

Lucas Henrique de Oliveira

Cálculo Semiclássico de Transporte em Sistemas Caóticos

Uberlândia

Junho de 2023

Lucas Henrique de Oliveira

Cálculo Semiclássico de Transporte em Sistemas Caóticos

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de doutor em Física.

Universidade Federal de Uberlândia – UFU

Instituto de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Prof. Dr. Marcel Novaes

Uberlândia

Junho de 2023

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

O48
2023

Oliveira, Lucas Henrique de, 1995-
Cálculo Semiclássico de Transporte em Sistemas
Caóticos [recurso eletrônico] / Lucas Henrique de
Oliveira. - 2023.

Orientador: Marcel Novaes.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Pós-graduação em Física.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.te.2023.296>

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Física. I. Novaes, Marcel, 1978-, (Orient.). II.
Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em
Física. III. Título.

CDU: 53

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
 Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física
 Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1A, Sala 213 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
 Telefone: (34) 3239-4309 - www.infis.ufu.br - cpgfisica@ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Física				
Defesa de:	Tese de Doutorado				
Data:	Dezesseis de junho de 2023	Hora de início:	09:00	Hora de encerramento:	12:30
Matrícula do Discente:	11913FIS002				
Nome do Discente:	Lucas Henrique de Oliveira				
Título do Trabalho:	Cálculo Semiclássico de Transporte em Sistemas Caóticos.				
Área de concentração:	Física				
Linha de pesquisa:	Física Estatística e Métodos Matemáticos				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	N.A				

Reuniu-se por meio de videoconferência, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Física, assim composta: Professores Doutores: Edson Vernek - INFIS/UFU, Gerson Ferreira Junior - INFIS/UFU, Antônio Murilo Santos Macêdo - UFPE, Diego Rabelo Costa - UFC e Marcel Novaes - INFIS/UFU, orientador do discente.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Marcel Novaes, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do

Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Murilo Santos Macedo, Usuário Externo**, em 19/06/2023, às 09:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcel Novaes, Membro de Comissão**, em 19/06/2023, às 09:12, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Edson Vernek, Professor(a) do Magistério Superior**, em 19/06/2023, às 09:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gerson Ferreira Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 19/06/2023, às 09:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Diego Rabelo da Costa, Usuário Externo**, em 20/06/2023, às 09:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4574454** e o código CRC **C67852BF**.

*Este trabalho, assim como qualquer outra conquista,
é dedicado aos meus pais, Newton e Márcia.*

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço à Deus por ter me permitido trilhar essa jornada. E também por ter me dado forças em momentos difíceis.

Agradeço à minha família pelo apoio ao longo de toda a minha vida. Principalmente aos meus pais, Newton e Márcia, ao meu irmão, João Paulo, e avós, Maria, Antônio e Nicanor, por sempre estarem por perto me apoiando incondicionalmente. A Yasmin, agradeço pelo amor e apoio nos últimos anos dessa jornada, por me ouvir com tanto carinho e acolhimento nos momentos difíceis.

Ao meu orientador, Marcel Novaes, sou grato por ter me aceito como aluno (tanto no curso de mestrado quanto de doutorado), pelos valiosos conselhos e ensinamentos. E também, pela sua dedicação, disponibilidade e paciência.

Aos amigos que estiveram e estão ao meu lado, agradeço pelos bons momentos que compartilhamos. Aos professores que me ensinaram durante minha trajetória acadêmica, agradeço pela inspiração e pelo conhecimento passado. Ao secretário do programa de pós-graduação, Euzébio, pela atenção e solicitude.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão da bolsa.

Resumo

Neste trabalho estudamos o transporte quântico através de cavidades caóticas mesoscópicas acopladas ao ambiente externo através de guias de onda muito extensos. Para isso, utilizamos uma abordagem diagramática implementada através de uma integral matricial. Dessa forma, devido a essa conexão, um problema de Física Semiclássica é transformado num problema de polinômios simétricos. Através deste método, obtemos uma série perturbativa na probabilidade de reflexão da barreira em que cada termo é exato nas quantidades de canais das guias. Considerando a cavidade com guias de entrada e saída ideais e uma terceira guia acoplada através de uma barreira de tunelamento, obtivemos os valores médios de vários momentos de transporte, entre eles a condutância e sua variância, o fator Fano e o terceiro cumulante, todos condizentes com as previsões da Teoria de Matrizes Aleatórias. Para uma cavidade com duas guias acopladas por barreiras, obtivemos a condutância na ausência e presença de Simetria de Reversão Temporal. No caso particular em que as barreiras são idênticas, obtivemos médias de uma função de Schur e uma expressão fechada para a condutância que exhibe um termo exponencial para a probabilidade de reflexão da barreira e o número total de canais disponíveis, γ^M . Além disso, obtivemos do módulo ao quadrado de imanes, que estão relacionados aos momentos de transporte na perspectiva de partículas idênticas.

Palavras-chave: momentos de transporte, aproximação semiclássica, polinômios simétricos.

Abstract

In this work, we study quantum transport through mesoscopic chaotic cavities coupled to the external environment through very long waveguides. For this purpose, we use a diagrammatic approach implemented through a matrix integral. Thus, due to this connection, a semiclassical physics problem is transformed into a problem of symmetric polynomials. Through this method, we obtain a perturbative series in the reflection probability of the barrier, where each term is exact in the numbers of channels of the waveguides. Considering the cavity with ideal input and output guides and a third guide coupled through a tunneling barrier, we obtained the mean values of various transport moments, including conductance and its variance, the Fano factor, and the third cumulant, all consistent with Random Matrix Theory predictions. For a cavity with two guides coupled by barriers, we obtained the conductance in the absence and presence of time-reversal symmetry. In the particular case where the barriers are identical, we obtained averages of a Schur function and a closed expression for the conductance that exhibits an exponential term for the reflection probability of the barrier and the total number of available channels, γ^M , not found in the literature until now. In addition, we obtained the squared module of immanants, which are related to the transport moments from the perspective of identical particles.

Keywords: transport moments, semiclassical approximation, symmetric polynomials.

Résumé

Dans cette étude, nous avons étudié le transport quantique à travers des cavités chaotiques mésoscopiques couplées à l'environnement extérieur par des guides d'ondes très étendus. Pour ce faire, nous avons utilisé une approche diagrammatique implémentée à l'aide d'une intégrale matricielle. Ainsi, grâce à cette connexion, un problème de physique semi-classique est transformé en un problème de polynômes symétriques. Avec cette méthode, nous avons obtenu une série perturbative dans la probabilité de réflexion de la barrière dans laquelle chaque terme est exact pour les quantités de canaux des guides. En considérant la cavité avec des guides d'entrée et de sortie idéaux et un troisième guide couplé par une barrière de tunnel, nous avons obtenu les valeurs moyennes de plusieurs moments de transport, notamment la conductance et sa variance, le facteur Fano et le troisième cumulant, tous conformes aux prévisions de la Théorie des Matrices Aléatoires. Pour une cavité avec deux guides couplés par des barrières, nous avons obtenu la conductance en l'absence et en présence de symétrie de renversement temporel. Dans le cas particulier où les barrières sont identiques, nous avons obtenu des moyennes d'une fonction de Schur et une expression fermée pour la conductance qui présente un terme exponentiel pour la probabilité de réflexion de la barrière et le nombre total de canaux disponibles, γ^M , qui n'a pas été trouvé dans la littérature jusqu'à présent. De plus, nous avons obtenu le module carré d'imanentes, qui sont liés aux moments de transport dans la perspective de particules identiques.

Mots-clés: moments de transport, approximation semi-classique, polynômes symétrique.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Realizações experimentais de cavidades para o estudo de bilhares caóticos eletrônicos. À esquerda uma cavidade com forma de estádio; ao centro uma cavidade com forma estomacal; e, à direita, uma cavidade poligonal. Extraído de [14].	25
Figura 2 – <i>Matchings</i> gerados por quatro permutações: $\sigma_1, \sigma_2 \in H_2$ e $\sigma_3, \sigma_4 \notin H_2$	32
Figura 3 – Grafo Γ_ξ gerado pela permutação $\xi = (1, 3, 5)(8, 10) \in S_{14}$	33
Figura 4 – Em (a), diagrama de Young da partição $\lambda = [3, 2^2, 1^2]$ e, em (b), sua partição conjugada (transposta) $\lambda' = [5, 3, 1]$	34
Figura 5 – Em (a) temos os 1-conteúdos da partição $[3, 2^2, 1^2]$ e o 1-retângulo destacado em cinza; temos $D_1([3, 2^2, 1^2]) = 2$. Em (b) e (c), temos os 2-conteúdos de $[3, 2, 1^2]$ e de $[5, 4^2, 3^2, 1^2]$, respectivamente, com e os 2-retângulos destacados em cinza; temos $D_2([3, 2, 1^2]) = 1$ e $D_2([5, 4^2, 3^2, 1^2]) = 5$	35
Figura 6 – Na parte superior (a), recortamos do diagrama de $[5, 3, 2, 1^2]$ um diagrama na forma de $[3, 1^2]$ e obtemos a partição oblíqua $[5, 3, 2, 1^2] \setminus [3, 1^2]$; ao passo que na parte inferior (b), recortamos do diagrama de $[6, 4^2, 2, 1^2]$ um diagrama na forma de $[4, 3, 1]$ para obter a partição oblíqua $[6, 4^2, 2, 1^2] \setminus [4, 3, 1]$	37
Figura 7 – Temos dois pares de trajetórias. No par superior, temos um 3-encontro que ocorre no interior da cavidade. No par inferior, temos um 2-encontro que ocorre no interior da cavidade e um 2-encontro que ocorre numa guia com barreira de tunelamento.	53
Figura 8 – A Lei de Wick pode ser interpretada diagramaticamente, onde os diagramas são construídos utilizando pares de setas. Na figura, temos estruturas diagramáticas que representam, respectivamente, Z_{io} , $\text{Tr}((ZZ^\dagger)^2)$ e Z_{oi}^\dagger	55
Figura 9 – Diagramas gerados pela Lei de Wick, associados às permutações de S_3 . A estrutura das setas e do traço foi simplificada.	56

Figura 10 – A condutância média (a), a variância da condutância (b), o fator Fano (c) e a razão do terceiro cumulante (d) como funções de γ para $N_0 = 2$, para ausência de Simetria de Reversão Temporal. Para as linhas vermelhas, temos $N_1 = N_2 = N_3 = N_0$, e as predições correspondentes da RMT são graficadas nas linhas pretas pontilhadas; para as linhas azuis temos $N_1 = N_2 = N_0$ e $N_3 = 1$, e as predições correspondentes da RMT são graficadas nas linhas pretas tracejadas e pontilhadas; e, para as linhas verdes temos $N_1 = N_2 = 1$ e $N_3 = N_0$, e as predições correspondentes da RMT são graficadas nas linhas pretas tracejadas. As séries para os momentos foram expandidas até suas curvas convergirem significativamente.	73
Figura 11 – A condutância média (a), a variância da condutância (b), o fator Fano (c) e a razão do terceiro cumulante (d) como funções de γ para o caso $N_1 = N_2 = N_3 = N_0$. Para a linha vermelha (pontilhada), temos $N_0 = 1$; para a linha azul (tracejada e pontilhada) temos $N_0 = 2$; para a linha preta (tracejada) temos a predição da RMT para $N_0 \rightarrow \infty$. Para a linha verde (contínua) temos: $N_0 = 5$, em (a); $N_0 = 12$, em (b); $N_0 = 8$, em (c); e $N_0 = 10$, em (d). As séries para os momentos foram expandidas até suas curvas convergirem significativamente.	75
Figura 12 – Aproximações para $\frac{\langle g \rangle}{N_0}(1)$ e $\mathcal{K}(1)$ em função da ordem máxima em γ nas respectivas séries. Nos dois casos, temos $N_1 = N_2 = N_3 = N_0$. Podemos observar que as duas séries alcançam estabilidade, porém em diferentes valores de n_{max}	77
Figura 13 – Aproximações para $\Delta_n \left[\frac{\langle g \rangle}{N_0}(1) \right]$ e $\Delta_n [\mathcal{K}(1)]$ em função da ordem máxima em γ nas respectivas séries. Nos dois casos, temos $N_1 = N_2 = N_3 = N_0$. Podemos observar que as duas séries alcançam estabilidade, porém em diferentes valores de n_{max}	77
Figura 14 – Correção na condutância devida à interferência quântica como função da probabilidade de reflexão na barreira γ . À esquerda, $N_1 = N_2 = N_3 = N_0$; no centro, $N_1 = N_2 = N_0$ e $N_3 = 1$; e à direita, $N_1 = N_2 = 1$ and $N_3 = N_0$. Em todos os gráficos, a linha vermelha (sólida) representa $N_0 = 1$; a linha azul (pontilhada) representa $N_0 = 2$; a linha verde (tracejada e pontilhada) representa $N_0 = 5$; a linha laranja (tracejada) representa $N_0 = 10$; e a linha preta (tracejada e duplamente pontilhada) representa o resultado obtido por RMT. Onde δg foi expandido até $\mathcal{O}(\gamma^5)$	82
Figura 15 – Esquema de uma cavidade mesoscópica acoplada ao ambiente através de duas guias. Cada guia, por sua vez, é acoplada à cavidade através de barreiras de tunelamento.	87

Figura 16 – À esquerda, fixamos $N_1 = 1$ e $N_2 = 1$, plotando diferentes valores fixados de γ_2 em função de γ_1 . À direita, fixamos $N_1 = 1$ e $\gamma_2 = 0.25$, plotando diferentes valores fixados de N_2 em função de γ_1	92
Figura 17 – Em ambas as figuras, temos $N_1 = 10$ e $N_2 = 1$. À esquerda, variamos γ_1 , e γ_2 obedece a proporções fixadas. À direita, em contraste, variamos γ_2 , e γ_1 obedece a proporções fixadas.	92
Figura 18 – À esquerda, fixamos $N_1 = 1$ e $N_2 = 1$, plotando diferentes valores fixados de γ_2 em função de γ_1 . À direita, fixamos $N_1 = 1$ e $\gamma_2 = 0.25$, plotando diferentes valores fixados de N_2 em função de γ_1	98
Figura 19 – Em ambas as figuras, temos $N_1 = 10$ e $N_2 = 1$. À esquerda, variamos γ_1 , e γ_2 obedece a proporções fixadas. À direita, em contrapartida, variamos γ_2 , e γ_1 obedece a proporções fixadas.	98
Figura 20 – À esquerda, grafo Γ_{π_e} associado à permutação $\pi_e = (24)(6810)$; e à direita, grafo Γ_{π_o} associado à permutação $\pi_o = (13)(579)$; ambos mergulhos obtidos a partir da permutação $\pi = (12)(345)$. As permutações π_e, π_o são mergulhos da permutação π de S_5 em S_{10} . A relação de incidência gerada por π_e é $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5, 8\}, \{6, 9\}, \{7, 10\}\}$ ao passo que a relação de incidência gerada por π_o é $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5, 10\}, \{6, 7\}, \{8, 9\}\}$. O ciclo-tipo de π , e os coset-tipos de π_e e π_o são dados pela partição $[3, 2]$	116
Figura 21 – Em (a), temos diagrama de Young da partição ρ que é um gancho duplo; em (b), a partição μ_1 , obtida adicionando-se uma caixa no final da primeira linha do diagrama de ρ ; em (c), a partição μ_2 , obtida adicionando-se uma caixa no final da segunda linha do diagrama de ρ ; em (d), a partição μ_3 , obtida adicionando-se uma caixa no final da terceira linha do diagrama de ρ , note que μ_3 não é um gancho duplo; e, em (3), a partição μ_4 , obtida adicionando-se uma caixa abaixo da última linha do diagrama de ρ	148

Lista de símbolos

gH	Coset, ou classe lateral à esquerda, do elemento g com relação ao subgrupo H
S_n	Grupo simétrico, ou grupo de permutações, de ordem n
$\lambda \vdash n$	A sequência λ é uma partição de n
$ct(\sigma)$	Ciclo-tipo da permutação σ
$\ell(\sigma)$	Comprimento do ciclo-tipo da permutação σ
C_λ	Conjunto das permutações de S_n que possuem o mesmo ciclo-tipo λ . O número de permutações que pertencem à classe C_λ , ou seja, o número de permutações com ciclo-tipo $\lambda \vdash n$ é denotado por $ C_\lambda $
H_n	Hiperoctaedro: subconjunto de S_{2n} formado pelas permutações que comutam com $(1\ 2)(3\ 4)\cdots(2n-1\ 2n)$
\mathcal{M}_n	Conjunto dos <i>matchings</i> em S_{2n}
\mathbf{m}_σ	<i>Matching</i> associado à permutação σ
Γ_σ	Grafo associado à permutação $\sigma \in S_{2n}$
$[\sigma]$	Coset-tipo da permutação σ
$\mathcal{U}(N)$	Grupo Unitário de ordem N
$\mathcal{O}(N)$	Grupo Ortogonal de ordem N
$\chi_\lambda(\sigma)$	Caractere da classe de conjugação σ (ou do elemento σ) na representação irreduzível λ
$\omega_\lambda(\sigma)$	Função esférica zonal de índice λ calculada para a permutação σ
$\varepsilon(\sigma)$	Sinal da permutação σ ou, equivalentemente, $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$, se $\sigma(k) = i_k$ para $k = 1, \dots, n$
$\psi_\lambda(\sigma)$	Função esférica zonal torcida de índice λ calculada para a permutação σ
$s_\lambda(\vec{x})$	Função de Schur de índice λ nas variáveis $\vec{x} = x_1, \dots, x_N$
$h_p(\vec{x})$	Polinômio homogêneo de grau p nas variáveis $\vec{x} = x_1, \dots, x_N$
$e_p(\vec{x})$	Polinômio elementar de grau p nas variáveis $\vec{x} = x_1, \dots, x_N$

$p_\lambda(\vec{x})$	Série de potências de índice λ nas variáveis $\vec{x} = x_1, \dots, x_N$
$J_\lambda^{(\alpha)}(\vec{x})$	Polinômio de Jack de índice superior α e índice inferior λ nas variáveis $\vec{x} = x_1, \dots, x_N$
dU	Medida de Haar no grupo Unitário
dO	Medida de Haar no grupo Ortogonal
$\langle Q \rangle_G$	Média sobre o conjunto G , equivalente a $\int_G Q dg$

Sumário

	Sumário	23
1	INTRODUÇÃO	25
2	CONCEITOS FUNDAMENTAIS	29
2.1	Grupos de Permutações	29
2.1.1	<i>Matchings</i> e o Hiperoctaedro	31
2.2	Partições e Diagramas de Young	34
2.3	Funções Simétricas	38
2.3.1	Polinômios de Jack	40
2.3.2	Funções Simétricas e Generalização da Integral de Selberg	43
2.4	Médias nos Grupos de Matrizes	43
3	INTEGRAIS MATRICIAIS E APROXIMAÇÃO SEMICLÁSSICA	49
3.1	Introdução	49
3.2	Matriz de Espalhamento	50
3.3	Aproximação Semiclássica	51
3.4	Regras Diagramáticas	53
3.5	Lei de Wick e Integrais Matriciais	54
3.6	Barreira de Tunelamento	57
3.6.1	Barreira na Guia de Entrada/Saída	58
3.7	Simetria de Reversão Temporal	59
3.8	Constantes de Normalização e Limites	61
4	MOMENTOS DE TRANSPORTE I: TRÊS GUIAS	65
4.1	Ausência de Simetria de Reversão Temporal	65
4.1.1	A Média $\langle s_\lambda \rangle$	69
4.1.2	Resultados Momentos de Transporte	70
4.2	Simetria de Reversão Temporal Presente	78
4.2.1	Barreira na Guia Auxiliar	78
4.2.2	Correção por Interferência Quântica	81
4.2.3	Barreira na Guia de Entrada	82
5	MOMENTOS DE TRANSPORTE: DUAS GUIAS	87
5.1	Duas Guias com Barreiras e com Ausência de Simetria de Reversão Temporal	87
5.1.1	Expressão Explícita para a Condutância	90

5.1.1.1	Expressão Fechada para a Condutância quando $\gamma_1 = \gamma_2$	93
5.2	Duas Guias com Barreiras e Presença de Simetria de Reversão Temporal	94
5.3	Generalização	99
5.3.1	Relação entre Polinômios de Jack	99
5.3.2	Condutância Generalizada na Ausência de Simetria de Reversão Temporal .	100
5.3.3	Condutância Generalizada na Presença de Simetria de Reversão Temporal .	103
5.4	Momentos de Alta Ordem	105
6	IMANENTES DE BLOCOS DE MATRIZES UNITÁRIAS ALEATÓRIAS	111
6.1	Introdução	111
6.2	Resultados	113
6.3	Preliminares	115
6.3.1	Mergulhos	115
6.3.2	Fatorações de Permutações	117
6.4	Demonstrações	122
6.4.1	Proposição 1	122
6.4.2	Proposição 2	124
6.4.3	Proposição 3	128
6.4.4	Proposição 4	130
6.4.5	Proposição 5	134
7	CONCLUSÃO	137
	REFERÊNCIAS	139
	APÊNDICE A – CÁLCULO EXPLÍCITO DOS COEFICIENTES DE LITTLEWOOD-RICHARDSON DA FORMA $C_{[1]\rho\mu}^{(2)}$	147
	Índice	151

1 Introdução

O estudo de transporte eletrônico através de sistemas mesoscópicos tem atraído bastante interesse de pesquisadores nas últimas três décadas, tanto do ponto de vista teórico quanto experimental [1, 2, 3, 4, 5]. Em parte, o interesse nesse tipo de sistema vem do fato de que os elétrons podem manter sua fase coerente durante o processo de transporte, resultando em efeitos quânticos observáveis. Um dos exemplos mais importantes de tais sistemas mesoscópicos são os bilhares caóticos em semicondutores, uma das plataformas para o estudo de caos quântico [6, 7, 8, 9, 10], e a relação entre propriedades quânticas e dinâmica caótica [11, 12, 13]. O bilhar pode ser realizado implementando um gás de elétrons 2D numa região metálica limitada por uma superfície de GaAs [14]. A superfície metálica age como interior da cavidade, onde os elétrons movem-se livremente, ao passo que a superfície de GaAs age como borda da cavidade, formando uma região proibida para os elétrons. Algumas realizações dessa cavidade encontram-se na Fig.1.

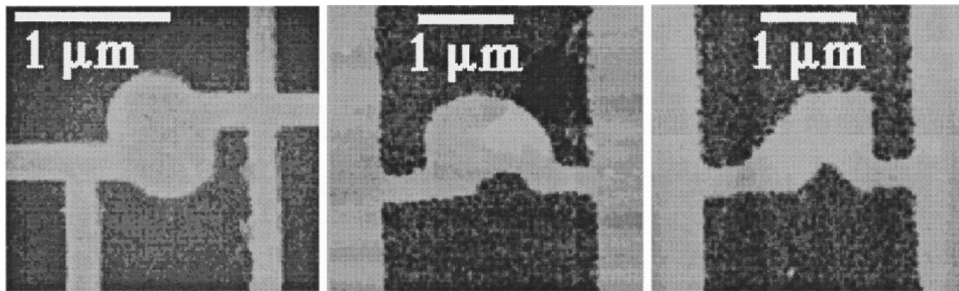


Figura 1 – Realizações experimentais de cavidades para o estudo de bilhares caóticos eletrônicos. À esquerda uma cavidade com forma de estádio; ao centro uma cavidade com forma estomacal; e, à direita, uma cavidade poligonal. Extraído de [14].

Uma ferramenta tradicional no tratamento de problemas de transporte é a Teoria de Matrizes Aleatórias (RMT, do inglês *Random Matrix Theory*). Inicialmente utilizada na Física na década de 1950 por Eugene Wigner no estudo da distribuição de níveis vizinhos de energia de átomos pesados [15]. Para o estudo dos núcleos atômicos Wigner considerou o hamiltoniano como uma matriz aleatória de um ensemble adequado e, assim, obteve uma aproximação estatística para a distribuição dos espaçamentos. Para fenômenos de transporte, a matriz a ser considerada aleatória é a matriz de espalhamento associada ao sistema.

O fator que determina o ensemble matricial adequado é a simetria do sistema, por exemplo, Simetria de Reversão Temporal, Simetria de Rotação do *Spin*, quiralidade, etc. De acordo com a classificação de Cartan [16], temos dez ensembles de matrizes associados a simetrias fisicamente realizáveis. Dentre eles, destacamos três ensembles: minimamente,

a matriz de espalhamento pode ser modelada como uma matriz aleatória do Ensemble Circular Unitário (*CUE*, que corresponde ao grupo Unitário), devido ao fato de que a própria matriz de espalhamento é unitária; porém se temos a presença da Simetria de Reversão Temporal, o ensemble adequado é o Ensemble Circular Ortogonal (*COE*); e se a Simetria de Reversão Temporal é preservada, mas há quebra de Simetria de Rotação devido à interação *spin*-órbita, o ensemble adequado é o Ensemble Circular Simplético (*CSE*) [17]. A RMT pode ser aplicada diretamente ao método de Landauer-Büttiker e tem sido frutífero [2].

Outra abordagem para o tratamento de problemas de transporte é a abordagem semiclássica. Em termos gerais, é esperado que a abordagem semiclássica seja efetiva quando a constante de Planck é muito menor do que todas as outras ações presentes no sistema e funciona de forma perturbativa, ou seja, considerando ordens dominantes em séries de Taylor da forma $c_0 + c_1\hbar + c_2\hbar^2 + \dots$ [18, 19]. Entretanto, em alguns casos, especialmente envolvendo tunelamento, é possível ir além da série de potências de \hbar e recuperar efeitos quânticos que contêm o fator $e^{-c/\hbar}$ [20, 21]. Isso inclui quebra de níveis de energia em poços quânticos simétricos unidimensionais [22, 23] e propagação de pacotes de onda unidimensionais localizados [24, 25, 26].

Para aplicar a aproximação semiclássica a problemas de transporte, modelamos os elementos da matriz de espalhamento utilizando somas sobre trajetórias. Ao serem calculadas as somas sobre trajetórias, foram obtidas regras diagramáticas [27, 28]. Assim, foi desenvolvida uma abordagem diagramática dos problemas de transporte [27, 28, 29, 30, 31, 32, 33]. Neste trabalho, implementando as regras diagramáticas através de uma integral matricial [34, 35, 36], obtemos momentos de transporte para várias configurações de cavidade. No final do processo, obtemos uma série perturbativa na probabilidade de reflexão da barreira cujos termos são exatos nas quantidades de canais das guias, diferentemente dos resultados tradicionais de RMT válidos num regime de um grande número de canais $M \gg 1$.

Considerando uma cavidade acoplada ao ambiente externo por três guias, sendo as guias de entrada e saída ideais e a terceira guia, modelada de modo mais realista [37, 38, 39, 40], onde assumimos a presença de uma barreira de tunelamento. Para esta configuração, obtivemos diversos momentos de transporte, entre eles a condutância e sua variância, o fator Fano e o terceiro cumulante, na ausência de Simetria de Reversão Temporal [41]. Utilizando a aproximação semiclássica, obtemos uma série perturbativa na probabilidade de reflexão da barreira cujos coeficientes são exatos nos números de canais. Isto nos permite investigar o comportamento dos momentos quando o número de canais é pequeno, um regime inacessível utilizando técnicas tradicionais de RMT. Entretanto, à medida que o número de canais aumenta, nossos resultados convergem para as previsões da RMT.

Por outro lado, considerando uma cavidade com apenas duas guias, mas com barreiras de tunelamento presente em ambas, obtivemos a condutância na ausência e na presença de Simetria de Reversão Temporal. Além disso, considerando que as barreiras nas guias são idênticas e ausência de Simetria de Reversão Temporal, obtivemos uma expressão para a média de uma função de Schur, o que nos permite obter momentos de transporte através de suas combinações lineares [42]. E, para a condutância, obtivemos uma expressão fechada com um termo linear e uma correção exponencial [43]

$$\langle g \rangle = \frac{N_1 N_2}{M} - \frac{N_1 N_2 M}{M^2 - 1} \gamma + \frac{N_1 N_2}{M(M^2 - 1)} \gamma^M, \quad (1.1)$$

que não estava presente em outras abordagens semiclássicas do problema [44, 45, 46, 47]. Porém tal resultado foi obtido por Macêdo em 2001, através da Teoria de Matrizes Aleatórias [48].

Considerando um sistema com muitas partículas, os momentos de transporte são obtidos através das simetrizações (simétrica para bósons e antissimétrica para férmions) dos elementos da matriz de espalhamento. Dessa forma, buscamos complementar os resultados obtidos por Urbina et al. [49], obtendo a médias do módulo ao quadrado do imanente de um bloco diagonal de matriz [50]. Em particular, obtemos expressões para $\langle |\text{Imm}_\gamma(U)|^2 \rangle_G$, onde G é o grupo Unitário, o grupo Ortogonal e o Ensemble Circular Ortogonal (COE). Obtivemos um resultado surpreendente na forma de uma conjectura (posteriormente provada por Chapuy e Dołęga [51]) que conecta inversos de polinômios de Jack e caracteres do grupo ortogonal avaliados na matriz identidade. Além disso, obtivemos a média do permanente à quarta, $\langle |\text{Per}(U)|^4 \rangle$, para o grupo Unitário; e polinômios associados ao permanente até o grau 2.

No Capítulo 2 revisamos conceitos teóricos fundamentais ao longo do trabalho, como conceitos em Teoria de Grupos e polinômios simétricos; no Capítulo 3 visitamos a aplicação de integrais matriciais como forma de implementar regras diagramáticas; e nos Capítulos 4 e 5 utilizamos esta técnica para obtermos momentos de transporte para cavidades. No Capítulo 4 para uma cavidade com três guias, sendo as guias de entrada e saída ideais e a terceira guia modelada por uma barreira de tunelamento; e no Capítulo 5, inicialmente, temos uma cavidade com duas guias, ambas modeladas por barreiras de tunelamento. No Capítulo 6 obtemos valores médios de imanentes de blocos de matrizes oriundos de vários ensembles. Por fim, trazemos nossas conclusões no Capítulo 7.

2 Conceitos Fundamentais

2.1 Grupos de Permutações

Dado um conjunto de elementos numerados com índices de 1 a n , podemos definir *permutações* como funções bijetivas no conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, ou seja, funções que levam o conjunto sobre ele mesmo. A única alteração possível é a ordenação dos elementos. Por exemplo, considere a função $\sigma : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$, em que $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 2$ e $\sigma(3) = 1$; σ é uma permutação [52, 53].

Se considerarmos a operação de composição sobre o conjunto de todas as permutações no conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, obtemos uma estrutura de grupo¹. O grupo formado é conhecido como *grupo de permutações*. O número de elementos no grupo é $n!$ e denotamos S_n . Assim, tomando $\sigma_1 = (13)$ e $\sigma_2 = (12)$ em S_3 , temos $(12)(13) = (132)$ ao passo que $(13)(12) = (123)$, o que mostra que o produto de duas permutações, em geral, não é comutativo.

Podemos denotar permutações de maneira mais eficiente através da *notação de ciclos*. Se $\pi(i_r) = i_{r+1}$ e $\pi(i_k) = i_1$, então o ciclo $(i_1 i_2 \dots i_k)$ está contido na decomposição de π . Quando $\pi(i) = i$, temos um ciclo do tipo (i) , que é omitido da notação de ciclos. Assim, considere $\sigma \in S_6$ dada por $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 4$, $\sigma(3) = 5$, $\sigma(4) = 6$, $\sigma(5) = 3$ e $\sigma(6) = 2$; utilizando a notação de ciclos, podemos escrever $\sigma = (246)(35)$ (note que o ciclo (1) foi omitido).

O comprimento de um ciclo nada mais é do que o número de índices que ele contém. Já o *ciclo-tipo* de uma permutação é a sequência não-crescente dos comprimentos dos ciclos que a compõem. Para $\sigma = (246)(35) \in S_6$ seu ciclo-tipo é $[3, 2, 1]$. Por outro lado, se $\sigma = (246)(35) \in S_7$ seu ciclo-tipo é $[3, 2, 1, 1]$ ou, numa forma mais compacta, $[3, 2, 1^2]$. Note que a soma dos elementos na sequência dos ciclo-tipos totalizam n (o ciclo-tipo de uma permutação σ será denotado por $\text{ct}(\sigma)$). Por isso, dizemos que ciclo-tipo de uma permutação é uma *partição* de n , e denotamos $\lambda \vdash n$. Formalmente, definimos uma partição como uma sequência não-crescente $(i < j \Rightarrow \lambda_i \geq \lambda_j)$ λ em que $\sum_i \lambda_i = n$. O comprimento de uma partição corresponde ao número de elementos não nulos na partição e é denotado $\ell(\lambda)$, por exemplo, $\ell([3, 2, 1^2]) = 4$.

¹ A estrutura de grupo é obtida pois a operação de composição no conjunto de permutações é fechada (a composição de duas permutações ainda é uma permutação), é associativa $(a \circ (b \circ c)) = (a \circ b) \circ c$, admite um elemento identidade (existe uma permutação que não altera a composição, $\sigma \circ e = e \circ \sigma = \sigma$) e admite um elemento inverso (existe b tal que para todo a , temos $a \circ b = b \circ a = e$, denotamos tal elemento por a^{-1}). Geralmente omitimos a notação de composição e utilizamos a notação de produto, assim, $a \circ b \equiv ab$.

Em uma estrutura de grupo, definimos a *classe de conjugação* do elemento a como o conjunto gerado por bab^{-1} , onde b percorre todo o grupo. Pode ser demonstrado que, no grupo de permutações, a conjugação não altera o ciclo-tipo de uma permutação. Com isso, podemos indexar as classes de permutação do grupo S_n através das partições de n . As classes não possuem elemento em comum e formam uma partição do grupo. Por exemplo, em $S_3 = \{id, (12), (13), (23), (123), (132)\}$, a classe de conjugação do elemento (12) é $\{(12), (13), (23)\}$. A classe de conjugação indexada pela partição λ é denotada por \mathcal{C}_λ e o número de permutações nessa classe é

$$|\mathcal{C}_\lambda| = \frac{n!}{\prod_i m_{\lambda_i}! \lambda_i^{m_{\lambda_i}}}, \quad (2.1)$$

onde m_{λ_i} é o número de repetições de λ_i em λ quando escrevemos $\lambda = [\lambda_1^{m_{\lambda_1}}, \lambda_2^{m_{\lambda_2}}, \dots, \lambda_k^{m_{\lambda_k}}]$. Por exemplo, $|\mathcal{C}_{[2,1]}| = 3$, pois existem 3 permutações em S_3 com ciclo-tipo $[2, 1]$.

Muitas vezes é conveniente associar matrizes aos elementos de um grupo de forma que as operações são preservadas. Esse processo é chamado *representação* do grupo. Um dado conjunto de matrizes $\{R\}$ representa um grupo se para todos os elementos a e b no grupo um produto $ab = c$ é representado por $R_c = R_a R_b$ e vice-versa [53]. No grupo de permutações temos uma representação chamada adjunta, que é definida por

$$[R_\sigma]_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma(i) = j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (2.2)$$

Em S_2 , temos duas matrizes de representação

$$R_{id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad R_{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

As representações podem ser divididas em duas categorias: as representações *reduzíveis* e *irreduzíveis*. As representações são reduzíveis quando todas as matrizes de representação podem ser transformadas (por uma transformação de similaridade, URU^{-1}) em matrizes bloco diagonal. As matrizes são irreduzíveis quando não houver essa possibilidade. O Teorema da Representação garante que, para qualquer grupo com número finito de elementos, é possível encontrar matrizes unitárias (Sec. 2.4) que representem esse grupo [54].

Dado um conjunto de matrizes de representação, podemos definir os caracteres da representação como o traço das matrizes de representação. Quando a representação é irreduzível, seus caracteres são chamados *caracteres irreduzíveis*.

Para as matrizes de representação $\{R\}$, denotamos o caractere do elemento σ por $\chi_R(\sigma) = \text{Tr}(R_\sigma)$. Além disso, devido à propriedade cíclica do traço, o caractere é constante nas classes de conjugação, pois $\chi_R(\rho\sigma\rho^{-1}) = \text{Tr}(R_{\rho\sigma\rho^{-1}}) = \text{Tr}(R_\rho R_\sigma R_{\rho^{-1}}) =$

$\text{Tr}(R_\sigma) = \chi_R(\sigma)$. Por isso, $\chi_R(\rho)$ pode representar tanto o caractere da representação R do elemento do grupo ρ quanto o caractere da representação R na classe de conjugação à qual ρ pertence, digamos λ , então, teremos $\chi_R(\rho) = \chi_R(\lambda)$.

A *dimensão* de uma representação corresponde ao caractere da representação na classe de conjugação da identidade do grupo. Denotamos a dimensão da representação R por $d_R = \chi_R(id)$. Conforme comentamos, as representações irredutíveis do grupo de permutações são indexadas por partições, de modo que podemos calcular a dimensão de uma representação irredutível através da seguinte expressão

$$d_\lambda = n! \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{1}{(\lambda_i - i + \ell(\lambda))} \prod_{j=i+1}^{\ell(\lambda)} (\lambda_i - \lambda_j + j - i). \quad (2.4)$$

Os caracteres irredutíveis obedecem a duas relações de ortogonalidade. A primeira delas sobre representações irredutíveis e a segunda sobre classes de conjugação. Dadas duas representações $\{R\}$ e $\{D\}$, então

$$\sum_{g \in G} \chi_D(g) \chi_R(gh) = \frac{|G|}{d_R} \chi_R(h) \delta_{RD}, \quad (2.5)$$

onde $|G|$ representa o número de elementos do grupo. Esta relação pode ser particularizada para que a soma ocorra sobre as classes de conjugação, uma vez que o caractere é constante nas classes e estas formam uma partição do grupo,

$$\sum_{\lambda} |\mathcal{C}_\lambda| \chi_D(\lambda) \chi_R(\lambda) = |G| \delta_{RD}. \quad (2.6)$$

Note que a soma agora corre sobre as classes de conjugação λ .

Para a segunda relação de ortogonalidade, considere duas classes de conjugação indexadas por ρ e μ , então

$$\sum_{\lambda} \chi_\lambda(\rho) \chi_\lambda(\mu) = \frac{|G|}{|\mathcal{C}_\mu|} \delta_{\rho\mu}. \quad (2.7)$$

Note que a soma agora corre sobre as representações irredutíveis.

No grupo de permutações, S_n , tanto as classes de conjugação quanto as representações irredutíveis são indexadas por partições de n e a ordem do grupo é $|S_n| = n!$. Assim, podemos escrever, por exemplo, o caractere da permutação (132) em S_3 na representação irredutível indexada por $[2, 1]$: $\chi_{[2,1]}((132)) = \chi_{[2,1]}([3]) = -1$, visto que o ciclo-tipo de (132) é $[3]$.

2.1.1 Matchings e o Hiperocaedro

Matchings são partições do conjunto $\{1, 2, \dots, 2n\}$ em blocos de tamanho dois, como o caso do *matching* trivial $\mathfrak{t} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2n-1, 2n\}\}$ ou de $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$. Podemos associar um *matching* com uma permutação, $\sigma \in S_{2n}$, da seguinte maneira: $\mathfrak{m}_\sigma = \{\{\sigma(1), \sigma(2)\}, \{\sigma(3), \sigma(4)\}, \dots, \{\sigma(2n-1), \sigma(2n)\}\}$.

O conjunto das permutações de S_{2n} , que estão associadas ao *matching* trivial, isto é, $\mathbf{m}_\sigma = \mathbf{t}$, formam um grupo, chamado *Hiperoctaedro*. O Hiperoctaedro é denotado por H_n e possui $2^n n!$ elementos. Já que H_n é um grupo por si só e está contido em S_{2n} , dizemos que o Hiperoctaedro é um *subgrupo* de S_{2n} . Por exemplo, $H_2 = \{id, (1\ 2), (3\ 4), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 4\ 2\ 3)\}$ tem 8 elementos e é um subgrupo de S_4 . As permutações do Hiperoctaedro podem modificar o ordenamento dos pares e as posições dos números, mas não modificam os pares propriamente ditos, Fig. 2a e 2b. Entretanto, permutações que não pertencem ao Hiperoctaedro modificam tais pares, Fig. 2c e 2d.

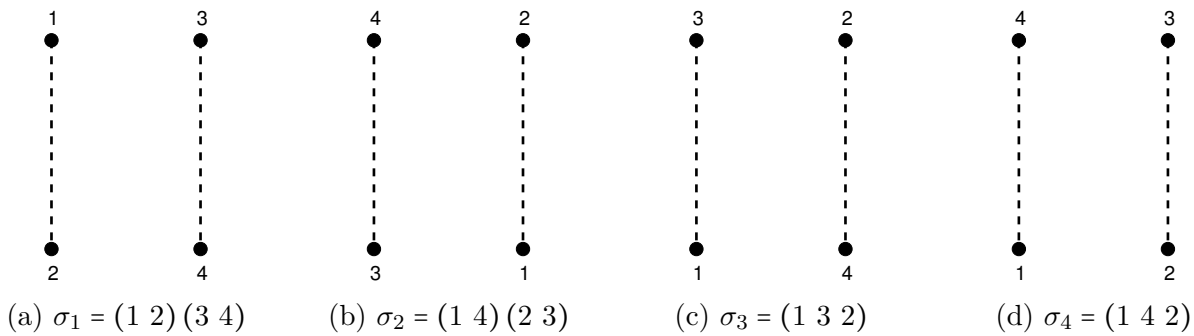


Figura 2 – *Matchings* gerados por quatro permutações: $\sigma_1, \sigma_2 \in H_2$ e $\sigma_3, \sigma_4 \notin H_2$.

Já que as permutações do Hiperoctaedro mantêm o *matching* trivial invariante, então o *matching* produzido por σ é o mesmo que é produzido por σh , com $h \in H_n$, ou seja, $\mathbf{m}_\sigma = \mathbf{m}_{\sigma h}$. Isto nos diz que as permutações do conjunto $\sigma H_n = \{\sigma h | h \in H_n\}$ são equivalentes. Por exemplo, o conjunto de permutações equivalentes a $(2\ 3)$ é $(2\ 3)H_2 = \{(2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 4), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 2\ 4\ 3)\}$ pois todas as permutações pertencentes à classe geram o *matching* $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$.

Isto por sua vez nos induz a identificar os *matchings* com os representantes de classes no quociente S_{2n}/H_n , que é denotado \mathcal{M}_n . Há $\frac{(2n)!}{2^n n!}$ *matchings* no conjunto \mathcal{M}_n . Para escolher permutações que representem cada classe e, portanto, cada *matching*, impomos que

$$\sigma(2i - 1) < \sigma(2i) \quad \text{e} \quad \sigma(1) < \sigma(3) < \dots < \sigma(2n - 1). \quad (2.8)$$

Para $n = 2$, temos três *matchings*: $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}, \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$. Eles estão associados, respectivamente, com as classes idH_2 , $(2\ 3)H_2$ e $(2\ 4\ 3)H_2$, que formam o conjunto quociente S_4/H_2 . Portanto, temos o seguinte conjunto de representantes de classe $\mathcal{M}_2 = \{id, (2\ 3), (2\ 4\ 3)\}$.

Em S_{2n} , podemos ainda definir uma propriedade chamada *coset-tipo*. Primeiramente, definimos o grafo Γ_σ , com $2n$ vértices enumerados e em duas fileiras: os números ímpares na fileira superior e os pares na inferior (Fig. 3). A seguir, usando o *matching* trivial como relação de incidência, marcamos as arestas tracejadas. Por fim, usando o *matching* gerado por σ , \mathbf{m}_σ , como relação de incidência, marcamos as linhas cheias. A seguir, contabi-

lizamos o número de arestas em cada componente conexa do grafo, gerando uma sequência não-crescente. O coset-tipo de σ consiste na metade dessa sequência (observe que cada componente conexa tem um número par de arestas, pois em cada vértice que a compõe incidem uma aresta tracejada e uma cheia). Note, portanto, que o coset-tipo de σ , denotado $[\sigma]$, consiste em uma partição de n . Como exemplo, considere a permutação $\xi = (1, 3, 5)(8, 10) \in S_{14}$. O *matching* gerado por ξ é $\mathbf{m}_\xi = \{\{2, 3\}, \{4, 5\}, \{1, 6\}, \{7, 10\}, \{8, 9\}, \{11, 12\}, \{13, 14\}\}$. Assim, podemos construir o grafo Γ_ξ (Fig. 3) e concluimos que o coset-tipo de ξ é $[\xi] = [3, 2, 1^2] \vdash 7$.

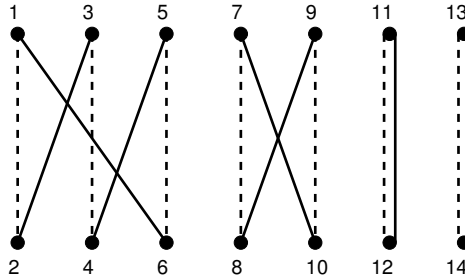


Figura 3 – Grafo Γ_ξ gerado pela permutação $\xi = (1, 3, 5)(8, 10) \in S_{14}$.

O conjunto de permutações de S_{2n} que compartilha o mesmo coset-tipo, μ , é denotado por K_μ ; e o número de permutações em K_μ é

$$|K_\mu| = \frac{4^n n!}{2^{l(\mu)}} |\mathcal{C}_\mu|. \quad (2.9)$$

Assim como o caractere é o mesmo numa classe de conjugação (permutações com o mesmo ciclo-tipo), temos funções de classe que são invariantes por coset-tipo. Nesse caso, temos as *funções esféricas zonais* que são definidas por

$$\omega_\lambda(\sigma) = \frac{1}{|H_n|} \sum_{\xi \in H_n} \chi_{2\lambda}(\xi\sigma). \quad (2.10)$$

Utilizando propriedades dos caracteres e do Hiperoctaedro, podemos perceber que $\omega_\lambda(\sigma h) = \omega_\lambda(h\sigma) = \omega_\lambda(\sigma)$, para qualquer elemento h do Hiperoctaedro. Isto segue da propriedade cíclica do traço, que define os caracteres. Com isso, vemos que $\omega_\lambda(\sigma)$ depende apenas do coset-tipo de σ . Por exemplo, $\omega_\lambda([1^n]) = 1$ e $\omega_{[n]}(\lambda) = 1$ para qualquer $\lambda \vdash n$.

As funções esféricas zonais também obedecem relações de ortogonalidade em \mathcal{M}_n de modo semelhante aos caracteres irredutíveis em S_n

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{M}_n} \omega_\lambda(\sigma) \omega_\mu(\sigma\tau) = \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{\omega_\mu(\tau)}{d_{2\lambda}} \delta_{\lambda\mu}. \quad (2.11)$$

Observe que $|\mathcal{M}_n| = \frac{(2n)!}{2^n n!}$, análogo à Eq. (2.5). Como as funções esféricas zonais dependem apenas do coset-tipo, podemos reescrever a relação de ortogonalidade

$$\sum_{\alpha \vdash n} |K_\alpha| \omega_\lambda(\alpha) \omega_\mu(\alpha) = \frac{(2n)!}{d_{2\lambda}} \delta_{\lambda\mu}. \quad (2.12)$$

Também vale uma segunda relação de ortogonalidade

$$\sum_{\lambda \vdash n} d_{2\lambda} \omega_{\lambda}(\alpha) \omega_{\lambda}(\beta) = \frac{(2n)!}{|K_{\alpha}|} \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.13)$$

2.2 Partições e Diagramas de Young

Conforme comentamos anteriormente, partições são sequências de números inteiros não crescentes, $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_k]$. Definimos o *comprimento da partição* como o número de componentes não nulos, $\ell(\lambda) = k$. Além disso dizemos que a partição λ particiona o inteiro n se $\sum_i \lambda_i = n$, o que denotamos $\lambda \vdash n$ ou $|\lambda| = n$. Podemos ainda denotar uma partição inserindo o número de repetições de um inteiro em seu expoente. Por exemplo, na Fig. 4a, temos a partição $[3, 2, 2, 1, 1]$ que podemos denotar $[3, 2^2, 1^2]$. Vemos, também que $[3, 2^2, 1^2] \vdash 9$ e $\ell([3, 2^2, 1^2]) = 5$.

Para cada partição, podemos definir um *diagrama de Young*. Para isso, construímos um esquema com caixas empilhadas, começando à esquerda e de cima para baixo. Para $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]$ colocamos λ_1 caixas na primeira linha, λ_2 caixas na segunda linha e assim sucessivamente até completar o diagrama adicionando λ_k caixas na k -ésima linha. Então, para $[3, 2^2, 1^2]$, colocamos 3 caixas na primeira linha; em seguida adicionamos duas linhas com duas caixas logo abaixo; e, por fim, adicionamos duas linhas com uma caixa cada.

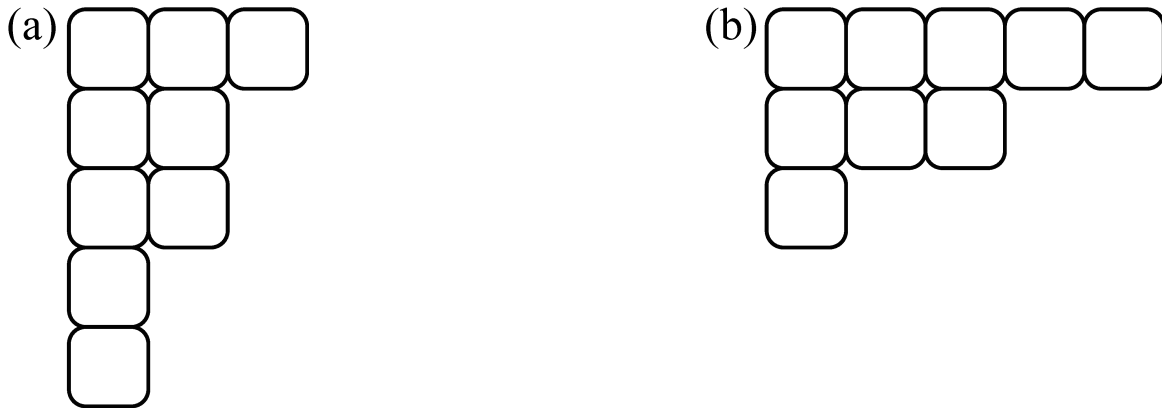


Figura 4 – Em (a), diagrama de Young da partição $\lambda = [3, 2^2, 1^2]$ e, em (b), sua partição conjugada (transposta) $\lambda' = [5, 3, 1]$.

Para uma partição qualquer, λ , podemos definir a *partição conjugada* que consiste em transpor seu diagrama de Young, isto é, transformando linhas em colunas (assim como é feito com matrizes). Denotamos λ' . Por exemplo, a partição conjugada de $\lambda = [3, 2^2, 1^2]$ é $\lambda' = [5, 3, 1]$, os diagramas de Young podem ser vistos na Fig. 4. Note que se $\lambda \vdash n$ então devemos ter $\lambda' \vdash n$.

A cada caixa em um diagrama de Young é associado um par ordenado, (i, j) , assim como os elementos numa matriz. Podemos, portanto, percorrer o diagrama de Young da partição λ especificando o par ordenado (i, j) com $1 \leq j \leq \lambda_i$ e $1 \leq i \leq l(\lambda)$. A partir do par ordenado associado a uma caixa, podemos definir o α -conteúdo como

$$c_\alpha(i, j) = \alpha(j - 1) - i + 1. \quad (2.14)$$

Na Fig. 5, temos os conteúdos nas caixas de diferentes diagramas de Young: em (a) temos os 1-conteúdos da partição $[3, 2^2, 1^2]$; e em (b) e (c) temos os 2-conteúdos das partições $[3, 2, 1^2]$ e $[5, 4^2, 3^2, 1^2]$, respectivamente.

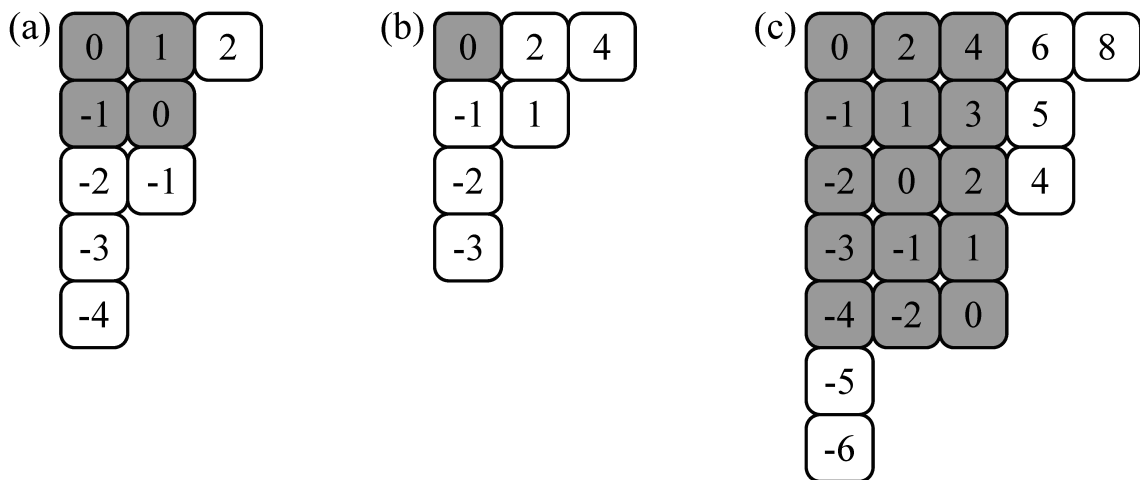


Figura 5 – Em (a) temos os 1-conteúdos da partição $[3, 2^2, 1^2]$ e o 1-retângulo destacado em cinza; temos $D_1([3, 2^2, 1^2]) = 2$. Em (b) e (c), temos os 2-conteúdos de $[3, 2, 1^2]$ e de $[5, 4^2, 3^2, 1^2]$, respectivamente, com e os 2-retângulos destacados em cinza; temos $D_2([3, 2, 1^2]) = 1$ e $D_2([5, 4^2, 3^2, 1^2]) = 5$.

Pela definição dos α -conteúdos, podemos obter valores nulos, como na Fig. 5. Por exemplo, a caixa $(1, 1)$ sempre resulta em $c_\alpha(1, 1) = 0$ para qualquer α . Os valores nulos constituem os vértices opostos de um retângulo. Ao menor retângulo que contém as caixas com α -conteúdos nulos, chamamos α -retângulo de Durfee. Para cada valor de α temos um retângulo com proporções diferentes: para $\alpha = 1$, temos um retângulo com lados de comprimentos iguais, ou seja, um quadrado; para $\alpha = 2$, temos um retângulo cuja altura é quase o dobro de sua largura; e assim sucessivamente. Denotamos a largura do α -retângulo de Durfee da partição λ por $D_\alpha(\lambda)$. Na Fig. 5 os α -retângulos de Durfee estão destacados sobre os diagramas de Young na cor cinza.

Em particular, temos duas famílias de partições que merecem destaque: os ganchos e os ganchos duplos. Os ganchos são partições da forma $[a, 1^b]$, com $a > 0$ e $b \geq 0$; ao passo que os ganchos duplos são partições da forma $[a, b, 1^c]$, com $a \geq b > 0$ e $c \geq 0$. O nome gancho vem da forma dos diagramas de Young gerados pela família $[a, 1^b]$, compostos por uma faixa horizontal com a caixas e uma faixa vertical de altura b ; analogamente, o nome

gancho duplo vem do fato de que seu diagrama é análogo ao do gancho, mas com uma faixa horizontal dupla. Note que para um gancho $[a, 1^b]$, temos $D_1([a, 1^b]) = 1$; ao passo que para um gancho duplo $[a, b, 1^c]$, temos $D_2([a, b, 1^c]) = 1$.

