam as incógnitas lagrangianas e as

minúsculas, as incógnitas eulerianas. As interfaces representadas em Γ se tornam linhas e superfícies, respectivamente, em modelagens bidimensionais e tridimensionais. Com base nisso, a Fig. 16 ilustra uma abordagem bidimensional.

Figura 16 – Esquema dos domínios Ω e Γ na modelagem de um escoamento qualquer.



Fonte: Próprio autor.

Conforme já explicitado o MFI opera com dois domínios de cálculo, sendo assim deve haver comunicação entre os dois domínios. A troca de informações entre Γ e Ω é feita através do termo fonte f_i da Eq. 3.34 e é definido como:

$$f_i(x_i, t) = \begin{cases} F(X_i, t) & \text{se } x_i = X_i \\ 0 & \text{se } x_i \neq X_i \end{cases}, \quad (3.35)$$

em que $F(X_i, t)$ representa o termo correspondente em Γ . Destaca-se que acontece a transferência de informação entre os domínios apenas quando há coincidência de pontos e portanto o termo f_i é descontínuo.

Em casos onde não há coincidência de pontos entre Ω e Γ , distribui-se o termo fonte $F_i(X_i, t)$ em relação a sua vizinhança através de uma função distribuição de força. No presente trabalho não foram necessários processos de distribuição ou interpolação já que em todos os escoamentos modelados, a modelagem foi feita com coincidência de pontos entre os domínios. Para uma explicação de modelagens onde são necessários tais processos, sugere-se o trabalho de Mariano³⁰ em que foram realizadas análises sobre esquemas numérico-computacionais de distribuição e interpolação dos termos fontes entre os dois domínios de cálculo sob a perspectiva da metodologia IMERSPEC.

Em Γ ocorre o cálculo de $F_i(X_i, t)$, o IMERSPEC utiliza o método de imposição direta, em inglês *Direct Forcing Method*, (DFM) desenvolvido por Uhlmann⁴⁰. O termo fonte f_i , análogo ao F_i , é obtido isolando-o na Eq. 3.34 e obtendo-se:

$$f_i(x_i, t) = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (3.36)$$

A Equação 3.36 é aplicada em Ω e uma das considerações que foram usadas em seu desenvolvimento foi a hipótese do contínuo. Conforme já mencionado, sabe-se que o

domínio Γ está contido em Ω , portanto as hipóteses válidas à Eq. 3.36 também são aplicáveis para Γ . Assim, a Eq. 3.36 pode ser reescrita no domínio lagrangiano:

$$F_i(X_i, t) = \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(U_i U_j)}{\partial X_j} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X_j} - \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j \partial X_j}, \quad (3.37)$$

em que as variáveis em letras maiúsculas representam essas informações em Γ .

Para fins didáticos do MFI, discretiza-se a derivada temporal da Eq. 3.37 com um esquema de Euler explícito e condensa-se os demais termos da expressão em uma variável denominada por RHS_i^t , do inglês *Right Hand Side* chegando-se a Eq. 3.38,

$$F_i(x_i, t) = \frac{U_i^{t+\Delta t} - U_i^t}{\Delta t} + RHS_i^t, \quad (3.38)$$

onde Δt é o incremento temporal.

O DFM consiste na adição e subtração de um parâmetro temporário, U_i^* , na Eq. 3.38 resultando-se em:

$$F_i(x_i, t) = \frac{U_i^{t+\Delta t} + U_i^* - U_i^* - U_i^t}{\Delta t} + RHS_i^t. \quad (3.39)$$

Com base na inserção e retirada de U_i^* pode-se subdividir a Eq. 3.39 em duas expressões:

$$\frac{U_i^* - U_i^t}{\Delta t} + RHS_i^t = 0, \quad (3.40)$$

$$F_i(X_i, t) = \frac{U_i^{t+\Delta t} - U_i^*}{\Delta t}. \quad (3.41)$$

Destaca-se novamente que Γ está contido em Ω e portanto tudo que foi desenvolvido no domínio lagrangiano, principalmente as Eq. 3.40 e 3.41, também se torna aplicável no domínio euleriano. Sendo assim, pode-se utilizar uma equação análoga a Eq. 3.40 no domínio euleriano para se estimar um parâmetro temporário u_i^* . A Equação 3.42,

$$\frac{u_i^* - u_i^t}{\Delta t} + rhs_i^t = 0 \rightarrow u_i^* = u_i^t - \Delta t \, rhs_i^t, \quad (3.42)$$

apresenta a expressão análoga à Eq. 3.40 e a sua respectiva forma quando isola-se o parâmetro temporário euleriano.

Após a determinação de u_i^* em Ω , ocorre a transferência dessa informação de Ω para a interface imersa, Γ , de maneira similar a apresentada pela Eq. 3.35, *i.e.*,

$$u_i^* = \begin{cases} U_i^* & \text{se } x_i = X_i \\ 0 & \text{se } x_i \neq X_i \end{cases}. \quad (3.43)$$

Com o parâmetro temporário em Γ , U_i^* , pode-se determinar $F_i(X_i, t)$ com o auxílio da Eq. 3.41, pois o termo $U_i^{t+\Delta t}$ representa a velocidade desejada na interface imersa, U_i^{IM} . Essa velocidade U_i^{IM} é conhecida para modelagens onde é possível determinar o valor da velocidade na interface previamente, como por exemplo na modelagem de um escoamento sobre uma placa plana em que na superfície $U_i^{IM} = 0 \text{ m/s}$, ou é obtida por algum modelo que rege a interface imersa em modelagens do tipo interação fluido-fluido ou fluido-estrutura.

Com base que $U_i^{t+\Delta t} = U_i^{IM}$ e por razões didáticas na explicação do DFM, reescreve-se a Eq. 3.41 com essa atualização:

$$F_i(X_i, t) = \frac{U_i^{IM} - U_i^*}{\Delta t}. \quad (3.44)$$

Definido o termo fonte lagrangiano, $F_i(X_i, t)$, essa informação é passada ao domínio euleriano de acordo com a Eq. 3.35 e é utilizada para a determinação de $u_i^{t+\Delta t}$ através da Eq. 3.45,

$$f_i(x_i, t) = \frac{u_i^{t+\Delta t} - u_i^*}{\Delta t} \rightarrow u_i^{t+\Delta t} = u_i^* + \Delta t f_i(x_i, t), \quad (3.45)$$

em que a Eq. 3.45 é análoga à Eq. 3.41 e foi aplicada em Ω sob a hipótese do contínuo.

Comparando-se o DFM com o método preditor-corretor, o parâmetro temporário u_i^* pode ser compreendido como um campo de velocidade predita ou estimada, *i.e.*, é a solução das equações de *momentum* linear sem a influência do termo fonte³⁰. Após a determinação de $f_i(x_i, t)$, corrige-se então u_i^* obtendo-se o campo $u_i^{t+\Delta t}$.

Apesar da utilização de um esquema de Euler explícito na explicação do DFM, esse não é o método utilizado no IMERSPEC. O avanço temporal é feito através do Método de Runge-Kutta de 4^a Ordem com 6 Passos (RK46) proposto por Allampalli et al.⁴¹ a ser explicado ao longo deste capítulo.

A velocidade do escoamento de fluido sobre a interface imersa deveria ser igual a U_i^{IM} segundo o desenvolvimento do DFM, porém, isso não ocorre devido aos processos de discretização temporal e espacial envolvidos na solução computacional e, principalmente, pelo processo de satisfazer a equação de balanço de massa (Eq. 3.10). Para aumentar a exatidão do DFM, Wang, Fan e Luo⁴² propuseram o Método de Múltiplas Imposições Diretas, em inglês *Multi Direct Forcing Method*, (MDFM) que representa um aperfeiçoamento do DFM.

A ideia por trás do MDFM é tornar o DFM um processo iterativo até que atinja-se determinado critério pré imposto resultando em $u_i^{t+\Delta t} \rightarrow U_i^{IM}$. Durante a primeira iteração do MDFM, esse método apresenta exatamente os processos descritos para o DFM a exceção

da Eq. 3.45 que ao invés de determinar $u_i^{t+\Delta t}$ define u_i^{it} , it representa o número de iterações do MDFM.

O campo de velocidades u_i^{it} é então utilizado como parâmetro temporário u_i^* na nova iteração. Com u_i^* transfere-se a informação para o domínio lagrangiano onde há coincidência de pontos, conforme a Eq. 3.43, e então obtêm-se um novo campo de força F_i^{it} .

Com o novo campo de força F_i^{it} determinado, transfere-se essa informação a Ω , conforme a Eq. 3.35, e determina-se u_i^{it+1} através da Eq. 3.46,

$$u_i^{it+1} = u_i^{it} + \Delta t f_i^{it}(x_i, t), \quad (3.46)$$

que se aproxima ainda mais de U_i^{IF} do que u_i^{it} . Esse processo iterativo é realizado NL vezes. Dentro do IMERSPEC utiliza-se, como critério de parada, a máxima diferença das forças lagrangianas entre duas iterações consecutivas adimensionalizadas pela diferença entre as forças calculadas nas duas primeiras iterações³², *i.e.*,

$$\frac{\max |F_i^{it+1} - F_i^{it}|}{\max |F_i^1 - F_i^2|} \leq \varepsilon. \quad (3.47)$$

Esse critério de parada é imposto ao MDFM pois não se sabe qual o número de iterações necessário para se obter um resultado computacional fiel ao fenômeno físico modelado³². No início de cada simulação ou quando o escoamento modelado esta em sua fase transiente são necessárias mais iterações para uma modelagem satisfatória do que quando o escoamento entra em regime permanente. Utilizando o critério da Eq. 3.47, o MDFM fica dependente da máxima diferença entre as velocidades lagrangianas em iterações consecutivas, tendo mais iterações durante o seu regime transiente e, após atingir o regime permanente, diminuindo a quantidade de ciclagens de forma otimizada.

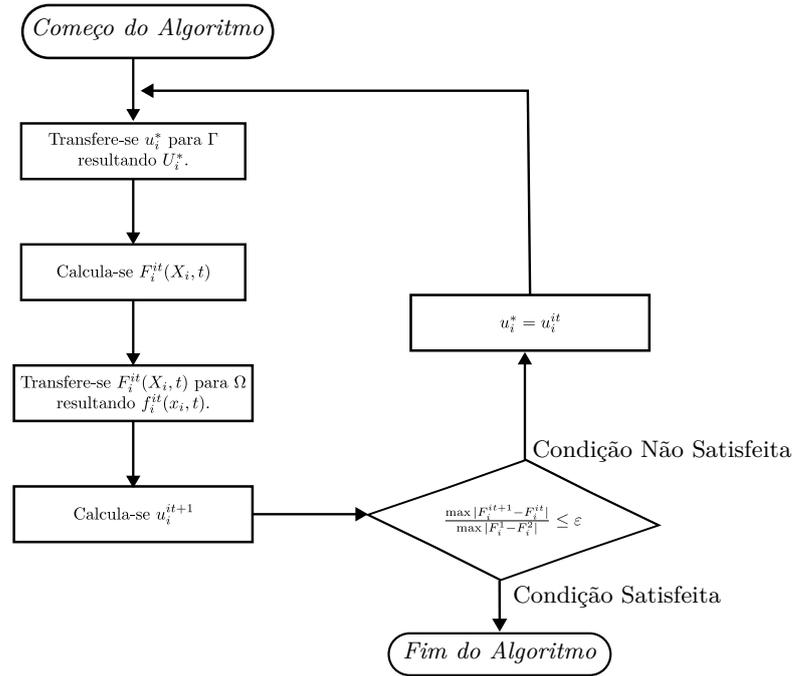
A Figura 17 apresenta um fluxograma do algoritmo MFI utilizando o MDFM. Salienta-se que o algoritmo apresentado é apenas uma porção do IMERSPEC que utiliza o MFI.

A força total aplicada em cada ponto lagrangiano, $F_i^{Total}(X_i, t)$, é a soma das forças, $F_i^{it}(X_i, t)$, em NL vezes atuando em cada ponto lagrangiano⁴²,

$$F_i^{Total}(X_i, t) = \sum_{it=1}^{NL} F_i^{it}(X_i, t). \quad (3.48)$$

Destaca-se que $F_i^{Total}(X_i, t)$ refere-se a força lagrangiana sobre o escoamento e deve ser exatamente igual a força que o escoamento aplica sobre as partículas lagrangianas, porém, com sentido oposto.

Figura 17 – Diagrama de blocos do MFI utilizando o MDFM.



Fonte: Próprio autor.

Nos trabalhos de Uhlmann⁴⁰ e Wang, Fan e Luo⁴² o campo de pressão é calculado para que se satisfaça a Eq. 3.10 entretanto, dentro do IMERSPEC, isso não é necessário pois o Método pseudoespectral de Fourier utiliza uma projeção do campo de velocidades que já garante o balanço de massa intrinsecamente^{30, 32, 8}. Esse método será apresentado na seção 3.3 onde tal fato será melhor explorado.

3.3 Método Pseudoespectral de Fourier

Métodos espectrais de Fourier se baseiam na transformação das variáveis do espaço físico para o espaço espectral ou de Fourier. A transformação de Fourier é feita do espaço físico para o espectral e é apresentada na Eq. 3.49⁴³,

$$\hat{\phi}(\vec{k}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\vec{x}, t) e^{-i2\pi\vec{k}\cdot\vec{x}} d\vec{x}, \quad (3.49)$$

enquanto a transformação inversa de Fourier é feita do espaço espectral para o espaço físico e é explicitada na Eq. 3.50⁴³,

$$\phi(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\vec{k}, t) e^{i2\pi\vec{k}\cdot\vec{x}} d\vec{k}, \quad (3.50)$$

onde \vec{k} são números de onda em $1/m$, ϕ representa uma variável do escoamento modelado no domínio físico, enquanto a mesma informação no domínio espectral corresponde a $\hat{\phi}$.

De acordo com Briggs e Henson⁴³, a utilidade da transformada de Fourier, como qualquer outra transformada, vem da possibilidade de que uma formulação no domínio físico tenha uma forma mais simples em outro domínio, como o espectral. O emprego da transformada de Fourier possibilita que derivadas se tornem produtos de vetores no domínio de Fourier gerando simplicidade e acurácia na resolução das Eq. 3.10 e 3.34. Além disso, normalmente uma equação diferencial parcial é reduzida à uma equação diferencial ordinária.

Apesar das vantagens do Método Espectral de Fourier, existe uma grande desvantagem nessa abordagem denominada convolução que é o produto de convolução entre duas funções transformadas. Dado duas variáveis no domínio físico, ϕ e ψ , o produto entre elas no domínio físico é igual a $\sigma = \phi\psi$, entretanto, essa expressão não se mantém no domínio espectral. O produto entre duas variáveis espectrais no domínio de Fourier é denominado produto de convolução e é definido através da Eq. 3.51,

$$\hat{\sigma}(\vec{k}, t) = [\hat{\phi} * \hat{\psi}](\vec{k}, t) = \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{\phi}(\vec{r})\hat{\psi}(\vec{k} - \vec{r})d\vec{r}, \quad (3.51)$$

em que \vec{r} e \vec{s} são os números de onda de, respectivamente, $\hat{\phi}$ e $\hat{\psi}$.

A convolução é uma desvantagem para métodos espectrais pois possui um alto custo computacional para a sua implementação, assim na abordagem IMERSPEC utiliza-se o MPF em que o produto entre duas variáveis, ϕ e ψ por exemplo, é feita no domínio físico e então o resultado dessa operação é submetida à transformada de Fourier.

Dessa forma, o MPF concilia as vantagens de operações matemáticas no domínio espectral eliminando aquelas operações que sejam desvantajosas, sempre dando importância à acurácia dos resultados e velocidade de processamento. A Equação 3.52 ilustra os passos de MPF quando há um produto entre duas variáveis quaisquer,

$$\hat{\sigma} = \widehat{\phi\psi}. \quad (3.52)$$

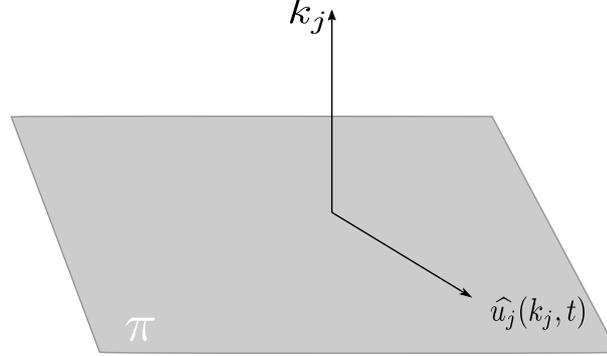
Após a apresentação do MPF e suas principais características, busca-se aplicar esse método às Eq. 3.10 e 3.34. Aplicando a transformada de Fourier e suas propriedades sobre a Eq. 3.10, tem-se a Eq. 3.53,

$$ik_j\widehat{u}_j = 0. \quad (3.53)$$

onde $i = \sqrt{-1}$. Analisando a Eq. 3.53, nota-se que a equação da continuidade no domínio espectral se torna um produto escalar entre o vetor da velocidade espectral, \widehat{u}_j , e o vetor número de onda, k_j . Esse produto escalar resulta em valor nulo, logo, afirma-se, desprezando a solução trivial, que o vetor k_j é perpendicular ao vetor \widehat{u}_j . A fim de explicitar

o MPF, define-se um plano hipotético colinear ao vetor \widehat{u}_j denominado π . A Figura 18 esquematiza a posição de π em relação aos vetores k_j e \widehat{u}_j .

Figura 18 – Esquema do plano π com \widehat{u}_j e k_j .



Fonte: Próprio autor.

A transformada de Fourier junto a suas propriedades também são aplicadas nas equações de *momentum* linear, Eq. 3.34, resultando nas Eq. 3.54,

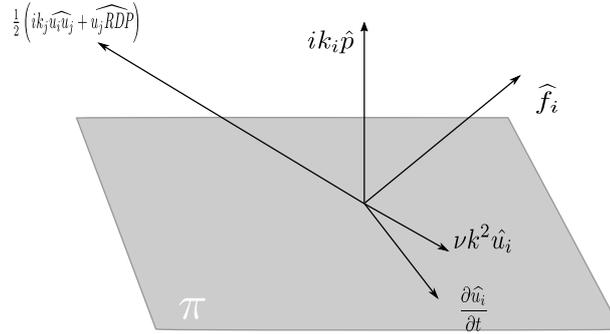
$$\underbrace{\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t}}_I + \underbrace{\frac{1}{2} \left(ik_j \widehat{u}_i \widehat{u}_j + \widehat{u}_j RDP \right)}_{II} = - \underbrace{ik_i \widehat{p}}_{III} - \underbrace{\nu k^2 \widehat{u}_i}_{IV} + \underbrace{\widehat{f}_i}_V, \quad (3.54)$$

em que $k^2 = k_i k_j$ e *RDP* representa o Resultado da Derivada Parcial $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ previamente calculado no domínio espectral e submetido a transformada inversa de Fourier para então ser multiplicado a u_j . Nota-se nos termos advectivos da Eq. 3.54 o processo visto na Eq. 3.52 a fim de evitar-se a resolução de um produto de convolução em cada uma das porções divergente e não divergente da forma antissimétrica.

Analisando a Eq. 3.54 a cerca do plano π , tem-se que o termo *I* refere-se a taxa temporal de mudança de *momentum* linear. Essa taxa temporal é obtida aplicando um operador diferencial que não altera a posição espacial de \widehat{u}_i , portanto, esse termo está contido no plano π .

O termo *II* corresponde ao termo advectivo na sua forma antissimétrica mas nada pode-se afirmar a respeito de sua posição em relação a π . Em relação ao termo *III*, o gradiente de pressão, nota-se que a pressão é uma variável escalar, assim a posição vetorial do termo é a mesma de k_j , *i.e.*, o termo é perpendicular ao plano π . O termo *IV*, modela o comportamento viscoso, e é obtido pelo produto de uma constante, ν , a norma k^2 e o vetor \widehat{u}_i , logo, esse termo também está contido no plano π . O termo *V* representa o termo fonte e nada pode-se afirmar sobre sua posição em relação a π . Com base nas análises das posições dos termos da Eq. 3.54 apresenta-se a Fig. 19 onde estão ilustrados os termos da Eq. 3.54 em relação ao plano π .

Figura 19 – Esquema do plano π em relação aos termos das equações de *Momentum Linear*.



Fonte: Próprio autor.

Reorganizando os termos nas Eq. 3.54 com base em suas respectivas posições em relação a π , tem-se a Eq. 3.55,

$$\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu k^2 \right) \widehat{u}_i}_{\in \pi} + \left[\frac{1}{2} \left(ik_j \widehat{u}_i \widehat{u}_j + \widehat{u}_j RDP \right) + ik_i \widehat{p} - \widehat{f}_i \right] = 0. \quad (3.55)$$

De acordo com a geometria analítica, dois vetores são colineares se a soma desses vetores é nula. Analisando a Eq. 3.55 nota-se que a soma entres os termos que pertencem a π e os demais é nula, assim, pode-se afirmar que o vetor resultante da soma dos termos *II*, *III* e *V* pertence ao plano π .

Embora a soma dos termos *II*, *III* e *V* pertence ao plano π deseja-se projetar esses termos ao plano em questão para que possa-se desacoplar o campo de pressão da solução numérico-computacional. Essa operação matemática é feita a partir de um tensor projeção, φ_{ij} , definido como:

$$\varphi_{ij} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}, \quad (3.56)$$

onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad (3.57)$$

é do delta de Kronecker. Silveira Neto⁴⁴ verifica, de acordo com a Eq. 3.56, que o tensor φ_{ij} é responsável por projetar um vetor qualquer sob o plano π .

