**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**
Faculdade de Matemática
Av. João Naves de Àvila, 2121, Bloco 1F - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: +55 (34) 3239-4158/4156/4126 - www.famat.ufu.br - famat@ufu.br

# ATA DE DEFESA - GRADUAÇÃO

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Curso de Graduação em: | Matemática | | | | |
| Defesa de: | Trabalho de Conclusão de Curso 2 (FAMAT31804) | | | | |
| Data: | 06/02/2023 | Hora de início: | 17:00 | Hora de encerramento: | 18:20 |
| Matrícula do Discente: | 11911MAT024 | | | | |
| Nome do Discente: | Julia Bernardes Coelho | | | | |
| Título do Trabalho: | Álgebras Alternativas Semissimples | | | | |

Reuniu-se virtualmente através da plataforma Microsoft Teams, presente no Office 365 Educacional e disponibilizado de forma gratuita pela Microsoft para toda comunidade da UFU, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Curso de Graduação em Matemática, assim composta: Profa. Dra. Adriana Rodrigues da Silva (FAMAT-UFU); Prof. Dr. Rodrigo Lucas Rodrigues (UFC); Profa. Dra. Dylene Agda Souza de Barros (FAMAT-UFU), orientadora da candidata.

Iniciando os trabalhos, a presidente da mesa, Profa. Dra. Dylene Agda Souza de Barros, apresentou a Comissão Examinadora e a candidata, agradeceu a presença do público, e concedeu a discente a palavra, para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação da discente e o tempo de arguição e resposta, ocorreram em conformidade com as normas do Curso.

A seguir a senhora presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir o candidato. Utimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando a candidato:

Aprovada. Nota:95

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

Documento assinado eletronicamente por **Dylene Agda Souza de Barros**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 06/02/2023, às 18:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Adriana Rodrigues da Silva**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 06/02/2023, às 18:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo Lucas Rodrigues**, **Usuário Externo**, em 08/02/2023, às 08:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

**Referência:** Processo nº 23117.004517/2023-61 SEI nº 4213676

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Graduação em Matemática

# ÁLGEBRAS ALTERNATIVAS SEMISSIMPLES

Julia Bernardes Coelho

Uberlândia-MG
0

**Julia Bernardes Coelho**

# ÁLGEBRAS ALTERNATIVAS SEMISSIMPLES

**Monografia** apresentada ao Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção de título de **BACHAREL(A) EM MATEMÁTICA**.

**Área de concentração:** Matemática
**Linha de pesquisa:** Álgebra

**Orientador(a):** Dylene Agda Souza de Barros

**U**berlândia-MG
**0**

*"E viverás no coração dos jovens e na memória das gerações que hão de vir"*
*- Cora Coralina*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus por estar sempre comigo em todos os momentos, até os mais difíceis. Agradeço a minha orientadora por todo apoio e pelo companheirismo durante minha graduação. Agradeço ao membros da banca Adriana Rodrigues da Silva e Rodrigo Lucas Rodrigues por aceitarem o convite. Agradeço ao meu tutor do PET, Marcus Bronzi, pelos conselhos que me ajudaram a persistir até o final. Agradeço aos meus amigos Victor Cruz, Mateus Fernando e Selma Aráujo por sempre me fazerem rir e estudarem comigo.

Agradeço ao meu esposo, Tiago Aprigio, a pessoa que mais esteve comigo, pelos carinhos quando precisei e pelos ensinamentos diários e pelos debates sobre as matérias. Espero estar sempre com você. Agradeço a minha sogra, Lourdes, meu sogro, Joaquim Aprigio e meus cunhados por todos os ensinamentos e momentos de comunhão em família.

Agradeço principalmente a meu pai, João Batista de Jesus, que veio a falecer de câncer durante a minha graduação mas que sem seu apoio, aconselhamento e fé na minha capacidade eu não teria terminado meu curso. Espero que esteja em um lugar melhor e sempre feliz como sempre foi comigo.

Na condição de bolsista do PET Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço ao Programa de Educação Tutorial da SESu/MEC pelo fomento.

# Resumo

Neste trabalho de conclusão de curso abordaremos o conceito e propriedades básicas de álgebras alternativas. Falaremos do processo de duplicação de Cayley-Dickson para tratar de um dos mais importantes exemplos de álgebras alternativas. Por fim, estudaremos as álgebras alternativas semissimples de dimensão finita e mostraremos que uma álgebra alternativa semissimples de dimensão finita é soma direta de ideais simples.

**Palavras Chave**: Álgebras Alternativas, Números de Cayley, Álgebras Alternativas Semissimples.

# Abstract

In this work, we will address the concept and basic properties of alternative algebras. We will talk about the Cayley-Dickson duplication process to deal with one of the most important examples of alternative algebras. Finally, we will study the finite-dimensional semisimple alternative algebras and show that any finite-dimensional semisimple alternative algebra is a direct sum of simple ideals.

**KeyWords**: Alternative Algebras, Cayley Numbers, Semisimple Alternative Algebras.

# Introdução

Em 1833, Sir William Rowan Hamilton apresentou uma reformulação do número complexo $z = a+bi$ como o par ordenado $(a,b)$ de números reais. Assim o mistério envolvendo as raízes da equação $x^2+1=0$ desapareceu pois suas raízes agora são $(0,1)$ e $(0,-1)$ e as fórmulas $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ e $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$ definem uma estrutura de corpo em $\mathbb{R}^2$. Motivado por problemas da Física, Hamilton tentou, durante anos, definir uma multiplicação que fornecesse uma estrutura de corpo em $\mathbb{R}^3$, o que hoje sabemos ser impossível.

Em 1843, Hamilton definiu a seguinte multiplicação em $\mathbb{R}^4$:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j,$$

em que $1 = (1,0,0,0)$, $i = (0,1,0,0)$, $j = (0,0,1,0)$, $k = (0,0,0,1)$. Hamilton mostrou que valem todos os axiomas de corpo exceto o da comutatividade. Este sistema de números, denominado quatérnios, foi o primeiro exemplo de "corpo não comutativo", o que atualmente é chamado de anel de divisão. Dois meses depois desta descoberta, Graves introduziu os octônios, definindo uma multiplicação em $\mathbb{R}^8$. Este sistema foi descoberto independentemente por Cayley em 1845 e por esta razão também é chamado números de Cayley.

O problema da classificação das álgebras associativas foi estudado extensivamente durante a segunda metade do século XIX por B. Peirce e seu filho C.S. Peirce, Frobenius, Scheffers, Molien, Cartan entre outros. Os resultados obtidos constituíam uma teoria satisfatória para álgebras sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Wedderburn, em 1907, estendeu essa teoria para álgebras de dimensão finita sobre um corpo arbitrário $F$. Até o final da década de 1920 essa teoria desenvolveu-se principalmente como teoria de álgebras associativas. A partir da década de 1930, a investigação sobre álgebras não associativas avançou rapidamente em muitas direções.

No capítulo 1, faremos preliminares sobre álgebras em geral apresentando exemplos e fatos básicos.

No capítulo 2, estudaremos as álgebras alternativas apresentando importantes propriedades destas, como as identidades de Moufang e o Teorema de Artin. Também apresentaremos o processo de duplicação de Cayley-Dickson, mostrando que os números de Cayley é um exemplo de álgebra alternativa e não associativa.

No capítulo 3, estudaremos as álgebras alternativas semissimples. O principal objetivo do capítulo é mostrar que toda álgebra alternativa semissimples de dimensão finita é escrita como soma direta de ideais simples. Para tanto, estudaremos propriedades de elementos propriamente nilpotentes e a decomposição de Peirce.

# CAPÍTULO 1

# Preliminares

Iniciamos nosso trabalho com definições, exemplos e propriedades básicas sobre anéis e álgebras.

**Definição 1.1** *Um anel é uma estrutura que consiste em um conjunto não vazio $R$ junto com duas operações binárias $+, \cdot$ em $R$ tais que:*

- *(a+b)+c=a+(b+c), para quaisquer a,b,c* $\in R$
- *a+b=b+a, para quaisquer a,b* $\in R$
- *existe* $0 \in R$ *tal que a+0=0+a=a para todo* $a \in R$
- *Para cada* $a \in R$ *existe um inverso* $-a$ *tal que* $a+(-a) = 0 = -a+a$
- *a(b+c)=ab+ac e (b+c)a=ba+ca, para quaisquer a,b,c* $\in R$

*Segue a definição de alguns tipos de anéis, de acordo com propriedades satisfeitas pela multiplicação.*

1. *Dizemos que o anel* $(R,+,\cdot)$ *é associativo se* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, *para quaisquer* $a,b \in R$
2. *Dizemos que o anel* $(R,+,\cdot)$ *é comutativo se* $a \cdot b = b \cdot a$, *para quaisquer* $a,b \in R$
3. *Dizemos que o anel* $(R,+,\cdot)$ *possui elemento unidade se existe um elemento* $1 \in R$ *tal que* $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, *para todo* $a \in R$
4. *Dizemos que o anel com elemento unidade* $(R,+,\cdot)$ *é um anel com divisão se para cada elemento* $a \in R$, *com* $a \neq 0$, *existe um elemento* $a^{-1} \in R$ *tal que* $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

5. *Dizemos que o anel* $(R,+,\cdot)$ *é um corpo se* $(R,+,\cdot)$ *for associativo, comutativo e com divisão*

**Definição 1.2** *Uma álgebra sobre um corpo* $F$ *é um par que consiste em um anel* $(A,+,\cdot)$ *e um espaço vetorial* $A$ *sobre* $F$ *tal que o conjunto subjacente* $A$*, a adição e* $0$ *são os mesmos no anel e no espaço vetorial, e*

$$a(xy) = (ax)y = x(ay) \tag{1.1}$$

*vale para* $a \in F, x, y \in A$. *Se* $A$ *é um espaço vetorial de dimensão finita sobre* $F$*, então diremos que a álgebra é de dimensão finita.*

Seja $A$ uma álgebra de dimensão $n$ sobre $F$, com base $\{u_1,\ldots,u_n\}$. Pela propriedade distributiva, a multiplicação é bilinear em $A$ e é completamente determinada pelos escalares $\gamma_{ijk} \in F$ que aparecem nos produtos

$$u_i u_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} u_k \tag{1.2}$$

**Exemplo 1.3** *Um corpo* $F$ *é uma álgebra associativa e comutativa sobre* $F$.

**Exemplo 1.4** *O conjunto* $M_n(F)$ *formada por todas as matrizes* $n \times n$ *com coeficientes em* $F$ *é uma álgebra associativa mas não é comutativa.*

**Exemplo 1.5** *Considere* $V$ *o espaço vetorial euclidiano tridimensional* $\mathbb{R}^3$. *Para vetores* $u$ *e* $v$ *em* $V$*, definimos* $u \times v$ *como o produto vetorial usual de* $u$ *por* $v$. *O espaço* $V$ *com essa multiplicação é uma álgebra sobre* $\mathbb{R}$. *Esta álgebra é uma álgebra não associativa, pois se denotarmos* $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ *e* $e_3 = (0,0,1)$ *temos* $e_1 \times (e_2 \times e_2) = e_1 \times 0 = 0$, *enquanto* $(e_1 \times e_2) \times e_2 = e_3 \times e_2 = -e_1$.