A partir dos conteúdos, podemos ainda definir uma família de polinômios mônicos

$$[x]_{\mu}^{(\alpha)} = \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} \prod_{j=1}^{\mu_i} (x + c_{\alpha}(i, j)). \quad (2.15)$$

Para $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$, temos os seguintes valores

$$\begin{aligned} [x]_{[1]}^{(1)} &= x, \\ [x]_{[2]}^{(1)} &= x(x+1), \\ [x]_{[1,1]}^{(1)} &= x(x-1), \\ [x]_{[3]}^{(1)} &= x(x+1)(x+2), \\ [x]_{[2,1]}^{(1)} &= x(x+1)(x-1), \\ [x]_{[1^3]}^{(1)} &= x(x-1)(x-2), \end{aligned} \quad (2.16)$$

e

$$\begin{aligned} [x]_{[1]}^{(2)} &= x, \\ [x]_{[2]}^{(2)} &= x(x+2), \\ [x]_{[1,1]}^{(2)} &= x(x-1), \\ [x]_{[3]}^{(2)} &= x(x+2)(x+4), \\ [x]_{[2,1]}^{(2)} &= x(x+2)(x-1), \\ [x]_{[1^3]}^{(2)} &= x(x-1)(x-2). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Para x próximo de zero, tais polinômios possuem uma expansão dada por

$$[x]_{\mu}^{(\alpha)} = t_{\alpha}(\mu)x^{D_{\alpha}(\mu)} + \mathcal{O}(x^{D_{\alpha}(\mu)+1}), \quad (2.18)$$

onde $D_{\alpha}(\mu)$ é a altura do α -retângulo de Durfee contido no diagrama de Young da partição μ e

$$t_{\alpha}(\mu) = \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} \prod_{\substack{j=1 \\ c_{\alpha} \neq 0}}^{\mu_i} c_{\alpha}(i, j), \quad (2.19)$$

é o produto dos α -conteúdos não nulos da partição μ .

Dadas duas partições, λ e μ , podemos definir a relação de continência. Dizemos que λ contém μ , e denotamos $\lambda \supseteq \mu$, se valem as duas propriedades

- $\ell(\lambda) \geq \ell(\mu)$;
- $\lambda_i \leq \mu_i$ para todo $1 \leq i \leq \ell(\mu)$.

Essas duas propriedades asseguram que o diagrama de Young de λ “cobre” completamente o diagrama de Young de μ . Por exemplo, $[3, 2^2, 1^2] \supseteq [3, 2, 1^2]$ que correspondem aos

diagramas de Young da Fig. 5a e Fig. 5b; note que o diagrama em (b) é completamente coberto pelo diagrama em (a).

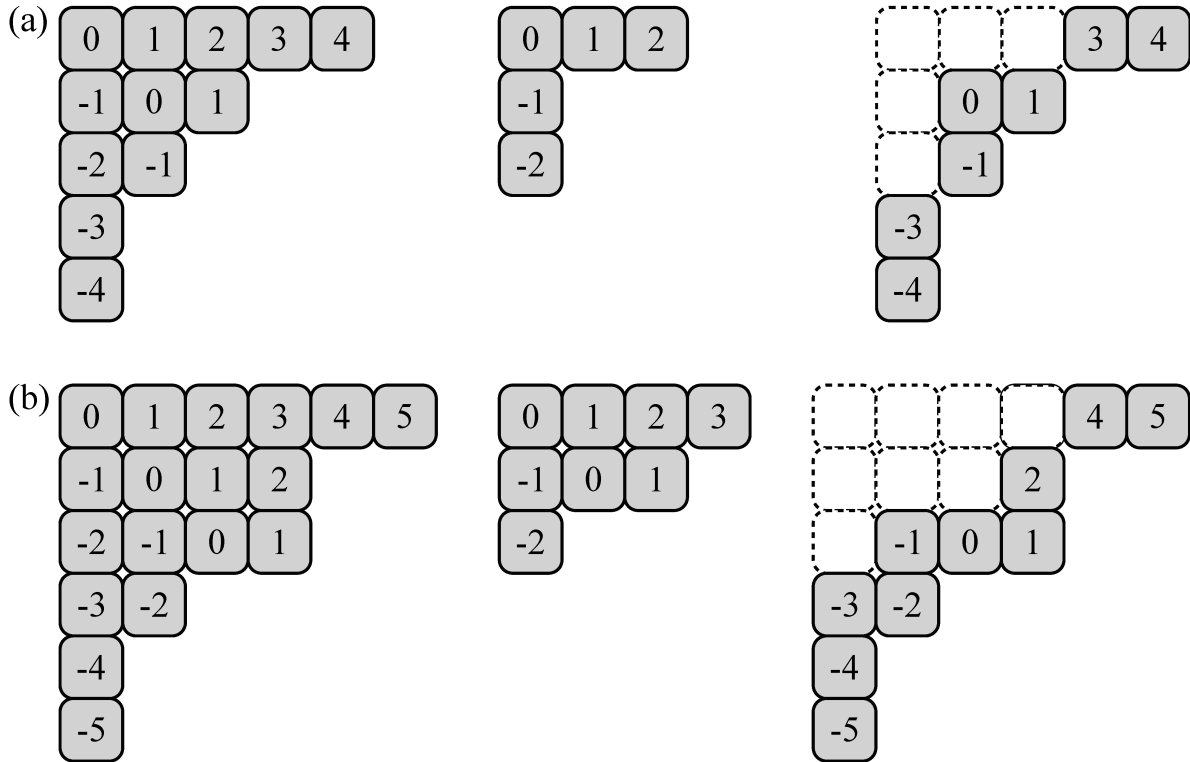


Figura 6 – Na parte superior (a), recortamos do diagrama de $[5, 3, 2, 1^2]$ um diagrama na forma de $[3, 1^2]$ e obtemos a partição oblíqua $[5, 3, 2, 1^2] \setminus [3, 1^2]$; ao passo que na parte inferior (b), recortamos do diagrama de $[6, 4^2, 2, 1^2]$ um diagrama na forma de $[4, 3, 1]$ para obter a partição oblíqua $[6, 4^2, 2, 1^2] \setminus [4, 3, 1]$.

Quando uma partição λ contém outra partição μ , podemos construir uma *partição oblíqua*. Ela é construída removendo do diagrama da partição λ todas as caixas que são comuns ao diagrama da partição μ . Podemos dizer, que para obter a partição oblíqua “recortamos” do diagrama de Young de λ um diagrama de Young na forma de μ . Por isso, representamos uma partição oblíqua como $\lambda \setminus \mu$, com o sinal de diferença entre conjuntos. Alguns exemplos encontram-se na Fig. 6. Na parte superior, recortamos do diagrama de $[5, 3, 2, 1^2]$ um diagrama na forma de $[3, 1^2]$ e obtemos a partição oblíqua $[5, 3, 2, 1^2] \setminus [3, 1^2]$; ao passo que na parte inferior, recortamos do diagrama de $[6, 4^2, 2, 1^2]$ um diagrama na forma de $[4, 3, 1]$ para obter a partição oblíqua $[6, 4^2, 2, 1^2] \setminus [4, 3, 1]$. Na Fig. 5 se considerarmos caixas em cinza como recortadas temos os seguintes exemplos de partições oblíquas: $[3, 2^1, 1^2] \setminus [2^2]$ em (a); $[3, 2, 1^2] \setminus [1]$ em (b); e $[5, 4^2, 3^2, 1^2] \setminus [3^5]$ em (c).

2.3 Funções Simétricas

Dada uma matriz, X , com autovalores x_1, \dots, x_N e uma partição, λ , definimos as *séries de potências* por

$$p_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} (x_1^{\lambda_i} + x_2^{\lambda_i} + \dots + x_N^{\lambda_i}). \quad (2.20)$$

Fica claro que as séries de potências são polinômios de grau n nas variáveis x_1, \dots, x_N . Por exemplo, considere as partições de $n = 3$ e $N = 2$, temos

$$\begin{aligned} p_{[3]}(x_1, x_2) &= x_1^3 + x_2^3, \\ p_{[2,1]}(x_1, x_2) &= (x_1^2 + x_2^2)(x_1 + x_2) = x_1^3 + x_2^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2, \\ p_{[1^3]}(x_1, x_2) &= (x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Essa definição pode ser generalizada naturalmente, a fim de ter como argumento a própria matriz X , basta lembrarmos que os autovalores de X^k são $x_1^k, x_2^k, \dots, x_N^k$. Então,

$$p_\lambda(X) = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \text{Tr}(X^{\lambda_i}). \quad (2.22)$$

Se escolhermos $\pi \in S_n$ tal que o ciclo-tipo π seja λ , $\text{ct}(\pi) = \lambda$, podemos ainda expressar $p_\lambda(X)$ como uma soma de produtos dos elementos de X

$$p_\lambda(X) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^N \prod_{k=1}^n X_{i_k i_{\pi(k)}}, \text{ com } \text{ct}(\pi) = \lambda. \quad (2.23)$$

Quando não houver risco de confusão utilizaremos uma equivalência de notações para as funções simétricas $p_\lambda(X)$ tendo como argumento as entradas de X , como na Eq. (2.23), ou os autovalores de X , dessa forma $p_\lambda(X) \equiv p_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_N)$, como na Eq. (2.20).

As séries de potências formam uma base completa para o anel de funções simétricas [53]. Por isso, podemos utilizá-las para expressar as *funções de Schur* através de uma soma sobre o grupo de permutações

$$s_\lambda(X) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \chi_\lambda(\pi) p_{\text{ct}(\pi)}(X). \quad (2.24)$$

Podemos ainda agrupar as permutações por ciclo-tipo e obter uma expressão com uma soma sobre partições

$$s_\lambda(X) = \frac{1}{n!} \sum_{\mu \vdash n} |\mathcal{C}_\mu| \chi_\lambda(\mu) p_\mu(X), \quad (2.25)$$

e esta relação pode ser invertida, utilizando a relação de ortogonalidade entre os caracteres do grupo de permutações, Eq. (2.6),

$$p_\mu(X) = \sum_{\rho \vdash n} \chi_\rho(\mu) s_\rho(X). \quad (2.26)$$

Para $N = 2$ e $n = 3$, temos as seguintes funções de Schur:

$$\begin{aligned} s_{[3]}(x_1, x_2) &= (x_1^2 + x_2^2)(x_1 + x_2) = x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3, \\ s_{[2,1]}(x_1, x_2) &= x_1x_2(x_1 + x_2) = x_1^2x_2 + x_1x_2^2, \\ s_{[1^3]}(x_1, x_2) &= 0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

É importantíssimo ressaltar que $s_\lambda(x_1, \dots, x_N) \neq 0$ se, e somente se, $\ell(\lambda) \leq N$. Note que $s_{[1^3]}(x_1, x_2)$ não satisfaz essa condição.

Podemos ainda expressar as funções de Schur através de um quociente de determinantes. Se denotarmos

$$\det \left([x_j^{N+\lambda_i-i}]_{1 \leq i, j \leq N} \right) = \det \begin{pmatrix} x_1^{N+\lambda_1-1} & x_2^{N+\lambda_1-1} & \cdots & x_N^{N+\lambda_1-1} \\ x_1^{N+\lambda_2-2} & x_2^{N+\lambda_2-2} & \cdots & x_N^{N+\lambda_2-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{\lambda_N} & x_2^{\lambda_N} & \cdots & x_N^{\lambda_N} \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Vale salientar que $\ell(\lambda) < N$, então para $k > \ell(\lambda)$, convencionamos que $\lambda_k = 0$. Podemos então definir a função de Schur por

$$s_\lambda(X) = \frac{\det \left([x_j^{N+\lambda_i-i}]_{1 \leq i, j \leq N} \right)}{\Delta(X)}, \quad (2.29)$$

onde $\Delta(X)$ corresponde ao determinante de Vandermonde:

$$\Delta(X) = \det \begin{pmatrix} x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & \cdots & x_N^{N-1} \\ x_1^{N-2} & x_2^{N-2} & \cdots & x_N^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \det \left([x_j^{N-i}]_{1 \leq i, j \leq N} \right) = \prod_{i=1}^{N-1} \prod_{j=i+1}^N (x_i - x_j). \quad (2.30)$$

Quando o argumento da função de Schur é a matriz identidade de ordem N , temos

$$s_\lambda(1^N) = \frac{d_\lambda}{n!} [N]_\lambda^{(1)} = \frac{d_\lambda}{n!} \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \prod_{j=1}^{\lambda_i} (N + j - i). \quad (2.31)$$

onde $[N]_\lambda^{(1)}$ é definido na Eq. (2.15).

Outra importante classe de funções simétricas é formada pelos *polinômios zonais*. Eles são definidos de maneira semelhante às funções de Schur, mas utilizamos o coset-tipo ao invés do ciclo-tipo

$$Z_\lambda(X) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \omega_\lambda(\sigma) p_{[\sigma]}(X), \quad (2.32)$$

onde $[\sigma]$ representa o coset-tipo da permutação σ [55]. Podemos ainda agrupar as permutações pelos respectivos coset-tipos e expressar o polinômio zonal através de uma soma sobre partições

$$Z_\lambda(X) = \sum_{\mu \vdash n} \frac{|K_\mu|}{2^n n!} \omega_\lambda(\mu) p_\mu(X). \quad (2.33)$$

E também podemos expressar uma série de potências como combinação linear de polinômios zonais, utilizando a relação de ortogonalidade da Eq. (2.13),

$$p_\mu(X) = \frac{2^n n!}{(2n)!} \sum_{\lambda \vdash n} d_{2\lambda} \omega_\lambda(\mu) Z_\lambda(X). \quad (2.34)$$

Para $N = 2$ e $n = 3$, temos os seguintes polinômios zonais

$$\begin{aligned} Z_{[3]}(x_1, x_2) &= 3(x_1 + x_2)(5x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2) = 15x_1^3 + 9x_1^2x_2 + 9x_1x_2^2 + 15x_2^3, \\ Z_{[2,1]}(x_1, x_2) &= 4x_1x_2(x_1 + x_2) = 4x_1^2x_2 + 4x_1x_2^2, \\ Z_{[1^3]}(x_1, x_2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Notavelmente podemos perceber que os polinômios zonais resultam em expressões polinomiais mais complicadas que as funções de Schur. Além disso, os polinômios zonais também satisfazem a condição de que $Z_\lambda(X) \neq 0$ se, e somente se, $\ell(\lambda) \leq N$.

Avaliando o polinômio zonal na matriz identidade de ordem N , temos

$$Z_\lambda(1^N) = [N]_\lambda^{(2)} = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \prod_{j=1}^{\lambda_i} (N + 2j - i - 1). \quad (2.36)$$

2.3.1 Polinômios de Jack

Há ainda outra classe de funções simétricas, que engloba as duas classes discutidas até aqui e uma infinidade de outras. Essa classe constitui-se dos *polinômios Jack*, os quais denotamos $J_\lambda^{(\alpha)}$.

Os polinômios de Jack, $J_\lambda^{(\alpha)}$, são definidos através da partição λ e do índice α [55]. Quando $\alpha = 1$, o polinômio de Jack é proporcional à função de Schur:

$$J_\lambda^{(1)}(X) = \frac{n!}{d_\lambda} s_\lambda(X). \quad (2.37)$$

E quando $\alpha = 2$, o polinômio de Jack coincide exatamente com o polinômio zonal

$$J_\lambda^{(2)}(X) = Z_\lambda(X). \quad (2.38)$$

Ao avaliar o polinômio de Jack na matriz identidade de ordem N , obtemos

$$J_\lambda^{(\alpha)}(1^N) = [N]_\lambda^{(\alpha)} = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \prod_{j=1}^{\lambda_i} (N + \alpha(j-1) - i + 1). \quad (2.39)$$

Podemos, ainda, expressar esse valor utilizando funções Gama,

$$J_\lambda^{(\alpha)}(1^N) = \alpha^{|\lambda|} \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{\Gamma(\lambda_i + \frac{N+1-i}{\alpha})}{\Gamma(\frac{N+1-i}{\alpha})}. \quad (2.40)$$

Como foi mencionado acima, tanto funções de Schur quanto polinômios zonais constituem uma base para o anel de funções simétricas. O mesmo é válido para polinômios de Jack com outros valores de α . Em particular, podemos expandir a seguinte expressão

$$\prod_{i=1}^{N_X} \prod_{j=1}^{N_Y} (1 - x_i y_j)^{-1/\alpha} = \sum_{\lambda} \frac{1}{j_{\lambda}^{(\alpha)}} J_{\lambda}^{(\alpha)}(X) J_{\lambda}^{(\alpha)}(Y). \quad (2.41)$$

Esta expressão, Eq. (2.41), é uma generalização da *identidade de Cauchy* para polinômios de Jack [56]. Em particular, temos

$$j_{\lambda}^{(\alpha)} = \begin{cases} \left(\frac{|\lambda|!}{d_{\lambda}}\right)^2, & \text{para } \alpha = 1 \\ \frac{(2n)!}{d_{2\lambda}}, & \text{para } \alpha = 2 \end{cases}. \quad (2.42)$$

Temos ainda uma expressão para um produto de polinômios de Jack como combinação linear de polinômios de Jack

$$J_{\mu}^{(\alpha)}(X) J_{\nu}^{(\alpha)}(X) = \sum_{\lambda} C_{\mu\nu\lambda}^{(\alpha)} J_{\lambda}^{(\alpha)}(X). \quad (2.43)$$

Os coeficientes da expansão, $C_{\mu\nu\lambda}^{(\alpha)}$, são chamados *coeficientes de Littlewood-Richardson*. Os coeficientes de Littlewood-Richardson são nulos a menos que $\lambda \supseteq \mu$, $\lambda \supseteq \nu$ e $|\lambda| = |\mu| + |\nu|$. A última condição pode ser entendida levando-se em consideração os graus dos polinômios: no lado esquerdo da Eq. (2.43) temos um produto de dois polinômios de graus $|\mu|$ e $|\nu|$, devemos ter, portanto, polinômios de grau $|\mu| + |\nu|$ no lado direito. Além disso, devemos ter $C_{\mu\nu\lambda}^{(\alpha)} = C_{\nu\mu\lambda}^{(\alpha)}$, devido à comutatividade do produto de polinômios. Como exemplos, consideremos

$$\begin{aligned} J_{[1]}^{(1)}(X) J_{[1]}^{(1)}(X) &= \frac{1}{2} J_{[2]}^{(1)}(X) + \frac{1}{2} J_{[1^2]}^{(1)}(X), \\ J_{[1]}^{(1)}(X) J_{[2]}^{(1)}(X) &= \frac{1}{3} J_{[3]}^{(1)}(X) + \frac{2}{3} J_{[2,1]}^{(1)}(X), \\ J_{[1]}^{(1)}(X) J_{[1^2]}^{(1)}(X) &= \frac{2}{3} J_{[2,1]}^{(1)}(X) + \frac{1}{3} J_{[1^3]}^{(1)}(X), \end{aligned} \quad (2.44)$$

e

$$\begin{aligned} J_{[1]}^{(2)}(X) J_{[1]}^{(2)}(X) &= \frac{1}{3} J_{[2]}^{(2)}(X) + \frac{2}{3} J_{[1^2]}^{(2)}(X), \\ J_{[1]}^{(2)}(X) J_{[2]}^{(2)}(X) &= \frac{1}{5} J_{[3]}^{(2)}(X) + \frac{4}{5} J_{[2,1]}^{(2)}(X), \\ J_{[1]}^{(2)}(X) J_{[1^2]}^{(2)}(X) &= \frac{1}{2} J_{[2,1]}^{(2)}(X) + \frac{1}{2} J_{[1^3]}^{(2)}(X). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Em particular, devido à Eq. (2.37), temos

$$\begin{aligned} s_{[1]}(X) s_{[1]}(X) &= s_{[2]}(X) + s_{[1^2]}(X), \\ s_{[1]}(X) s_{[2]}(X) &= s_{[3]}(X) + s_{[2,1]}(X), \\ s_{[1]}(X) s_{[1^2]}(X) &= s_{[2,1]}(X) + s_{[1^3]}(X), \end{aligned} \quad (2.46)$$

para outros produtos, temos combinações lineares com coeficientes diferentes de 1. Entretanto, em algumas situações pode ser mais conveniente utilizar funções de Schur ao invés de polinômios de Jack. Por isso, definimos

$$s_\mu(X)s_\nu(X) = \sum_\lambda C_{\mu\nu\lambda} s_\lambda(X), \quad (2.47)$$

sendo uma modificação da Eq. (2.43), tendo em vista que

$$C_{\mu\nu\lambda} = \frac{|\lambda|!}{|\mu|!|\nu|!} \frac{d_\mu d_\nu}{d_\lambda} C_{\mu\nu\lambda}^{(1)}. \quad (2.48)$$

Utilizando os coeficientes de Littlewood-Richardson podemos definir um *polinômio de Jack oblíquo*

$$J_{\lambda\backslash\mu}^{(\alpha)}(X) = \sum_\nu \frac{j_\lambda^{(\alpha)}}{j_\nu^{(\alpha)}} C_{\mu\nu\lambda}^{(\alpha)} J_\nu^{(\alpha)}(X). \quad (2.49)$$

Em particular, combinando Eqs. (2.37), (2.42) e (2.43), concluímos que

$$J_{\lambda\backslash\mu}^{(1)}(X) = \frac{|\lambda|!|\mu|!}{d_\lambda d_\mu} s_{\lambda\backslash\mu}(X), \quad (2.50)$$

e, decorre que,

$$s_{\lambda\backslash\mu}(X) = \sum_\nu C_{\mu\nu\lambda} s_\nu(X). \quad (2.51)$$

Isto nos permite obter uma expressão fechada para $J_{\lambda\backslash\mu}^{(1)}(1^N)$ pois $s_{\lambda\backslash\mu}(1^N)$ pode ser obtida através do determinante de uma matriz cujas entradas são coeficientes binomiais [57, 55]. Temos

$$s_{\alpha/\mu}(1^N) = \det \left(\left[\binom{N + \lambda_i - i - \mu_j + j - 1}{\lambda_i - i - \mu_j + j} \right]_{1 \leq i, j \leq N} \right). \quad (2.52)$$

R. Stanley mostrou que [56]

$$J_\lambda^{(\alpha)}(X; Y) = \sum_\mu \frac{1}{j_\mu^{(\alpha)}} J_\mu^{(\alpha)}(X) J_{\lambda\backslash\mu}^{(\alpha)}(Y), \quad (2.53)$$

onde $(X; Y)$ representa a concatenação da lista de autovalores $(x_1, \dots, x_{N_1}, y_1, \dots, y_{N_2})$ ou a soma direta das duas matrizes $(X \oplus Y)$. Podemos expressar essa relação sem utilizar o polinômio oblíquo

$$J_\lambda^{(\alpha)}(X; Y) = \sum_{\mu\nu} \frac{j_\lambda^{(\alpha)}}{j_\mu^{(\alpha)} j_\nu^{(\alpha)}} C_{\mu\nu\lambda}^{(\alpha)} J_\mu^{(\alpha)}(X) J_\nu^{(\alpha)}(Y). \quad (2.54)$$

2.3.2 Funções Simétricas e Generalização da Integral de Selberg

A função beta de Euler pode ser generalizada para várias variáveis. Uma dessas generalizações é a seguinte

$$S_0(a, b, \alpha, N) = \int_0^1 \prod_{i=1}^N x_i^{a-1} (1-x_i)^{b-1} |\Delta(X)|^{2/\alpha} dx_1 \cdots dx_N, \quad (2.55)$$

onde $|\Delta(X)|^{2/\alpha}$ corresponde a uma potência do determinante de Vandermonde (Eq. (2.30)). Note que obtemos a função beta quando $N = 1$; ao passo que se $\alpha \rightarrow \infty$ obtemos a N -ésima potência da função beta, ou seja, desaparecem os vínculos entre as variáveis. O resultado desta integral foi obtido por Atle Selberg (1917 - 2007), matemático norueguês, em 1944 [58]

$$S_0(a, b, \alpha, N) = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{\alpha} + 1\right) \Gamma\left(a + \frac{i}{\alpha}\right) \Gamma\left(b + \frac{i}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \Gamma\left(a + b + \frac{N+i-1}{\alpha}\right)}. \quad (2.56)$$

Posteriormente, a integral foi novamente generalizada a fim de acomodar funções no integrando. Algumas dessas funções são os polinômios de Jack,

$$S_\mu(a, b, \alpha, N) = \int_0^1 J_\mu^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_N) \prod_{i=1}^N x_i^{a-1} (1-x_i)^{b-1} |\Delta(X)|^{2/\alpha} dx_1 \cdots dx_N. \quad (2.57)$$

O resultado da integral é dado por [58]:

$$S_\mu(a, b, \alpha, N) = [N]_\mu^{(\alpha)} \frac{[N + \alpha a - 1]_\mu^{(\alpha)}}{[2N + \alpha a + \alpha b - 2]_\mu^{(\alpha)}} S_0(a, b, \alpha, N), \quad (2.58)$$

obtido por Kaneko em 1993 [59]. Note que se μ corresponde à partição vazia, temos $J_\mu^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_N) = 1$ e $[x]_\mu^{(\alpha)} = 1$, recuperando o resultado da Eq. (2.56). É difícil não se maravilhar com o resultado relativamente simples da integral, visto que uma grande quantidade de vínculos entre as variáveis são introduzidas pelo determinante de Vandermonde e pelo polinômio de Jack.

2.4 Médias nos Grupos de Matrizes

Como dissemos nas seções acima, é possível obter matrizes que representam os elementos do grupo, ou seja, as operações do grupo são preservadas pelo produto das matrizes que o representam. Isto é possível porque há conjuntos de matrizes que formam grupos.

Considere o conjunto das matrizes de ordem N com entradas complexas cuja matriz inversa é a matriz conjugada transposta, na notação de conjuntos $\{U | UU^\dagger = U^\dagger U = I_N\}$, onde I_N representa a matriz identidade de ordem N . Tais matrizes são chamadas *matrizes unitárias*. Tomemos como operação sobre esse conjunto o produto usual de matrizes.

Podemos checar que o produto de duas matrizes unitárias resulta numa matriz unitária, logo a operação é fechada; o produto de matrizes é associativo; temos uma matriz que não altera o produto com qualquer outra matriz (a matriz identidade); e toda matriz unitária está associada uma matriz inversa (pois seu determinante não é nulo). Dessa forma, concluímos que esse conjunto de matrizes forma um grupo, que chamamos *grupo Unitário*. O grupo Unitário é denotado por $\mathcal{U}(N)$.

Assim como o grupo de permutações, o grupo Unitário também possui caracteres irredutíveis. Os caracteres irredutíveis são as funções de Schur e temos também uma relação de ortogonalidade entre os caracteres

$$\int_{\mathcal{U}(N)} s_\lambda(U) s_\mu(U^\dagger) dU = \delta_{\lambda\mu}. \quad (2.59)$$

Aqui, cabe uma nota sobre a integral acima. Ao realizar uma integral sobre um grupo, de forma análoga a um valor médio sobre um conjunto, precisamos especificar a medida de probabilidade. Aqui utilizamos a *medida de Haar* do grupo Unitário, que é análoga à distribuição uniforme em um intervalo fechado [60]. A medida de Haar é invariante por multiplicações à esquerda e à direita, ou seja, dada uma matriz unitária O , temos

$$dU = d(OU) = d(UO). \quad (2.60)$$

Isto quer dizer que a contribuição infinitesimal de um elemento não é alterada pela multiplicação por um elemento do grupo, ou seja, estamos apenas mudando o nome da variável de integração, pois como O e U são unitárias, UO e OU também são unitárias. Assim, todos os subconjuntos do grupo possuem o mesmo peso na integração, análogo a uma distribuição uniforme.

No grupo Unitário, temos dois subconjuntos de interesse. O primeiro deles é o conjunto das matrizes unitárias reais de ordem N . Isto se traduz no fato que de a inversa de uma matriz é sua transposta, $\{O \mid OO^t = O^tO = I_N\}$. Este subconjunto forma também um grupo, sendo portanto um subgrupo do grupo Unitário.

O grupo das matrizes reais cuja inversa é dada pela matriz transposta é chamado *grupo Ortogonal* e é denotado $\mathcal{O}(N)$. Os elementos do grupo Ortogonal são as rotações, reflexões e inversões em \mathbb{R}^N .

No grupo ortogonal, os caracteres irredutíveis são denotados por o_λ e temos a seguinte relação de ortogonalidade

$$\int_{\mathcal{O}(N)} o_\lambda(O) o_\mu(O) dO = \delta_{\lambda\mu}. \quad (2.61)$$

De modo análogo ao grupo Unitário, a integração é realizada de acordo com a medida de Haar do grupo Ortogonal, que é, da mesma forma, invariante por multiplicação por elementos do grupo Ortogonal.

Assim como para as funções de Schur, possuímos uma expressão explícita para $o_\lambda(O)$ em termos dos autovalores de O [60] se a ordem das matrizes é par, então

$$o_\lambda(O) = \frac{\det \left(z_i^{N+\lambda_j-j} + z_i^*{}^{N+\lambda_j-j} \right)}{\det \left(z_i^{N-j} + z_i^*{}^{N-j} \right)}, \quad (2.62)$$

e, se a ordem das matrizes é ímpar, temos

$$o_\lambda(O) = \frac{\det \left(z_i^{N+\lambda_j-j+1/2} + z_i^*{}^{N+\lambda_j-j+1/2} \right)}{\det \left(z_i^{N-j+1/2} + z_i^*{}^{N-j+1/2} \right)}. \quad (2.63)$$

Também temos uma expressão para a dimensão das representações, $o_\lambda(1^N)$. Temos

$$o_\lambda(1^N) = \frac{d_\lambda}{n!} \{N\}_\lambda, \quad (2.64)$$

onde

$$\{N\}_\lambda = \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \prod_{j=1}^{\lambda_i} (N-1+e(i,j)), \quad (2.65)$$

com

$$e(i,j) = \begin{cases} \lambda_i + \lambda_j - i - j + 1, & \text{se } i \geq j \\ -\lambda'_i - \lambda'_j + i + j - 1, & \text{se } i < j \end{cases}, \quad (2.66)$$

lembrando que λ' é partição conjugada de λ .

O outro conjunto de nosso interesse é o subconjunto de matrizes unitárias que são simétricas, ou seja, $\{U \mid UU^\dagger = U^\dagger U = I_N \text{ e } U = U^t\}$. Este subconjunto não é um grupo, pois o produto de duas matrizes simétricas nem sempre resulta numa matriz simétrica. Com efeito, considere

$$U_1 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7-4i & 4i \\ 4i & 7+4i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad U_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}, \quad (2.67)$$

temos

$$U_1 U_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} + \frac{7}{18}i & -\frac{1}{18} - \frac{7}{18}i \\ \frac{7}{18} + \frac{1}{18}i & \frac{7}{18} + \frac{5}{6}i \end{pmatrix}, \quad (2.68)$$

que é unitária mas não é simétrica. Este conjunto é chamado *Ensemble Circular Ortogonal*, e é denotado $COE(N)$. Já que $COE(N)$ não forma um grupo, não temos caracteres irredutíveis. Porém utilizando a medida de Haar do grupo unitário (que é induzida para o $COE(N)$), temos uma relação de ortogonalidade no $COE(N)$ desempenhada pelos polinômios zonais

$$\int_{COE(N)} Z_\lambda(U) Z_\mu(U^\dagger) dU = \delta_{\lambda\mu}. \quad (2.69)$$

Agora que temos uma noção de integração nos grupos, podemos nos questionar sobre outras médias, por exemplo, produtos de elementos de matriz. Algumas dessas

médias no grupo Unitário são

$$\langle U_{ab}U_{cd}^* \rangle = \frac{\delta_{ac}\delta_{bd}}{N}, \quad (2.70)$$

$$\langle U_{ii}U_{ii}U_{ii}^*U_{ii}^* \rangle = \frac{2}{N(N+1)}, \quad (2.71)$$

$$\langle U_{ij}U_{ji}U_{ij}^*U_{ji}^* \rangle = \frac{1}{N^2-1}, \text{ com } i \neq j, \quad (2.72)$$

$$\langle U_{11}U_{ij}U_{ij}^* \rangle = 0. \quad (2.73)$$

Já podemos perceber, que por se tratarem de variáveis complexas, devemos ter termos do tipo “módulo ao quadrado” ($|\cdot|^2$), como nas Eqs. (2.70) à (2.72), para o valor médio resultar numa expressão não nula; caso contrário obtemos um valor nulo, como na Eq. (2.73).

É conhecida uma expressão geral para o cálculo de médias de elementos de matriz no grupo Unitário [61]

$$\langle U_{a_1 b_1} \cdots U_{a_n b_n} U_{c_1 d_1}^* \cdots U_{c_m d_m}^* \rangle_{\mathcal{U}(N)} = \delta_{nm} \sum_{\sigma, \tau \in S_n} \delta_{\sigma}(\vec{a}, \vec{c}) \delta_{\tau}(\vec{b}, \vec{d}) W^U(\sigma^{-1}\tau, N). \quad (2.74)$$

Primeiramente, note que o valor médio é nulo quando $n \neq m$, como ocorreu na Eq. (2.73). Em segundo lugar, é preciso verificar a existência de vínculos entre os elementos de matriz que levem a um termo do tipo $|\cdot|^2$. Isto é feito verificando-se se as listas dos índices são permutações umas das outras. Se escrevemos as listas dos índices dos elementos, $\vec{a} = [a_1, \dots, a_n]$ e $\vec{c} = [c_1, \dots, c_n]$ (agora, já estamos considerando $n = m$), definimos

$$\delta_{\sigma}(\vec{a}, \vec{c}) = \prod_{k=1}^n \delta_{a_k c_{\sigma(k)}}, \quad (2.75)$$

que verifica se a lista \vec{a} é resultado de permutar a lista \vec{c} de acordo com a permutação σ . Por exemplo, $\delta_{(132)}([x, y, z], [y, z, x]) = 1$ e $\delta_{(132)}([x, y, z], [x, z, y]) = 0$. Por fim, os pesos da soma são chamadas *funções de Weingarten*, $W^U(\sigma^{-1}\tau, N)$, dada por uma soma sobre partições [61, 62]

$$W^U(\sigma, N) = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq N}} \chi_{\lambda}(\sigma) \frac{d_{\lambda}}{[N]_{\lambda}^{(1)}}. \quad (2.76)$$

Note que para computar a função de Weingarten devemos calcular o caractere irredutível da permutação σ na representação irredutível λ . Entretanto, os caracteres são constantes nas classes de conjugação. Por isso, ao invés de especificar uma permutação como argumento, podemos especificar seu ciclo-tipo, como nos seguintes exemplos:

$$\begin{aligned} W^U([1], N) &= \frac{1}{N}, \\ W^U([2], N) &= \frac{2}{N^2-1}, \\ W^U([1^2], N) &= \frac{2}{N(N^2-1)}. \end{aligned}$$

Vejam agora alguns exemplos, de médias sobre o grupo Ortogonal, análogos aos do grupo unitário

$$\langle O_{ab}O_{cd} \rangle = \frac{\delta_{ac}\delta_{bd}}{N}, \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} \langle O_{ii}O_{ii}O_{ii}O_{ii} \rangle &= \frac{5N+1}{N(N-1)(N+2)}, \\ \langle O_{ij}O_{ji}O_{ij}O_{ji} \rangle &= \frac{N+1}{N(N-1)(N+2)}, \text{ com } i \neq j, \\ \langle O_{11}O_{ij}O_{ij} \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Agora não temos elementos conjugados, o que percebemos é que médias com um número ímpar de termos resultam em zero. Temos uma expressão semelhante à Eq. (2.74) para o grupo Ortogonal [63], com uma soma percorrendo o conjunto dos *matchings*

$$\langle O_{a_1 b_1} \cdots O_{a_{2n} b_{2n}} \rangle_{\mathcal{O}(N)} = \sum_{\sigma, \tau \in \mathcal{M}_n} \Delta_{\sigma}(\vec{a}) \Delta_{\tau}(\vec{b}) W^{\mathcal{O}}(\sigma^{-1}\tau, N), \quad (2.79)$$

onde $\Delta_{\sigma}(\vec{a})$ verifica se a lista \vec{a} satisfaz o *matching* gerado por σ e são dadas por

$$\Delta_{\sigma}(\vec{a}) = \prod_{k=1}^n \delta_{a_{\sigma(2k-1)}, a_{\sigma(2k)}}. \quad (2.80)$$

Por exemplo, para $x \neq y$, $\Delta_{(23)}([x, x, y, y]) = \Delta_{(23)}([x, x, y, z]) = 0$ e $\Delta_{(23)}([x, y, x, y]) = 1$, pois (23) está associada ao *matching* $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$. Por depender apenas do *matching* gerado por σ , elas são invariantes por ação do Hiperoctaedro:

$$\Delta_{\sigma\xi}(\vec{a}) = \Delta_{\sigma}(\vec{a}) \text{ para } \xi \in H_n. \quad (2.81)$$

E a função de Weingarten do grupo Ortogonal é dada por [63]

$$W^{\mathcal{O}}(\sigma, N) = \frac{2^n n!}{(2n)!} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq N}} \omega_{\lambda}(\sigma) \frac{d_{2\lambda}}{[N]_{\lambda}^{(2)}}. \quad (2.82)$$

Já que a função zonal esférica não distingue entre permutações com o mesmo coset-tipo, o mesmo ocorre com a função de Weingarten ortogonal. Por isso, podemos utilizar o coset-tipo da permutação como argumento, como nestes exemplos

$$\begin{aligned} W^{\mathcal{O}}([1], N) &= \frac{1}{N}, \\ W^{\mathcal{O}}([2], N) &= -\frac{1}{N(N-1)(N+2)}, \\ W^{\mathcal{O}}([1^2], N) &= \frac{N+1}{N(N-1)(N+2)}. \end{aligned}$$

Note que $W^{\mathcal{O}}([2], N) = W^{\mathcal{O}}((23), N) = W^{\mathcal{O}}((243), N)$ e $W^{\mathcal{O}}([1^2], N) = W^{\mathcal{O}}(id, N)$.

E, para o Ensemble Circular Ortogonal, temos os seguintes exemplos de médias

$$\begin{aligned}
\langle U_{ab}U_{cd}^* \rangle &= \frac{\delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}}{N+1}, \\
\langle U_{ii}U_{ii}U_{ii}^*U_{ii}^* \rangle &= \frac{8}{(N+1)(N+3)}, \\
\langle U_{ij}U_{ji}U_{ij}^*U_{ji}^* \rangle &= \frac{2}{N(N+3)}, \\
\langle U_{11}U_{ij}U_{ij}^* \rangle &= 0.
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Novamente, percebemos que o número de elementos conjugados e não conjugados deve ser igual.

Para o $COE(N)$, temos a seguinte expressão para a média de elementos de matriz

$$\langle U_{i_1, i_2} \cdots U_{i_{2n-1}, i_{2n}} U_{j_1, j_2}^* \cdots U_{j_{2n-1}, j_{2n}}^* \rangle_{AI} = \sum_{\sigma \in S_{2n}} \delta_{\sigma}(\vec{i}, \vec{j}) W^{COE}(\sigma, N), \tag{2.84}$$

onde a função de Weingarten do $COE(N)$ é dada por

$$W^{COE}(\sigma, N) = \frac{2^n n!}{(2n)!} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq N}} \omega^\lambda(\sigma) \frac{d_{2\lambda}}{[N+1]_\lambda^{(2)}}. \tag{2.85}$$

Comparando a Eq. (2.82) com a Eq. (2.85), vemos que $W^{AI}(\sigma, N) = W^O(\sigma, N+1)$. Dessa forma $W^{COE}(\sigma, N)$ também depende apenas do coset-tipo de σ . As funções de Weingarten do $COE(N)$ são

$$\begin{aligned}
W^{COE}([1], N) &= \frac{1}{N+1}, \\
W^{COE}([2], N) &= -\frac{1}{N(N+1)(N+3)}, \\
W^{COE}([1^2], N) &= \frac{N+2}{N(N+1)(N+3)}.
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Esses conceitos fundamentais serão utilizados para obtermos momentos de transporte para alguns arranjos de cavidade mesoscópica. Somado a eles, no capítulo seguinte, discutimos a aplicação da Aproximação Semiclássica para transformar o problema de obter momentos de transporte numa soma sobre diagramas; e como calcular essa soma através de uma integral matricial.

3 Integrais Matriciais e Aproximação Semi-clássica

Neste capítulo, vamos delinear o processo utilizado nos capítulos subsequentes para obter expressões para os momentos de transporte. Descrevemos a ideia de matriz de espalhamento e sua relação com os momentos de transporte utilizando a abordagem de Landauer-Büttiker [2]. Em seguida, utilizamos a aproximação semiclassical para obter os elementos da matriz de transmissão através de somas sobre trajetórias. Por fim, as somas são implementadas através de integrais matriciais que mimetizam as regras diagramáticas.

Ao longo deste e de capítulos subsequentes, o termo M sempre representa o número total de canais disponíveis na cavidade independentemente do número de guias presentes. Assim, para um sistema com duas guias com N_1 e N_2 canais, respectivamente, temos $M = N_1 + N_2$. E para um sistema com três guias com N_1 , N_2 e N_3 canais, respectivamente, temos $M = N_1 + N_2 + N_3$.

3.1 Introdução

Uma das técnicas mais empregadas para o estudo de transporte quântico caótico é a Teoria de Matrizes Aleatórias (RMT) [2, 64], em que o problema é atacado de um ponto de vista estatístico onde os operadores são substituídos por matrizes distribuídas ao longo de um ensemble adequado ao sistema. A RMT tem se mostrado adequada para revelar características universais, as quais não dependem das características geométricas do sistema, entretanto, dependem fortemente das simetrias intrínsecas do hamiltoniano correspondente, como Simetria de Reversão Temporal e Simetria Rotação-*spin* [2, 64]. Temos, então, três ensembles principais: Ensemble Circular Ortogonal (*COE*), que preserva Simetria de Reversão Temporal e Simetria Rotação-*spin*; Ensemble Circular Simplético (*CSE*), que preserva Simetria de Reversão Temporal e tem Simetria Rotação-*spin* quebrada, por exemplo, por interação *spin*-órbita; e ensemble Unitário ($\mathcal{U}(N)$) que tem Simetria de Reversão Temporal e Simetria Rotação-*spin* quebradas, por exemplo, por um campo magnético e por interação *spin*-órbita, respectivamente. A RMT pode ser aplicada diretamente à abordagem de Landauer-Büttiker [65, 66] para obter valores esperados dos momentos de transporte eletrônico, tais como condutância [67, 68, 44, 45, 69, 29], *shot-noise* [30, 44, 45, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 37], e o terceiro cumulante [77, 78, 79, 80]. Apesar do limite de um grande número de canais, a variância da condutância e o valor médio do *shot-noise* mantêm um valor universal (independente das características específicas do sistema), um indicativo da presença de caos quântico [2].

Dentre os principais fatores que afetam os valores médios dos momentos de transporte eletrônico, estão a presença de barreiras de tunelamento [68, 71, 72, 73, 76, 37, 77, 78, 80], causada pela junção entre a guia e o interior da cavidade e o número total de guias disponíveis [44, 45, 81, 82, 83, 84]. Na literatura, é possível encontrar resultados exatos tratando cavidades conectadas de forma ideal às guias [85]. No entanto, estudos que consideram o efeito de barreiras de tunelamento e várias guias são, frequentemente, cálculos perturbativos válidos apenas no regime de um grande número de canais [44, 71, 72]. Portanto, há uma escassez de resultados não perturbativos na literatura que consideram tanto barreiras de tunelamento quanto várias guias.

3.2 Matriz de Espalhamento

Considere uma cavidade na qual temos m guias acopladas. Através das guias fluem elétrons que serão espalhados através da cavidade. Nas guias, podemos considerar que a função de onda eletrônica é composta de duas partes. Na direção transversal da guia, temos uma função de onda de partícula confinada, como os autoestados do poço-infinito; já na direção longitudinal, temos ondas planas, ou seja, funções de onda de partícula livre. Os modos de ondas planas são chamados canais da guia. Podemos dispor as amplitudes de espalhamento antes e depois de passar pela cavidade na forma de uma matriz. Dessa forma, um elemento S_{ba} da matriz de espalhamento conecta o a -ésimo modo incidente e o b -ésimo modo transmitido. A matriz pode ser organizada em blocos de matriz, da seguinte forma,

$$S = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^{(11)} & \mathbf{t}^{(12)} & \dots & \mathbf{t}^{(1m)} \\ \mathbf{t}^{(21)} & \mathbf{r}^{(22)} & \dots & \mathbf{t}^{(2m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{t}^{(m1)} & \mathbf{t}^{(m2)} & \dots & \mathbf{r}^{(mm)} \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Nessa notação, o bloco $\mathbf{t}^{(ba)}$ contém as amplitudes de espalhamento dos canais que incidem pela guia a e são transmitidos pela guia b . E os blocos diagonais, $\mathbf{r}^{(aa)}$ contém as amplitudes de espalhamento dos canais que incidem pela guia a e retornam pela guia a , ou seja, são refletidos. Assim, se uma guia a comporta N_a canais e uma guia b comporta N_b canais, então o bloco $\mathbf{t}^{(ba)}$ é uma matriz de ordem $N_b \times N_a$, e o bloco $\mathbf{r}^{(aa)}$ é uma matriz quadrada de ordem N_a . Note ainda que devido à conservação da probabilidade, é necessário que a matriz S seja unitária. Desse fato, segue que $\mathbf{t}^{(ab)} = (\mathbf{t}^{(ba)})^\dagger$ e que os blocos $\mathbf{r}^{(aa)}$ são hermitianos, ou seja, $\mathbf{r}^{(aa)} = (\mathbf{r}^{(aa)})^\dagger$ [2]. Seguindo a abordagem de Landauer-Büttiker, a condutância da guia a para a guia b é diretamente proporcional¹ ao traço da matriz de transmissão entre as duas guias. A matriz de transmissão é dada em termos dos blocos que compõem a matriz de espalhamento, $T_{ab} = (\mathbf{t}^{(ab)})^\dagger \mathbf{t}^{(ab)}$ [2]. Dessa forma, a condutância

¹ A constante de proporcionalidade vale $G_0 = \frac{e^2}{\pi h} \approx 7,75 \times 10^{-5} \Omega^{-1}$, onde e é a carga elementar.

entre as guias a e b é dada por

$$g_{ab} = G_0 \text{Tr} \left[\left(\mathbf{t}^{(ab)} \right)^\dagger \mathbf{t}^{(ab)} \right]. \quad (3.2)$$

Para momentos mais gerais, utilizamos as séries de potências definidas na Eq. (2.23),

$$p_\lambda(T) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^N \prod_{k=1}^n [T_{ab}]_{i_k i_{\pi(k)}}, \text{ com } \text{ct}(\pi) = \lambda. \quad (3.3)$$

Para simplificar a notação, e quando não houver risco de confusão, vamos omitir os índices em $\mathbf{t}^{(ab)}$ que denotam as guias relacionadas pela transmissão, denotando simplesmente \mathbf{t} . O momento mais simples é a condutância, dado pela média dos autovalores de T ou simplesmente $g = p_1(T)$. Momentos de ordens mais altas, podem ser obtidos através de combinações lineares entre as séries de potências $p_\lambda(T)$. Dentre eles, podemos destacar o ruído de disparo (*shot-noise*) que é dado por $p_1(T) - p_2(T)$ e a variância da condutância, $\text{var}[g] = \langle p_1(T)^2 \rangle - \langle p_1(T) \rangle^2 = \langle p_{[1,1]}(T) \rangle - \langle p_1(T) \rangle^2$.

3.3 Aproximação Semiclássica

Para que a aproximação semiclássica seja eficaz, as dimensões das guias devem satisfazer certas condições. Assuma que a i -ésima guia tem largura W_i . A largura da guia deve ser suficientemente pequena (do ponto de vista clássico) para que o tempo de permanência, τ_D , na cavidade seja alto, tornando possível uma dinâmica fortemente caótica. Isto pode ser entendido do ponto de vista do espalhamento clássico. Guias estreitas dificultariam a saída das partículas da cavidade, possibilitando uma dinâmica caótica, uma vez que as partículas permanecem mais tempo no interior da cavidade. No regime semiclássico, ou seja, com $\hbar \approx 0$ o número de modos é grande $N_i \sim W_i/\hbar$. Entretanto, a energia total dos elétrons é fixa, uma vez que a cavidade não lhes fornece energia. Para implementar a aproximação semiclássica, descrevemos as quantidades de interesse em termos da ação clássica associada às trajetórias no espaço de fase [28]. Neste caso, as quantidades de interesse são os elementos da matriz de espalhamento:

$$S_{oi} = \frac{1}{\sqrt{\tau_D M}} \sum_{\alpha: i \rightarrow o} A_\alpha e^{i \frac{\mathcal{S}_\alpha}{\hbar}}, \quad (3.4)$$

onde M é o número de canais disponíveis na cavidade, $M = \sum_i N_i$, α é uma trajetória que conecta o canal de entrada i ao canal de saída o , \mathcal{S}_α é a ação clássica associada à trajetória α e A_α é o peso da contribuição da trajetória α . Para estudar os momentos de transporte entre as guias a e b , devemos utilizar a Eq. (3.4) para expressar os elementos do bloco

$\mathbf{t}^{(ab)}$ de S . Utilizando a Eq. (3.3), ficamos com

$$\begin{aligned}
p_\lambda(T) &= \sum_{\vec{i}=1}^{N_a} \prod_{k=1}^n T_{i_k i_{\pi(k)}} \\
&= \sum_{\vec{i}=1}^{N_a} \prod_{k=1}^n \left(\sum_{o_k=1}^{N_b} \mathbf{t}_{o_k i_k}^* \mathbf{t}_{o_k i_{\pi(k)}} \right) \\
&= \prod_{k=1}^n \left(\sum_{i_k=1}^{N_a} \sum_{o_k=1}^{N_b} \mathbf{t}_{o_k i_k}^* \mathbf{t}_{o_k i_{\pi(k)}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{T_D^n M^n}} \prod_{k=1}^n \sum_{i_k o_k} \sum_{\alpha_k \beta_k} \mathcal{A}_\alpha \mathcal{A}_\beta e^{i \frac{(\mathcal{S}_\alpha - \mathcal{S}_\beta)}{\hbar}}, \tag{3.5}
\end{aligned}$$

onde a trajetória α_k conecta o canal i_k com o canal o_k e a trajetória β_k conecta o canal $i_{\pi(k)}$ com o canal o_k em que π é uma permutação com ciclo-tipo λ . Além disso, $\mathcal{A}_\alpha = \prod_k A_{\alpha_k}$ é a combinação dos pesos das trajetórias e $\mathcal{S}_\alpha = \sum_k \mathcal{S}_{\alpha_k}$ é a soma das ações clássicas associadas às trajetórias. A complexidade do momento está embutida na forma em que os pares de trajetórias estão correlacionadas entre si, ou seja, se estamos interessados no momento indexado por λ , devemos ter $|\lambda|$ pares de trajetórias. Na Fig. 7 temos dois pares de trajetórias que não interagem entre si (não estão conectadas). Portanto, as trajetórias da figura podem ser entendidas como dois pares de trajetórias para o cálculo do momento p_1 ou como uma trajetória para o cálculo do momento $p_{[1,1]}$. Momentos de ordem mais alta exigem combinações mais complexas de pares de trajetórias; por exemplo, o momento $p_{[3,1,1]}$ exigem três pares de trajetórias conectados entre si e dois pares de trajetórias isoladas. Podemos notar ainda, que a troca de π por outra permutação com o mesmo ciclo-tipo é irrelevante, pois a soma na Eq. (3.5) corre sobre todos os índices sobre o mesmo conjunto de valores ($i_k = 1, \dots, N_a \forall k$). Os momentos de transporte, $p_\lambda(T)$ são funções dependentes da energia com flutuações expressivas. Calcular uma expressão exata é um problema extremamente difícil. Por isso, nos interessamos pelas médias dos momentos. Podemos calculá-las através da aproximação de fase estacionária [64]. Isto é, o valor da média $\langle p_\lambda(T) \rangle$ é aproximado pelo seu valor no ponto onde $\mathcal{S}_\alpha \approx \mathcal{S}_\beta$. Isto acontece quando as trajetórias α_k e β_k coincidem em quase todos os pontos. As trajetórias diferem apenas em pequenas regiões chamadas q -encontros. Dessa forma, as médias dos momentos de transporte resumem-se a somas sobre trajetórias. Os q -encontros podem ser entendidos como regiões onde as q partes de uma trajetória correm aproximadamente paralelas entre si enquanto q pedaços da outra trajetória são permutados entre si. Essa permutação entre essas partes é a diferença significativa entre o par de trajetórias. Por exemplo, na Fig. 7 percorrendo o par de trajetórias superior, vemos que a trajetória azul (contínua) possui três partes correndo paralelas no 3-encontro. Já na trajetória preta (tracejada) essas três partes são permutadas e uma consequência é que a trajetória tracejada percorre primeiro o laço inferior ao passo que a trajetória contínua percorre primeiro o laço superior.

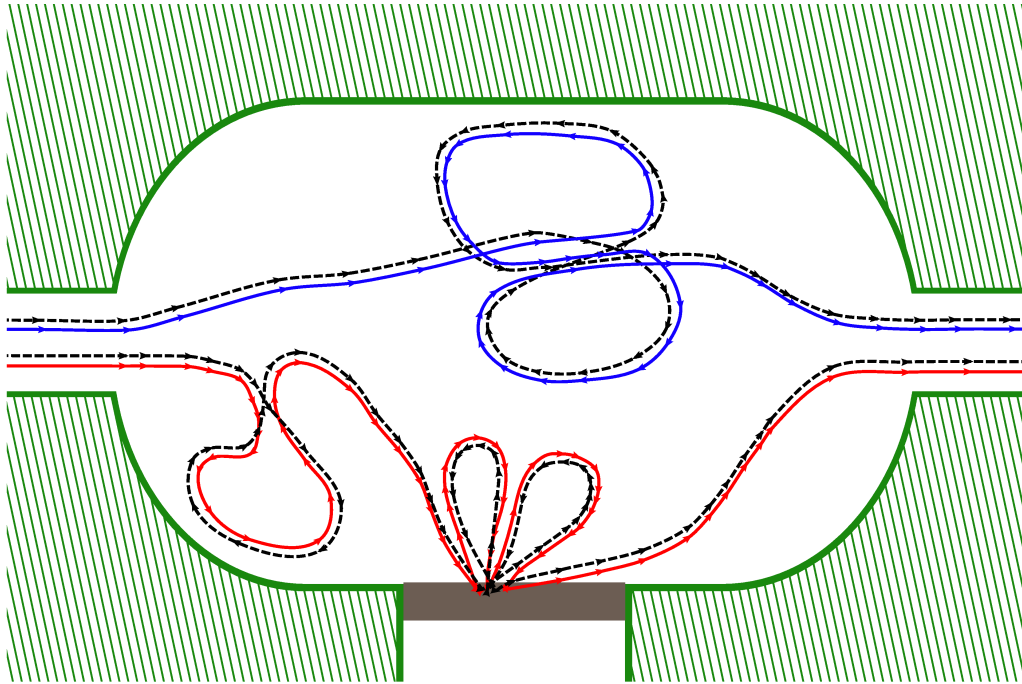


Figura 7 – Temos dois pares de trajetórias. No par superior, temos um 3-encontro que ocorre no interior da cavidade. No par inferior, temos um 2-encontro que ocorre no interior da cavidade e um 2-encontro que ocorre numa guia com barreira de tunelamento.