Conforme já apresentado, a soma dos termos *II*, *III* e *V* devem pertencer ao plano π e qualquer vetor que sofre a projeção de φ_{ij} também pertence a este plano. Logo, chega-se a Eq. 3.58,

$$\left[\frac{1}{2} \left(ik_j \widehat{u_i u_j} + \widehat{u_j RDP} \right) + ik_i \widehat{p} - \widehat{f_i} \right] = \varphi_{im} \left[\frac{1}{2} \left(ik_j \widehat{u_m u_j} + \widehat{u_j RDP} \right) + ik_m \widehat{p} - \widehat{f_m} \right], \quad (3.58)$$

em que a expressão pode ser simplificada considerando que a projeção de um vetor perpendicular sobre o plano π é nula. Assim, a Eq. 3.58 resulta na Eq. 3.59

$$\left[\frac{1}{2} \left(ik_j \widehat{u_i u_j} + \widehat{u_j RDP} \right) + ik_i \widehat{p} - \widehat{f_i} \right] = \varphi_{im} \left[\frac{1}{2} \left(ik_j \widehat{u_m u_j} + \widehat{u_j RDP} \right) - \widehat{f_m} \right]. \quad (3.59)$$

Substituindo a Eq. 3.59 na Eq. 3.55 e isolando-se o termo transiente da expressão, tem-se:

$$\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t} = \nu k^2 \widehat{u}_i - \varphi_{im} \left[\underbrace{\frac{1}{2} \left(ik_j \widehat{u_m u_j} + \widehat{u_j RDP} \right)}_{TNL} - \widehat{f_m} \right], \quad (3.60)$$

onde TNL representa o termo não linear da equação. A aplicação da projeção na Eq. 3.60 tem dois aspectos significativos. O primeiro é que a equação da continuidade é satisfeita por essa operação já que os vetores resultantes estão contidos no plano π e perpendiculares ao vetor número de onda, k_j , tal qual apresentado pela Eq. 3.53.

O segundo aspecto é relacionado ao termo de pressão. O gradiente de pressão se torna uma propriedade de pós processamento já que a projeção é responsável por desacopla-la das equações de *momentum* linear. Conforme apresentado em Mariano³⁰, Moreira³² e Nascimento⁸ o campo de pressão espectral pode ser determinado posteriormente ao cálculo das velocidades por meio da Eq. 3.61,

$$\widehat{p}(k_i) = \frac{ik_m}{k^2} \left[\frac{1}{2} \left(ik_j \widehat{u_m u_j} + \widehat{u_m RDP} \right) - \widehat{f_m}(k_i) \right], \quad (3.61)$$

e, através da transformada inversa de Fourier, Eq. 3.50, determina-se o campo de pressão no espaço físico.

3.4 Aspectos Numérico-Computacionais

Como no presente trabalho busca-se modelar escoamentos através de uma abordagem computacional, as Eq. 3.49 e 3.50 são utilizadas em suas formas discretas denominadas por Transformada Discreta de Fourier, em inglês *Discrete Fourier Transform*, (DFT)⁴³,

$$\widehat{\phi}_k = \sum_{n=\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \phi_n e^{-\frac{i2k_n \pi}{N}} \quad (3.62)$$

e por Transformada Discreta Inversa de Fourier, em inglês *Inverse Discrete Fourier Transform*, (IDFT)⁴³,

$$\phi_n = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} \hat{\phi}_k k_N^{nk}, \quad (3.63)$$

em que ϕ_n é a informação ϕ discretizada no domínio físico com n nós de colocação e $\hat{\phi}_k$ se refere a mesma informação discretizada no domínio espectral; n representa a posição x_n dos nós de colocação já que $x_n = n\Delta x$; $\Delta x = \frac{L_x}{N}$ e N é o número de pontos que o domínio computacional foi discretizado na direção x .

A aplicação de um algoritmo computacional baseado nas Eq. 3.62 e 3.63 é computacionalmente caro, pois N^2 operações são feitas para cada variável que é transformada. Por outro lado, o algoritmo denominado por transformada rápida de Fourier, do inglês *Fast Fourier Transform*, (FFT) consegue reduzir de N^2 operações para $N \log_2 N$ operações explorando periodicidade e simetria de funções trigonométricas⁴⁵. Devido ao seu menor custo computacional, utiliza-se a FFT dentro do código computacional já que a abordagem pseudoespectral na solução computacional da Eq. 3.60 implica em diversas operações de transformada e transformada inversa de Fourier em um mesmo instante temporal t .

Apesar da redução do custo computacional causada pelo uso da FFT, esse algoritmo só é aplicado em malhas computacionais uniformes, o que invalida procedimentos usuais de refinamento de malha local dentro do IMERSPEC. Outro destaque do uso da FFT é a imposição de condições de periodicidade a função que será transformada. Dessa maneira, todo escoamento modelado pelo IMERSPEC passa a ser periódico e artifícios específicos devem ser utilizados a fim de evitar periodicidades indesejadas.

A aplicação da FFT depende da determinação dos números de onda k_i ,

$$k_i(n) = \begin{cases} \frac{2\pi}{L_i}(n-1) & 1 \leq n \leq \frac{N}{2} + 1 \\ \frac{2\pi}{L_i}(n-1-N) & \frac{N}{2} + 2 \leq n \leq N \end{cases}, \quad (3.64)$$

onde k_i é o componente i do vetor número de onda; N é o número de nós de colocação em dada direção; L_i é o comprimento do domínio na dada direção; e n representa a posição no vetor. Além do uso do vetor na aplicação da FFT, k_i também é necessário para algumas operações no domínio de Fourier, como por exemplo, o cálculo de derivadas.

A fim de transformar escoamentos aperiódicos em periódicos, necessário devido ao uso da FFT, tem-se dois métodos possíveis: o método de *buffer* ou o método *fringe*. Ambos os métodos são impostos dentro do IMERSPEC através do termo fonte da Eq. 3.60 para uma região do escoamento específica, uma zona, denominada por domínio complementar. Nessa porção do domínio o termo fonte é definido através da Eq. 3.65,

$$f_i = \Psi(u_i - Qt x_i), \quad (3.65)$$

em que Ψ é uma função de amortecimento suave, responsável pela intensidade da imposição de ambos os métodos sob o escoamento modelado, que apresenta mínimo igual a 0 e máximo igual a unidade; u_i é a velocidade do fluido no instante t ; e $Qt x_i$ são as soluções alvo desejada na direção x_i .

No domínio complementar são utilizados artifícios para que escoamentos aperiódicos sejam modelados. A porção do domínio onde é modelado o fenômeno físico de interesse recebe a nomenclatura de domínio útil. Portanto, o domínio computacional é subdividido em domínio útil e complementar. Destaca-se que no domínio complementar não há modelagem de fenômenos naturais porém, ainda sim, a equação da continuidade é satisfeita nessa zona.

Os dois métodos, *buffer* e *fringe*, são similares já que ambos são implementados segundo a Eq. 3.65 porém a filosofia de periodização de cada método diverge. O método *fringe* introduz um desenvolvimento espacial artificial no domínio complementar que a reestruturação das condições de entrada sejam satisfeitas segundo a conservação da massa do escoamento e minimizando as interfaces do domínio complementar com o domínio útil. Por outro lado, o método *buffer* impõe de forma constante ao longo do domínio complementar a solução desejada no início do domínio útil, entretanto essa imposição é suavizada no início da região complementar devido aos baixos valores de $\Psi(x)$.

O método *fringe* é o método usual em algoritmos que empregam o MPF acoplado a outro tipo de metodologia espacial de alta ordem, como por exemplo, o método espectral de Chebychev utilizado na modelagem de camadas limites^{46, 47, 48}. Neste método a função Ψ é dada pela Eq. 3.66,

$$\Psi(x) = \Psi_{Max} \left[S \left(\frac{x - x_i}{\Delta_{sub}} \right) - S \left(\frac{x - x_f}{\Delta_{des}} + 1 \right) \right] \quad (3.66)$$

em que $\Psi_{Max} = 1$; x_i e x_f são, respectivamente, o início e o fim da zona *fringe*; os parâmetros Δ_{sub} e Δ_{des} definem a forma da função $\Psi(x)$; e $S(x)$ é uma função degrau suave com $S(x) = 0$ para $x < 0$ e $S(x) = 1$ para $x \geq 1$. A forma de $S(x)$ possui derivadas contínuas em todas as ordens para $x \neq 0$ e $x \neq 1$ e é definido pela Eq. 3.67,

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 / \left[1 + \exp \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} \right) \right], & 0 < x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases} \quad (3.67)$$

As soluções alvos nas direções x_i , $Qt x_i$, do método *fringe* tem como característica um desenvolvimento espacial artificial para minimizar o impacto da zona *fringe* a montante

do domínio complementar ⁴⁶. Esse fato será melhor apresentado no capítulo 4.

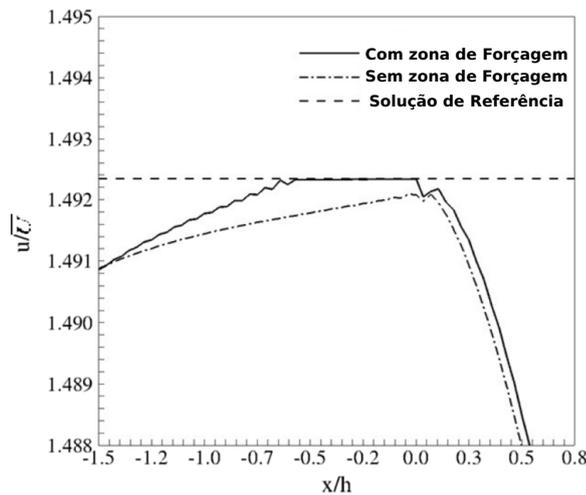
A outra alternativa ao método *fringe* é o método *buffer*. Esse método é comumente utilizado no IMERSPEC ^{30, 32, 8, 7} e é caracterizado pela função $\Psi(x)$,

$$\Psi(x) = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh \left(4 - 8 \frac{x_i - x}{x_i - x_f} \right) \right]. \quad (3.68)$$

Nesse método, Qtx_i apresenta valores constantes e iguais a condição de entrada do escoamento modelado no domínio útil. Outro destaque é que esse método é implementado em uma zona de *buffer* a qual possui, a jusante, uma zona de forçagem em que a condição de entrada é imposta através do MDFM e ambas as zonas compõe o domínio complementar.

A Figura 20 mostra um perfil de velocidade horizontal no domínio complementar do IMERSPEC na modelagem do escoamento sobre um degrau composto por apenas uma zona de *buffer* e um outro perfil composto pela zona de *buffer* mais a zona de forçagem. Nota-se que a zona de forçagem consegue total sobreposição com a solução de referência até o final do domínio complementar e início do domínio útil onde ocorre a modelagem do fenômeno físico. O método de *buffer*, por outro lado, garante apenas aproximação com a solução de referência até o final do domínio complementar.

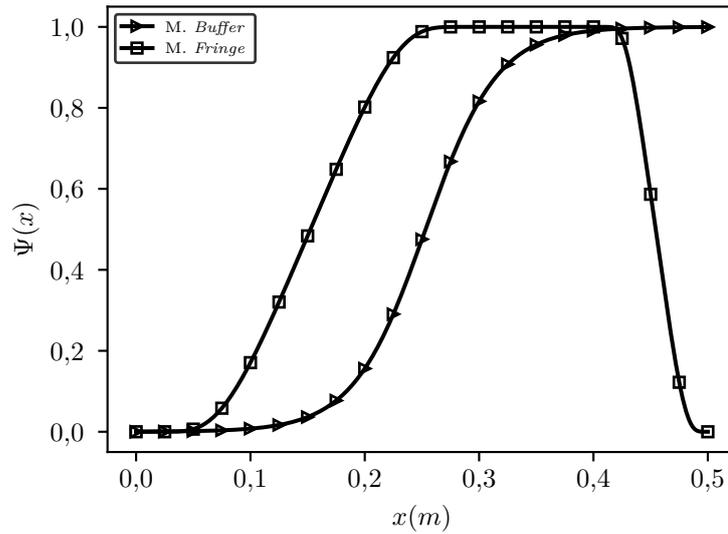
Figura 20 – Perfil horizontal no domínio complementar da modelagem do escoamento sobre um degrau utilizando o IMERSPEC.



Fonte: Adaptado de Mariano et al. ³¹.

Na Figura 21 apresentam-se exemplos de duas funções amortecedoras para o método *fringe* e *buffer*. Nota-se que a principal característica que difere os métodos é que a periodização pelo método *fringe* acontece de forma suave a montante e a jusante da zona *fringe* enquanto, no método *buffer*, é suave a montante e a zona se encerra forçando a solução alvo, Qtx_i , com um valor igual a unidade já que uma zona de forçagem por MDFM, impondo Qtx_i também, é adjacente.

Figura 21 – Comparativo das funções amortecedoras do método *fringe* e *buffer*.



Fonte: Próprio autor.

Outra restrição provinda do uso da transformada de Fourier às modelagens de escoamento é o fenômeno de Gibbs. Esse fenômeno aparece em funções descontínuas e é indesejado visto que causa oscilações espaciais na solução computacional.

O MPF garante alta acurácia e alta ordem de convergência na discretização espacial, além de desacoplar a solução do gradiente de pressão, que passa a ser um resultado apenas de pós-processamento, e o uso da FFT garante uma redução do custo computacional na solução das equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis. Como um método de alta ordem é utilizado na discretização espacial, um método de alta ordem também deve ser empregado na discretização temporal⁴. Portanto, o IMERSPEC utiliza o Método de Runge-Kutta de 4ª Ordem com 6 passos (RK46).

A escolha por esse método de avanço temporal foi feita porque o RK46 foi otimizado no espaço espectral apresentando assim: uma redução do armazenamento de variáveis e uma baixa dispersão e dissipação numérico-computacional⁴¹. O algoritmo RK46 é exemplificado pela Eq. 3.69,

$$\begin{cases} AUX_i^l = \alpha^l AUX_i^{l-1} + \Delta t (\nu k^2 \hat{u}_i - \varphi_{im} \widehat{TNL})^l \\ \hat{u}_i^{*l+1} = \hat{u}_i^* + \beta^l AUX_i^l \end{cases}, \quad (3.69)$$

onde $l = 1, 2, \dots, 6$ é o passo do método, AUX é uma variável auxiliar, α^l e β^l são constantes apresentadas na Tab. 1.

O incremento temporal utilizado no IMERSPEC é variável, dependente da condição de *Courant-Friedrichs-Lewis* (CFL) e igual a:

Tabela 1 – Parâmetros de MRK46.

l	α	β
1	0,0	0,122
2	-0,691750960670	0,477263056358
3	-1,727127405211	0,381941220320
4	-0,694890150986	0,447757195744
5	-1,039942756197	0,498614246822
6	-1,531977447611	0,186648570846

Fonte: Próprio autor.

$$\Delta t = CFL \cdot \min \left\{ \min \left[\frac{\Delta x_1}{\max|u_1|}; \frac{\Delta x_2}{\max|u_2|}; \frac{\Delta x_3}{\max|u_3|} \right]; \frac{2}{\nu} \left(\frac{1}{\Delta x_1^2} + \frac{1}{\Delta x_2^2} + \frac{1}{\Delta x_3^2} \right)^{-1} \right\}, \quad (3.70)$$

onde os termos com relação a x_3 e u_3 são anulados para modelagens de escoamentos bidimensionais. O RK46 é um método temporal explícito, assim, o CFL deve ser sempre inferior a unidade para que se mantenha a estabilidade computacional.

O método de avanço temporal é responsável pelo cálculo do parâmetro temporário u_i^* , o qual ainda será atualizado através do MFI. Assim, a definição da velocidade no próximo instante temporal é feita através da projeção do termo fonte obtido pelo MFI conforme apresentado pela Eq. 3.71,

$$\hat{u}_i^{t+\Delta t} = \hat{u}_i^{it+1} = \hat{u}_i^* + \Delta t \varphi_{im} \hat{f}_m. \quad (3.71)$$

A Eq. 3.71 é uma forma atualizada da Eq. 3.46, a atualização de velocidades dentro do MDFM passa a ser feita no domínio espectral para que possa-se realizar a operação de projeção sobre o termo fonte, a qual garante que a equação de continuidade seja satisfeita. Outro aspecto da Eq. 3.71 é que ela está inserida dentro de um processo iterativo, o MDFM, e a velocidade $\hat{u}^{t+\Delta t}$ deve satisfazer critério do MDFM.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Verificação Numérico-Computacional

Uma solução numérico-computacional pode apresentar resultados não condizentes ao fenômeno físico modelado decorrente de erros numéricos propriamente ditos, *i.e.*, erros na resolução das equações de *momentum* linear e equação da continuidade. A fim de mensurar esse tipo de erro, a solução do código à ser utilizado deve ser comparada com outras soluções, contínuas ou numérico-computacionais, verificando se as equações modeladoras do problema físico foram resolvidas corretamente e satisfatoriamente. Aspectos como precisão da solução e convergência do algoritmo são testados nesta fase, que é denominada por verificação numérica, a qual atesta a acurácia do modelo numérico-computacional⁴⁹.

A técnica da solução exata será utilizada para verificar a metodologia IMERSPEC bidirecional. Uma solução exata para as equações de Navier-Stokes consiste na implementação de soluções contínuas onde os termos fonte definidos a partir da solução implementada para os campos de velocidade e pressão sejam nulos.

Neste trabalho utilizou-se versão bidimensional dos vórtices de Taylor-Green conforme verificado também no trabalho de Nascimento et al.⁵⁰ para a mesma versão do IMERSPEC. Mariano³⁰ e Moreira³² também utilizaram os vórtices de Taylor-Green para realizar verificações numéricas. Destaca-se que a versão utilizada por Moreira³² foi a tridimensional e para essa versão a verificação é feita segundo soluções manufaturadas e não mais exatas.

A solução contínua, definida por Taylor e Green⁵¹, é apresentada nas Eq. 4.1, 4.2 e 4.3:

$$u^c = U_\infty \sin\left(\frac{ax}{L}\right) \cos\left(\frac{by}{L}\right) e^{-\left[\frac{\nu t}{L^2}(a^2+b^2)\right]}, \quad (4.1)$$

$$v^c = -U_\infty \frac{a}{b} \cos\left(\frac{ax}{L}\right) \sin\left(\frac{by}{L}\right) e^{-\left[\frac{\nu t}{L^2}(a^2+b^2)\right]}, \quad (4.2)$$

e

$$p^c = -\rho U_\infty^2 \frac{a^2}{2b^2} \left[\sin^2\left(\frac{ay}{L}\right) - \cos^2\left(\frac{by}{L}\right) \right] e^{-\left[\frac{2\nu t}{L^2}(a^2+b^2)\right]}, \quad (4.3)$$

onde u^c e v^c são os componentes da velocidade contínua; p^c é a pressão contínua; a e b são constantes iguais a unidade; x e y se referem as coordenadas cartesianas; L é o tamanho

de um vórtice e igual a πm ; ν é a viscosidade cinemática; ρ é a massa específica do fluido; e U_∞ é uma velocidade de referência.

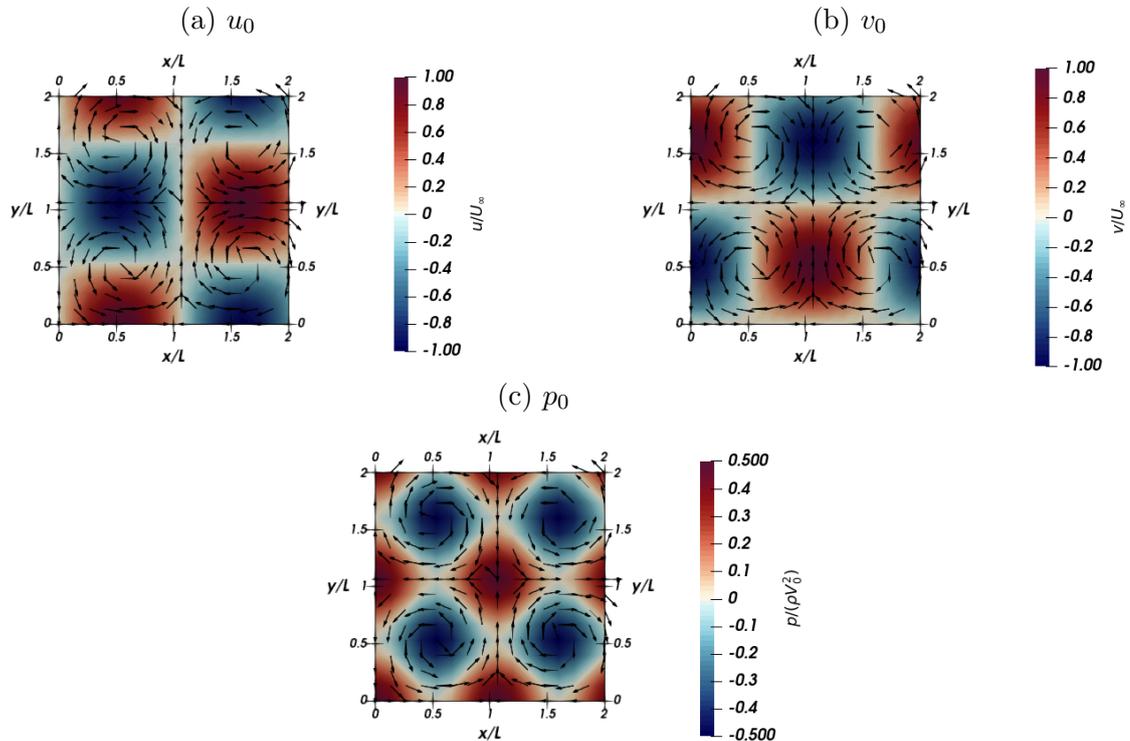
Os parâmetros de simulação para a verificação numérica são apresentados na Tab. 2, os mesmos utilizados por Mariano³⁰, onde $Re = (U_\infty L)/\nu$ é o número de Reynolds do respectivo problema. As condições iniciais de u_0^c , v_0^c e p_0^c obtidas com esses parâmetros são apresentadas nas Fig. 22a, 22b e 22c.