**Definição 1.6** *Se* $a,b,c$ *são elementos de uma álgebra* $A$ *definimos o associador de* $a,b$ *e* $c$ *por* $[a,b,c] = (ab)c - a(bc)$ *e o comutador de* $a$ *e* $b$ *por* $[a,b] = ab - ba$.

Observe que $A$ é uma álgebra associativa se $[a,b,c] = 0$ para quaisquer $a,b,c \in A$ e que $A$ é uma álgebra comutativa se $[a,b] = 0$ para quaisquer $a,b \in A$.

**Definição 1.7** *Uma álgebra* $A$ *sobre um corpo* $F$ *é dita alternativa se satisfaz, para quaisquer* $x, y \in A$,

$$x^2 y = x(xy) \text{ (Lei alternativa à esquerda)}$$

*e*

$$yx^2 = (yx)x \text{ (Lei alternativa à direita)}.$$

Em um álgebra alternativa vale

$$[x,x,y]=[y,x,x]=0.$$

**Exemplo 1.8** *Consideremos o espaço vetorial de dimensão 8 sobre $\mathbb{R}$ com base $\{1,e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$. Definindo a multiplicação de acordo com a tabela abaixo, temos a álgebra dos octônios, também conhecida como números de Cayley. No fim deste capítulo, mostraremos que esta é uma álgebra alternativa, mas não é associativa pois $(e_1\times e_2)\times e_5=e_3\times e_5=-e_6$ e $e_1\times(e_2\times e_5)=e_1\times e_7=e_6$.*

| | $1$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ | $e_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ | $e_7$ |
| $e_1$ | $e_1$ | $-1$ | $e_3$ | $-e_2$ | $e_5$ | $-e_4$ | $-e_7$ | $e_6$ |
| $e_2$ | $e_2$ | $-e_3$ | $-1$ | $e_1$ | $e_6$ | $e_7$ | $-e_4$ | $-e_5$ |
| $e_3$ | $e_3$ | $e_2$ | $-e_1$ | $-1$ | $e_7$ | $-e_6$ | $e_5$ | $-e_4$ |
| $e_4$ | $e_4$ | $-e_5$ | $-e_6$ | $-e_7$ | $-1$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
| $e_5$ | $e_5$ | $e_4$ | $-e_7$ | $e_6$ | $-e_1$ | $-1$ | $-e_3$ | $e_2$ |
| $e_6$ | $e_6$ | $e_7$ | $e_4$ | $-e_5$ | $-e_2$ | $e_3$ | $-1$ | $-e_1$ |
| $e_7$ | $e_7$ | $-e_6$ | $e_5$ | $e_4$ | $-e_3$ | $-e_2$ | $e_1$ | $-1$ |

Agora suponha que $A$ seja uma álgebra qualquer sobre o corpo $F$, com elemento unidade 1. Seja $a\in F$ e considere o elemento $a1\in A$. Por 1.1, temos $(a1)x=a(1x)=ax$ e $x(a1)=a(x1)=ax$. Isso mostra que o produto do espaço vetorial $ax$ coincide com o produto do anel $(a1)x$ e que $a1$ comuta com todo $x\in A$.

**Definição 1.9** *Um subconjunto $B$ de uma álgebra $A$ é uma subálgebra se for um subanel do anel $A$ e um subespaço do espaço vetorial de $A$.*

A interseção de subálgebras é uma subálgebra. Se $S$ é um subconjunto de $A$, define-se a subálgebra $F[S]$ gerada por $S$ como a interseção de todas as subálgebras de $A$ contendo $S$.

**Definição 1.10** *Um subconjunto $I$ de $A$ é um ideal de uma álgebra $A$ se $I$ é um ideal em $A$ como um anel e um subespaço de $A$ como um espaço vetorial sobre $F$.*

**Definição 1.11** *Seja $I$ um ideal na álgebra $A$. Então obtemos o anel quociente $A/I$ e o espaço vetorial $A/I$. Juntos, eles constituem uma álgebra que é chamada de álgebra quociente de $A$ com respeito ao ideal $I$.*

**Definição 1.12** *Uma função de uma álgebra $A$ em uma álgebra $B$, sobre o mesmo corpo, é um homomorfismo de álgebra se for um homomorfismo de álgebra e uma transformação linear.*

Encerramos estas preliminares mostrando que uma álgebra $A$ sem elemento unidade é isomorfa a um ideal $I$ de uma álgebra $U$ com unidade de modo que $U/I$ tenha dimensão 1. Chamaremos a álgebra $U$ de extensão linear da álgebra $A$.

Seja $A$ uma álgebra sobre o corpo $F$ e suponha que $A$ não tenha elemento unidade. Considere em $U = F \times A = \{(\alpha, a) \mid \alpha \in F,\ a \in A\}$ a soma e multiplicação por escalar coordenada a coordenada, isto é, $(\alpha,a)+(\beta,b) = (\alpha+\beta, a+b)$ e $\gamma(\alpha,a) = (\gamma\alpha, \gamma a)$ para $\alpha,\beta,\gamma \in F$ e $a,b \in A$. Com essas operações, $U$ é um espaço vetorial sobre $F$. Definimos a multiplicação em $U$ por

$$(\alpha,a)\cdot(\beta,b) = (\alpha\beta, \beta a + \alpha b + ab). \tag{1.3}$$

Temos que $U$ é uma álgebra sobre $F$. Observe que $(1,0)$ é elemento unidade de $U$. De fato,

$$(1,0)\cdot(\alpha,a) = (1\alpha, \alpha 0 + 1a + 0a) = (\alpha,a)$$

e

$$(\alpha,0)\cdot(1,0) = (\alpha 1, 1a + \alpha 0 + a0) = (\alpha,a).$$

Agora vamos mostrar que $I = \{(0,a) \in U \mid a \in A\}$ é um ideal de $U$ que é isomorfo à álgebra $A$. Temos que $I$ é um subespaço de $U$. Para verificar que $I$ é um ideal de $U$, observe que para todo $(0,a) \in I$ e $(\beta,b) \in U$,

$$(0,a)\cdot(\beta,b) = (0\beta, \beta a + 0b + ab) = (0, \beta a + ab) \in I$$

e

$$(\beta,b)\cdot(0,a) = (\beta 0, 0b + \beta a + ba) = (0, \beta a + ba) \in I.$$

Para verificar que $I$ é isomorfo a $A$ observe que para quaisquer $a,b \in A$, $(0,a)\cdot(0,b) = (0,ab)$. Resta verificar que $U/I$ tem dimensão 1. Para isso, vamos mostrar que $U/I$ é isomorfo ao corpo $F$. De fato

$$U/I = \{(\alpha,a) + I \mid (\alpha,a) \in U\}$$

e $(\alpha,a)+I = (\beta,b)+I$ se, e somente se, $(\alpha,a)-(\beta,b) \in I$ o que implica em $(\alpha,a)+I = (\beta,b)+I$ se, e somente se, $\alpha = \beta$. Assim, reescrevemos

$$U/I = \{(\alpha,0) + I \mid \alpha \in F\}.$$

Agora observe que $((\alpha,0)+I)((\beta,0)+I) = (\alpha\beta,0)+I$, o que nos garante que $\alpha \in F \mapsto (\alpha,0)+I \in U/I$ é um isomorfismo, e portanto $U/I$ tem dimensão 1.

# CAPÍTULO 2

# Álgebras Alternativas

Começamos o capítulo relembrando as seguintes definições:

**Definição 2.1** *Uma álgebra sobre um corpo F é um par que consiste em um anel* $(A,+,\cdot)$ *e um espaço vetorial A sobre F tal que o conjunto subjacente A, a adição e* 0 *são os mesmos no anel e espaço vetorial, e*

$$a(xy) = (ax)y = x(ay) \tag{2.1}$$

*vale para* $a \in F, x, y \in A$. *Se A é um espaço vetorial de dimensão finita sobre F, então diremos que a álgebra é de dimensão finita.*

**Definição 2.2** *Se* $a, b, c$ *são elementos de uma álgebra A definimos o associador de* $a, b$ *e* $c$ *por* $[a,b,c] = (ab)c - a(bc)$ *e o comutador de a e b por* $[a,b] = ab - ba$.

Observe que $A$ é uma álgebra associativa se $[a,b,c] = 0$ para todo $a,b,c \in A$ e que $A$ é uma álgebra comutativa se $[a,b] = 0$ para todo $a,b \in A$.

**Definição 2.3** *Uma álgebra A sobre um corpo F é dita alternativa se satisfaz, para todo* $x, y \in A$,

$$x^2y = x(xy) \text{ (Lei alternativa à esquerda)}$$

*e*

$$yx^2 = (yx)x \text{ (Lei alternativa à direita).}$$

Em um álgebra alternativa vale

$$[x,x,y] = [y,x,x] = 0.$$

O associador e o comutador são funções lineares em cada um de seus argumentos. Por exemplo, se $a_1, a_2, b$ e $c$ são elementos de uma álgebra $A$, sobre um corpo $F$ e $\alpha \in F$

$$[a_1 + a_2, b, c] = [a_1, b, c] + [a_2, b, c] \text{ e } [\alpha a, b, c] = \alpha[a, b, c]$$

Em qualquer álgebra, a identidade de Teichmuller:

$$\begin{aligned} g(w,x,y,z) &= [wx,y,z] - [w,xy,z] + [w,x,yz] - w[x,y,z] - [w,x,y]z \\ &= (wxy)z - wx(yz) - (wxy)z + w(xyz) + (wx)yz - w(xyz) - w(xy)z + wx(yz) \\ &- (wx)yz + w(xy)z = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

**Definição 2.4** *O núcleo de uma álgebra $A$ é*

$$N(A) = \{a \in A \mid [a,x,y] = [x,a,y] = [x,y,a] = 0 \textit{ para quaisquer } x, y \in A\}$$

e o centro de $A$ é definido como

$$Z(A) = \{a \in N(A) \mid [a,x] = 0 \text{ para quaisquer } x, y \in A\}.$$

Note que em uma álgebra associativa, o núcleo coincide com a álgebra e, em uma álgebra não associativa, elementos do centro associam e comutam com todos os pares de elementos.

Seja $A$ uma álgebra alternativa. Observe que, para quaisquer $x, y, z \in A$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= [x, y+z, y+z] \\ &= [x,y,y] + [x,y,z] + [x,z,y] + [x,z,z] \\ & \quad [x,y,z] = -[x,z,y] \end{aligned} \tag{2.3}$$

e

$$\begin{aligned} 0 &= [x+z, x+z, y] \\ &= [x,x,y] + [x,z,y] + [z,x,y] + [z,z,y] \\ & \quad [x,z,y] = -[z,x,y] \end{aligned} \tag{2.4}$$

Também temos que, em qualquer álgebra alternativa $A$, vale a identidade flexível

$$[x,y,x]=0, \quad \text{pois} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} 0 &= [x+y,x+y,x] \\ &= [x,x,x]+[x,y,x]+[y,x,x]+[y,y,x] \\ & [x,y,x] \end{aligned}$$

Se $A$ é uma álgebra, uma função $f : A^n \longrightarrow A$ é chamada alternada se, para qualquer permutação $\theta$ de $S_n$

$$f(x_{\theta(1)},x_{\theta(2)},\cdots,x_{\theta(n)}) = sgn(\theta)f(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

onde $sgn(\theta)$ denota o sinal de $\theta$, isto é $sgn(\theta)=1$ se $\theta$ é par ou $sgn(\theta)=-1$ se $\theta$ é ímpar.