3.4 Regras Diagramáticas

Uma maneira de implementar a soma na Eq. (3.5) consiste em associar a cada par de trajetórias um grafo de fita ou grafo de faixa [34]. Para formar a fita, assumimos que cada borda da fita é delimitada por uma trajetória do par. Com isso, é possível converter a soma sobre todos os pares possíveis de trajetórias numa soma sobre todos os grafos de fita possíveis. Dessa forma, a contribuição de pares de trajetórias, na Eq. (3.5), que estão associadas a um mesmo grafo pode ser obtida através das propriedades deste grafo. A partir de integração no espaço de fase, foram deduzidas regras diagramáticas para calcular cada contribuição. Se os encontros ocorrem todos dentro da cavidade, as regras são

- um fator M^{-1} para cada par de trajetórias;
- um fator $(-M)$ para cada encontro;
- um fator N_a para cada par de trajetórias que entra na cavidade;
- um fator N_b para cada par de trajetórias que sai na cavidade.

Assim, supondo que a barreira na guia inferior é transparente ($\gamma = 0$) para o par de trajetórias superior na Fig. 7, temos quatro pares de trajetórias (dois no entorno do

encontro e dois o conectando às guias), o que nos dá um fator M^{-4} ; temos um vértice e, portanto, um fator $(-M)$; temos N_a canais de entrada na guia 1 e N_b canais de saída na guia 2. Dessa forma, a contribuição desse par de trajetórias para a soma na Eq. (3.5) é

$$-\frac{N_a N_b}{M^3}. \quad (3.6)$$

3.5 Lei de Wick e Integrais Matriciais

Para implementar a soma sobre trajetórias, vamos utilizar uma integral matricial. Com efeito, considere a seguinte média

$$\langle f(Z) \rangle = \frac{1}{Z} \int f(Z) e^{-M \text{Tr}(ZZ^\dagger)} dZ, \quad \text{com } dZ = \prod_{1 \leq i \leq j \leq N} dz_{ij}, \quad (3.7)$$

onde $f(Z)$ é uma função cujo argumento é uma matriz quadrada complexa, Z , de ordem N e

$$Z = \int e^{-M \text{Tr}(ZZ^\dagger)} dZ \quad (3.8)$$

é uma constante de normalização.

Para motivar a definição da integral matricial que implementa as regras diagramáticas, considere a seguinte média definida pela Eq. (3.7)

$$\sum_{i,o=1}^{N_a, N_b} \left\langle \left[-\frac{M}{2} \text{Tr}(ZZ^\dagger) \right]^2 \cdot Z_{io} Z_{io}^* \right\rangle. \quad (3.9)$$

Nessa notação, o índice i percorre o intervalo $1, \dots, N_a$ e o índice o o intervalo $1, \dots, N_b$. O valor dessa expressão pode ser obtido através da *Lei de Wick*,

$$\left\langle \prod_{k=1}^n Z_{m_k j_k} Z_{p_k q_k}^* \right\rangle = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{k=1}^n \langle Z_{m_k j_k} Z_{p_{\sigma(k)} q_{\sigma(k)}}^* \rangle, \quad (3.10)$$

onde a média gaussiana de um produto de elementos de Z e Z^* pode ser calculada através das médias de todas as combinações dois a dois dos elementos de Z e Z^* . Expandindo o traço na Eq. (3.9) nos elementos das matrizes Z , e usando a Lei de Wick na Eq. (3.9) temos seis parcelas geradas pelas permutações em S_3 . A permutação e a respectiva parcela encontra-se na tabela abaixo.

id	$\langle Z_{ac} Z_{bc}^* \rangle \langle Z_{bd} Z_{ad}^* \rangle \langle Z_{io} Z_{io}^* \rangle$
(12)	$\langle Z_{ac} Z_{ad}^* \rangle \langle Z_{bd} Z_{bc}^* \rangle \langle Z_{io} Z_{io}^* \rangle$
(13)	$\langle Z_{ac} Z_{io}^* \rangle \langle Z_{bd} Z_{ad}^* \rangle \langle Z_{io} Z_{bc}^* \rangle$
(23)	$\langle Z_{ac} Z_{bc}^* \rangle \langle Z_{bd} Z_{io}^* \rangle \langle Z_{io} Z_{ad}^* \rangle$
(132)	$\langle Z_{ac} Z_{io}^* \rangle \langle Z_{bd} Z_{bc}^* \rangle \langle Z_{io} Z_{ad}^* \rangle$
(123)	$\langle Z_{ac} Z_{ad}^* \rangle \langle Z_{bd} Z_{io}^* \rangle \langle Z_{io} Z_{bc}^* \rangle$

Tabela 1 – Aplicando a Lei de Wick na média da Eq. (3.9), obtemos uma soma de seis parcelas geradas pelas permutações de S_3 .

A Lei de Wick possui uma interpretação diagramática, onde os elementos de Z são representados por setas que podem conectar suas pontas e os elementos de Z^* por setas que podem conectar as caudas, como na Fig. 8. Utilizando essa concepção, podemos construir uma estrutura usando setas que representa o traço. Para isso, expandimos o traço nos elementos de Z e Z^* ,

$$\text{Tr} \left((ZZ^\dagger)^2 \right) = \sum_{a,b,c,d=1}^N Z_{ac} Z_{cb}^\dagger Z_{bd} Z_{da}^\dagger. \quad (3.11)$$

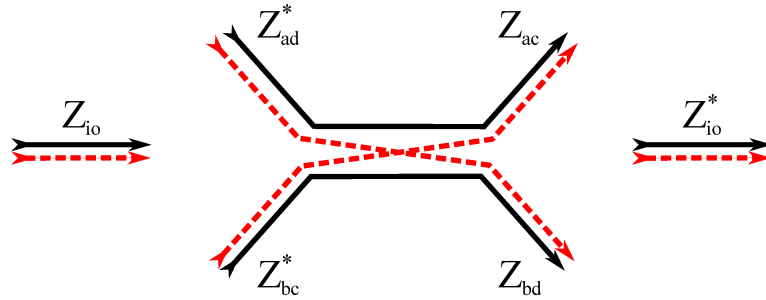


Figura 8 – A Lei de Wick pode ser interpretada diagramaticamente, onde os diagramas são construídos utilizando pares de setas. Na figura, temos estruturas diagramáticas que representam, respectivamente, Z_{io} , $\text{Tr} \left((ZZ^\dagger)^2 \right)$ e Z_{io}^* .

Os diagramas são construídos observando as conexões que são dadas pelas médias de cada par $\langle Z_{ij} Z_{kl}^* \rangle$, onde cada termo representa uma conexão. Temos, portanto, 3 conexões a serem adicionadas às estruturas na Fig. 8. Temos 6 diagramas associados a cada permutação de S_3 . Na Fig. 9 esquematizamos os diagramas que são gerados pelas permutações.

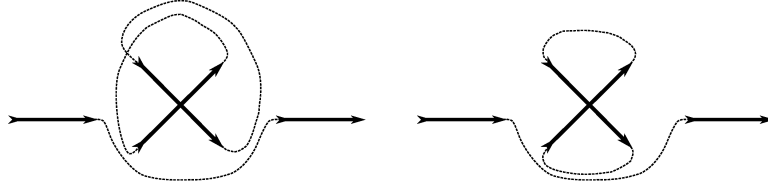
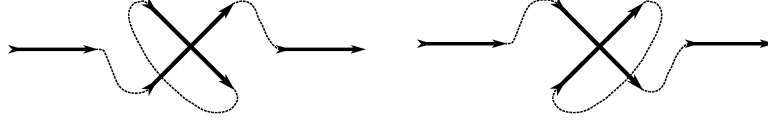
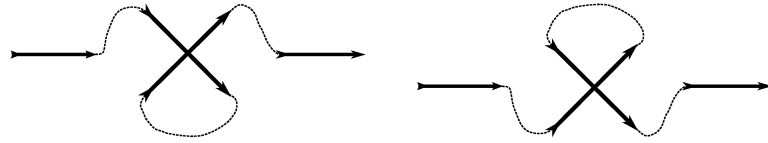
Agora, a identificação entre a média $\sum_{i,o=1}^{N_a, N_b} \left\langle \left[-\frac{M}{2} \text{Tr} (ZZ^\dagger)^2 \right] \cdot Z_{io} Z_{io}^* \right\rangle$ e um par de trajetórias com um 2-encontro é clara. A Lei de Wick nos permite gerar diagramas para implementar a soma sobre trajetórias. Entretanto, os diagramas nas Fig. 9a e 9b não representam trajetórias associadas ao fenômeno de transporte, pois contêm órbitas (associadas a partículas que ficam presas na cavidade). Assim, precisamos eliminar tais termos da soma.

Para calcular a contribuição de cada diagrama, notamos que, para o caso mais simples, temos

$$\langle Z_{ij} Z_{kl}^* \rangle = \frac{\delta_{ik} \delta_{jl}}{M}, \quad (3.12)$$

o que nos permite escrever a Lei de Wick como

$$\left\langle \prod_{k=1}^n Z_{m_k j_k} Z_{p_k q_k}^* \right\rangle = \frac{1}{M^n} \sum_{\sigma \in S_n} \delta_\sigma [\vec{m}, \vec{p}] \delta_\sigma [\vec{j}, \vec{q}]. \quad (3.13)$$

(a) Diagramas associados às permutações id e (12) , respectivamente.(b) Diagramas associados às permutações (13) e (23) , respectivamente.(c) Diagramas associados às permutações (132) e (123) , respectivamente.Figura 9 – Diagramas gerados pela Lei de Wick, associados às permutações de S_3 . A estrutura das setas e do traço foi simplificada.

De posse desta expressão, podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \sum_{i,o=1}^{N_a, N_b} \left\langle \left[-M \text{Tr} (ZZ^\dagger)^2 \right] \cdot Z_{io} Z_{io}^* \right\rangle &= \sum_{i,o=1}^{N_a, N_b} \sum_{a,b,c,d=1}^N \langle Z_{ac} Z_{bd} Z_{io} Z_{bc}^* Z_{ad}^* Z_{io}^* \rangle \\
 &= \frac{(-M)}{M^4} \sum_{\pi \in S_4} \delta_\pi [(a, b, i), (b, a, i)] \delta_\pi [(c, d, o), (c, d, o)] \\
 &= -\frac{N_a N_b}{M^2} (2N^4 + 2N^2 + 2), \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

onde a contribuição dos diagramas na Fig. 9a é proporcional a N^4 , a contribuição dos diagramas na Fig. 9b é proporcional a N^2 e a contribuição dos diagramas na Fig. 9c é proporcional a 1. Dessa forma, os diagramas que possuem órbitas periódicas podem ser eliminadas fazendo $N \rightarrow 0$.

Assim, a contribuição de um par de trajetórias que possui um único 2-encontro pode ser obtida por

$$\lim_{N \rightarrow 0} \sum_{i,o=1}^{N_a, N_b} \left\langle \left[-\frac{M}{2} \text{Tr} (ZZ^\dagger)^2 \right] \cdot Z_{io} Z_{io}^* \right\rangle = -\frac{N_a N_b}{M^2}. \tag{3.15}$$

Isto motiva a associar a média

$$\lim_{N \rightarrow 0} \sum_{i,o=1}^{N_a, N_b} \left\langle \left[-\frac{M}{q} \text{Tr} (ZZ^\dagger)^q \right] \cdot Z_{io} Z_{io}^* \right\rangle, \tag{3.16}$$

à contribuição de um par de trajetórias com apenas um q -encontro. Com alguns argumentos de combinatória, percebemos que as contribuições mais gerais com um número qualquer

de encontros de todas as ordens são implementados por

$$\lim_{N \rightarrow 0} \sum_{i,o=1}^{N_a, N_b} \left\langle Z_{io} Z_{io}^* \exp \left(-M \sum_{q \geq 2} \frac{1}{q} \text{Tr} (Z Z^\dagger)^q \right) \right\rangle. \quad (3.17)$$

Se escrevermos explicitamente a integral como na Eq. (3.7) e incorporarmos a medida de probabilidade, obtemos uma integral que implementa as regras diagramáticas para o cálculo da condutância usando aproximação semiclássica

$$g = \lim_{N \rightarrow 0} \sum_{i,o=1}^{N_a, N_b} \frac{1}{\mathcal{Z}} \int Z_{io} Z_{io}^* \exp \left(-M \sum_{q \geq 1} \frac{1}{q} \text{Tr} (Z Z^\dagger)^q \right) dZ. \quad (3.18)$$

Para implementar momentos de ordem mais alta, fazemos [34]

$$p_\lambda(T) = \lim_{N \rightarrow 0} \sum_{i,\tilde{o}=1}^{N_a, N_b} \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \exp \left(-M \sum_{q \geq 1} \frac{1}{q} \text{Tr} (Z Z^\dagger)^q \right) \prod_{k=1}^n Z_{i_k o_k} Z_{i_k o_{\pi(k)}}^* dZ. \quad (3.19)$$

3.6 Barreira de Tunelamento

Quando uma barreira de tunelamento está presente, temos efeitos adicionais a considerar: encontros que ocorrem na barreira, reflexões na barreira e a influência da barreira no interior da cavidade. Na Fig. 7 o par de trajetórias inferior exhibe dois encontros: um 2-encontro que ocorre no interior da cavidade e um 3-encontro que acontece na barreira presente na terceira guia da cavidade.

Quando uma barreira está presente as regras diagramáticas devem incorporar os efeitos de tunelamento ou, analogamente, de reflexão pela barreira. Supondo que todos os canais da guia possuem a mesma probabilidade de reflexão, γ , e que a barreira encontra-se na guia a , as regras diagramáticas são

- um fator $(M - \gamma N_a)^{-1}$ para cada par de trajetórias;
- um fator $-M + \gamma^q N_a$ para cada q -encontro;
- um fator $N_b - \gamma N_a \delta_{ab}$ para cada par de trajetórias entrando ou saindo pela guia b ;
- um fator γ para cada reflexão na barreira.

Considerando a Fig. 7, suponha que as guias de entrada e saída, guias a e b , respectivamente, são ideais e que uma barreira com probabilidade de reflexão γ encontra-se na guia c . A contribuição do par de trajetórias superior para a condutância² contém um

² Já que estamos considerando a condutância, momento associado à partição [1], cabe lembrar que cada contribuição vêm de um par de trajetórias. Assim, na Fig. 7 temos duas contribuições: uma vinda do par de trajetórias superior e outra vinda do par e trajetórias inferior. Entretanto, se estivéssemos considerando o momento associado à partição [1²], os pares de trajetória na Fig. 7 constituem apenas uma contribuição.

fator $(M - \gamma N_c)^{-4}$ devido aos quatro pares de trajetórias, um fator $-M + \gamma^3 N_c$ devido ao 3-encontro, um fator N_a devido à guia de entrada e um fator N_b devido à guia de saída, resultando numa contribuição

$$-\frac{N_a N_b (M - \gamma^3 N_c)}{(M - \gamma N_c)^4}. \quad (3.20)$$

Note que podemos tornar a barreira transparente fazendo $\gamma = 0$ e recuperamos a contribuição obtida na Eq. (3.6). Dessa forma, identificamos o efeito da barreira no interior da cavidade.

Para o par de trajetórias inferior, temos um fator $(M - \gamma N_c)^{-6}$ devido a 6 pares de trajetórias, um fator $-M + \gamma^2 N_c$ devido ao 2-encontro, um fator γ^3 devido às três reflexões na barreira, um fator N_a devido à guia de entrada e um fator N_b devido à guia de saída. Logo, a contribuição desse par de trajetórias é

$$-\gamma^3 N_a N_b \frac{(M - \gamma^2 N_c)}{(M - \gamma N_c)^6}. \quad (3.21)$$

Note que se a barreira é transparente, $\gamma = 0$, a contribuição é nula. E, dessa forma, identificamos o efeito adicional da barreira, as reflexões que acontecem nela.

Quando a barreira não se encontra nem na guia de entrada nem na guia de saída, a modificação da integral na Eq. (3.19) é imediata. Basta fazer a substituição $M \rightarrow M - \gamma^q N_c$, o que produz

$$p_\lambda(T) = \lim_{N \rightarrow 0} \sum_{\substack{N_a, N_b \\ \vec{i}, \vec{o}=1}} \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \exp \left(- \sum_{q \geq 1} \frac{(M - \gamma^q N_c)}{q} \text{Tr} (Z Z^\dagger)^q \right) \prod_{k=1}^n Z_{i_k o_k} Z_{i_k o_{\pi(k)}}^* dZ. \quad (3.22)$$

3.6.1 Barreira na Guia de Entrada/Saída

O terceiro efeito a ser considerado, ocorre quando a barreira encontra-se na guia de entrada (ou saída). Nesse caso, existe a possibilidade de “encontros” na guia de entrada (ou saída). Suponhamos que uma barreira com probabilidade de reflexão γ encontra-se na guia de entrada, digamos a guia a .

Como introduzido por P. Bento e M. Novaes [36], na guia de entrada, ocorrem pseudo-encontros que são diagramaticamente semelhantes a encontros com valência ímpar (pois o par de trajetórias que entra na cavidade deve ficar desconectado do pseudo-encontro). Isto significa que o termo $Z_{i_k o_k}$ deve ser substituído por uma estrutura do tipo $[Z Z^\dagger Z]_{i_k o_k}$, de acordo com a ordem do pseudo-encontro. Se o pseudo-encontro tem valência $2m + 1$ então devemos ter $[(\gamma Z Z^\dagger)^m Z]_{i_k o_k}$. Além disso, um fator γ deve ser adicionado para cada reflexão na barreira, portanto, para um pseudo-encontro de valência $2m + 1$ devemos ter um fator γ^m . Ora, podem ocorrer pseudo-encontros de qualquer ordem. Cada contribuição deve ser adicionada. Logo, o termo que substitui $Z_{i_k o_k}$ é

$$[(\gamma Z Z^\dagger) Z]_{i_k o_k} + [(\gamma Z Z^\dagger)^2 Z]_{i_k o_k} + [(\gamma Z Z^\dagger)^3 Z]_{i_k o_k} + \dots = [(1 - \gamma Z Z^\dagger)^{-1} Z]_{i_k o_k}. \quad (3.23)$$

Incorporando esse efeito e a modificação na Eq. (3.22), obtemos

$$\langle p_\lambda(T) \rangle = \lim_{N \rightarrow 0} \sum_{\vec{i}, \vec{o}=1}^{N_a, N_b} \frac{(1-\gamma)^n}{\mathcal{Z}} \int \exp\left(-\sum_{q \geq 1} \frac{(M - \gamma^q N_a)}{q} \text{Tr}(ZZ^\dagger)^q\right) \cdot \prod_{k=1}^n [(1 - \gamma ZZ^\dagger)^{-1} Z]_{i_k o_k} Z_{i_k o_{\pi(k)}}^* dZ. \quad (3.24)$$

Se houvesse uma barreira de tunelamento na guia de saída, o termo Z^* seria modificado da mesma forma.

Note que a barreira presente somente na guia de entrada, guia 1, modifica as regras diagramáticas no interior da cavidade da mesma forma que a barreira na guia 3. Se houvesse barreiras em mais de uma guia, seus efeitos seriam agregados. Por exemplo, se tivermos uma barreira na guia 1, com probabilidade de reflexão γ_1 , na guia 2, com probabilidade de reflexão γ_2 , e na guia 3, com probabilidade de reflexão γ_3 , a Eq. (3.24) seria modificada fazendo: $(1-\gamma)^n \rightarrow (1-\gamma_1)^n(1-\gamma_2)^n$ incorporando o efeito de reflexões nas guias de entrada e saída; $[(1 - \gamma ZZ^\dagger)^{-1} Z]_{i_k o_k} Z_{i_k o_{\pi(k)}}^* \rightarrow [(1 - \gamma_1 ZZ^\dagger)^{-1} Z]_{i_k o_k} [Z^\dagger(1 - \gamma_2 ZZ^\dagger)^{-1}]_{o_{\pi(k)} i_k}^*$ incorporando os pseudo-encontros que ocorrem nas guias de entrada e saída; e $(M - \gamma^q N_1) \rightarrow (M - \gamma_1^q N_1 - \gamma_2^q N_2 - \gamma_3^q N_3) = (M - \vec{\gamma} \cdot \vec{N})$ que incorpora os efeitos das barreiras no interior da cavidade. O efeito da barreira i pode ser eliminado tomando $\gamma_i = 0$. Podemos ainda, fechar completamente a barreira tomando $\gamma_i = 1$. Quando a barreira está na guia 3, tomando $\gamma_3 = 1$, temos

$$(M - \vec{\gamma} \cdot \vec{N}) = M - \gamma_1 N_1 - \gamma_2 N_2 - N_3 = N_1 + N_2 - \gamma_1 N_1 - \gamma_2 N_2, \quad (3.25)$$

eliminando o efeito da guia 3. Por outro lado, se $\gamma_1 = 0$ ou $\gamma_2 = 0$, teríamos $\langle p_\lambda(T) \rangle = 0$, pois não haveria transporte.

3.7 Simetria de Reversão Temporal

Até agora, discutimos sistemas com ausência de Simetria de Reversão Temporal. Nesses sistemas, como é mostrado na Fig. 7, os pares de trajetórias possuem orientação. Para os sistemas onde a Simetria de Reversão Temporal está presente, os pares de trajetórias não possuem orientação. A ocorrência de trajetórias orientadas combina perfeitamente com a interpretação diagramática da Lei de Wick [86]. Mas, ainda assim, é conveniente modificar as integrais nas Eq. (3.22) e (3.24) para computar a soma sobre trajetórias na forma de uma integral matricial para sistemas que possuem Simetria de Reversão Temporal.

Para incorporar os efeitos de Simetria de Reversão Temporal, M. Novaes modificou a integral na Eq. (3.19) introduzindo a coleta de coeficientes [35].

Dado $Q = \mathbb{I}_M \oplus 0_{N-M}$, definimos

$$R = YQSQY^\dagger, \quad (3.26)$$

em que Y é uma matriz complexa. Dada a condição imposta por Q , temos

$$R_{ij} = \sum_{a,b=1}^M Y_{ia} S_{ab} Y_{jb}^*. \quad (3.27)$$

Dessa forma os momentos de transporte podem ser calculados coletando o coeficiente de $C_{i_1 i_2} C_{i_1 i_2}^*$ (em que $C = YY^t$). Considerando uma cavidade sem barreiras de tunelamento, a condutância pode ser obtida através de

$$\langle g \rangle = \lim_{N \rightarrow 0} \sum_{i,o=1}^{N_1, N_2} K_N [C_{i_1 i_2} C_{i_1 i_2}^*], \quad (3.28)$$

onde

$$K_N = \frac{1}{Z} \int e^{-\frac{M}{2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} \text{Tr}(ZZ^t)^q} R_{i_1 i_1} R_{i_2 i_2} dZ, \quad (3.29)$$

e, nesse caso, Z é uma matriz real. A notação $[C_{i_1 i_2} C_{i_1 i_2}^*]$ significa que devemos extrair o coeficiente que multiplica o termo $C_{i_1 i_2} C_{i_1 i_2}^*$. Os elementos C_{ij} advêm da coleta das entradas de Y , no produto $R_{i_1 i_1} R_{i_2 i_2}$ dado que $C = YY^t$.

Para sistemas com barreiras de tunelamento, modificamos a integral da mesma forma que os sistemas sem Simetria de Reversão Temporal. A final, em sua forma mais simples (sem barreiras), as duas integrais só dependem do número de encontros (vértices) e pares de trajetórias (faixas) [34]. Então, para sistemas com três quias com barreira na guia 3, como na Fig. 7, temos a seguinte integral para a Eq. (3.28)

$$K_N = \frac{1}{Z} \int e^{-\frac{1}{2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(M - \gamma^q N_3)}{q} \text{Tr}(ZZ^t)^q} R_{i_1 i_1} R_{i_2 i_2} dZ. \quad (3.30)$$

Por outro lado, se temos uma barreira apenas na guia de entrada, na guia 1, fazemos as mesmas modificações realizadas por P. Bento e M. Novaes [36]. Dessa forma, temos a seguinte integral

$$K_N = (1 - \gamma) \frac{1}{Z} \int e^{-\frac{1}{2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(M - \gamma^q N_1)}{q} \text{Tr}(ZZ^t)^q} R'_{i_1 i_1} R_{i_2 i_2} dZ, \quad (3.31)$$

onde

$$R'_{ij} = \sum_{a,b=1}^M Y_{ia} \left[\frac{1}{1 - \gamma ZZ^t} Z \right]_{ab} Y_{jb}^*. \quad (3.32)$$

Assim, para incluir barreiras nas guias modificamos o argumento da exponencial fazendo $M \rightarrow (M - \tilde{\gamma} \cdot \vec{N})$. Se houver barreira na guia de entrada ou saída é necessário a modificação adicional $R_{ii} \rightarrow (1 - \gamma) R'_{ii}$. Os dois termos devem ser modificados quando houver barreira na guia de entrada e na guia de saída.

3.8 Constantes de Normalização e Limites

Por fim, vamos obter expressões para as constantes de normalização das Eq. (3.19), (3.22), (3.28) e (3.30), podemos escrever

$$\mathcal{Z}^{(\alpha)} = \int e^{-L\text{Tr}(ZZ^\dagger)} dZ, \quad (3.33)$$

onde, no primeiro caso, temos que $\alpha = 1$ e Z é uma matriz complexa, ao passo que no segundo caso, $\alpha = 1$ e Z é uma matriz real.

Procedemos a decomposição em valores singulares, $Z = UDV$, em que D é uma matriz diagonal e U e V são matrizes unitárias no primeiro caso e ortogonais no segundo caso. Com isso, temos

$$\mathcal{Z}^{(\alpha)} = \int e^{-L\text{Tr}(X)} \left(\int dU \right) \left(\int dV \right) \det(X)^{\frac{1}{\alpha}-1} |\Delta(X)|^{\frac{2}{\alpha}} dX, \quad (3.34)$$

onde $X = DD^\dagger$ e

$$\det(X)^{\frac{1}{\alpha}-1} |\Delta(X)|^{\frac{2}{\alpha}}, \quad (3.35)$$

é o jacobiano da mudança de variáveis [87]. Sabendo que as integrais sobre o grupo Unitário (e Ortogonal) são normalizadas e utilizando a Eq. (4.5), ficamos com

$$\mathcal{Z}^{(\alpha)} = \int \det(e^{-LX}) \det(X)^{\frac{1}{\alpha}-1} |\Delta(X)|^{\frac{2}{\alpha}} dX. \quad (3.36)$$

Já que X é uma matriz diagonal, podemos converter os determinantes em produtos, ficamos com

$$\mathcal{Z}^{(\alpha)} = \int \prod_{i=1}^N x_i^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-Lx_i} |\Delta(\vec{x})|^{\frac{2}{\alpha}} d\vec{x}. \quad (3.37)$$

Para tornar a equação anterior mais próxima da Eq. (2.56), vamos inserir o seguinte limite sob o sinal da integral

$$e^a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n. \quad (3.38)$$

Com isso, obtemos

$$\mathcal{Z}^{(\alpha)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{i=1}^N x_i^{\frac{1}{\alpha}-1} \left(1 - \frac{Lx_i}{n} \right)^n |\Delta(\vec{x})|^{\frac{2}{\alpha}} d\vec{x}. \quad (3.39)$$

Agora, fazemos uma mudança de variáveis $\frac{L}{n}x_i = t_i$. Como as variáveis são desacopladas, o jacobiano é uma matriz diagonal e seu determinante é $\left(\frac{L}{n}\right)^N$. O determinante de Vandermonde, é um polinômio homogêneo de grau $\frac{N(N-1)}{2}$, por isso, essa mudança de variáveis resulta em

$$|\Delta(\vec{x})|^{\frac{2}{\alpha}} = \left(\frac{n}{L}\right)^{\frac{N(N-1)}{\alpha}} |\Delta(\vec{t})|^{\frac{2}{\alpha}}. \quad (3.40)$$

Combinando esses resultados na integral, ficamos com

$$\mathcal{Z}^{(\alpha)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{L}\right)^{\frac{N^2}{\alpha}} \int \prod_{i=1}^N t_i^{\frac{1}{\alpha}-1} (1-t_i)^n |\Delta(\vec{t})|^{\frac{2}{\alpha}} d\vec{t}. \quad (3.41)$$

Agora, podemos utilizar a Eq. (2.56), reconhecendo $a = \frac{1}{\alpha}$ e $b = n + 1$, para obter

$$\mathcal{Z}^{(\alpha)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{L} \right)^{\frac{N^2}{\alpha}} \prod_{i=0}^{N-1} \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{\alpha} + 1\right) \Gamma\left(\frac{i+1}{\alpha}\right) \Gamma\left(n + 1 + \frac{i}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \Gamma\left(n + 1 + \frac{N+i}{\alpha}\right)}. \quad (3.42)$$

Por fim, devemos resolver o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{N^2}{\alpha}} \prod_{i=0}^{N-1} \frac{\Gamma\left(n + 1 + \frac{i}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(n + 1 + \frac{N+i}{\alpha}\right)}. \quad (3.43)$$

Para enxergar melhor a simplificação, vamos utilizar uma propriedade da função Gama, $\Gamma(z + 1) = z!$. E ficamos com

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{N^2}{\alpha}} \prod_{i=0}^{N-1} \frac{\Gamma\left(n + 1 + \frac{i}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(n + 1 + \frac{N+i}{\alpha}\right)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{N-1} n^{\frac{N}{\alpha}} \frac{\left(n + \frac{i}{\alpha}\right)!}{\left(n + \frac{N+i}{\alpha}\right)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{N-1} n^{\frac{N}{\alpha}} \frac{\left(n + \frac{i}{\alpha}\right)!}{\left(n + \frac{N+i}{\alpha}\right)!} \cdot \frac{n^{\frac{N}{\alpha}}}{n^{\frac{N}{\alpha}}} \\ &= \prod_{i=0}^{N-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(n + \frac{i}{\alpha}\right)!}{n^{\frac{N}{\alpha}} \left(n + \frac{N+i}{\alpha}\right)!} n^{\frac{2N}{\alpha}} \\ &= \prod_{i=0}^{N-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{i}{n\alpha}\right)!}{\left(1 + \frac{N+i}{n\alpha}\right)!} \\ &= \prod_{i=0}^{N-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma\left(2 + \frac{i}{n\alpha}\right)}{\Gamma\left(2 + \frac{N+i}{n\alpha}\right)} = 1, \end{aligned} \quad (3.44)$$

pois $\Gamma(z)$ é contínua quando $z \geq 2$. Portanto,

$$\mathcal{Z}^{(\alpha)} = L^{-\frac{N^2}{\alpha}} \prod_{i=0}^{N-1} \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{\alpha} + 1\right) \Gamma\left(\frac{i+1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}. \quad (3.45)$$

Em particular, para $\alpha = 1$, obtemos

$$\mathcal{Z}^{(1)} = \frac{N!}{L^{N^2}} \prod_{i=1}^{N-1} i!^2. \quad (3.46)$$

Utilizando a Eq. (3.45) e a Eq. (2.57), podemos obter a média normalizada de um polinômio de Jack,

$$\frac{S_{\mu}\left(\frac{1}{\alpha}, b, \alpha, N\right)}{\mathcal{Z}^{(\alpha)}} = \frac{1}{\mathcal{Z}^{(\alpha)}} \int_0^1 J_{\mu}^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_N) \prod_{i=1}^N x_i^{\frac{1}{\alpha}-1} (1-x_i)^{b-1} |\Delta(X)|^{2/\alpha} dx_1 \cdots dx_N. \quad (3.47)$$

Então, se reconhecemos $a = \frac{1}{\alpha}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{S_{\mu}\left(\frac{1}{\alpha}, b, \alpha, N\right)}{\mathcal{Z}^{(\alpha)}} &= \frac{\left([N]_{\mu}^{(\alpha)}\right)^2}{L^{-\frac{N^2}{\alpha}} [2N + \alpha b - 1]_{\mu}^{(\alpha)}} \prod_{i=0}^{N-1} \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{\alpha} + 1\right) \Gamma\left(\frac{i+1}{\alpha}\right) \Gamma\left(b + \frac{i}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \Gamma\left(b + \frac{N+i}{\alpha}\right)} \\ &\quad \cdot \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{i+1}{\alpha} + 1\right) \Gamma\left(\frac{i+1}{\alpha}\right)} \\ &= \frac{L^{\frac{N^2}{\alpha}} \left([N]_{\mu}^{(\alpha)}\right)^2}{[2N + \alpha b - 1]_{\mu}^{(\alpha)}} \prod_{i=0}^{N-1} \frac{\Gamma\left(b + \frac{i}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(b + \frac{N+i}{\alpha}\right)}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Dessa forma, podemos escrever

$$\frac{1}{\mathcal{Z}^{(\alpha)}} S_{\mu}\left(\frac{1}{\alpha}, b, \alpha, N\right) = \frac{L^{\frac{N^2}{\alpha}} \left([N]_{\mu}^{(\alpha)}\right)^2}{[2N + \alpha b - 1]_{\mu}^{(\alpha)}} R(\alpha, b, N), \quad (3.49)$$

onde

$$R(\alpha, b, N) = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{\Gamma\left(b + \frac{i}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(b + \frac{N+i}{\alpha}\right)}. \quad (3.50)$$

Note que

$$\lim_{N \rightarrow 0} R(\alpha, b, N) = 1. \quad (3.51)$$

No capítulo a seguir, consideramos uma cavidade como a da Fig. 7, com três guias: as guias de entrada e saída são ideais, ao passo que a terceira guia está acoplada à cavidade através de uma barreira de tunelamento. Nosso objetivo é obter os momentos de transporte nesse sistema. Para isso, buscamos calcular a integral matricial na Eq.(3.22).

4 Momentos de Transporte I: Três Guias

Neste capítulo, vamos utilizar as integrais matriciais discutidas no Cap. 3 para obter momentos de transporte. Estamos interessados numa cavidade com três guias. As guias de entrada e saída, guias 1 e 2, respectivamente, são transparentes, ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$), ao passo que a guia 3 possui uma barreira de tunelamento com probabilidade de reflexão $\gamma_3 = \gamma$.

Na primeira seção, consideramos que o sistema não possui Simetria de Reversão Temporal (bTRS, do inglês *broken Time Reversal Symmetry*). Para este caso mais simples, vamos obter uma expressão geral para momentos de ordem mais alta e obter expressões assintóticas para a condutância, a variância da condutância, o fator Fano e o terceiro cumulante.

Na segunda seção, consideramos que o sistema possui Simetria de Reversão Temporal (TRS, do inglês *Time Reversal Symmetry*). Isto torna as integrais bastante trabalhosas, portanto, obtemos apenas a condutância. Adicionalmente, obtemos a condutância entre as guias 1 e 3.

Por fim, combinando os resultados da duas seções, podemos obter uma aproximação para a localização fraca.

4.1 Ausência de Simetria de Reversão Temporal

Nessa cavidade, vamos considerar a guia 1 como guia de entrada e a guia 2 como guia de saída, ambas transparentes. Na guia 3, temos uma barreira com probabilidade de reflexão γ .

Para calcular a média do momento de transporte associado com a partição λ , propomos a seguinte integral matricial da Eq. (3.22) como meio de implementar as regras diagramáticas

$$\langle p_\lambda(T) \rangle = \lim_{N \rightarrow 0} K_N, \quad (4.1)$$

com

$$K_N = \sum_{\vec{i}, \vec{o}=1}^{N_a, N_b} \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \exp \left(- \sum_{q \geq 1} \frac{(M - \gamma^q N_3)}{q} \text{Tr} (ZZ^\dagger)^q \right) \prod_{k=1}^n Z_{i_k o_k} Z_{i_k o_{\pi(k)}}^* dZ, \quad (4.2)$$

onde π é uma permutação de S_n com ciclo-tipo λ e

$$\mathcal{Z} = \int e^{-(M - \gamma N_3) \text{Tr}(ZZ^\dagger)} dS. \quad (4.3)$$

Começamos fazendo uma mudança de variáveis usando a decomposição de valores singulares. Escrevemos $Z = UDV$, em que U e V são matrizes unitárias e D é uma

matriz diagonal. Esta decomposição sempre é possível para matrizes complexas. Definindo $X = D^\dagger D$, o jacobiano da transformação é $|\Delta(X)|^2$ [87], o módulo ao quadrado do determinante de Vandermonde (Eq. (2.30)). Com isso, obtemos

$$K_N = \sum_{\vec{i}, \vec{\sigma}=1}^{N_1, N_2} \frac{1}{Z} \int \exp\left(-\sum_{q=1}^{\infty} \frac{(M - \gamma^q N_3)}{q} \text{Tr} X^q\right) \cdot \prod_{k=1}^n (UDV)_{o_k i_{\pi(k)}}^* (UDV)_{o_k i_k} |\Delta(X)|^2 dX dU dV. \quad (4.4)$$

Com o auxílio da série de Taylor do logaritmo natural e de uma relação entre matrizes,

$$\ln(1-x) = -\sum_{q=1}^{\infty} \frac{x^q}{q} \quad \text{e} \quad e^{\text{Tr} X} = \det(e^X), \quad (4.5)$$

temos

$$\exp\left(-\sum_{q=1}^{\infty} \frac{(M - \gamma^q N_3)}{q} \text{Tr}(Z^\dagger Z)^q\right) = e^{\text{Tr} \ln(1-X)^M} e^{\text{Tr} \ln(1-\gamma X)^{-N_3}} = \det(1-X)^M \det(1-\gamma X)^{-N_3}. \quad (4.6)$$

Vamos trabalhar nas integrais que envolvem o grupo Unitário.

$$I = \sum_{\vec{i}, \vec{\sigma}=1}^{N_a, N_b} \int \prod_{k=1}^n (UDV)_{o_k i_{\pi(k)}}^* (UDV)_{o_k i_k} dU dV. \quad (4.7)$$

Expandindo os produtos de matrizes, ficamos com

$$I = \sum_{\vec{i}, \vec{\sigma}, \vec{j}, \vec{m}} \int \prod_{k=1}^n U_{o_k m_k} D_{m_k} V_{m_k i_k} U_{o_k j_k}^* D_{j_k}^* V_{j_k i_{\pi(k)}}^* dU dV, \quad (4.8)$$

onde omitimos os limites da soma, i_k percorre $1, \dots, N_1$, o_k percorre $1, \dots, N_2$ e j_k e m_k percorrem $1, \dots, N$. Usando a relação de média sobre o grupo Unitário, Eq. (2.74)

$$I = \sum_{\vec{i}, \vec{\sigma}, \vec{j}, \vec{m}} \sum_{\sigma, \tau, \rho, \theta \in S_n} \delta_\sigma(\vec{\sigma}, \vec{\sigma}) \delta_\tau(\vec{m}, \vec{j}) W(\sigma^{-1} \tau) \delta_\rho(\vec{m}, \vec{j}) \delta_\theta(\vec{i}, \pi(\vec{i})) W(\rho^{-1} \theta) \prod_{k=1}^n D_{m_k} D_{j_k}^*. \quad (4.9)$$

Utilizando as relações

$$\sum_{\vec{i}, \vec{\sigma}} \delta_\sigma(\vec{\sigma}, \vec{\sigma}) \delta_\theta(\vec{i}, \pi(\vec{i})) = N_1^{l(\sigma)} N_2^{l(\rho)} \quad \text{e} \quad \sum_{\vec{m}, \vec{j}} \delta_\tau(\vec{m}, \vec{j}) \delta_\rho(\vec{m}, \vec{j}) \prod_{k=1}^n D_{m_k} D_{j_k}^* = p_{\tau^{-1} \rho}(X), \quad (4.10)$$

ficamos com

$$I = \sum_{\sigma, \tau, \rho, \theta \in S_n} p_\sigma(1^{N_1}) p_{\theta \pi}(1^{N_2}) p_{\tau^{-1} \rho}(X) W(\sigma^{-1} \tau) W(\rho^{-1} \theta). \quad (4.11)$$

Em seguida, utilizamos as expansões das séries de potências e da função de Weingarten em termos de caracteres, usando as Eqs. (2.25) e (2.76)

$$I = \sum_{\substack{\sigma, \tau, \rho, \theta \in S_n \\ \lambda_1, \lambda_2 \vdash n}} \frac{d_{\lambda_2} s_{\lambda_1}(1^{N_1})}{n! [N]_{\lambda_2}^{(1)}} p_{\theta \pi}(1^{N_2}) p_{\tau^{-1} \rho}(X) W(\rho^{-1} \theta) \chi_{\lambda_1}(\sigma) \chi_{\lambda_2}(\sigma^{-1} \tau). \quad (4.12)$$

Utilizando uma das relações de ortogonalidade de caracteres, Eq. (2.5), eliminamos a soma sobre σ

$$\begin{aligned} I &= \sum_{\substack{\tau, \rho, \theta \in S_n \\ \lambda_1, \lambda_2 \vdash n}} \frac{d_{\lambda_2} s_{\lambda_1}(1^{N_1})}{n! [N]_{\lambda_2}^{(1)}} p_{\theta\pi}(1^{N_2}) p_{\tau^{-1}\rho}(X) W(\rho^{-1}\theta) \left(\frac{n!}{d_{\lambda_1}} \chi_{\lambda_1}(\tau) \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \right) \\ &= \sum_{\substack{\tau, \rho, \theta \in S_n \\ \lambda \vdash n}} \frac{s_{\lambda}(1^{N_1})}{[N]_{\lambda}^{(1)}} p_{\theta\pi}(1^{N_2}) p_{\tau^{-1}\rho}(X) W(\rho^{-1}\theta) \chi_{\lambda}(\tau). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Utilizamos mais uma vez as expansões das séries de potências e da função de Weingarten em termos de caracteres e as relações de ortogonalidade de caracteres e ficamos com

$$I = \sum_{\mu \vdash n} \frac{[N_1]_{\mu}^{(1)} [N_2]_{\mu}^{(1)}}{([N]_{\mu}^{(1)})^2} \chi_{\mu}(\pi) s_{\mu}(X), \quad (4.14)$$

onde usamos $s_{\mu}(1^N) = \frac{d_{\mu}}{n!} [N]_{\mu}^{(1)}$. Observe que, em I , apenas $s_{\mu}(X)$ depende de X , então, ficamos com

$$K_N = \sum_{\mu \vdash n} \frac{[N_1]_{\mu}^{(1)} [N_2]_{\mu}^{(1)}}{([N]_{\mu}^{(1)})^2} \chi_{\mu}(\pi) I_1, \quad (4.15)$$

onde

$$I_1 = \frac{1}{Z} \int \det(1 - X)^{-M} \det(1 - \gamma X)^{N_3} s_{\mu}(X) |\Delta(X)|^2 dX. \quad (4.16)$$

Agora, ideia é transformar a integral acima numa integral semelhante à integral de Selberg, Eq. (2.57) com $\alpha = 1$. Começamos utilizando a identidade de Cauchy

$$\det(1 - \gamma X)^{-N_3} = \sum_{\omega} s_{\omega}(\gamma) s_{\omega}(X). \quad (4.17)$$

Nesse ponto, ficamos com o produto de duas funções de Schur: uma proveniente das integrais sobre $\mathcal{U}(N)$ e outra da expansão do determinante. Podemos utilizar os coeficientes de Littlewood-Richardson

$$s_{\mu}(X) s_{\omega}(X) = \sum_{\alpha \vdash |\mu| + |\omega|} C_{\mu\omega\alpha} s_{\alpha}(X). \quad (4.18)$$

Note que os coeficientes $C_{\mu\omega\alpha}$ definidos acima são análogos e proporcionais aos coeficientes definidos na Eq. (2.43) para polinômios de Jack, basta lembrar que temos uma família de polinômios de Jack que são proporcionais às funções de Schur (Eq. (2.37)).

Então,

$$\begin{aligned} \det(1 - \gamma X)^{-N_3} s_{\mu}(X) &= \sum_{\omega} s_{\omega}(\gamma) s_{\omega}(X) s_{\mu}(X) \\ &= \sum_{\omega, \alpha} C_{\omega\mu\alpha} s_{\omega}(\gamma) s_{\alpha}(X) \\ &= \sum_{\alpha} \left(\sum_{\omega} C_{\omega\mu\alpha} s_{\omega}(\gamma) \right) s_{\alpha}(X) \\ &= \sum_{\alpha} \gamma^{|\alpha| - |\mu|} s_{\alpha \setminus \mu}(1^{N_3}) s_{\alpha}(X). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Agora,

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{\alpha} \gamma^{|\alpha|-|\mu|} s_{\alpha \setminus \mu}(1^{N_3}) \frac{1}{Z} \int \det(1-X)^M s_{\alpha}(X) |\Delta(X)|^2 dX \\ &= \sum_{\alpha} \gamma^{|\alpha|-|\mu|} s_{\alpha \setminus \mu}(1^{N_3}) \frac{1}{Z} \int s_{\alpha}(X) \prod_{i=1}^N (1-x_i)^M |\Delta(X)|^2 dX, \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde

$$\det(1-X)^M = \prod_{i=1}^N (1-x_i)^M. \quad (4.21)$$

Podemos, então, utilizar o resultado da integral de Selberg, Eq. (3.49), com $\alpha = 1$, $L = M$ e $b = M + 1$. Lembrando que a função de Schur é proporcional ao polinômio de Jack, Eq. (2.37), obtemos

$$I_1 = \sum_{\alpha} \gamma^{|\alpha|-|\mu|} s_{\alpha \setminus \mu}(1^{N_3}) \frac{d_{\alpha}}{|\alpha|!} \frac{([N]_{\alpha}^{(1)})^2}{[2N+M]_{\alpha}^{(1)}} \frac{R(1, M+1, N)}{(M-\gamma N_3)^{-N^2}}, \quad (4.22)$$

com R dado pela Eq. (3.50).

Combinando os resultados de K_N , dado na Eq. (4.15), e I_1 , dada na Eq. (4.22) temos

$$\langle p_{\lambda}(T) \rangle = \sum_{\mu \vdash n} [N_1]_{\mu}^{(1)} [N_2]_{\mu}^{(1)} \chi_{\mu}(\pi) \sum_{\alpha} \frac{d_{\alpha} \gamma^{|\alpha|-|\mu|}}{|\alpha|!} s_{\alpha \setminus \mu}(1^{N_3}) Q_{\mu\alpha}(M). \quad (4.23)$$

Por fim, devemos aplicar o limite $Q_{\mu\alpha}(M)$. Portanto, temos que calcular

$$Q_{\mu\alpha}(M) = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{(M-\gamma N_3)^{N^2}}{[2N+M]_{\alpha}^{(1)}} \left(\frac{[N]_{\alpha}^{(1)}}{[N]_{\mu}^{(1)}} \right)^2 R(1, M+1, N). \quad (4.24)$$

O fator que demanda atenção especial no limite é $[N]_{\alpha}^{(1)}/[N]_{\mu}^{(1)}$ e $\lim_{N \rightarrow 0} R(1, M+1, N)$ é dado pela Eq. (3.51). Utilizando a Eq. (2.18), percebemos que o limite só é diferente de zero quando os dois polinômios possuem quadrado de Durfee de mesmo tamanho, $D_1(\alpha) = D_1(\mu)$. Dessa forma, podemos escrever

$$Q_{\mu\alpha}(M) = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{(M-\gamma N_3)^{N^2}}{[2N+M]_{\alpha}^{(1)}} \left(\frac{[N]_{\alpha}^{(1)}}{[N]_{\mu}^{(1)}} \right)^2 R(1, M+1, N) = \left(\frac{t_1(\alpha)}{t_1(\mu)} \right)^2 \frac{\delta_{D_1(\alpha), D_1(\mu)}}{[M]_{\alpha}^{(1)}}, \quad (4.25)$$

onde $t_1(\alpha)$ é o produto dos 1-conteúdos não nulos, Eq. (2.19). Além disso, a função de Schur $s_{\alpha \setminus \mu}$ exige que $\mu \subset \alpha$. Logo,

$$\langle p_{\lambda}(T) \rangle = \sum_{\mu \vdash n} [N_1, N_2]_{\mu}^{(1)} \chi_{\mu}(\lambda) \sum_{\substack{\mu \subset \alpha \\ D(\alpha)=D(\mu)}} \frac{d_{\alpha} \gamma^{|\alpha|-|\mu|}}{|\alpha|! [M]_{\alpha}^{(1)}} s_{\alpha \setminus \mu}(1^{N_3}) \left(\frac{t_1(\alpha)}{t_1(\mu)} \right)^2, \quad (4.26)$$

com $M = N_1 + N_2 + N_3$ e, para melhorar a notação, escrevemos

$$[N_1, N_2]_{\mu}^{(1)} = [N_1]_{\mu}^{(1)} [N_2]_{\mu}^{(1)}. \quad (4.27)$$

4.1.1 A Média $\langle s_\lambda \rangle$

Considerando o resultado da Eq. (4.26), podemos escrever

$$\langle p_\lambda(T) \rangle = \sum_{\mu \vdash n} [N_1, N_2]_\mu^{(1)} \chi_\mu(\lambda) Q_\mu, \quad (4.28)$$

onde Q_μ corresponde ao restante da Eq. (4.26).

Multiplicando ambos os lados por $|\mathcal{C}_\lambda| \chi_\rho(\lambda)$ e somando sobre $\lambda \vdash n$, ficamos com

$$\left\langle \sum_{\lambda \vdash n} |\mathcal{C}_\lambda| \chi_\rho(\lambda) p_\lambda(T) \right\rangle = \sum_{\mu \vdash n} [N_1, N_2]_\mu^{(1)} \left(\sum_{\lambda \vdash n} |\mathcal{C}_\lambda| \chi_\rho(\lambda) \chi_\mu(\lambda) \right) Q_\mu. \quad (4.29)$$

Usando a ortogonalidade de caracteres e a definição da função de Schur, temos

$$\langle n! s_\rho(T) \rangle = \sum_{\mu \vdash n} [N_1, N_2]_\mu^{(1)} n! \delta_{\mu\rho} Q_\mu. \quad (4.30)$$

Portanto,

$$\langle s_\lambda(T) \rangle = [N_1, N_2]_\lambda^{(1)} \sum_{\substack{\alpha \supset \lambda \\ D_1(\alpha) = D_1(\lambda)}} \frac{d_\alpha \gamma^{|\alpha| - |\lambda|}}{|\alpha|! [M]_\alpha^{(1)}} s_{\alpha \setminus \lambda}(1^{N_3}) \left(\frac{t_1(\alpha)}{t_1(\mu)} \right)^2. \quad (4.31)$$

Quando λ é um gancho, temos que $D_1(\lambda) = 1$, o que nos diz que α também deve ser um gancho. Nesse caso, o diagrama skew $\alpha \setminus \lambda$ é composto por uma faixa horizontal $[p]$ e uma faixa vertical $[1^q]$. Com isso, a função skew de Schur, fica decomposta na seguinte forma [88],

$$s_{\alpha \setminus \lambda}(1^{N_3}) = s_{[p]}(1^{N_3}) s_{[1^q]}(1^{N_3}), \quad (4.32)$$

como um produto de duas funções de Schur, uma com respeito à faixa horizontal e outra com respeito à faixa vertical. Porém, podemos utilizar a Eq. (2.31) e obter $s_{[p]}(1^{N_3}) = \binom{p+N_3-1}{p}$ e $s_{[1^q]}(1^{N_3}) = \binom{N_3}{q}$.

Se escrevemos $\lambda = (n-k, 1^k) \vdash n$ e $\alpha = (n-k+p, 1^{k+q}) \vdash n+p+q$, temos

$$d_\alpha = \frac{(n+p+q-1)!}{(p+n-k-1)!(q+k)!}, \quad (4.33)$$

$$|t_\lambda| = (n-k-1)!k! \text{ e } |t_\alpha| = (n-k+p-1)!(k+q)!. \quad (4.34)$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{d_\alpha}{|\alpha|! [M]_\alpha^{(1)}} \left(\frac{t_1(\alpha)}{t_1(\mu)} \right)^2 &= \frac{(n+p+q-1)!}{(p+n-k-1)!(q+k)!} \frac{(p+n-k-1)!^2 (k+q)!^2}{(n+p+q)!(n-k-1)!^2 k!^2} \\ &\quad \cdot \frac{1}{[M]_{(n-k+p, 1^{k+q})}^{(1)}} \\ &= \frac{(p+n-k-1)! (q+k)!}{(n-k-1)!^2 k!^2} \\ &\quad \cdot \frac{1}{(n+p+q)M(M+1)^{(p+n-k-1)}(M-1)_{(q+k)}}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Além disso,

$$\binom{p + N_3 - 1}{p} = \frac{(N_3)^{(p)}}{p!} \quad \text{e} \quad \binom{N_3}{q} = \frac{(N_3)_{(q)}}{q!}. \quad (4.36)$$

No fim das contas, sendo $\lambda = [n - k, 1^k]$, denotando $r = n - k - 1$, ficamos com

$$\langle s_\lambda(T) \rangle = \frac{[N_1, N_2]_\lambda^{(1)}}{Mr!k!} \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{\gamma^{p+q}}{p+q+n} \binom{p+r}{r} \binom{q+k}{k} \frac{(N_3)^{(p)} (N_3)_{(q)}}{(M+1)^{(p+r)} (M-1)_{(q+k)}}. \quad (4.37)$$

Quando $n \leq 3$, todas as partições $\mu \vdash n$ são ganchos. Portanto, podemos obter $\langle p_\lambda(T) \rangle$ através dos valores de $\langle s_\mu(T) \rangle$ pela Eq. (2.26).

Mais ainda, quando $\lambda = (n)$, $\chi_\mu(\lambda)$ só é diferente de zero quando μ for um gacho. Nesse caso, parametrizando $\mu = (n - k, 1^k)$, temos $\chi_\mu(n) = (-1)^k$. Então a soma sobre $\mu \vdash n$ é convertida numa soma sobre k

$$\langle p_{(n)}(T) \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \langle s_{(n-k, 1^k)}(T) \rangle, \quad (4.38)$$

e podemos utilizar Eq. (4.37) para calcular $\langle s_{(n-k, 1)}(T) \rangle$. Em particular, para obter a condutância através da Eq. (4.37), tomamos $\lambda = [1]$, com $k = 0$ e $r = 0$

$$\langle s_{[1]}(T) \rangle = \frac{N_1 N_2}{M} \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{\gamma^{p+q}}{p+q+1} \frac{(N_3)^{(p)} (N_3)_{(q)}}{(M+1)^{(p)} (M-1)_{(q)}}. \quad (4.39)$$

Podemos ainda fazer $m = p + q$ e $k = q$, e ficamos com

$$\langle g_{12} \rangle = \langle p_{[1]}(T) \rangle = \frac{N_1 N_2}{M} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \frac{\gamma^m}{m+1} \frac{(N_3)^{(m-k)} (N_3)_{(k)}}{(M+1)^{(m-k)} (M-1)_{(k)}}, \quad (4.40)$$

pois $p_{[1]}(T) = s_{[1]}(T)$.