Tabela 2 – Parâmetros da verificação numérica.

$L_x \times L_y$	U_∞	Re	t_f	CFL	$N_x \times N_y$
$2L \times 2L$	1 m/s	10	$3\pi \text{ s}$	0,75	16×16 pontos

Fonte: Próprio autor.

Figura 22 – Condições inicial para os vórtices de Taylor-Green.



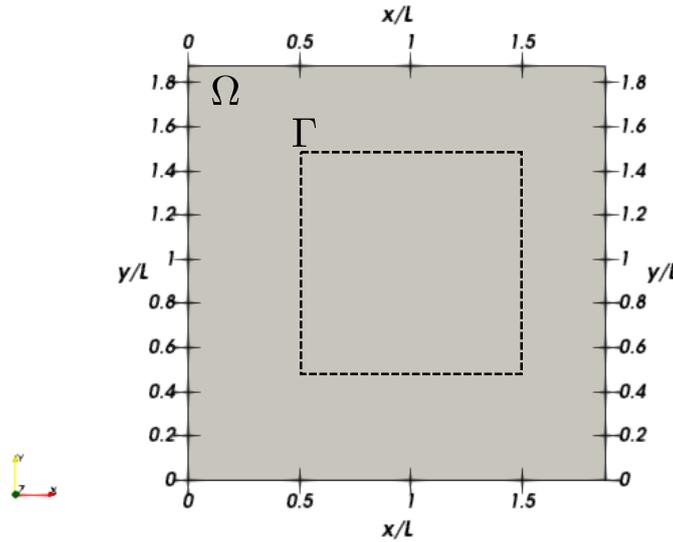
Fonte: Próprio autor.

Foram realizados duas simulações computacionais para a verificação. Na primeira simulação não houve implementação de fronteira imersa. A verificação nesse caso busca mensurar a acurácia do MPF.

O segundo experimento contou com a implementação de pontos coincidentes entre Ω e Γ de acordo com a Fig. 23, em que o domínio lagrangiano é um quadrado de lado L . A informação imposta através da malha lagrangiana é a própria solução contínua, u^c e v^c .

Para quantificar os erros numérico-computacionais utilizou-se a norma L_2 ,

Figura 23 – Esquema de implementação de pontos coincidentes no MFI



Fonte: Próprio autor.

$$L_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} (\phi_{ij}^c - \phi_{ij}^n)}{N_x N_y}}, \quad (4.4)$$

onde o sobrescrito c representa a solução contínua, Eq. 4.1, 4.2 ou 4.3, e n representa a respectiva solução numérico-computacional obtida pelo IMERSPEC.

Ambos os experimentos virtuais apresentaram o mesmo comportamento qualitativo nos campos de u , v e p os quais são apresentados, respectivamente, nas Fig. 24a, 24b e 24c. Nota-se o significativo aspecto difusivo das respostas computacionais devido, principalmente, ao baixo Re utilizado como dado de entrada.

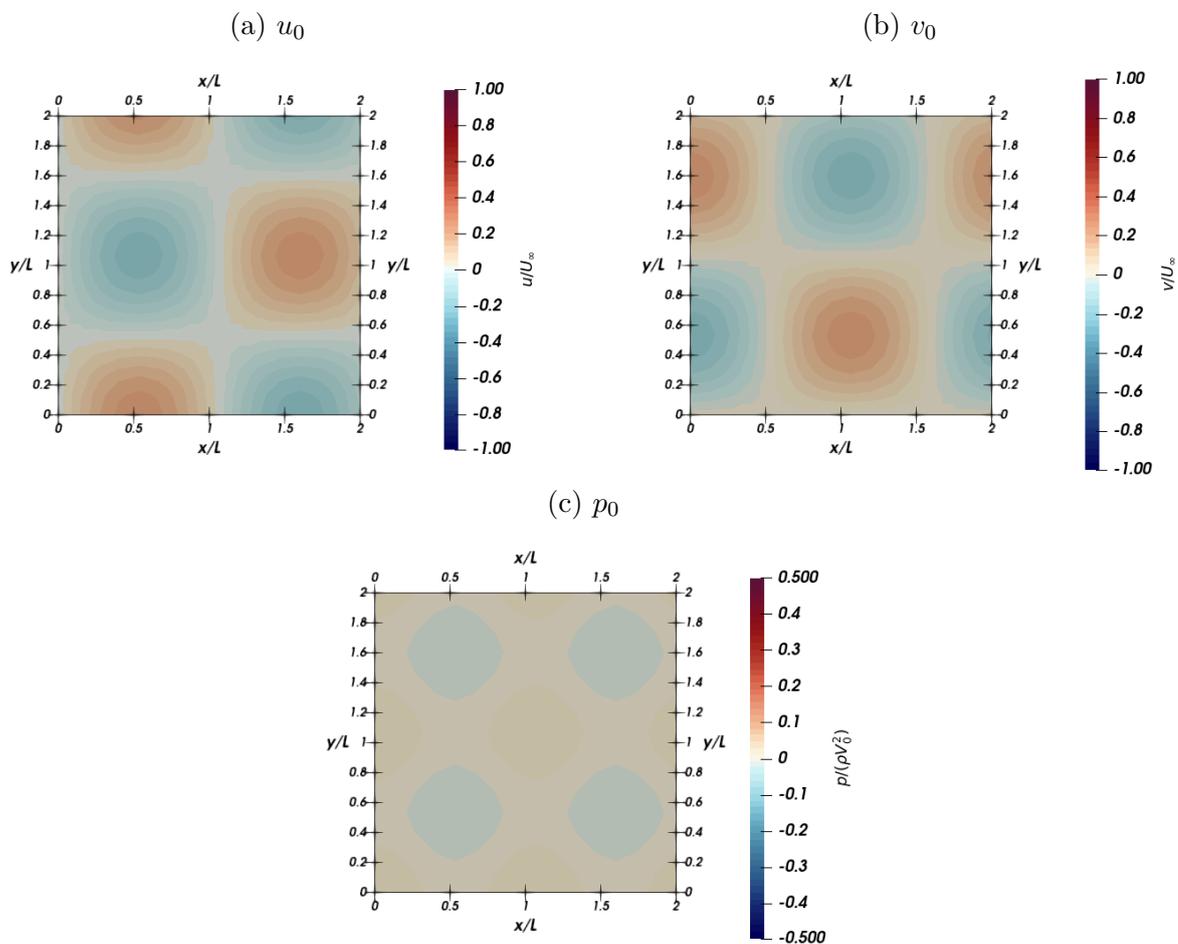
As normas L_2 para os campos de u , v e p ao longo do tempo físico em relação a simulação sem MFI são exibidas na Fig. 25. A significativa acurácia obtida pelo MPF para uma malha com 16×16 pontos colocantes é evidenciada na Fig. 25.

Nota-se que as normas de u e v são iguais e possuem ordem de erros de máquina enquanto a norma de p , uma variável de pós processamento, atinge valores ainda menores em toda faixa de tempo simulada.

Como os maiores valores da norma L_2 foram para os campos de velocidades u e v , Fig. 25, e esses valores são iguais, compara-se a norma de u com e sem MFI para mensurar o impacto do MFI na acurácia do MPF. As duas normas L_2 são apresentadas na Fig. 26.

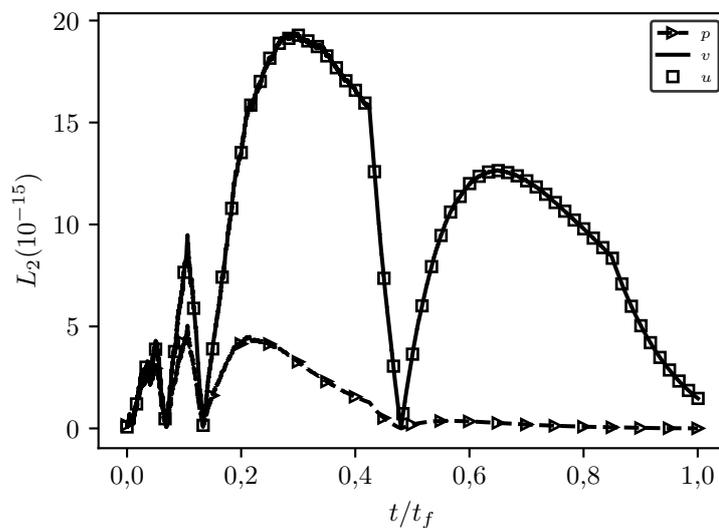
Analisando as duas normas eulerianas constata-se que a implementação do MFI diminuiu ainda mais a norma de u na maior parte do tempo físico. Ressalta-se entretanto que a implementação do MFI é feita com os valores da solução contínua da Eq. 4.1, o que torna a implementação desses valores lagrangianos ainda mais efetivos na redução de erros

Figura 24 – Soluções numérico-computacionais em $t_f/4$ s.



Fonte: Próprio autor.

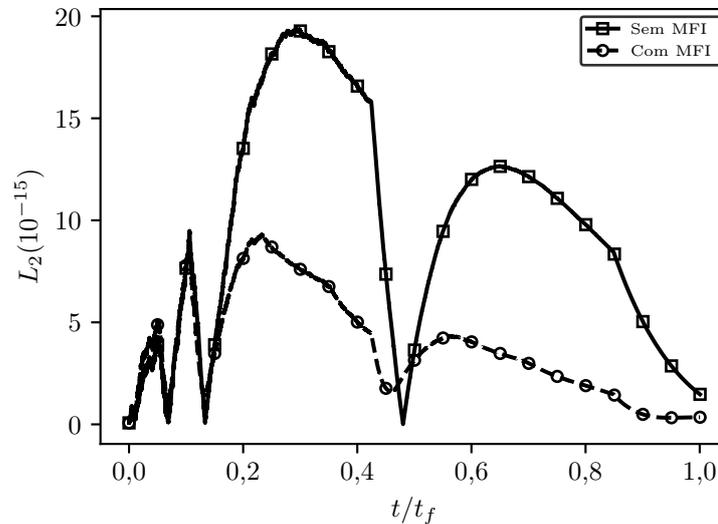
Figura 25 – Normas L_2 de u , v e p sem MFI



Fonte: Próprio autor.

numérico-computacionais.

Figura 26 – Normas L_2 de u com e sem MFI



Fonte: Próprio autor.

Através da verificação numérica fica evidenciada a alta acurácia do MPF mesmo através de malhas computacionais com poucos pontos colocantes e a possibilidade de erros computacionais ainda menores com o uso do MFI.

4.2 Jato Livre Plano em Desenvolvimento Temporal

Após a verificação numérica é realizado um experimento computacional de um jato livre em desenvolvimento temporal. Este tipo de escoamento é classificado como cisalhante livre, pois se desenvolve sem a presença de estruturas sólidas. Os resultados dessa seção foram publicados por Freitas, Silveira Neto e Mariano⁵²

A análise do desenvolvimento temporal do jato implica em uma abordagem lagrangiana em que a modelagem acompanha a partícula de fluido à medida que ela se distancia do bocal. A condição inicial para v do jato livre plano temporal é igual a 0 enquanto a condição de u é modelada pela Eq. 4.5,

$$u_0(x,y) = \frac{u_\infty + u_{cf}}{2} - \frac{u_\infty + u_{cf}}{2} \tanh \left[\frac{R}{4\theta} \left(\frac{|y|}{R} - \frac{R}{|y|} \right) \right], \quad (4.5)$$

onde u_∞ é a velocidade de entrada do centro do jato; u_{cf} é a velocidade *coflow* do escoamento; R é o raio do jato; e θ é a espessura do momento cisalhante. A taxa, R/θ , define a inclinação do perfil inicial de velocidade do escoamento e possui um impacto significativo na transição do escoamento à turbulência pois, de maneira geral, maiores taxas h/θ indicam mais instabilidades no jato⁵.

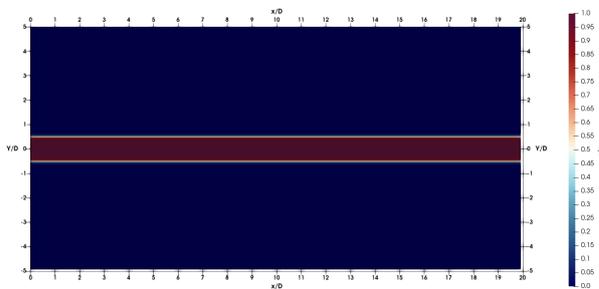
Os experimentos virtuais modelaram o escoamento por 60 s físicos com 3 distintos números de Reynolds (Re),

$$Re = \frac{(u_\infty - u_{cf})\delta_0}{\nu}, \quad (4.6)$$

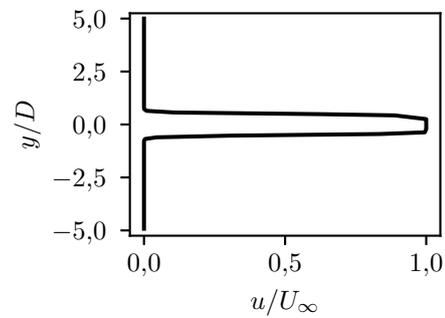
onde $\delta_0 = 1,187 m$ é a espessura cisalhante inicial do jato. Os valores adotados para as simulações computacionais são apresentados na Tab. 3. A Figura 27a apresenta a condição inicial do campo u para $Re = 10$ em uma malha com 128×64 pontos colocantes e o perfil de velocidade inicial u imposto é apresentado na Fig. 27b.

Figura 27 – Condição inicial com $Re = 10$ e 128×64 pontos colocantes.

(a) Campo inicial de u .



(b) Perfil de velocidade u .



Fonte: Próprio autor.

Tabela 3 – Parâmetros dos experimentos virtuais do jato temporal.

$L_x \times L_y$	u_∞	u_{cf}	R	R/θ	Re	CFL	t_f
$20D \times 10D$	1 m/s	0 m/s	0,5 m	20	10, 100 e 1600	0,95	60 s

Fonte: Próprio autor.

Foram realizados dois grupos de simulações. O primeiro tipo teve a modelagem do jato temporal com a inserção de ruído ao longo das espessuras cisalhantes do escoamento inicial enquanto o segundo grupo de simulações não tiveram inserção do ruído numérico-computacional. O ruído implementado foi um ruído branco imposto em δ_0 com 1% de intensidade de acordo com a Eq. 4.7,

$$\begin{cases} u(x,y) = u_0(x,y) + 5 \left(\frac{0,5-a}{100} \right) \\ v(x,y) = 5 \left(\frac{0,5-a}{100} \right) \end{cases}, \quad (4.7)$$

onde a é um valor real aleatório, entre 0 e 1 fornecido pela função ruído branco, a qual tem média tendendo a 0,5 e desvio padrão tendendo a zero⁵³.

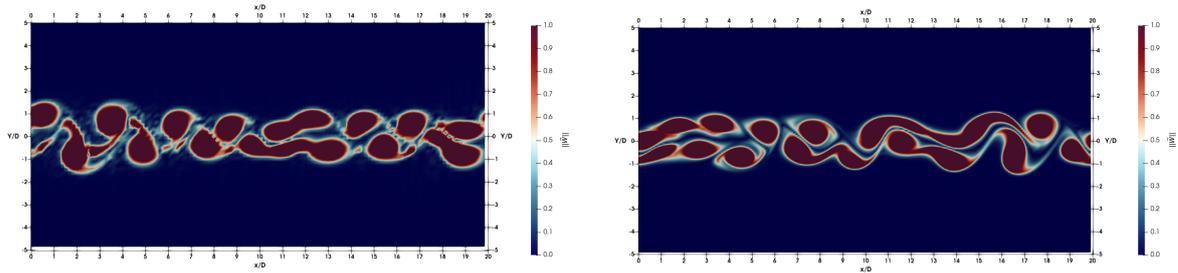
Uma análise de refinamento de malha foi feita para as simulações computacionais com ruído implementado e $Re = 1600$ para as malhas com 128×64 , 256×128 e 512×256

pontos de colocação. Os resultados para a magnitude do campo de vorticidade, $||\vec{W}||$, em $t = 16 s$ são apresentados na Fig. 28 em que é perceptível que todas as simulações conseguiram representar as instabilidades de Kelvin-Helmholtz, porém, com diferentes precisões. Nota-se que não há diferença qualitativa entre as estruturas turbilhonares das malhas com 256×128 , Fig. 28b, e com 512×256 pontos colocantes, Fig. 28c. Assim, as demais análises nessa seção foram realizadas para a malha de 256×128 pontos.

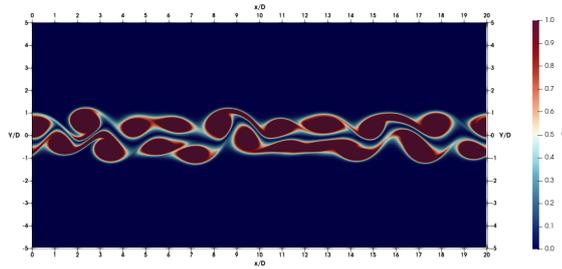
Figura 28 – $||\vec{W}||$ em $t = 16 s$ com imposição de ruído.

(a) Malha com 128×64 pontos.

(b) Malha com 256×128 pontos.



(c) Malha com 512×256 pontos.



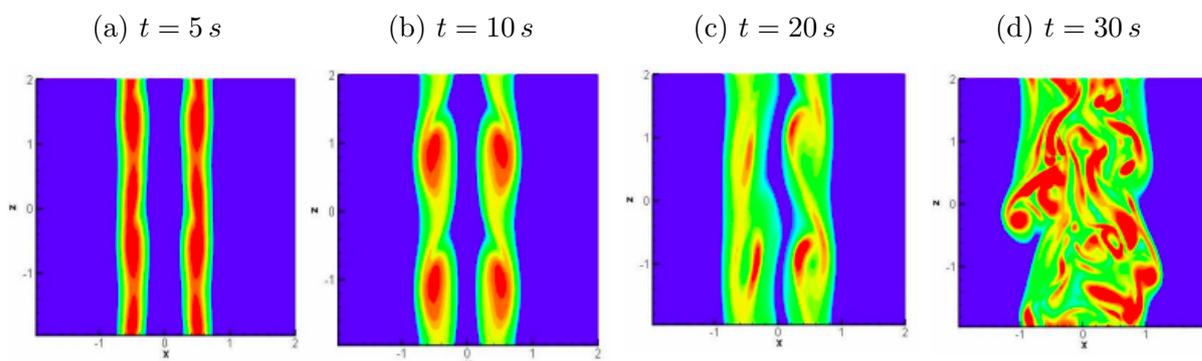
Fonte: Próprio autor.

As Figuras 29 mostram $||\vec{W}||$ em diferentes instantes obtidas por Souza⁵⁴ sob MPF para um jato temporal tridimensional para uma malha de $120 \times 120 \times 120$ pontos de colocação. O início da transição à turbulência de um jato temporal é bem representado pelas Fig. 29. Primeiro, injeta-se o ruído sobre o escoamento e em seguida há uma seleção de um comprimento de onda que será mais amplificado que os demais. Durante a amplificação das perturbações, observa-se a manifestação de instabilidades nas camadas cisalhantes do jato, Fig. 29a, que estão associados ao número de onda previamente selecionado. Após o aparecimento das primeiras instabilidades ocorre um desbalanceamento no campo de pressão, já que as instabilidades possuem um formato de onda, surgindo assim cristas e vales representando zonas de compressão e expansão ou ainda regiões de aceleração e desaceleração. As cristas que entram em contato com o core do jato são transportadas mais rapidamente do que os vales, iniciando dessa maneira um processo de enrolamento da camada cisalhante. Esse processo de enrolamento resulta em instabilidades de natureza periódica, denominadas por instabilidades de Kelvin-Helmholtz⁴⁴, Fig. 29b.

Após a formação das instabilidades primárias de Kelvin-Helmholtz, há a amplificação das instabilidades com taxas de amplificação inferiores a taxa máxima primária. A manifestação dessas instabilidades ocorre pelo emparelhamento das instabilidades primárias e como resultado tem-se a duplicação de tamanho das estruturas turbilhonares conforme pode ser visto na Fig. 29c. As novas estruturas formadas são compostas pelas instabilidades primárias que ainda estão presentes em seu interior com uma taxa de amplificação maior.

Em seguida, ao longo do processo de transição, tem-se a formação de instabilidades longitudinais que se enrolam sobre as instabilidades desenvolvidas resultando em fortes efeitos mecânicos e fortes deformações, contribuindo para a tridimensionalização do escoamento. A Fig. 29d representa o escoamento em um estado avançado de tridimensionalização caracterizando um regime de turbulência em evolução,

Figura 29 – $\|\vec{W}\|$ de uma solução tridimensional em uma malha $120 \times 120 \times 120$ pontos colocantes.