O nome "alternativa" vem do fato de que em uma álgebra alternativa $A$, o associador, $[x_1,x_2,x_3]=(x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3)$ é uma função alternada.

**Proposição 2.5** *Em qualquer álgebra A, o núcleo e o centro são subálgebras.*

**Demonstração:** Desde que o comutador e o associador sejam funções lineares de seus argumentos, o núcleo e centro são subespaços vetoriais de $A$. Vamos mostrar que eles são fechados para a multiplicação. Se $w,x \in N(A)$, segue que da identidade de Teichmuller que $[wx,y,z]=0$ para todo $y,z \in A$, então $N(A)$ também é fechado para a multiplicação e portanto uma subálgebra. Finalmente, sejam $w,x \in Z(A)$. Então $w,x$ e $wx$ estão todos em $N(A)$ e, portanto, no centro, uma vez que o cálculo

$$(wx)y = w(xy) = w(yx) = (wy)x = (yw)x = y(wx)$$

mostra que $wx$ comuta com qualquer $y \in A$.

■

**Definição 2.6** *Uma álgebra A é simples se $A \neq 0$ e seus únicos ideais são 0 e A.*

**Definição 2.7** *Seja A uma álgebra alternativa. Definimos a função de Kleinfeld por $f : A^4 \longrightarrow A$ onde*

$$f(w,x,y,z) = [wx,y,z] - x[w,y,z] - [x,y,z]w.$$

**Proposição 2.8** *A função Kleinfeld é uma função alternada.*

**Demonstração:** Nesta prova, usaremos a identidade de Teichmuller $g(w,x,y,z) = [wx,y,z] - [w,xy,z] + [w,x,yz] - w[x,y,z] - [w,x,y]z = 0$. Para quaisquer $z,w,x,y \in A$, temos

$$\begin{aligned} f(z,w,x,y) &= f(z,w,x,y) - g(w,x,y,z) \\ &= [zw,x,y] - w[z,x,y] - [w,x,y]z - [wx,y,z] \\ &+ [w,xy,z] - [w,x,yz] + w[x,y,z] + [w,x,y]z \\ &= [zw,x,y] - [wx,y,z] + [w,xy,z] - [w,x,yz] \\ &= [zw,x,y] - [wx,y,z] + [xy,z,w] - [yz,w,x] \end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned} f(w,x,y,z) &= [wx,y,z] - [xy,z,w] + [yz,w,x] - [zw,x,y] \\ &= -f(z,w,x,y). \end{aligned}$$

Substituindo $y$ por $y+z$ na identidade

$$f(w,x,y,y) = [wx,y,y] - x[w,y,y] - [x,y,y]w = 0$$

temos $f(w,x,y,z) = -f(w,x,z,y)$. Como as permutações (1234) e (34) geram o grupo $S_4$ concluímos que $f$ é uma função alternada.

■

**Corolário 2.9** *Em qualquer álgebra alternativa, as seguintes identidades são válidas.*

$$[x^2,y,z] = x[x,y,z] + [x,y,z]x \tag{2.6}$$

$$[xy,x,z] = [y,x,z]x \tag{2.7}$$

$$((xy)x)z = x(y(xz)), \text{ a identidade de Moufang à esquerda} \tag{2.8}$$

$$((xy)z)y = x(y(zy)), \text{ a identidade de Moufang à direita} \tag{2.9}$$

$$(xy)(zx) = (x(yz))x, \text{ a identidade de Moufang do meio} \tag{2.10}$$

**Demonstração:** A demonstração das identidades (2.6) e (2.7) é consequência imediata do fato da função de Kleinfeld ser alternada. Por exemplo, para 2.6

$$
\begin{aligned}
0 = f(x,x,y,z) &= [x^2,y,z] - x[x,y,z] - [x,y,z]x \\
&= x[x,y,z] + [x,y,z]x.
\end{aligned}
$$

Para 2.8

$$
\begin{aligned}
((xy)x)z - x(y(xz)) &= ((xy)x)z - (xy)(xz) + (xy)(xz) - x(y(xz)) \\
&= [xy,x,z] + [x,y,xz] \\
&= [y,x,z]x + [xz,x,y] = [y,x,z]x + [z,x,y]x = 0.
\end{aligned}
$$

Similarmente, as identidades à direita e do meio de Moufang seguem respectivamente de

$$
\begin{aligned}
((xy)z)y - x(y(zy)) &= ((xy)z)y - (xy)(zy) + (xy)(zy) - x(y(zy)) \\
&= [xy,z,y] + [x,y,zy] \\
&= -[xy,y,z] - [zy,y,x] = -y[x,y,z] - y[z,y,x] = 0
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(xy)(zx) - (x(yz))x &= (xy)(zx) - ((xy)z)x + ((xy)z)x - (x(yz))x \\
&= -[xy,z,x] + [x,y,z]x \\
&= [xy,x,z] + [x,y,z]x = [y,x,z]x + [x,y,z]x = 0.
\end{aligned}
$$

■

**Proposição 2.10 (Kleinfeld)** *Seja $A$ uma álgebra alternativa com o núcleo $N$. Então*

1. $[x,n][x,y,z] = 0$ *para todo $n \in N$ e para quaisquer $x,y,z \in A$, e,*
2. *Se $[a,b,x] = 0$ para todo $x \in A$, então $[a,b] \in N$ e $[a,ab] \in N$.*

**Demonstração:** No que se segue, $f$ denota a função de Kleinfeld e $g$ denota a identidade de Teichmuller, usaremos livremente as identidades 2.6 e 2.7. Sejam $x,y,z \in A$ e $n \in N$. Então,

$$f(x,y,z,n) = [xy,z,n] - y[x,z,n] - [y,z,n]x = 0,$$

assim

$$0 = f(n,x,y,z) = [nx,y,z] - x[n,y,z] - [x,y,z]n,$$

o que nos dá $[nx,y,z] = [x,y,z]n$. Similarmente, $[xn,y,z] = n[x,y,z]$. Mas

$$\begin{aligned} 0 &= g(x,n,y,z) \\ &= [xn,y,z] - [x,ny,z] + [x,n,yz] - x[n,y,z] - [x,n,y]z \\ &= [xn,y,z] - [x,ny,z], \end{aligned}$$

então $[xn,y,z] = [x,ny,z]$. Visto que $[x,ny,z] = [ny,z,x] = [y,z,x]n = [x,y,z]n = [nx,y,z]$, nós obtemos $[[x,n],y,z] = 0$; então $[x,n] \in N$. Um cálculo direto mostra que $[yx,n] = y[x,n] + [y,n]x$, então

$$\begin{aligned} 0 &= [[yx,n],x,z] \\ &= [y[x,n],x,z] + [[y,n]x,x,z] = [x,n][y,x,z] + [x,x,z][y,n], \end{aligned}$$

implicando $[x,n][y,x,z] = 0$ e portanto provando a primeira afirmação.

Agora, se $[a,b,x] = 0$ para todo $x \in A$, então

$$f(x,y,a,b) = [xy,a,b] - y[x,a,b] - [y,a,b]x = 0$$

e então

$$0 = g(a,b,x,y) + f(b,x,y,a) - f(b,a,x,y) = [[a,b],x,y],$$

o que nos mostra que $[a,b] \in N$. Mas $[a,b,x] = 0$ para todo $x$ implica que $[a,ab,x] = -[ab,a,x] = -[b,a,x]a = 0$ para todo $x$, então, pela primeira parte de 2, podemos concluir que $[a,ab] \in N$.

■

Encontra-se na literatura, autores que afirmam que as álgebras alternativas são uma primeira generalização das álgebras associativas. Tal pensamento é reforçado pelo chamado "Teorema Generalizado de Artin", que diz que se $x,y$ e $z$ são três elementos de uma álgebra alternativa que associam, então a subálgebra gerada por esses elementos é associativa. Apresentamos o Teorema Generalizado de Artin como corolário do seguinte teorema.

**Teorema 2.11** *Se $B,C$ e $D$ são subconjuntos de uma álgebra alternativa $A$ tais que $[B,B,A] = [C,C,A] = [D,D,A] = [B,C,D] = 0$, então o subconjunto $E = B \cup C \cup D$ está contido em uma subál-*

*gebra associativa.*

**Demonstração:** Apresentaremos uma demonstração feita originalmente pelos matemáticos Bruck e Kleinfeld. Denotaremos por $f$ a função de Kleinfeld em $A$ e usaremos livremente o fato que esta função e o associador são funções alternadas e portanto se anulam se dois de seus argumentos forem iguais. Para os subconjuntos $X,Y,Z,W$ de $A$, denotamos o conjunto $f(X,Y,Z,W) = \{f(x,y,z,w) \mid x \in X,\ y \in Y,\ z \in Z,\ w \in W\}$. Considere os seguintes subconjuntos de $A$,

$$K = \{k \in A \mid [k,E,E] = f(k,E,E,E) = 0\}$$

$$M = \{m \in K \mid mK \subseteq K, [m,E,K] = 0\}$$

$$S = \{s \in M \mid [s,M,K] = 0\}.$$

Por hipótese, temos que $[E,E,E] = 0$. Também para $a_1,a_2 \in B$ e qualquer $x,y \in A$, temos

$$f(x,y,a_1,a_2) = [xy,a_1,a_2] - y[x,a_1,a_2] - [y,a_1,a_2]x = 0;$$

então $f(B,B,A,A) = 0$ e similarmente, $f(C,C,A,A) = f(D,D,A,A) = 0$. Segue que $E \subseteq K$.

Agora, para $d_1,d_2,d_3 \in E$ e $k \in K$,

$$[d_1d_2,d_3,k] = d_2[d_1,d_3,k] + [d_2,d_3,k]d_1 + f(d_1,d_2,d_3,k) = 0$$

e então, para quaisquer $k \in K, d \in E$ e $x \in EE$, obtemos $[x,d,k] = 0$. Para tais $k$ e $x$, e para quaisquer $a_1,a_2 \in B$, segue que

$$[a_1k,a_2,x] = k[a_1,a_2,d] + [k,a_2,d]a_1 + f(a_1,k,a_2,d) = 0.$$

Também, para $a_1,a_2 \in B,\ d \in E$ e $k \in K$,

$$[a_1k,a_2,d] = k[a_1,a_2,d] + [k,a_2,d]a_1 + f(a_1,k,a_2,d) = 0$$

então, para $b \in C$ e $c \in D$,

$$0 = [bc,a_1,a_2k]$$

$$= c[b,a_1,a_2k] + [c,a_1,a_2k]b + f(b,c,a_1,a_2k) = f(b,c,a_1,a_2k)$$

Por simetria, $f(d_1,d_2,d_3,dk) = 0$ para quaisquer $d,d_1,d_2,d_3 \in E$. Uma vez que também

$[dk,d_1,d_2] = k[d,d_1,d_2]+[k,d_1,d_2]d + f(d,k,d_1,d_2) = 0$, obtemos $EK \subseteq K$; portanto $E \subseteq M$. Então segue que

$$E \subseteq S \subseteq M \subseteq K.$$

então $S$ é um subconjunto associativo de $A$. Vamos provar que $S$ a subálgebra que satisfaz o enunciado do teorema. Pela linearidade do associador, temos que $S$ é um subespaço de $A$. Resta provar que $S$ é fechado sobre multiplicação.