4.1.2 Resultados Momentos de Transporte

Nesta seção, estamos interessados em quatro quantidades. A primeira delas é a própria condutância, a qual é obtida através da Eq. (4.40), o momento mais simples

$$\langle g_{12} \rangle = \langle p_{[1]} \rangle. \quad (4.41)$$

A segunda quantidade é variância da condutância que é dada por

$$\text{var}[g_{12}] = \langle g_{12}^2 \rangle - \langle [g_{12}] \rangle^2 = \langle p_{[1^2]} \rangle - \langle p_{[1]} \rangle^2. \quad (4.42)$$

O fator Fano é a terceira quantidade de interesse e é obtido através razão entre o *shot-noise*,

$$s = p_{[1]} - p_{[2]}, \quad (4.43)$$

que carrega informações sobre flutuações na corrente elétrica dependentes do tempo, devido à carga elétrica discreta, e a condutância. O valor médio do fator Fano é aproximado utilizando os valores médios da condutância e do *shot-noise*,

$$F = \frac{\langle s \rangle}{\langle g_{12} \rangle}. \quad (4.44)$$

A quarta quantidade de interesse é obtida através da razão entre o terceiro cumulante

$$k = p_{[1]} - 3p_{[2]} + 2p_{[3]}, \quad (4.45)$$

e o *shot-noise*:

$$\mathcal{K} = \frac{\langle k \rangle}{\langle s \rangle}. \quad (4.46)$$

Essa quantidade tem atraído bastante interesse, teórico (por exemplo, na busca por caracterizar a estatística das flutuações de corrente num ponto quântico semicondutor), e experimental (por exemplo, buscando medidas desta quantidade) [77, 37, 78]. Novamente, aproximamos o valor médio de \mathcal{K} através dos valores médios do terceiro cumulante e do *shot-noise*. Dentre as séries de potências usadas para obter as quatro quantidades, todas elas, com exceção de $p_{[12]}$, podem ser obtidas através da Eq. (4.38).

Para a condutância e sua variância, obtemos as seguintes séries em γ

$$\frac{\langle g_{12} \rangle}{N_1 N_2} = \frac{1}{M} + \frac{N_3}{(M^2 - 1)}\gamma + \frac{N_3(MN_3 - 2)}{(M^2 - 1)(M^2 - 4)}\gamma^2 + \mathcal{O}(\gamma^3), \quad (4.47)$$

$$\frac{\text{var}[g_{12}]}{N_1 N_2} = \frac{(M - N_1)(M - N_2)}{M^2(M^2 - 1)} + \frac{2N_3(M - 2N_1)(M - 2N_2)}{M(M^2 - 1)(M^2 - 4)}\gamma + \mathcal{O}(\gamma^2), \quad (4.48)$$

onde $M = \sum_{i=1}^3 N_i$. Note que se $\gamma \rightarrow 0$ somente o primeiro termo sobrevive e obtemos resultados para uma cavidade conectada a guias ideais (transparentes). As Eqs. (4.47) e 4.48 são válidas para qualquer quantidade de canais em cada guia, N_1, N_2 e N_3 . Esta versatilidade nos permite estudar os momentos numa gama de casos especiais, de interesse experimental.

O primeiro caso, corresponde a tomar guia com o mesmo número de canais $N_1 = N_2 = N_3 = N_0$. Temos, portanto, guias com a mesma largura. Com as Eqs. (4.47) e 4.48 obtemos

$$\langle g_{12} \rangle = \frac{N_0}{3} + \frac{N_0^3 \gamma}{9N_0^2 - 1} + \frac{N_0^3(3N_0^2 - 2)\gamma^2}{(9N_0^2 - 1)(9N_0^2 - 4)} + \mathcal{O}(\gamma^3), \quad (4.49)$$

$$\text{var}[g_{12}] = \frac{4}{9} \frac{N_0^2}{9N_0^2 - 1} + \frac{2}{3} \frac{N_0^4 \gamma}{(9N_0^2 - 1)(9N_0^2 - 4)} + \frac{1}{3} \frac{N_0^4 \gamma^2}{(9N_0^2 - 1)^2(9N_0^2 - 4)} + \mathcal{O}(\gamma^3). \quad (4.50)$$

Tomando o limite de um grande número de canais ($N_0 \gg 1$), ou seja, expandindo cada termo das Eqs. (4.49) e (4.50) em séries de potências de N_0 , obtemos

$$\langle g_{12} \rangle = \frac{N_0}{3} + \frac{N_0}{9}\gamma + \frac{N_0}{27}\gamma^2 + \mathcal{O}(\gamma^3), \quad (4.51)$$

$$\text{var}[g_{12}] = \frac{4}{81} + \frac{2}{243}\gamma + \frac{1}{243}\gamma^2 + \mathcal{O}(\gamma^3). \quad (4.52)$$

As Eqs. (4.51) e 4.52 concordam com os resultados obtidos através de RMT.

O segundo caso, consiste em impor um regime extremamente quântico às guias de entrada e saída, onde fazemos $N_1 = N_2 = 1$ nas Eqs. (4.47) e 4.48, enquanto o número de canais na terceira guia permanece arbitrário. Nesse caso, temos guias de entrada e saída muito estreita, de modo que suportam apenas um canal, no extremo oposto do regime contínuo. Donde obtemos

$$\langle g_{12} \rangle = \frac{1}{N_3 + 2} + \frac{N_3}{(N_3 + 1)(N_3 + 3)}\gamma + \frac{(N_3^2 + 2N_3 - 2)}{(N_3 + 1)(N_3 + 3)(N_3 + 4)}\gamma^2 + \mathcal{O}(\gamma^3), \quad (4.53)$$

$$\text{var}[g_{12}] = \frac{N_3 + 1}{(N_3 + 2)^2(N_3 + 3)} + \frac{2N_3^2}{(N_3 + 1)(N_3 + 2)(N_3 + 3)(N_3 + 4)}\gamma + \mathcal{O}(\gamma^2). \quad (4.54)$$

se $N_3 \gg 1$, obtemos

$$\langle g_{12} \rangle = \frac{1}{N_3} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k = \frac{1}{N_3(1-\gamma)}, \quad (4.55)$$

$$\text{var}[g_{12}] = \frac{1}{N_3^2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \gamma^k = \frac{1}{N_3^2(1-\gamma)^2}. \quad (4.56)$$

Observe que as equações acima permanecem válidas no intervalo $0 \leq \gamma \leq 1$. Se tomamos isoladamente $\gamma \rightarrow 1$ teremos $\langle g_{12} \rangle \rightarrow \infty$; ao passo que se $N_3 \rightarrow \infty$, teremos $\langle g_{12} \rangle \rightarrow 0$. Porém se tomamos os dois limites concomitantemente, com o produto $N_3(1-\gamma)$ finito, tanto a condutância quanto sua variância permanecem finitas. Esse caso é conhecido como limite opaco [44].

No terceiro caso, impomos o regime extremamente quântico na terceira guia, ao passo que a quantidade de canais nas guias 1 e 2 é mantida arbitrária, $N_1 = N_2 = N_0$ e $N_3 = 1$. Temos

$$\langle g_{12} \rangle = \frac{N_0^2}{2N_0 + 1} + \frac{1}{4} \frac{N_0}{N_0 + 1} \gamma + \frac{1}{4} \frac{N_0}{(N_0 + 1)(2N_0 + 3)} \gamma^2 + \mathcal{O}(\gamma^3), \quad (4.57)$$

$$\text{var}[g_{12}] = \frac{1}{4} \frac{N_0(N_0 + 1)}{(2N_0 + 1)^2} + \frac{1}{2} \frac{N_0}{(N_0 + 1)(2N_0 + 3)(4N_0^2 - 1)} \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2). \quad (4.58)$$

Se $N_0 \gg 1$, obtemos

$$\langle g_{12} \rangle = \frac{N_0}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \gamma + \frac{1}{8N_0} \gamma^2 + \mathcal{O}(\gamma^3), \quad (4.59)$$

$$\text{var}[g_{12}] = \frac{1}{16} - \frac{1}{16N_0} \gamma^2 + \frac{1}{16N_0} \gamma^3 + \mathcal{O}(\gamma^4). \quad (4.60)$$

Nas Figs. 10 e 11, são graficados a condutância (acima e à esquerda) e a variância da condutância (acima e à direita) em função de γ . Na Figs. 10 exploramos os casos particulares discutidos acima com $N_0 = 2$. Ao passo que na Figs. 11 exploramos o caso $N_1 = N_2 = N_3 = N_0$ com $N_0 = 1, 2, 5$. Também são exibidos resultados para o fator Fano (abaixo e à esquerda) e para a razão do terceiro cumulante (abaixo e à direita), que serão discutidos a diante.

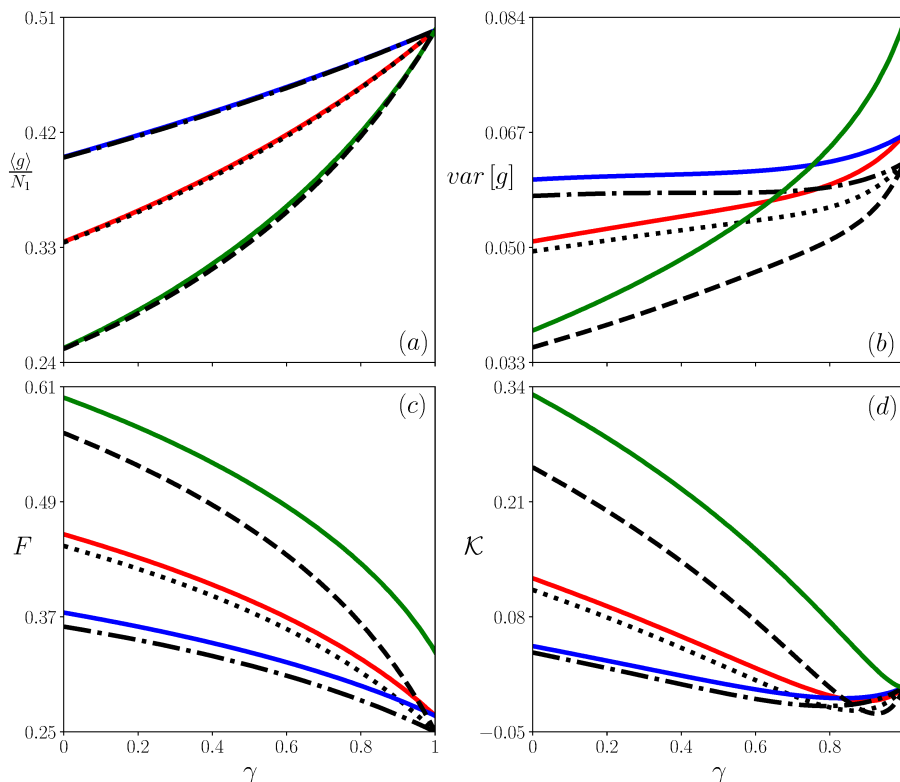


Figura 10 – A condutância média (a), a variância da condutância (b), o fator Fano (c) e a razão do terceiro cumulante (d) como funções de γ para $N_0 = 2$, para ausência de Simetria de Reversão Temporal. Para as linhas vermelhas, temos $N_1 = N_2 = N_3 = N_0$, e as previsões correspondentes da RMT são graficadas nas linhas pretas pontilhadas; para as linhas azuis temos $N_1 = N_2 = N_0$ e $N_3 = 1$, e as previsões correspondentes da RMT são graficadas nas linhas pretas tracejadas e pontilhadas; e, para as linhas verdes temos $N_1 = N_2 = 1$ e $N_3 = N_0$, e as previsões correspondentes da RMT são graficadas nas linhas pretas tracejadas. As séries para os momentos foram expandidas até suas curvas convergirem significativamente.

Na Fig 10, vale destacar que mesmo com num regime fortemente quântico, com o maior número de canais igual a 2, a condutância permanece bastante próxima das previsões da RMT, ao passo que os outros momentos se distanciam dela. À medida que $N_0 \rightarrow \infty$ nossos resultados convergem para as previsões da RMT. Além disso, podemos notar que, para cada valor de γ , o valor da condutância no caso em que $N_1 = N_2 = N_0$ e $N_3 = 1$ (linha azul), é o maior dentre os três casos, pois nesse caso, a guia auxiliar encontra-se mais “fechada”, o que diminui o fluxo através dela, aumentando a probabilidade de que o transporte ocorra através da cavidade. Para o caso $N_1 = N_2 = N_3 = N_0$ (linha vermelha), preservamos as propriedades das guias de entrada e saída, entretanto, permitimos um fluxo maior através da terceira guia, logo, podemos esperar um valor intermediário da condutância dentre os três casos para cada valor de γ . Por fim, no caso $N_1 = N_2 = 1$ e $N_3 = N_0$ (linha verde), além de permitir um fluxo maior através da terceira guia dificultamos o acesso à cavidade diminuindo o número de canais disponíveis nas guias de entrada e

saída; neste caso, devemos esperar o menor valor para a condutância (para cada valor de γ) dentre os três casos.

Agora, vamos explorar os momentos de ordem mais alta: o fator Fano (Eq. (4.44)) e a razão do terceiro cumulante e o *shot-noise* (Eq. (4.46)). Assim como foi feito para a condutância e sua variância, podemos obter expansões em séries de potências de γ . Porém, para momentos de ordem mais alta, as expressões tornam-se muito extensas. Por isso, exibiremos apenas os casos particulares discutidos anteriormente.

Primeiramente, o caso com o mesmo número de canais nas guias $N_1 = N_2 = N_3 = N_0$:

$$F = \frac{4N_0^2}{9N_0^2 - 1} - \frac{9N_0^4(9N_0^2 - 5)}{(9N_0^2 - 1)^2(9N_0^2 - 4)}\gamma + \mathcal{O}(\gamma^2), \quad (4.61)$$

$$\mathcal{K} = \frac{N_0^2}{9N_0^2 - 4} - \frac{1}{2} \frac{24N_0^4 - 19N_0^2 + 4}{(9N_0^2 - 4)^2}\gamma + \mathcal{O}(\gamma^2). \quad (4.62)$$

Quando $N_0 \gg 1$, obtemos

$$F = \frac{4}{9} - \frac{1}{9}\gamma - \frac{1}{27}\gamma^2 + \frac{2}{81}\gamma^3 + \mathcal{O}(\gamma^4), \quad (4.63)$$

$$\mathcal{K} = \frac{1}{9} - \frac{4}{27}\gamma - \frac{1}{27}\gamma^2 - \frac{11}{972}\gamma^3 + \mathcal{O}(\gamma^4), \quad (4.64)$$

No segundo caso, temos um regime fortemente quântico nas guias de entrada e saída, $N_1 = N_2 = 1$, enquanto o número de canais na guia 3 é mantido arbitrário

$$F = \frac{N_3 + 1}{N_3 + 3} - \frac{2N_3(N_3 + 2)^2}{(N_3 + 1)(N_3 + 3)^2(N_3 + 4)}\gamma + \mathcal{O}(\gamma^2), \quad (4.65)$$

$$\mathcal{K} = \frac{N_3}{N_3 + 4} - \frac{4N_3(N_3 + 2)^3}{(N_3 + 1)^2(N_3 + 4)^2(N_3 + 5)}\gamma + \mathcal{O}(\gamma^2). \quad (4.66)$$

Se $N_3 \gg 1$, obtemos os primeiros termos de uma série geométrica, o que nos leva a conjecturar que

$$F = 1 - \frac{2}{N_3} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k = 1 - \frac{2}{N_3(1-\gamma)}, \quad (4.67)$$

$$\mathcal{K} = 1 - \frac{4}{N_3} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k = 1 - \frac{4}{N_3(1-\gamma)}. \quad (4.68)$$

Note que as equações acima são válidas no intervalo $0 \leq \gamma \leq 1$. Onde o caso $\gamma \rightarrow 1$ corresponde ao regime opaco, juntamente com as condições $N_3 \rightarrow \infty$ e $N_3(1-\gamma)$ finito.

Por fim, se temos um regime fortemente quântico na terceira guia, $N_3 = 1$, e o número de canais nas guias de entrada e saída são mantidos arbitrários, $N_1 = N_2 = N_0$, temos

$$F = \frac{1}{4} \frac{N_0 + 1}{N_0} - \frac{1}{16} \frac{(2N_0^2 + 3N_0 - 3)(2N_0 + 1)^2}{N_0^2(N_0 + 1)(2N_0 - 1)(2N_0 + 3)}\gamma + \mathcal{O}(\gamma^2), \quad (4.69)$$

$$\mathcal{K} = \frac{1}{(2N_0 - 1)(2N_0 + 3)} - \frac{1}{2} \frac{(2N_0 + 1)(4N_0^4 + 8N_0^3 + N_0^2 - 3N_0 + 2)}{(N_0 + 1)^2(2N_0 - 1)^2(2N_0 + 3)^2}\gamma + \mathcal{O}(\gamma^2). \quad (4.70)$$

quando $N_0 \gg 1$, essas equações resumem-se em

$$F = \frac{1}{4} - \frac{1}{8N_0}\gamma - \frac{1}{8N_0}\gamma^2 - \frac{3}{16N_0^2}\gamma^3 + \mathcal{O}(\gamma^4), \quad (4.71)$$

$$\mathcal{K} = \frac{1}{4N_0^2} - \frac{1}{4N_0}\gamma - \frac{1}{8N_0^2}\gamma^2 + \frac{1}{4N_0}\gamma^3 + \mathcal{O}(\gamma^4). \quad (4.72)$$

Também nas Figs. 10 e 11, são graficados o fator Fano (abaixo e à esquerda) e a razão entre o terceiro cumulante e o *shot-noise* (abaixo e à direita) em função de γ . Como é possível observar na Fig. 11, à medida que o número de canais cresce, as predições da RMT tornam-se cada vez mais acuradas.

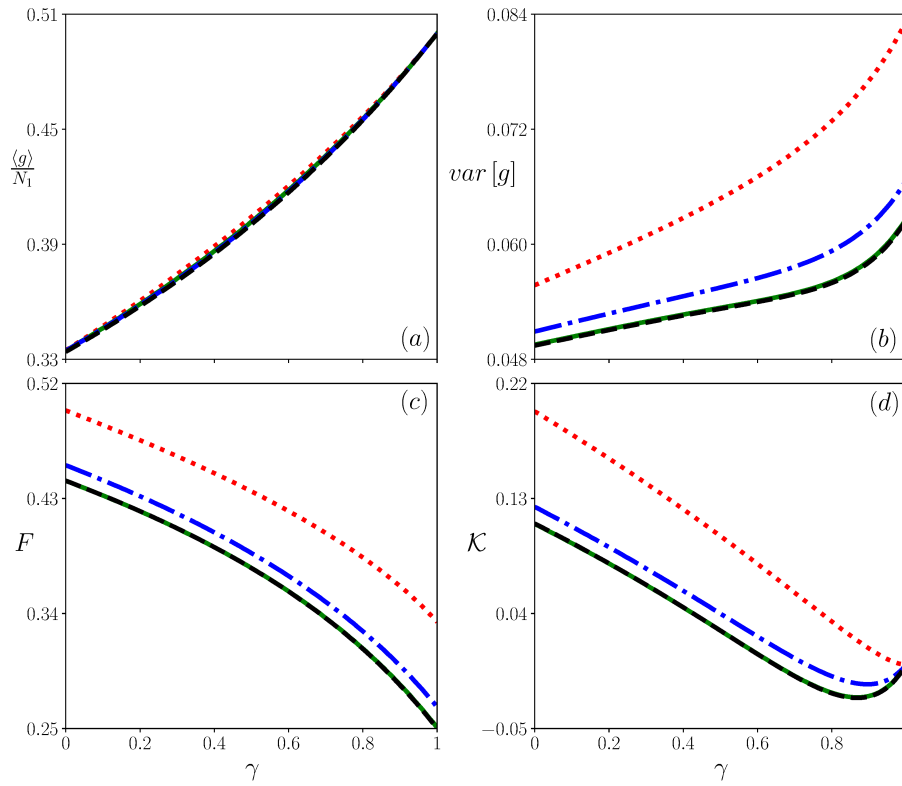


Figura 11 – A condutância média (a), a variância da condutância (b), o fator Fano (c) e a razão do terceiro cumulante (d) como funções de γ para o caso $N_1 = N_2 = N_3 = N_0$. Para a linha vermelha (pontilhada), temos $N_0 = 1$; para a linha azul (tracejada e pontilhada) temos $N_0 = 2$; para a linha preta (tracejada) temos a predição da RMT para $N_0 \rightarrow \infty$. Para a linha verde (contínua) temos: $N_0 = 5$, em (a); $N_0 = 12$, em (b); $N_0 = 8$, em (c); e $N_0 = 10$, em (d). As séries para os momentos foram expandidas até suas curvas convergirem significativamente.

Para confirmar a validade das equações obtidas acima, utilizamos uma abordagem diagramática utilizando recursos de RMT, como desenvolvido por Brouwer e Beenakker [82]. Entretanto, tais resultados são válidos apenas quando $M \gg 1$. A partir dos resultados obtidos por Brouwer e Beenakker [82] obtemos a média da condutância e sua variância.

Para o caso $N_1 = N_2 = N_3 = N_0$, temos

$$\langle g_{12} \rangle = \frac{N_0}{3 - \gamma}, \quad (4.73)$$

$$\text{var}[g_{12}] = \frac{4\gamma^4 - 18\gamma^3 + 48\gamma^2 - 66\gamma + 36}{(\gamma - 3)^6}. \quad (4.74)$$

Para o fator Fano, utilizando os resultados obtidos por A. Barbosa [72], temos

$$F = \frac{\gamma^3 - 6\gamma^2 + 15\gamma - 12}{(\gamma - 3)^3}, \quad (4.75)$$

de acordo com Whitney [74].

Finalmente, para a razão entre o terceiro cumulante e o *shot-noise*, foi necessário obter o valor médio de $\langle \text{Tr} \left[(t_{12} t_{12}^\dagger)^3 \right] \rangle$, até então, ausente da literatura. Com isso, obtemos

$$\mathcal{K} = \frac{(\gamma - 1)(\gamma^5 - 8\gamma^4 + 36\gamma^3 - 78\gamma^2 + 93\gamma - 36)}{(\gamma - 3)^3(\gamma^3 - 6\gamma^2 + 15\gamma - 12)}. \quad (4.76)$$

Expandindo essas equações em séries de potências de γ , os primeiros termos coincidem com as Eqs. (4.51), (4.52), (4.63) e (4.64), respectivamente. Dessa forma, verificamos a concordância entre os dois métodos, no regime $M \gg 1$, para as primeiras ordens em γ . Entretanto, para pequenos valores de M (limite quântico) os resultados mostram-se divergentes, como podemos observar nas Figs. 10 e 11.

Por fim, estudamos a convergência das séries em γ . Para este estudo, escolhemos a pior situação de convergência da série, quando $\gamma = 1$, para o caso do mesmo número de canais, $N_1 = N_2 = N_3 = N_0$. Comparamos as médias da condutância e da razão entre o terceiro cumulante e o *shot-noise*. Então, truncamos a série numa ordem, n_{max} , e obtemos o valor de $\frac{\langle g \rangle}{N_0}(1)$ e $\mathcal{K}(1)$. Em seguida, plotamos os valores das aproximações em função da ordem máxima da série. Note que pelas Eqs. (4.73) e (4.76), $\frac{\langle g \rangle}{N_0}(1)$ e $\mathcal{K}(1)$ não dependem do valor de N_0 . Para verificar que as séries são consistentes com esse fato, utilizamos $N_0 = 2$ e $N_0 = 10$. Como é possível observar na Fig. 12, a condutância alcança estabilidade em torno de $n_{max} = 8$ ao passo que $\mathcal{K}(1)$ em torno de $n_{max} = 25$.

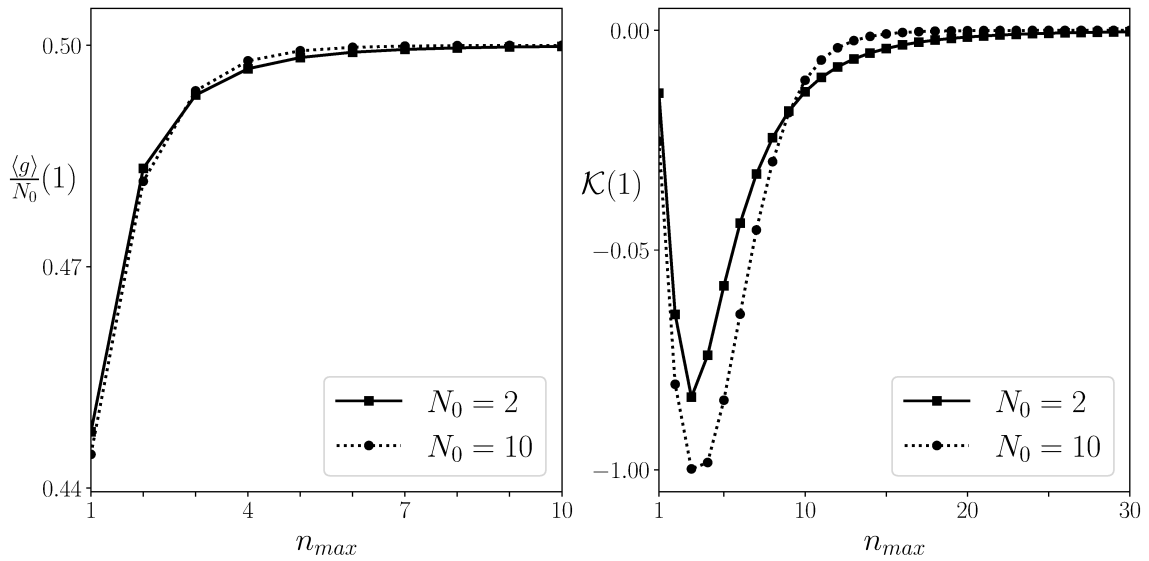


Figura 12 – Aproximações para $\frac{\langle g \rangle}{N_0}(1)$ e $\mathcal{K}(1)$ em função da ordem máxima em γ nas respectivas séries. Nos dois casos, temos $N_1 = N_2 = N_3 = N_0$. Podemos observar que as duas séries alcançam estabilidade, porém em diferentes valores de n_{max} .

Além disso, estudamos a ordem da diferença do acréscimo de sucessivos termos na série. Para isso, definimos a diferença

$$\Delta_n [F] = \log |F_{n+1} - F_n|, \quad (4.77)$$

onde, para construir a Fig. 13, avaliamos Δ_n para $\frac{\langle g \rangle}{N_0}(1)$ e $\mathcal{K}(1)$ em função de n_{max} . Observamos a convergência para um comportamento linear. Para $N_0 = 10$, observamos um comportamento linear com maior inclinação.

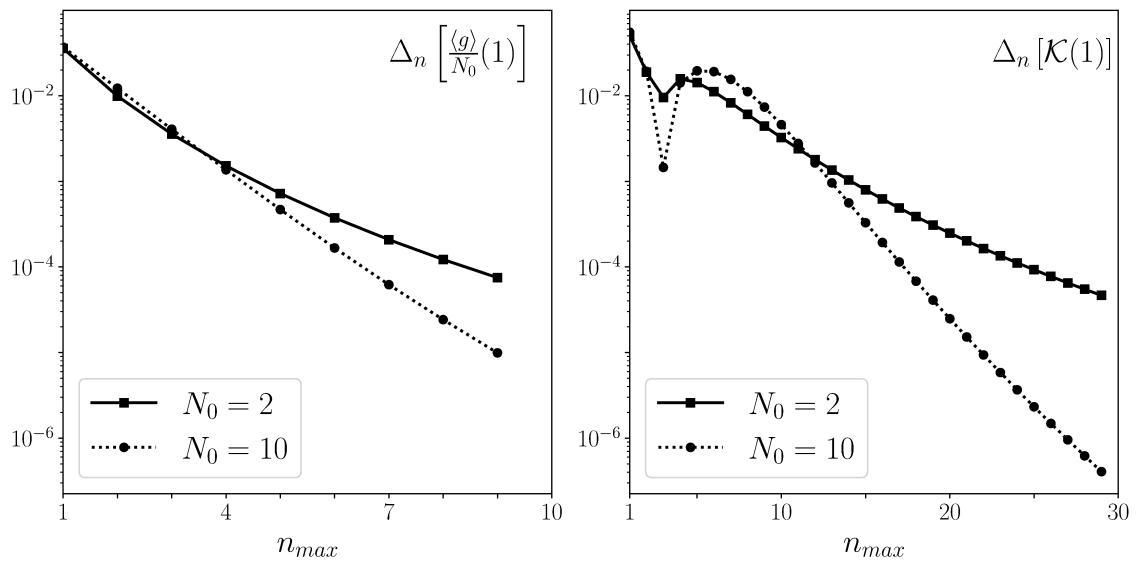


Figura 13 – Aproximações para $\Delta_n \left[\frac{\langle g \rangle}{N_0}(1) \right]$ e $\Delta_n [\mathcal{K}(1)]$ em função da ordem máxima em γ nas respectivas séries. Nos dois casos, temos $N_1 = N_2 = N_3 = N_0$. Podemos observar que as duas séries alcançam estabilidade, porém em diferentes valores de n_{max} .

4.2 Simetria de Reversão Temporal Presente

Nesta seção, estamos interessados nos momentos de transporte quando a Simetria de Reversão Temporal está presente. Neste caso, as equações mostram-se mais complicadas. Por isso, fomos capazes de obter apenas a condutância. Vamos analisar dois casos. No primeiro caso, a barreira de tunelamento encontra-se na guia auxiliar e, no segundo caso, a barreira encontra-se na guia de entrada.

4.2.1 Barreira na Guia Auxiliar

Agora, ainda considerando a presença da barreira na guia 3, com as guias de entrada e saída transparentes, devemos considerar o efeito da presença da Simetria de Reversão Temporal. Para isso, conforme discutimos na Sec. 3.7, devemos considerar a integral da Eq. (3.30)

$$K_N = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int e^{-\frac{1}{2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(M - \gamma^q N_3)}{q} \text{Tr}(SS^t)^q} R_{i_1 i_1} R_{i_2 i_2} dS, \quad (4.78)$$

onde S é uma matriz real de ordem N , R_{ij} é definido na Eq. (3.26), e

$$\mathcal{Z} = \int e^{-\frac{(M - \gamma N_3)}{2} \text{Tr}(SS^t)} dS. \quad (4.79)$$

Para resolver a integral matricial, introduzimos novamente a decomposição em valores singulares: $S = ODP$, em que O e P são matrizes ortogonais de ordem N e D é uma matriz diagonal. Definindo $X = D^2$, o jacobiano da transformação pode ser escrito como [87]

$$\prod_{i=1}^N x_i^{-1/2} \Delta(\tilde{x}) dX dO dP \quad \text{com} \quad \Delta(X) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} |x_i - x_j|, \quad (4.80)$$

em que dO e dP são proporcionais à medida de Haar do grupo ortogonal e $dX = dx_1 \cdots dx_N$. Ignorando o limite e a constante de normalização, ficamos com

$$K_N = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int e^{-\frac{1}{2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(M - \gamma^q N_3)}{q} \text{Tr} X^q} \mathcal{I}_1 \prod_{i=1}^N x_i^{-1/2} \Delta(X) dX. \quad (4.81)$$

As integrais sobre o grupo ortogonal são dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2} D_{\alpha_1 \alpha_2} D_{\beta_1 \beta_2} \int O_{\alpha_1 \alpha_1} O_{\alpha_2 \beta_1} dO \int P_{\alpha_2 \beta_1} P_{\beta_2 \beta_2} dP \\ &= \sum_{\alpha, \beta} d_{\alpha} d_{\beta} \int O_{\alpha_1 \alpha} O_{\alpha_2 \beta} dO \int P_{\alpha \beta_1} P_{\beta_2 \beta} dP, \end{aligned} \quad (4.82)$$

pois D é diagonal.

A média no grupo ortogonal, é obtida através da Eq. (2.77); e ficamos com

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= \sum_{a_1, a_2, b_1, b_2=1}^M Y_{i_1 a_1} Y_{i_1 b_1}^* Y_{i_2 a_2} Y_{i_2 b_2}^* \sum_{\alpha, \beta} d_\alpha d_\beta \frac{\delta_{a_1 a_2} \delta_{\alpha \beta} \delta_{b_1 b_2} \delta_{\alpha \beta}}{N} \\
&= \sum_{a_1, a_2, b_1, b_2=1}^M Y_{i_1 a_1} Y_{i_1 b_1}^* Y_{i_2 a_2} Y_{i_2 b_2}^* \frac{\delta_{a_1 a_2} \delta_{b_1 b_2}}{N^2} \sum_{\alpha} d_\alpha^2 \\
&= \sum_{a, b=1}^M Y_{i_1 a} Y_{i_1 b}^* Y_{i_2 a} Y_{i_2 b}^* \frac{\text{Tr} X}{N^2} \\
&= \sum_{a, b=1}^M Y_{i_1 a} Y_{i_2 a}^t Y_{i_1 b}^* Y_{i_2 b}^{*t} \frac{\text{Tr} X}{N^2} \\
&= C_{i_1 i_2} C_{i_1 i_2}^* \frac{\text{Tr} X}{N^2}, \text{ pois } C = Y Y^t,
\end{aligned} \tag{4.83}$$

onde fica claro a coleta do coeficiente de $C_{i_1 i_2} C_{i_1 i_2}^*$, exigida pela Eq. (3.28). Realizando a coleta do coeficiente e trazendo o resultado para \mathcal{I}_1 , temos

$$K_N = \frac{1}{N^2 \mathcal{Z}} \int e^{-\frac{1}{2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(M - \gamma^q N_3)}{q} \text{Tr} X^q} \text{Tr} X \prod_{i=1}^N x_i^{-1/2} \Delta(X) dX. \tag{4.84}$$

Agora, também aplicamos a Eq. (4.5) e ficamos com

$$K_N = \frac{1}{N^2 \mathcal{Z}} \int \det(1 - X)^{\frac{M}{2}} \det(1 - \gamma X)^{-\frac{N_3}{2}} \text{Tr} X \prod_{i=1}^N x_i^{-1/2} \Delta(X) dX. \tag{4.85}$$

A ideia agora, é transformar a integral obtida em K_N numa integral semelhante à seguinte generalização da integral de Selberg, como na Eq. (3.49). Para isso, começamos utilizando a Eq. (2.41), onde expressamos o determinante usando polinômios zonais

$$\begin{aligned}
\det(1 - \gamma X)^{-\frac{N_3}{2}} &= \prod_{i=1}^N (1 - \gamma x_i)^{-\frac{N_3}{2}} \\
&= \left(\prod_{i=1}^N (1 - \gamma x_i)^{-\frac{N_3}{2}} \right)^{N_3} \\
&= \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^{N_3} (1 - \gamma x_i)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{\rho} \frac{1}{j_\rho} Z_\rho(\gamma I_{N_3}) Z_\rho(X),
\end{aligned} \tag{4.86}$$

onde j_ρ é dado pela Eq. (2.42).

Dessa forma, ficamos com

$$K_N = \sum_{\rho} \frac{1}{N^2 j_\rho} \gamma^{|\rho|} Z_\rho(N_3) \frac{1}{\mathcal{Z}} \int Z_\rho(X) Z_1(X) \prod_{i=1}^N x_i^{-1/2} (1 - x_i)^{\frac{M}{2}} \Delta_1(X) dX, \tag{4.87}$$

onde o determinante foi escrito como um produtório, como na Eq. (4.21) e $Z_1(X) = \text{Tr}(X)$.

Resta escrever o produto de polinômios zonais como combinação linear de outros polinômios zonais. Já que os polinômios zonais coincidem com os polinômios de Jack com índice 2, podemos utilizar a Eq. (2.43) e obter

$$K_N = \sum_{\mu\rho} \frac{\gamma^{|\rho|}}{N^2 j_\rho} C_{[1]^\rho\mu}^{(2)} Z_\rho(N_3) \mathcal{I}_3, \quad (4.88)$$

com

$$\mathcal{I}_3 = \frac{1}{Z} \int Z_\mu(X) \prod_{i=1}^N x_i^{-1/2} (1-x)^{\frac{M}{2}} \Delta(\vec{x}) d\vec{x}, \quad (4.89)$$

onde $\mu \supseteq \rho$, $\mu \supseteq [1]$ e $|\mu| = |\rho| + 1$.

Utilizando a Eq. (3.49) para resolver a integral, com $\alpha = 2$, $b = \frac{M}{2} + 1$ e $L = \frac{M - \gamma N_3}{2}$, obtemos

$$K_N = \sum_{\mu\rho} \frac{\gamma^{|\rho|}}{N^2 j_\rho} C_{[1]^\rho\mu}^{(2)} Z_\rho(N_3) \frac{([N]_\mu^{(2)})^2}{2^{|\mu|} \left(\frac{M - \gamma N_3}{2}\right)^{-\frac{N^2}{2}}} R_\mu\left(2, \frac{M}{2} + 1, N\right). \quad (4.90)$$

Pela Eq. (3.28), a condutância é obtida fazendo

$$\langle g_{12} \rangle = \lim_{N \rightarrow 0} \sum_{i,o=1}^{N_1, N_2} K_N [C_{i_1 i_2} C_{i_1 i_2}^*]. \quad (4.91)$$

Como já realizamos a coleta do coeficiente de $C_{i_1 i_2} C_{i_1 i_2}^*$ e K_N não depende de i e o , ficamos com

$$\langle g_{12} \rangle = N_1 N_2 \sum_{\mu\rho} \frac{\gamma^{|\rho|}}{j_\rho} C_{[1]^\rho\mu}^{(2)} Z_\rho(N_3) Q_\mu(M), \quad (4.92)$$

onde

$$Q_\mu(M) = \lim_{N \rightarrow 0} \left(\frac{2}{M - \gamma N_3}\right)^{-\frac{N^2}{2}} \left(\frac{[N]_\mu^{(2)}}{N}\right)^2 R_\mu\left(2, \frac{M}{2} + 1, N\right). \quad (4.93)$$

O fator que merece atenção do limite é a razão $\frac{[N]_\mu^{(2)}}{N}$, pois o limite $\lim_{N \rightarrow 0} R_\mu\left(2, \frac{M}{2} + 1, N\right)$ é dado pela Eq. (3.51). Utilizando a Eq. (2.18), percebemos que o limite só é diferente de zero quando a partição μ tem 2-retângulo de Durfee de largura 2, $D_2(\mu) = 1$. Neste caso, a partição μ deve ser obrigatoriamente um gancho duplo, ou seja, uma partição de um inteiro n do tipo $(k_1, k_2, 1^{n-k_1-k_2})$. Então, aplicando o limite, obtemos

$$Q_\mu(M) = \frac{\left(t_\mu^{(2)}\right)^2}{[M+1]_\mu^{(2)}}. \quad (4.94)$$

Então,

$$\langle g_{12} \rangle = N_1 N_2 \sum_{\mu\rho} \gamma^{|\rho|} C_{[1]^\rho\mu}^{(2)} \frac{\left(t_\mu^{(2)}\right)^2}{j_\rho} \frac{Z_\rho(N_3)}{[M+1]_\mu^{(2)}}. \quad (4.95)$$

Note que, para que o coeficiente de Littlewood-Richardson não seja nulo, devemos ter $\mu \supseteq \rho$ e $|\mu| = |\rho| + 1$, segue que ρ também é um gancho duplo. Isto nos permite obter

expressões para os coeficientes $C_{[1]\rho\mu}^{(2)}$. Isto é realizado no Apêndice. Entretanto, escrevendo explicitamente os polinômios zonais e usando a Eq. (2.43), podemos construir um sistema de equações e obter os coeficientes de Littlewood-Richardson resolvendo-o. Entretanto, este método mostra-se computacionalmente custoso, pois a ordem das matrizes envolvidas cresce de acordo com o número de partições do inteiro n que μ particiona. Dito isto, os primeiros termos da série são

$$\langle g_{12} \rangle = \frac{N_1 N_2}{M+1} + \frac{N_1 N_2 N_3}{M(M+3)} \gamma + \frac{N_1 N_2 N_3 (MN_3 + M + N_3 - 3)}{M(M-1)(M+3)(M+5)} \gamma^2 + \mathcal{O}(\gamma^3). \quad (4.96)$$

4.2.2 Correção por Interferência Quântica

Dadas as expressões para a condutância na ausência (Eq. (4.47)) e presença (Eq. (4.96)) de Simetria de Reversão Temporal, podemos calcular a correção devida à interferência quântica [2]. A correção é definida como a diferença entre as médias da condutância na presença e ausência de Simetria de Reversão Temporal. Os primeiros termos são

$$\langle \delta g \rangle = -\frac{N_1 N_2}{M(M+1)} - \frac{N_1 N_2 N_3 (3M+1)}{M(M+3)(M^2-1)} \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2). \quad (4.97)$$

Quando $N_1 = N_2 = N_3 = N_0$, Eqs. (4.96) e (4.97) são simplificadas, tais como

$$\langle g_{12} \rangle = \frac{N_0^2}{3N_0+1} + \frac{N_0^2}{3(3N_0+3)} \gamma + \frac{N_0^2 (3N_0^2 + 4N_0 - 3)}{3(3N_0-1)(3N_0+3)(3N_0+5)} \gamma^2 + \mathcal{O}(\gamma^3), \quad (4.98)$$

$$\langle \delta g \rangle = -\frac{N_0}{3(3N_0+1)} - \frac{N_0^2 (9N_0+1)}{3(3N_0+3)(9N_0^2-1)} \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2). \quad (4.99)$$

Considerando um grande número de canais, $N_0 \gg 1$, obtemos

$$\langle \delta g \rangle = -\frac{1}{9} - \frac{1}{9} \gamma - \frac{1}{27} \gamma^2 - \frac{1}{243} \gamma^3 + \mathcal{O}(\gamma^4, N_0^{-1}). \quad (4.100)$$

Por outro lado, se $N_1 = N_2 = 1$, temos

$$\langle \delta g \rangle = -\frac{1}{(N_3+2)(N_3+3)} - \frac{N_3(3N_3+7)}{(N_3+1)(N_3+2)(N_3+3)(N_3+5)} \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2). \quad (4.101)$$

Quando $N_3 \gg 1$, encontramos

$$\langle \delta g \rangle = -\frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \gamma^k = -\frac{1+\gamma}{N^2(1-\gamma)^2}. \quad (4.102)$$

Se $N_3 = 1$, enquanto $N_1 = N_2 = N_0$, obtemos

$$\langle \delta g \rangle = -\frac{N_0^2}{2(N_0+1)(2N_0+1)} - \frac{N_0(3N_0+2)}{2(N_0+1)(2N_0+1)(2N_0+4)} \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2). \quad (4.103)$$

No limite $N_0 \gg 1$, temos

$$\langle \delta g \rangle = -\frac{1}{4} - \frac{3}{8N_0} \gamma + \frac{1}{8N_0} \gamma^2 + \frac{3}{8N_0^2} \gamma^3 + \mathcal{O}(\gamma^4, N_0^{-1}) \quad (4.104)$$

Para confirmar os resultados discutidos acima, foi desenvolvido um cálculo diagramático usando RMT [82] para obter a correção na condutância devida à interferência quântica no regime $M \gg 1$, conhecido como localização fraca. Para $N_1 = N_2 = N_3 = N_0$, foi obtido

$$\langle \delta g \rangle = -\frac{\gamma^2 - 3}{(\gamma - 3)^3}, \quad (4.105)$$

que concorda com a Eq. (4.100).

Finalmente, a Fig. 14 mostra a correção na condutância devida à interferência quântica, δg , como função da probabilidade de reflexão na barreira γ e diferentes quantidades de canais nas guias. Em todos os casos, é possível observar que a correção decresce à medida que $\gamma \rightarrow 1$. Além disso, à medida que N_0 cresce a aproximação por RMT torna-se cada vez mais acurada.

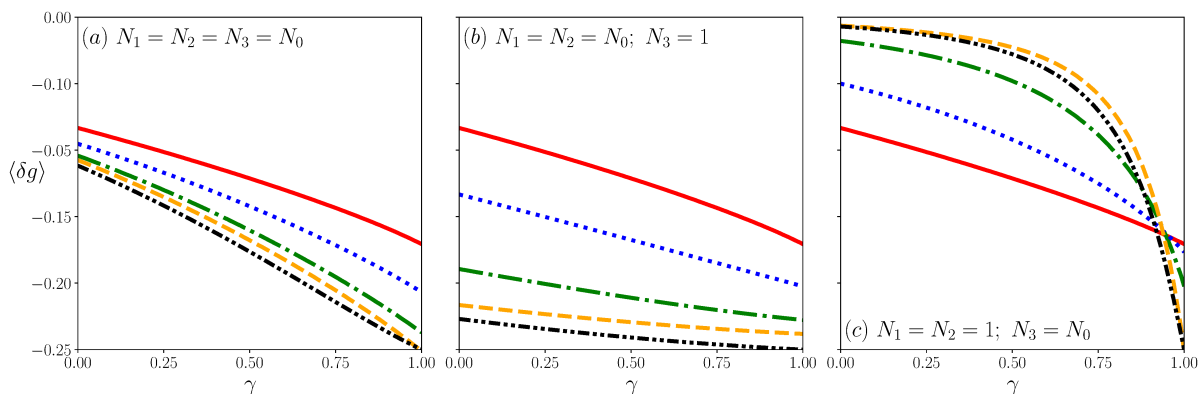


Figura 14 – Correção na condutância devida à interferência quântica como função da probabilidade de reflexão na barreira γ . À esquerda, $N_1 = N_2 = N_3 = N_0$; no centro, $N_1 = N_2 = N_0$ e $N_3 = 1$; e à direita, $N_1 = N_2 = 1$ and $N_3 = N_0$. Em todos os gráficos, a linha vermelha (sólida) representa $N_0 = 1$; a linha azul (pontilhada) representa $N_0 = 2$; a linha verde (tracejada e pontilhada) representa $N_0 = 5$; a linha laranja (tracejada) representa $N_0 = 10$; e a linha preta (tracejada e duplamente pontilhada) representa o resultado obtido por RMT. Onde δg foi expandido até $\mathcal{O}(\gamma^5)$.

4.2.3 Barreira na Guia de Entrada

Nesta seção, vamos estudar a condutância através das guias 1 e 3. Nesse caso, diferentemente da Sec. 4.2.1, a barreira se encontra na guia de saída (já que consideramos a guia 3 como guia de saída). Conforme discutido na Sec. 3.7, para estudar o caso em que a barreira encontra-se na guia de saída (guia 3), devemos modificar o termo R_{ij} relacionado ao canal de entrada. A primeira delas é substituir S em $R_{i_1 i_1}$ por $(1 - \gamma S S^t)^{-1} S$. Dessa forma, temos

$$R'_{i_1 i_1} = \sum_{a,b=1}^M Y_{i_1 a} \left[\frac{1}{1 - \gamma S S^t} S \right]_{ab} Y_{i_1 b}^*. \quad (4.106)$$

Esta modificação leva em conta os encontros que ocorrem na guia de entrada. Por isso apenas um termo R é modificado na integral.

A segunda modificação vem dentro da integral, que agora é

$$\langle g_{13} \rangle = \lim_{N \rightarrow 0} (1 - \gamma) \sum_{i,o=1}^{N_1, N_3} K_N [C_{i_1 i_2} C_{i_1 i_2}^*], \quad (4.107)$$

onde

$$K_N = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int e^{-\frac{1}{2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(M - \gamma^q N_3)}{q} \text{Tr}(SS^t)^q} R'_{i_1 i_1} R_{i_2 i_2} dS, \quad (4.108)$$

e a constante de normalização é idêntica à do caso anterior, dada pela Eq. (4.79).

Fazendo uma mudança de variáveis, utilizando a decomposição em valores singulares, $S = ODP$, como na seção anterior, ficamos com

$$K_N = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int e^{-\frac{1}{2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(M - \gamma^q N_3)}{q} \text{Tr} X^q} \mathcal{I}_1 \prod_{i=1}^N x_i^{-1/2} \Delta(\vec{x}) dX. \quad (4.109)$$

Antes de prosseguir, note que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \gamma SS^t} S &:= (1 - \gamma SS^t)^{-1} S \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\gamma SS^t)^k \right) S \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\gamma ODD^t O^t)^k \right) ODP \\ &= O \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\gamma X)^k \right) O^t ODP, \text{ pois } OO^t = I_N \end{aligned} \quad (4.110)$$

$$= O (1 - \gamma X)^{-1} DP. \quad (4.111)$$

As integrais sobre o grupo ortogonal são

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \sum_{\substack{a_1, a_2 \\ b_1, b_2=1}}^M Y_{i_1 a_1} Y_{i_1 b_1}^* Y_{i_2 a_2} Y_{i_2 b_2}^* \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2 \\ \beta_1, \beta_2, r}} D_{\alpha_1 \alpha_2} D_{\beta_1 \beta_2} [(1 - \gamma X)^{-1}]_{r \alpha_1} \cdot \\ &\cdot \int O_{a_1 r} O_{a_2 \beta_1} dO \int P_{\alpha_2 b_1} P_{\beta_2 b_2} DP. \end{aligned} \quad (4.112)$$

As médias sobre o grupo Ortogonal são dadas pela Eq. (2.77) e, como D é diagonal,

ficamos com

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= \sum_{\substack{a_1, a_2 \\ b_1, b_2=1}}^M Y_{i_1 a_1} Y_{i_1 b_1}^* Y_{i_2 a_2} Y_{i_2 b_2}^* \sum_{\alpha, \beta, r} d_\alpha d_\beta [(1 - \gamma X)^{-1}]_{r\alpha} \frac{\delta_{a_1 a_2} \delta_{r\beta} \delta_{\alpha\beta} \delta_{b_1 b_2}}{N} \\
&= \sum_{a, b=1}^M Y_{i_1 a} Y_{i_1 b}^* Y_{i_2 a} Y_{i_2 b}^* \sum_{\alpha} \frac{d_\alpha^2}{N^2} [(1 - \gamma X)^{-1}]_{\alpha\alpha} \\
&= \sum_{a, b=1}^M Y_{i_1 a} Y_{i_2 a}^t Y_{i_1 b}^* Y_{i_2 b}^{*t} \sum_{\alpha} \frac{1}{N^2} [X (1 - \gamma X)^{-1}]_{\alpha\alpha}, \text{ pois } X \text{ é diagonal} \\
&= C_{i_1 i_2} C_{i_1 i_2}^* \frac{1}{N^2} \text{Tr} \left(\frac{X}{1 - \gamma X} \right), \text{ pois } C = Y Y^t \\
&= C_{i_1 i_2} C_{i_1 i_2}^* \frac{1}{N^2} \text{Tr} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k X^{k+1} \right) \\
&= C_{i_1 i_2} C_{i_1 i_2}^* \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^k}{N^2} \text{Tr} (X^{k+1}). \tag{4.113}
\end{aligned}$$

Aqui, podemos realizar a coleta do coeficiente de $C_{i_1 i_2} C_{i_1 i_2}^*$, pois não há mais dependências ao longo da integral. Então,

$$K_N = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^k}{\mathcal{Z} N^2} \int e^{-\frac{1}{2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(M - \gamma^q N_3)}{q} \text{Tr} X^q} \text{Tr} (X^{k+1}) \prod_{i=1}^N x_i^{-1/2} \Delta(\vec{x}) dX. \tag{4.114}$$

Podemos expandir $\text{Tr} (X^{k+1}) = p_{(k+1)}(X)$ como combinação linear de polinômios zonais,

$$\text{Tr} (X^{k+1}) = \frac{2^{k+1} (k+1)!}{(2k+2)!} \sum_{\lambda \vdash k+1} d_{2\lambda} \omega_\lambda(k+1) Z_\lambda(X). \tag{4.115}$$

Porém $\omega_\lambda(k+1)$ só é diferente de zero se λ for um gancho duplo; nesse caso seu valor é $\frac{t_\lambda^{(2)}}{2^k k!}$. Assim como na Sec. 4.2.1, Eqs. (4.86) à (4.87),

$$e^{-\frac{1}{2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(M - \gamma^q N_3)}{q}} = \prod_{i=1}^N (1 - x_i)^{\frac{M}{2}} \sum_{\rho} \frac{1}{j_\rho} Z_\rho(\gamma I_{N_3}) Z_\rho(X). \tag{4.116}$$

Então,

$$K_N = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\lambda \vdash k+1} \sum_{\rho} \frac{2^{k+1} (k+1)!}{(2k+2)!} \frac{\gamma^{k+|\rho|}}{j_\rho} d_{2\lambda} \omega_\lambda(k+1) Z_\rho(N_3) \mathcal{I}_2, \tag{4.117}$$

onde

$$\mathcal{I}_2 = \frac{1}{\mathcal{Z} N^2} \int Z_\rho(X) Z_\lambda(X) \prod_{i=1}^N x_i^{-1/2} (1 - x_i)^{\frac{M}{2}} \Delta(X) dX. \tag{4.118}$$

Novamente, expandindo o produto de polinômios zonais, Eq. (2.43), ficamos com

$$\mathcal{I}_2 = \sum_{\mu} C_{\rho\lambda\mu}^{(2)} \frac{1}{\mathcal{Z} N^2} \int Z_\mu(X) \prod_{i=1}^N x_i^{-1/2} (1 - x_i)^{\frac{M}{2}} \Delta(X) dX, \tag{4.119}$$

onde $\mu \supseteq \rho$, $\mu \supseteq \lambda$ e $|\mu| = |\rho| + |\lambda|$.

Agora somos capazes de reconhecer a integral da Eq. (3.49). E, assim como fizemos para a Eq. (4.89), obtemos

$$\mathcal{I}_2 = \sum_{\mu} C_{\rho\lambda\mu}^{(2)} Q_{\mu}(M), \quad (4.120)$$

onde

$$Q_{\mu}(M) = \lim_{N \rightarrow 0} \left(\frac{2}{M - \gamma N_3} \right)^{-\frac{N^2}{2}} \left(\frac{[N]_{\mu}^{(2)}}{N} \right)^2 R_{\mu} \left(2, \frac{M}{2} + 1, N \right) = \frac{\left(t_{\mu}^{(2)} \right)^2}{[M+1]_{\mu}^{(2)}}. \quad (4.121)$$

Combinando as Eqs. (4.107), (4.117), (4.120) e (4.121) e lembrando que já realizamos a coleta do coeficiente de $C_{i_1 i_2} C_{i_1 i_2}^*$, obtemos

$$\langle g_{13} \rangle = (1 - \gamma) N_1 N_3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\lambda \vdash k+1} \sum_{\rho \mu} \frac{d_{2\lambda} \omega_{\lambda}(k+1)}{(2k+1)!!} \frac{\gamma^{k+|\rho|}}{j_{\rho}} Z_{\rho}(N_3) C_{\rho\lambda\mu}^{(2)} \frac{\left(t_{\mu}^{(2)} \right)^2}{[M+1]_{\mu}^{(2)}}, \quad (4.122)$$

onde as somas sobre i e o na Eq. (4.107) totalizam trivialmente $N_1 N_3$. Porém

$$\frac{\omega_{\lambda}(k+1)}{(2k+1)!!} = \frac{2^{k+1} (k+1)! t_{\lambda}^{(2)}}{(2k+2)! 2^k k!} = \frac{t_{\lambda}^{(2)}}{(2k+1)!}. \quad (4.123)$$

Por fim, obtemos

$$\langle g_{13} \rangle = (1 - \gamma) N_1 N_3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\mu, \lambda} \left(\sum_{\rho} \frac{\gamma^{|\rho|+k}}{j_{\rho}} C_{\rho\lambda\mu}^{(2)} Z_{\rho}(1^{N_3}) \right) d_{2\lambda} \frac{t_{\lambda}^{(2)}}{(2k+1)!} \frac{\left(t_{\mu}^{(2)} \right)^2}{[M+1]_{\mu}^{(2)}}, \quad (4.124)$$

onde μ e λ são ganchos duplos, $\rho, \lambda \subset \mu$, $|\mu| = |\rho| + |\lambda|$ e $\lambda \vdash k+1$.