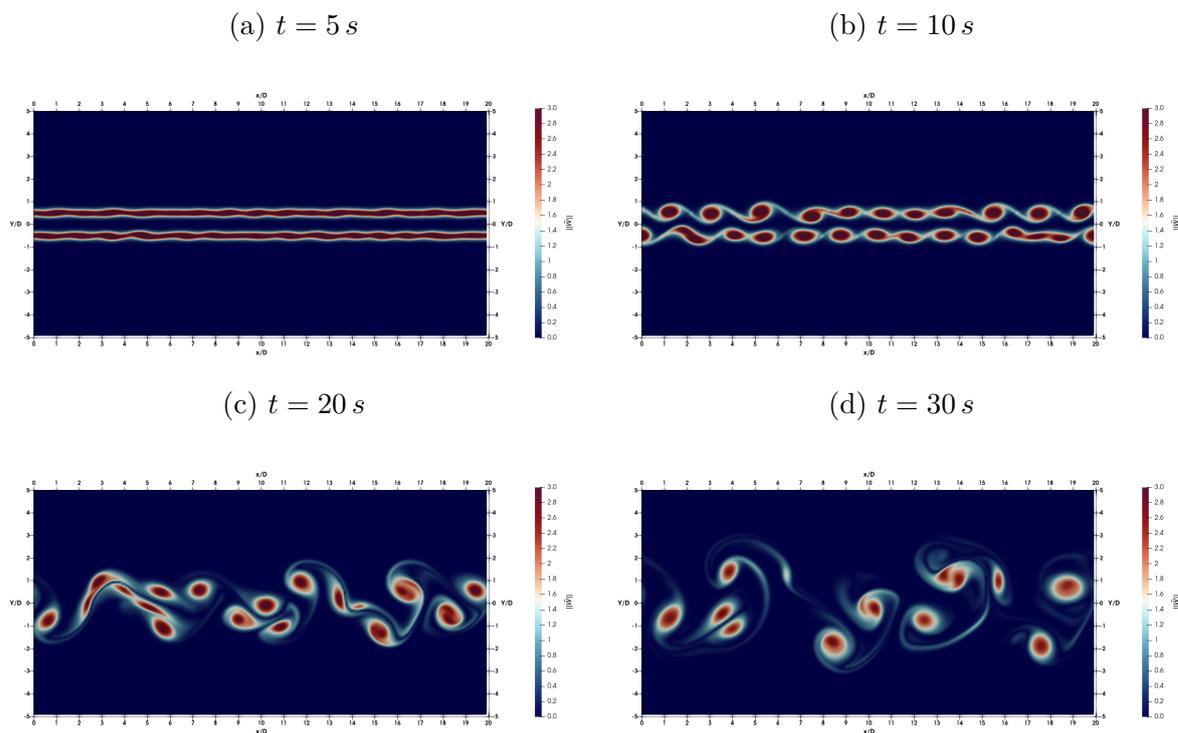
Fonte: Souza⁵⁴

As magnitudes do campo de vorticidade obtidas pelo IMERSPEC com uma modelagem bidimensional são apresentadas nas Fig. 30 nos mesmos instantes temporais vistos nas Fig. 29 para fins de comparação. Nota-se que, assim como a Fig. 29a, a Fig. 30a apresenta a manifestação das primeiras instabilidades do escoamento que possuem a maior taxa de amplificação.

Em seguida, através Fig.30b percebe-se que essas manifestações se desenvolveram em instabilidades do tipo Kevin-Helmholtz, análogo ao observado na Fig. 29b entretanto o processo apresentado nas Fig. 30c e 30d não modelam mais o fenômeno físico.

O emparelhamento das instabilidades primárias ilustrado pela Fig. 30c não ocorreu de acordo com o visto na Fig. 29c, há um maior espalhamento no dipolo formado pelas estruturas do que o observado no escoamento tridimensional. Analisando a Fig. 29d e 30d constata-se que a modelagem bidimensional limita a formação dos filamentos longitudinais impedindo assim a tridimensionalização do escoamento. Verifica-se pela Fig. 30d que após 30 s físicos o escoamento apenas apresenta dipolos de instabilidades de Kelvin-Helmholtz não modelando mais nenhum aspecto do fenômeno físico, que é tridimensional.

Figura 30 – Solução computacional obtida pelo IMERSPEC2D a fim de comparação.



Fonte: Próprio autor.

A inserção de ruído numérico sobre as espessuras cisalhantes iniciais, δ_0 , tem um aspecto significativo na modelagem teórica do escoamento em transição à turbulência⁵. Conforme apresentado durante a verificação numérica da metodologia na seção anterior, o IMERSPEC possui exatidão de erro de máquina e assim não há perturbações numéricas significativas durante a solução computacional para que estas sejam amplificadas ao contrário de outras metodologias espaciais, como por exemplo, em um método de volumes finitos clássico.

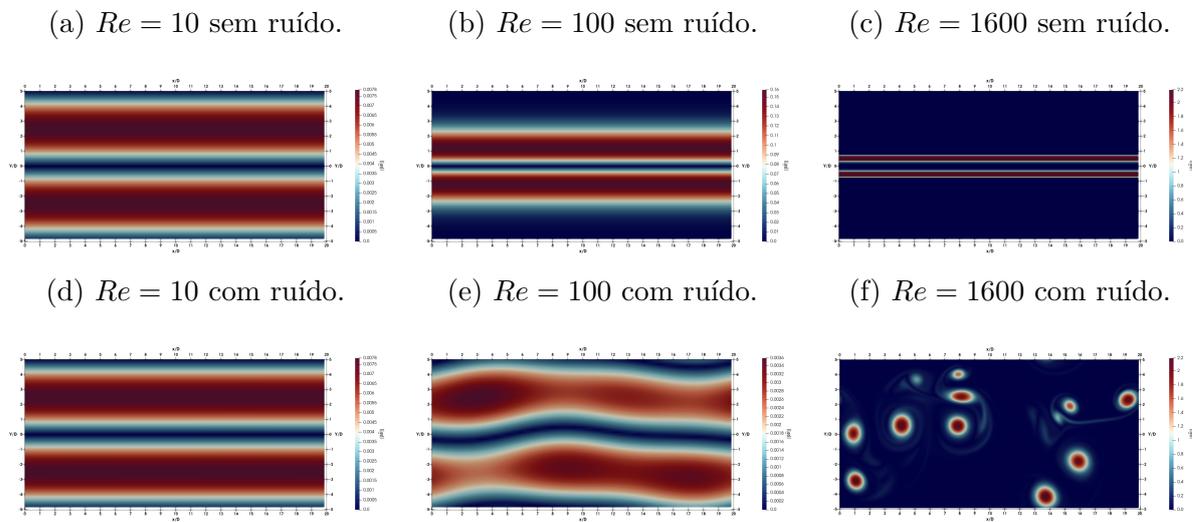
Outra característica da inserção do ruído numérico deve ser salientada. Para que essa inserção modele satisfatoriamente o fenômeno físico, o ruído implementado não pode gerar instabilidades em escoamentos considerados estáveis, para o jato $Re \leq 10$, o seu impacto na resposta computacional só deve ser significativo para escoamentos em transição ou já inteiramente turbulentos, *i.e.* o ruído imposto modela perturbações que estão sempre presentes em experimentos materiais^{32, 44}.

Nas Figuras 31 apresentam-se a solução computacional para $t = 60 s$ do jato de: $Re = 10$ com e sem ruído imposto, Fig. 31a e 31d; $Re = 100$ com e sem ruído imposto, Fig. 31b e 31e; e $Re = 1600$ com e sem ruído imposto, Fig. 31c e 31f, respectivamente. Verifica-se que as simulações sem ruído, Fig. 31a, 31b e 31c, não tiveram formação de qualquer instabilidade pois a acurácia do IMERSPEC impede a formação de perturbações numéricas significativas.

Nota-se que para a Fig. 31d que a implementação de ruído não ocasionou instabilidades visto que o escoamento laminar foi capaz de inibir a formação dessas estruturas devido ao seu caráter viscoso acentuado. A inserção de ruído impactou apenas os jatos com $Re = 100$, Fig. 31e, e com $Re = 1600$, Fig. 31f.

O jato temporal de $Re = 100$ assemelha-se, qualitativamente, a um escoamento laminar perturbado enquanto o jato de $Re = 1600$ em $t = 60 s$ não modela mais qualquer fenômeno físico apesar de apresentar as instabilidades de Kelvin-Helmholtz devido as restrições de modelagem bidimensional, vide Fig. 30.

Figura 31 – Campos de $||\vec{W}||$ em $t = 60 s$ com e sem ruído.



Fonte: Próprio autor.

4.3 Jato Livre Plano em Desenvolvimento Espacial

Nessa seção buscou-se modelar um jato plano livre instável em desenvolvimento espacial a fim de compreender como é periodizado o escoamento em modelagens de desenvolvimento espacial utilizando o IMERSPEC. Este tipo de escoamento cisalhante livre se forma a partir do fluido saindo de bocal de descarga bidimensional de comprimento H e altura G . A altura do bocal G é significativamente maior do que o comprimento H e assim o escoamento é considerado essencialmente bidimensional durante parte de seu desenvolvimento⁵⁵.

A condição inicial de u para esse escoamento é apresentada na Eq. 4.8,

$$u_0(x,y) = \frac{u_\infty + u_{cf}}{2} - \frac{u_\infty - u_{cf}}{2} \tanh \left[\frac{H}{4\theta} \left(1 - \frac{2|y|}{H} \right) \right], \quad (4.8)$$

enquanto $v_0(x,y) = 0$. Os parâmetros utilizados para experimentos virtuais do jato plano em desenvolvimento espacial são apresentado na Tab. 4. Parâmetros utilizados como u_∞ ,

u_{cf} , H ou H/θ possuem o mesmo valor dos utilizados por Silva e Métails⁵⁶.

Tabela 4 – Parâmetros dos experimentos virtuais do jato temporal.

$L_x \times L_y$	u_∞	u_{cf}	H	H/θ	Re	CFL	t_f	ϵ
$48H \times 12H$	1,091 m/s	0,091 m/s	1 m	20	1050	0,95	300 s	10^{-3}

Fonte: Próprio autor.

O jato plano livre é modelado a partir do escoamento de saída de um bocal com $G \gg H$ em um reservatório com fluido quiescente. A jusante do bocal, parte do fluido quiescente é transportado com o jato em movimento através da difusão viscosa da vorticidade nas extremidades do jato. O processo de incorporação do fluido quiescente no jato é denominado por *entrainment*¹⁶.

O baixo *co-flow* é utilizado como artifício para a modelagem do fenômeno de *entrainment* no escoamento. Esse artifício é implementado pois a condição de periodicidade na direção y , inerente ao IMERSPEC, impede a entrada de fluido na região fora do domínio computacional e foi utilizado com sucesso por Stanley e Sarkar⁵⁷, Stanley, Sarkar e Mellado⁵⁸ e Silva e Métails⁵⁶.

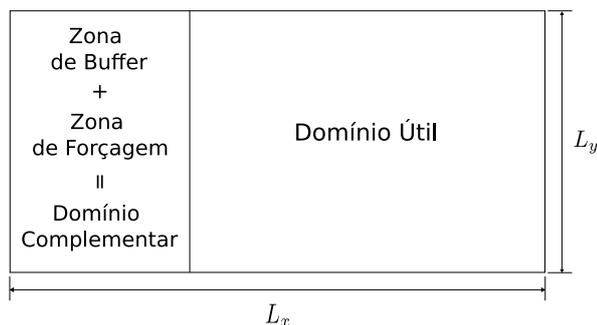
Um pequeno *co-flow* proporciona um boa concordância estatística com resultados de experimentos materiais desde que a condição de periodicidade esteja suficientemente distante do escoamento⁵⁶. No presente estudo a medida de $12H$ foi escolhida em concordância ao apresentado no trabalho de Silva e Métails⁵⁶.

O domínio extenso em x , $L_x = 48H$, foi empregado para modelagens espaciais devido ao uso das condições de contorno periódicas inerentes ao uso da FFT no IMERSPEC que se tornam indesejáveis e o domínio total, conforme mencionado no capítulo anterior, passa a ser subdividido em duas regiões: o domínio complementar e o domínio físico.

Utilizou-se o método de *Buffer* acoplado a uma zona de forçagem para compor o domínio complementar e realizar a periodização do escoamento modelado. O esquema dessa forma é usual em implementações com IMERSPEC para escoamentos espaciais e é visto na Fig. 32. Para os experimentos virtuais do jato espacial, a zona de *buffer* possui comprimento igual a $14H$ enquanto a zona de forçagem possui $2H$ e o domínio útil apresenta $32H$.

Na modelagem do jato em desenvolvimento espacial deve-se inserir ruído assim como foi feito para o jato temporal devido a alta acurácia do IMERSPEC. Todavia, na modelagem de escoamentos em desenvolvimento espacial utiliza-se o domínio complementar, em que ocorre a periodização do escoamento, gerando descontinuidades na solução computacional e por isso malhas muito grosseiras podem apresentar ruído numérico indesejado. Essas descontinuidades surgem devido a baixa acurácia dos processos de periodização do escoamento realizados dentro do domínio complementar. Esse tipo de ruído não é desejado

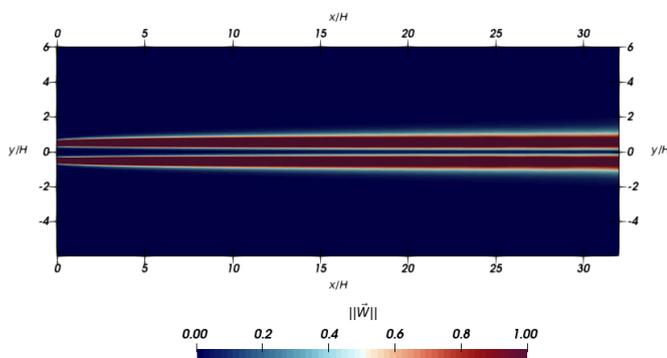
Figura 32 – Esquema IMERSPEC para modelagens espaciais.



Fonte: Próprio autor.

em qualquer modelagem computacional visto que ele não é controlável e pode prejudicar a reprodução coerente do fenômeno físico de interesse.

Dessa forma, a malha identificada sem ruído numérico foi de 1024×256 pontos colocantes e será utilizada no presente estudo. A Figura 33 apresenta, apenas, o domínio útil após 300 s onde não há a presença de nenhuma instabilidade visto que o escoamento não foi perturbado por ruídos de qualquer natureza.

Figura 33 – Campo de $\|\vec{W}\|$ em t_f para 1024×256 pontos.

Fonte: Próprio autor.

Com a definição de uma malha sem ruído numérico, foram impostos ruído branco, Eq. 4.7, com intensidade variável nas espessuras cisalhantes do último perfil de velocidades u e v no domínio complementar. Salienta-se que a inserção desse tipo de ruído não satisfaz a equação de continuidade. Foram realizados experimentos virtuais com intensidade de ruído de: 0%; 0,01%; 0,125%; 0,25%; 0,5%; 1% e 2%.

As Figuras 34 apresentam o campo de $\|\vec{W}\|$ em diferentes instantes temporais para o experimento virtual com 1% de ruído branco. Em $t = 16$ s, Fig. 34a, observa-se a formação das primeiras instabilidades de Kelvin-Helmholtz e o começo de certo emparelhamento entre instabilidades próximas. Com o passar do tempo físico, nota-se através da Fig. 34b que as instabilidades formam dipolos entre si análogos aos observados para os jato temporal

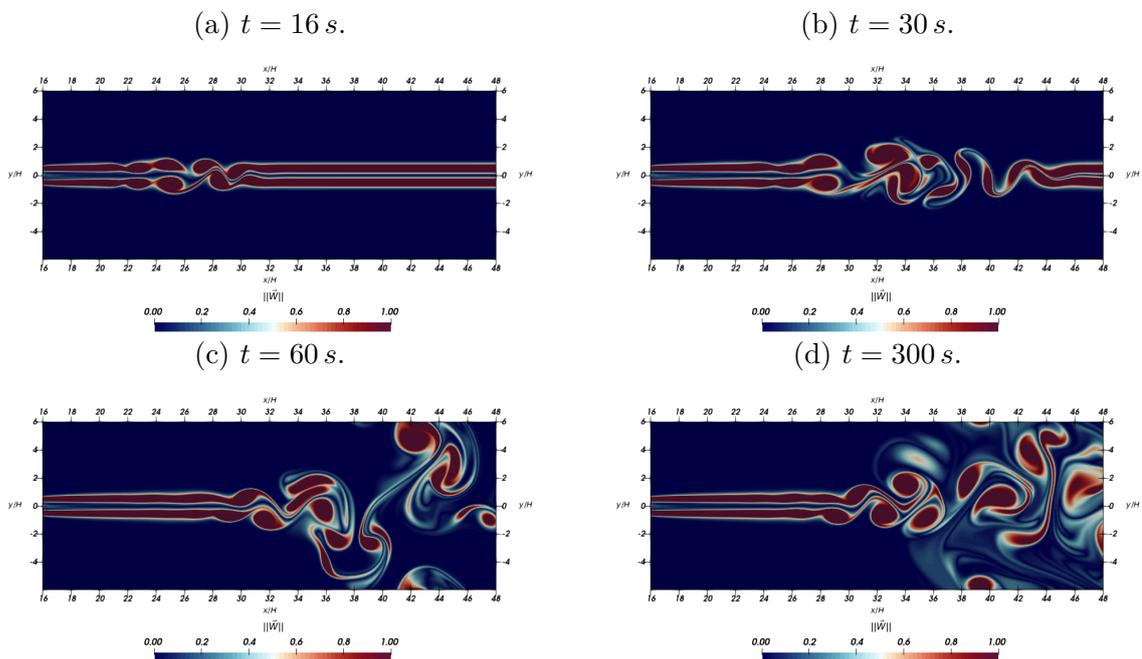
mas devido a limitação da modelagem bidirecional não ocorre a formação de instabilidades longitudinais responsáveis pela continuação do processo de transição à turbulência.

Quando os dipolos de instabilidades interagem com as condições de periodicidade em $y/H = 6$, Fig. 34c, a modelagem passa a não ter qualquer relação com o fenômeno físico de interesse já que as condições de contorno periódicas reinjetam a informação na parte inferior do domínio.

Ao final da simulação computacional tem-se o campo de $||\vec{W}||$ ilustrado na Fig. 34d e nota-se certo comportamento caótico, condizente em parte com escoamentos turbulentos, mas tal comportamento não pode ser considerado turbulento visto que o escoamento é bidimensional e não há a formação de estruturas turbilhonares aqui.

Por fim, destaca-se que apesar do insucesso na reprodução do desenvolvimento espacial de um jato plano livre em transição, o domínio complementar formado pelo método de *buffer* associado a uma zona de forçagem conseguiu periodizar o escoamento ao longo de x do escoamento de forma suave e restaurar a condição de entrada do domínio satisfatoriamente.

Figura 34 – Campo de $||\vec{W}||$ em diferentes t com 1% de ruído.



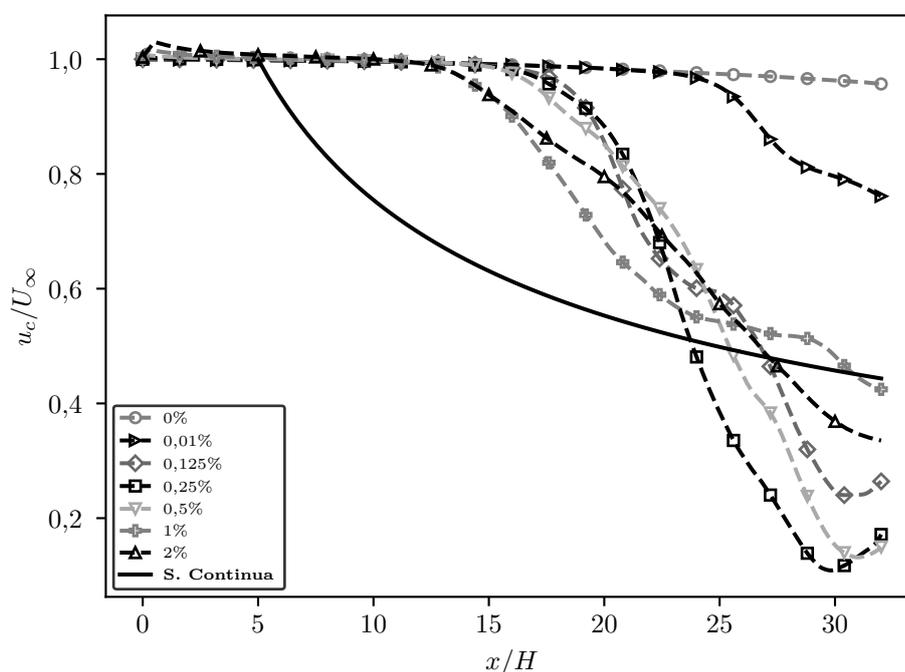
Fonte: Próprio autor.

Como evidência de que o comportamento aqui apresentado não condiz com um escoamento turbulento, realizou-se média da velocidade u de centro do jato plano de 150 s a 300 s para todas as simulações com diferentes intensidades de ruído e comparou-se com a solução contínua do escoamento turbulento de um jato plano livre apresentado por Silveira Neto⁴⁴. Os resultados obtidos assim como a solução contínua são apresentado na Fig. 35 e demonstram que independente da intensidade do ruído imposta ao escoamento os perfis

obtidos não convergem para a solução esperada.

Outro fato que merece destaque analisando a Fig. 35 é de que a imposição de maiores intensidades de ruído causam um *overshoot* do perfil de u/U_∞ indesejado no começo do domínio útil, $x/H < 2$. O ruído branco não satisfaz a equação da continuidade e quando os campos u e v são projetados no plano π ocorre alterações nesses campos para que os resultados passem a satisfazer a equação da continuidade. Quanto maior é o ruído imposto às velocidades, mais aparente essa correção se torna.

Figura 35 – Comparação da velocidade média do centro do jato das simulações com a solução continua.



Fonte: Próprio autor.