Para $m \in M$, $k \in K$ e $s_1, s_2 \in S$,

$$f(m,k,s_1,s_2) = [mk,s_1,s_2] - k[m,s_1,s_2] - [k,s_1,s_2]m = 0,$$

pois cada associador da direita está em $[S,M,K]$, e também

$$[s_1s_2,m,k] = s_2[s_1,m,k]+[s_2,m,k]s_1 + f(s_1,s_2,m,k) = 0.$$

Agora, como $S \subseteq M \subseteq K$ e $MK \subseteq K$, nós temos $SK \subseteq K$ e $[s_1,s_2,k] = 0$, então $(s_1s_2)k = s_1(s_2k) \in K$. Também $[s_1,s_2,m,k] = 0$ implica que $[s_1,s_2,d,k] = 0$, então $s_1,s_2 \in M$. Desse modo, $SS \subseteq S$ como queríamos.

■

O próximo corolário segue do teorema 2.12, fazendo $B = \{x\}, C = \{y\}$ e $D = \{z\}$.

**Corolário 2.12 (O Teorema Generalizado de Artin)** *Se $x,y$ e $z$ são elementos de uma álgebra alternativa que associam em alguma ordem, então a subálgebra gerada por $x,y,z$ é associativa.*

**Corolário 2.13 (Artin)** *Uma álgebra $A$ é alternativa se, e somente, se a subálgebra gerada por quaisquer dois elementos de $A$ é associativa.*

**Demonstração:** Se $A$ é uma álgebra alternativa, para quaisquer $x,y \in A$, vale $(xx)\cdot y = x\cdot(xy)$, logo a subálgebra gerada por $\{x,y\}$ é associativa. Reciprocamente, se toda subálgebra de $A$, gerada por dois elementos, é associativa então, $(xx)y = x(xy)$ e $(yx)x = y(xx)$ quaisquer que sejam $x,y \in A$. Logo $A$ é alternativa.

■

**Definição 2.14** *Uma álgebra $A$ é diassociativa se quaisquer dois elementos de $A$ geram uma subálgebra associativa.*

Claramente, uma álgebra associativa é diassociativa. O Teorema de Artin nos garante que uma álgebra é alternativa se, e somente se, é diassociativa.

Finalmente, vamos mostrar que se $A$ é uma álgebra alternativa, sua extensão linear $U$ também é alternativa.

**Proposição 2.15** *Se $A$ é uma álgebra alternativa, então a extensão linear de $A$ é alternativa.*

**Demonstração:** Seja $A$ uma álgebra sobre $F$ e considere $U$ sua extensão linear. Pela Definição 2.3 devemos provar que $((\alpha,a)(\alpha,a))(\beta,b) = (\alpha,a)((\alpha,a)(\beta,b))$, para quaisquer $(\alpha,a),(\beta,b) \in U$. De fato,

$$((\alpha,a)(\alpha,a))(\beta,b) = ((\alpha\alpha, \alpha a + \alpha a + aa))(\beta,b) = (\alpha\alpha\beta, \beta(\alpha a + \alpha a + aa) + \alpha\alpha b + (\alpha a + \alpha a + aa)b)$$

e

$$(\alpha,a)((\alpha,a)(\beta,b)) = (\alpha,a)((\alpha\beta, \beta a + \alpha b + ab)) = (\alpha\alpha\beta, \alpha\beta a + \alpha(\beta a + \alpha b + ab) + a(\beta a + \alpha b + ab)).$$

Visto que a álgebra $A$ é alternativa, temos $(aa)b = a(ab)$ para todos $a,b \in A$. Assim $((\alpha,a)(\alpha,a))(\beta,b) = (\alpha,a)((\alpha,a)(\beta,b))$ para todo $(\alpha,a),(\beta,b) \in U$. Analogamente, $(\alpha a)((\beta,b)(\beta,b)) = ((\alpha,a)(\beta,b))(\beta,b)$ para todo $(\alpha,a),(\beta,b) \in U$ pois $a(bb) = (ab)b$ para quaisquer $a,b \in A$. Portanto, $U$ é uma álgebra alternativa.

■

## 2.1 Os quatérnios reais e os números de Cayley

A álgebra real dos quatérnios é o espaço vetorial de dimensão 4 sobre $\mathbb{R}$ com a base $\{1,i,j,k\}$ e a multiplicação é dada pelas relações $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ e estendendo a combinações lineares sobre $\mathbb{R}$ de elementos da base pelas leis distributivas. Esta álgebra (associativa) é denotada por $\mathbb{H}(\mathbb{R})$ em honra a Sir William Rowan Hamilton quem a descobriu em 1843. Como notamos na introdução, os quatérnios são importantes historicamente pois eles forneceram o primeiro exemplo de uma álgebra real associativa não comutativa na qual cada elemento diferente de zero é inversível. Muitas vezes, o nascimento da teoria de anéis não comutativos é creditado à sua descoberta.

Temos

$$\mathbb{H}(\mathbb{R}) = \{a_0 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}, \text{ em que } i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Em $\mathbb{H}(\mathbb{R})$, $a_0 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k = b_0 1 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$ se, e somente se, $a_l = b_l, 1 \leq l \leq 4$. A adição é dada por

$$(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) + (b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k$$

Definimos a multiplicação dos quatérnios por:

$$(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)(b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k) =$$

$$(a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) + (a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2)i$$

$$+(a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_3 b_1 - a_1 b_3)j + (a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1)k$$

Esta fórmula do produto em $\mathbb{H}(\mathbb{R})$ é obtida multiplicando as somas formais termo a termo, sujeita as seguintes relações:

- $ri = ir$; $rj = jr$; $rk = kr$ $(\forall r \in \mathbb{R})$;
- $i^2 = j^2 = k^2 = -1$; $ij = -ji = k$; $jk = -kj = i$; $ki = -ik = j$.

Com este produto, $\mathbb{H}(\mathbb{R})$ é um anel de divisão não comutativo no qual o inverso multiplicativo de $\alpha = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \neq 0$ é $\beta = (\frac{a_0}{d}) - (\frac{a_1}{d})i - (\frac{a_2}{d})j - (\frac{a_3}{d})k$, onde $d = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. Se $q = a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k, \in \mathbb{H}, 1 \leq i \leq 4$ é um quatérnio, o conjugado de $q$ é o elemento

$$\overline{q} = a_1 - a_2 i - a_3 j - a_4 k. \tag{2.11}$$

Temos que

$$q\overline{q} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \tag{2.12}$$

e

$$\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2}\ \overline{q_1} \tag{2.13}$$

para quaisquer $q_1, q_2 \in \mathbb{H}(\mathbb{R})$.

**Definição 2.16** *Uma involução de uma álgebra $A$ é uma bijeção linear $a \mapsto \bar{a}$ de $A$ que satisfaz*

$$\overline{ab} = \overline{b}\,\overline{a} \;\; e \;\; \overline{\overline{a}} = a \tag{2.14}$$

*para quaisquer $a, b \in A$.*

As equações (2.11) e (2.13) juntas mostram que a conjugação em $\mathbb{H}(\mathbb{R})$ é uma involução. Se $q$ é um quatérnio, definimos norma de $q$ por

$$n(q) = q\overline{q} \in \mathbb{R}. \tag{2.15}$$

Temos que a função $n$ é multiplicativa, ou seja, $n(q_1q_2) = n(q_1)n(q_2)$ para quaisquer $q_1, q_2 \in \mathbb{H}(\mathbb{R})$, pois

$$n(q_1q_2) = q_1q_2\overline{q_1q_2} = q_1q_2\overline{q_2}\,\overline{q_1} = q_1n(q_2)\overline{q_1} = n(q_1)n(q_2), \tag{2.16}$$

uma vez que $n(q_2) \in \mathbb{R}$ é central.

É essa norma multiplicativa, juntamente com 2.12.

O primeiro exemplo de um anel alternativo que não é associativo é o anel dos números de Cayley, que foi descoberto por J.T. Graves em 1843 e apareceu pela primeira vez impresso dois anos depois. Como os quatérnios reais, os números de Cayley formam um anel de divisão no qual a multiplicação não é comutativa. Diferentemente dos quatérnios, entretanto, a multiplicação de números de Cayley não é associativa. Os números de Cayley, que denotamos por $\mathscr{C}$, podem ser construído através dos quatérnios reais de uma forma muito parecida como os números complexos são construídos a partir de $\mathbb{R}$. Um número de Cayley é um elemento da forma $a + b\ell$ onde $a$ e $b$ são quatérnios reais e $\ell$ é uma indeterminada. A soma em $\mathscr{C}$ é definida por

$$(a + b\ell) + (c + d\ell) = (a + c) + (b + d)\ell,$$

e o produto por

$$(a + b\ell)(c + d\ell) = (ac - \overline{d}b) + (da + b\overline{c})\ell,$$

onde $a, b, c$ e $d$ são quatérnios e $\overline{x}$ denota o conjugado de $x \in \mathbb{H}(\mathbb{R})$. A função $a + b\ell \mapsto \bar{a} - b\ell$ é uma involução em $\mathscr{C}$ e $n(w) = w\overline{w}$ para $w \in \mathscr{C}$ define uma norma multiplicativa.

Os números de Cayley formam uma álgebra de dimensão 8 sobre $\mathbb{R}$ com base

$$\{1,i,j,k\}\cup\{\ell,i\ell,j\ell,k\ell\} \tag{2.17}$$

onde $\{1,i,j,k\}$ denota a base usual de $\mathbb{H}(\mathbb{R})$. Os números reais, os números complexos, a álgebra de quatérnios reais e os números de Cayley normalmente aparecem no mesmo contexto. Por exemplo, essas quatro álgebras são as únicas álgebras de divisão alternativas de dimensão finita sobre o corpo dos números reais. Foi G. Frobenius quem, em 1877, provou que $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{H}(\mathbb{R})$ são as únicas álgebras de divisão associativas de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. A extensão deste teorema para álgebras alternativas é um resultado de R. H. Bruck e E. Kleinfeld.