Por outro lado, utilizando a Eq. (2.43), temos

$$\sum_{\rho} \frac{C_{\rho\lambda\mu}^{(2)}}{j_{\rho}} Z_{\rho}(N_3) = j_{\mu} Z_{\mu \setminus \lambda}(N_3). \quad (4.125)$$

Dessa forma, obtemos

$$\langle g_{13} \rangle = (1 - \gamma) N_1 N_3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\mu, \lambda} j_{\mu} \gamma^{|\rho|+k} d_{2\lambda} Z_{\mu \setminus \lambda}(N_3) \frac{t_{\lambda}^{(2)}}{(2k+1)!} \frac{\left(t_{\mu}^{(2)} \right)^2}{[M+1]_{\mu}^{(2)}}. \quad (4.126)$$

Diferentemente do caso anterior, não fomos capazes de determinar explicitamente os coeficientes de Littlewood-Richardson.

Os primeiros termos da expansão são

$$\langle g_{13} \rangle = \frac{N_1 N_3}{M+1} - \frac{N_1 N_3 (M - N_3 + 1)}{M(M+3)} \gamma - \frac{N_1 N_3 (M - N_3 + 1) (N_3 M + M + N_3 - 3)}{M(M-1)(M+3)(M+5)} \gamma^2 + \mathcal{O}(\gamma^3). \quad (4.127)$$

Em particular, notamos que se $\gamma = 0$, recuperamos o resultado elementar para a condutância entre as guias 1 e 3. Comparando as Eqs. (4.96) e (4.127), percebemos que a primeira é uma função crescente em γ (como evidenciado pelas Figs. 10 e 11) ao passo que a segunda expressão é decrescente em γ . Nos dois casos, à medida que γ cresce, temos uma barreira mais opaca. Porém, no primeiro caso, uma barreira mais opaca leva a um fluxo maior entre as guias de entrada e saída (respectivamente, guias 1 e 2), pois o fluxo é dificultado na guia 3; e, no segundo caso, onde estudamos o transporte entre as guias 1 e 3 (respectivamente, guias de entrada e saída), temos um fluxo menor, já que a saída das partículas é dificultada pela barreira, pois, nessa perspectiva, a barreira encontra-se na guia de saída.

5 Momentos de Transporte: Duas Guias

Neste capítulo, generalizamos os resultados obtidos no capítulo anterior. Na primeira e segunda seções, tratamos uma cavidade com duas guias acopladas a ela através de barreiras; a cavidade é esquematizada na Fig.15. Obtemos a condutância na ausência e na presença de Simetria de Reversão Temporal (primeira e segunda seções, respectivamente).

Na ausência de Simetria de Reversão Temporal e com guias acopladas à cavidade por barreiras idênticas, obtemos uma expressão fechada para a condutância. A expressão é composta por um termo linear e uma correção exponencial. Além disso, obtemos momentos de ordem arbitrária através de uma expressão para a média da função de Schur.

Além disso, trazemos uma generalização da Eq. (2.54) para um número arbitrário de polinômios de Jack. Com isso, procedemos o cálculo da condutância com ausência e presença de Simetria de Reversão Temporal para uma cavidade com um número arbitrário de guias. A única condição é que a probabilidade de reflexão é a mesma dentre os canais de cada guia.

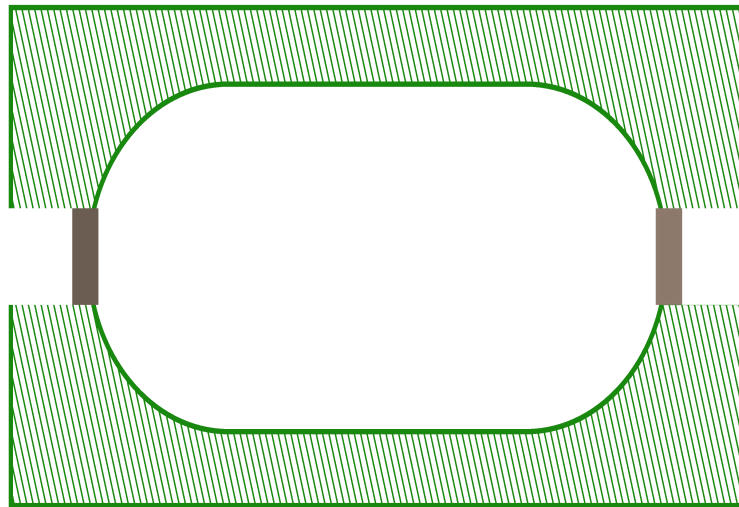


Figura 15 – Esquema de uma cavidade mesoscópica acoplada ao ambiente através de duas guias. Cada guia, por sua vez, é acoplada à cavidade através de barreiras de tunelamento.

5.1 Duas Guias com Barreiras e com Ausência de Simetria de Reversão Temporal

Nesta seção, vamos considerar uma cavidade com duas guias. Cada uma delas acoplada à cavidade através de barreiras. Cada barreira possui probabilidade de reflexão

constante ao longo dos respectivos canais, ou seja, à cada canal que compõe a guia i está associada uma mesma probabilidade de reflexão γ_i .

Começamos introduzindo a notação,

$$\tilde{N}_i = (1 - \gamma_i)N_i, \quad (5.1)$$

da mesma forma, temos que

$$\tilde{M} = \sum_i \tilde{N}_i. \quad (5.2)$$

Seguindo os moldes da Eq. (3.24), introduzimos a integral que nos permite obter a condutância média através da cavidade

$$\langle g_{12} \rangle = \lim_{N \rightarrow 0} (1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2) \frac{1}{Z} \int \mathcal{I}(Z, Z^\dagger) \mathcal{C}(Z, Z^\dagger) dZ, \quad (5.3)$$

onde o termo que replica as regras diagramáticas no interior da cavidade é dado por

$$\mathcal{I}(Z, Z^\dagger) = e^{-\sum_{q=1}^{\infty} \frac{M - \gamma_1^q N_1 - \gamma_2^q N_2}{q} \text{Tr}(ZZ^\dagger)^q}, \quad (5.4)$$

ao passo que o termo que introduz as regras diagramáticas devidas às barreiras de tunelamento é dado por

$$\mathcal{C}(Z, Z^\dagger) = \sum_{i,o=1}^{N_1, N_2} \left(\frac{1}{1 - \gamma_1 Z Z^\dagger} Z \right)_{io} \left(Z^\dagger \frac{1}{1 - \gamma_2 Z Z^\dagger} \right)_{oi}. \quad (5.5)$$

Note que o termo $\mathcal{C}(Z, Z^\dagger)$ é modificado pela barreira de tunelamento tanto no termo relacionado à guia de entrada quanto no termo relacionado à guia de saída.

Começamos implementando a decomposição em valores singulares sobre Z , $Z = UDV$, com U e V pertencentes ao grupo Unitário. A parte angular da integral corresponde a

$$A(X) = \sum_{i,o=1}^{N_1, N_2} \int \mathcal{C}(Z, Z^\dagger) dU dV. \quad (5.6)$$

Aplicando a mudança de variáveis, ficamos com

$$\begin{aligned} A(X) &= \sum_{i,o=1}^{N_1, N_2} \int \left[UD \left(\frac{1}{1 - \gamma_1 X} \right) V \right]_{io} \left[V^\dagger \left(\frac{1}{1 - \gamma_2 X} \right) D^* U^\dagger \right]_{oi} dU dV \\ &= \sum_{i,o=1}^{N_1, N_2} \int \left[UD \left(\frac{1}{1 - \gamma_1 X} \right) V \right]_{io} \left[U^* D^* \left(\frac{1}{1 - \gamma_2 X} \right) V^* \right]_{oi} dU dV \\ &= \sum_{i,o=1}^{N_1, N_2} \sum_{a,b=1}^N D_a \left(\frac{1}{1 - \gamma_1 X} \right)_a \left(\frac{1}{1 - \gamma_2 X} \right)_b D_b^* \int U_{ia} U_{ib}^* dU \int V_{ao} V_{bo}^* dV. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Devido à Eq. (2.70), as integrais sobre o grupo Unitário resultam em

$$\begin{aligned}
A(X) &= \sum_{i,o=1}^{N_1, N_2} \sum_{a,b=1}^N D_a \left(\frac{1}{1 - \gamma_1 X} \right)_a \left(\frac{1}{1 - \gamma_2 X} \right)_b D_b^* \frac{\delta_{ab}^2}{N^2} \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{i,o=1}^{N_1, N_2} \sum_{a=1}^N D_a \left(\frac{1}{1 - \gamma_1 X} \right)_a \left(\frac{1}{1 - \gamma_2 X} \right)_a D_a^* \\
&= \frac{N_1 N_2}{N^2} \text{Tr} \left(\frac{X}{(1 - \gamma_1 X)(1 - \gamma_2 X)} \right). \tag{5.8}
\end{aligned}$$

Podemos expressar $A(D)$ em função de traços de potências expandindo o produto. Combinando com o fator $(1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2)$ da Eq. (5.3) temos que

$$A(X) = \tilde{N}_1 \tilde{N}_2 \sum_{n,m \geq 0} \frac{\gamma_1^n \gamma_2^m}{N^2} \text{Tr}(X^{n+m+1}). \tag{5.9}$$

Aplicando a decomposição em valores singulares para o termo interior, $\mathcal{I}(Z, Z^\dagger)$, ficamos com

$$\mathcal{I}(Z, Z^\dagger) = e^{-M \text{Tr} \left(\sum_q \frac{X^q}{q} \right)} \cdot e^{N_1 \text{Tr} \left(\sum_q \frac{X^q}{q} \right)} \cdot e^{N_2 \text{Tr} \left(\sum_q \frac{X^q}{q} \right)}. \tag{5.10}$$

Usando as relações na Eq. (4.5), obtemos

$$\mathcal{I}(Z, Z^\dagger) = \prod_{i=1}^N (1 - x_i)^M \cdot \det(1 - \gamma_1 X)^{-N_1} \cdot \det(1 - \gamma_2 X)^{-N_2}. \tag{5.11}$$

Os determinantes podem ser escritos como uma soma de funções de Schur

$$\det(1 - \gamma_r X)^{-N_r} = \sum_{\lambda_r} s_{\lambda_r}(X) s_{\lambda_r}(\hat{\gamma}_r), \tag{5.12}$$

onde γ_r representa uma lista com N entradas iguais a γ_r . Temos, portanto, um produto de duas funções de Schur na variável X . Podemos contraí-los num único polinômio. Fazemos isso utilizando os coeficientes de Littlewood-Richardson, Eq. (2.47),

$$s_{\lambda_1}(X) s_{\lambda_2}(X) = \sum_{\nu} C_{\lambda_1 \lambda_2 \nu} s_{\nu}(X). \tag{5.13}$$

Dessa forma, obtemos até aqui

$$\langle g_{12} \rangle = \tilde{N}_1 \tilde{N}_2 \sum_{n,m \geq 0} \gamma_1^n \gamma_2^m \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \nu} C_{\lambda_1 \lambda_2 \nu} \mathcal{I}_1, \tag{5.14}$$

onde

$$\mathcal{I}_1 = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{1}{N^2 \mathcal{Z}} \int s_{\nu}(X) \text{Tr}(X^{n+m+1}) \prod_{i=1}^N (1 - x_i)^M |\Delta(X)|^2 dX. \tag{5.15}$$

Podemos também expressar o traço em função de funções de Schur,

$$\text{Tr}(T^{n+m+1}) = \sum_{\mu=n+m+1} \chi_{\mu}(n+m+1) s_{\mu}(X). \tag{5.16}$$

Onde o caractere $\chi_\mu(n+m+1)$ tem valor conhecido: vale zero quando μ não for um gancho e vale $(-1)^k$ se μ é um gancho da forma $\mu = [n+m+1-k, 1^k]$, para $0 \leq k \leq n+m$; com isso, também, podemos escrever $(-1)^k = (-1)^{\ell(\mu)-1}$. Novamente, temos um produto de funções de Schur. E o contraímos num único polinômio utilizando os coeficientes de Littlewood-Richardson, temos

$$\mathcal{I}_1 = \sum_{\theta} C_{\mu\nu\theta} \lim_{N \rightarrow 0} \frac{1}{N^2 \mathcal{Z}} \int s_{\theta}(X) \prod_{i=1}^N (1-x_i)^M |\Delta(X)|^2 dX. \quad (5.17)$$

Com isso podemos resolver a integral utilizando o resultado da Eq. (2.58), adicionando um fator $\frac{d_{\theta}}{|\theta|!}$, devido à proporcionalidade entre funções de Schur e polinômios de Jack, Eq. (2.37). Observando que $b = M+1$ e $\alpha = 1$, obtemos

$$\mathcal{I}_1 = \sum_{\theta} C_{\mu\nu\theta} \frac{d_{\theta}}{|\theta|!} \left(\lim_{N \rightarrow 0} \frac{1}{N^2} \frac{\tilde{M}^{N^2} \left([N]_{\mu}^{(1)} \right)^2}{[2N+M]_{\mu}^{(1)}} R_{\mu}(1, M+1, N) \right). \quad (5.18)$$

Para o limite, temos o resultado já discutido, Eq. (4.25)

$$\mathcal{I}_1 = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{\tilde{M}^{N^2} R_{\theta}(1, M+1, N) \left([N]_{\theta}^{(1)} \right)^2}{[2N+M]_{\theta}^{(1)} N^2} = \frac{t_{\theta}^{(1)^2}}{[M]_{\theta}^{(1)}} \delta_{D_1(\theta), 1}, \quad (5.19)$$

onde, como nos casos anteriores, θ deve ser um gancho. Além disso, podemos combinar as funções de Schur com um argumento concatenado, como na Eq. (2.54). Enfim, obtemos

$$\langle g_{12} \rangle = \tilde{N}_1 \tilde{N}_2 \sum_{n, m \geq 0} \sum_{\substack{\nu, \theta \\ D_1(\theta)=1}} \sum_{\mu \vdash n+m+1} (-1)^{\ell(\mu)-1} \gamma_1^n \gamma_2^m \frac{d_{\theta}}{|\theta|!} C_{\nu\mu\theta} s_{\nu}(\hat{\gamma}_1; \hat{\gamma}_2) \frac{t_{\theta}^{(1)^2}}{[M]_{\theta}^{(1)}}. \quad (5.20)$$

Podemos utilizar ainda a definição da função de Schur oblíqua, Eq. (2.51), e obter

$$\langle g_{12} \rangle = \tilde{N}_1 \tilde{N}_2 \sum_{n, m \geq 0} \sum_{\substack{\theta \supseteq \mu \\ D_1(\theta)=1}} \sum_{\mu \vdash n+m+1} (-1)^{\ell(\mu)-1} \gamma_1^n \gamma_2^m s_{\theta \setminus \mu}(\hat{\gamma}_1; \hat{\gamma}_2) \frac{d_{\theta}}{|\theta|!} \frac{t_{\theta}^{(1)^2}}{[M]_{\theta}^{(1)}}. \quad (5.21)$$

5.1.1 Expressão Explícita para a Condutância

Já que θ e μ são ganchos, o diagrama oblíquo $\theta \setminus \mu$ é composto por duas faixas, uma horizontal e uma vertical. Aproveitando-se desse fato, podemos escolher uma parametrização para θ e μ que satisfaçam $\mu \subset \theta$, temos $\theta = [p+n+m+1-k, 1^{k+q}]$ e $\mu = [n+m+1-k, 1^k]$. Com isso $\theta \vdash p+q+n+m+1$ e o diagrama oblíquo $\theta \setminus \mu$ é composto por uma faixa horizontal de comprimento p e uma faixa vertical de comprimento q . Para a função de Schur oblíqua, temos

$$s_{\theta \setminus \mu}(\hat{\gamma}_1; \hat{\gamma}_2) = s_{[p]}(\hat{\gamma}_1; \hat{\gamma}_2) s_{[1^q]}(\hat{\gamma}_1; \hat{\gamma}_2) = h_p(\hat{\gamma}_1; \hat{\gamma}_2) e_q(\hat{\gamma}_1; \hat{\gamma}_2), \quad (5.22)$$

onde h_p são polinômios completamente simétricos de grau p e e_q são polinômios elementares simétricos. Nesse caso particular, temos

$$h_p(\hat{\gamma}_1; \hat{\gamma}_2) = \sum_{i=0}^p \frac{(N_1)^{(i)} (N_2)^{(p-i)}}{i!(p-i)!} \gamma_1^i \gamma_2^{p-i} \quad \text{e} \quad e_q(\hat{\gamma}_1; \hat{\gamma}_2) = \sum_{l=0}^q \frac{(N_1)_{(l)} (N_2)_{(q-l)}}{l!(q-l)!} \gamma_1^l \gamma_2^{q-l}. \quad (5.23)$$

Além disso, com a parametrização de θ , obtemos

$$|\theta|! = (p + q + n + m + 1)!, \quad (5.24)$$

$$\left(t_\theta^{(1)}\right)^2 = (q + k)! (p + n + m - k)!^2, \quad (5.25)$$

$$[M]_\theta^{(1)} = M(M+1)^{(p+n+m-l)} (M-1)_{(q+l)} = (M-k-q)^{(n+p+q)} \quad \text{e} \quad (5.26)$$

$$d_\theta = \frac{(p + q + n + m + 1)!}{(q + l)! (p + n + m - k)!}. \quad (5.27)$$

Então,

$$\frac{d_\theta \left(t_\theta^{(1)}\right)^2}{|\theta|! [M]_\theta^{(1)}} = \frac{(q + k)! (p + n + m - k)!}{(p + q + n + m + 1) (M - k - q)^{(n+p+q)}}. \quad (5.28)$$

Combinando todos os termos, obtemos

$$\langle g_{12} \rangle = \tilde{N}_1 \tilde{N}_2 \sum_{n,m,p,q \geq 0} \sum_{k=0}^{n+m} \sum_{i=0}^p \sum_{l=0}^q G_{p,q,i,l}^{n,m,k} \gamma_1^{n+i+l} \gamma_2^{m+p+q-i-l}, \quad (5.29)$$

onde o coeficiente da expansão é uma função das quantidades de canais nas guias

$$G_{p,q,i,l}^{n,m,k} = (-1)^k \frac{(q + k)! (p + n + m - k)! (N_1)^{(i)} (N_2)^{(p-i)} (N_1)_{(l)} (N_2)_{(q-l)}}{i!(p-i)! l!(q-l)! (p + q + n + m + 1) (M - k - q)^{(n+p+q)}}. \quad (5.30)$$

As primeiras ordens nas probabilidades de reflexão são

$$\begin{aligned} \frac{g_{12}}{N_1 N_2} &\sim \frac{1}{M} - \frac{(M - N_1)}{M^2 - 1} \gamma_1 - \frac{(M - N_2)}{M^2 - 1} \gamma_2 - \frac{(M N_1 - 2)(M - N_1)}{(M^2 - 4)(M^2 - 1)} \gamma_1^2 \\ &+ \frac{M(M^2 - M N_1 - M N_2 + 2 N_1 N_2 - 2)}{(M^2 - 4)(M^2 - 1)} \gamma_1 \gamma_2 - \frac{(M N_2 - 2)(M - N_2)}{(M^2 - 4)(M^2 - 1)} \gamma_2^2. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Nas figuras a seguir utilizamos a Eq. (5.29) para graficar diversos cenários da condutância. Em todos os casos, como esperado, a condutância é uma função decrescente em relação à probabilidade de reflexão. Além disso, quando a probabilidade de reflexão vale 1, a condutância é nula. Isto é equivalente a uma guia fechada.

Na Fig. 16 à esquerda, temos um regime extremamente quântico em que há apenas um canal em cada guia. Como esperado, podemos observar que para um mesmo valor de γ_1 , valores mais altos de γ_2 resultam numa condutância menor. Isto quer dizer que para barreiras mais opacas (maior probabilidade de reflexão) temos mais dificuldade de transmissão (condutância menor). À direita, pode ser observado que ao fixarmos a

probabilidade de reflexão da barreira na segunda guia, a condutância aumenta à medida que o número de canais da guia de entrada cresce.

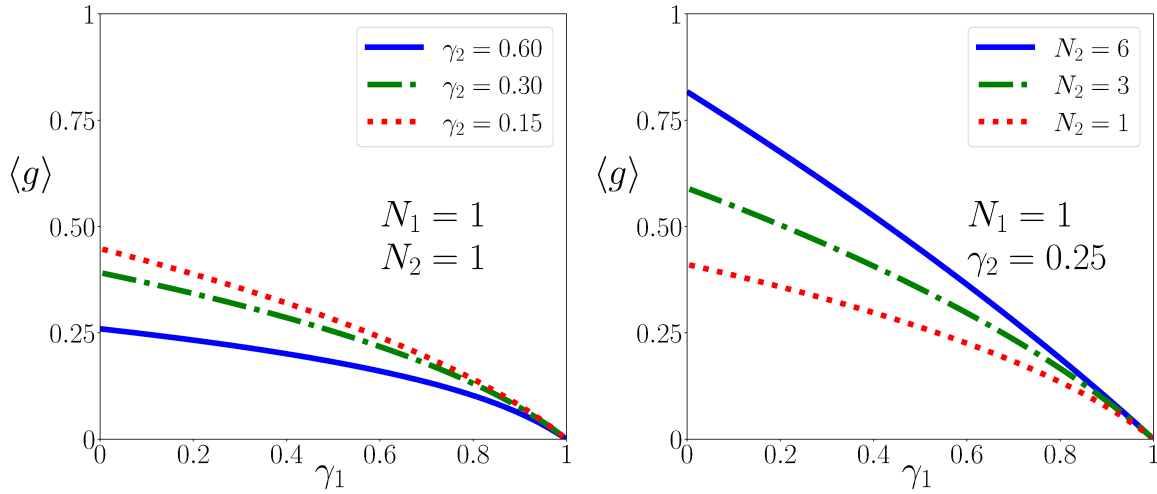


Figura 16 – À esquerda, fixamos $N_1 = 1$ e $N_2 = 1$, plotando diferentes valores fixados de γ_2 em função de γ_1 . À direita, fixamos $N_1 = 1$ e $\gamma_2 = 0.25$, plotando diferentes valores fixados de N_2 em função de γ_1 .

Já na Fig. 17 temos duas situações complementares: fixamos o número de canais nas guias, $N_1 = 10$ e $N_2 = 1$, e à esquerda, fixamos γ_2 e γ_1 percorre o intervalo de 0 a 1; ao passo que à direita, γ_1 é fixa e γ_2 é livre. À esquerda, podemos observar que o alto número de canais ($N_1 = 10$) associado à guia cuja probabilidade de reflexão é graficada aproxima-se do comportamento linear previsto pela Teoria de Matrizes Aleatórias. à direita, a guia associada à probabilidade de reflexão graficada encontra-se num regime fortemente quântico ($N_2 = 1$), divergindo, portanto, do comportamento linear.

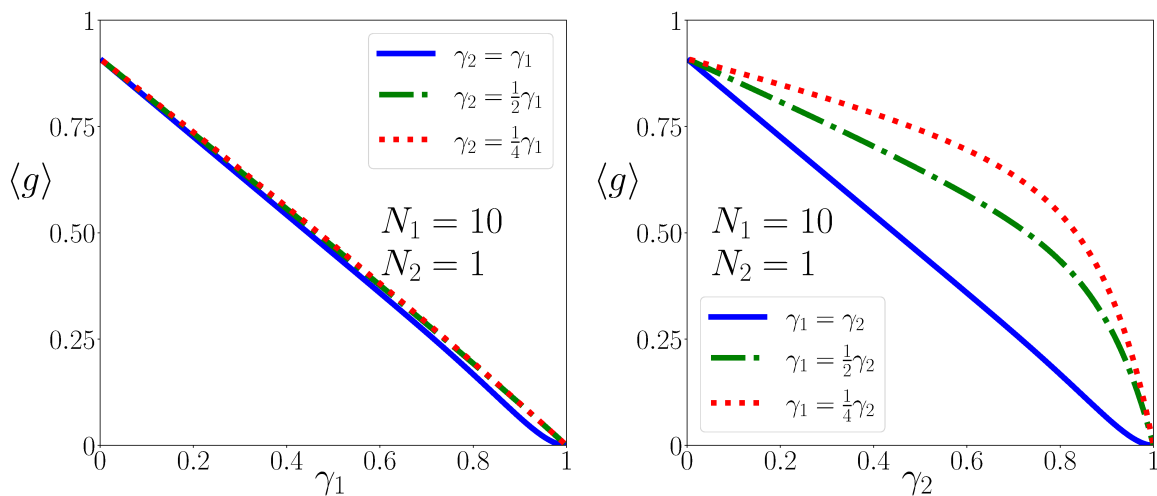


Figura 17 – Em ambas as figuras, temos $N_1 = 10$ e $N_2 = 1$. À esquerda, variamos γ_1 , e γ_2 obedece a proporções fixadas. À direita, em contraste, variamos γ_2 , e γ_1 obedece a proporções fixadas.

É interessante notar o comportamento destoante da condutância comparando as Figs. 11 e 10 com as Figs. 16 e 17. Nas Figs. 11 e 10 a condutância cresce à medida que a probabilidade de reflexão na terceira guia aumenta. Isto acontece porque a guia torna-se mais opaca, levando a um fluxo maior entre as guias de entrada e saída. Entretanto, nas Figs. 16 e 17 à medida que a probabilidade de reflexão na guia de entrada (ou de saída) aumenta, a entrada (e saída) das partículas na cavidade é dificultada, levando a um comportamento decrescente da condutância.

5.1.1.1 Expressão Fechada para a Condutância quando $\gamma_1 = \gamma_2$

Considerando $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, a Eq. (5.29) torna-se enormemente mais simples. Primeiramente, temos

$$\sum_{i=0}^p \frac{(N_1)^{(i)} (N_2)^{(p-i)}}{i!(p-i)!} = \frac{(M)^{(p)}}{p!} \quad \text{e} \quad \sum_{l=0}^q \frac{(N_1)_{(l)} (N_2)_{(q-l)}}{l!(q-l)!} = \frac{(M)_{(q)}}{q!}. \quad (5.32)$$

Com isso, obtemos

$$\langle g_{12} \rangle = \tilde{N}_1 \tilde{N}_2 \sum_{n,m,p,q \geq 0} \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k \frac{(q+k)! (p+n+m-k)! (M)^{(p)} (M)_{(q)}}{p!q! (p+q+n+m+1) (M-k-q)^{(n+p+q)}} \gamma^{n+m+p+q}. \quad (5.33)$$

E, se substituirmos $n+m$ por $n-1$, obtemos

$$\langle g_{12} \rangle = \tilde{N}_1 \tilde{N}_2 \sum_{n,p,q \geq 0} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n+1) \frac{(q+k)! (p+n-k-1)! (M)^{(p)} (M)_{(q)}}{p!q! (p+q+n) (M-k-q)^{(n+p+q)}} \gamma^{n+p+q}, \quad (5.34)$$

devido à multiplicidade há a necessidade de um fator $n+1$. Substituindo $l = n+p+q$ e $q = l-n-p$ e trocando a ordem das somas sobre n e k , podemos usar a seguinte identidade

$$\sum_{n=k}^{l-p} \frac{(-1)^n (n+1) (M)_{(l-n-p)}}{(l-n-p)!} = (-1)^k \frac{(Mk + M - l + p - 1)}{(l-p-k)!} \frac{(M-2)!}{(M+k+p-l-1)!}. \quad (5.35)$$

Com isso, obtemos

$$\langle g \rangle = \tilde{N}_1 \tilde{N}_2 (M-2)! \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\gamma^l}{l+1} \sum_{r=0}^l \sum_{k=0}^{l-r} \frac{(k+r)!}{r!} \frac{(M)^{(r)}}{(M+k+r)!} (Mk + M - l + r - 1). \quad (5.36)$$

As somas em r e k podem ser computadas. O resultado é

$$\langle g \rangle = \tilde{N}_1 \tilde{N}_2 \frac{(M-2)!}{(M+1)!} \sum_{l=0}^{\infty} (M^2 - l - 1) \gamma^l. \quad (5.37)$$

Obtemos, portanto, uma série geométrica que pode ser simplificada, obtendo

$$\langle g \rangle = \frac{N_1 N_2}{M} - \frac{N_1 N_2 M}{M^2 - 1} \gamma. \quad (5.38)$$

Entretanto, através da investigação de casos particulares, percebemos que um poderia haver um termo faltando. Para obtê-lo, efetuamos uma regularização do denominador

da Eq 5.36, substituindo $(M+k+r)!$ por $(M+\varepsilon+k+r)!$. Isto produz um termo equivalente a

$$\frac{2N_1N_2\varepsilon}{(M^2-1)(M+\varepsilon+s)(M+\varepsilon-s)}\gamma^s, \quad (5.39)$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e $s > 1$. Se $s \neq M$, o termo desaparece; entretanto, se $s = M$, temos $M+\varepsilon-s = \varepsilon$ e quando $\varepsilon \rightarrow 0$ obtemos

$$\frac{N_1N_2}{M(M^2-1)}\gamma^M. \quad (5.40)$$

Então, adicionando a correção da condutância devida à regularização, obtemos

$$\langle g \rangle = \frac{N_1N_2}{M} - \frac{N_1N_2M}{M^2-1}\gamma + \frac{N_1N_2}{M(M^2-1)}\gamma^M. \quad (5.41)$$

Esta expressão para a condutância concorda com o resultado obtido por [Brouwer e Beenakker](#) para a condutância considerando uma cavidade com apenas um único canal de entrada e saída ($N_1 = N_2 = 1$) [89]. Nesse caso, temos

$$\langle g \rangle = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\gamma + \frac{1}{6}\gamma^2. \quad (5.42)$$

Além disso, coincide exatamente com o resultado obtido por [Macêdo](#), utilizando a Teoria de Matrizes Aleatórias [48].

5.2 Duas Guias com Barreiras e Presença de Simetria de Reversão Temporal

Nesse caso, temos modificações nos dois termos

$$R_{ij}^{(r)} = \sum_{a,b=1}^M Y_{ia} \left[\frac{1}{1-\gamma_r S S^t} S \right]_{ab} Y_{jb}^*. \quad (5.43)$$

Para calcular a condutância, devemos resolver a seguinte integral matricial

$$\langle g_{12} \rangle = (1-\gamma_1)(1-\gamma_2) \lim_{N \rightarrow 0} \sum_{\vec{i}, \vec{o}=1}^{N_1, N_2} K_N [C_{i_1 i_2} C_{i_1 i_2}^*], \quad (5.44)$$

com

$$K_N = \int e^{-\frac{1}{2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(M - \gamma_1^q N_1 - \gamma_2^q N_2)}{q} \text{Tr}(S S^t)^q} R_{i_1 i_1}^{(1)} R_{i_2 i_2}^{(2)} dS. \quad (5.45)$$

Começamos implementando a decomposição em valores singulares sobre Z , $Z = ODP$, com O e P pertencentes ao grupo $\mathcal{O}(N)$. A parte angular da integral corresponde a

$$\begin{aligned} A(D) &= \int R_{i_1 i_1}^{(1)} R_{i_2 i_2}^{(2)} dO dP \\ &= \sum_{a_1, a_2, b_1, b_2=1}^M Y_{i_1 a_1} Y_{i_2 a_2} Y_{i_1 b_1}^* Y_{i_2 b_2}^* B(D), \end{aligned} \quad (5.46)$$

onde

$$\begin{aligned} B(D) &= \int \left[\frac{1}{1 - \gamma_1 S S^t} \right]_{a_1 b_1} \left[\frac{1}{1 - \gamma_2 S S^t} \right]_{a_2 b_2} dO dP \\ &= \sum_{c,d=1}^N D_c D_d \left(\frac{1}{1 - \gamma_1 X} \right)_c \left(\frac{1}{1 - \gamma_2 X} \right)_d \int O_{a_1 c} O_{a_2 d} dO \int P_{c b_1} P_{d b_2} dP. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Devido à Eq. (2.77), as integrais sobre o grupo Ortogonal resultam em

$$\begin{aligned} B(D) &= \sum_{c,d=1}^N D_c D_d^* \left(\frac{1}{1 - \gamma_1 X} \right)_c \left(\frac{1}{1 - \gamma_2 X} \right)_d \frac{\delta_{a_1 a_2} \delta_{b_1 b_2}}{N} \frac{\delta_{b_1 b_2} \delta_{b_2 b_1}}{N} \\ &= \frac{\delta_{a_1 a_2} \delta_{b_1 b_2}}{N^2} \sum_{c=1}^N D_c D_c^* \left(\frac{1}{1 - \gamma_1 X} \right)_c \left(\frac{1}{1 - \gamma_2 X} \right)_c \\ &= \frac{\delta_{a_1 a_2} \delta_{b_1 b_2}}{N^2} \text{Tr} \left(\frac{X}{(1 - \gamma_1 X)(1 - \gamma_2 X)} \right). \end{aligned} \quad (5.48)$$

Para $A(D)$, obtemos

$$\begin{aligned} A(D) &= \sum_{a_1, a_2, b_1, b_2=1}^M Y_{i_1 a_1} Y_{i_2 a_2} Y_{i_1 b_1}^* Y_{i_2 b_2}^* \frac{\delta_{a_1 a_2} \delta_{b_1 b_2}}{N^2} \text{Tr} \left(\frac{X}{(1 - \gamma_1 X)(1 - \gamma_2 X)} \right) \\ &= \sum_{a, b=1}^M Y_{i_1 a} Y_{i_2 a} Y_{i_1 b}^* Y_{i_2 b}^* \frac{1}{N^2} \text{Tr} \left(\frac{X}{(1 - \gamma_1 X)(1 - \gamma_2 X)} \right) \\ &= \frac{1}{N^2} \text{Tr} \left(\frac{X}{(1 - \gamma_1 X)(1 - \gamma_2 X)} \right) C_{i_1 i_2} C_{i_1 i_2}^*. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Dessa forma, podemos, trivialmente, coletar o coeficiente de $C_{i_1 i_2} C_{i_1 i_2}^*$ e simplificar o traço utilizando potências das probabilidades de reflexão:

$$A(D) = \sum_{n, m \geq 0} \frac{\gamma_1^n \gamma_2^m}{N^2} \text{Tr} (X^{n+m+1}). \quad (5.50)$$

Para a exponencial no integrando

$$e^{-\frac{M}{2} \text{Tr} \left(\sum_q \frac{T^q}{q} \right)} \cdot e^{-\frac{N_1}{2} \text{Tr} \left(\sum_q \frac{T^q}{q} \right)} \cdot e^{-\frac{N_2}{2} \text{Tr} \left(\sum_q \frac{T^q}{q} \right)}. \quad (5.51)$$

Usando $e^{\text{Tr}(A)} = \det A$ e a série de Taylor do logaritmo, $\ln(1-x) = -\sum_q \frac{x^q}{q}$, obtemos

$$\prod_{i=1}^N (1-x_i)^{\frac{M}{2}} \cdot \det(1-\gamma_1 X)^{-\frac{N_1}{2}} \cdot \det(1-\gamma_2 X)^{-\frac{N_2}{2}}. \quad (5.52)$$

Os determinantes podem ser escritos como uma soma de polinômios zonais

$$\det(1-\gamma_r X)^{-\frac{N_r}{2}} = \sum_{\lambda_r} \frac{1}{j_{\lambda_r}^{(2)}} Z_{\lambda_r}(X) Z_{\lambda_r}(\hat{\gamma}_r). \quad (5.53)$$

Temos, portanto, um produto de dois polinômios zonais na variável X . Podemos contraí-los num único polinômio. Fazemos isso utilizando os coeficientes de Littlewood-Richardson, Eq. (2.43), temos que

$$Z_{\lambda_1}(X)Z_{\lambda_2}(X) = \sum_{\nu} C_{\lambda_1\lambda_2\nu}^{(2)} Z_{\nu}(X). \quad (5.54)$$

Dessa forma, obtemos até aqui

$$\langle g_{12} \rangle = \tilde{N}_1 \tilde{N}_2 \sum_{n,m \geq 0} \gamma_1^n \gamma_2^m \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \nu} C_{\lambda_1\lambda_2\nu}^{(2)} \mathcal{I}_1, \quad (5.55)$$

onde

$$\mathcal{I}_1 = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{1}{N^2 \mathcal{Z}} \int Z_{\nu}(X) \text{Tr}(X^{n+m+1}) \prod_{i=1}^N x_i^{-\frac{1}{2}} (1-x_i)^{\frac{M}{2}} \Delta(X) dX. \quad (5.56)$$

Podemos também expressar o traço em função de polinômios zonais,

$$\text{Tr}(X^{n+m+1}) = \sum_{\mu \vdash n+m+1} \frac{2^{|\mu|} |\mu|!}{|2\mu|!} d_{2\mu} \omega_{\mu}(n+m+1) Z_{\mu}(X). \quad (5.57)$$

A função esférica zonal $\omega_{\mu}(n+m+1)$ só é diferente de zero quando μ é um gancho duplo. Nesse caso, temos $\omega_{\mu}(n+m+1) = \frac{t_{\mu}^{(2)}}{2^{n+m} (n+m)!}$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{2^{|\mu|} |\mu|!}{|2\mu|!} \omega_{\mu}(n+m+1) &= \frac{2^{n+m+1} (n+m+1)!}{(2n+2m+2)!} \frac{t_{\mu}^{(2)}}{2^{m+n} (n+m)!} \\ &= \frac{t_{\mu}^{(2)}}{(2n+2m+1)!}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Novamente, temos um produto de funções de polinômios zonais. E o contraímos num único polinômio utilizando os coeficientes de Littlewood-Richardson; temos

$$\mathcal{I}_1 = \sum_{\mu \vdash n+m+1} \frac{d_{2\mu} t_{\mu}^{(2)}}{(2n+2m+1)!} \sum_{\theta} C_{\mu\nu\theta}^{(2)} \lim_{N \rightarrow 0} \frac{1}{N^2 \mathcal{Z}} \int Z_{\theta}(X) \prod_{i=1}^N x_i^{-\frac{1}{2}} (1-x_i)^{\frac{M}{2}} \Delta(X) dX. \quad (5.59)$$

Agora, podemos resolver a integral, utilizando o resultado da Eq. (3.49), com $b = \frac{M}{2} + 1$ e $\alpha = 2$. Obtemos

$$\mathcal{I}_1 = \sum_{\mu \vdash n+m+1} \frac{d_{2\mu} t_{\mu}^{(2)}}{(2n+2m+1)!} \sum_{\theta} C_{\mu\nu\theta}^{(2)} \lim_{N \rightarrow 0} \frac{\tilde{M}^{\frac{N^2}{2}} \left([N]_{\mu}^{(2)}\right)^2 R_{\mu}\left(2, \frac{M}{2} + 1, N\right)}{\left[2N + M + 1\right]_{\mu}^{(1)} N^2}. \quad (5.60)$$

Aplicando o limite, assim como nos casos anteriores, obtemos

$$\mathcal{I}_1 = \sum_{\mu \vdash n+m+1} \frac{d_{2\mu} t_{\mu}^{(2)}}{(2n+2m+1)!} \sum_{\theta} C_{\mu\nu\theta}^{(2)} \frac{\left(t_{\theta}^{(2)}\right)^2}{\left[M + 1\right]_{\theta}^{(2)}} \delta_{D_2(\theta), 1}, \quad (5.61)$$

onde, como nos casos anteriores, θ deve ser um gancho duplo, ou seja, $D_2(\theta) = 1$. Além disso, podemos combinar os polinômios zonais com um argumento concatenado, como na Eq. (2.54). Enfim, obtemos

$$\langle g_{12} \rangle = \tilde{N}_1 \tilde{N}_2 \sum_{n,m \geq 0} \sum_{\substack{\nu, \theta \\ D_2(\theta)=1}} \sum_{\mu \vdash n+m+1} \gamma_1^n \gamma_2^m \frac{d_{2\mu} t_\mu^{(2)}}{(2n+2m+1)!} \frac{Z_\nu(\hat{\gamma}_1; \hat{\gamma}_2)}{j_\nu^{(2)}} C_{\nu\mu\theta}^{(2)} \frac{\left(t_\theta^{(2)}\right)^2}{[M+1]_\theta^{(2)}}. \quad (5.62)$$

Podemos introduzir o polinômio zonal oblíquo, eliminando a soma em ν , para obter

$$\langle g_{12} \rangle = \tilde{N}_1 \tilde{N}_2 \sum_{n,m \geq 0} \frac{\gamma_1^n \gamma_2^m}{(2n+2m+1)!} \sum_{\theta \supseteq \mu} \frac{1}{j_\theta^{(2)}} Z_{\theta\backslash\mu}(\hat{\gamma}_1; \hat{\gamma}_2) d_{2\mu} t_\mu^{(2)} \frac{\left(t_\theta^{(2)}\right)^2}{[M+1]_\theta^{(2)}}, \quad (5.63)$$

em que μ e θ são ganchos duplos e $\theta \supseteq \mu$.

Utilizando a expressão na Eq. (5.63), podemos explicitar as primeiras ordens nas probabilidades de reflexão

$$\begin{aligned} \frac{\langle g_{12} \rangle}{N_1 N_2} &\sim \frac{1}{M+1} - \frac{(M-N_1+1)}{M(M+3)} \gamma_1 - \frac{(M-N_2+1)}{M(M+3)} \gamma_2 \\ &- \frac{(MN_1+M+N_1-3)(M-N_1+1)}{M(M+5)(M-1)(M+3)} \gamma_1^2 \\ &+ \frac{(M+1)(M^2-MN_1-MN_2+2N_1N_2+3M-N_1-N_2-2)}{M(M+5)(M-1)(M+3)} \gamma_1 \gamma_2 \\ &- \frac{(MN_2+M+N_2-3)(M-N_2+1)}{M(M+5)(M-1)(M+3)} \gamma_2^2. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Assim, como fizemos para o caso com ausência de Simetria de Reversão Temporal, podemos utilizar a Eq. (5.63) e graficar a condutância em alguns cenários. Novamente, a condutância é uma função decrescente em relação à probabilidade de reflexão. Além disso, quando a probabilidade de reflexão vale 1, a condutância é nula. Isto é equivalente a uma guia fechada.

Na Fig. 18 à esquerda, temos um regime extremamente quântico em que há apenas um canal em cada guia. Como esperado, podemos observar que para um mesmo valor de γ_1 , valores mais altos de γ_2 resultam numa condutância menor. Isto quer dizer que para barreiras mais opacas (maior probabilidade de reflexão) temos mais dificuldade de transmissão (condutância menor). À direita, pode ser observado que ao fixarmos a probabilidade de reflexão da barreira na segunda guia, a condutância aumenta à medida que o número de canais da guia de entrada cresce, um análogo ao comportamento observando na Figs. 16 na ausência de Simetria de Reversão Temporal. Além disso quando comparamos as Figs. 18 e 16, vemos que a condutância é maior quando a Simetria de Reversão Temporal não está presente. Entretanto, à medida que M cresce, esta diferença tende a diminuir.

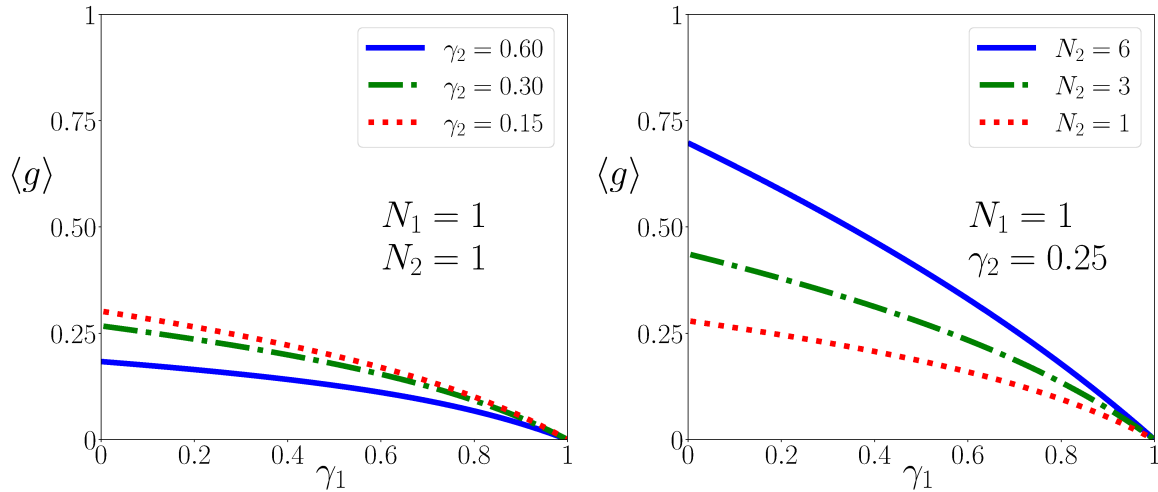


Figura 18 – À esquerda, fixamos $N_1 = 1$ e $N_2 = 1$, plotando diferentes valores fixados de γ_2 em função de γ_1 . À direita, fixamos $N_1 = 1$ e $\gamma_2 = 0.25$, plotando diferentes valores fixados de N_2 em função de γ_1 .

Já na Fig. 19 temos duas situações complementares: fixamos o número de canais nas guias, $N_1 = 10$ e $N_2 = 1$, e à esquerda, fixamos γ_2 e γ_1 percorre o intervalo de 0 a 1; ao passo que à direita, γ_1 é fixa e γ_2 é livre. À esquerda, podemos observar que o alto número de canais ($N_1 = 10$) associado à guia cuja probabilidade de reflexão é graficada aproxima-se do comportamento linear previsto pela Teoria de Matrizes Aleatórias. À direita, a guia associada à probabilidade de reflexão graficada encontra-se num regime fortemente quântico ($N_2 = 1$), divergindo, portanto, do comportamento linear. Novamente, um comportamento similar ao observado no caso com Simetria de Reversão Temporal quebrada, na Fig. 16.

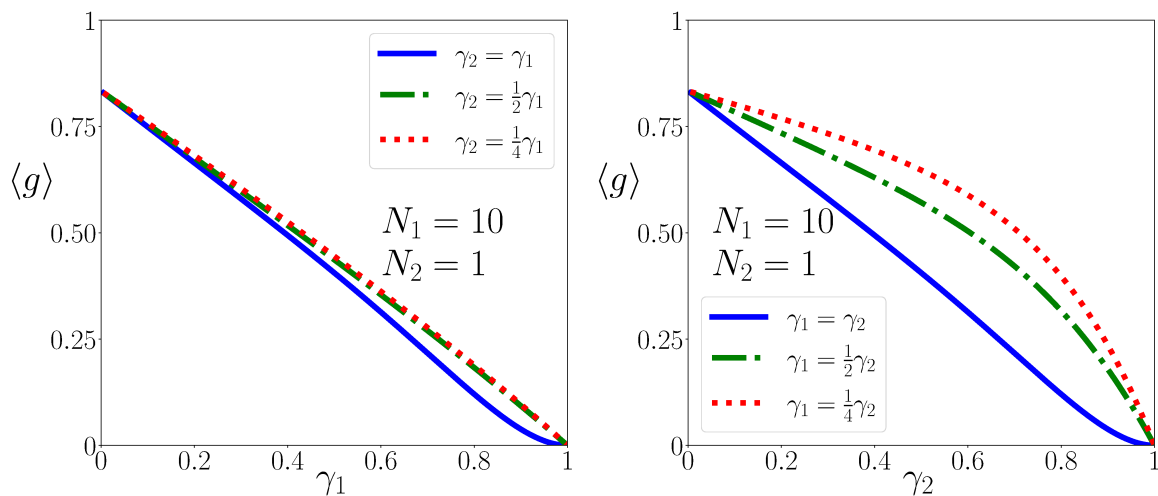


Figura 19 – Em ambas as figuras, temos $N_1 = 10$ e $N_2 = 1$. À esquerda, variamos γ_1 , e γ_2 obedece a proporções fixadas. À direita, em contrapartida, variamos γ_2 , e γ_1 obedece a proporções fixadas.

5.3 Generalização

Nesta seção, propomos uma generalização dos resultados obtidos até então para a condutância, tanto na presença quanto na ausência de Simetria de Reversão Temporal. A chave para essa generalização, é a combinação de polinômios de Jack e coeficientes de Littlewood-Richardson que é condensada num polinômio de Jack com argumento concatenado.

Podemos generalizar esta relação entre polinômios de Jack e, com isso, obter uma condutância para uma cavidade generalizada, ou seja, com um número arbitrário de guias e cada uma delas com barreiras de tunelamento, inclusive nas guias de entrada e saída.

5.3.1 Relação entre Polinômios de Jack

Queremos mostrar que

$$\prod_{i=1}^k \sum_{\mu_i} \frac{1}{j_{\mu_i}^{(\alpha)}} J_{\mu_i}^{(\alpha)}(\hat{\gamma}_i) J_{\mu_i}^{(\alpha)}(X) = \sum_{\nu} \frac{1}{j_{\nu}^{(\alpha)}} J_{\nu}^{(\alpha)}(\hat{\Gamma}_k) J_{\nu}^{(\alpha)}(X), \quad (5.65)$$

onde, no lado esquerdo da equação, temos um produto que combina polinômios de Jack avaliados nas probabilidades de reflexão e na matriz X ao passo que no lado direito, o produto é condensado num polinômio de Jack avaliado nas probabilidades de reflexão concatenadas e outro avaliado na matriz X . Na notação da equação acima, onde $\hat{\Gamma}_k := (\hat{\gamma}_1; \dots; \hat{\gamma}_k)$ é uma lista concatenada: com as N_1 primeiras entradas iguais a γ_1 , as próximas N_2 entradas iguais a γ_2 e assim por diante até as últimas N_k entradas iguais a γ_k .

Vamos utilizar indução sobre k . Para $k = 2$, temos

$$\sum_{\mu_1, \mu_2} \frac{1}{j_{\mu_1}^{(\alpha)} j_{\mu_2}^{(\alpha)}} J_{\mu_1}^{(\alpha)}(\hat{\gamma}_1) J_{\mu_2}^{(\alpha)}(\hat{\gamma}_2) J_{\mu_1}^{(\alpha)}(X) J_{\mu_2}^{(\alpha)}(X). \quad (5.66)$$

Utilizando a Eq. (2.43), o produto $J_{\mu_1}^{(\alpha)}(X) J_{\mu_2}^{(\alpha)}(X)$ é convertido numa soma sobre partições cujos pesos são os coeficientes de Littlewood-Richardson,

$$\sum_{\nu} \sum_{\mu_1, \mu_2} \frac{1}{j_{\mu_1}^{(\alpha)} j_{\mu_2}^{(\alpha)}} J_{\mu_1}^{(\alpha)}(\hat{\gamma}_1) J_{\mu_2}^{(\alpha)}(\hat{\gamma}_2) C_{\mu_1 \mu_2 \nu}^{(\alpha)} J_{\nu}^{(\alpha)}(X). \quad (5.67)$$

Se agregarmos os fatores que não dependem de ν ,

$$\sum_{\nu} \left(\sum_{\mu_1, \mu_2} \frac{1}{j_{\mu_1}^{(\alpha)} j_{\mu_2}^{(\alpha)}} C_{\mu_1 \mu_2 \nu}^{(\alpha)} J_{\mu_1}^{(\alpha)}(\hat{\gamma}_1) J_{\mu_2}^{(\alpha)}(\hat{\gamma}_2) \right) J_{\nu}^{(\alpha)}(X), \quad (5.68)$$

e utilizarmos a Eq. (2.54), obtemos

$$\sum_{\nu} \frac{1}{j_{\nu}^{(\alpha)}} J_{\nu}^{(\alpha)}(\hat{\Gamma}_2) J_{\nu}^{(\alpha)}(X). \quad (5.69)$$

Dessa forma, verificamos que a Eq. (5.65) é válida para $1 \leq k \leq 2$.

Agora, suponha que a Eq. (2.54) seja válida até k . Queremos mostrar que ela também é válida para $k + 1$. Logo, temos

$$\prod_{i=1}^{k+1} \sum_{\mu_i} \frac{1}{j_{\mu_i}^{(\alpha)}} J_{\mu_i}^{(\alpha)}(\hat{\gamma}_i) J_{\mu_i}^{(\alpha)}(X). \quad (5.70)$$

Agregando os fatores para $i = 1, \dots, k$, ficamos com

$$\left(\prod_{i=1}^k \sum_{\mu_i} \frac{1}{j_{\mu_i}^{(\alpha)}} J_{\mu_i}^{(\alpha)}(\hat{\gamma}_i) J_{\mu_i}^{(\alpha)}(T) \right) \sum_{\mu_{k+1}} \frac{1}{j_{\mu_{k+1}}^{(\alpha)}} J_{\mu_{k+1}}^{(\alpha)}(\hat{\gamma}_{k+1}) J_{\mu_{k+1}}^{(\alpha)}(X). \quad (5.71)$$

Utilizando a hipótese de indução, ficamos com

$$\left(\sum_{\nu} \frac{1}{j_{\nu}^{(\alpha)}} J_{\nu}^{(\alpha)}(\hat{\Gamma}_k) J_{\nu}^{(\alpha)}(X) \right) \sum_{\mu_{k+1}} \frac{1}{j_{\mu_{k+1}}^{(\alpha)}} J_{\mu_{k+1}}^{(\alpha)}(\hat{\gamma}_{k+1}) J_{\mu_{k+1}}^{(\alpha)}(X). \quad (5.72)$$

Através da Eq. (2.43), podemos combinar os polinômios de Jack em T ,

$$\sum_{\nu, \mu_{k+1}} \frac{1}{j_{\nu}^{(\alpha)} j_{\mu_{k+1}}^{(\alpha)}} J_{\nu}^{(\alpha)}(\hat{\Gamma}_k) J_{\mu_{k+1}}^{(\alpha)}(\hat{\gamma}_{k+1}) \sum_{\rho} C_{\nu \mu_{k+1} \rho}^{(\alpha)} J_{\rho}^{(\alpha)}(X). \quad (5.73)$$

Por fim, utilizamos novamente a Eq. (2.54) entre os polinômios de Jack,

$$\begin{aligned} & \sum_{\rho} \left(\sum_{\nu, \mu_{k+1}} \frac{1}{j_{\nu}^{(\alpha)} j_{\mu_{k+1}}^{(\alpha)}} C_{\nu \mu_{k+1} \rho}^{(\alpha)} J_{\nu}^{(\alpha)}(\hat{\Gamma}_k) J_{\mu_{k+1}}^{(\alpha)}(\hat{\gamma}_{k+1}) \right) J_{\rho}^{(\alpha)}(X) \\ &= \sum_{\rho} \frac{1}{j_{\rho}^{(\alpha)}} J_{\rho}^{(\alpha)}(\hat{\Gamma}_{k+1}) J_{\rho}^{(\alpha)}(X). \end{aligned} \quad (5.74)$$

Portanto, a Eq. (5.65) é válida para $k + 1$. Pelo Princípio da Indução, é válido para todo $k \geq 1$.

5.3.2 Condutância Generalizada na Ausência de Simetria de Reversão Temporal

Consideremos uma cavidade acoplada a k guias. A guia i possui N_i canais e cada canal possui coeficiente de reflexão γ_i . Note que o coeficiente de reflexão é o mesmo entre os canais de uma mesma guia.