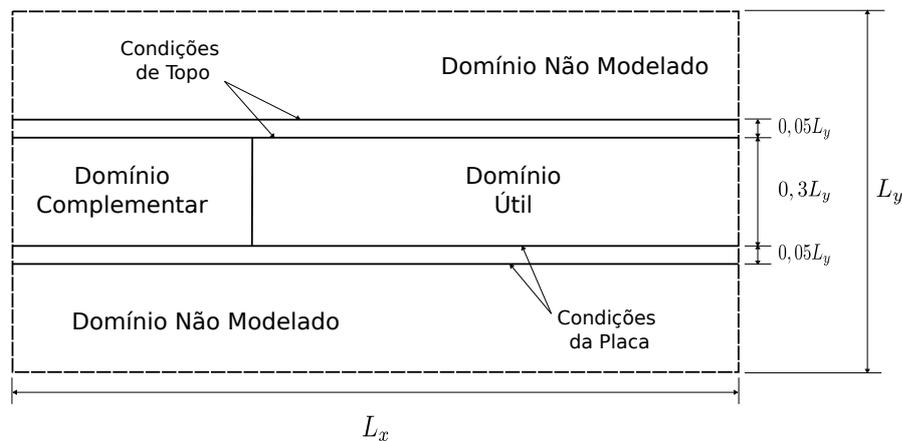
4.4 Camada Limite Bidimensional em uma Placa Plana

Após verificar a acurácia do IMERSPEC assim como os usuais artifícios utilizados na modelagem de escoamento com desenvolvimento espaciais, prossegue-se com a modelagem da camada limite em uma placa plana. Análises foram realizadas sob uma perspectiva bidimensional para a otimização de parâmetros de simulação assim como métodos de periodização e são apresentados na presente seção.

Na Figura 36 apresenta-se o esquema de implementação para a modelagem da camada limite bidimensional. O fenômeno modelado é o desenvolvimento de uma camada limite sem gradiente de pressão. O bordo de ataque da placa plana não é modelado no IMERSPEC visto que a descontinuidade causada pelo ponto de estagnação da placa

implicaria no desenvolvimento do fenômeno de Gibbs na resposta computacional e a modelagem do bordo de ataque não é de interesse na perspectiva de futuros trabalhos, uma vez que, em escoamentos atmosféricos, normalmente se obtém o perfil do vento em uma dada posição, na qual a camada limite já está formada, e esse perfil é dado como condição de entrada. Dessa forma, um perfil desenvolvido de Blasius para u e v em $x = 0,5 m$ do bordo de ataque é imposto ao final do domínio complementar e o IMERSPEC modela o fenômeno físico em todo o domínio útil do escoamento.

Figura 36 – Esquema para modelagem de camada limite sobre uma placa plana.



Fonte: Próprio autor.

Nota-se através da Fig. 36 que uma significativa porção do domínio transversal (L_y) não é utilizada no domínio útil mas se torna necessária para a periodização nessa direção. Essa região é denominada por domínio não modelado. Outro aspecto relevante é o fato das condições de contorno da placa e do topo do domínio útil são impostas em um formato de “casca”. Essa implementação é realizada a fim de minimizar descontinuidades dentro dos campos de velocidades para evitar efeitos relacionados ao fenômeno de Gibbs. Enfatiza-se que devido ao uso da FFT o escoamento deve ser periódico já que condições de periodicidade são impostas na linha tracejada da Fig. 36 implicitamente ao uso dessa rotina computacional.

O domínio complementar, inicialmente, é composto apenas pelo método *fringe* pois é o método utilizado usualmente para a periodização do escoamento na direção paralela a placa plana em trabalhos análogos que utilizaram o MPF^{21, 22, 26}. Para o uso desse método a função $\Psi(x)$, Eq. 3.66, foi definida com $\Delta_{sub} = 60\%L_x^c$ e $\Delta_{des} = 20\%L_x^c$ em que L_x^c se refere ao domínio complementar de x que corresponde a $1/3$ de L_x , o qual pode ser visto na Fig. 36.

O método de *fringe* utiliza um desenvolvimento espacial artificial dentro do domínio complementar. Portanto, para definir a solução alvo ao longo de x , Qt_x , necessária à Eq. 3.65, utiliza-se uma nova coordenada, x_c ,

$$x_c = x_f + [x_i - x_f]\kappa, \quad (4.9)$$

em que κ é uma exponencial que varia de 0 no começo do domínio complementar à unidade no fim da zona de *fringe*; x_f é uma distribuição linear de x partindo do fim do domínio útil; e x_i é uma distribuição linear que, ao final do domínio complementar, apresenta a coordenada igual ao x do perfil desenvolvido de Blasius implementado como condição de entrada.

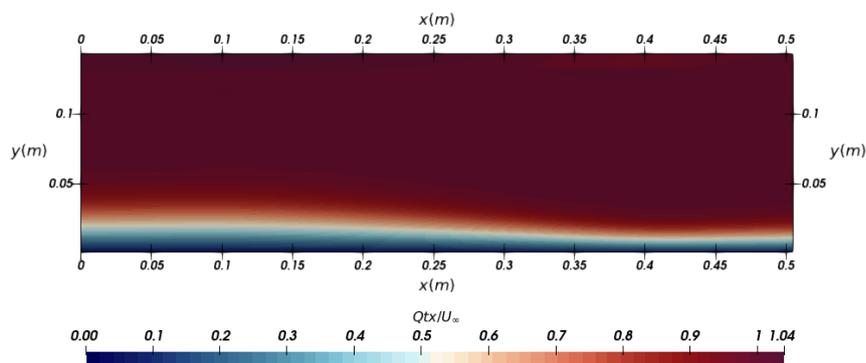
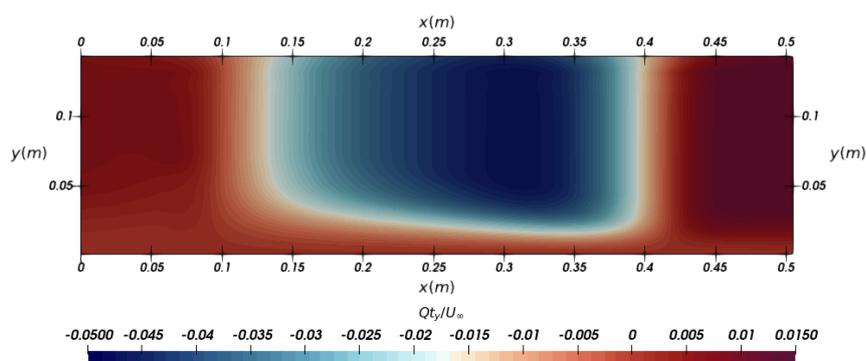
A nova coordenada x_c apresenta uma distribuição que varia exponencialmente de coordenadas do fim do domínio útil às coordenadas da condição de entrada. Assim, Qt_x é calculado através da aproximação contínua da solução de Blasius a qual foi obtida utilizando a aproximação 4/3 de Pade por Ahmad e Al-Barakati⁵⁹ enquanto Qt_y é calculado a partir da equação da continuidade.

Na Figura 37 apresentam-se os campos Qt_x , Fig. 37a, e Qt_y , Fig. 37b, obtidos pelo método *fringe* em uma malha de 1024×256 pontos com $CFL = 0,5$. O campo de Qt_x explicita a principal função do domínio complementar: de alterar a solução computacional de saída do domínio útil para a solução de entrada desejada através da diminuição da espessura da camada limite, δ_{99} . A diminuição de δ_{99} ao longo da zona *fringe* possui um desenvolvimento espacial, todavia, esse fenômeno não condiz com a realidade do desenvolvimento de uma camada limite sobre placa plana e portanto é fictício. Esse desenvolvimento espacial fictício é utilizado para minimizar o efeito da zona *fringe* tanto no início quanto no fim do domínio útil da modelagem²².

Os valores negativos de Qt_y presentes na Fig. 37b causam estranhamento dentro do domínio complementar, porém, esses valores foram obtidos através da equação da continuidade e por isso são condizentes ao processo necessário para reestruturar as condições de u e v na entrada do domínio útil. A fim de entender o processo de recuperação até a condição de entrada do domínio útil, particiona-se o domínio complementar em três regiões distintas: $x < 0,15$; $0,15 \leq x \leq 0,4$; e $0,4 < x \leq 0,5$.

Na primeira porção da zona *fringe*, $x < 0,15$, a Fig. 37a indica que a camada limite continua se desenvolvendo espacialmente seguindo o fenômeno físico modelado e desse modo, a equação da continuidade resulta em valores positivos para Qt_y , Fig. 37b, já que devido ao aumento de δ_{99} uma maior região do escoamento passa ter valores menores que U_∞ e há um efeito de transporte de quantidade de movimento linear na direção y positivo que aparece em Qt_y como resposta ao aumento da espessura da camada limite.

Na segunda região do domínio complementar, $0,15 \leq x \leq 0,4$, tem-se o processo de diminuição da camada limite conforme visto na Fig. 37a. Nessa região ocorre um desenvolvimento espacial fictício visto que δ_{99} diminui ao longo de x e como resultado, os valores de Qt_y obtido pela equação da continuidade são negativos. Essa diminuição de

Figura 37 – Domínio complementar obtido pelo método *fringe*.(a) Campo Qt_x .(b) Campo Qt_y .

Fonte: Próprio autor.

espessura da camada limite é acentuada no domínio complementar, principalmente pela exponencial usada para definir a coordenada x_c na Eq. 4.9, e ao fim dessa região tem-se o escoamento com características à montante da condição de entrada do domínio útil.

A última porção da zona *fringe*, $0,4 < x \leq 0,5$, possui um comportamento análogo a primeira região, $x < 0,15$, em que a camada limite se desenvolve até a condição de entrada do domínio útil em concordância ao fenômeno modelado e portanto Qt_y , obtido através da equação da continuidade, é positivo.

Analisando a função $\Psi(x)$ do método *fringe* utilizada, Fig. 21, junto a forma como é aplicado o método, Eq. 3.65, constata-se que a primeira e a terceira região da zona *fringe* servem como regiões de transições do domínio útil para o complementar a fim de suavizar a imposição na restauração da condição de entrada do domínio útil mitigando o seu efeito à montante e à jusante.

Os parâmetros utilizados para os experimentos virtuais são apresentados na Tab. 5. Em uma análise preliminar deseja-se realizar um estudo de refino de malha e refino de incremento temporal através do *CFL*. Para isso, a primeira análise de refinamento de

malha foi feita com 4 malhas computacionais: 256×64 , 512×128 , 1024×256 e 2048×512 pontos colocantes com $CFL = 0,5$ e a partir da melhor malha o CFL foi variado em $0,5$, $0,25$ e $0,1$.

Tabela 5 – Parâmetros dos experimentos virtuais da camada limite 2D.

L_y	L_x	U_∞	Re	CFL	t_f	ϵ
$0,38\text{ m}$	$4L_y = 1,52\text{ m}$	1 m/s	10^4	$0,5$	60 s	10^{-4}

Fonte: Próprio autor.

O número de Reynolds, Re , é definido para a posição $x = 1\text{ m}$ conforme a Eq. 4.10,

$$Re = \frac{U_\infty \cdot x}{\nu}, \quad (4.10)$$

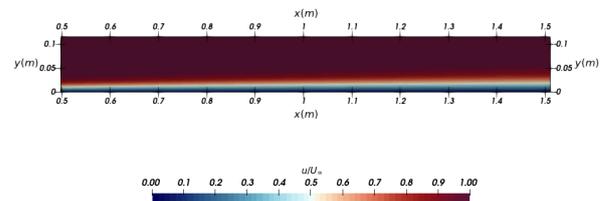
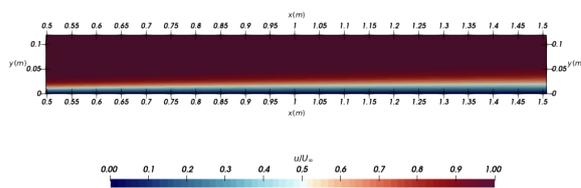
em que $U_\infty = 1\text{ m/s}$ e $Re = 1 \cdot 10^4$. Esse escoamento, portanto, é considerado laminar e assim seus resultados são comparáveis aos provenientes da solução da equação de Blasius. O domínio útil modela o escoamento sobre a placa a partir de $0,5\text{ m}$ até cerca de $1,51\text{ m}$ possuindo variação do número de Reynolds local igual a $5 \cdot 10^3 \leq Re_x \leq 1,5 \cdot 10^4$.

Os campos de velocidade u das malhas computacionais são apresentados nas Fig. 38a, 38b, 38c e 38d em que é perceptível qualitativamente que mesmo a malha mais grosseira já parece apresentar resultados que modelam satisfatoriamente o fenômeno físico, visto que já é apresentado um aumento da espessura da camada limite na direção de x enquanto o escoamento fora da camada limite, invíscido, se mantém com $u = U_\infty$.

Figura 38 – Campos de u em diferentes malhas.

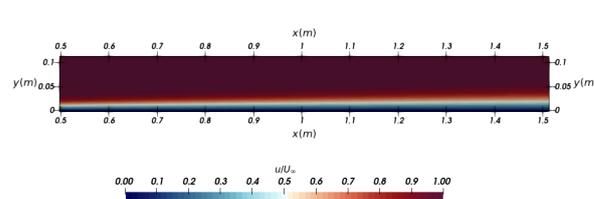
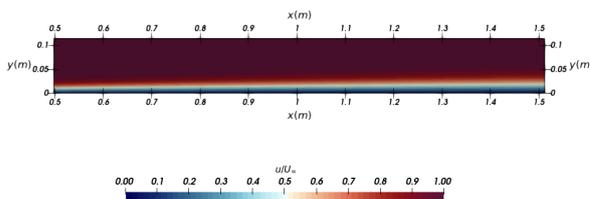
(a) 256x64.

(b) 512x128.



(c) 1024x256.

(d) 2048x512.



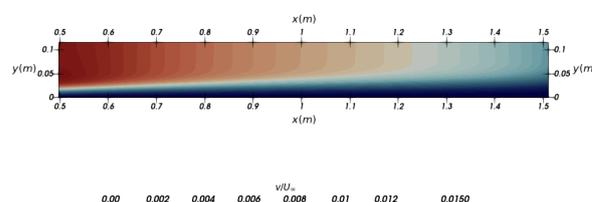
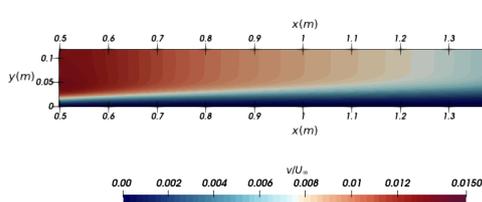
Fonte: Próprio autor.

As Figuras 39a, 39b, 39c e 39d apresentam os campos de velocidade v , para o escoamento sobre uma placa plana sem gradiente de pressão. Percebe-se que esses valores são significativamente menores dos que foram apresentados na Fig. 38 e assim pode-se notar instabilidades numéricas mais facilmente do que nos resultados computacionais de u . É perceptível que o refinamento de malha consegue melhorar a modelagem dos perfis de v no início do domínio útil visto que esses se tornam mais definidos a medida que há uma maior quantidade de pontos na região.

Figura 39 – Campos de v em diferentes malhas.

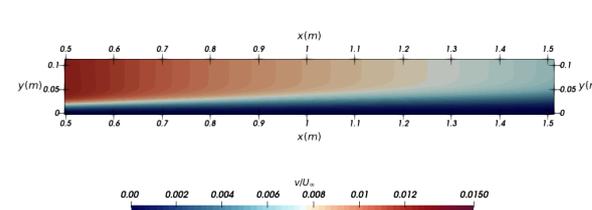
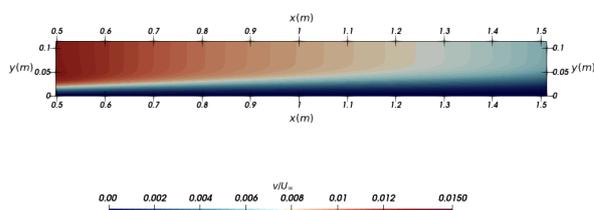
(a) 256x64.

(b) 512x128.



(c) 1024x256.

(d) 2048x512.



Fonte: Próprio autor.

Perfis verticais para u/U_∞ e v/U_∞ em $x = 1\text{ m}$ para as diferentes malhas são apresentados nas Fig. 40 onde y^* é a coordenada y adimensionalizada pelo valor de δ_{99} obtido em $x = 1\text{ m}$. Essa escolha de adimensionalização foi feita para que a camada limite fique normalizada para qualquer x do escoamento modelado ao contrário da adimensionalização clássica de Blasius em que o fim da camada limite é marcado por $\eta = 5$.

Observando a Fig. 40a constata-se a análise qualitativa feita através das Fig. 38, *i.e.*, desde a malha mais grosseira, 256×64 , o perfil de velocidade u/U_∞ converge com a solução de Blasius. Por outro lado, a velocidade v é significativamente diferente do perfil de Blasius a partir de $y^* > 0,8$ conforme observado em Fig. 40b.

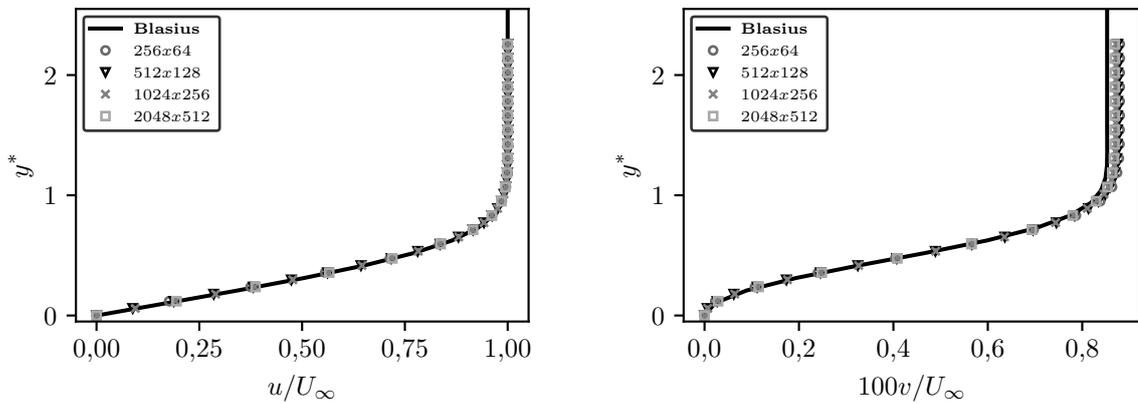
Em experimentos virtuais utilizando o método de volumes finitos com esquema de diferenças centradas na modelagem da camada limite, Hirsch⁶⁰ constata que a velocidade v difere significativamente dos perfis de Blasius devido a erros na velocidade u que causam um impacto em v , pois essa tem três ordens de magnitude menor que u . Essas constatações

embora feitas para simulações realizadas pelo método de volumes finitos parecem ser válidas também para o IMERSPEC.

Figura 40 – Perfis verticais de velocidades em $x = 1\text{ m}$.

(a) u/U_∞ .

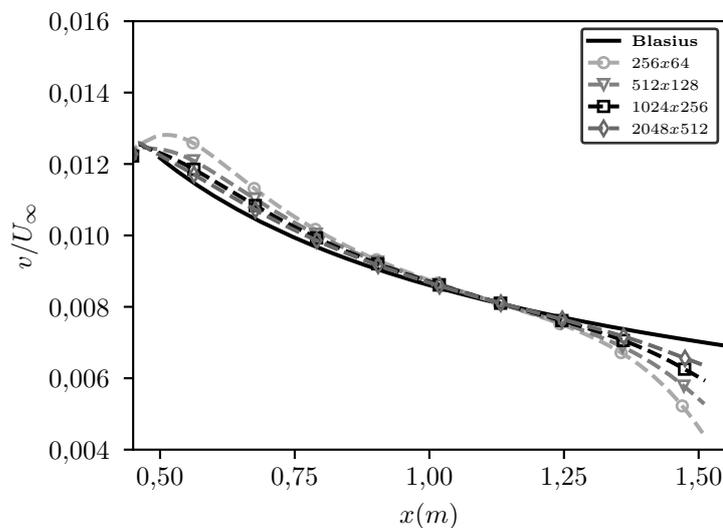
(b) v/U_∞ .



Fonte: Próprio autor.

Observando um perfil horizontal de v/U_∞ em $y = 0,1\text{ m}$, região inercial do escoamento, ao longo do domínio útil, $0,5\text{ m} \leq x \leq 1,5\text{ m}$, na Fig. 41 nota-se que a maior região de convergência das malhas ocorre entre $0,9\text{ m} \leq x \leq 1,2\text{ m}$ e que mesmo com os artifícios do método *fringe* em suavizar a imposição da periodização na direção x tanto a parte inicial quanto final do domínio útil perdem acurácia. Identifica-se que o refinamento de malhas computacionais consegue mitigar o efeito da zona *fringe* no domínio útil ao mesmo tempo que, em geral, as soluções mais refinadas tendem à solução de Blasius.

Figura 41 – Perfil horizontal de v/U_∞ em $y = 0,1\text{ m}$.



Fonte: Próprio autor.

Predições de coeficientes de arrasto, C_d , com exatidão são uma questão difícil e desafiadora em CFD e representam um dos mais sensíveis critérios de avaliação de acurácia⁶⁰. O arrasto formado através do escoamento sobre uma placa plana sem gradiente de pressão é puramente arrasto de fricção¹⁴ e portanto, no presente trabalho, será analisado o coeficiente de atrito, C_f , que oferece uma distribuição de respostas computacionais ao longo do escoamento ao invés de apenas um valor numérico como o C_d .