### 2.1.1 Quatérnios Generalizados e Álgebras de Cayley-Dickson

Seja $F$ um corpo de característica diferente de 2. Seja $A$ uma álgebra de dimensão finita $n$ sobre $F$ com o elemento unidade 1. Suponha que $A$ tem uma involução $a\mapsto\bar{a}$ tal que $a+\bar{a}\in F1$ e $a\bar{a}=\bar{a}a\in F1$ para todo $a\in A$ em que $F1=\{\epsilon 1;\ \epsilon\in F\}$. Dado qualquer $\alpha\in F$, $\alpha\neq 0$, e uma indeterminada $\ell$, nós construímos uma álgebra $B$, denotado por $(A,\alpha)$ de dimensão $2n$ sobre $F$. Os elementos de $B$ são expressões formais da forma $a+b\ell, a,b\in A$. Adição e multiplicação são definidas por,

(A) $(a+b\ell)+(c+d\ell)=(a+c)+(b+d)\ell$;

(M) $(a+b\ell)(c+d\ell)=(ac+(\alpha)\overline{d}b)+(da+\overline{c}d)\ell$.

Observe que pela definição (M), $\ell^2=(0+1\ell)(0+1\ell)=\alpha$.

Se $x=a+b\ell$, a função $x\mapsto\bar{x}=\overline{a}-bl$ define uma involução de $B$ tal que $x+\bar{x}$ e $x\bar{x}\in F1$ para qualquer $x\in B$. Se $x=a+b\ell$ e $b=c+d\ell$, nós temos

$$\begin{aligned}
[x,x,y] &= (xx)y-x(xy)=[(a+b\ell)\cdot(a+b\ell)](c+d\ell)-(a+b\ell)[(a+b\ell)\cdot(c+d\ell)]\\
&= [(aa+\alpha\overline{b}b)+(ba+b\overline{a})\ell](c+d\ell)-(a+b\ell)[(ac+\alpha\overline{d}b)+(da+b\overline{c})\ell]\\
&= \{(aa+\alpha\overline{b}b)c+\alpha\overline{d}(ba+b\overline{a})+[d(aa+\alpha\overline{b}b)+(ba+b\overline{a})\overline{c}]\ell\}\\
&- \{a(ac+\alpha\overline{d}b)+\alpha\overline{(da+b\overline{c})}b+[(da+b\overline{c})a+b\overline{(ac+\alpha\overline{d}b)}]\ell\}\\
&= \{[a,a,c]-\alpha[c,\overline{b},b]-\alpha[\overline{a},\overline{d},b]\}+\{-[d,a,a]+\alpha[b,\overline{b},d]+[b,\overline{c},\overline{a}]\}\ell
\end{aligned}$$

Aqui nós usamos a centralidade de $a+\bar{a}$ e $b\bar{b}$ e o fato de que $b$ e $\bar{b}$ comutam, pois $b+\bar{b}$ é central. Além do mais, a centralidade de $b+\bar{b}$ implica que $[c,\overline{b},b]=[c,(\bar{b}+b)-b,b]=-[c,b,b]$. Usando essa ideia, nós podemos reescrever 2.18 como

$$[x,x,y] = \{[a,a,c] + \alpha[c,b,b] - \alpha[a,d,b]\} + \{[d,a,a] + [b,c,a] - \alpha[b,b,d]\}\ell. \tag{2.18}$$

**Proposição 2.17** *Se $A$ é uma álgebra com 1 sobre um corpo $F$ e $\alpha \in F, \alpha \neq 0$, então $(A,\alpha)$ é uma álgebra alternativa se, e somente se, $A$ é uma álgebra associativa.*

**Demonstração:** Suponha que $B$ seja uma álgebra alternativa. Então $A$ também é alternativa, e pela identidade 2.18,

$$0 = [x,x,y] = -\alpha[a,d,b] + [b,c,a]\ell$$

para quaisquer $a,b,c,d$. Segue então que $A$ é associativa. Por outro lado, a associatividade de $A$ implica que $[x,x,y] = 0$ e, similarmente, que $[x,y,y] = 0$. Logo $B$ é alternativa.

■

### Construção dos complexos através dos reais

Consideremos $F = A = \mathbb{R}$, a função identidade é uma involução em $A$, denotaremos a indeterminada por $i$ e $\alpha = -1$.

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)(c+di) = (ac+(-1)\overline{d}b)+(da+b\overline{c})i = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

Agora temos a álgebra dos complexos $\mathbb{C}$ que tem dimensão 2 sobre $\mathbb{R}$.

### Construção dos quatérnios através dos complexos

Consideremos $F = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{C}$. A conjugação usual dos complexos é uma involução em $A$. A indeterminada $\ell = j$ e $\alpha = -1$.

$$(a+bj)+(c+dj) = (a+c)+(b+d)j, \quad \text{onde} \quad a,b \in \mathbb{C}$$

$$(a+bj)(c+dj) = (ac+(-1)\overline{d}b)+(da+b\overline{c})j.$$

Agora temos a álgebra dos quatérnios $\mathbb{H}$ que tem dimensão 4 sobre $\mathbb{R}$. Definimos $\mathbb{H}$ como sendo o conjunto dos quatérnios da forma $w = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$, em que $1 \leq m \leq 4$. Agora teremos a álgebra dos quatérnios $\mathbb{H}$ que tem dimensão 4 sobre $\mathbb{R}$.

**Construção dos octônios através dos quatérnios**

Consideremos $F = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{H}$. A conjugação usual dos quatérnios é uma involução em $A$. A indeterminada $\ell$ e $\alpha = -1$.

$$(a + b\ell) + (c + d\ell) = (a + c) + (b + d)\ell, \quad \text{onde} \quad a, b \in \mathbb{H}$$

$$(a + b\ell)(c + d\ell) = (ac - \bar{d}b) + (da + b\bar{c})\ell.$$

Agora temos a álgebra dos octônios $\mathscr{C}$ que tem dimensão 8 sobre $\mathbb{R}$. Chamemos $a = a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k$ e $b = b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k$ e temos

$$w = a + b\ell = a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k + b_1 \ell + b_2 i\ell + b_3 j\ell + b_4 k\ell$$

$$= a_1 + a_2 e_1 + a_3 e_2 + a_4 e_3 + b_1 e_4 + b_2 e_5 + b_3 e_6 + b_4 e_7$$

Pela proposição 2.15 temos que $\mathscr{C}$ é alternativa, já que $\mathbb{H}(\mathbb{R})$ é associativa. Entretanto $\mathscr{C}$ não é associativa pois $(i \cdot j)k\ell = -\ell$ e $i(j \cdot k\ell) = \ell$, pela tabela de multiplicação do Exemplo 1.8

# CAPÍTULO 3

# Álgebras Alternativas Semissimples

Nesse capítulo, nosso objetivo é mostrar que toda álgebra alternativa semissimples, de dimensão finita, é escrita como soma direta de álgebras simples. Para tanto, apresentaremos conceitos de elemento e álgebra nilpotente, radical e estudaremos a decomposição de Peirce para uma álgebra alternativa.

Como indicado anteriormente, uma álgebra alternativa $U$ sobre um corpo $F$ é uma álgebra na qual valem

$$x^2y = x(xy), \quad yx^2 = (yx)x \text{ para quaisquer } x, y \in U.$$

As equações à esquerda e à direita são conhecidas, respectivamente, como as leis alternativas da esquerda e da direita. Em termos dos associadores, as leis alternativas são equivalentes a

$$[x,x,y] = [y,x,x] = 0 \text{ para quaisquer } x, y \in U.$$

Já, em termos das translações à esquerda e à direita, as leis alternativas são equivalentes à

$$L_{x^2} = {L_x}^2 \text{ e } R_{x^2} = {R_x}^2 \text{ para todo } x \in U. \tag{3.1}$$

O fato que o associador, uma função alternada, é equivalente a

$$\begin{aligned} R_xR_y - R_{xy} = L_{xy} - L_yL_x &= L_yR_x - R_xL_y \\ &= L_xL_y - L_{yx} = R_yL_x - L_xR_y = R_{yx} - R_yR_x \end{aligned} \tag{3.2}$$

para quaisquer $x, y \in U$.

Vimos que, em uma álgebra alternativa, vale a identidade de Moufang à direita $y(xax) = ((yx)a)x$ que em termos dos associadores é equivalente a

$$(y, xa, x) = -(y, x, a)x \tag{3.3}$$

para qualquer $x, y, a \in U$, pois

$$(y, xa, x) = [y(xa)]x - y(xax) = [y(xa)]x - [(yx)a]x = -(y, x, a)x.$$

A forma linearizada de 3.3 é

$$(y, xa, z) + (y, za, x) = -(y, x, a)z - (y, z, a)x \tag{3.4}$$

para todos $x, y, z, a \in U$.

Pelo Teorema de Artin, uma álgebra alternativa é diassociativa, isto é, a subálgebra gerada por quaisquer dois elementos é associativa. Consequentemente, uma álgebra alternativa de potências associativas, isto é, a subálgebra $F[x]$ é associativa, para todo elemento $x$.

**Definição 3.1** *Um elemento $x$ em uma álgebra $U$ associativa nas potências é chamado nilpotente se existir um inteiro positivo $r$ tal que $x^r = 0$. Uma álgebra (ideal) consistindo somente de elementos nilpotentes é chamado uma nilálgebra (nilideal).*

**Definição 3.2** *Uma álgebra $U$ é dita nilpotente se existir um inteiro positivo $t$, tal que qualquer produto (não necessariamente associativo) $z_1 z_2 \ldots z_t$, de $t$ elementos de $U$ é nulo.*

Dada uma álgebra $U$, $M(U)$ é a álgebra associativa gerada pelas multiplicações à direita e à esquerda de $U$. Se $B \subseteq U$, denotamos por $B^*$ a subálgebra de $M(U)$ gerada pelas multiplicações dadas por elementos de $B$. É sabido que um ideal $B$ de uma álgebra $U$ é nilpotente se, e somente se, a subálgebra $B^*$ é nilpotente.

O próximo teorema, cuja a demonstração pode ser encontrada em [5] diz que, em dimensão finita, os conceitos de nilálgebra e álgebra nilpotente coincidem para álgebras alternativas.

**Teorema 3.3** *Qualquer nilálgebra alternativa $U$, de dimensão finita sobre $F$ é nilpotente.*

## 3.1 A decomposição de Peirce

Seja $U$ uma álgebra alternativa sobre um corpo $F$, de dimensão finita. Então $U$ possui um (único) nilideal maximal $R$. Tal ideal $R$ é chamado **radical** de $U$.

**Definição 3.4** *A álgebra $U$ é semissimples se $R = 0$.*

**Definição 3.5** *Um elemento $e$ de uma álgebra $U$ é chamado idempotente se $e^2 = e \neq 0$.*

**Proposição 3.6** *Qualquer álgebra $U$ de dimensão finita e associativa nas potências, que não é uma nilálgebra, contém um idempotente, $e \neq 0$.*

**Demonstração:** Usaremos nessa demonstração que esse resultado já é verdadeiro para álgebras associativas. Seja $U$ uma álgebra que contém um elemento $x$ que não é nilpotente. A subálgebra $F[x]$ de $U$ é uma álgebra associativa de dimensão finita que não é uma nilálgebra. Então $F[x]$ contém um idempotente $e(\neq 0)$, portanto $U$ também o contém.