A condutância entre as guias entrada e saída, guias 1 e 2, pode ser obtida através da integral

$$g_{12} = (1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2) \lim_{N \rightarrow 0} \frac{1}{Z} \int \mathcal{I}(Z, Z^\dagger) \mathcal{C}(Z, Z^\dagger) dZ. \quad (5.75)$$

onde $\vec{\gamma}^q \cdot \vec{N} = \sum_{i=1}^k \gamma_i^q N_i$,

$$\mathcal{I}(Z, Z^\dagger) = e^{-\sum_{q=1}^{\infty} \frac{(M - \vec{\gamma}^q \cdot \vec{N})}{q} \text{Tr}(Z Z^\dagger)^q} \quad (5.76)$$

e

$$\mathcal{C}(Z, Z^\dagger) = \sum_{i,o=1}^{N_1, N_2} \left(\frac{1}{1 - \gamma_1 Z Z^\dagger} Z \right)_{io} \left(Z^\dagger \frac{1}{1 - \gamma_2 Z Z^\dagger} \right)_{oi}. \quad (5.77)$$

Aplicando a decomposição em valores singulares, $Z = UDV$, percebemos que $\mathcal{I}(Z, Z^\dagger)$ não depende das matrizes unitárias U e V . Dessa forma, temos apenas integrais sobre o termo dos canais,

$$g_{12} = (1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2) \lim_{N \rightarrow 0} \int \mathcal{I}(X) A(X) dX, \quad (5.78)$$

com

$$A(X) = \int \mathcal{C}(Z, Z^\dagger) dU dV \quad (5.79)$$

Assim, obtemos o mesmo resultado obtido na Sec. 5.1, onde obtivemos a condutância numa cavidade com duas guias com barreiras, Eq. (5.9),

$$A(X) = \frac{N_1 N_2}{N^2} \sum_{n,m \geq 0} \gamma_1^n \gamma_2^m \text{Tr}(T^{n+m+1}). \quad (5.80)$$

Agora, as exponenciais no integrando se tornam

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(X) &= e^{-\sum_{q=1}^{\infty} \frac{(M - \vec{\gamma}^q \cdot \vec{N})}{q} \text{Tr}(X)^q} \\ &= e^{-M \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} \text{Tr}(X)^q} \sum_{e^{q=1}}^{\infty} \frac{\vec{\gamma}^q \cdot \vec{N}}{q} \text{Tr}(X)^q \\ &= \exp\left(-M \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} \text{Tr}(X)^q\right) \exp\left(\sum_{i=1}^k N_i \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\gamma_i^q}{q} \text{Tr}(X)^q\right) \\ &= \exp\left(-M \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} \text{Tr}(X)^q\right) \prod_{i=1}^k \exp\left(N_i \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} \text{Tr}(\gamma_i X)^q\right) \\ &= \exp(\ln(1 - X)^M) \prod_{i=1}^k \exp(\ln(1 - \gamma_i X)^{-N_i}) \\ &= \det(1 - X)^M \prod_{i=1}^k \det(1 - \gamma_i X)^{-N_i}. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Agora, notamos que

$$\det(1 - \gamma_i X)^{-N_i} = \sum_{\mu_i} s_{\mu_i}(\hat{\gamma}_i) s_{\mu_i}(X), \quad (5.82)$$

pela Eq. (2.41), fazendo $\alpha = 1$. Logo, temos

$$\mathcal{I}(X) = \left(\prod_{i=1}^N (1 - x_i)^M \right) \left(\sum_{\vec{\mu}} \prod_{i=1}^k \sum_{\mu_i} s_{\mu_i}(\hat{\gamma}_i) s_{\mu_i}(X) \right). \quad (5.83)$$

Utilizando a Eq. (2.54), temos

$$\mathcal{I}(X) = \left(\prod_{i=1}^N (1 - x_i)^M \right) \left(\sum_{\nu} s_{\nu}(\hat{\Gamma}) s_{\nu}(X) \right), \quad (5.84)$$

onde $\hat{\Gamma}_k \equiv (\hat{\gamma}_1; \dots; \hat{\gamma}_k)$ é uma lista concatenada: com as N_1 primeiras entradas iguais a γ_1 , as próximas N_2 entradas iguais a γ_2 e assim por diante.

$$g_{12} = \tilde{N}_1 \tilde{N}_2 \sum_{n,m \geq 0} \gamma_1^n \gamma_2^m \sum_{\nu} s_{\nu}(\hat{\Gamma}_k) \mathcal{I}_1, \quad (5.85)$$

onde

$$\mathcal{I}_1 = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{1}{N^2 \mathcal{Z}} \int s_{\nu}(X) \text{Tr}(X^{n+m+1}) \prod_{i=1}^N (1-x_i)^M |\Delta(X)|^2 dX. \quad (5.86)$$

Como antes, obtemos

$$\mathcal{I}_1 = \sum_{\substack{\mu \vdash n+m+1 \\ D_1(\theta)=1}} (-1)^l \frac{d_{\theta}}{|\theta|!} C_{\nu\mu\theta} \frac{\left(t_{\theta}^{(1)}\right)^2}{[M]_{\theta}^{(1)}}, \quad (5.87)$$

onde a partição $\mu \vdash n+m+1$ é parametrizada como $\mu = [m+n+1-l, 1^l]$, com $0 \leq l \leq n+m$. Imposta essa parametrização, temos $\chi_{\mu}(n+m+1) = (-1)^l$.

Juntando tudo, e somando sobre os canais de entrada e saída, ficamos com

$$g_{12} = \tilde{N}_1 \tilde{N}_2 \sum_{n,m \geq 0} \gamma_1^n \gamma_2^m \sum_{\nu, \mu, \theta} C_{\nu\mu\theta} s_{\nu}(\hat{\Gamma}_k) \chi_{\mu}(n+m+1) \frac{d_{\theta}}{|\theta|!} \frac{\left(t_{\theta}^{(1)}\right)^2}{[M]_{\theta}^{(1)}}. \quad (5.88)$$

Podemos reconhecer a função de Schur oblíqua,

$$s_{\theta \setminus \mu}(\hat{\Gamma}_k) = \sum_{\nu} C_{\nu\mu\theta} s_{\nu}(\hat{\Gamma}_k), \quad (5.89)$$

e obter

$$g_{12} = \tilde{N}_1 \tilde{N}_2 \sum_{n,m \geq 0} \gamma_1^n \gamma_2^m \sum_{\substack{\mu \vdash n+m+1 \\ D_1(\theta)=1}} (-1)^l \frac{d_{\theta}}{|\theta|!} s_{\theta \setminus \mu}(\hat{\Gamma}_k) \frac{\left(t_{\theta}^{(1)}\right)^2}{[M]_{\theta}^{(1)}} \quad (5.90)$$

Como μ e θ são ganchos, o diagrama oblíqua $\theta \setminus \mu$ é composto por uma faixa horizontal $[p]$ e uma faixa vertical $[1^q]$. Com isso temos

$$s_{\theta \setminus \mu}(\hat{\Gamma}_k) = s_{[p]}(\hat{\Gamma}_k) s_{[1^q]}(\hat{\Gamma}_k). \quad (5.91)$$

Aproveitando-se desse fato, podemos escolher uma parametrização para θ , que satisfaça $\mu \subset \theta$, temos $\theta = (p+n+m+1-l, 1^{q+l})$. Com isso $\theta \vdash p+q+n+m+1$ e a soma sobre θ é convertida numa soma sobre $p, q \geq 0$.

$$g_{12} = \tilde{N}_1 \tilde{N}_2 \sum_{n,m,p,q \geq 0} \gamma_1^n \gamma_2^m \sum_{l=0}^{n+m} (-1)^l \frac{d_{\theta}}{|\theta|!} h_p(\hat{\Gamma}) e_q(\hat{\Gamma}_k) \frac{\left(t_{\theta}^{(1)}\right)^2}{[M]_{\theta}^{(1)}}. \quad (5.92)$$

Resta-nos caracterizar $h_p(\hat{\Gamma}_k)$ e $e_q(\hat{\Gamma}_k)$. Eles são gerados pelas seguintes funções geradoras

$$\sum_{p=0}^{\infty} h_p(\hat{\Gamma}_k) t^p = \prod_{i=1}^k \frac{1}{(1-t\gamma_i)^{N_i}}, \quad (5.93)$$

e

$$\sum_{q=0}^M e_q(\hat{\Gamma}_k) t^q = \prod_{i=1}^k (1 + t\gamma_i)^{N_i}. \quad (5.94)$$

Expandindo-se o lado direito, obtemos

$$h_p(\hat{\Gamma}_k) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=p} \frac{(N_1)^{(i_1)} (N_2)^{(i_2)} \dots (N_k)^{(i_k)}}{i_1! i_2! \dots i_k!} \gamma_1^{i_1} \gamma_2^{i_2} \dots \gamma_k^{i_k}, \quad (5.95)$$

e

$$e_q(\hat{\Gamma}_k) = \sum_{j_1+j_2+\dots+j_k=q} \frac{(N_1)_{(j_1)} (N_2)_{(j_2)} \dots (N_k)_{(j_k)}}{j_1! j_2! \dots j_k!} \gamma_1^{j_1} \gamma_2^{j_2} \dots \gamma_k^{j_k}. \quad (5.96)$$

Basta notar que invocando a definição de h_p e e_q e utilizando argumento de combinatória, obtemos

$$h_p(\hat{\Gamma}_k) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=p} \binom{N_1+i_1-1}{i_1} \binom{N_2+i_2-1}{i_2} \dots \binom{N_k+i_k-1}{i_k} \gamma_1^{i_1} \gamma_2^{i_2} \dots \gamma_k^{i_k}, \quad (5.97)$$

e

$$e_q(\hat{\Gamma}_k) = \sum_{j_1+j_2+\dots+j_k=q} \binom{N_1}{j_1} \binom{N_2}{j_2} \dots \binom{N_k}{j_k} \gamma_1^{j_1} \gamma_2^{j_2} \dots \gamma_k^{j_k}. \quad (5.98)$$

Em seguida, da definição de fatorial ascendente e descendente,

$$\binom{N_1}{i_1} = \frac{(N_1)_{(i_1)}}{i_1!} \quad \text{e} \quad \binom{N_1+i_1-1}{i_1} = \frac{(N_1)^{(i_1)}}{i_1!}, \quad (5.99)$$

segue que $h_p(\hat{\Gamma}_k)$ e $e_q(\hat{\Gamma}_k)$ podem ser expressos como somas de fatoriais crescentes e decrescentes.

Portanto,

$$g_{12} = \frac{\tilde{N}_1 \tilde{N}_2}{M} \sum_{n,m,p,q \geq 0} \sum_{l=0}^{n+m} \frac{\gamma_1^n \gamma_2^m}{(p+q+n+m+1)} \frac{(-1)^l (q+l)! (p+n+m-l)! h_p(\hat{\Gamma}_k) e_q(\hat{\Gamma}_k)}{(M+1)^{(p+n+m-l)} (M-1)_{(q+l)}}. \quad (5.100)$$

5.3.3 Condutância Generalizada na Presença de Simetria de Reversão Temporal

Consideremos uma cavidade acoplada a k guias. A guia i possui N_i canais e cada canal possui coeficiente de reflexão γ_i . Note que o coeficiente de reflexão é o mesmo entre os canais de uma mesma guia.

Na presença de Simetria de Reversão Temporal, a condutância entre as guias de entrada e saída pode ser obtida através da integral

$$\langle g_{12} \rangle = (1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2) \lim_{N \rightarrow 0} \sum_{\substack{N_1, N_2 \\ \bar{i}, \bar{o}=1}} K_N [C_{i_1 i_2} C_{i_1 i_2}^*], \quad (5.101)$$

com

$$K_N = \frac{1}{Z} \int e^{-\frac{1}{2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(M - \vec{\gamma}^q \cdot \vec{N})}{q} \text{Tr}(SS^t)^q} R_{i_1 i_1}^{(1)} R_{i_2 i_2}^{(2)} dS, \quad (5.102)$$

em que S é uma matriz real.

Aplicando a decomposição em valores singulares, $Z = UDV$, obtemos o mesmo resultado obtido para a parte angular no caso com duas barreiras,

$$\begin{aligned} A(X) &= \int R_{i_1 i_2}^{(e)} R_{i_2 i_2}^{(s)} dU dV \\ &= C_{1_1 i_2} C_{1_1 i_2}^* \frac{1}{N^2} \text{Tr} \left(\frac{T}{(1 - \gamma_1 X)(1 - \gamma_2 X)} \right) \\ &= C_{1_1 i_2} C_{1_1 i_2}^* \frac{1}{N^2} \sum_{n, m \geq 0} \gamma_1^n \gamma_2^m \text{Tr}(X^{n+m+1}). \end{aligned} \quad (5.103)$$

Podemos facilmente coletar o coeficiente de $C_{1_1 i_2} C_{1_1 i_2}^*$.

Agora, seguimos o mesmo processo utilizado no caso de ausência de Simetria de Reversão Temporal para obter a Eq. (5.81). E ficamos com

$$e^{-\frac{1}{2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(M - \vec{\gamma}^q \cdot \vec{N})}{q} \text{Tr}(ZZ^t)^q} = \det(1 - X)^{\frac{M}{2}} \prod_{i=1}^k \det(1 - \gamma_i X)^{-\frac{N_i}{2}}. \quad (5.104)$$

Assim, como na Eq. (4.21),

$$\det(1 - X)^{\frac{M}{2}} = \prod_{i=1}^N (1 - x_i)^{\frac{M}{2}}, \quad (5.105)$$

e

$$\det(1 - \gamma_i X)^{-\frac{N_i}{2}} = \sum_{\mu_i} \frac{1}{j_{\mu_i}^{(2)}} Z_{\mu_i}(\hat{\gamma}_i) Z_{\mu_i}(X), \quad (5.106)$$

pela Eq. (2.41).

Dito isso, obtemos para o termo que introduz o efeito do interior da cavidade,

$$\det(1 - \gamma_i X)^{-N_i} = \sum_{\mu_i} s_{\mu_i}(\hat{\gamma}_i) s_{\mu_i}(X), \quad (5.107)$$

pela Eq. (2.41), fazendo $\alpha = 1$. Logo, temos

$$e^{-\frac{1}{2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(M - \vec{\gamma}^q \cdot \vec{N})}{q} \text{Tr}(ZZ^t)^q} = \left(\prod_{i=1}^N (1 - x_i)^{\frac{M}{2}} \right) \left(\sum_{\vec{\mu}} \prod_{i=1}^k \frac{1}{j_{\mu_i}^{(2)}} Z_{\mu_i}(\hat{\gamma}_i) Z_{\mu_i}(X) \right). \quad (5.108)$$

Utilizando a Eq. (2.54), temos

$$e^{-\frac{1}{2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(M - \vec{\gamma}^q \cdot \vec{N})}{q} \text{Tr}(ZZ^t)^q} = \left(\prod_{i=1}^N (1 - x_i)^{\frac{M}{2}} \right) \left(\sum_{\nu} \frac{1}{j_{\mu_i}^{(2)}} Z_{\nu}(\hat{\Gamma}) Z_{\nu}(X) \right). \quad (5.109)$$

Combinando os resultados para o termo de efeito dos canais com o termo de efeito do interior ficamos com

$$g_{12} = \tilde{N}_1 \tilde{N}_2 \sum_{n,m \geq 0} \gamma_1^n \gamma_2^m \sum_{\nu} \frac{1}{j_{\nu}^{(2)}} Z_{\nu}(\hat{\Gamma}) \mathcal{I}_1, \quad (5.110)$$

onde, como antes, $\hat{\Gamma} \equiv (\hat{\gamma}_1; \dots; \hat{\gamma}_k)$ é uma lista concatenada das probabilidades de reflexão e

$$\mathcal{I}_1 = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{1}{N^2 \mathcal{Z}} \int Z_{\nu}(X) \text{Tr} \left(X^{n+m+1} \right) \prod_{i=1}^N x_i^{-\frac{1}{2}} (1-x_i)^{\frac{M}{2}} \Delta(X) dX. \quad (5.111)$$

Já nos deparamos com essa expressão na Eq. (5.56). E o resultado é

$$\mathcal{I}_1 = \sum_{\mu=n+m+1} \frac{d_{2\mu} t_{\mu}^{(2)}}{(2n+2m+1)!} \sum_{\theta} C_{\mu\nu\theta}^{(2)} \frac{\left(t_{\theta}^{(2)}\right)^2}{[M+1]_{\theta}^{(2)}} \delta_{D_2(\theta),1}, \quad (5.112)$$

Juntando tudo, e somando sobre os canais de entrada e saída, ficamos com

$$\langle g_{12} \rangle = \tilde{N}_1 \tilde{N}_2 \sum_{n,m \geq 0} \gamma_1^n \gamma_2^m \sum_{\nu, \theta} \frac{1}{j_{\nu}^{(2)}} Z_{\nu}(\hat{\Gamma}) \sum_{\mu=n+m+1} \frac{d_{2\mu} t_{\mu}^{(2)}}{(2n+2m+1)!} C_{\mu\nu\theta}^{(2)} \frac{\left(t_{\theta}^{(2)}\right)^2}{[M+1]_{\theta}^{(2)}}. \quad (5.113)$$

Podemos eliminar a soma em ν introduzindo o polinômio zonal oblíquo

$$\langle g_{12} \rangle = \tilde{N}_1 \tilde{N}_2 \sum_{n,m \geq 0} \gamma_1^n \gamma_2^m \sum_{\theta \geq \mu} \frac{1}{j_{\theta}^{(2)}} Z_{\theta \setminus \mu}(\hat{\Gamma}) \sum_{\mu=n+m+1} \frac{d_{2\mu} t_{\mu}^{(2)}}{(2n+2m+1)!} \frac{\left(t_{\theta}^{(2)}\right)^2}{[M+1]_{\theta}^{(2)}}, \quad (5.114)$$

onde a soma percorre as partições μ e θ ; ambos devem ser ganchos duplos e θ contém μ .

5.4 Momentos de Alta Ordem

Conforme discutimos na Sec. 3, a inclusão de barreiras modifica as regras diagramáticas no interior da cavidade. Dessa forma, a integral matricial que implementa essas regras também é modificada:

$$\lim_{N \rightarrow 0} (1-\gamma_1)^n (1-\gamma_2)^n \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{I}(Z, Z^{\dagger}) \mathcal{C}(Z, Z^{\dagger}) dZ. \quad (5.115)$$

A parte do integrando que implementa as regras no interior da cavidade é

$$\mathcal{I}(Z, Z^{\dagger}) = e^{-\sum_{q=1}^{\infty} \frac{M - \tilde{\gamma}^q \cdot \tilde{N}}{q} \text{Tr} (Z Z^{\dagger})^q}, \quad (5.116)$$

onde introduzimos a notação curta $\tilde{\gamma}^q \cdot \tilde{N} = \gamma_1^q N_1 + \gamma_2^q N_2$. Na Eq. (3.19), introduzimos também um termo que representa uma série de potências, $p_{\lambda}(Z^{\dagger} Q_1 Z Q_2)$ onde $Q_1 = I_{N_1} \oplus 0_{N-N_1}$ e $Q_2 = 0_{N-N_2} \oplus I_{N_2}$, também devemos introduzir um termo devido ao efeito das barreiras nas guias de entrada e saída. Entretanto, dado o intercâmbio entre séries de

potências e funções de Schur, Eq. (2.26), e ao fato de as funções de Schur apresentarem maior maleabilidade, optamos por introduzi-las no lugar das séries de potências. Além disso, devemos substituir Z por $\frac{1}{1 - \gamma_1 Z Z^\dagger} Z$ e seu conjugado também. Dessa forma, o termo devido às guias de entrada e saída é dado por

$$\mathcal{C}(Z, Z^\dagger) = s_\lambda \left(Z^\dagger \frac{1}{1 - \gamma_2 Z Z^\dagger} Q_1 \frac{1}{1 - \gamma_1 Z Z^\dagger} Z Q_2 \right) \quad (5.117)$$

Entretanto, devido à complexidade dos cálculos envolvidos, vamos nos limitar ao caso particular em que as duas guias são idênticas, ou seja, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$.

Implementando a decomposição em valores singulares, $Z = UDV$, assim como antes, percebemos que $\mathcal{I}(Z, Z^\dagger) = \mathcal{I}(X)$, onde $X = DD^\dagger$ e ficamos com integrais sobre o grupo unitário somente envolvendo o termo \mathcal{C} . De modo análogo à Eq. (4.111), ficamos com

$$\mathcal{C}(X) = \int s_\lambda \left(V^\dagger \frac{1}{1 - \gamma X} D^\dagger U^\dagger Q_1 U D \frac{1}{1 - \gamma X} V Q_2 \right) dU dV. \quad (5.118)$$

Integrais de funções de Schur ao longo do grupo Unitário são bastante estudadas [55]. Para a integral acima, podemos utilizar

$$\int s_\lambda(U A U^\dagger B) dU = \frac{s_\lambda(A) s_\lambda(B)}{s_\lambda(1^N)}. \quad (5.119)$$

Primeiro, para a integral em V (podemos substituir V^\dagger por V na integral, pois estamos integrando sobre um grupo), identificamos $A = \frac{1}{1 - \gamma X} D^\dagger U^\dagger Q_1 U D \frac{1}{1 - \gamma X}$ e $B = Q_2$. E ficamos com

$$\mathcal{C}(X) = \frac{s_\lambda(Q_2)}{s_\lambda(1^N)} \int s_\lambda \left(\frac{1}{1 - \gamma X} D^\dagger U^\dagger Q_1 U D \frac{1}{1 - \gamma X} \right) dU. \quad (5.120)$$

Devido à definição das séries de potências em função de traços, Eq. (2.22) e sua relação com funções de Schur, segue que as funções de Schur são invariantes por permutações cíclicas do argumento, assim como o traço, $s_\lambda(AB) = s_\lambda(BA)$. Então,

$$\mathcal{C}(X) = \frac{s_\lambda(Q_2)}{s_\lambda(1^N)} \int s_\lambda \left(U^\dagger Q_1 U \frac{X}{(1 - \gamma X)^2} \right) dU. \quad (5.121)$$

Agora, reconhecendo $A = Q_1$ e $B = \frac{X}{(1 - \gamma_1 X)^2}$ na Eq. (5.119), ficamos com

$$\mathcal{C}(X) = \frac{s_\lambda(Q_1) s_\lambda(Q_2)}{s_\lambda(1^N)} s_\lambda \left(\frac{X}{(1 - \gamma X)^2} \right). \quad (5.122)$$

Note que $s_\lambda(Q_i)$ corresponde a um polinômio avaliado numa sequência que corresponde a N_i valores iguais a 1 seguidos de $N - N_i$ valores iguais a 0. Os produtos que contêm valores nulos não contribuem para a soma $s_\lambda(Q_i)$. Portanto, $s_\lambda(Q_i) = s_\lambda(1^{N_i})$. Lembrando das Eqs. 2.37 e 2.39, obtemos

$$\mathcal{C}(X) = \frac{[N_1]_\lambda^{(1)} [N_2]_\lambda^{(1)}}{([N]_\lambda^{(1)})} f_\lambda(X), \quad (5.123)$$

onde

$$f_\lambda(X) = s_\lambda \left(\frac{X}{(1-\gamma X)^2} \right). \quad (5.124)$$

Para o termo do interior da cavidade, $\mathcal{I}(X)$, utilizando a Eq. (4.5) e procedendo da mesma forma, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(Z, Z^\dagger) &= e^{-\sum_{q=1}^{\infty} \frac{M - \vec{\gamma}^q \cdot \vec{N}}{q} \text{Tr}(ZZ^\dagger)^q} \\ &= \det(1-X)^M \det(1-\gamma X)^{N_1} \det(1-\gamma X)^{N_2} \\ &= \frac{\det(1-X)^M}{\det(1-\gamma X)^M}, \text{ pois } M = N_1 + N_2. \end{aligned} \quad (5.125)$$

Dessa forma, a integral remanescente sobre X resume-se a

$$\frac{1}{\mathcal{Z}} \int f_\lambda(X) \frac{\det(1-X)^M}{\det(1-\gamma X)^M} |\Delta(X)|^2 dX. \quad (5.126)$$

Para poder resolver a integral, devemos expandir $f_\lambda(X)$ como combinação linear de funções de Schur, pois já vimos que o termo remanescente (Eq. (5.125)) pode ser expandido dessa forma.

Já que podemos escrever uma função de Schur utilizando determinantes, Eq. (2.29), temos

$$f_\lambda(X) = \det \left(\left[\left(\frac{x_j}{(1-\gamma x_j)^2} \right)^{N+\lambda_i-i} \right]_{ij} \right) \frac{1}{\Delta \left(\frac{X}{(1-\gamma X)^2} \right)}. \quad (5.127)$$

Para o determinante de Vandermonde, temos

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{X}{(1-\gamma X)^2} \right) &= \prod_{i<j} \left(\frac{x_i}{(1-\gamma x_i)^2} - \frac{x_j}{(1-\gamma x_j)^2} \right) \\ &= \prod_{i<j} \frac{1}{(1-\gamma x_i)^2 (1-\gamma x_j)^2} (x_i (1-\gamma x_i)^2 - x_j (1-\gamma x_j)^2) \\ &= \prod_{i<j} \frac{(x_i - x_j)}{(1-\gamma x_i)^2 (1-\gamma x_j)^2} (1 - \gamma^2 x_i x_j) \\ &= \Delta(X) \prod_{i<j} \frac{(1 - \gamma^2 x_i x_j)}{[(1-\gamma x_i)(1-\gamma x_j)]^2} \\ &= \Delta(X) \frac{\prod_{i<j} (1 - \gamma^2 x_i x_j)}{\left[\prod_{i=1}^{N-1} \prod_{j=i+1}^N (1-\gamma x_i)(1-\gamma x_j) \right]^2} \\ &= \frac{\Delta(X)}{\det(1-\gamma X)^{2N-2}} \prod_{i<j} (1 - \gamma^2 x_i x_j). \end{aligned} \quad (5.128)$$

Agora, utilizando uma das identidades de Littlewood, pg. 76 de [55], temos

$$\left(\prod_{i<j} (1 - \gamma^2 x_i x_j) \right)^{-1} = \det(1-\gamma X) \sum_{\mu} s_{\mu}(\gamma X). \quad (5.129)$$

Dessa forma, ficamos com

$$f_\lambda(X) = \det \left(\left[\frac{x_j^{N+\lambda_i-i}}{(1-\gamma x_j)^{2\lambda_i-2i+1}} \right]_{ij} \right) \frac{1}{\Delta(X)} \sum_\mu s_\mu(\gamma X). \quad (5.130)$$

Apesar de termos melhorado a expressão, ainda precisamos expandir

$$\det \left(\left[\frac{x_j^{N+\lambda_i-i}}{(1-\gamma x_j)^{2\lambda_i-2i+1}} \right]_{ij} \right) \frac{1}{\Delta(X)} \quad (5.131)$$

utilizando funções de Schur como base. Para isso, lembremos que as funções de Schur são ortogonais quando integradas ao longo do círculo unitário. Isto decorre do fato de que as funções de Schur são os caracteres irredutíveis do grupo Unitário [55],

$$\frac{1}{N!} \oint s_\lambda(z) s_\rho(z^*) |\Delta(X)|^2 dz = \delta_{\lambda\rho}. \quad (5.132)$$

Utilizando o Teorema Binomial, temos

$$\frac{1}{(1-x_j)^{2\lambda_i-2i+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2\lambda_i-2i+k}{2\lambda_i-2i} \gamma^k x_j^k. \quad (5.133)$$

Dessa forma, a expressão

$$\frac{1}{N!} \oint \det \left(\left[\frac{x_j^{N+\lambda_i-i}}{(1-\gamma x_j)^{2\lambda_i-2i+1}} \right]_{ij} \right) s_\rho(z^*) \Delta(z^*) dz, \quad (5.134)$$

se resume a

$$\frac{1}{N!} \oint \det \left(\left[\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2\lambda_i-2i+k}{2\lambda_i-2i} \gamma^k x_j^{N+\lambda_i-i+k} \right]_{ij} \right) s_\rho(z^*) \Delta(z^*) dz. \quad (5.135)$$

E, utilizando a Eq. (2.29), ficamos com

$$\frac{1}{N!} \oint \det \left(\left[\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2\lambda_i-2i+k}{2\lambda_i-2i} \gamma^k x_j^{N+\lambda_i-i+k} \right]_{ij} \right) \det \left(\left[x_k^{N+\lambda_i-i} \right]_{ij} \right) dz. \quad (5.136)$$

Aplicando a identidade de Andreief,

$$\int \det \left(\left[f_i(x_k) \right]_{ij} \right) \det \left(\left[g_j(x_k) \right]_{ij} \right) d\vec{x} = N! \det \left(\left[\int f_i(x) g_j(x) dx \right]_{ij} \right), \quad (5.137)$$

obtemos

$$\det \left(\left[\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2\lambda_i-2i+k}{2\lambda_i-2i} \gamma^k \oint z^{\lambda_i-i+k} z^{*\rho_j-j} dz \right]_{ij} \right). \quad (5.138)$$

Dada a ortogonalidade de potências no círculo unitário,

$$\oint z^a z^{*b} dz = \delta_{ab}, \quad (5.139)$$

devemos ter $k = \rho_j - j - \lambda_i + i$. Com isso, obtemos

$$\det \left(\left[\begin{pmatrix} \rho_j + \lambda_i - i - j \\ 2\lambda_i - 2i \end{pmatrix} \gamma^{\rho_j - j - \lambda_i + i} \right]_{ij} \right) = \det \left(\left[\begin{pmatrix} \rho_j + \lambda_i - i - j \\ 2\lambda_i - 2i \end{pmatrix} \right]_{ij} \right) \gamma^{|\rho| - |\lambda|}. \quad (5.140)$$

Com isso, obtemos uma expansão para $f_\lambda(X)$ utilizando funções de Schur,

$$f_\lambda(X) = \left(\sum_{\rho} \gamma^{|\rho| + |\mu| - |\lambda|} R_{\lambda\rho} s_{\rho}(X) \right) \left(\sum_{\mu} s_{\mu}(\gamma X) \right), \quad (5.141)$$

onde

$$R_{\lambda\rho} = \det \left(\begin{pmatrix} \rho_j + \lambda_i - i - j \\ 2\lambda_i - 2i \end{pmatrix} \right). \quad (5.142)$$

Utilizando os coeficientes de Littlewood-Richardson, Eq. (2.43), ficamos com

$$f_\lambda(X) = \sum_{\rho\mu\nu} \gamma^{|\rho| + |\mu| - |\lambda|} R_{\lambda\rho} C_{\rho\mu\nu}^{(1)} s_{\mu}(X). \quad (5.143)$$

Então, a integral sobre X , na Eq. (5.126), pode ser escrita como

$$\sum_{\rho\mu\nu} \gamma^{|\rho| + |\mu| - |\lambda|} R_{\lambda\rho} C_{\rho\mu\nu}^{(1)} \frac{1}{\mathcal{Z}} \int s_{\mu}(X) \frac{\det(1-X)^M}{\det(1-\gamma X)^M} |\Delta(X)|^2 dX. \quad (5.144)$$

De maneira análoga às Eqs. 4.19 à 4.20, temos

$$s_{\mu}(X) \frac{\det(1-X)^M}{\det(1-\gamma X)^M} = \prod_{i=1}^N (1-x_i)^M \sum_{\theta} \gamma^{|\theta| - |\mu|} s_{\theta\setminus\mu}(1^M) s_{\theta}(X). \quad (5.145)$$

Combinando com as Eqs. 5.115 e 5.123, ficamos com

$$\langle s_{\lambda}(T) \rangle = (1-\gamma)^{2n} [N_1]_{\lambda}^{(1)} [N_2]_{\lambda}^{(1)} \sum_{\rho\mu\nu\theta} \gamma^{|\rho| + |\theta| - |\lambda|} R_{\lambda\rho} C_{\rho\mu\nu}^{(1)} s_{\theta\setminus\mu}(1^M) \mathcal{I}_{\theta}, \quad (5.146)$$

onde

$$\mathcal{I}_{\theta} = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{\mathcal{Z}^{-1}}{\left([N]_{\lambda}^{(1)}\right)^2} \int s_{\theta}(X) \prod_{i=1}^N (1-x_i)^M |\Delta(X)|^2 dX. \quad (5.147)$$

O resultado da integral pode ser obtida através da Eq. (3.49). E o limite, através da Eq. (3.51). Para isso, transformamos a função de Schur num polinômio de Jack

$$\mathcal{I}_{\theta} = \frac{d_{\theta}}{|\theta|!} \lim_{N \rightarrow 0} \frac{\mathcal{Z}^{-1}}{\left([N]_{\lambda}^{(1)}\right)^2} \int J_{\theta}^{(1)}(X) \prod_{i=1}^N (1-x_i)^M |\Delta(X)|^2 dX. \quad (5.148)$$

Pela Eq. (3.49), com $\alpha = 1$ e $b = M + 1$,

$$\mathcal{I}_{\theta} = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{\left([N]_{\theta}^{(1)}\right)^2}{\left([N]_{\lambda}^{(1)}\right)^2} \frac{(M(1-\gamma))^{N^2} R_{\mu}(1, M+1, N)}{[2N+M]_{\mu}^{(1)}} \quad (5.149)$$

Lembrando da expansão dos polinômios $[N]_\lambda^{(1)}$ na Eq. (2.18), temos que

$$\mathcal{I}_\theta = \left(\frac{t_\theta^{(1)}}{t_\lambda^{(1)}} \right)^2 \frac{1}{[M]_\mu^{(1)}} = \frac{t_1 (\theta \setminus \lambda)^2}{[M]_\mu^{(1)}}. \quad (5.150)$$

Dessa forma, obtemos

$$\langle s_\lambda(T) \rangle = (1 - \gamma)^{2n} [N_1]_\lambda^{(1)} [N_2]_\lambda^{(1)} \sum_{\substack{\rho, \mu, \nu, \theta \\ D(\theta) = D(\lambda)}} \gamma^{|\rho| + |\theta| - |\lambda|} R_{\lambda\rho} s_{\theta \setminus \nu} C_{\rho\mu\nu}^{(1)} \frac{d_\theta t_1 (\theta \setminus \lambda)^2}{|\theta|! [M]_\theta^{(1)}}. \quad (5.151)$$

Consideremos o caso particular em que λ é um gancho. Nesse caso, percebemos que θ também o é, devido à condição $D_1(\theta) = D_1(\lambda) = 1$. O mesmo ocorre à partição ν , pela condição de existência de $\theta \setminus \nu$ e seque que μ e ρ também o são, devido às propriedades dos coeficiente de Littlewood-Richardson. Então, sendo $\lambda = [A, 1^a]$ e $\rho = [B, 1^b]$ temos

$$R_{[A, 1^a], [B, 1^b]} = (-1)^{a+b} \binom{A+B-2}{2A-2} \binom{a+b}{2a} \frac{2b+1}{2a+1}. \quad (5.152)$$

Utilizando a Eq. (5.151), podemos obter quaisquer momentos de transporte, por exemplo, a variância da condutância é dada por,

$$\text{var}[g] = \langle s_{[1^2]}(T) \rangle + \langle s_{[2]}(T) \rangle - \langle g \rangle^2. \quad (5.153)$$

6 Imanentes de Blocos de Matrizes Unitárias Aleatórias

6.1 Introdução

O determinante pode ser definido de várias maneiras, dentre elas, temos a regra do cofator de Laplace e também dada uma matriz A , de dimensão n , podemos defini-lo através do símbolo de Levi-Civita

$$\det(A) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^n \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} A_{1i_1} A_{2i_2} \dots A_{ni_n}, \quad (6.1)$$

onde $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ é zero caso hajam índices repetidos e assume valores ± 1 , a depender da ordenação dos índices i_1, i_2, \dots, i_n . Acontece que o símbolo de Levi-Civita coincide com o caractere irredutível da permutação π que satisfaz $\pi(k) = i_k$ para $k = 1, \dots, n$ na representação indexada pela partição $[1^n]$. Portanto, podemos substituir a soma sobre os índices i_k por uma soma sobre o grupo de permutações. Dessa forma, podemos expressar o determinante utilizando os caracteres do grupo de permutações:

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \chi_{[1^n]}(\pi) A_{1\pi(1)} A_{2\pi(2)} \dots A_{n\pi(n)}. \quad (6.2)$$

Visto que é possível associar o determinante a uma representação $[1^n]$ do grupo de permutações, é natural nos perguntarmos quais quantidades estão relacionadas com as outras representações. Essa pergunta foi endereçada por Littlewood e Richardson [90]. Nesse trabalho, foram definidos os *imanentes*, estendendo a definição do determinante às outras representações do grupo de permutações. Assim, o imanente associado à partição λ é

$$\text{Imm}_\lambda(A) = \sum_{\pi \in S_n} \chi_\lambda(\pi) A_{1\pi(1)} A_{2\pi(2)} \dots A_{n\pi(n)}. \quad (6.3)$$

Logo após o determinante, o segundo imanente mais conhecido é o *permanente*, associado à partição $\lambda = [n]$, em que

$$\text{Per}(A) = \sum_{\pi \in S_n} A_{1\pi(1)} A_{2\pi(2)} \dots A_{n\pi(n)}, \quad (6.4)$$

pois $\chi_{[n]}(\pi) = 1$ para todo $\pi \in S_n$. Note que o permanente e o determinante podem ser definidos para uma matriz de dimensão qualquer (pois $[1^n]$ coincide com $[n]$ para $n = 1$).

Dentre os imanentes o determinante é o único que pode ser expresso somente em função dos autovalores da matriz A . Além disso, os outros imanentes não possuem nomes especiais. Como exemplo, para $\lambda = [2, 1]$ temos o imanente

$$\text{Imm}_{[2,1]}(A) = 2A_{11}A_{22}A_{33} - A_{13}A_{21}A_{32} - A_{12}A_{23}A_{31}. \quad (6.5)$$

Tanto o permanente quanto o determinante surgem no contexto da Mecânica Quântica ao tratarmos um sistema com muitas partículas indistinguíveis. O estado combinado depende do *spin* das partículas: se as partículas possuem *spin* inteiro (bósons) então o estado combinado é dado através do permanente dos estados individuais; ao passo que se o *spin* das partículas é semi-inteiro (férmions), então o estado combinado é dado pelo determinante dos estados individuais [91]. Dessa forma, temos

$$\Psi(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi \in S_n} \chi_\lambda(\pi) \psi_1(x_{\pi(1)}) \psi_2(x_{\pi(2)}) \cdots \psi_n(x_{\pi(n)}), \quad (6.6)$$

onde λ corresponde à partição $[n]$ para bósons e $[1^n]$ para férmions. Nesse sentido, o permanente tem atraído atenção devido à sua aplicação no estudo do estado de saída no espalhamento de muitos bósons devido a um interferômetro linear [92]. Esse processo pode ser utilizado como método para implementar uma plataforma para computação quântica [93] e resolver problemas intratáveis por computadores clássicos. Além disso, permanentes de matrizes aleatórias vêm sendo estudados através de diversos pontos de vista [94, 95, 96, 97].

No contexto de espalhamento quântico, Urbina et al. modelaram um interferômetro como uma cavidade caótica [49]. Nesse caso, a amplitude de probabilidade combinada advém do permanente das amplitudes de espalhamento das partículas individuais, visto que temos um conjunto de bósons indistinguíveis. E, já que o interferômetro é modelado como uma cavidade caótica, é conveniente substituir a amplitude de espalhamento por uma matriz aleatória unitária, distribuída uniformemente no Grupo Unitário. Se o sistema respeita a Simetria de Reversão Temporal, a matriz unitária deve ser simétrica e, portanto, uniformemente distribuída ao longo do Ensemble Circular Ortogonal (*COE*).

Motivados por esse contexto, buscamos obter os valores médios de imanentes de blocos de matrizes em três conjuntos de matrizes, os Grupos Unitário e Ortogonal e o ensemble *COE*. Dada uma matriz U de dimensão $N \times N$, denotamos $\text{Imm}_\lambda(U)$ o imanente do sub-bloco diagonal superior de tamanho $n \times n$ associado à partição $\lambda \vdash n$. Em particular, o determinante e o permanente desse sub-bloco são denotados $\text{Det}_n(U)$ e $\text{Per}_n(U)$. Como esperado, se $n = N$, o bloco compreende toda a matriz.

Urbina et al. obtiveram a média do módulo ao quadrado do permanente e do determinante, para o Grupo Unitário e o ensemble *COE*, ao estudarem o efeito Hong-Ou-Mandel [49]. Entretanto, seus resultados valem para blocos não diagonais, ou seja, com índices de linhas e colunas diferentes. E, também, Fyodorov obteve a média do produto de dois permanentes polinomiais, $\langle \text{Per}_N(U - z_1) \text{Per}_N(U - z_2) \rangle$, para o Grupo Unitário [97]. Nós obtemos esses resultados por outro método e os estendemos ao grupo Ortogonal e a sub-blocos diagonais de matrizes de tamanho $n \times n$.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: na Seção 2, resumimos os resultados obtidos; na Seção 3, discutimos fatorações de permutações, que desempenham

um papel crucial na demonstração dos resultados; e, por fim, na Seção 4 detalhamos as demonstrações.

6.2 Resultados

Proposição 1. *Seja $\text{Imm}_\gamma(U)$ o imanente indexado pela partição γ de um bloco diagonal de tamanho n da matriz U e $\mathcal{U}(N)$ o grupo Unitário. Então,*

$$\langle |\text{Imm}_\gamma(U)|^2 \rangle_{\mathcal{U}(N)} = \frac{n!}{[N]_\gamma^{(1)}}. \quad (6.7)$$

A expressão acima generaliza resultados anteriores obtidos por [49] para o permanente $\langle |\text{Per}_n(U)|^2 \rangle_{\mathcal{U}(N)} = \frac{n!(N-1)!}{(N+n-1)!}$ e para o determinante $\langle |\text{Det}_n(U)|^2 \rangle_{\mathcal{U}(N)} = \frac{n!(N-n)!}{N!}$.

Para o grupo Unitário, fomos capazes de obter o próximo momento do permanente, $|\text{Per}_n(U)|^4$ como em [49].

Proposição 2. *Seja $\text{Per}_n(U)$ o permanente de um bloco diagonal de tamanho n de uma matriz U*

$$\langle |\text{Per}_n(U)|^4 \rangle_{\mathcal{U}(N)} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq N}} \frac{d_{2\lambda}}{[N]_{2\lambda}^{(1)}} g_\lambda^2, \quad (6.8)$$

onde g_λ é dada por

$$g_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} |\mathcal{C}_\mu| \omega_\lambda(\mu). \quad (6.9)$$

Se as matrizes, além de unitárias, são também simétricas, estamos lidando com o $\text{COE}(N)$. Obtivemos o seguinte resultado.

Proposição 3. *Seja $\text{Imm}_\gamma(V)$ o imanente indexado pela partição γ de um bloco diagonal de tamanho n de uma matriz V pertencente ao $\text{COE}(N)$, Então*

$$\langle |\text{Imm}_\gamma(V)|^2 \rangle_{\text{COE}(N)} = \frac{4^n n!}{(2n)!} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq N}} \frac{d_{2\lambda}}{[N+1]_\lambda^{(2)}} G_{\lambda, \gamma}^2, \quad (6.10)$$

onde $G_{\lambda, \gamma}$ é uma soma sobre partições dada por

$$G_{\lambda, \gamma} = \sum_{\mu \vdash n} |\mathcal{C}_\mu| \omega_\lambda(\mu) \chi_\gamma(\mu). \quad (6.11)$$

Note que $G_{\lambda, [n]}$ corresponde a g_λ , pois $\chi_{[n]}(\mu) = 1$ para qualquer $\mu \vdash n$.

A expressão na Eq. (6.10) é muito semelhante à expressão na Eq. (6.8). Se lembrarmos que as matrizes do COE podem ser obtidas através de matrizes unitárias, $V = UU^t$ com U unitária, podemos esperar que uma expressão quadrática para o COE se assemelhe a uma expressão quártica em $\mathcal{U}(N)$.

Conforme comentamos, o determinante corresponde ao imanente indexado pela partição $\gamma = [1^n]$. Então, temos

$$G_{\lambda, [1^n]} = \frac{(2n)! \delta_{\lambda, (1^n)}}{2^n n! d_{2\lambda}} \quad (6.12)$$

e o momento é

$$\langle |\text{Det}_n(V)|^2 \rangle_{COE(N)} = \frac{(n+1)!(N-n+1)!}{(N+1)!}. \quad (6.13)$$

Se o bloco corresponde à matriz inteira, isto é, quando $n = N$ obtemos $\langle |\text{Det}_n(V)|^2 \rangle_{COE(N)} = 1$, como esperado.

Para o grupo Ortogonal, calculamos o primeiro momento dos imanentes.

Proposição 4. *Seja $\text{Imm}_\gamma(O)$ o imanente indexado pela partição γ de um bloco diagonal de tamanho n de uma matriz O pertencente a $\mathcal{O}(N)$, o grupo Ortogonal. Então,*

$$\langle \text{Imm}_\gamma(O)^2 \rangle_{\mathcal{O}(N)} = \frac{n! 2^n n!}{d_\gamma (2n)!} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq N}} \frac{d_{2\lambda}}{[N]_\lambda^{(2)}} G_{\lambda, \gamma}. \quad (6.14)$$

Impondo $\gamma = [1^n]$, obtemos para o determinante o mesmo resultado obtido para o grupo Unitário, $\langle \text{Det}_n(O)^2 \rangle_{\mathcal{O}(N)} = \frac{n!(N-n)!}{N!}$. É natural nos perguntarmos o porquê de a expressão para a média do quadrado do módulo do determinante obtido para o grupo ortogonal ser idêntica à obtida para o grupo Unitário. Uma hipótese é que existe uma relação de grupo e subgrupo entre os grupos Unitário e Ortogonal, e o mesmo não ocorre com o COE .

Durante os cálculos nos deparamos com uma relação intrigante. Percebemos uma relação entre $[N]_\lambda^{(2)}$ (polinômios zonais avaliados na matriz identidade de ordem N) e $\{N\}_\gamma$ (a dimensão das representações irredutíveis de $\mathcal{O}(N)$).

Conjectura 1. *(Provada) Vale a identidade*

$$\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq N}} \frac{d_{2\lambda}}{[N]_\lambda^{(2)}} G_{\lambda, \gamma} = \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{d_\gamma}{\{N\}_\gamma}. \quad (6.15)$$

Não fomos capazes de provar esta conjectura. Porém, verificamos sua validade para todas as partições $\gamma \vdash n$ com $n \leq 6$. A principal dificuldade em se verificar essa expressão é obter os valores de $G_{\lambda, \gamma}$ que necessita somar sobre S_{2n} . Lembrando que S_{2n} tem $(2n)!$ elementos, para $n = 6$ ficamos com um grupo com $12!$ elementos, mais de 450 milhões de elementos. Entretanto, [Chapuy e Dołęga](#) conseguiram provar, de fato, a conjectura. Por meio de um teorema no contexto de números de Hurwitz, a conjectura surge como uma consequência [51].

Já que a Conj. 1 é verdadeira, temos

$$\langle \text{Imm}_\gamma(O)^2 \rangle_{\mathcal{O}(N)} = \frac{n!}{\{N\}_\gamma}, \quad (6.16)$$

que é uma expressão análoga àquela obtida para o grupo Unitário, na Eq. (6.7).

Podemos ainda nos perguntar sobre uma versão simplética dessa conjectura. Tal fato é discutido a diante.

Por fim, consideramos polinômios gerados por médias de permanentes, $\text{Per}_n(U - z)$. Para o caso mais simples, do polinômio de grau 1, temos $\langle \text{Per}_n(U - z) \rangle = (-z)^n$ para todos os ensembles de matrizes aleatórias discutidos. Para os grupos Unitário e Ortogonal, conseguimos calcular o polinômio de grau 2

Proposição 5. Para $G = \mathcal{U}(N)$ e $G = \mathcal{O}(N)$, temos

$$\langle \text{Per}_n(U - z_1) \text{Per}_n(U^\dagger - z_2) \rangle_G = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (z_1 z_2)^{n-m} \langle |\text{Per}_m(U)|^2 \rangle_G. \quad (6.17)$$

Em particular, para o grupo Unitário, temos

$$\langle \text{Per}_n(U - z_1) \text{Per}_n(U^\dagger - z_2) \rangle_{\mathcal{U}(N)} = \sum_{m=0}^n (z_1 z_2)^{n-m} \frac{n!(N-1)!}{(n-m)!(N+m-1)!}. \quad (6.18)$$

Esse resultado generaliza o resultado obtido por [Fyodorov\[97\]](#) quando $n = N$.

6.3 Preliminares

6.3.1 Mergulhos

Considere dois grupos de permutações: S_n e S_{n+1} . Podemos obter “versões” das permutações de S_n coletando de S_{n+1} as permutações que fixam um certo índice em S_{n+1} . Por exemplo, podemos obter as permutações de S_3 através das permutações de S_4 que fixam o índice 4, por exemplo, temos $\{id, (12)(3)(4), (13)(2)(4), (23)(1)(4), (123)(4), (132)(4)\}$ ¹. Podemos ainda fixar o índice 1 ou o 2 ou o 3 ou o 4. Isto quer dizer que temos 4 versões de S_3 contidas em S_4 . Esse é um caso particular de *mergulho*.

Mergulhos são funções (no exemplo, coletar permutações que fixam o índice 4) que preservam a estrutura de um conjunto (no exemplo, a estrutura do grupo S_3) vista em outro conjunto (no exemplo, o grupo S_4).

Nos grupos S_{2n} chamamos atenção para dois mergulhos de S_n . Podemos mergulhar a permutação π de S_n em S_{2n} mantendo a estrutura, mas duplicando os índices, definindo $\pi_e \in S_{2n}$

$$\pi_e(2k) = 2\pi(k), \text{ para } k = 1, \dots, n, \quad (6.19)$$

e fixando os número ímpares, ou seja, $\pi_e(2k-1) = 2k-1$ para $k = 1, \dots, n$. O subconjunto de S_{2n} gerado por esse mergulho é denotado $S_n^{(e)}$. Por exemplo, a permutação $\pi = (12)(345)$

¹ Exibimos propositalmente os ciclos de comprimento 1, para deixar claro que o índice 4 é fixado por todas as permutações.

de S_5 é levado a $\pi_e = (24)(6810)$ em S_{10} . A grosso modo o mergulho “dobra” os índices de π na notação de ciclos.

Da mesma forma, podemos definir outro mergulho de S_n em S_{2n} sobre números ímpares. Dado $\pi \in S_n$, definimos $\pi_o \in S_{2n}$

$$\pi_o(2k-1) = 2\pi(k) - 1, \text{ para } k = 1, \dots, n. \quad (6.20)$$

Mas agora, fixamos os números pares, $\pi_o(2k) = 2k$ para $k = 1, \dots, n$. Esse subconjunto é denotado $S_n^{(o)}$. Por exemplo, a permutação $\pi = (12)(345)$ de S_5 é levado a $\pi_o = (13)(579)$ em S_{10} .

No caso desse mergulho, o ciclo-tipo de π é transferido para o coset-tipo tanto de π_e quanto de π_o . Lembrando que o grafo associado a π_e , Γ_{π_e} , por exemplo, é construído tomando com relações de incidência o *matching* trivial $\mathfrak{t} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2n-1, 2n\}\}$ e o *matching* obtido pela ação de π_e , \mathfrak{m}_{π_e} , mas como π_e fixa os números ímpares, as outras relações de incidência são do tipo $\{\{1, \pi_e(2)\}, \{2, \pi_e(4)\}, \dots, \{2n-1, \pi_e(2n)\}\} = \{\{1, 2\pi(1)\}, \{2, 2\pi(2)\}, \dots, \{2n-1, 2\pi(n)\}\}$. Isto implica que os índices dentro de um ciclo de π estarão numa mesma componente conexa do grafo Γ_{π_e} . Na Fig. 20 podemos observar os grafos gerados pelas permutações $\pi_e = (14)(6810)$ e $\pi_o = (13)(579)$ obtidas pelos mergulhos de $\pi = (12)(345)$ como esperado, o ciclo-tipo de π é $[3, 2]$, o ciclo-tipo de π_e e π_o . Observe ainda, que a relação de incidência obtida pelas ações de π_e e π_o não são iguais, ou seja, $\mathfrak{m}_{\pi_e} \neq \mathfrak{m}_{\pi_o}$.

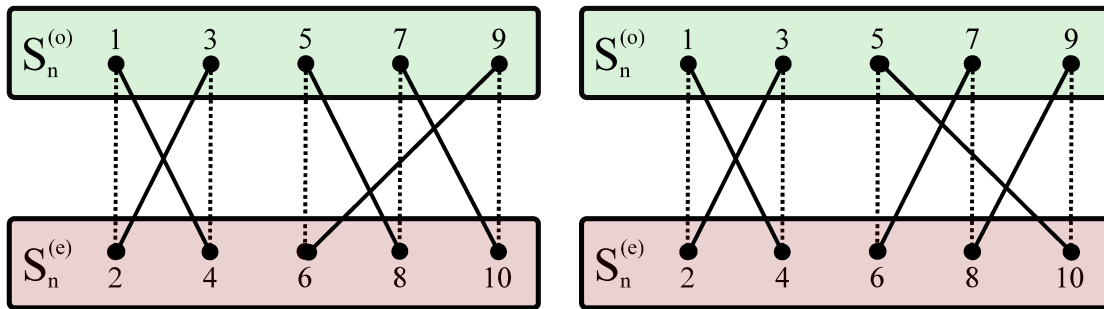


Figura 20 – À esquerda, grafo Γ_{π_e} associado à permutação $\pi_e = (24)(6810)$; e à direita, grafo Γ_{π_o} associado à permutação $\pi_o = (13)(579)$; ambos mergulhos obtidos a partir da permutação $\pi = (12)(345)$. As permutações π_e, π_o são mergulhos da permutação π de S_5 em S_{10} . A relação de incidência gerada por π_e é $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5, 8\}, \{6, 9\}, \{7, 10\}\}$ ao passo que a relação de incidência gerada por π_o é $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5, 10\}, \{6, 7\}, \{8, 9\}\}$. O ciclo-tipo de π , e os coset-tipos de π_e e π_o são dados pela partição $[3, 2]$.

Dada a permutação $\pi = (12)(345)$ e seus mergulhos $\pi_e = (24)(6810)$ e $\pi_o = (13)(579)$, podemos notar que os mergulhos são semelhantes. Basta trocar o número pelo seu antecessor ou sucessor. Com isso, podemos relacionar os mergulhos através da conjugação pela permutação $p = (12)(34)\dots(2n-12n)$,

$$\pi_e = p\pi_o p^{-1}. \quad (6.21)$$

Note que p contém apenas ciclos de comprimento 2, então $p = p^{-1}$.