Através do MFI, sabe-se que o termo de força total por unidade de volume lagrangiano do MDFM, conforme Eq. 3.48, é igual a força total euleriana por unidade de volume e esse termo representa a força da estrutura, nesse caso a placa, sobre as partículas de fluido para que essas entrem em repouso. Ao mesmo tempo, o coeficiente de atrito é definido através da Eq. 4.11,

$$C_f(x) = \frac{2f_{placa}(x)}{\rho U_\infty^2 A_{placa}}, \quad (4.11)$$

em que a área da placa discreta para cada posição x é igual a $dx \cdot 1$, já que a modelagem é bidimensional, e a força discreta do fluido sobre a placa é igual a força da placa por unidade de volume sobre o fluido multiplicado por seu volume, $dx \cdot dy \cdot 1$, porém com sentido oposto, ou seja, $f_{placa}(x) = -f_i^{Total}(x,t)dx \cdot dy \cdot 1$. Substituindo-se essas informações na Eq. 4.11 tem-se a Eq. 4.12,

$$C_f(x) = \frac{-2f_i^{Total}(x,t)dx \cdot dy \cdot 1}{\rho U_\infty^2 dx \cdot 1} = \frac{-2dy f_i^{Total}(x,t)}{\rho U_\infty^2}. \quad (4.12)$$

A Figura 42a apresenta a distribuição de C_f obtida para as diferentes malhas computacionais ao longo do domínio útil. Repara-se que a partir da malha com 512×128 pontos colocantes as distribuições de C_f convergem qualitativamente a solução de Blasius, principalmente para $x > 0,7 m$.

Observando a Fig. 42a é perceptível que as regiões com maiores divergências em relação aos resultados esperados são o final e, sobretudo, o início do domínio útil. Esse fato esta de acordo com o observado na Fig. 41 mesmo que tradicionalmente essa variável seja um pós processamento ligado ao campo u ao invés de v e a norma L_2 euleriana dos pontos da placa plana indiquem uma acurácia de $1,73 \cdot 10^{-8}$ para u e $1,81 \cdot 10^{-6}$ para v .

A partir da distribuição de C_f pode-se calcular o erro absoluto em porcentagem (%), Er ,

$$Er = \frac{|C_f^N - C_f^B|}{C_f^B} \cdot 100, \quad (4.13)$$

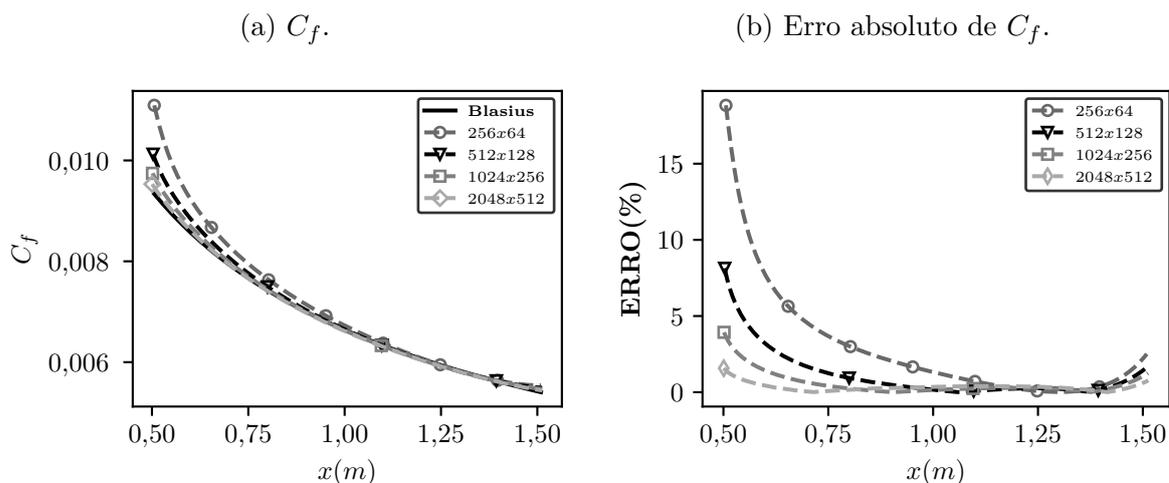
em que o sobrescrito N se refere a resposta computacional e B se refere ao coeficiente de atrito vindo da solução de Blasius. Com base na Eq. 4.13 tem-se a Fig. 42b em que são

apresentados dados qualitativos das distribuições de C_f em cada malha computacional. O melhor resultado é o da malha mais refinada, 2048×512 , pontos colocantes que apresenta erro absoluto máximo menor que 2% localizado no início do domínio útil.

Apesar da malha com 2048×512 pontos colocantes apresentar os menores erros absolutos o custo computacional dessa simulação com os recursos disponíveis foi de aproximadamente seis semanas enquanto a malha de 1024×256 pontos apresentou custo computacional de cerca de 4 dias. Para elencar os motivos dessa alta significativa no custo computacional cita-se o fato do código ser *serial* e todo refinamento de malha ser uniforme pela limitação do uso da FFT, tornando assim o aumento do custo computacional em um aumento exponencial.

Dessa forma, para posteriores análises ao longo dessa seção optou-se pela malha de 1024×256 pontos, que possui erro percentual máximo menor que 4%, a fim de realizar todas as análises desejadas em cima da modelagem do desenvolvimento da camada limite sobre uma placa plana sem gradiente de pressão.

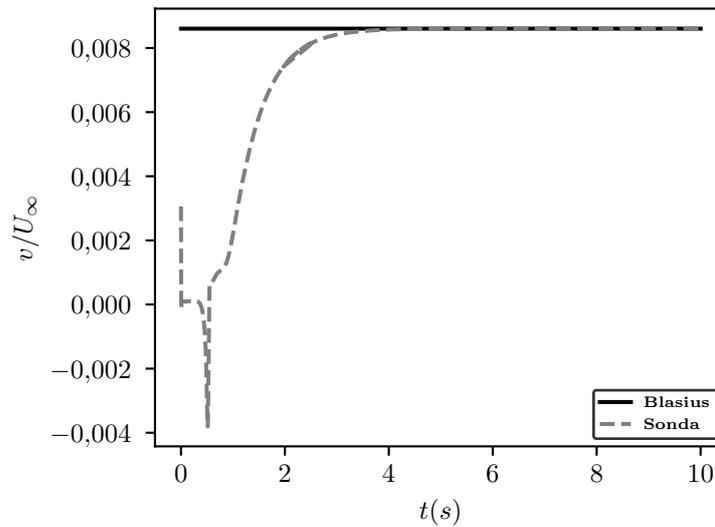
Figura 42 – C_f e seus respectivos erros absolutos para as malhas computacionais.



Fonte: Próprio autor.

A fim de verificar se o tempo de físico de 60 s é o suficiente para que o escoamento entrasse em regime permanente foi posicionada uma sonda temporal em $x = 1\text{ m}$ e $y = 0,057\text{ m}$, posições próximas ao centro do domínio útil, e comparou-se o comportamento com o valor estimado por Blasius. Esses resultados são apresentados na Fig. 43 onde nota-se que o escoamento parece atingir o regime permanente em cerca de 4 s e o tempo escolhido é o suficiente para que os resultados obtidos e analisados reflitam o regime permanente do fenômeno físico.

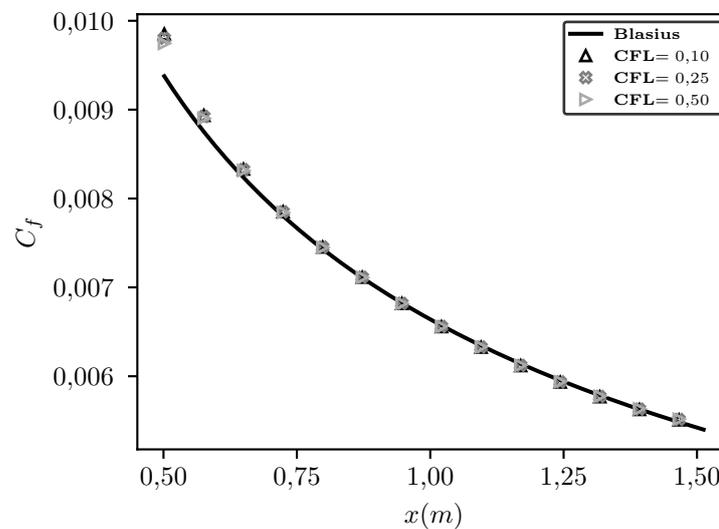
Após o refinamento de malha foi analisado o incremento temporal. Em modelagens feitas por MVF junto a métodos de avanço temporal explícitos para esse tipo de escoamento são utilizados baixos números de CFL entretanto como não é modelado o bordo de ataque

Figura 43 – Sonda temporal de v/U_∞ , malha de 1024×256 pontos.

Fonte: Próprio autor.

da placa plana espera-se que os resultados numéricos não sejam tão dependentes de baixos incrementos temporais. Conforme mencionado foram realizados experimentos virtuais com CFL iguais a 0,5; 0,25 e 0,1 todos com a malha computacional de 1024×256 pontos colocantes.

Como forma de investigar a acurácia obtida com cada CFL foi utilizada as distribuições de C_f ao longo do domínio útil. Esses dados são apresentado na Fig. 44 em que se constata que o refinamento do CFL não causou melhora nos resultados computacionais, de fato a solução obtida foi indiferente a variação desse parâmetro.

Figura 44 – Distribuição de C_f para diferentes CFL .

Fonte: Próprio autor.

Respostas computacionais possuem duas fontes de erros. Esses erros são devidos: ao método espacial utilizado e aos métodos de avanços temporais implementados. Na análise do refinamento de malha notou-se regiões no início e no final do domínio útil que apresentam significativa discordância dos resultados computacionais com a solução de Blasius ao contrário do resto do domínio. Um refinamento localizado de malha poderia reduzir tais erros espaciais de modo que os erros temporais passassem a ser mais significativos, entretanto, no atual estágio do código isso não é possível.

Assim, o refinamento de CFL passa a ser irrelevante pois os maiores erros numéricos da malha são decorrentes da discretização espacial e menores erros temporais causados por Δt menores não seriam notados. Por esse motivo, em posteriores análises dessa seção, manteve-se o CFL igual a 0,5 nos experimentos virtuais realizados.

Definidos uma malha computacional e um CFL para posteriores análises deseja-se explorar características de modelagem do esquema apresentado na Fig. 36 a fim de melhorar os resultados obtidos pelo IMERSPEC. As características exploradas serão: a composição do domínio complementar, a forma de implementação computacional da placa plana, tipos de condições de contorno do topo disponíveis na modelagem do fenômeno físico modelado e o tamanho da altura do domínio útil transversal.

4.4.1 Análise Domínio Complementar

Para determinar a melhor composição do domínio complementar foram realizados três diferentes experimentos virtuais. No primeiro experimento, o método de *Buffer* foi utilizado junto a uma região de forçagem através do MDFM já que essa abordagem é a usual em modelagens com o IMERSPEC^{30, 32, 8, 7, 31}. O segundo experimento teve o domínio complementar formado exclusivamente pelo método de *Buffer* a fim de avaliar o impacto da zona de forçagem nos resultados computacionais. O terceiro experimento foi realizado com o método *fringe*, já explicado anteriormente.

Apesar do método de *buffer* e *fringe* apresentarem semelhanças entre si há diferenças significativas. Ao contrário do método *fringe*, o método *Buffer* não apresenta qualquer desenvolvimento espacial fictício dentro do domínio complementar e os perfis de entrada do domínio útil são forçados de acordo com $\Psi(x)$ ao longo de todo o domínio complementar. Outra diferença relevante foi vista na Fig. 21, em que o formato da função $\Psi(x)$ do método de *buffer* no final do domínio complementar se mantém igual a unidade, ao contrário da $\Psi(x)$ do método *fringe* que se reduz a zero.

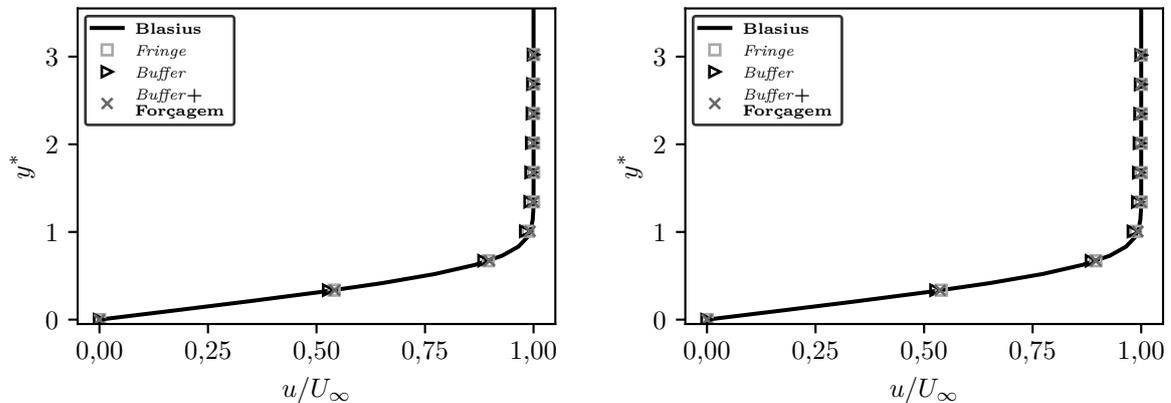
As Figuras 45a e 46a apresentam os últimos perfis de velocidade u/U_∞ do domínio complementar e os primeiros perfis de velocidade no domínio útil obtidos pelo método de *buffer* junto a uma região de forçagem, apenas pelo método de *buffer* e pelo método *fringe*. Comparando a Fig. 45a e 45b nota-se absoluta convergência entre os perfis u/U_∞ obtidos

para as três composições do domínio complementar.

Figura 45 – Perfis de u/U_∞ dos experimentos virtuais no domínio complementar e útil.

(a) Perfis de u/U_∞ no domínio complementar.

(b) Perfis u/U_∞ no domínio útil.



Fonte: Próprio autor.

Assim como observado na análise de refinamento de malha, a componente v , por apresentar 3 ordens de grandeza menores que u , evidencia melhor inexactidões numéricas. Os perfis verticais de v/U_∞ no último ponto do domínio complementar e no primeiro ponto do domínio útil são apresentados na Fig. 46. Observando a Fig. 46a nota-se que o perfil obtido segundo o método de *buffer* junto a uma região de forçagem consegue convergir ao longo de quase toda resposta para a solução de Blasius salvo próximo a imposição da placa plana onde há inexactidão. Desca-se entretanto que extamente na placa as condições de não deslizamento seguem sendo satisfeitas com a acurácia de ϵ definida na Tab. 5.

O perfil obtido pelo domínio complementar que utiliza o método de *buffer*, Fig. 46a apresenta a mesma falta de exatidão da resposta computacional observada para o experimento virtual com *buffer* e forçagem, porém, essa exatidão é ainda maior. Nota-se também a formação de uma oscilação numérica ao longo do perfil que prejudica a exatidão do perfil.

Através da Fig. 46a, constata-se que perfil obtido pelo método *fringe* apresenta a menor precisão a partir de $y^* > 1$ quando comparado aos outros experimentos mas, por outro lado, não há oscilações numérica ou regiões com queda de acurácia súbita e o método consegue boa acurácia do perfil próximo a placa plana.

Pode-se analisar o efeito do três diferentes domínios complementares sobre o domínio útil com os perfis presentes na Fig. 46b. A maior mudança do comportamento dos experimentos em relação ao domínio complementar, Fig. 46a, é o perfil obtido pelo *buffer* mais forçagem em que é claro uma descaracterização da solução computacional da placa plana até, aproximadamente, $y^* = 1,5$.

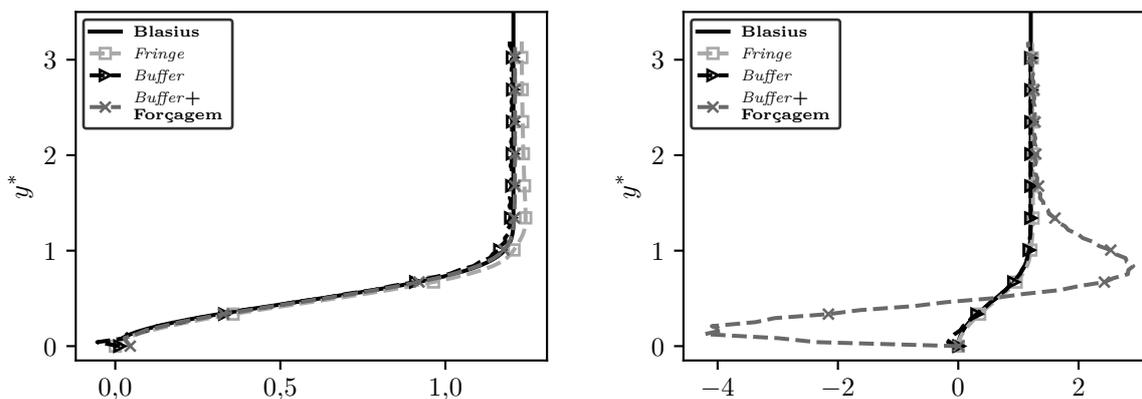
O comportamento das soluções computacionais obtidas pelo domínio complemen-

tar composto exclusivamente pelo método *buffer* e pelo método *fringe* na Fig. 46a se mantiveram iguais aos observados na Fig. 46b.

Figura 46 – Perfis de v/U_∞ no domínio complementar e útil.

(a) Perfis de v/U_∞ no domínio complementar.

(b) Perfis v/U_∞ no domínio útil.



Fonte: Próprio autor.

A fim de melhor analisar os três tipos de domínios complementares e seus efeitos sobre o domínio útil, tem-se as Fig. 47 em que apresentam-se perfis horizontais em $y = 0,1 m$ em todo o domínio, Fig. 47a e com maior enfoque no domínio útil, Fig. 47b.

Nota-se na Fig. 47a que as condições de periodicidades implícitas ao uso de FFT estão presentes nos três casos já que os valores no final do domínio total são reinjetados no início do domínio. O experimento que apresenta o método *fringe* no domínio complementar apresenta as três regiões e o mesmo comportamento discutido na análise da Fig. 37b.

Analisando os dois experimentos que apresentam *Buffer* repara-se que a falta de um desenvolvimento espacial fictício que suaviza a periodização do escoamento e satisfaz a equação da continuidade causa impactos negativos antes do domínio complementar, causando uma redução de velocidade v até valores negativos que descaracterizam totalmente o escoamento modelado no domínio útil conforme visto com maior detalhes na Fig. 47b a partir de $x > 1,1 m$. Os valores dentro do domínio complementar são reduzidos ainda mais antes de sofrerem com a forçagem do *buffer* quando $\Psi(x)$ começa a assumir valores maiores que 0. Essa redução de v até valores negativos ocorre principalmente devido a operação de projeção sobre o plano π dos campos u e v que força o domínio complementar a satisfazer a equação da continuidade mesmo que o que esteja sendo imposto dentro do *buffer* não satisfaça essa condição. Como a operação de projeção ocorre no domínio espectral esse efeito não fica restrito apenas dentro do domínio espectral e descaracteriza parte do domínio útil também.

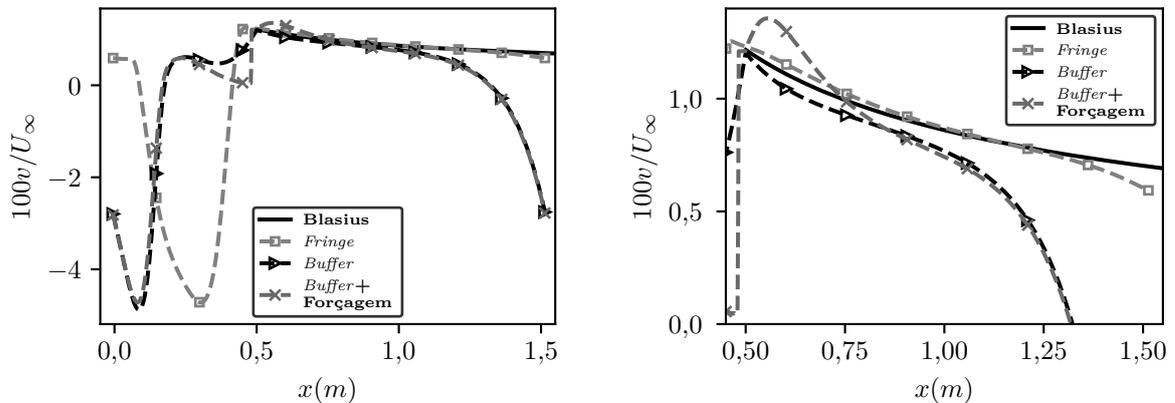
O resultado final da periodização do escoamento utilizando o método *Buffer* na modelagem da camada limite em uma placa plana com o IMERSPEC é um efeito misto

entre duas operações. De um lado, no domínio real, a aplicação do *buffer* tende a periodizar o escoamento em x suavemente, com intensidade variável e dependente de $\Psi(x)$, forçando constantemente um perfil de Blasius desenvolvido em u e v em toda a região do domínio complementar. Após essa operação, é projetado o campo u e v no domínio espectral, o que altera os dois campos de velocidades até que estes satisfaçam a equação de continuidade em todo o domínio mesmo que seja alterada a operação anterior de periodização já que esta não obedecia tal critério.

O emprego de uma zona de forçagem para melhorar a qualidade da entrada, comum em diversas modelagens no IMERSPEC, não teve sucesso no presente caso. É claro que a imposição dessa zona de forçagem causa uma descontinuidade no escoamento quando se compara a região $0,4\text{ m} \leq x \leq 0,5\text{ m}$ para a simulação com apenas o método de *buffer* e o experimento virtual com o *buffer* e a forçagem. A Figura 47b mostra com maior detalhe que à jusante da zona de forçagem ocorre um *overshoot* causado provavelmente pela região de forçagem visto que os outros experimentos não possuem esse comportamento tão significativo.

Figura 47 – Perfis horizontais de v/U_∞ em $y = 0,1\text{ m}$.