■

Suponha que $e \in U$ seja um idempotente. Pelas identidades alternativas, temos $(L_e)^2 = L_{e^2} = L_e, (R_e)^2 = R_{e^2} = R_e$ e pela identidade flexível $L_eR_e = R_eL_e$. Portanto $L_e$ e $R_e$ são operadores idempotentes de $U$ que comutam, isto é, $R_e, L_e$ são projeções lineares que comutam. Então, segue que $U$ é a soma direta de espaços vetoriais

$$U = U_{11} \oplus U_{10} \oplus U_{01} \oplus U_{00}, \tag{3.5}$$

onde $U_{ij}$ $(i, j = 0, 1)$ é um subespaço de $U$ definido por

$$U_{ij} = \{x_{ij} \mid ex_{ij} = ix_{ij},\ x_{ij}e = jx_{ij}\}\ i, j = 0, 1.$$

Assim como no caso de álgebras associativas, a decomposição de qualquer elemento $x$ em $U$ de acordo com a decomposição de Peirce 3.5 é

$$x = exe + (ex - exe) + (xe - exe) + (x - ex - xe + exe)$$

Segue da definição de $U_{ij}$ que,

$$
\begin{aligned}
e(x_{ij}y_{kl}) &= -[e,x_{ij},y_{kl}]+(ex_{ij})y_{kl}\\
&= [x_{ij},e,y_{kl}]+(ex_{ij})y_{kl}\\
&= (x_{ij}e)y_{kl}-x_{ij}(ey_{kl})+ix_{ij}y_{kl}\\
&= jx_{ij}y_{kl}-kx_{ij}y_{kl}+ix_{ij}y_{kl}\\
&= (i+j-k)x_{ij}y_{kl}.
\end{aligned}
$$

e, similarmente $(x_{ij}y_{kl})e=(k+l-j)x_{ij}y_{kl}$, então $U_{ij}U_{jk}\subseteq U_{ik}, i,j,k=0,1$ e $U_{ij}U_{ij}\subseteq U_{ji}, i,j=0,1$. Em particular, $U_{11}$ e $U_{00}$ são subálgebras de $U$. E também $x_{11}y_{00}=(ex_{11}e)\ y_{00}=e[x_{11}(ey_{00})]=0$ pela identidade de Moufang à esquerda, e similarmente $y_{00}x_{11}=0$. Então $U_{11}$ e $U_{00}$ são subálgebras ortogonais de $U$. E também $U_{10}U_{01}\subseteq U_{11}$, $U_{01}U_{10}\subseteq U_{00}$. As propriedades $U_{10}U_{10}\subseteq U_{01}, U_{01}U_{01}\subseteq U_{10}$ são mais fracas do que no caso associativo, onde se sabe que $U_{10}U_{10}=U_{01}U_{01}=0$.

Idempotentes $e_1,\ldots,e_t$ em uma álgebra $U$ são dois a dois ortogonais se $e_ie_j=0$ para $i\neq j$. Note que qualquer soma $e=e_1+\cdots+e_t$ de idempotentes dois a dois ortogonais $(t\geq 1)$ também é um idempotente pois $ee=(e_1+\cdots+e_t)(e_1+\cdots+e_t)=e_1^2+\cdots+e_t^2=e_1+\cdots+e_t=e$. Além disso, $ee_i=e_ie=e_i$ $(i=1,\ldots,t)$. Em uma álgebra alternativa tem-se que $[x,e_i,e_j]=0$, para idempotentes ortogonais $e_1,\ldots,e_t$, de fato, se $i=j$ utilizamos a lei alternativa direita. Se $i\neq j$, então

$$
\begin{aligned}
[x,e_i,e_j] &= (xe_i)e_j-x(e_ie_j)=(xe_i)e_j=(xe_i)e_j^2=((xe_i)e_j)e_j-(x(e_ie_j))e_j=[x,e_i,e_j]e_j\\
&= -[x,e_j,e_i]e_j=-((xe_j)e_i-x(e_je_i))e_j=-((xe_j)e_i)e_j=-x(e_je_ie_j)=0.
\end{aligned}
$$

pela identidade de Moufang à direita. Pela multilinearidade do associador temos também $[x,e_i,e]=0$ para $e=e_1+e_2+\cdots+e_t$. Considerando o conjunto $e_1,\ldots,e_t$ de idempotentes dois a dois ortogonais da álgebra alternativa $U$, obtemos uma decomposição de Peirce mais refinada da que foi dada anteriormente, escrevendo o espaço vetorial $U$ como a soma direta

$$U=\sum U_{ij}, \tag{3.6}$$

em que, para $i,j=0,1,\ldots,t$

$$U_{ij}=\{x_{ij}\mid e_kx_{ij}=\delta_{ki}x_{ij},\ x_{ij}e_k=\delta_{jk}x_{ij}\ \text{para}\ k=1,\ldots,t\} \tag{3.7}$$

onde $\delta_{rs}$ é o delta de Kronecker. É imediato que cada $U_{ij}$ é um subespaço vetorial de $U$. Vamos provar a unicidade da soma

$$x = \sum_{k,l=0}^{t} x_{kl}, \; x_{kl} \in U_{kl}.$$

Para $i, j = 1, \ldots, t$, nós temos

$$e_i x e_j = \sum_{k,l=0}^{t} e_i x_{kl} e_j = x_{ij} \text{ e } e_i x = \sum_{k,l=0}^{t} = e_i x_{kl} = \sum_{l=0}^{t} x_{il}.$$

Então

$$e_i x e = \sum_{l=0}^{t} x_{il} \sum_{k=1}^{t} e_k = \sum_{l=1}^{t} x_{il}$$

e $e_i x - e_i x e = x_{i0}$, onde $e = e_1 + \cdots + e_t$. Similarmente, $x e_j - e x e_j = x_{0j}$ para $j = 1, \ldots, t$. Finalmente,

$$\begin{aligned} x_{00} &= x - \sum_{i,j=1}^{t} x_{ij} - \sum_{i=1}^{t} x_{i0} - \sum_{j=1}^{t} x_{0j} \\ &= x - \sum_{i,j=1}^{t} e_i x e_j - \sum_{i=1}^{t} (e_i x - e_i x e) - \sum_{j=1}^{t} (x e_j - e x e_j) \\ &= x - exe - (ex - exe) - (xe - exe) = x - ex - xe + exe. \end{aligned}$$

Mas estes $x_{ij}$ estão em $U_{ij}$ $(i, j = 0, 1 \ldots, t)$, então $x \in U$ é expressado unicamente da forma $x = \sum x_{ij}$, $x_{ij} \in U_{ij}$, e $U$ a soma direta de espaços vetoriais 3.6. A expressão

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i,j=0}^{t} x_{ij} \\ &= \sum_{i,j=0}^{t} e_i x e_j + \sum_{i=0}^{t} (e_i x - e_i x e) + \sum_{j=0}^{t} (x e_j - e x e_j) + (x - ex - xe + exe). \end{aligned}$$

é um refinamento da decomposição de $x$ relativo a apenas um idempotente $e$.

**Teorema 3.7 (Propriedades da Decomposição de Peirce para álgebras alternativas)**

$$U_{ij} U_{jk} \subseteq U_{ik}, \; (i, j, k = 0, 1, \ldots, t) \tag{3.8}$$

$$U_{ij} U_{ij} \subseteq U_{ji}, \; (i, j = 0, 1, \ldots, t) \tag{3.9}$$

$$U_{ij} U_{kl} = 0, \; j \neq k, \; (i, j) \neq (k, l) \; (i, j, k, l = 0, 1, \ldots, t) \tag{3.10}$$

$$x_{ij}^2 = 0 \; \textit{para todo} \; x_{ij} \in U_{ij} \; (i \neq j) \tag{3.11}$$

*implicando*

$$x_{ij}y_{ij} = -y_{ij}x_{ij},\ para\ todos\ x_{ij}, y_{ij} \in U_{ij}\ (i \neq j) \tag{3.12}$$

$$(x_{ij}, y_{jk}, z_{ki}) = 0\ se\ (i,j,k) \neq (i,i,i),\ para\ todos\ x_{ij} \in U_{ij}, y_{jk} \in U_{jk}, z_{ki} \in U_{ki} \tag{3.13}$$

$$(x_{ii}, y_{ij}z_{ji}, t_{ii}) = 0\ se\ i \neq j,\ para\ todos\ x_{ii}, t_{ii} \in U_{ii}, y_{ij} \in U_{ij}, z_{ji} \in U_{ji} \tag{3.14}$$

$$(x_{ij}y_{ij})z_{ij} = (y_{ij}z_{ij})x_{ij} = (z_{ij}x_{ij})y_{ij}\ se\ i \neq j, \forall\ x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} \in U_{ij} \tag{3.15}$$

$$x_{ij}(y_{ij}z_{jj}) = (x_{ij}z_{jj})y_(ij) = z_{jj}(x_{ij}y_{ij})\ se\ i \neq j, \forall\ x_{ij}, y_{ij} \in U_{ij}; z_{jj} \in U_{jj} \tag{3.16}$$

*e, reciprocamente*

$$x_{ij}(z_{ii}y_{ij}) = (z_{ii}x_{ij})y_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})z_{ii}\ se\ i \neq j, \forall\ x_{ij}, y_{ij} \in U_{ij};\ z_{ii} \in U_{ii} \tag{3.17}$$

$$[x_{jj}, t_{jj}](y_{ij}z_{ij}) = 0\ se\ i \neq j\ \forall\ x_{jj}, t_{jj} \in U_{jj}; y_{ij}, z_{ij} \in U_{ij} \tag{3.18}$$

*e, reciprocamente,*

$$(y_{ij}z_{ij})[x_{ii}, t_{ii}] = 0\ se\ i \neq j, \forall\ x_{ii}, t_{ii} \in U_{ii}; y_{ij}, z_{ij} \in U_{ij} \tag{3.19}$$

$$(x_{ii}a)^m = (x_{ii}a_{ii})^{m-1} \sum_{k=0}^{t} x_{ii}a_{ik} \tag{3.20}$$

$$(x_{ij}a)^m = (x_{ij}a_{ij})^{m-1} \sum_{k=0}^{t} x_{ij}a_{jk} + (x_{ij}a_{ij})(x_{ij}a_{ji})^{m-1}\ se\ i \neq j \tag{3.21}$$

$$e_i(x_{ij}a)^m e_i = (x_{ij}a_{ji})^m\ (i,j = 0,1,\ldots,t). \tag{3.22}$$

**Demonstração:** Os procedimentos são análogos para todas as propriedades, portanto omitiremos algumas demonstrações. Primeiramente vamos mostrar 3.8, $U_{ij}U_{jk} \subseteq U_{ik}\ \ (i,j,k = 0,\ldots,t)$. Seja $z \in U_{ij}U_{jk}$, isto é, $z = x_{ij}y_{jk}$. Calculemos $e_l z$ e $e_l z$

$$\begin{aligned} e_l z &= e_l(x_{ij}y_{jk}) = -(e_l, x_{ij}, y_{jk}) + (e_l x_{ij})y_{jk} = (x_{ij}, e_l, y_{jk}) + \delta_{li}x_{ij}y_{jk} \\ &= (x_{ij}e_l)y_{jk} - x_{ij}(e_l y_{jk}) + \delta_{li}x_{ij}y_{jk} = \delta_{jl}x_{ij}y_{jk} - \delta_{lj}x_{ij}y_{jk} + \delta_{li}x_{ij}y_{jk} \\ &= \delta_{li}x_{ij}y_{jk} = \delta_{li}z; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ze_l &= (x_{ij}y_{jk})e_l = (x_{ij}, y_{jk}, e_l) + x_{ij}(y_{jk}e_l) = -(x_{ij}, e_l, y_{jk}) + \delta_{kl}x_{ij}y_{jk} \\ &= x_{ij}(e_l y_{jk}) - (x_{ij}e_l)y_{jk} + \delta_{kl}x_{ij}y_{jk} = \delta_{lj}x_{ij}y_{jk} - \delta_{jl}x_{ij}y_{jk} + \delta_{kl}x_{ij}y_{jk} \\ &= \delta_{kl}x_{ij}y_{jk} = \delta_{kl}z \end{aligned}$$

Portanto, $z \in U_{ik}$.