6.3.2 Fatorações de Permutações

Da mesma forma que nos preocupamos em caracterizar a inversa de uma matriz, $AA^{-1} = I$, podemos caracterizar um produto de permutações que resultam na permutação identidade. Chamamos o produto

$$\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_r = id \quad (6.22)$$

uma *fatoração da identidade*. Podemos caracterizar tais fatorações através do ciclo-tipo dos fatores, σ_i . Uma pergunta que surge é: quantas são as r -uplas $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ que fatoram a permutação identidade tais que os ciclo-tipos correspondentes são $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$? A resposta para esta pergunta é dada pela *fórmula de Frobenius*[98]

$$F^{(1)}(\vec{\alpha}) = \frac{|\mathcal{C}_{\alpha_1}| |\mathcal{C}_{\alpha_2}| \cdots |\mathcal{C}_{\alpha_r}|}{n!} \sum_{\beta \vdash n} \frac{\chi_\beta(\alpha_1) \chi_\beta(\alpha_2) \cdots \chi_\beta(\alpha_r)}{d_\beta^{r-2}}. \quad (6.23)$$

Para demonstrar essa expressão, definimos a seguinte quantidade

$$E_\mu = \frac{d_\mu}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \chi_\mu(\pi) \pi. \quad (6.24)$$

Note que E_μ é uma combinação linear de duas estruturas diferentes: os coeficientes $\frac{d_\mu}{n!} \chi_\mu(\pi)$ são escalares; ao passo que π é uma permutação, proveniente de um grupo. As permutações que possuem o mesmo ciclo-tipo, possuem o mesmo coeficiente, pois o caractere irredutível não distingue permutações com o mesmo ciclo-tipo. No caso particular em que $n = 3$ e $\mu = [2, 1]$, temos

$$E_{[2,1]} = \frac{2}{3} \cdot id + 0 \cdot [(12) + (13) + (23)] - \frac{1}{3} \cdot [(123) + (132)]. \quad (6.25)$$

Multiplicar E_μ por uma permutação σ , equivale a multiplicar cada permutação que compõe E_μ por σ . Podemos ainda multiplicar duas combinações entre si

$$E_\mu E_\lambda = \frac{d_\mu d_\lambda}{n!^2} \sum_{\pi_1, \pi_2 \in S_n} \chi_\mu(\pi_1) \chi_\lambda(\pi_2) \pi_1 \pi_2. \quad (6.26)$$

Fazendo $\pi_1 \pi_2 = \rho$, temos $\pi_2 = \pi_1^{-1} \rho$

$$E_\mu E_\lambda = \frac{d_\mu d_\lambda}{n!^2} \sum_{\rho, \pi_1 \in S_n} \chi_\mu(\pi_1) \chi_\lambda(\pi_1^{-1} \rho) \rho. \quad (6.27)$$

A soma sobre π_1 pode ser computada utilizando-se a relação de ortogonalidade de caracteres da Eq. (2.5), e obtemos

$$E_\mu E_\lambda = \frac{d_\mu d_\lambda}{n!} \sum_{\rho \in S_n} \left(\frac{n!}{d_\mu} \chi_\mu(\rho) \delta_{\mu\lambda} \right) \rho. \quad (6.28)$$

Logo,

$$E_\mu E_\lambda = \left(\frac{d_\mu}{n!} \sum_{\rho \in \mathcal{S}_n} \chi_\mu(\rho) \rho \right) \delta_{\mu\lambda} = E_\mu \delta_{\mu\lambda}, \quad (6.29)$$

ou seja, $\{E_\lambda\}$ são ortonormais, assim como um operador projetor o é.

Agora, seja \mathcal{C}_μ a combinação linear de permutações com ciclo-tipo μ com coeficientes 1,

$$\mathcal{C}_\lambda = \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_n \\ \text{ct}(\sigma) = \lambda}} \sigma. \quad (6.30)$$

Utilizando \mathcal{C}_μ podemos expressar E_λ como uma soma sobre partições

$$E_\lambda = \frac{d_\lambda}{n!} \sum_{\alpha \vdash n} \chi_\lambda(\alpha) \mathcal{C}_\alpha. \quad (6.31)$$

Podemos ainda expressar \mathcal{C}_α em função de E_λ . Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{n!}{d_\lambda} E_\lambda &= \sum_{\alpha \vdash n} \chi_\lambda(\alpha) \mathcal{C}_\alpha \\ \chi_\lambda(\beta) \frac{n!}{d_\lambda} E_\lambda &= \chi_\lambda(\beta) \sum_{\alpha \vdash n} \chi_\lambda(\alpha) \mathcal{C}_\alpha \\ \sum_{\lambda \vdash n} \frac{n!}{d_\lambda} \chi_\lambda(\beta) E_\lambda &= \sum_{\alpha \vdash n} \left(\sum_{\lambda \vdash n} \chi_\lambda(\beta) \chi_\lambda(\alpha) \right) \mathcal{C}_\alpha \\ \sum_{\lambda \vdash n} \frac{n!}{d_\lambda} \chi_\lambda(\beta) E_\lambda &= \sum_{\alpha \vdash n} \frac{n!}{|\mathcal{C}_\alpha|} \delta_{\alpha\beta} \mathcal{C}_\alpha \\ \sum_{\lambda \vdash n} \frac{\chi_\lambda(\alpha)}{d_\lambda} E_\lambda &= \frac{1}{|\mathcal{C}_\alpha|} \mathcal{C}_\alpha. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Agora, podemos formular problemas de fatoração utilizando produtos de \mathcal{C}_μ . Então, considere a seguinte expressão

$$\mathcal{C}_{\alpha_1} \mathcal{C}_{\alpha_2} \cdots \mathcal{C}_{\alpha_r} = \sum_{\mu \vdash n} F^{(1)}(\vec{\alpha}, \mu) \mathcal{C}_\mu. \quad (6.33)$$

No lado esquerdo, estamos tomando todos os produtos de permutações possíveis do tipo $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_r$ tais que o ciclo-tipo de σ_i é α_i . Do lado direito as permutações que resultam desse produto são agrupadas de acordo com o ciclo-tipo μ . O termo de multiplicidade, $F^{(1)}(\vec{\alpha}, \mu)$, nos diz quantas são as r -uplas $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ tais que seus ciclo-tipos são $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ e o ciclo-tipo do produto $\sigma_1 \cdots \sigma_r$ é μ .

Para obter uma expressão para o produto, escrevemos \mathcal{C}_{α_i} como combinação linear de E_{β_i} ,

$$\mathcal{C}_{\alpha_1} \mathcal{C}_{\alpha_2} \cdots \mathcal{C}_{\alpha_r} = |\mathcal{C}_{\alpha_1}| \cdots |\mathcal{C}_{\alpha_r}| \sum_{\beta_1, \dots, \beta_r \vdash n} \frac{\chi_{\beta_1}(\alpha_1) \cdots \chi_{\beta_r}(\alpha_r)}{d_{\beta_1} \cdots d_{\beta_r}} E_{\beta_1} \cdots E_{\beta_r}. \quad (6.34)$$

Porém, vemos que $\{E_\mu\}$ são ortonormais, então

$$\mathcal{C}_{\alpha_1} \mathcal{C}_{\alpha_2} \cdots \mathcal{C}_{\alpha_r} = |\mathcal{C}_{\alpha_1}| \cdots |\mathcal{C}_{\alpha_r}| \sum_{\beta \vdash n} \frac{\chi_\beta(\alpha_1) \cdots \chi_\beta(\alpha_r)}{d_\beta^r} E_\beta. \quad (6.35)$$

Por fim, escrevemos E_β como combinação linear de \mathcal{C}_μ e coletamos os coeficiente de \mathcal{C}_μ para

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\alpha_1}\mathcal{C}_{\alpha_2}\cdots\mathcal{C}_{\alpha_r} &= |\mathcal{C}_{\alpha_1}|\cdots|\mathcal{C}_{\alpha_r}|\sum_{\beta\vdash n}\frac{\chi_\beta(\alpha_1)\cdots\chi_\beta(\alpha_r)}{d_\beta^r}\left(\frac{d_\beta}{n!}\sum_{\mu\vdash n}\chi_\beta(\mu)\mathcal{C}_\mu\right) \\ &= \sum_{\mu\vdash n}\left(\frac{|\mathcal{C}_{\alpha_1}|\cdots|\mathcal{C}_{\alpha_r}|}{n!}\sum_{\beta\vdash n}\frac{\chi_\beta(\alpha_1)\cdots\chi_\beta(\alpha_r)}{d_\beta^{r-1}}\chi_\beta(\mu)\right)\mathcal{C}_\mu. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Logo,

$$F^{(1)}(\vec{\alpha}, \mu) = \frac{|\mathcal{C}_{\alpha_1}|\cdots|\mathcal{C}_{\alpha_r}|}{n!}\sum_{\beta\vdash n}\frac{\chi_\beta(\alpha_1)\cdots\chi_\beta(\alpha_r)}{d_\beta^{r-1}}\chi_\beta(\mu). \quad (6.37)$$

Em particular, se queremos fatorar a identidade, então $\mu = [1^n]$, o que nos leva a $\chi_\beta(\mu) = d_\beta$, o que denotamos

$$F^{(1)}(\vec{\alpha}) = \frac{|\mathcal{C}_{\alpha_1}|\cdots|\mathcal{C}_{\alpha_r}|}{n!}\sum_{\beta\vdash n}\frac{\chi_\beta(\alpha_1)\cdots\chi_\beta(\alpha_r)}{d_\beta^{r-2}}. \quad (6.38)$$

Quando as permutações pertencem a um grupo S_{2n} , podemos ainda caracterizar o produto pelo coset-tipo dos fatores. Agora, considerando que α_i é o coset-tipo de σ_i , ou seja, $\sigma_i \in K_{\alpha_i}$, temos

$$F^{(2)}(\vec{\alpha}) = \frac{|K_{\alpha_1}||K_{\alpha_2}|\cdots|K_{\alpha_r}|}{(2n)!}\sum_{\beta\vdash n}d_{2\beta}\omega_\beta(\alpha_1)\cdots\omega_\beta(\alpha_r) \quad (6.39)$$

r -uplas $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ tais que $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_r = id$ com coset-tipos $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ [99].

Para obter essa expressão procedemos como para a fórmula de Frobenius. Mas, agora, vamos agrupar as permutações pelo coset-tipo, definimos

$$D_\mu = \frac{d_{2\mu}}{(2n)!}\sum_{\pi \in S_{2n}}\omega_\mu(\pi)\pi. \quad (6.40)$$

Assim como $\{E_\mu\}$, $\{D_\mu\}$ também são ortonormais entre si,

$$\begin{aligned} D_\mu D_\lambda &= \frac{d_{2\mu}d_{2\lambda}}{(2n)!^2}\sum_{\pi_1, \pi_2 \in S_{2n}}\omega_\mu(\pi_1)\omega_\lambda(\pi_2)\pi_1\pi_2, \text{ fazendo } \rho = \pi_1\pi_2, \\ &= \frac{d_{2\mu}d_{2\lambda}}{(2n)!^2}\sum_{\rho, \pi_1 \in S_{2n}}\omega_\mu(\pi_1)\omega_\lambda(\pi_1^{-1}\rho)\rho, \text{ utilizando a Eq. (2.12),} \\ &= \frac{d_\mu d_\lambda}{(2n)!}\sum_{\rho \in S_{2n}}\left(\frac{(2n)!}{d_{2\mu}}\omega_\mu(\rho)\delta_{\mu\lambda}\right)\rho \\ &= \left(\frac{d_{2\mu}}{(2n)!}\sum_{\rho \in S_n}\omega_\mu(\rho)\rho\right)\delta_{\mu\lambda} = D_\mu\delta_{\mu\lambda}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Note que $\omega_\mu(\pi)$ não distingue entre as diferentes permutações π que possuem o mesmo coset-tipo. Então, definindo

$$K_\mu = \sum_{\substack{\pi \in S_{2n} \\ [\pi] = \mu}}\pi, \quad (6.42)$$

a combinação linear das permutações de S_{2n} com coset-tipo μ com coeficientes iguais a 1, temos

$$D_\lambda = \frac{d_{2\lambda}}{(2n)!} \sum_{\mu \vdash n} \omega_\lambda(\mu) K_\mu. \quad (6.43)$$

Podemos também expressar K_α em função de D_λ

$$\begin{aligned} \omega_\lambda(\alpha) D_\lambda &= \omega_\lambda(\alpha) \frac{d_{2\lambda}}{(2n)!} \sum_{\mu \vdash n} \omega_\lambda(\mu) K_\mu \\ \sum_{\lambda \vdash n} \omega_\lambda(\alpha) D_\lambda &= \frac{1}{(2n)!} \sum_{\mu \vdash n} \left(\sum_{\lambda \vdash n} d_{2\lambda} \omega_\lambda(\alpha) \omega_\lambda(\mu) \right) K_\mu, \text{ pela Eq. (2.13),} \\ \sum_{\lambda \vdash n} \omega_\lambda(\alpha) D_\lambda &= \frac{1}{(2n)!} \sum_{\mu \vdash n} \frac{(2n)!}{|K_\mu|} K_\mu \\ \sum_{\lambda \vdash n} \omega_\lambda(\alpha) D_\lambda &= \frac{1}{|K_\mu|} K_\mu \end{aligned} \quad (6.44)$$

Então, para responder à pergunta de quantas são as r -uplas $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ tais que seus coset-tipos são $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ e o coset-tipo do produto $\sigma_1 \cdots \sigma_r$ é μ , devemos encontrar $F^{(2)}(\tilde{\alpha}, \mu)$ em

$$K_{\alpha_1} \cdots K_{\alpha_r} = \sum_{\mu \vdash n} F^{(2)}(\tilde{\alpha}, \mu) K_\mu. \quad (6.45)$$

De maneira análoga ao que foi feito para a fórmula de Frobenius, utilizamos a ortonormalidade de $\{D_\mu\}$

$$\begin{aligned} K_{\alpha_1} \cdots K_{\alpha_r} &= |K_{\alpha_1}| \cdots |K_{\alpha_r}| \sum_{\beta_1, \dots, \beta_r \vdash n} \omega_{\beta_1}(\alpha_1) \cdots \omega_{\beta_r}(\alpha_r) D_{\beta_1} \cdots D_{\beta_r} \\ &= |K_{\alpha_1}| \cdots |K_{\alpha_r}| \sum_{\beta \vdash n} \omega_\beta(\alpha_1) \cdots \omega_\beta(\alpha_r) D_\beta, \text{ pois } D_\mu D_\nu = \delta_{\mu\nu} D_\nu \\ &= |K_{\alpha_1}| \cdots |K_{\alpha_r}| \sum_{\beta \vdash n} \omega_\beta(\alpha_1) \cdots \omega_\beta(\alpha_r) \left(\frac{d_{2\beta}}{(2n)!} \sum_{\mu \vdash n} \omega_\beta(\mu) D_\mu \right) \\ &= \sum_{\mu \vdash n} \left(\frac{|K_{\alpha_1}| \cdots |K_{\alpha_r}|}{(2n)!} \sum_{\beta \vdash n} d_{2\beta} \omega_\beta(\alpha_1) \cdots \omega_\beta(\alpha_r) \omega_\beta(\mu) \right) D_\mu. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Logo,

$$F^{(2)}(\tilde{\alpha}, \mu) = \frac{|K_{\alpha_1}| \cdots |K_{\alpha_r}|}{(2n)!} \sum_{\beta \vdash n} d_{2\beta} \omega_\beta(\alpha_1) \cdots \omega_\beta(\alpha_r) \omega_\beta(\mu). \quad (6.47)$$

Em particular, se estamos interessados em fatorações da identidade, devemos ter $\mu = [1^n]$ e $\omega_\beta(\mu) = 1$, e denotamos

$$F^{(2)}(\tilde{\alpha}) = \frac{|K_{\alpha_1}| \cdots |K_{\alpha_r}|}{(2n)!} \sum_{\beta \vdash n} d_{2\beta} \omega_\beta(\alpha_1) \cdots \omega_\beta(\alpha_r). \quad (6.48)$$

O último caso de fatorações que devemos discutir são originárias dos mergulhos definidos anteriormente. Com efeito, considere uma permutação π de S_n e seus respectivos mergulhos π_o e π_e . Considere o efeito de aplicar $\pi_o \pi_e$ a um bloco do *matching* trivial,

digamos $\{2i - 1, 2i\}$. Como π_e atua nos índices pares e preserva os índices ímpares, ficamos com

$$\pi_o \pi_e (\{2i - 1, 2i\}) = \pi_o (\{2i - 1, 2\pi(i)\}); \quad (6.49)$$

agora, lembrando que π_o preserva os índices pares (e $2\pi(i)$ é par) e atua nos ímpares, ficamos com

$$\pi_o \pi_e (\{2i - 1, 2i\}) = \{2\pi(i) - 1, 2\pi(i)\} = \{2k - 1, 2k\}, \text{ para algum } 1 \leq k \leq n. \quad (6.50)$$

Logo, $\pi_o \pi_e$ não altera o matching trivial. Podemos dizer que todo produto $\pi_o \pi_e$ corresponde a uma permutação Hiperoctaedro. Mas será que podemos dizer que toda permutação do Hiperoctaedro corresponde a um produto $\pi_o \pi_e$ para algum π em S_n ? A resposta é: não. Pois, a partir de S_n , só podemos criar $n!$ produtos do tipo $\pi_o \pi_e$ e H_n tem $2^n n!$ elementos.

Para identificar os fatores faltantes, note que cada bloco do tipo $\{2k - 1, 2k\}$ é invariante pela permutação $(2k - 1 \ 2k)$ (uma involução). Note que $\{id, (2k - 1 \ 2k)\}$ é uma cópia de S_2 que atua em índices diferentes. Podemos ter n cópias de S_2 desse tipo. E podemos combinar diferentes produtos dessas involuções e enxergá-los como permutações de S_{2n} . O subconjunto dessas involuções em S_{2n} é denotado $S_2^{\otimes n}$. Assim, $S_2^{\otimes n}$ é composto por duas cópias de S_2 , uma que atua nos índices 1 e 2, $\{id, (1 \ 2)\}$, e outra que atua nos índices 3 e 4, $\{id, (3 \ 4)\}$, vistas como permutações de S_4 , e $S_2^{\otimes n}$ é gerado por todas as combinações de produtos destes conjuntos, temos $S_2^{\otimes n} = \{id, (1 \ 2), (3 \ 4), (1 \ 2)(3 \ 4)\}$.

Agora, olhemos para o resultado de aplicar $\pi_o \pi_e \sigma$, com $\sigma \in S_2^{\otimes n}$, num bloco do *matching* trivial, temos dois casos, pois a involução $(2i - 1 \ 2i)$ pode ou não fazer parte de σ ,

$$\pi_o \pi_e \sigma (\{2i - 1, 2i\}) = \begin{cases} \pi_o \pi_e (\{2i - 1, 2i\}) = \{2\pi(i) - 1, 2\pi(i)\} \\ \pi_o \pi_e (\{2i, 2i - 1\}) = \{2\pi(i), 2\pi(i) - 1\} \end{cases}. \quad (6.51)$$

Agora, de fato conseguimos representar uma permutação do Hiperoctaedro, duas formas de obter o mesmo bloco do *matching* trivial. Além do mais, se contabilizarmos quantos são os pares (π, σ) , $\pi \in S_n$ e $\sigma \in S_2^{\otimes n}$, tais que $\pi_o \pi_e \sigma$, temos $n!$ permutações em S_n e 2^n permutações em $S_2^{\otimes n}$, o que totaliza $2^n n!$, precisamente a quantidade de permutações no Hiperoctaedro.

Portanto, toda permutação h do Hiperoctaedro admite uma fatoração do tipo $h = \pi_o \pi_e \sigma$ com $\pi_o \in S_n^{(o)}$, $\pi_e \in S_n^{(e)}$ e $\sigma \in S_2^{\otimes n}$.

6.4 Demonstrações

6.4.1 Proposição 1

Começamos escrevendo o imanente como um produto de elementos de matriz do tipo

$$\text{Imm}_\gamma(U) = \sum_{\pi \in S_n} \chi_\gamma(\pi) \prod_{k=1}^n U_{k, \pi(k)}. \quad (6.52)$$

E a média do módulo ao quadrado é

$$\mathcal{I}_\gamma^{\mathcal{U}}(N) = \langle |\text{Imm}_\gamma(U)|^2 \rangle_{\mathcal{U}(N)}. \quad (6.53)$$

Expandindo $\mathcal{I}_\gamma^{\mathcal{U}}(N)$ em termos dos elementos de matriz, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\gamma^{\mathcal{U}} &= \left\langle \left| \sum_{\pi \in S_n} \prod_{i=1}^n \chi_\gamma(\pi) U_{i\pi(i)} \right|^2 \right\rangle_{\mathcal{U}(N)} \\ &= \sum_{\pi_1, \pi_2 \in S_n} \chi_\gamma(\pi_1) \chi_\gamma(\pi_2) \left\langle \prod_{i=1}^n U_{i\pi_1(i)} U_{i\pi_2(i)}^* \right\rangle_{\mathcal{U}(N)}. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Podemos utilizar o maquinário das funções de Weingarten e obter uma expressão para média dos elementos de matriz como uma soma sobre partições. Utilizando a Eq. (2.74), temos

$$\left\langle \prod_{i=1}^n U_{i\pi_1(i)} U_{i\pi_2(i)}^* \right\rangle_{\mathcal{U}(N)} = \sum_{\sigma, \tau \in S_n} \delta_\sigma(\vec{n}, \vec{n}) \delta_\tau(\pi_1(\vec{n}), \pi_2(\vec{n})) W_U^N(\sigma^{-1}\tau), \quad (6.55)$$

onde definimos a seguinte notação para a lista de índices $\vec{n} = (1, 2, \dots, n-1, n)$.

Observe que em $\delta_\tau(\pi_1(\vec{n}), \pi_2(\vec{n}))$ as duas listas a serem verificadas através de τ são permutadas por π_1 e π_2 . Podemos descrever os elementos da lista $\pi_1(\vec{n})$ como $[\pi(\vec{n})]_i = n_{\pi(i)}$, ao passo que $[\tau(\pi(\vec{n}))]_i = [\pi(\vec{n})]_{\tau(i)} = n_{\pi\tau(i)}$. Então, pela definição na Eq. (2.75), temos

$$\begin{aligned} \delta_\tau(\pi_1(\vec{n}), \pi_2(\vec{n})) &= \prod_{i=1}^n \delta_{[\pi_1(\vec{n})]_i [\pi_2(\vec{n})]_{\tau(i)}} \\ &= \prod_{i=1}^n \delta_{n_{\pi_1(i)} n_{\pi_2(\tau(i))}}; \end{aligned} \quad (6.56)$$

façamos uma mudança de índices no produtório tal que $i = \pi_1^{-1}(k)$, com isso, obtemos

$$\begin{aligned} \delta_\tau(\pi_1(\vec{n}), \pi_2(\vec{n})) &= \prod_{k=1}^n \delta_{n_{\pi_1^{-1}(k)} n_{\pi_2(\tau(\pi_1^{-1}(k)))}} \\ &= \prod_{k=1}^n \delta_{n_k n_{\pi_2(\tau(\pi_1^{-1}(k)))}} \\ &= \prod_{k=1}^n \delta_{n_k n_{\pi_2 \tau \pi_1^{-1}(k)}} = \delta_{\pi_2 \tau \pi_1^{-1}}(\vec{n}, \vec{n}). \end{aligned} \quad (6.57)$$

Voltando à média do módulo do imanente, ficamos com

$$\mathcal{I}_\gamma^{\mathcal{U}}(N) = \sum_{\substack{\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{S}_n \\ \sigma, \tau \in \mathcal{S}_n}} \chi_\gamma(\pi_1) \chi_\gamma(\pi_2) \delta_\sigma(\vec{n}, \vec{n}) \delta_{\pi_2 \tau \pi_1^{-1}}(\vec{n}, \vec{n}) W_U^N(\sigma^{-1} \tau). \quad (6.58)$$

Já que a lista \vec{n} possui somente índices distintos, $\vec{n} = (1, 2, \dots, n-1, n)$, tanto $\delta_\sigma(\vec{n}, \vec{n})$ e $\delta_{\pi_2 \tau \pi_1^{-1}}(\vec{n}, \vec{n})$ serão diferentes de zero se, e somente se, cada permutação corresponder à identidade, ou seja, $\sigma = id$ e $\pi_2 \tau \pi_1^{-1} = id$. A soma sobre σ desaparece e se escrevemos τ em função de π_1 e π_2 , $\tau = \pi_2^{-1} \pi_1$, ficamos apenas com as somas sobre π_1 e π_2

$$\mathcal{I}_\gamma^{\mathcal{U}}(N) = \sum_{\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{S}_n} \chi_\gamma(\pi_1) \chi_\gamma(\pi_2) W_U^N(\pi_2^{-1} \pi_1). \quad (6.59)$$

Podemos expandir a função de Weingarten unitária como uma soma sobre caracteres, Eq. (2.76), e utilizar a relação de ortogonalidade entre caracteres na Eq. (2.5),

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\gamma^{\mathcal{U}}(N) &= \sum_{\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{S}_n} \chi_\gamma(\pi_1) \chi_\gamma(\pi_2) \left(\frac{1}{n!} \sum_{\lambda \vdash n} \chi_\lambda(\sigma) \frac{d_\lambda}{[N]_\lambda^{(1)}} \right) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq N}} \frac{d_\lambda}{[N]_\lambda^{(1)}} \sum_{\pi_2 \in \mathcal{S}_n} \chi_\gamma(\pi_2) \left(\sum_{\pi_1 \in \mathcal{S}_n} \chi_\gamma(\pi_1) \chi_\lambda(\pi_1 \pi_2^{-1}) \right) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq N}} \frac{d_\lambda}{[N]_\lambda^{(1)}} \frac{n! \delta_{\lambda, \gamma}}{d_\gamma} \left(\sum_{\pi_2 \in \mathcal{S}_n} \chi_\gamma(\pi_2) \chi_\gamma(\pi_2) \right), \text{ pela Eq. (2.5)} \\ &= \frac{n!}{[N]_\gamma^{(1)}}. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Em particular,

$$[N]_{[n]}^{(1)} = \prod_{i=1}^1 \prod_{j=1}^n (N + j - i) = \prod_{j=1}^n (N + j - i) = \frac{(N + n - 1)!}{(N - 1)!}, \quad (6.61)$$

o que nos leva ao valor médio para o permanente,

$$\langle |\text{Per}_n(U)|^2 \rangle_{\mathcal{U}} = n! \frac{(N - 1)!}{(N + n - 1)!}. \quad (6.62)$$

Os primeiros exemplos são

$$\langle |\text{Per}_1(U)|^2 \rangle_{\mathcal{U}} = \frac{1}{N} \quad (6.63)$$

$$\langle |\text{Per}_2(U)|^2 \rangle_{\mathcal{U}} = \frac{2}{N(N + 1)} \quad (6.64)$$

$$\langle |\text{Per}_3(U)|^2 \rangle_{\mathcal{U}} = \frac{6}{N(N + 1)(N + 2)} \quad (6.65)$$

$$\langle |\text{Per}_4(U)|^2 \rangle_{\mathcal{U}} = \frac{24}{N(N + 1)(N + 2)(N + 3)}. \quad (6.66)$$

Por outro lado,

$$[N]_{[1^n]}^{(1)} = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^1 (N + j - i) = \prod_{i=1}^n (N + 1 - i) = \frac{N!}{(N - n + 1)!}, \quad (6.67)$$

o que nos leva à média para o determinante

$$\langle |\text{Det}_n(U)|^2 \rangle_{\mathcal{U}} = n! \frac{(N - n + 1)!}{N!}. \quad (6.68)$$

Os primeiros exemplos são

$$\langle |\text{Det}_1(U)|^2 \rangle_{\mathcal{U}} = 1 \quad (6.69)$$

$$\langle |\text{Det}_2(U)|^2 \rangle_{\mathcal{U}} = \frac{2}{N} \quad (6.70)$$

$$\langle |\text{Det}_3(U)|^2 \rangle_{\mathcal{U}} = \frac{6}{N(N-1)} \quad (6.71)$$

$$\langle |\text{Det}_4(U)|^2 \rangle_{\mathcal{U}} = \frac{24}{N(N-1)(N-2)}. \quad (6.72)$$

Como esperado de matrizes unitárias, $\lim_{n \rightarrow N} \langle |\text{Det}_n(U)|^2 \rangle_{\mathcal{U}} = 1$.

6.4.2 Proposição 2

Se nos restringirmos ao imanente mais simples, o permanente, que deriva da partição $\gamma = [n]$. Lembremos que $\chi_{[n]}(\pi) = 1$ para qualquer permutação π em S_n , isto produz um imanente em que as parcelas de produtos de elementos de matriz tem todas peso igual a 1. Seja $\text{Per}_n(U)$ o permanente de um bloco diagonal superior de tamanho $n \times n$ de uma matriz unitária U de tamanho N . Denotemos

$$P_n(N) = \langle |\text{Per}_n(U)|^4 \rangle_{\mathcal{U}(N)}. \quad (6.73)$$

Expandindo em termos dos elementos de matriz,

$$P_n(N) = \sum_{a,b,c,d \in S_n} \left\langle \prod_{i=1}^n U_{a(i)i} U_{b(i)i} U_{ic(i)}^* U_{id(i)}^* \right\rangle_{\mathcal{U}(N)}. \quad (6.74)$$

Utilizando a função de Weingarten, Eq. (2.76), ficamos com

$$P_n(N) = \sum_{a,b,c,d \in S_n} \sum_{\sigma, \tau \in S_{2n}} \delta_{\sigma}(a(\vec{n}) \diamond b(\vec{n}), \vec{n} \diamond \vec{n}) \delta_{\tau}(\vec{n} \diamond \vec{n}, c(\vec{n}) \diamond d(\vec{n})) W_U^N(\sigma^{-1}\tau), \quad (6.75)$$

onde o símbolo \diamond representa uma intercalação de duas listas: $\vec{i} \diamond \vec{j} = (i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_n, j_n)$.

Podemos mergulhar $a, b, c, d \in S_n$ em S_{2n} através dos mergulhos definidos na Sec. 6.3.1 e obter $a_o, c_o \in S_n^{(o)}$ (subconjunto das permutações de S_{2n} que fixam os números pares) e $b_e, d_e \in S_n^{(e)}$ (subconjunto das permutações de S_{2n} que fixam os números ímpares). Com isso, se, por exemplo, a permutação a atua na lista intercalada da esquerda, $a(\vec{n}) \diamond \vec{n}$,

a permutação a_o produz o mesmo resultado atuando sobre a lista intercalada como um todo pois fixa as posições pares da lista, temos $a(\vec{n}) \diamond \vec{n} = a(\vec{n} \diamond \vec{n})$. Além disso, podemos incorporar as permutações que atuam nas listas na permutação que é verificada pela δ , como na Eq. (6.57),

$$\begin{aligned} P_n(N) &= \sum_{a,b,c,d \in S_n} \sum_{\sigma, \tau \in S_{2n}} \delta_{\sigma}(a_o b_e(\vec{n} \diamond \vec{n}), \vec{n} \diamond \vec{n}) \delta_{\tau}(\vec{n} \diamond \vec{n}, c_o d_e(\vec{n} \diamond \vec{n})) W_U^N(\sigma^{-1} \tau) \\ &= \sum_{a,b,c,d \in S_n} \sum_{\sigma, \tau \in S_{2n}} \delta_{\sigma b_e^{-1} a_o^{-1}}(\vec{n} \diamond \vec{n}, \vec{n} \diamond \vec{n}) \delta_{c_o d_e \tau}(\vec{n} \diamond \vec{n}, \vec{n} \diamond \vec{n}) W_U^N(\sigma^{-1} \tau). \end{aligned} \quad (6.76)$$

A quantidade $\delta_{\sigma b_e^{-1} a_o^{-1}}[\vec{n} \diamond \vec{n}, \vec{n} \diamond \vec{n}]$ só é diferente zero em dois casos: quando a permutação $\sigma b_e^{-1} a_o^{-1}$ permuta ou não os índices pares e ímpares vizinhos, $2i-1$ e $2i$, para $i = 1, \dots, n$. Portanto, segue que a permutação $b_e^{-1} a_o^{-1} \sigma$ pertence ao grupo $S_2^{\otimes n}$, definido na Sec 6.3.2. O mesmo vale para $\delta_{c_o d_e \tau}(\vec{n} \diamond \vec{n}, \vec{n} \diamond \vec{n})$ e $\tau c_o d_e$. Escrevendo

$$\tau c_o d_e = \sigma_1 \in S_2^{\otimes n} \quad b_e^{-1} a_o^{-1} \sigma = \sigma_2^{-1} \in S_2^{\otimes n}, \quad (6.77)$$

ficamos com

$$\begin{aligned} P_n(N) &= \sum_{a,b,c,d \in S_n} \sum_{\sigma_1, \sigma_2 \in S_2^{\otimes n}} W_U^N(b_e^{-1} a_o^{-1} \sigma_2 d_e^{-1} c_o^{-1} \sigma_1) \\ &= \sum_{a,b,c,d \in S_n} \sum_{\sigma_1, \sigma_2 \in S_2^{\otimes n}} W_U^N(\sigma_1 b_e a_o \sigma_2 d_e c_o), \end{aligned} \quad (6.78)$$

onde apenas substituímos as permutações por seus inversos e utilizamos a propriedade cíclica dos caracteres.

Em S_n , sempre podemos encontrar algum ρ tal que $a_o = b_o \rho_o$. Para verificar esse fato, começamos com $a_o, b_o \in S_n^{(o)}$, temos

$$\begin{aligned} a_o &= a_o \\ &= (b_o b_o^{-1}) a_o \\ &= b_o (b_o^{-1} a_o), \text{ faça } b_o^{-1} a_o = \rho_o \\ &= b_o \rho_o, \end{aligned} \quad (6.79)$$

por fim, aplicamos a inversão do mergulho definido na Sec 6.3.1 a fim de encontrar um representante ρ_o para S_n , digamos ρ . Da mesma forma, podemos mostrar que existe $\theta \in S_n$ tal que $c_o = d_o \theta_o$. Temos

$$P_n(N) = \sum_{\rho, \theta \in S_n} \sum_{\sigma_1, \sigma_2 \in S_2^{\otimes n}} W_U^N(\sigma_1 b_e b_o \rho_o \sigma_2 d_e d_o \theta_o). \quad (6.80)$$

Conforme discutimos na Sec. 6.3.2, podemos identificar duas permutações do Hiperocaedro fatoradas. Façamos $\sigma_1 b_e b_o = h_1$ e $\sigma_2 d_e d_o = h_2$, com $h_1, h_2 \in H_n$. Então,

$$\begin{aligned} P_n(N) &= \sum_{\rho, \theta \in S_n} \sum_{h_1, h_2 \in H_n} W_U^N(h_1 \rho_o h_2 \theta_o) \\ &= \frac{1}{(2n)!} \sum_{\rho, \theta \in S_n} \sum_{h_1, h_2 \in H_n} \sum_{\substack{\mu \vdash 2n \\ \ell(\mu) \leq N}} d_{\mu} \frac{\chi_{\mu}(h_1 \rho_o h_2 \theta_o)}{[N]_{\mu}^{(1)}}, \end{aligned} \quad (6.81)$$

onde escrevemos a função de Weingarten unitária como uma soma sobre caracteres do grupo de permutações, como na Eq. (2.76).

Nos concentrando em uma das somas sobre o Hiperoctaedro, pela Eq. (2.10), vemos

$$\sum_{h_1 \in H_n} \chi_\mu(h_1 \rho_o h_2 \theta_o) = 2^n n! \omega_\lambda(\rho_o h_2 \theta_o) \delta_{\mu, 2\lambda}, \quad (6.82)$$

ou seja, esta soma só é diferente de zero quando a partição $\mu \vdash 2n$ corresponder a uma partição dobrada $\mu = 2\lambda$, com $\lambda \vdash n$; e, nesse caso, é proporcional à função esférica zonal ω_λ . Logo,

$$P_n(N) = \frac{2^n n!}{(2n)!} \sum_{\rho, \theta \in S_n} \sum_{h_2 \in H_n} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq N}} d_{2\lambda} \frac{\omega_\lambda(\rho_o h_2 \theta_o)}{[N]_{2\lambda}^{(1)}}. \quad (6.83)$$

Vimos que a função esférica zonal ω_λ depende apenas do coset-tipo de seu argumento $\eta = \rho_o h_2 \theta_o$, Sec. 2.1.1. Dito isto, podemos substituir as somas sobre permutações agrupando-as pelos seus respectivos coset-tipos. Mas, como ρ_o e θ_o são obtidos através dos mergulhos definidos na Sec. 6.3.1, seus coset-tipo correspondem aos ciclo-tipos de ρ e θ , definamos $\alpha_1 = \text{ct}(\rho)$ e $\alpha_2 = \text{ct}(\theta)$. Ora, existem $|C_{\alpha_i}|$ com ciclo-tipo α_i . O coset-tipo de h_2 é $[1^n]$, pois pertence ao Hiperoctaedro, temos $|K_{[1^n]}| = 2^n n!$ permutações com coset-tipo $[1^n]$. Por fim, se α_3 é o coset-tipo de η e $\eta = \rho_o h_2 \theta_o$ ou, escrevendo como uma fatoração da identidade, $\eta^{-1} \rho_o h_2 \theta_o = id$. Procuramos o número de 4-uplas $(\eta, \rho_o, h_2, \theta_o)$ tal que seus coset-tipos são $(\alpha_3, \alpha_1, [1^n], \alpha_2)$ que fatoram a identidade. A resposta encontra-se na Eq. (6.39)

$$|C_{\alpha_1}| |C_{\alpha_2}| |K_{\alpha_3}| |K_{[1^n]}| \sum_{\beta \vdash n} \frac{d_{2\beta}}{(2n)!} \omega_\beta(\alpha_1) \omega_\beta(\alpha_2) \omega_\beta(\alpha_3) \omega_\beta(1^n). \quad (6.84)$$

Note que $|K_{\alpha_1}|$ e $|K_{\alpha_2}|$, da Eq. (6.39), foram substituídos por $|C_{\alpha_1}|$ e $|C_{\alpha_2}|$, respectivamente, pois, conforme comentamos ρ_o e θ_o vieram dos mergulhos.

Já que $|K_{[1^n]}| = 2^n n!$ e $\omega_\beta(1^n) = 1$, ficamos com

$$P_n(N) = \left(\frac{2^n n!}{(2n)!} \right)^2 \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \beta \vdash n} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq N}} |C_{\alpha_1}| |C_{\alpha_2}| \frac{d_{2\beta} d_{2\lambda}}{[N]_{2\lambda}^{(1)}} \omega_\beta(\alpha_1) \omega_\beta(\alpha_2) \left(\sum_{\alpha_3 \vdash n} |K_{\alpha_3}| \omega_\beta(\alpha_3) \omega_\lambda(\alpha_3) \right). \quad (6.85)$$

Utilizando a relação de ortogonalidade entre funções esféricas, Eq. (2.12), obtemos

$$P_n(N) = \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \sum_{\alpha_1, \alpha_2 \vdash n} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq N}} |C_{\alpha_1}| |C_{\alpha_2}| \frac{d_{2\lambda}}{[N]_{2\lambda}^{(1)}} \omega_\lambda(\alpha_1) \omega_\lambda(\alpha_2). \quad (6.86)$$

Em seguida, definimos

$$g_\lambda = \sum_{\alpha \vdash n} |C_\alpha| \omega_\lambda(\alpha) \quad (6.87)$$

e escrevemos

$$P_n(N) = \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq N}} \frac{d_{2\lambda}}{[N]_{2\lambda}^{(1)}} g_\lambda^2. \quad (6.88)$$

O valor de g_λ pode ser calculado através da Eq. (2.33), que nos permite expressar um polinômio zonal como uma combinação linear de séries de potências

$$Z_\lambda(X) = \sum_{\mu \vdash n} \frac{|K_\mu|}{2^n n!} \omega_\lambda(\mu) p_\mu(X). \quad (6.89)$$

Substituindo a Eq. (2.9), conseguimos enxergar os componentes g_μ aparecendo,

$$Z_\lambda(X) = 2^n \sum_{\mu \vdash n} \frac{|C_\mu|}{2^{\ell(\mu)}} \omega_\lambda(\mu) p_\mu(X). \quad (6.90)$$

Agora, escolhamos X como a matriz identidade de ordem 2, seus autovalores são $(1, 1)$. Pela Eq. (2.20), temos

$$p_\mu(1, 1) = \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} (1^{\mu_i} + 1^{\mu_i}) = 2^{\ell(\mu)}. \quad (6.91)$$

Donde concluímos que

$$Z_\lambda(1, 1) = 2^n \sum_{\lambda \vdash n} |C_\lambda| \omega_\lambda(\mu) = 2^n g_\lambda. \quad (6.92)$$

Por fim, podemos calcular o valor de $Z_\lambda(1, 1)$ através da Eq. (2.36), com $N = 2$,

$$Z_\lambda(1, 1) = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \prod_{j=1}^{\lambda_i} (2j - i + 1). \quad (6.93)$$

Note que se λ tem comprimento maior que 2, o produtório acima necessariamente visita a caixa na posição $(3, 1)$, que faz com que $Z_\lambda(1, 1) = 0$. Por outro lado, escrevendo $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2]$, temos

$$\begin{aligned} Z_\lambda(1, 1) &= \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \prod_{j=1}^{\lambda_i} (2j - i + 1) \\ &= \prod_{j=1}^{\lambda_1} (2j) \prod_{j=1}^{\lambda_2} (2j - 1) \\ &= (2\lambda_1)!! (2\lambda_2 - 1)!! = \frac{2^{\lambda_1} \lambda_1! (2\lambda_2)!}{2^{\lambda_2} \lambda_2!}. \end{aligned} \quad (6.94)$$

Se notamos que $2^n = 2^{\lambda_1 + \lambda_2}$, obtemos

$$g_{(\lambda_1, \lambda_2)} = \frac{\lambda_1! (2\lambda_2)!}{4^{\lambda_2} \lambda_2!} \quad (6.95)$$

Os primeiros valores das médias $P_n(N) = \langle |\text{Per}_n(U)|^4 \rangle_{\mathcal{U}(N)}$ são

$$P_1(N) = \frac{2}{N(N+1)} \quad (6.96)$$

$$P_2(N) = \frac{4(3N^2 - N + 2)}{N^2(N-1)(N+1)(N+2)(N+3)} \quad (6.97)$$

$$P_3(N) = \frac{144(N^2 + N + 4)}{N^2(N-1)(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)(N+5)} \quad (6.98)$$

$$P_4(N) = \frac{576(5N^4 + 30N^3 + 127N^2 + 294N + 264)}{N^2(N-1)(N+1)^2(N+2)^2(N+3)(N+4)(N+5)(N+6)(N+7)} \quad (6.99)$$

Para obtermos expressões assintóticas para $N \gg 1$ usamos o fato de que $[N]_{2\lambda}^{(1)} \sim N^{2n}$ e a relação de ortogonalidade entre funções esféricas zonais, Eq. (2.12)

$$\begin{aligned}
P_n(N) &\sim \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq N}} d_{2\lambda} g_\lambda^2 \\
&= \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2 \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq N}} |\mathcal{C}_{\alpha_1}| |\mathcal{C}_{\alpha_2}| \left(\sum_{\lambda \vdash n} d_{2\lambda} \omega_\lambda(\alpha_1) \omega_\lambda(\alpha_2) \right) \\
&= \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2 \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq N}} |\mathcal{C}_{\alpha_1}| |\mathcal{C}_{\alpha_2}| \frac{(2n)!}{|K_{\alpha_1}|} \delta_{\alpha_1 \alpha_2}, \text{ pela Eq. (2.13)} \\
&= \frac{n!}{N^{2n}} \sum_{\alpha} |\mathcal{C}_{\alpha}| 2^{\ell(\alpha)}, \text{ pela Eq. (2.9)} \\
&= \frac{n!(n+1)!}{N^{2n}}, \tag{6.100}
\end{aligned}$$

onde a última equação é obtida fazendo $x = 2$ no polinômio índice de ciclos do grupo de permutações, com

$$\sum_{\pi \in S_n} x^{\ell(\pi)} = x(x+1)\cdots(x+n-1). \tag{6.101}$$

6.4.3 Proposição 3

Seguindo as notações anteriores, definamos

$$\mathcal{I}_\gamma^C(N) = \langle |\text{Imm}_\gamma(U)|^2 \rangle_{COE(N)}. \tag{6.102}$$

Novamente, escrevemos o imanente em termos dos elementos de matriz

$$\mathcal{I}_\gamma^C(N) = \sum_{a, b \in S_n} \chi_\gamma(a) \chi_\gamma(b) \left\langle \prod_{i=1}^n U_{a(i)i} U_{ib(i)}^* \right\rangle_{COE(N)}. \tag{6.103}$$

Através da Eq. (2.84), podemos calcular a média em termos da função de Weingarten do Ensemble Circular Ortogonal (COE)

$$\langle U_{i_1 i_2} \cdots U_{i_{2n-1} i_{2n}} U_{j_1 j_2}^* \cdots U_{j_{2n-1} j_{2n}}^* \rangle_{COE(N)} = \sum_{\tau \in S_{2n}} \delta_\tau(\vec{i}, \vec{j}) W^{COE}(\tau, N). \tag{6.104}$$

E obtemos

$$\mathcal{I}_\gamma^C(N) = \sum_{a, b \in S_n} \chi_\gamma(a) \chi_\gamma(b) \sum_{\tau \in S_{2n}} \delta_\tau(a(\vec{n}) \diamond \vec{n}, \vec{n} \diamond b(\vec{n})) W_O^{N+1}(\tau). \tag{6.105}$$

Assim como fizemos para o segundo momento do permanente, vamos mergulhar a e b em S_{2n} . Assim, através de a obtemos $a_o \in S_n^{(o)}$ (que atua nos índices ímpares e preserva os pares), e através de b , obtemos $b_e \in S_n^{(e)}$ (que atua nos índices pares e preserva os ímpares). Desse modo, $a(\vec{n}) \diamond \vec{n} = a_o(\vec{n} \diamond \vec{n})$ e $\vec{n} \diamond b(\vec{n}) = b_e(\vec{n} \diamond \vec{n})$. Assim, podemos trazer a_o e b_e para junto de τ

$$\delta_\tau(a_o(\vec{n} \diamond \vec{n}), b_e(\vec{n} \diamond \vec{n})) = \delta_{b_e \tau a_o^{-1}}(\vec{n} \diamond \vec{n}, \vec{n} \diamond \vec{n}). \tag{6.106}$$

Assim, como antes, quando δ_π verifica se uma lista duplicada satisfaz a permutação π , esta deve pertencer ao grupo $S_2^{\otimes n}$, conforme discutimos na Sec 6.3.2. Fazendo $b_e \tau a_o^{-1} = \sigma$ temos

$$\mathcal{I}_\gamma^C(N) = \sum_{a, b \in S_n} \sum_{\sigma \in S_2^{\otimes n}} \chi_\gamma(a) \chi_\gamma(b) W_O^{N+1}(b_e^{-1} \sigma a_o). \quad (6.107)$$

A função de Weingarten depende somente do coset-tipo do argumento, $b_e^{-1} \sigma a_o$. Então, podemos empregar novamente um agrupamento na soma através do coset-tipo de $b_e^{-1} \sigma a_o = \eta$. Então, procuramos o número de fatorações da identidade, $b_e^{-1} \sigma a_o \eta^{-1} = id$, tais que (a_o, σ, b_e, η) tenham coset-tipos $(\alpha_1, [1^n], \alpha_2, \alpha_3)$, note que apesar de que as permutações em $S_2^{\otimes n}$ tenham coset-tipo $[1^n]$ temos $S_2^{\otimes n} \neq H_n$. Já que a_o e b_e são provenientes dos mergulhos, seus coset-tipos correspondem ao ciclo-tipos de a (ou seja, $a \in \mathcal{C}_{\alpha_1}$) e b (ou seja, $b \in \mathcal{C}_{\alpha_2}$), então, o número de fatorações de cada tipo é

$$|\mathcal{C}_{\alpha_1}| |\mathcal{C}_{\alpha_2}| |K_{\alpha_3}| |S_2^{\otimes n}| \sum_{\beta \vdash n} \frac{d_{2\beta}}{(2n)!} \omega_\beta(\alpha_1) \omega_\beta(\alpha_2) \omega_\beta(\alpha_3) \omega_\beta([1^n]), \quad (6.108)$$

lembrando que $|S_2^{\otimes n}| = 2^n$ e $\omega_\beta([1^n]) = 1$.

Podemos expressar a função de Weingarten do COE como uma combinação linear de funções esféricas e utilizar relações de ortogonalidade

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\gamma^C(N) &= \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2 \\ \alpha_3, \beta \vdash n}} \chi_\gamma(\alpha_1) \chi_\gamma(\alpha_2) \left(2^n |\mathcal{C}_{\alpha_1}| |\mathcal{C}_{\alpha_2}| |K_{\alpha_3}| \frac{d_{2\beta}}{(2n)!} \omega_\beta(\alpha_1) \omega_\beta(\alpha_2) \omega_\beta(\alpha_3) \right) W_O^{N+1}(\alpha_3) \\ &= \frac{4^n n!}{(2n)!^2} \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2 \\ \beta, \lambda \vdash n}} \chi_\gamma(\alpha_1) \chi_\gamma(\alpha_2) |\mathcal{C}_{\alpha_1}| |\mathcal{C}_{\alpha_2}| \frac{d_{2\beta} d_{2\lambda}}{[N+1]_\lambda^{(2)}} \omega_\beta(\alpha_1) \omega_\beta(\alpha_2) \left(\sum_{\alpha_3 \vdash n} |K_{\alpha_3}| \omega_\beta(\alpha_3) \omega_\lambda(\alpha_3) \right) \\ &= \frac{4^n n!}{(2n)!^2} \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2 \\ \beta, \lambda \vdash n}} \chi_\gamma(\alpha_1) \chi_\gamma(\alpha_2) |\mathcal{C}_{\alpha_1}| |\mathcal{C}_{\alpha_2}| \frac{d_{2\beta} d_{2\lambda}}{[N+1]_\lambda^{(2)}} \omega_\beta(\alpha_1) \omega_\beta(\alpha_2) \frac{(2n)!}{d_{2\lambda}} \delta_{\beta\lambda} \\ &= \frac{4^n n!}{(2n)!} \sum_{\alpha_1, \alpha_2 \vdash n} \chi_\gamma(\alpha_1) \chi_\gamma(\alpha_2) |\mathcal{C}_{\alpha_1}| |\mathcal{C}_{\alpha_2}| \frac{d_{2\lambda}}{[N+1]_\lambda^{(2)}} \omega_\lambda(\alpha_1) \omega_\lambda(\alpha_2) \\ &= \frac{4^n n!}{(2n)!} \sum_{\lambda \vdash n} \left(\sum_{\alpha \vdash n} |\mathcal{C}_\alpha| \chi_\gamma(\alpha) \omega_\lambda(\alpha) \right) \frac{d_{2\lambda}}{[N+1]_\lambda^{(2)}}, \end{aligned} \quad (6.109)$$

identificando

$$G_{\lambda, \gamma} = \sum_{\alpha \vdash n} |\mathcal{C}_\alpha| \omega_\lambda(\alpha) \chi_\gamma(\alpha), \quad (6.110)$$

obtemos

$$\mathcal{I}_\gamma^C(N) = \frac{4^n n!}{(2n)!} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq N}} \frac{d_{2\lambda}}{[N+1]_\lambda^{(2)}} G_{\lambda, \gamma}^2. \quad (6.111)$$

where $G_{\lambda, \gamma}$ é uma generalização da Eq.(6.9) de forma que $g_\lambda = G_{\lambda, (n)}$.

Os exemplos mais simples (quando $\gamma = [n]$) são

$$\mathcal{I}_{[1]}^C(N) = \frac{2}{N+1} \quad (6.112)$$

$$\mathcal{I}_{[2]}^C(N) = \frac{2(3N+1)}{N(N+1)(N+3)} \quad (6.113)$$

$$\mathcal{I}_{[3]}^C(N) = \frac{24}{N(N+3)(N+5)} \quad (6.114)$$

$$\mathcal{I}_{[4]}^C(N) = \frac{24(5N^2+20N+23)}{N(N+1)(N+2)(N+3)(N+5)(N+7)}. \quad (6.115)$$

Procedendo como na Sec. 6.4.2, para obtermos expressões assintóticas para $N \gg 1$ usamos o fato de que $[N+1]_\lambda^{(2)} \sim N^n$ e a relação de ortogonalidade entre funções esféricas zonais, Eq. (2.12)

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\gamma^C(N) &\sim \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq N}} d_{2\lambda} G_{\lambda, \gamma}^2 \\ &= \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2 \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq N}} |\mathcal{C}_{\alpha_1}| |\mathcal{C}_{\alpha_2}| \chi_\gamma(\alpha_1) \chi_\gamma(\alpha_2) \left(\sum_{\lambda \vdash n} d_{2\lambda} \omega_\lambda(\alpha_1) \omega_\lambda(\alpha_2) \right) \\ &= \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2 \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq N}} |\mathcal{C}_{\alpha_1}| |\mathcal{C}_{\alpha_2}| \chi_\gamma(\alpha_1) \chi_\gamma(\alpha_2) \frac{(2n)!}{|K_{\alpha_1}|} \delta_{\alpha_1 \alpha_2}, \text{ pela Eq. (2.13)} \\ &= \frac{n!}{N^{2n}} \sum_{\alpha} |\mathcal{C}_{\alpha}| 2^{\ell(\alpha)} \chi_\gamma(\alpha)^2, \text{ pela Eq. (2.9)}. \end{aligned} \quad (6.116)$$

Quando $\gamma = [n]$, temos $\chi_{[n]}(\alpha) = 1$ e podemos proceder como no final da Sec. 6.4.2 e obter

$$\mathcal{I}_{[n]}^C(N) \sim \frac{(n+1)!}{N^n} + O\left(\frac{1}{N^{n+1}}\right). \quad (6.117)$$

6.4.4 Proposição 4

Quando olhamos para $\left\langle (\text{Imm}_\gamma(U))^k \right\rangle_{\mathcal{O}(N)}$, é possível perceber que essa média vale zero quando k é ímpar. Isto ocorre porque, como veremos a diante, ao utilizarmos a Eq. (2.79), a função Δ_σ receberá como entrada uma lista de comprimento ímpar. Ora, mas, sendo σ um *matching*, representado por uma permutação de S_{2n} , o resultado de Δ_σ é sempre nulo. Portanto, devemos nos preocupar apenas com os momentos de ordem par.