- (a) Perfis horizontais em todo o domínio. (b) Perfis horizontais no domínio útil.



Fonte: Próprio autor.

Para avaliar a acurácia de cada composição do domínio complementar na modelagem do escoamento tem-se as Fig. 48. O domínio complementar formado pela zona de *buffer* e a zona de forçagem, tradicional no IMERSPEC, apresenta-se incapaz de prever uma distribuição de C_f próxima da solução de Blasius em visto do apresentado na Fig. 48a. A descontinuidade observada na Fig. 47b e a inexactidão próxima a placa plana observada na Fig. 46a causam oscilações numéricas na definição da força lagrangiana obtida pelo MFI. Essa força é utilizada na definição de C_f e, portanto, a distribuição desse coeficiente também se torna oscilante.

Perante ao exposto na Fig. 48b, infere-se que o domínio complementar composto apenas por uma zona de *buffer* origina uma distribuição de C_f também oscilante próxima

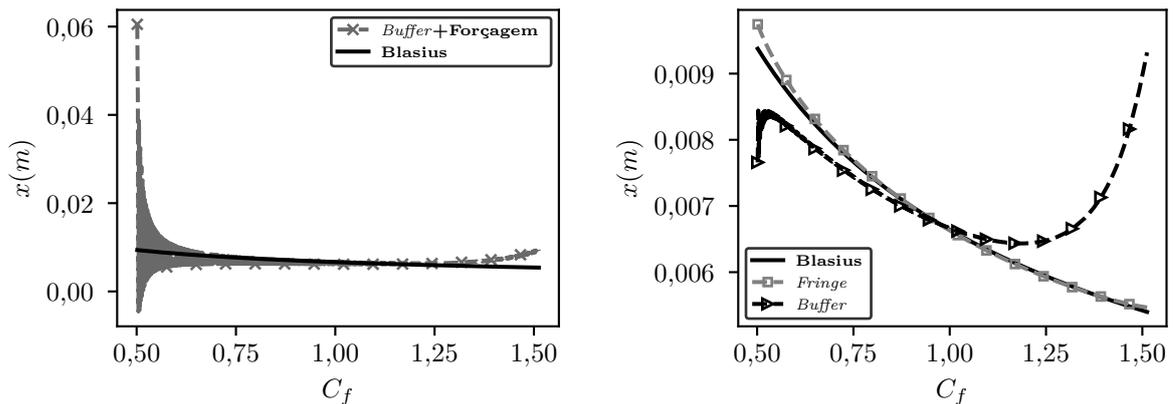
ao início do domínio útil. Esse fato foi indicado através das Fig. 46a e 46b que apresentaram baixa acurácia do perfil desse experimento virtual na região próxima a placa plana. Outro aspecto observado é que cerca de 50% do domínio útil não modela o fenômeno físico por interferência da zona de *buffer*.

Em face do observado nas Fig. 48 constata-se que o uso do método *fringe* no domínio complementar é a melhor alternativa de periodização em x e restauração da condição de entrada do domínio útil mesmo que haja baixa precisão da solução computacional no início do domínio conforme visto na Fig. 48b e sugerido pelas análise da Fig. 46a. O artifício de uma distribuição espacial fictícia dentro do domínio complementar a fim de minimizar o efeito desse método na região final do domínio útil também deve ser salientada visto que a distribuição de C_f é significativamente mais próxima a solução de Blasius na região de $x > 1,1 m$ do que as distribuições de coeficientes dos outros experimentos.

Figura 48 – Distribuição de C_f para diferentes tipos de domínios complementares.

(a) C_f obtidos por *buffer* mais forçagem.

(b) C_f obtidos por *buffer* ou *fringe*.



Fonte: Próprio autor.

Pelas análises dos três tipos de tratamento do domínio complementar, constata-se que o método *fringe* é a melhor alternativa na modelagem do escoamento sobre placa plana sem gradiente de pressão e será utilizado nos próximos experimentos virtuais neste trabalho.

4.4.2 Condição de Contorno da Placa Plana

O fator seguinte analisado foi a forma de implementação da condição de contorno da placa plana. Essa característica foi explorada em uma tentativa de melhorar os resultados computacionais obtidos até então. A Figura 49 apresenta as três opções de implementação da placa plana testadas.

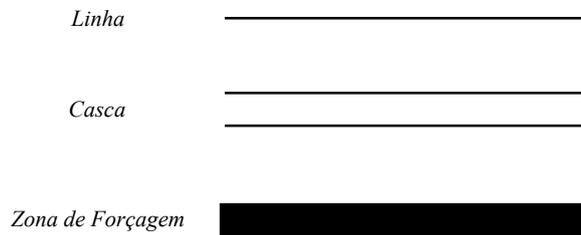
A primeira alternativa de implementação consiste em uma linha de pontos sem qualquer espessura. Essa condição de contorno é simplesmente uma linha de pontos

discretos, que demarca o começo do domínio útil, em que a condição de não deslizamento é imposta para u e v .

A segunda alternativa é a de uma “casca” e é caracterizada por duas linhas paralelas distanciadas por $5\%L_y$ em que são impostas as condições de não-deslizamento para u e v apenas nas linhas paralelas. Assim, o fluido dentro da “casca” não tem qualquer condição de contorno imposta e se torna confinado, fazendo parte do domínio complementar.

A última alternativa é a imposição de uma placa plana com espessura de $5\%L_y$, *i.e.*, uma zona de forçagem (ZF) em que foi imposta a condição de não deslizamento para u e v em todos os pontos ao longo da espessura da placa.

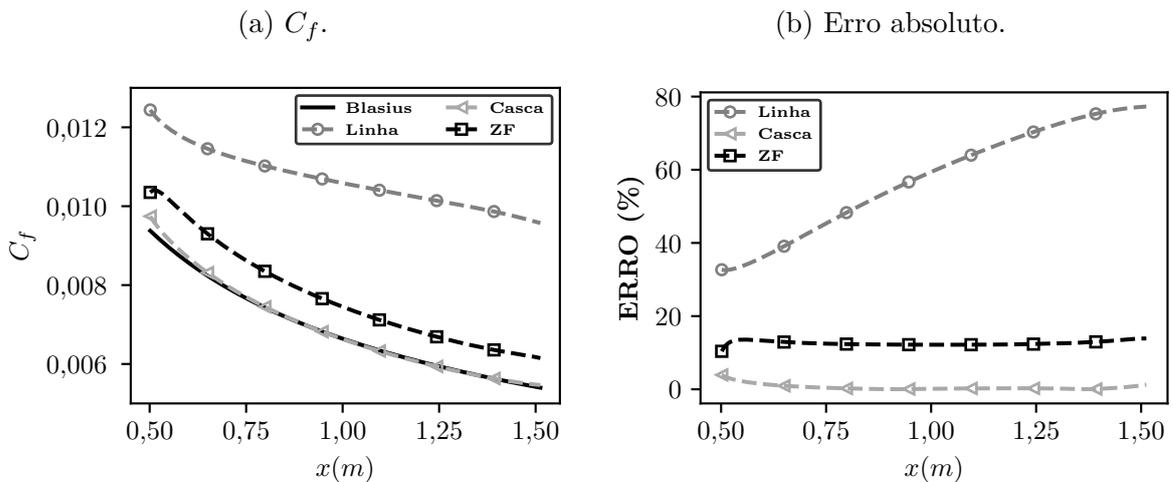
Figura 49 – Diferentes formas de implementação da placa plana.



Fonte: Próprio autor.

Afim de avaliar cada alternativa de modelagem da placa plana utilizou-se as distribuições de C_f e seus respectivos erros absolutos em relação a distribuição de Blasius para esse coeficiente. A Fig. 50a apresenta as distribuições de C_f obtidas para cada modelagem da placa plana enquanto a Fig. 50b ilustra os seus erros absolutos.

Figura 50 – C_f e erros absolutos para diferentes implementações da placa plana.



Fonte: Próprio autor.

Nota-se que a primeira alternativa, da modelagem da placa plana em forma de linha, foi a que apresentou piores resultados computacionais. A sua distribuição de C_f

é superestimada em relação a distribuição proveniente da solução de Blasius com erros absolutos variando de, aproximadamente, 32% à 75%.

ZF também não apresentou resultados tão bons quanto a implementação de “casca” da placa mas houve menor variação percentual do erro absoluto ao longo do domínio útil. Destaca-se que assim como a implementação de linha, a distribuição de C_f apresentou estimativas superiores aos valores esperados.

A melhor alternativa dentre as três apresentadas foi a da modelagem de “casca”. Essa modelagem permitiu mitigar os efeitos de uma descontinuidade do escoamento através da forçagem das duas linhas paralelas ao mesmo tempo que minimizou-se os efeitos do domínio não utilizado na modelagem do fenômeno físico. Os erros percentuais da distribuição de C_f ficaram abaixo de 4% conforme já identificado na Fig. 42. Pelos motivos elencados, a placa plana continuará sendo modelada com a proposta de “casca” em posteriores análises.

4.4.3 Condições de Contorno Topo

A reprodução computacional do desenvolvimento da camada limite sobre uma placa plana sem gradiente de pressão com uma nova metodologia como o IMERSPEC pode apresentar novas propriedades não vistas em metodologias mais clássicas, como por exemplo, o método dos volumes finitos. Com base nisso, se propôs a análise de três distintas possíveis configurações para as condições de contorno de topo do domínio, Fig. 36, apresentadas na Tab. 6.

Tabela 6 – Possíveis configurações das condições de contorno do topo.

	u	v
<i>Cond. 1</i>	U_∞	$U_\infty \frac{d\delta_*}{dx}$
<i>Cond. 2</i>	$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$	$U_\infty \frac{d\delta_*}{dx}$
<i>Cond. 3</i>	$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial v}{\partial y} = 0$

Fonte: Próprio autor.

A condição para v igual a $U_\infty \frac{d\delta_*}{dx}$ provém de um estudo de compatibilidade entre a porção irrotacional e rotacional do escoamento sobre uma placa plana sem gradiente de pressão apresentada em Panton¹² e já foi utilizada em modelagens de camada limite turbulenta em uma placa plana sem gradiente de pressão²⁰. A fim de determinar essa condição deve-se primeiro estimar a espessura de deslocamento em cada posição x ao longo da placa em cada instante temporal para, em seguida, calcular a sua respectiva derivada

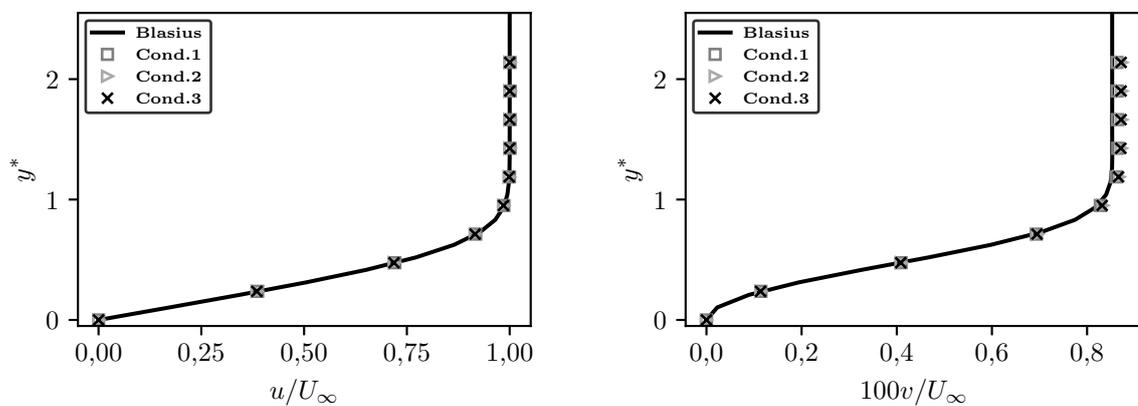
e por fim multiplicar a expressão pela velocidade U_∞ . Essa expressão equivale, para o escoamento modelado, a V_∞ de Blasius.

A fim de analisar os efeitos das possíveis configurações na reprodução computacional do fenômeno físico, tem-se os perfis de velocidade u/U_∞ e v/U_∞ em $x = 1\text{ m}$, respectivamente, nas Fig. 51a e 51b. Investigando os perfis de u/U_∞ através da Fig. 51a não é notado nenhuma diferença qualitativa dos perfis entre as soluções obtidas pelas condições de Dirichlet ou de Neumann nula. Todavia, analisando os perfis de v/U_∞ , Fig. 51b percebe-se que a combinação de Dirichlet para u e v consegue resultados mais próximos ao perfil de Blasius do que as outras configurações.

Figura 51 – Perfis verticais de velocidades em $x = 1\text{ m}$.

(a) u/U_∞ .

(b) v/U_∞ .



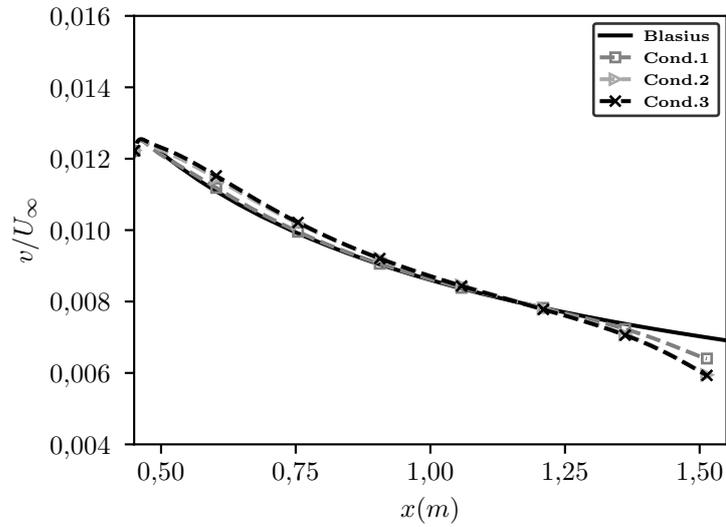
Fonte: Próprio autor.

O perfil horizontal em $y = 0,1\text{ m}$ no domínio útil dos três experimentos avaliados é apresentado na Fig. 52. Constata-se que as condições de topo do tipo Dirichlet para u e v tangenciam os valores de Blasius em quase todo o domínio enquanto as condições 2 e 3 apresentam resultados muito próximos entretanto inferiores ao das condições de topo 1. A perda de exatidão da resposta computacional observada ao fim do domínio se deve a zona *fringe* já que esse comportamento é condizente ao observado por Nordström, Nordin e Henningson²².

As Figuras 53a e 53b ilustram a distribuição de C_f e seus respectivos erros absolutos para os três casos analisados. Através da Fig. 53a não se nota nenhuma diferença qualitativa nas distribuições oriundas das condições de topo estudadas, entretanto analisando o erro absoluto das respostas computacionais nota-se que as condições 1 apresentam erros absolutos maiores dos que as demais em $0,6\text{ m} \leq x \leq 1,1\text{ m}$ do domínio enquanto as outras duas condições apresentam resultados próximos entre si conforme visto nas Fig. 51 e 52.

Entende-se que, apesar das condições de Dirichlet para u e v , as condições 1, melhoraram, de forma geral, os perfis de velocidade v/U_∞ ao longo do domínio útil. A

Figura 52 – Velocidade v/U_∞ ao longo de x em $y = 0,1 m$.

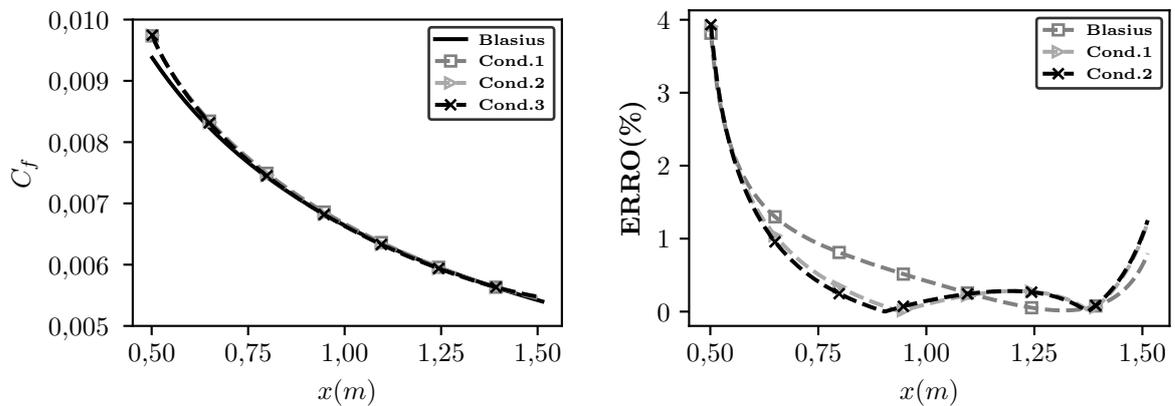


Fonte: Próprio autor.

Figura 53 – C_f e erros absolutos para diferentes configurações das condições de topo.

(a) C_f .

(b) Erro absoluto.



Fonte: Próprio autor.

distribuição de C_f , que indica a acurácia da modelagem, oriunda dessa implementação é, de maneira geral, inferior às outras condições de topo analisadas. Em relação as condições 2 e 3 embora elas possuem resultados próximos entre si opta-se nesse trabalho utilizar as condições de contorno 3 de derivadas nulas para u e v já que são mais fáceis de implementar computacionalmente e poderão ser aplicadas facilmente em futuras modelagens de camadas limites turbulentas.

4.4.4 Altura do Domínio Útil

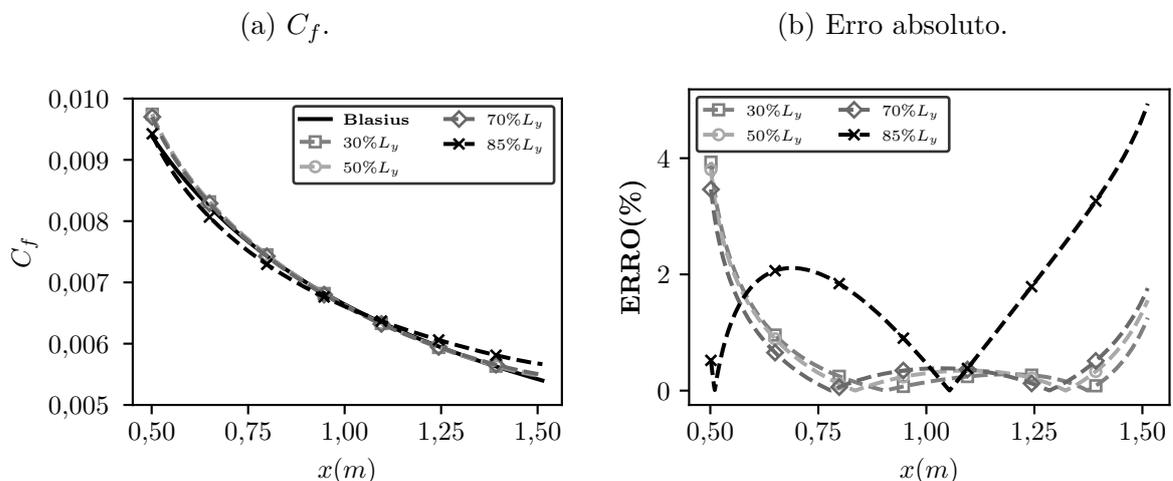
Conforme mencionado, a metodologia IMERSPEC apresenta periodicidade em todas as direções do domínio computacional embora o escoamento modelado não possua nenhuma. Para se manter a periodicidade transversal do escoamento uma parte do domínio computacional não possui nenhum tipo de modelagem, Fig. 36. Essa região denominada por domínio não modelado não deve influenciar a modelagem do escoamento, sua função é preservar a condição periódica transversal necessária pelo uso da *FFT*.

Em todos os resultados analisados utilizou-se apenas $30\%L_y$ para o domínio útil, *i.e.*, 70% do domínio transversal não foi modelado conforme exposto na Fig. 36. Uma otimização desse parâmetro de simulação é de interesse visto que mais pontos colocantes do domínio útil podem apresentar maior acurácia para a mesma malha computacional já analisada ou maior espaço para modelagem de escoamentos mais complexos em futuros trabalhos, como por exemplo, o escoamento de camada limite atmosférica.

Com base nisso, foram realizados quatro experimentos virtuais com os parâmetros de simulação previamente otimizados em que a altura do domínio útil é de: $30\%L_y$, $50\%L_y$, $70\%L_y$ e $85\%L_y$. A distribuição de C_f obtida para os quatro experimentos assim como o resultado esperado a partir dos resultados da solução de Blasius são apresentados pela Fig. 54a. Nota-se que a distribuição de C_f é indiferente a um domínio útil com maior quantidade de pontos colocantes transversais até quando o essa região do domínio total passa a ter $85\%L_y$.

Na Figura 54b é ilustrada a discrepância da distribuição de C_f onde nota-se que os resultados obtidos para $85\%L_y$ não são positivos visto que os erros absolutos são mais significativos do que os previamente apresentados na maior parte do domínio útil.

Figura 54 – C_f e erros absolutos para diferentes quantidades de pontos colocantes no domínio útil



Fonte: Próprio autor.

Devido as condições de periodicidade da metodologia IMERSPEC, todo o domínio computacional passa a ser interligado. Dessa forma, a condição de contorno da placa plana, imposta como “casca”, interfere no domínio não modelado por causa dos efeitos viscosos do escoamento e quando o domínio não modelado é reduzido para $5\%L_y$, ambas as “cascas” da modelagem da placa e das condições de contorno de topo possuem espessura igual a $5\%L_y$, a variação de velocidade e pressão nessa região passa a influenciar a distribuição de C_f .