Agora, verificaremos 3.10, $U_{ij}U_{kl} = 0 \quad j \neq k, \quad (i,j) \neq (k,l) \quad (i,j,k,l = 0,1,\ldots,t)$. Sejam $x_{ij} \in U_{ij}$ e $y_{kl} \in U_{kl}$. Basta mostrar que $x_{ij}y_{kl} = 0$. Devemos considerar 3 casos: (i) $l,k \neq 0, \quad l \neq k, \ l \neq j$. Pela identidade 3.4, temos:

$$(y,xa,z)+(y,za,x) = -(y,x,a)z-(y,z,a)x. \tag{3.23}$$

Expandindo os associadores da equação (3.23):

$$\begin{aligned}(y(xa))z - y((xa)z) + (y(za))x - y((za)x) &= (y(xa)-(yx)a)z + (y(za)-(yz)a)x \\ &= (y(xa))z - ((yx)a)z + (y(za))x - ((yz)a)x \\ \Rightarrow y((xa)z) + y((za)x) &= ((yx)a)z + ((yz)a)x. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Fazendo em (3.24) as seguintes substituições: $y = x_{ij}, x = e_k, a = y_{kl}$ e $z = e_l$ obtemos:

$$\underbrace{x_{ij}(e_k y_{kl} e_l)}_{(1)} + \underbrace{x_{ij}(e_l y_{kl} e_k)}_{(2)} = \underbrace{((x_{ij}e_k)y_{kl})e_l}_{(3)} + \underbrace{((x_{ij}e_l)y_{kl})e_k}_{(4)}. \tag{3.25}$$

1. $x_{ij}(e_k y_{kl} e_l) = x_{ij}(e_k y_{kl})e_l = x_{ij}(\delta_{kk} y_{kl} e_l) = x_{ij}(\delta_{kk}\delta_{ll} y_{kl}) = x_{ij}y_{kl}$,

2. $x_{ij}(e_l y_{kl} e_k) = x_{ij}(e_l y_{kl})e_k = x_{ij}(\delta_{lk} y_{kl} e_k) = 0$,

3. $((x_{ij}e_k)y_{kl})e_l = (\delta_{jk}x_{ij}y_{kl})e_l = 0$,

4. $((x_{ij}e_l)y_{kl})e_k = (\delta_{jl}x_{ij}y_{kl})e_k = 0$

portanto $x_{ij}y_{kl} = 0$.

(ii) $l \neq k, \quad l = j$. A expressão (3.25) se reduz a:

$$\begin{aligned} x_{ij}y_{kj} &= (\delta_{ll}x_{ij}y_{kl})e_k = (x_{ij}y_{kj})e_k = (x_{ij}, y_{kj}, e_k) + x_{ij}(y_{kj}e_k) \\ &= (y_{kj}, e_k, x_{ij}) + \delta_{jk}x_{ij}y_{kl} = (y_{kj}, e_k, x_{ij}) \\ &= (y_{kj}e_k)x_{ij} - y_{kj}(e_k x_{ij}) = \delta_{jk}y_{kj}x_{ij} - \delta_{ki}y_{kj}x_{ij} = 0, \end{aligned}$$

pois $\delta_{jk} = 0$, já que $j \neq k$. Também $\delta_{ki} = 0$, pois como $l = j$, devemos ter, necessariamente, $i \neq k$, pois $(i,j) \neq (k,l)$. (iii) $l = k$.

(a) $j \neq l$

$$x_{ij}y_{ll} + x_{ij}y_{ll} = 0 \Rightarrow x_{ij}y_{ll} = 0, \text{ pela característica de } \mathbb{F} \text{ ser diferente de 2.}$$

Agora verificaremos 3.11, $x_{ij}^2 = 0 \quad \forall x_{ij} \in U_{ij} \quad (i \neq j)$. Por 3.9, $x_{ij}^2 \in U_{ji}$. Como $i \neq j$, temos que $i \neq 0$ ou $j \neq 0$. Se $i \neq 0$, então:

$$x_{ij}^2 = x_{ij}^2 e_i = (x_{ij}x_{ij})e_i = x_{ij}(x_{ij}e_i) = x_{ij}(\delta_{ji}x_{ij}) = 0.$$

Esta é a prova de 3.12, a forma linearizada de 3.11, $x_{ij}y_{ij} = -y_{ij}x_{ij} \quad \forall x_{ij}, y_{ij} \in U_{ij} \quad (i \neq j)$.

$$\begin{aligned} 0 = (x_{ij} + y_{ij})^2 = x_{ij}^2 + x_{ij}y_{ij} + y_{ij}x_{ij} + y_{ij}^2 &\Rightarrow x_{ij}y_{ij} + y_{ij}x_{ij} = 0 \\ &\Rightarrow x_{ij}y_{ij} = -y_{ij}x_{ij}. \end{aligned}$$

A prova de 3.13 é dada por $(x_{ij}, y_{jk}, z_{ki}) = 0$ se $(i,j,k) \neq (i,i,i) \quad \forall x_{ij} \in U_{ij}, y_{jk} \in U_{jk}, z_{ki} \in U_{ki}$.

$$(x_{ij}, y_{jk}, z_{ki}) = -(y_{jk}, x_{ij}, z_{ki}) = -(y_{jk}x_{ij})z_{ki} + y_{jk}(x_{ij}z_{ki}).$$

Note que, se $k \neq i$, então $y_{jk}x_{ij} = 0$. Se $k = i$, devemos ter $i \neq j$, logo $y_{jk}x_{ij} = y_{ji}x_{ij} \in U_{jj}$. Assim, $y_{jk}x_{ij} = w_{jj}$, para algum $w_{jj} \in U_{jj}$. Então, $(y_{jk}x_{ij})z_{ki} = w_{jj}z_{ki} = 0$, pois $i \neq j$ e $j \neq k$. Se $j \neq k$, então $x_{ij}z_{ki} = 0$. Se $j = k$ ambos devem ser diferentes de $i$, logo $x_{ij}z_{ki} = x_{ij}z_{ji} \in U_{ii}$ e $x_{ij}z_{ki} = w_{ii}$. Portanto, $y_{jk}w_{ii} = y_{jj}w_{ii} = 0$.

A próxima demonstração é de 3.14, $(x_{ii}, y_{ij}z_{ji}, t_{ii}) = 0$ se $i \neq j, \ \forall \ x_{ii}, t_{ii} \in U_{ii}, \ \ y_{ij} \in U_{ij}, \ \ z_{ji} \in U_{ji}$.

$$\begin{aligned} (x_{ii}, y_{ij}z_{ji}, t_{ii}) &= (x_{ii}(y_{ij}z_{ji}))t_{ii} - x_{ii}((y_{ij}z_{ji})t_{ii}) \\ &= (-(x_{ii}, y_{ij}, z_{ji}) + ((x_{ii}y_{ij})z_{ji}))t_{ii} - x_{ii}((y_{ij}, z_{ji}, t_{ii}) + y_{ij}(z_{ji}t_{ii})). \end{aligned}$$

Temos, $(x_{ii}, y_{ij}, z_{ji}) = 0$ e $(y_{ij}, z_{ji}, t_{ii}) = 0$, logo:

$$\begin{aligned} (x_{ii}, y_{ij}z_{ji}, t_{ii}) &= ((x_{ii}y_{ij})z_{ji})t_{ii} - x_{ii}(y_{ij}(z_{ji}t_{ii})) \\ &= (x_{ii}y_{ij}, z_{ji}, t_{ii}) + (x_{ii}y_{ij})(z_{ji}t_{ii}) + (x_{ii}, y_{ij}, z_{ji}t_{ii}) - (x_{ii}y_{ij})(z_{ji}t_{ii}) \\ &= (w_{ij}, z_{ji}, t_{ii}) + (x_{ii}, y_{ij}, u_{ji}) = 0. \end{aligned}$$

Usamos que: $x_{ii}y_{ij} \in U_{ij}$, logo $x_{ii}y_{ij} = w_{ij}$ e $z_{ji}t_{ii} \in U_{ji}$, logo $z_{ji}t_{ii} = u_{ji}$, de acordo com 3.10.

Por 3.16 os dois associadores no final da igualdade acima são iguais a zero. A demonstração seguinte é de 3.15, $(x_{ij}y_{ij})z_{ij} = (y_{ij}z_{ij})x_{ij} = (z_{ij}x_{ij})y_{ij}$ se $i \neq j$, $\forall\ x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} \in U_{ij}$.

$$\begin{aligned}
(x_{ij}y_{ij})z_{ij} &= (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) + x_{ij}(y_{ij}z_{ij}) = -(x_{ij}, z_{ij}, y_{ij}) + x_{ij}(y_{ij}z_{ij}) \\
&= x_{ij}(z_{ij}y_{ij}) - (x_{ij}z_{ij})y_{ij} + x_{ij}(y_{ij}z_{ij}) \\
&- x_{ij}(y_{ij}z_{ij}) + (z_{ij}x_{ij})y_{ij} + x_{ij}(y_{ij}z_{ij}) \\
&\Rightarrow (x_{ij}y_{ij})z_{ij} = (z_{ij}x_{ij})y_{ij}.
\end{aligned}$$

Analogamente, $(x_{ij}y_{ij})z_{ij} = (y_{ij}z_{ij})x_{ij}$.

Vamos demonstrar, $(x_{ii}a)^m = (x_{ii}a_{ii})^{m-1}\sum_{k=0}^{t} x_{ii}a_{ik}$. A prova é feita por indução em $m$. Para $m = 1:\ \ x_{ii}a = x_{ii}\sum_{j,k} x_{ii}a_{ik}$, pois $x_{ii}a_{jk} = 0$, se $i \neq j$. Supondo que é válido para $m$, calculamos:

$$\begin{aligned}
(x_{ii}a)^{m+1} &= (x_{ii}a)^m(x_{ii}a) = (x_{ii}a_{ii})^{m-1}\left(\sum_{k=0}^{t} x_{ii}a_{ik}\right)(x_{ii}a) \\
&= (x_{ii}a_{ii})^{m-1}\sum_{k=0}^{t}(x_{ii}a_{ik})(x_{ii}a) \\
&= (x_{ii}a_{ii})^{m-1}\left(\sum_{k=0}^{t}(x_{ii}a_{ik})\sum_{j=0}^{t}(x_{ii}a_{ij})\right) \\
&= (x_{ii}a_{ii})^{m-1}\left(\sum_{k=0}^{t}\sum_{j=0}^{t}(x_{ii}a_{ik})(x_{ii}a_{ij})\right) \\
&= (x_{ii}a_{ii})^{m-1}\sum_{j=0}^{t}(x_{ii}a_{ii})(x_{ii}a_{ij}) = (x_{ii}a_{ii})^{m}\sum_{j=0}^{t}(x_{ii}a_{ij}).
\end{aligned}$$

No desenvolvimento acima usamos que:

$$x_{ii}a_{ik} \in U_{ik},\ \text{e}\ x_{ii}a_{ij} \in U_{ij} \Rightarrow (x_{ii}a_{ik})(x_{ii}a_{ij}) = 0$$

se $k \neq i$, portanto o somatório em $k$ se anula para todo $k \neq i$, ficando apenas o termo $x_{ii}a_{ii}$.