O momento não nulo mais simples é

$$\mathcal{I}_\gamma^{\mathcal{O}}(N) = \left\langle (\text{Imm}_\gamma(U))^2 \right\rangle_{\mathcal{O}(N)}. \quad (6.118)$$

Como esperado, expandimos o imanente em termos dos elementos de matriz

$$\mathcal{I}_\gamma^{\mathcal{O}}(N) = \sum_{a, b \in S_n} \chi_\gamma(a) \chi_\gamma(b) \left\langle \prod_{i=1}^n U_{i, a(i)} U_{i, b(i)} \right\rangle_{\mathcal{O}(N)}, \quad (6.119)$$

podemos ainda, implementar uma mudança na ordem do produtório dado pela permutação a , ou seja, substituimos i por $a^{-1}(i)$ e, em seguida substituindo a^{-1} por a , temos

$$\mathcal{I}_\gamma^\mathcal{O}(N) = \sum_{a,b \in S_n} \chi_\gamma(a) \chi_\gamma(b) \left\langle \prod_{i=1}^n U_{a(i),i} U_{a(i),ba(i)} \right\rangle_{\mathcal{O}(N)} \quad (6.120)$$

Utilizando as funções de Weingarten do grupo Ortogonal, segundo Eq. (2.79), podemos expressar a média por

$$\mathcal{I}_\gamma^\mathcal{O}(N) = \sum_{a,b \in S_n} \sum_{\tau \in \mathcal{M}_n} \chi_\gamma(a) \chi_\gamma(b) \Delta_\sigma[a(\vec{n}) \diamond a(\vec{n})] \Delta_\tau[\vec{n} \diamond ba(\vec{n})] W_O^N(\sigma^{-1}\tau). \quad (6.121)$$

Olhando para $\Delta_\sigma[a(\vec{n}) \diamond a(\vec{n})]$, mesmo que a permutação a mude a ordem das listas, a forma intercalada de $a(\vec{n}) \diamond a(\vec{n})$ é mantida. Assim, σ deve corresponder ao *matching* trivial. E ficamos com

$$\mathcal{I}_\gamma^\mathcal{O}(N) = \sum_{a,b \in S_n} \sum_{\tau \in \mathcal{M}_n} \chi_\gamma(a) \chi_\gamma(b) \Delta_\tau[\vec{n} \diamond ba(\vec{n})] W_O^N(\tau). \quad (6.122)$$

Fazendo $ba = \pi$, temos $a = b^{-1}\pi$. Mergulhando π em S_{2n} , obtemos π_e e

$$\Delta_\tau[\vec{n} \diamond \pi(\vec{n})] = \Delta_{\pi_e\tau}[\vec{n} \diamond (\vec{n})]. \quad (6.123)$$

E, daí, segue que $\pi_e\tau$ deve corresponder ao *matching* trivial que é representado pela identidade de S_{2n} . Logo, devemos ter $\tau = \pi_e^{-1}$ e

$$\mathcal{I}_\gamma^\mathcal{O}(N) = \sum_{b, \pi \in S_n} \chi_\gamma(b^{-1}\pi) \chi_\gamma(b) W_O^N(\pi_e^{-1}). \quad (6.124)$$

A soma sobre $b \in S_n$ pode ser obtida usando-se a relação de ortogonalidade entre caracteres, Eq. (2.5),

$$\mathcal{I}_\gamma^\mathcal{O}(N) = \frac{n!}{d_\gamma} \sum_{\pi \in S_n} \chi_\gamma(\pi) W_O^N(\pi_e^{-1}). \quad (6.125)$$

A função de Weingarten do grupo Ortogonal depende apenas do coset-tipo do argumento, mas sabemos que o coset-tipo de π_e corresponde ao ciclo-tipo de π . Então, podemos agrupar a soma sobre S_n pelo ciclo-tipo das permutações

$$\mathcal{I}_\gamma^\mathcal{O}(N) = \frac{n!}{d_\gamma} \sum_{\mu \vdash n} \chi_\gamma(\mu) |\mathcal{C}_\mu| W_O^N(\mu). \quad (6.126)$$

Escrevendo explicitamente a função de Weingarten, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\gamma^\mathcal{O}(N) &= \frac{n!}{d_\gamma} \sum_{\mu \vdash n} |\mathcal{C}_\mu| \chi_\gamma(\mu) \left(\frac{2^n n!}{(2n)!} \sum_{\ell(\lambda) \leq N} \frac{d_{2\lambda}}{[N]_\lambda^{(2)}} \omega_\lambda(\mu) \right) \\ &= \frac{n!}{d_\gamma} \frac{2^n n!}{(2n)!} \sum_{\ell(\lambda) \leq N} \frac{d_{2\lambda}}{[N]_\lambda^{(2)}} \left(\sum_{\mu \vdash n} |\mathcal{C}_\mu| \chi_\gamma(\mu) \omega_\lambda(\mu) \right) \\ &= \frac{n!}{d_\gamma} \frac{2^n n!}{(2n)!} \sum_{\ell(\lambda) \leq N} \frac{d_{2\lambda}}{[N]_\lambda^{(2)}} G_{\lambda, \gamma}. \end{aligned} \quad (6.127)$$

Os primeiros exemplos do imanente mais simples, o permanente, são

$$\mathcal{I}_{[1]}^{\mathcal{O}}(N) = \frac{1}{N} \quad (6.128)$$

$$\mathcal{I}_{[2]}^{\mathcal{O}}(N) = \frac{2}{(N-1)(N+2)} \quad (6.129)$$

$$\mathcal{I}_{[3]}^{\mathcal{O}}(N) = \frac{6}{N(N-1)(N+4)} \quad (6.130)$$

$$\mathcal{I}_{[4]}^{\mathcal{O}}(N) = \frac{24}{N(N-1)(N+1)(N+6)} \quad (6.131)$$

$$(6.132)$$

Para obter a expansão assintótica, notamos que para $N \gg 1$ temos $[N]_{\lambda}^{(2)} \sim N^n$, e

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\gamma}^{\mathcal{O}}(N) &\sim \frac{n!}{d_{\gamma}} \frac{2^n n!}{(2n)!} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{d_{2\lambda}}{N^n} G_{\lambda, \gamma} \\ &= \frac{n!}{d_{\gamma}} \frac{2^n n!}{(2n)!} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{d_{2\lambda}}{N^n} \sum_{\mu \vdash n} |\mathcal{C}_{\mu}| \chi_{\gamma}(\mu) \omega_{\lambda}(\mu) \\ &= \frac{n!}{d_{\gamma}} \frac{2^n n!}{(2n)!} \sum_{\mu \vdash n} \frac{|\mathcal{C}_{\mu}|}{N^n} \chi_{\gamma}(\mu) \sum_{\lambda} d_{2\lambda} \omega_{\lambda}(\mu) \\ &= \frac{n!}{d_{\gamma}} \frac{2^n n!}{(2n)!} \sum_{\mu \vdash n} \frac{|\mathcal{C}_{\mu}|}{N^n} \chi_{\gamma}(\mu) \sum_{\lambda \vdash n} d_{2\lambda} \omega_{\lambda}(\mu) \omega_{\lambda}([1^n]), \text{ pois } \omega_{\lambda}([1^n]) = 1 \quad \forall \lambda \\ &= \frac{n!}{d_{\gamma}} \frac{2^n n!}{(2n)!} \sum_{\mu \vdash n} \frac{|\mathcal{C}_{\mu}|}{N^n} \chi_{\gamma}(\mu) \frac{(2n)!}{2^n n!} \delta_{\alpha, 1^n}, \text{ pelas Eqs. 2.13 e 2.9} \\ &= \frac{n!}{N^n}, \text{ pois } \chi_{\gamma}([1^n]) = d_{\gamma}. \end{aligned} \quad (6.133)$$

Através do cálculo de casos particulares, nos convencemos de que a seguinte identidade é verdadeira

$$\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq N}} \frac{d_{2\lambda}}{Z_{\lambda}(1^N)} G_{\lambda, \gamma} = \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{d_{\gamma}}{\{N\}_{\gamma}}, \quad (6.134)$$

onde $Z_{\lambda}(1^N) = [N]_{\lambda}^{(2)}$ são polinômios zonais avaliados na matriz identidade. E, de fato, é verdadeira. Chapuy e Dołęga [51] conseguiram provar a conjectura, por meio de um teorema no contexto de números de Hurwitz, onde a conjectura surge como uma consequência. Com isso, conseguimos expressar a média do módulo quadrado de imanentes para o grupo Ortogonal de maneira muito semelhante àquela do grupo unitário, Eq. (6.7)

$$\mathcal{I}_{\gamma}^{\mathcal{O}}(N) = \frac{n!}{\{N\}_{\gamma}}, \quad (6.135)$$

onde $\{N\}_{\gamma}$ é um polinômio proporcional à dimensão das representações das representações irredutíveis do grupo Ortogonal, isto é, se $o_{\lambda}(X)$ é o caractere irredutível da representação λ de $\mathcal{O}(N)$, então $\{N\}_{\gamma}$ é proporcional a $o_{\lambda}(1^N)$. Utilizando as Eqs. (2.65) e (2.66), alguns

exemplos são

$$\begin{aligned} \{x\}_{[1]} = x \quad \{x\}_{[2]} = x(x+1) \quad \{x\}_{[3]} = x(x+1)(x+2) \\ \{x\}_{[1,1]} = x(x-1) \quad \{x\}_{[2,1]} = x(x+1)(x-1) \quad . \\ \{x\}_{[1^3]} = x(x-1)(x-2) \end{aligned} \quad (6.136)$$

Visto a validade da conjectura para o grupo Ortogonal, é natural nos perguntarmos sobre sua validade para matrizes simpléticas. O conjunto das matrizes simpléticas forma também um grupo, o *grupo Simplético*, $\mathcal{Sp}(2N)$. O grupo pode ser visto como um subgrupo de $\mathcal{U}(2N)$, composto pelas matrizes S cuja inversa é dada pela matriz dual

$$SS^D = S^D S = I_{2N}, \quad (6.137)$$

onde

$$S^D = JS^t J^t, \quad (6.138)$$

em que

$$J = \begin{pmatrix} 0_N & I_N \\ -I_N & 0_N \end{pmatrix} \quad (6.139)$$

Nessa versão da conjectura, definimos um análogo de $G_{\lambda,\gamma}$,

$$G'_{\lambda,\gamma} = \sum_{\mu \vdash n} |\mathcal{C}_\mu| \psi_\lambda(\mu) \chi_\gamma(\mu), \quad (6.140)$$

onde $\psi_\lambda(\mu)$ são as *funções esféricas torcidas* do par de Gelfand (S_{2n}, H_n) [100]. Elas são dadas através da introdução do sinal da permutação numa definição semelhante à das funções zonais esféricas

$$\psi_\lambda(\sigma) = \frac{1}{|H_n|} \sum_{\xi \in H_n} \varepsilon(\xi) \chi_{\lambda \cup \lambda}(\xi\sigma), \quad (6.141)$$

onde o *sinal da permutação* vale $\varepsilon(\xi) = (-1)^{n-\ell(\text{ct}(\xi))}$ e a partição $\lambda \cup \lambda$ é uma partição de $2n$ construída a partir de $\lambda \vdash n$ com $\lambda \cup \lambda = [\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_k]$, é equivalente a $\lambda \diamond \lambda$. Assim como as funções esféricas zonais, as funções esféricas torcidas seguem relações de ortogonalidade semelhantes.

Além disso, temos os polinômios zonais torcidos, $Z'(X)$. Avaliado na matriz identidade, temos $Z'_\lambda(1^N) = 2^n [N]_\lambda^{(1/2)}$ [100]. Por fim, denotamos $\langle N \rangle_\gamma = \frac{n!}{d_\gamma} sp_\lambda(1^N)$ polinômios na variável N proporcionais à dimensão das representações irredutíveis de $\mathcal{Sp}(2N)$. Então, conjecturamos que

$$\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq N}} \frac{d_{\lambda \cup \lambda}}{Z'_\lambda(1^N)} G'_{\lambda,\gamma} = \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{d_\gamma}{\langle N \rangle_\gamma}. \quad (6.142)$$

6.4.5 Proposição 5

Nessa seção, veremos alguns casos de polinômios gerados por médias do permanente. O caso mais simples é

$$\langle \text{Per}_N(U - z) \rangle \quad (6.143)$$

Como de costume, escrevemos

$$\text{Per}_n(X) = \sum_{\pi \in S_n} \prod_{i=1}^n X_{i, \pi(i)}. \quad (6.144)$$

Note que $X_{ij} = U_{ij} - z\delta_{ij}$. A fim, de utilizar o maquinário das funções de Weingarten precisamos isolar os elementos de matriz de U da variável do polinômio z . Isto pode ser feito identificando o conjunto das partes de $\{1, 2, \dots, n\}$. Com isso, podemos escrever o permanente como

$$\text{Per}_n(U - z) = \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\pi \in S_P} \prod_{i \in P} U_{i, \pi(i)} (-z)^{n-|P|}, \quad (6.145)$$

onde P é somado sobre o conjunto de partes de $\{1, 2, \dots, n\}$, o grupo S_P contém todas as bijeções de P em si mesmo (ou seja, todas as permutações sobre o conjunto P) e $|P|$ é a cardinalidade de P (isto é, o número de elementos de P). Note que \mathcal{P} contém todos os subconjuntos que podem ser gerados a partir de $\{1, 2, \dots, n\}$, em particular, \emptyset e $\{1, 2, \dots, n\}$; e $|\mathcal{P}| = 2^n$.

Então, temos

$$\begin{aligned} \langle \text{Per}_n(U - z) \rangle_G &= \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\pi \in S_P} \left\langle \prod_{i \in P} U_{i, \pi(i)} (-z)^{n-|P|} \right\rangle_G \\ &= \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\pi \in S_P} (-z)^{n-|P|} \left\langle \prod_{i \in P} U_{i, \pi(i)} \right\rangle_G. \end{aligned} \quad (6.146)$$

Observe que nesse caso, a média $\left\langle \prod_{i \in P} U_{i, \pi(i)} \right\rangle_G$ não corresponde à média de um valor positivo (isto é, não temos algo do tipo $|\cdot|^2$). Portanto, a média deve ser nula para qualquer P não nulo. Então, o único subconjunto possível é $P = \emptyset$, de modo que

$$\langle \text{Per}_n(U - z) \rangle_G = (-z)^n, \quad (6.147)$$

onde G corresponde aos ensembles abordados aqui, $G = \mathcal{U}(N), \mathcal{O}(N), COE$.

Agora, abordaremos o polinômio em duas variáveis, dado por

$$\langle \text{Per}_n(U - z_1) \text{Per}_n(U^\dagger - z_2) \rangle_G. \quad (6.148)$$

Utilizando a mesma escrita do permanente como uma soma sobre o conjunto das partes, temos

$$\langle \text{Per}_n(U - z_1) \text{Per}_n(U^\dagger - z_2) \rangle_G = \sum_{P_1, P_2 \subset \{1, \dots, n\}} (-z_1)^{n-|P_1|} (-z_2)^{n-|P_2|} \sum_{\substack{\pi_1 \in S_{P_1} \\ \pi_2 \in S_{P_2}}} E_G(\pi_1, \pi_2) \quad (6.149)$$

onde

$$E_G(\pi_1, \pi_2) = \left\langle \prod_{i \in P_1} \prod_{j \in P_2} U_{i, \pi_1(i)} U_{j, \pi_2(j)}^* \right\rangle_G. \quad (6.150)$$

Antes de mais nada, P_1 e P_2 devem ter a mesma cardinalidade, caso contrário, fica óbvio que não temos elementos do tipo $|\cdot|^2$ para calcular a média, resultando num valor nulo. O outro ponto que devemos levar em consideração é que as listas de índices que especificam o bloco diagonal superior não possuem índices repetidos, então, pelo mesmo motivo, devemos ter $P_1 = P_2 = P$, não podemos ter algo como $P_1 = \{1, 2\}$ e $P_2 = \{1, 3\}$, por exemplo. Com isso, fazendo $z = 0$ na Eq. (6.145), temos

$$E_G(\pi_1, \pi_2) = \left\langle \prod_{i, j \in P} U_{i, \pi_1(i)} U_{j, \pi_2(j)}^* \right\rangle_G = \langle |\text{Per}_P(U)|^2 \rangle_G. \quad (6.151)$$

Note que, desde que o bloco escolhido seja diagonal, a média do permanente não depende dos nomes dos índices. Então, $\langle |\text{Per}_P(U)|^2 \rangle_G = \langle |\text{Per}_m(U)|^2 \rangle_G$ para todo conjunto P tal que $|P| = m$. O número de subconjuntos de cardinalidade m que pode ser formado a partir de um conjunto de cardinalidade n (lembrando que nesse caso, o conjunto é $\{1, \dots, n\}$) é uma combinação $\binom{n}{m}$. Dessa forma, temos uma expressão para os polinômios gerados pelo permanente

$$\langle \text{Per}_n(U - z_1) \text{Per}_n(U^\dagger - z_2) \rangle_G = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (z_1 z_2)^{n-m} \langle |\text{Per}_m(U)|^2 \rangle_G. \quad (6.152)$$

Para o grupo Unitário, temos

$$\langle |\text{Per}_m(U)|^2 \rangle_{U(N)} = \frac{n!}{[N]_{[m]}^{(1)}} = m! \frac{(N-1)!}{(N+m-1)!}, \quad (6.153)$$

e, em particular

$$\begin{aligned} \langle \text{Per}_n(U - z_1) \text{Per}_n(U^\dagger - z_2) \rangle_U &= \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (z_1 z_2)^{n-m} m! \frac{(N-1)!}{(N+m-1)!} \\ &= \sum_{m=0}^n \frac{n!}{(n-m)!} \frac{(N-1)!}{(N+n-1)!} (z_1 z_2)^{n-m} \end{aligned} \quad (6.154)$$

Os exemplos mais simples são

$$\langle \text{Per}_0(U - z_1) \text{Per}_0(U^\dagger - z_2) \rangle_U = 1 \quad (6.155)$$

$$\langle \text{Per}_1(U - z_1) \text{Per}_1(U^\dagger - z_2) \rangle_U = \frac{z_1 z_2 + 1}{N} \quad (6.156)$$

$$\langle \text{Per}_2(U - z_1) \text{Per}_2(U^\dagger - z_2) \rangle_U = \frac{z_1^2 z_2^2 + 2z_1 z_2 + 2}{N(N+1)} \quad (6.157)$$

$$\langle \text{Per}_3(U - z_1) \text{Per}_3(U^\dagger - z_2) \rangle_U = \frac{z_1^3 z_2^3 + 3z_1^2 z_2^2 + 6z_1 z_2 + 6}{N(N+1)(N+2)} \quad (6.158)$$

7 Conclusão

Neste trabalho, foram condensados uma série de artigos na qual abordamos o espalhamento quântico [41, 42, 43, 50]. Estudamos espalhamento quântico através de uma cavidade com dinâmica caótica através da matriz espalhamento associada a ela. Os estudos ocorreram através de duas perspectivas.

Na primeira perspectiva, empregamos aproximação semiclássica para modelar os elementos da matriz de espalhamento para estudarmos transporte eletrônico através de uma cavidade. Com isso, o cálculo de um momento de transporte resume-se a integrais no espaço de fase que dão origem a regras diagramáticas associadas às trajetórias. Para obter a soma sobre trajetórias utilizamos uma integral matricial que as mimetizam. Aplicamos esta técnica a dois casos: uma cavidade com três guias, sendo ideais as guias de entrada e saída, e, a terceira acoplada à cavidade por uma barreira de tunelamento; no segundo caso, uma cavidade com duas guias, ambas acopladas à cavidade por barreiras de tunelamento. Cabe ressaltar que, através desse método, obtemos uma série perturbativa na(s) probabilidade(s) de reflexão da(s) barreira(s) cujos coeficientes são funções exatas das quantidades de canais disponíveis, diferentemente dos resultados obtidos através da aplicação da RMT que são válidos no regime $M \gg 1$.

Para a cavidade com três guias, considerando o transporte através das guias ideais, obtivemos uma expressão para momentos de transporte generalizados na ausência de Simetria de Reversão Temporal, Eq. (4.26). Aplicamos a expressão para calcularmos a condutância, a variância da condutância, o fator Fano e o terceiro cumulante em três regimes: número de canais simétricos $N_1 = N_2 = N_3$; regime quântico na guia com barreira, $N_3 = 1$; e regime quântico nas guias ideais, $N_1 = N_2 = 1$. Para o último identificamos expressões simples em função da probabilidade de reflexão da barreira. Na presença de Simetria de Reversão Temporal, obtivemos apenas a condutância em duas situações: considerando o transporte através das guias ideais, Eq. (4.95); e considerando o transporte entre uma guia ideal e a guia com barreira, Eq. (4.126).

Para a cavidade com duas guias, obtivemos expressões para a condutância na ausência (Eq. (5.29)) e na presença (Eq. (5.63)) de Simetria de Reversão Temporal. Quando as barreiras nas guias são idênticas e a Simetria de Reversão Temporal está ausente, podemos obter uma expressão para momentos generalizados, através da função de Schur, Eq. (5.151), e também uma expressão fechada para a condutância, Eq. (5.41), composta por um termo linear e uma correção exponencial, proporcional a γ^M . Por fim, percebemos que é possível generalizar as expressões para a condutância para uma cavidade com um número arbitrário de guias acopladas à cavidade por barreiras de tunelamento,

inclusive as guias de entrada e saída, tanto na ausência (Eq. (5.100)) quanto na presença (Eq. (5.114)) de Simetria de Reversão Temporal.

Na segunda perspectiva, a matriz de espalhamento é considerada uma matriz aleatória pertencente a um ensemble de matrizes que reflete a simetria da dinâmica do sistema, e tais elementos são utilizados para expressar a probabilidade de transmissão através da cavidade [49]. Quando a matriz descreve o espalhamento de várias partículas, a simetrização deve respeitar o tipo de partícula espalhada (bósons e férmions). Com esse intuito, calculamos a média do módulo quadrado do imanente associado a uma partição λ de um bloco diagonal da matriz de espalhamento, em que o permanente (associado aos bósons) e o determinante (associado aos férmions) são imanentes associados às partições $[n]$ e $[1^n]$. Obtivemos expressões para os ensembles Unitário, Eq. (6.7), Ortogonal, Eq. (6.16), e Circular Ortogonal, Eq. (6.10), em especial, para $\mathcal{U}(N)$ obtivemos a média do módulo à quarta do permanente, Eq. (6.8). Também formulamos duas conjecturas envolvendo inversos de polinômios de Jack e caracteres irredutíveis dos grupos Ortogonal (Eq. (6.15)) e Simplético (Eq. (6.142)). Posteriormente, a conjectura acerca dos caracteres do grupo Ortogonal mostrou-se correta [51]. Além disso, obtivemos polinômios associados ao permanente até a ordem 2 para os três ensembles abordados.

Referências

- 1 ALTSHULER, B. L.; LEE, P. A.; WEBB, W. R. *Mesoscopic phenomena in solids*. [S.l.]: Elsevier, 2012. Citado na página 25.
- 2 BEENAKKER, C. W. Random-matrix theory of quantum transport. *Reviews of modern physics*, v. 69, n. 3, p. 731, 1997. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.69.731>>. Citado 5 vezes nas páginas 25, 26, 49, 50 e 81.
- 3 ALHASSID, Y. The statistical theory of quantum dots. *Reviews of Modern Physics*, v. 72, n. 4, p. 895, 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.72.895>>. Citado na página 25.
- 4 MELLO, P. A.; KUMAR, N. *Quantum Transport in Mesoscopic Systems: Complexity and Statistical Fluctuations. A Maximum Entropy Viewpoint*. [S.l.]: Oxford University Press, 2004. Citado na página 25.
- 5 NAZAROV, Y. V.; BLANTER, Y. M. *Quantum transport: introduction to nanoscience*. [S.l.]: Cambridge university press, 2009. Citado na página 25.
- 6 CHANDRAMOULI, R. S.; SRIVASTAV, R. K.; KUMAR, S. Electronic transport in chaotic mesoscopic cavities: A Kwant and random matrix theory based exploration. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 30, n. 12, p. 123120, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/5.0026039>>. Citado na página 25.
- 7 LIU, C.-R. et al. Spin Fano resonances and control in two-dimensional mesoscopic transport. *Physical Review Applied*, v. 13, n. 3, p. 034061, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.13.034061>>. Citado na página 25.
- 8 BARBOSA, A. L.; RAMOS, J. G. G.; FERREIRA, A. Effect of proximity-induced spin-orbit coupling in graphene mesoscopic billiards. *Physical Review B*, v. 103, n. 8, p. L081111, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.103.L081111>>. Citado na página 25.
- 9 PESSOA, N. et al. Multifractal magnetoconductance fluctuations in mesoscopic systems. *Physical Review E*, v. 104, n. 5, p. 054129, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.104.054129>>. Citado na página 25.
- 10 BEREZUK, A. et al. Universal S-matrix correlations for complex scattering of wave packets in noninteracting many-body systems: Theory, simulation, and experiment. *Physical Review E*, v. 103, n. 5, p. 052209, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.103.052209>>. Citado na página 25.
- 11 XU, H. Y.; HUANG, L.; LAI, Y. C. Relativistic quantum chaos in graphene. *Physics Today*, v. 72, n. 4, p. 44, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/PT.3.4679>>. Citado na página 25.
- 12 HAAKE, F. *Quantum signatures of chaos*. [S.l.]: Springer, 1991. Citado na página 25.

- 13 ARAÚJO, J.; MACÊDO, A. Transport through quantum dots: A supersymmetry approach to transmission eigenvalue statistics. *Physical Review B*, v. 58, n. 20, p. R13379, 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.58.R13379>>. Citado na página 25.
- 14 KELLER, M. W. et al. Energy-averaged weak localization in chaotic microcavities. *Physical Review B*, v. 53, n. 4, p. R1693, 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.53.R1693>>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 25.
- 15 WIGNER, E. P. On the statistical distribution of the widths and spacings of nuclear resonance levels. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 47, n. 4, p. 790–798, 1951. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0305004100027237>>. Citado na página 25.
- 16 CARTAN, E. Sur certaines formes Riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, Elsevier, v. 3e série, 44, p. 345–467, 1927. Disponível em: <<https://doi.org/10.24033/asens.781>>. Citado na página 25.
- 17 ZIRNBAUER, M. R. Symmetry classes in random matrix theory. *arXiv preprint math-ph/0404058*, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.48550/arXiv.math-ph/0404058>>. Citado na página 26.
- 18 BRACK, M.; BHADURI, R. *Semiclassical physics*. [S.l.]: CRC Press, 2018. Citado na página 26.
- 19 GUTZWILLER, M. C. *Chaos in classical and quantum mechanics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 1. Citado na página 26.
- 20 ANKERHOLD, J. *Quantum tunneling in complex systems: the semiclassical approach*. [S.l.]: Springer, 2007. v. 224. Citado na página 26.
- 21 RAZAVY, M. *Quantum theory of tunneling*. [S.l.]: World Scientific, 2013. Citado na página 26.
- 22 HOLSTEIN, B. R. Semiclassical treatment of the double well. *American Journal of Physics*, v. 56, n. 4, p. 338–345, 1988. Disponível em: <<https://doi.org/10.1119/1.15634>>. Citado na página 26.
- 23 GARG, A. Tunnel splittings for one-dimensional potential wells revisited. *American Journal of Physics*, v. 68, n. 5, p. 430–437, 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.1119/1.19458>>. Citado na página 26.
- 24 HAGEDORN, G. A.; JOYE, A. Semiclassical dynamics and exponential asymptotics. *AMS IP Studies in Advanced Mathematics*, v. 16, p. 181–196, 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s002200050732>>. Citado na página 26.
- 25 GRADINARU, V.; HAGEDORN, G. A.; JOYE, A. Exponentially accurate semiclassical tunneling wavefunctions in one dimension. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 43, n. 47, p. 474026, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1751-8113/43/47/474026>>. Citado na página 26.
- 26 TOLOZA, J. H. *Exponentially accurate semiclassical asymptotics*. [S.l.]: Providence, RI; American Mathematical Society; 1999, 2002. v. 307. 299–304 p. Citado na página 26.

- 27 SIEBER, M.; RICHTER, K. Correlations between periodic orbits and their rôle in spectral statistics. *Physica Scripta*, v. 2001, n. T90, p. 128, 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1238/Physica.Topical.090a00128>>. Citado na página 26.
- 28 RICHTER, K.; SIEBER, M. Semiclassical theory of chaotic quantum transport. *Physical review letters*, v. 89, n. 20, p. 206801, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.206801>>. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 51.
- 29 HEUSLER, S. et al. Semiclassical theory of chaotic conductors. *Physical review letters*, v. 96, n. 6, p. 066804, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.066804>>. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 49.
- 30 BRAUN, P. et al. Semiclassical prediction for shot noise in chaotic cavities. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 39, n. 11, p. L159, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0305-4470/39/11/L01>>. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 49.
- 31 MÜLLER, S. et al. Semiclassical approach to chaotic quantum transport. *New Journal of Physics*, v. 9, n. 1, p. 12, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1367-2630/9/1/012>>. Citado na página 26.
- 32 BERKOLAIKO, G.; KUIPERS, J. Universality in chaotic quantum transport: the concordance between random-matrix and semiclassical theories. *Physical Review E*, v. 85, n. 4, p. 045201, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.85.045201>>. Citado na página 26.
- 33 BERKOLAIKO, G.; KUIPERS, J. Combinatorial theory of the semiclassical evaluation of transport moments. I. equivalence with the random matrix approach. *Journal of Mathematical Physics*, v. 54, n. 11, p. 112103, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.4826442>>. Citado na página 26.
- 34 NOVAES, M. A semiclassical matrix model for quantum chaotic transport. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 46, n. 50, p. 502002, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1751-8113/46/50/502002>>. Citado 4 vezes nas páginas 26, 53, 57 e 60.
- 35 NOVAES, M. Semiclassical matrix model for quantum chaotic transport with time-reversal symmetry. *Annals of Physics*, v. 361, p. 51–61, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.aop.2015.06.007>>. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 59.
- 36 BENTO, P. H.; NOVAES, M. Semiclassical treatment of quantum chaotic transport with a tunnel barrier. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 54, n. 12, p. 125201, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1751-8121/abc58>>. Citado 3 vezes nas páginas 26, 58 e 60.
- 37 GUSTAVSSON, S. et al. Counting statistics of single electron transport in a quantum dot. *Physical review letters*, v. 96, n. 7, p. 076605, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.076605>>. Citado 4 vezes nas páginas 26, 49, 50 e 71.
- 38 HEMMADY, S. et al. Universal statistics of the scattering coefficient of chaotic microwave cavities. *Physical review E*, v. 71, n. 5, p. 056215, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.71.056215>>. Citado na página 26.

- 39 ZHENG, X. et al. Characterization of fluctuations of impedance and scattering matrices in wave chaotic scattering. *Physical Review E*, v. 73, n. 4, p. 046208, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.73.046208>>. Citado na página 26.
- 40 KUHL, U. et al. Direct processes in chaotic microwave cavities in the presence of absorption. *Physical review letters*, v. 94, n. 14, p. 144101, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.144101>>. Citado na página 26.
- 41 OLIVEIRA, L. H.; BARBOSA, A. L.; NOVAES, M. Electronic transport in three-terminal chaotic systems with a tunnel barrier. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 55, n. 37, p. 375202, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1751-8121/ac82d7>>. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 137.
- 42 OLIVEIRA, L. H.; BENTO, P. H.; NOVAES, M. Quantum transport in chaotic cavities with tunnel barriers. *Physical Review B*, v. 105, n. 23, p. 235423, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.105.235423>>. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 137.
- 43 OLIVEIRA, L. H.; BENTO, P. H.; NOVAES, M. Exponentially small quantum correction to conductance. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 55, n. 41, p. 415302, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1751-8121/ac93d0>>. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 137.
- 44 WHITNEY, R. S. Suppression of weak localization and enhancement of noise by tunneling in semiclassical chaotic transport. *Physical Review B*, v. 75, n. 23, p. 235404, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.75.235404>>. Citado 4 vezes nas páginas 27, 49, 50 e 72.
- 45 WALTNER, D. et al. Conductance fluctuations in chaotic systems with tunnel barriers. *Physical Review B*, v. 85, n. 2, p. 024302, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.85.024302>>. Citado 3 vezes nas páginas 27, 49 e 50.
- 46 KUIPERS, J.; RICHTER, K. Transport moments and Andreev billiards with tunnel barriers. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 46, n. 5, p. 055101, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1751-8113/46/5/055101>>. Citado na página 27.
- 47 KUIPERS, J. Semiclassics for chaotic systems with tunnel barriers. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 42, n. 42, p. 425101, 2009. Citado na página 27.
- 48 MACÊDO, A. Average conductance coefficients in multiterminal chaotic cavities. *Physical Review B*, v. 63, n. 11, p. 115309, 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.63.115309>>. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 94.
- 49 URBINA, J.-D. et al. Multiparticle correlations in mesoscopic scattering: Boson sampling, birthday paradox, and Hong-Ou-Mandel profiles. *Physical review letters*, v. 116, n. 10, p. 100401, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.100401>>. Citado 4 vezes nas páginas 27, 112, 113 e 138.
- 50 OLIVEIRA, L. H.; NOVAES, M. Immanants of blocks from random matrices in some unitary ensembles. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 54, n. 29, p. 295205, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1751-8121/ac0984>>. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 137.

- 51 CHAPUY, G.; DOŁĘGA, M. b-monotone Hurwitz numbers: Virasoro constraints. *BKP hierarchy, and $O(N)$ -BGW integral*, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.48550/arXiv.2109.01499>>. Citado 4 vezes nas páginas 27, 114, 132 e 138.
- 52 GONÇALVES, A. *Introdução à álgebra*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979. v. 7. Citado na página 29.
- 53 SAGAN, B. *The symmetric group: representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2001. v. 203. Citado 3 vezes nas páginas 29, 30 e 38.
- 54 TINKHAM, M. *Group theory and quantum mechanics*. [S.l.]: Courier Corporation, 2003. Citado na página 30.
- 55 MACDONALD, I. G. *Symmetric functions and Hall polynomials*. [S.l.]: Oxford university press, 1998. Citado 6 vezes nas páginas 39, 40, 42, 106, 107 e 108.
- 56 STANLEY, R. P. Some combinatorial properties of Jack symmetric functions. *Advances in Mathematics*, v. 77, n. 1, p. 76–115, 1989. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0001-8708\(89\)90015-7](https://doi.org/10.1016/0001-8708(89)90015-7)>. Citado 3 vezes nas páginas 41, 42 e 147.
- 57 KRATTENTHALER, C. Advanced determinant calculus. In: SPRINGER. *The Andrews Festschrift: Seventeen Papers on Classical Number Theory and Combinatorics*. 2001. p. 349–426. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-56513-7_17>. Citado na página 42.
- 58 FORRESTER, P.; WARNAAR, S. The importance of the Selberg integral. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 45, n. 4, p. 489–534, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.48550/arXiv.0710.3981>>. Citado na página 43.
- 59 KANEKO, J. Selberg integrals and hypergeometric functions associated with Jack polynomials. *SIAM journal on mathematical analysis*, v. 24, n. 4, p. 1086–1110, 1993. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/0524064>>. Citado na página 43.
- 60 MECKES, E. S. *The random matrix theory of the classical compact groups*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. v. 218. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 45.
- 61 COLLINS, B. Moments and cumulants of polynomial random variables on unitary groups, the Itzykson-Zuber integral, and free probability. *International Mathematics Research Notices*, v. 2003, n. 17, p. 953–982, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155/S107379280320917X>>. Citado na página 46.
- 62 COLLINS, B.; ŚNIADY, P. Integration with respect to the Haar measure on unitary, orthogonal and symplectic group. *Communications in Mathematical Physics*, v. 264, n. 3, p. 773–795, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00220-006-1554-3>>. Citado na página 46.
- 63 COLLINS, B.; MATSUMOTO, S. On some properties of orthogonal Weingarten functions. *Journal of Mathematical Physics*, v. 50, n. 11, p. 113516, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.3251304>>. Citado na página 47.
- 64 RICHTER, K.; RICHTER, K. *Semiclassical theory of mesoscopic quantum systems*. [S.l.]: Citeseer, 2000. v. 11. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 52.

- 65 LANDAUER, R. Spatial variation of currents and fields due to localized scatterers in metallic conduction (and comment). *Journal of Mathematical Physics*, v. 37, n. 10, p. 5259–5268, 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.531590>>. Citado na página 49.
- 66 BÜTTIKER, M. Scattering theory of thermal and excess noise in open conductors. *Physical review letters*, v. 65, n. 23, p. 2901, 1990. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.65.2901>>. Citado na página 49.
- 67 BARANGER, H. U.; MELLO, P. A. Mesoscopic transport through chaotic cavities: A random S-matrix theory approach. *Physical review letters*, v. 73, n. 1, p. 142, 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.73.142>>. Citado na página 49.
- 68 BROUWER, P.; BEENAKKER, C. Diagrammatic method of integration over the unitary group, with applications to quantum transport in mesoscopic systems. *Journal of Mathematical Physics*, v. 37, n. 10, p. 4904–4934, 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.531667>>. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.
- 69 KUMAR, S.; PANDEY, A. Conductance distributions in chaotic mesoscopic cavities. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 43, n. 28, p. 285101, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1751-8113/43/28/285101>>. Citado na página 49.
- 70 BLANTER, Y. M.; BÜTTIKER, M. Shot noise in mesoscopic conductors. *Physics reports*, v. 336, n. 1-2, p. 1–166, 2000. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(99\)00123-4](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(99)00123-4)>. Citado na página 49.
- 71 JALABERT, R.; PICHARD, J.-L.; BEENAKKER, C. Universal quantum signatures of chaos in ballistic transport. *Europhysics Letters*, v. 27, n. 4, p. 255, 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1209/0295-5075/27/4/001>>. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.
- 72 RAMOS, J.; BARBOSA, A.; MACÊDO, A. Quantum interference correction to the shot-noise power in nonideal chaotic cavities. *Physical Review B*, v. 78, n. 23, p. 235305, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.78.235305>>. Citado 3 vezes nas páginas 49, 50 e 76.
- 73 BARBOSA, A.; RAMOS, J.; MACÊDO, A. Average shot-noise power via a diagrammatic method. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 43, n. 7, p. 075101, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1751-8113/43/7/075101>>. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.
- 74 WHITNEY, R. S. Shot-noise of quantum chaotic systems in the classical limit. In: SPIE. *Noise and Fluctuations in Circuits, Devices, and Materials*. 2007. v. 6600, p. 237–245. Disponível em: <<https://doi.org/10.1117/12.724670>>. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 76.
- 75 KHORUZHENKO, B.; SAVIN, D.; SOMMERS, H.-J. Systematic approach to statistics of conductance and shot-noise in chaotic cavities. *Physical Review B*, v. 80, n. 12, p. 125301, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.80.125301>>. Citado na página 49.

- 76 DHEER, A.; KUMAR, S. Statistics of conductance and shot noise power in chaotic mesoscopic cavities with one ideal and one nonideal lead. *Physica B: Condensed Matter*, v. 639, p. 413939, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.physb.2022.413939>>. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.
- 77 REULET, B.; SENZIER, J.; PROBER, D. Environmental effects in the third moment of voltage fluctuations in a tunnel junction. *Physical Review Letters*, v. 91, n. 19, p. 196601, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.196601>>. Citado 3 vezes nas páginas 49, 50 e 71.
- 78 BARBOSA, A. L.; MACÊDO, A. Diagrammatic analysis of the unitary group for double-barrier ballistic cavities: Equivalence with circuit theory. *Physical Review B*, v. 71, n. 23, p. 235307, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.71.235307>>. Citado 3 vezes nas páginas 49, 50 e 71.
- 79 SAVIN, D.; SOMMERS, H.-J.; WIECZOREK, W. Nonlinear statistics of quantum transport in chaotic cavities. *Physical Review B*, v. 77, n. 12, p. 125332, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.77.125332>>. Citado na página 49.
- 80 BROUWER, P. W. Generalized circular ensemble of scattering matrices for a chaotic cavity with nonideal leads. *Physical Review B*, v. 51, n. 23, p. 16878, 1995. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.51.16878>>. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.
- 81 BARANGER, H. U.; MELLO, P. A. Effect of phase breaking on quantum transport through chaotic cavities. *Physical Review B*, v. 51, n. 7, p. 4703, 1995. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.51.4703>>. Citado na página 50.
- 82 BROUWER, P.; BEENAKKER, C. Effect of a voltage probe on the phase-coherent conductance of a ballistic chaotic cavity. *Physical Review B*, v. 51, n. 12, p. 7739, 1995. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.51.7739>>. Citado 3 vezes nas páginas 50, 75 e 82.
- 83 BARBOSA, A.; RAMOS, J.; BAZEIA, D. Presence of asymmetric noise in multiterminal chaotic cavities. *Physical Review B*, v. 84, n. 11, p. 115312, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.84.115312>>. Citado na página 50.
- 84 CASTAÑEDA-RAMÍREZ, F. et al. Microwave graph analogs for the voltage drop in three-terminal devices with orthogonal, unitary, and symplectic symmetry. *Physical Review E*, v. 105, n. 1, p. 014202, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.105.014202>>. Citado na página 50.
- 85 JACQUOD, P.; ADAGIDELI, Í. Universal features of spin transport and breaking of unitary symmetries. *Physical Review B*, v. 88, n. 4, p. 041305, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.88.041305>>. Citado na página 50.
- 86 ZVONKIN, A. Matrix integrals and map enumeration: an accessible introduction. *Mathematical and Computer Modelling*, v. 26, n. 8-10, p. 281–304, 1997. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0895-7177\(97\)00210-0](https://doi.org/10.1016/S0895-7177(97)00210-0)>. Citado na página 59.
- 87 MATHAI, A. M. *Jacobians of matrix transformations and functions of matrix argument*. [S.l.]: World Scientific, 1997. Citado 3 vezes nas páginas 61, 66 e 78.

- 88 STANLEY, R. P. *Enumerative Combinatorics*. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011. v. 1. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, v. 1). Citado na página 69.
- 89 BROUWER, P.; BEENAKKER, C. Conductance distribution of a quantum dot with nonideal single-channel leads. *Physical Review B*, v. 50, n. 15, p. 11263, 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.50.11263>>. Citado na página 94.
- 90 LITTLEWOOD, D. E.; RICHARDSON, A. R. Group characters and algebra. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, v. 233, n. 721-730, p. 99–141, 1934. Citado na página 111.
- 91 SAKURAI, J. J. *Modern quantum mechanics*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1967. Citado na página 112.
- 92 SCHEEL, S. Permanents in linear optical networks. *arXiv preprint quant-ph/0406127*, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.48550/arXiv.quant-ph/0406127>>. Citado na página 112.
- 93 AARONSON, S.; ARKHIPOV, A. The computational complexity of linear optics. In: *Proceedings of the forty-third annual ACM symposium on Theory of computing*. [s.n.], 2011. p. 333–342. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/1993636.1993682>>. Citado na página 112.
- 94 COSTELLO, K. P.; VU, V. Concentration of random determinants and permanent estimators. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, v. 23, n. 3, p. 1356–1371, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/080733784>>. Citado na página 112.
- 95 TAO, T.; VU, V. On the permanent of random Bernoulli matrices. *Advances in Mathematics*, v. 220, n. 3, p. 657–669, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.aim.2008.09.006>>. Citado na página 112.
- 96 ANTUNOVIĆ, T. Permanents of heavy-tailed random matrices with positive elements. *arXiv preprint arXiv:1111.3454*, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.48550/arXiv.1111.3454>>. Citado na página 112.
- 97 FYODOROV, Y. V. On permanental polynomials of certain random matrices. *International Mathematics Research Notices*, v. 2006, p. 61570, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155/IMRN/2006/61570>>. Citado 2 vezes nas páginas 112 e 115.
- 98 LANDO, S. K.; ZVONKIN, A. K.; ZAGIER, D. B. *Graphs on surfaces and their applications*. [S.l.]: Springer, 2004. v. 75. Citado na página 117.
- 99 HANLON, P. J.; STANLEY, R. P.; STEMBRIDGE, J. R. Some combinatorial aspects of the spectra of normally distributed random matrices. *Contemp. Math*, v. 138, p. 151–174, 1992. Citado na página 119.
- 100 MATSUMOTO, S. Weingarten calculus for matrix ensembles associated with compact symmetric spaces. *arXiv preprint arXiv:1301.5401*, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.48550/arXiv.1301.5401>>. Citado na página 133.

APÊNDICE A – Cálculo Explícito dos Coeficientes de Littlewood-Richardson da forma $C_{[1]\rho\mu}^{(2)}$

Nesta seção, nosso objetivo é fornecer expressões explícitas para $C_{[1]\rho\mu}^{(2)}$, onde ρ e μ são ganchos duplos, que aparecem na Eq. (4.95):

$$\langle g_{12} \rangle = N_1 N_2 \sum_{\mu\rho} \gamma^{|\rho|} C_{[1]\rho\mu}^{(2)} \frac{\left(t_\mu^{(2)}\right)^2}{j_\rho} \frac{Z_\rho(N_3)}{[M+1]_\mu^{(2)}} \quad (\text{A.1})$$

Primeiramente, devemos caracterizar os coeficientes $C_{[1]\rho\mu}^{(2)}$. Podemos observar que o diagrama de Young de μ é obtido a partir do de ρ pela adição de uma caixa.

Escrevendo $\rho = (\rho_1^{m_1}, \rho_2^{m_2}, \dots, \rho_l^{m_l})$ com $m_0 = \rho_{l+1} = 0$, podemos escrever a posição de adição da caixa como $(1 + M_k, 1 + \rho_k)$, com $k = 0, \dots, l(\rho) + 1$ e $M_k = \sum_{i=0}^{k-1} m_i$. Os coeficientes serão dados por [56]

$$C_{[1]\rho\mu_k}^{(2)} = \left(\prod_{j=1}^{\rho_k} \frac{2a_\rho(1 + M_k, j) + l_\rho(1 + M_k, j) + 1}{2a_{\mu_k}(1 + M_k, j) + l_{\mu_k}(1 + M_k, j) + 1} \right) \left(\prod_{i=1}^{M_k} \frac{2a_\rho(i, 1 + \rho_k) + l_\rho(i, 1 + \rho_k) + 2}{2a_{\mu_k}(i, 1 + \rho_k) + l_{\mu_k}(i, 1 + \rho_k) + 2} \right), \quad (\text{A.2})$$

em que $a_\rho(i, j)$ e $l_\rho(i, j)$ são, respectivamente, os comprimentos do braço e da perna em relação à caixa na posição (i, j) no diagrama de Young de ρ .

Particularizando, para o caso em que ρ é um gancho duplo, $\rho = (k_1, k_2, 1^{n-k_1-k_2}) \vdash n$, vemos que há 4 posições possíveis para se adicionar uma caixa ao diagrama de Young de ρ . Desse modo, são geradas 4 partições de $n + 1$: $\mu_1 = (k_1 + 1, k_2, 1^{n-k_1-k_2})$, $\mu_2 = (k_1, k_2 + 2, 1^{n-k_1-k_2})$, $\mu_3 = (k_1, k_2, 2, 1^{n-1-k_1-k_2})$ e $\mu_4 = (k_1, k_2, 1^{n+1-k_1-k_2})$. Os diagramas de Young dessas partições estão esquematizadas na Fig. 21.

Em cada caso, os coeficientes são dados por

$$C_{[1]\rho\mu_1}^{(2)} = \left(\frac{n + k_1 - k_2}{n + k_1 - k_2 + 2} \right) \left(\prod_{j=2}^{k_2} \frac{k_1 - j + 1}{k_1 - j + 2} \right) \left(\prod_{j=k_2+1}^{k_1} \frac{2k_1 - 2j + 1}{2k_1 - 2j + 3} \right), \quad (\text{A.3})$$

$$C_{[1]\rho\mu_2}^{(2)} = \left(\frac{2(k_1 - k_2)}{2(k_1 - k_2) + 1} \right) \left(\frac{n - k_1 + k_2 - 1}{n - k_1 + k_2 + 1} \right) \left(\prod_{j=2}^{k_2} \frac{2k_2 - 2j + 1}{2k_2 - 2j + 3} \right), \quad (\text{A.4})$$

$$C_{[1]\rho\mu_3}^{(2)} = \left(\frac{n - k_1 - k_2}{n - k_1 - k_2 + 2} \right) \left(\frac{2k_1 - 1}{k_1} \right) \left(\frac{k_2 - 1}{2k_2 - 1} \right), \text{ e} \quad (\text{A.5})$$

$$C_{[1]\rho\mu_4}^{(2)} = \frac{2}{n - k_1 - k_2 + 2} \left(\frac{n + k_1 - k_2 + 1}{n + k_1 - k_2 + 2} \right) \left(\frac{n - k_1 + k_2}{n - k_1 + k_2 + 1} \right). \quad (\text{A.6})$$

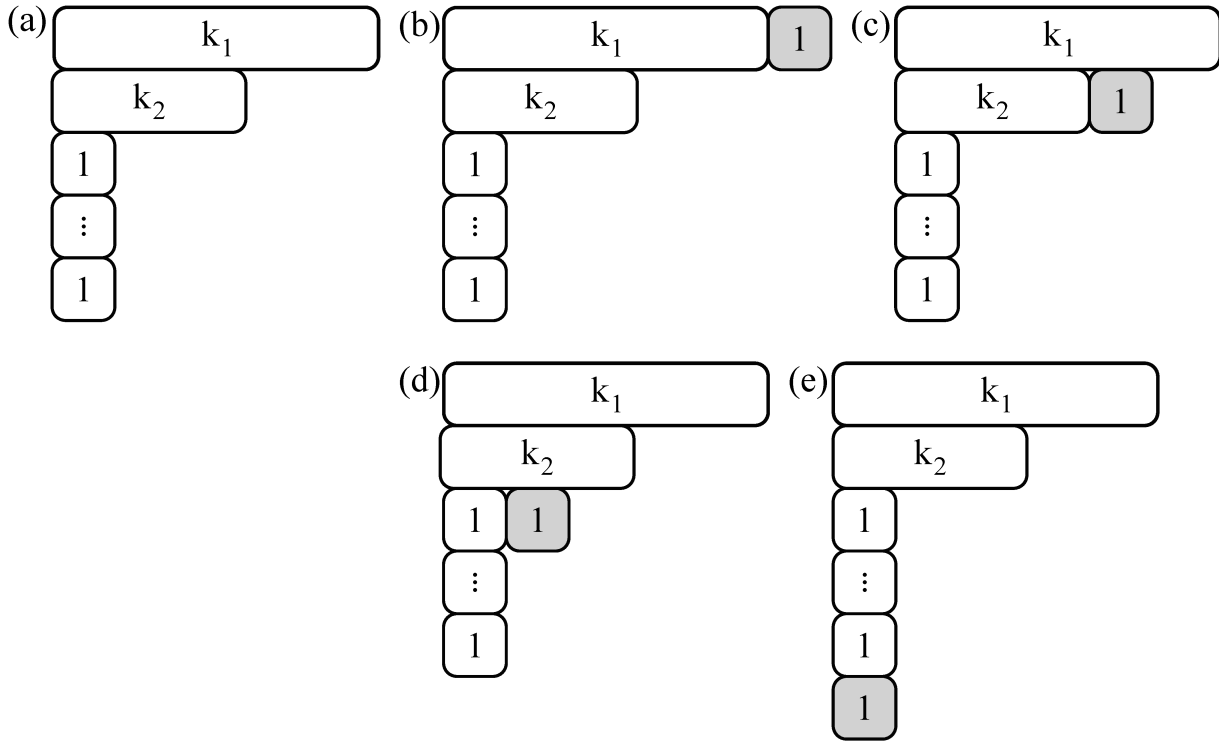


Figura 21 – Em (a), temos diagrama de Young da partição ρ que é um gancho duplo; em (b), a partição μ_1 , obtida adicionando-se uma caixa no final da primeira linha do diagrama de ρ ; em (c), a partição μ_2 , obtida adicionando-se uma caixa no final da segunda linha do diagrama de ρ ; em (d), a partição μ_3 , obtida adicionando-se uma caixa no final da terceira linha do diagrama de ρ , note que μ_3 não é um gancho duplo; e, em (e), a partição μ_4 , obtida adicionando-se uma caixa abaixo da última linha do diagrama de ρ .

Note que a partição μ_3 não é um gancho duplo e, portanto, pela Eq. (2.18), não contribui para a soma. Redefinamos μ_4 como μ_3 e $C_{[1]\rho\mu_4}^{(2)}$ como $C_{[1]\rho\mu_3}^{(2)}$.

Para determinar o produto dos conteúdos, dividimos o diagrama de Young de μ_3 em três partes: 1° quando $i = 1$ e $j \geq 2$; 2° quando $i = 2$ e $j \geq 2$; e 3° quando $j = 1$ e $i \geq 2$ (a posição $(1, 1)$ no diagrama é a única que tem 2-conteúdo nulo). Dessa forma,

$$\begin{aligned}
 |t_{\mu_3}^{(2)}| &= \left(\prod_{j=2}^{k_1} (2j-2) \right) \left(\prod_{j=2}^{k_2} (2j-3) \right) \left(\prod_{j=1}^{n+2-k_1-k_2} |1-i| \right) \\
 &= \left(\prod_{j=1}^{k_1-1} 2j \right) \left(\prod_{j=1}^{k_2-1} (2j-1) \right) \left(\prod_{j=1}^{n+1-k_1-k_2} i \right) \\
 &= (n+1-k_1-k_2)!(2k_1-2)!!(2k_2-3)!!.
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

O produto dos conteúdos em μ_1 é obtido de forma análoga. Portanto, em $|t_{\mu_3}^{(2)}|$ tomamos $k_1 \rightarrow k_1 + 1$ no primeiro produtório e $n+1 \rightarrow n$ no terceiro produtório, e obtemos

$$|t_{\mu_1}^{(2)}| = (n-k_1-k_2)!(2k_1)!!(2k_2-3)!!. \tag{A.8}$$

Analogamente, para μ_2 , basta tomar $k_2 \rightarrow k_2 + 1$ no segundo produtório e $n+1 \rightarrow n$ no

terceiro produtório

$$\left| t_{\mu_2}^{(2)} \right| = (n - k_1 - k_2)!(2k_1 - 2)!!(2k_2 - 1)!!. \quad (\text{A.9})$$

Por fim, já que $j_\rho^{(2)} = (2n)!/d_{2\rho}$, ou seja, o produto dos *hooks* ao longo de 2ρ , temos

$$j_\rho = (n^2 - (k_1 - k_2)^2)(n^2 - (k_1 - k_2 + 1)^2)(n - k_1 - k_2)!(n + 1 - k_1 - k_2)!(2k_2 - 2)! \frac{(2k_1 - 1)!}{2k_1 - 2k_2 + 1}. \quad (\text{A.10})$$

Com expressões conhecidas para todos os termos, podemos escrever a condutância como

$$g = N_1 N_2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n \sum_{k_1, k_2=0}^n \frac{((n - k_1 - k_2)!(2k_1 - 2)!!(2k_2 - 3)!!)^2}{j_\rho} \frac{Z_\rho(N_3)}{[M + 1]_\rho^{(2)}} \cdot \left(\frac{(2k_1)^2 c_1}{M + 2k_1 + 1} + \frac{(2k_2 - 1)^2 c_2}{M + 2k_2} + \frac{(n + 1 - k_1 - k_2)^2 c_3}{M - (n + 1 - k_1 - k_2)} \right), \quad (\text{A.11})$$

onde $c_k = C_{[1]_\rho \mu_k}^{(2)}$, $\mu_1 = (k_1 + 1, k_2, 1^{n - k_1 - k_2})$, $\mu_2 = (k_1, k_2 + 1, 1^{n - k_1 - k_2})$ e $\mu_3 = (k_1, k_2, 1^{n + 1 - k_1 - k_2})$.

Índice

- α -conteúdo, 35
- α -retângulo de Durfee, 35
- q -encontro, 52
- canais, 50
- caracteres
 - irredutíveis, 30
 - ortogonalidade de, 31
- ciclo-tipo, 29
- classe de conjugação, 29
- coeficientes de Littlewood-Richardson, 41
- coset-tipo, 32
- determinante de Vandermonde, 39
- diagrama de Young, 34
- Ensemble Circular Ortogonal, 45
- fatoração da identidade, 117
- função de Weingarten
 - unitária, 46
 - COE, 48
 - ortogonal, 47
- funções esféricas zonais, 33
- funções esféricas zonais torcidas, 133
- fórmula de Frobenius, 117
- gancho, 35
 - duplo, 35
- grafo de fita, 53
- grupo
 - de permutações, 29
 - Ortogonal, 44
 - Unitário, 43
- Hiperoctaedro, 32
- identidade de Cauchy, 41
- imanescentes, 111
- Lei de Wick, 54
- matching, 31
- mergulho, 115
- notação de ciclos, 29
- partição, 29, 34
 - comprimento, 34
 - oblíqua, 37
- partição conjugada, 34
- permanente, 111
- permutação:sinal da, 133
- permutações, 29
- polinômio de Jack oblíquo, 42
- polinômios Jack, 40
- polinômios zonais, 39
- representação, 30
 - adjunta, 30
 - dimensão, 31
 - irredutíveis, 30
 - redutíveis, 30
- séries de potências, 38