Outro fato relevante é que a maior quantidade de pontos colocantes na direção transversal dentro do domínio útil não melhora os resultados computacionais, o que indica que a perda de exatidão da solução computacional no início do domínio útil e no final se devem majoritariamente a zona fringe. Mesmo identificando essa desvantagem do método fringe, esse artifício foi o que apresentou melhor resultados dentre os disponíveis.

Portanto, as regiões críticas de modelagem do camada limite de Blasius dentro do IMERSPEC são os “contatos” entre o domínio útil e o complementar. Caso essa metodologia admitisse refinamentos locais, a acurácia dessas regiões poderiam ser melhoradas.

5 CONCLUSÕES

O principal objetivo da presente dissertação era a modelagem bidimensional da camada limite de Blasius utilizando o IMERSPEC. A fim de familiarizar-se com a metodologia IMERSPEC foi feita a verificação numérica do código através da simulação dos vórtices de Taylor-Green e modelagem do jato livre em desenvolvimento temporal e espacial.

A verificação numérica sem o MFI apresentou a exatidão do código para uma malha de 16×16 pontos colocantes visto que a norma L_2 se manteve na ordem de grandeza equivalente a erro de máquina durante todo o tempo físico simulado. Quando o MFI foi imposto em pontos coincidentes do escoamento modelado a norma L_2 dos campos de velocidade ao longo do tempo físico se reduziu ainda mais demonstrando o potencial do IMERSPEC como ferramenta computacional de alta ordem.

Em seguida, foi modelado o jato plano em desenvolvimento temporal onde foi identificada que a alta exatidão numérica proporcionada pelo IMERSPEC causa a necessidade da imposição de ruído numérico nas espessuras cisalhantes do jato a fim de modelar escoamentos em transição à turbulência. A imposição do ruído numérico não influencia na modelagem laminar do escoamento, visto que, para esse regime as forças viscosas significativas amortecem qualquer perturbação imposta ao escoamento. Também foi identificado que o escoamento em transição modelado não representa o fenômeno físico após 20 s físicos devido ao uso da modelagem bidimensional que limita as instabilidades de Kelvin-Helmholtz ao emparelhamento primário de dipolos, pois não há a possibilidade de formação de instabilidades longitudinais e posterior tridimensionalização do escoamento.

Os experimentos virtuais realizados na modelagem do jato plano em desenvolvimento espacial ilustraram o processo de periodização utilizado até então para modelagens de escoamentos em desenvolvimento espacial. Até então, o domínio computacional total era subdividido em domínio complementar e útil. Dessa forma, a metodologia IMERSPEC consegue respostas computacionais fidedignas ao fenômeno físico modelado no domínio útil enquanto o domínio complementar torna o escoamento periódico e reestabelece a condição de entrada do domínio útil através de uma zona de *buffer* junto a uma zona de forçagem com MFI/MDFM.

É constatado que a modelagem bidirecional do jato plano livre em transição e em desenvolvimento espacial consegue representar o fenômeno físico até cerca de 30 s devido a limitação bidimensional. Principalmente quando as instabilidades de Kelvin-Helmholtz interagem com as condições de contorno periódicas transversais a modelagem perde qualquer representatividade do fenômeno de interesse.

Os valores médios da velocidade de centro do escoamento são comparados com a solução contínua e nenhuma das soluções computacionais, com qualquer intensidade de ruído imposto, converge para os resultados esperados. Nota-se também um atraso na decomposição do *core* do jato, possivelmente devido a não formação de instabilidade longitudinais e tridimensionalização do escoamento.

Os efeitos da projeção da solução computacional sobre o plano imaginário π são constatadas através da imposição de níveis de ruído branco mais significativos. Esse tipo de ruído não satisfaz a equação da continuidade, entretanto, a operação matemática de projeção garante a conservação de massa em todo o escoamento. Com base nisso, a medida que a solução computacional é submetida a ruídos mais significativos, mais a projeção altera o escoamento para que a conservação da massa seja satisfeita. Essa alteração é vista no perfil horizontal médio de u como um *overshoot* na entrada do domínio útil, região à jusante da imposição do ruído branco.

A modelagem da camada limite de Blasius exigiu uma nova estratégia de composição do domínio computacional. O domínio complementar ainda é empregado para a periodização na direção do desenvolvimento espacial do escoamento, entretanto, uma região do domínio passa a não ter nenhuma modelagem para que se satisfaça as condições de periodicidade transversal. Outra significativa mudança dessa modelagem em relação a representação do jato plano em desenvolvimento espacial é a composição do domínio complementar. O método *fringe* é utilizado inteiramente nessa porção do domínio sem qualquer zona de forçagem com MFI/MDFM.

Os perfis de velocidade u e v são analisados junto a distribuição de C_f e determina-se a malha com 1024×256 pontos colocantes para posteriores análises. É claro que os perfis de u já convergem para a solução de Blasius mesmo para malhas computacionais grosseiras enquanto o perfil de v e a distribuição de C_f necessitam de maior refinamento de malha.

A análise de refinamento de CFL indica a indiferença desse fator em relação aos resultados computacionais. Isso indica que erros decorrentes da discretização espacial ainda são mais grosseiros do que erros decorrentes da discretização temporal do método.

O método *fringe* empregado no domínio complementar da modelagem do escoamento sobre a placa plana causa perda de exatidão computacional em regiões específicas do domínio útil, a entrada e saída do domínio útil. Para tentar aperfeiçoar a acurácia da modelagem são testados domínios complementares compostos pelo método de *buffer* e com a configuração clássica do IMERSPEC. É verificado que nenhuma das alternativas apresenta melhora nos resultados previamente obtidos e é claro que a imposição de uma zona de forçagem no domínio complementar causa oscilações numéricas na distribuição de C_f e salto de velocidade similar ao observado para altos níveis de ruído na modelagem do jato plano em desenvolvimento espacial.

Também são estudadas formas de imposição da placa plana no domínio computacional. São propostas três possibilidades: a implementação da placa conforme uma linha, uma casa e uma zona de forçagem. Dentre as três imposições os melhores resultados computacionais são obtidos para a implementação em formato de “casca”.

As condições de contorno aplicadas no topo do domínio útil também são variadas e verificadas. Com três possibilidades baseadas em alternativas da literatura. A melhor composição dessas condições de contorno é a de derivadas nulas para u e v em razão da facilidade de implementação e sua possibilidade de aplicação na posterior modelagem de escoamentos turbulentos.

Por fim, foi feita uma tentativa de otimizar a região do domínio computacional não modelada que satisfaz as condições de contorno periódicas transversais. Identificou-se que desde que essa região não apresente variações significativas de propriedades que influenciem o domínio útil, ela não impacta a modelagem do escoamento. Dessa forma, o domínio útil pode ser modelado com $70\%L_y$ garantindo maior aproveitamento do domínio computacional para a modelagem do fenômeno de interesse.

Destaca-se a inexpressividade dos resultados computacionais com maior quantidade de pontos colocantes dentro do domínio útil. Essa característica indica que a maior limitação atual na resposta computacional é o método *fringe*, todavia, essa abordagem é a melhor disponível no presente momento.

5.1 Trabalhos Futuros

A presente dissertação funcionou como um reconhecimento para as etapas até a modelagem de uma camada limite utilizando a abordagem IMERSPEC. A próxima etapa direta do resultados apresentados é a modelagem tridimensional do escoamento de Blasius segundo o IMERSPEC e a reprodutibilidade dos resultados computacionais obtidos pela modelagem bidimensional.

O possível desenvolvimento de um método de refinamento local da malha computacional pode minimizar a fragilidade da modelagem decorrente do método *fringe* e uniformizar a distribuição de erros absolutos da resposta computacional.

Outras etapas necessárias até a modelagem de uma Camada Limite Atmosférica são:

- A modelagem da camada limite turbulenta sobre a placa plana;
- A modelagem da camada limite sobre a placa plana com efeitos térmicos;
- A adaptação das equações de *momentum* linear para modelar escoamentos atmosféricos e considerando suas contrapartes no domínio espectral.

REFERÊNCIAS

- 1 ABEEÓLICA. *Boletim anual 2021*. [S.l.], 2022. Disponível em: <https://abeeolica.org.br/wp-content/uploads/2022/07/ABEEOLICA_BOLETIMANUAL-2021_PORT.pdf>. Acesso em: 12.06.2023.
- 2 WINDEUROPE. *Wind energy in Europe - 2022 Statistics and the outlook for 2023-2027*. [S.l.], 2022. Disponível em: <<https://windeurope.org/intelligence-platform/product/wind-energy-in-europe-2022-statistics-and-the-outlook-for-2023-2027/#:~:text=Europe%20now%20has%2055%20GW,on%20average%20over%202023%2D2027.>>>. Acesso em: 12.06.2023.
- 3 MEYERS, J.; MENEVEAU, C. Large eddy simulations of large wind-turbine arrays in the atmospheric boundary layer. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, jan 2010. DOI:10.2514/6.2010-827.
- 4 MARIANO, F. P. *Simulação de escoamentos não-periódicos utilizando as metodologias pseudo-espectral e da fronteira imersa acopladas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2007.
- 5 MOREIRA, L. d. Q. *Simulação de grandes escalas de jatos periódicos temporais utilizando a metodologia pseudo-espectral de Fourier*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2007.
- 6 VILLELA, M. F. d. S. *Modelagem matemática de escoamentos bifásicos usando o Método Espectral de Fourier*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, mar. 2011.
- 7 KINOSHITA, D. *Desenvolvimento e implementação da metodologia combinada fronteira imersa térmica e pseudoespectral de Fourier*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2015. DOI:10.14393/ufu.te.2015.58.
- 8 NASCIMENTO, A. A. *Métodos Pseudoespectral de Fourier e Fronteira Imersa Aplicados a Escoamentos Simplificados de Engenharia de Perfuração*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2016.
- 9 TANI, I. History of boundary layer theory. *Annual Review of Fluid Mechanics*, Annual Reviews, v. 9, n. 1, p. 87–111, jan 1977. DOI:10.1146/annurev.fl.09.010177.000511.
- 10 PRANDTL, L. Über flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner reibung. *Verhandl. 3rd Int. Math. Kongr. Heidelberg (1904), Leipzig*, 1905. Translation by Dwight M. Miner, National Advisory Committee for Aeronautics (NACA).
- 11 BLASIUS, H. Grenzsichten in flüssigkeiten mit kleiner reibung. *Zeltschrift für Mathematik und Physik*, 1908. Translation by J. Vanier, National Advisory Committee for Aeronautics (NACA).
- 12 PANTON, R. L. *Incompressible Flow*. Fourth edition. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2013. 912 p. DOI:10.1002/9781118713075. ISBN 9781118013434.

- 13 COLES, D. *Topics in Shear Flow*. [S.l.]: California Institute of Technology, 2017. DOI:10.7907/Z90P0X7D.
- 14 SCHLICHTING, H.; GERSTEN, K. *Boundary-Layer Theory*. Nineth. [S.l.]: Springer, 2016. 805 p. DOI:10.1007/978-3-662-52919-5. ISBN 9783662529171.
- 15 HOWARTH, L. On the solution of the laminar boundary layer equations. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A - Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society, v. 164, n. 919, p. 547–579, feb 1938. DOI:10.1098/rspa.1938.0037.
- 16 KUNDU, P. K.; COHEN, I. M.; DOWLING, D. R. *Fluid mechanics*. 5th edition. ed. [S.l.]: Academic Press, 2012. 920 p. ISBN 9780123821003.
- 17 LIGHTHILL, M. J. On displacement thickness. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press (CUP), v. 4, n. 04, p. 383, aug 1958. DOI:10.1017/s0022112058000525.
- 18 KIM, J.; MOIN, P.; MOSER, R. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press (CUP), v. 177, p. 133–166, apr 1987. DOI:10.1017/s0022112087000892.
- 19 SPALART, P. Direct numerical study of leading-edge contamination. *Fluid dynamics of three-dimensional turbulent shear flows and transition*, Agard, p. 5–1, 1989.
- 20 LUND, T. S.; WU, X.; SQUIRES, K. D. Generation of turbulent inflow data for spatially-developing boundary layer simulations. *Journal of Computational Physics*, Elsevier BV, v. 140, n. 2, p. 233–258, mar 1998. DOI:10.1006/jcph.1998.5882.
- 21 LUNDBLADH, A. et al. *An efficient spectral method for simulation of incompressible flow over a flat plate*. [S.l.], 1999.
- 22 NORDSTRÖM, J.; NORDIN, N.; HENNINGSON, D. The fringe region technique and the fourier method used in the direct numerical simulation of spatially evolving viscous flows. *SIAM Journal on Scientific Computing*, Society for Industrial & Applied Mathematics (SIAM), v. 20, n. 4, p. 1365–1393, jan 1999. DOI:10.1137/s1064827596310251.
- 23 BRANDT, L.; SCHLATTER, P.; HENNINGSON, D. S. Transition in boundary layers subject to free-stream turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press (CUP), v. 517, p. 167–198, oct 2004. DOI:10.1017/s0022112004000941.
- 24 SCHLATTER, P.; ADAMS, N.; KLEISER, L. A windowing method for periodic inflow/outflow boundary treatment of non-periodic flows. *Journal of Computational Physics*, Elsevier BV, v. 206, n. 2, p. 505–535, jul 2005. DOI:10.1016/j.jcp.2004.12.015.
- 25 WANG, S.; ZHANG, X. An immersed boundary method based on discrete stream function formulation for two- and three-dimensional incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, Elsevier BV, v. 230, n. 9, p. 3479–3499, may 2011. DOI:10.1016/j.jcp.2011.01.045.
- 26 STRAND, J. S.; GOLDSTEIN, D. B. Direct numerical simulations of riblets to constrain the growth of turbulent spots. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press (CUP), v. 668, p. 267–292, jan 2011. DOI:10.1017/s0022112010005033.

- 27 ZHU, X.; HE, G.; ZHANG, X. An improved direct-forcing immersed boundary method for fluid-structure interaction simulations1. *Journal of Fluids Engineering*, ASME International, v. 136, n. 4, feb 2014. DOI:10.1115/1.4026197.
- 28 SUZUKI, K.; OKADA, I.; YOSHINO, M. Accuracy of the laminar boundary layer on a flat plate in an immersed boundary-lattice boltzmann simulation. *Journal of Fluid Science and Technology*, Japan Society of Mechanical Engineers, v. 11, n. 3, p. JFST0017–JFST0017, 2016. DOI:10.1299/jfst.2016jfst0017.
- 29 LANZILAO, L.; MEYERS, J. An improved fringe-region technique for the representation of gravity waves in large eddy simulation with application to wind farms. *Boundary-Layer Meteorology*, Springer Science and Business Media LLC, v. 186, n. 3, p. 567–593, dec 2022. DOI:10.1007/s10546-022-00772-z.
- 30 MARIANO, F. P. *Solução Numérica das Equações de Navier-Stokes Usando uma Híbridaç o das Metodologias Fronteira Imersa e Pseudo-Espectral de Fourier*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2011.
- 31 MARIANO, F. P. et al. An improved immersed boundary method by coupling of the multi-direct forcing and fourier pseudo-spectral methods. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Springer Science and Business Media LLC, v. 44, n. 9, aug 2022. DOI:10.1007/s40430-022-03679-5.
- 32 MOREIRA, L. d. Q. *Modelagem Matemática de Jatos em Desenvolvimento Espacial Usando Metodologia Pseudoespectral de Fourier*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2011.
- 33 KINOSHITA, D. et al. A novel immersed boundary/fourier pseudospectral method for flows with thermal effects. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, Informa UK Limited, v. 69, n. 4, p. 312–333, mar 2016. DOI:10.1080/10407790.2015.1104199.
- 34 JACOB, B. T. P. *Modelagem matemática de esteiras em desenvolvimento temporal utilizando o método pseudoespectral de Fourier*. Disserta o (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, ago. 2015. DOI:10.14393/ufu.di.2015.379.
- 35 VILLELA, M. *Modelagem matemática de escoamentos bifásicos usando a metodologia IMERSPEC combinada com os métodos VOF e Front-Tracking*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, ago. 2015. DOI:10.14393/ufu.te.2015.104.
- 36 MONTEIRO, L. M.; MARIANO, F. P. Flow modeling over airfoils and vertical axis wind turbines using fourier pseudo-spectral method and coupled immersed boundary method. *Axioms*, MDPI AG, v. 12, n. 2, p. 212, feb 2023. DOI:10.3390/axioms12020212.
- 37 WHITE, F. M. *Fluid Mechanics*. 8th edition. ed. India: Mc Graw Hill India, 2017. ISBN 9789385965494.
- 38 ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. *Fluid Mechanics Fundamentals and Applications*. 3rd edition. ed. New York, USA: McGraw-Hill Education, 2014. ISBN 9780073380322.
- 39 CANUTO, C. et al. *Spectral Methods Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics: Evolution to complex geometries and applications to fluid dynamics*. [S.l.]: Springer, 2007. 596 p. DOI:10.1007/978-3-540-30728-0. ISBN 9783642433955.

- 40 UHLMANN, M. An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows. *Journal of Computational Physics*, Elsevier BV, v. 209, n. 2, p. 448–476, nov 2005. DOI:10.1016/j.jcp.2005.03.017.
- 41 ALLAMPALLI, V. et al. High-accuracy large-step explicit runge–kutta (HALE-RK) schemes for computational aeroacoustics. *Journal of Computational Physics*, Elsevier BV, v. 228, n. 10, p. 3837–3850, jun 2009. DOI:10.1016/j.jcp.2009.02.015.
- 42 WANG, Z.; FAN, J.; LUO, K. Combined multi-direct forcing and immersed boundary method for simulating flows with moving particles. *International Journal of Multiphase Flow*, Elsevier BV, v. 34, n. 3, p. 283–302, mar 2008. DOI:10.1016/j.ijmultiphaseflow.2007.10.004.
- 43 BRIGGS, W. L.; HENSON, V. E. *The DFT: an owner's manual for the discrete Fourier transform*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995. DOI:10.1137/1.9781611971514.
- 44 SILVEIRA NETO, A. *Escoamentos Turbulentos: Análise física e modelagem teórica*. Uberlândia: Composer, 2020. ISBN 978-6599036514.
- 45 CHAPRA, S.; CANALE, R. *Numerical methods for engineers*. 7th. ed. New York: McGraw Hill, 2014. 992 p. ISBN 007339792X.
- 46 NORDSTRÖM, J.; NORDIN, N.; HENNINGSON, D. The fringe region technique and the fourier method used in the direct numerical simulation of spatially evolving viscous flows. *SIAM Journal on Scientific Computing*, Society for Industrial & Applied Mathematics (SIAM), v. 20, n. 4, p. 1365–1393, jan 1999. DOI:10.1137/s1064827596310251.
- 47 LUNDBLADH, A.; HENNINGSON, D. S.; JOHANSSON, A. V. *An efficient spectral integration method for the solution of the navier-stokes equations*. [S.l.], 2004.
- 48 KHUJADZE, G.; OBERLACK, M. DNS and scaling laws from new symmetry groups of ZPG turbulent boundary layer flow. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 18, n. 5, p. 391–411, nov 2004. DOI:10.1007/s00162-004-0149-x.
- 49 MALISKA, C. R. *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional: Fundamentos e coordenadas generalizadas*. Rio de Janeiro: Grupo Gen-LTC, 1995.
- 50 NASCIMENTO, A. A. et al. Comparison of the convergence rates between fourier pseudo-spectral and finite volume method using taylor-green vortex problem. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Springer Science and Business Media LLC, v. 42, n. 9, aug 2020. DOI:10.1007/s40430-020-02570-5.
- 51 TAYLOR, G. I.; GREEN, A. E. Mechanism of the production of small eddies from large ones. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A - Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society, v. 158, n. 895, p. 499–521, feb 1937. DOI:10.1098/rspa.1937.0036.
- 52 FREITAS, T. F. S.; SILVEIRA NETO, A.; MARIANO, F. P. Validation of imerspec2d using green-taylor vortices and temporal jet. In: ENCIT 2022. *19th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering*. Bento Gonçalves, Brasil: ABCM, 2022.

- 53 PRESS, W. H. et al. *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. 3. ed. USA: Cambridge University Press, 2007. ISBN 0521880688.
- 54 SOUZA, A. M. *Análise numérica da transição à turbulência em escoamentos de jatos circulares livres*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2005.
- 55 THOMAS, F. O. Structure of mixing layers and jets. *Applied Mechanics Reviews*, ASME International, v. 44, n. 3, p. 119–153, mar 1991. DOI:10.1115/1.3119497.
- 56 SILVA, C. B. da; MÉTAIS, O. On the influence of coherent structures upon interscale interactions in turbulent plane jets. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press (CUP), v. 473, p. 103–145, dec 2002. DOI:10.1017/s0022112002002458.
- 57 STANLEY, S. A.; SARKAR, S. Influence of nozzle conditions and discrete forcing on turbulent planar jets. *AIAA Journal*, American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), v. 38, n. 9, p. 1615–1623, sep 2000. DOI:10.2514/2.1144.
- 58 STANLEY, S. A.; SARKAR, S.; MELLADO, J. P. A study of the flow-field evolution and mixing in a planar turbulent jet using direct numerical simulation. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press (CUP), v. 450, p. 377–407, jan 2002. DOI:10.1017/s0022112001006644.
- 59 AHMAD, F.; AL-BARAKATI, W. H. An approximate analytic solution of the blasius problem. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier BV, v. 14, n. 4, p. 1021–1024, apr 2009. DOI:10.1016/j.cnsns.2007.12.010.
- 60 HIRSCH, C. *Numerical computation of internal and external flows: fundamentals of computational fluid dynamics*. 2nd. ed. Linacre House, Jordan Hill, Oxford OX2 8DP: Elsevier/Butterworth-Heinemann, 2007. v. 01. 656 p. ISBN 9780750665940.