■

## 3.2 O Radical e as Álgebras Semissimples

**Definição 3.8** *Um elemento $z$ de uma álgebra alternativa $U$ é chamado propriamente nilpotente (em $U$) se o elemento $za$ é nilpotente, para todo $a \in U$.*

Observe que $z$ é propriamente nilpotente se, e somente se, $az$ for nilpotente para todo $a \in U$.

De fato, $(az)^{m+1} = a(za)^m z$, pois $U$ é diassociativa, pelo Teorema de Artin (2.12). Além disso, se $z$ é propriamente nilpotente então $z$ é nilpotente, uma vez que $z^2$ é nilpotente.

Relembre que o radical de uma álgebra é o seu único nilideal maximal. Mostraremos que o radical $R$ de qualquer álgebra alternativa de dimensão finita $U$ é o conjunto $B$ de todos os elementos propriamente nilpotentes de $U$. De fato temos $R \subseteq B$, já que $z$ em $R$ implica que $za$ está em $R$ para todo $a$ em $U$. A prova para o caso associativo é simples e pode ser encontrada em [5]. A generalização desse resultado para álgebras alternativas foi feita por Zorn e requer propriedades da decomposição de Peirce.

**Definição 3.9** *Seja $U$ uma álgebra com elemento unidade 1. Um elemento $x \in U$ é inversível se existir $x^{-1} \in U$ tal que $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$. O elemento $x^{-1}$ é chamado inverso de $x$.*

O inverso de um elemento $x$, em uma álgebra alternativa é único, além disso $[x, x^{-1}, y] = 0$. Uma álgebra alternativa com elemento 1 é uma álgebra com divisão se para cada $x \in U$ com $x \neq 0$ existir $x^{-1} \in U$. Em uma álgebra alternativa com divisão, as equações $ax = b$ e $ya = b$ têm únicas soluções.

**Lema 3.10** *Seja $U$ uma álgebra alternativa de dimensão finita sobre $F$ com o elemento 1. Suponha que 1 seja o único idempotente em $U$. Então, todo elemento $z \in U$ ou possui inverso $z^{-1} \in U$ ou é propriamente nilpotente. O conjunto $B$ de elementos propriamente nilpotentes de $U$ é ideal de $U$.*

**Demonstração:** Suponha que $z$ não seja nilpotente. Considere a subálgebra gerada por $z$, $F[z]$. Como $U$ é alternativa então $F[z]$ é associativa e portanto possui um idempotente. Como, por hipótese, 1 é o único idempotente de $U$, temos que $1 \in F[z]$. Desse modo,

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_n z^n \in F[z] \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 z + \cdots + \alpha_n z^{n-1})z \end{aligned}$$

e assim $y = \alpha_1 + \alpha_2 z + \cdots + \alpha_n z^{n-1} \in U$ é tal que $yz = 1$. Portanto, $z$ possui inverso em $U$.

Resta mostrar que o conjunto dos elementos propriamente nilpotentes de $U$ é um ideal de $U$. Seja $z$ um elemento nilpotente. Vamos mostrar que $z$ é propriamente nilpotente. Suponha $a \in U$ com $za$ não nilpotente. Então $(za)$ possui inverso $(za)^{-1}$. Seja $m$ tal que $z^m = 0$, mas $z^{m-1} \neq 0$. Então

$$0 \neq z^{m-1} = z^{m-1}[(za)(za)^{-1}] = [z^{m-1}(za)](za)^{-1} = (z^m a)(za)^{-1} = 0,$$

o que é uma contradição. Logo $(za)$ é nilpotente e, assim, $z$ é propriamente nilpotente.

Seja $z \in \mathscr{B}$, o conjunto dos elementos propriamente nilpotentes de $U$. Para todo $a \in U$, temos que $za$ e $az$ são nilpotentes e, portanto, são propriamente nilpotentes, logo $za$ e $az \in \mathscr{B}$. Resta mostrar que $\mathscr{B}$ é um subespaço de $U$. É fácil ver que $\alpha z \in \mathscr{B}$ para todo $\alpha \in F$ e para todo $z \in \mathscr{B}$. Sejam $z, z' \in \mathscr{B}$. Se $(z+z') \notin \mathscr{B}$, então existe $y \in U$ tal que $(z+z')y = 1$. Observe que como $zy$ é nilpotente (digamos $(zy)^m = 0$ e $(zy)^{m-1} \neq 0$) temos que

$$(1-zy)(1+zy+(zy)^2+\cdots+(zy)^{m-1}) = 1-(zy)^m = 1.$$

Assim $z'y = 1-zy$ possui inverso. Mas, $z'y$ também é nilpotente, já que $z' \in \mathscr{B}$, o que é uma contradição. Logo $z+z' \in \mathscr{B}$ e, portanto, $\mathscr{B}$ é um ideal de $U$.

∎

**Definição 3.11** *Dois idempotentes $u$ e $v$ em uma álgebra $U$ são ditos ortogonais se $uv = vu = 0$. Os idempotentes $e_1, \ldots, e_t \in U$ são dois a dois ortogonais se, para $i \neq j$, $e_i$ e $e_j$ são ortogonais.*

**Definição 3.12** *Um idempotente $e$ em uma álgebra $U$ é chamado primitivo se não existem idempotentes ortogonais $u, v$ em $U$ tais que $e = u+v$.*

Em uma álgebra de dimensão finita $U$, qualquer idempotente $e$ pode ser escrito como uma soma $e = e_1+\cdots+e_t$, de idempotentes primitivos dois a dois ortogonais $e_i$ ($t = 1$ caso $e$ seja primitivo). Se $e$ não for primitivo, nós temos $e = u+v$ e, continuando se $u$ ou $v$ não é primitivo, nós teremos $e = u_1+\cdots+u_r$, onde os idempotentes dois a dois ortogonais $u_1, \ldots, u_r$ geram um subespaço de dimensão $r$ de $U$. Visto que idempotentes dois a dois ortogonais são linearmente independentes, o processo termina com idempotentes dois a dois ortogonais $e_1, \ldots, e_t$ pois $U$ tem dimensão finita.

**Definição 3.13** *Um idempotente $e$ em uma álgebra $U$ é chamado de idempotente principal se não existir idempotente $u$ em $U$ que é ortogonal a $e$ ($u^2 = u \neq 0, ue = eu = 0$).*

**Teorema 3.14** *Seja $U$ uma álgebra de dimensão finita. Então $e \in U$ é um idempotente principal se, e somente se, a subálgebra $U_{00}$ na decomposição de Peirce relativa a $e$ é uma nilálgebra.*

**Demonstração:** Se $u \in U$ é um idempotente ortogonal a $e$, então $u \in U_{00}$. Reciprocamente, se $U_{00}$ não é uma nilálgebra, como $U_{00}$ tem dimensão finita e é alternativa, então $U_{00}$ possui um idempotente $u$. Tal idempotente é ortogonal a $e$.

■

**Teorema 3.15** *Toda álgebra alternativa $U$ de dimensão finita que não é uma nilálgebra possui um idempotente principal.*

**Demonstração:** Se $e \in U$ é um idempotente que não é principal então existe $u \in U_{00}$, idempotente e ortogonal a $e$. Seja $e' = e + u$ idempotente então $U_{11,e'} \subseteq U_{11,e}$ pois para $x_{11} \in U_{11,e}$

$$e'x_{11} = (e+u)x_{11} = ex_{11} + ux_{11} = ex_{11} = x_{11}$$

$$x_{11}e' = x_{11}(e+u) = x_{11}e + ux_{11} = x_{11}e = x_{11}$$

Observe que $u \in U_{11,e'}$ pois $ue' = u(e+u) = ue+u^2 = u^2 = u$ e $e'u = (e+u)u = eu+u^2 = u^2 = u$. Como $u \notin U_{11,e}$ temos $\dim U_{11,e} < \dim U_{11,e'}$. Como $U$ tem dimensão finita, o processo para, fornecendo um idempotente principal.

■

Se $u$ é um idempotente em uma álgebra alternativa de dimensão finita $U$, então existem idempotentes primitivos dois a dois ortogonais $e_1, \ldots, e_r, \ldots, e_t$ $(1 < r < t)$ tais que $u = e_1 + \cdots + e_r$, enquanto $e = e_1 + \cdots + e_t$ é um idempotente principal em $U$.

Seja $U$ uma álgebra alternativa de dimensão finita sobre um corpo $F$. Queremos mostrar que o radical de $U$ é o conjunto $B$ dos elementos propriamente nilpotentes.

Considere $e_1, \ldots, e_t$ idempotentes primitivos dois a dois ortogonais tais que $e = e_1 + \cdots + e_t$ seja um idempotente principal. Seja $U = \sum U_{ij}$ a decomposição de Peirce em relação ao idempotente $e$. Observe que $U_{00}$ é uma nilálgebra que, $e_i$ o elemento unidade de $U_{ii}$ e seja

$$U_{ij} = \{x_{ij}\ ;\ e_k x_{ij} = \delta_{ik} x_{ij} \text{ e } x_{ij} e_k = \delta_{jk} x_{ij}\}$$

Suponha que $u \in U_{ii}$ seja um idempotente tal que $u \neq e_i$. Note que

$$\begin{aligned}
u(e_i - u) &= ue_i - u^2 = u - u = 0 \\
(e_i - u)u &= e_i u - u^2 = u - u = 0 \\
(e_i - u)(e_i - u) &= e_i^2 - e_i u - ue_i + u^2 \\
&= e_i - u - u + u = e_i - u
\end{aligned}$$

Desse modo, $e_i = u + (e_i - u)$ é uma decomposição de $e_i$ em soma de dois idempotentes ortogonais, o que é um absurdo. Então, o único idempotente da subálgebra $U_{ii}$ é a unidade $e_i$. Podemos aplicar o Lema 3.10 para cada subálgebra $U_{ii}$. Seja $x_{ii}$ um elemento propriamente nilpotente em $U_{ii}$. Por 3.20 $x_{ii}$ é propriamente nilpotente em $U$. Para $i, j = 0, 1, \ldots, t$, seja

$$G_{ij} = \{s_{ij} \in U_{ij} \mid \text{todos os elementos de } s_{ij}U_{ij} \text{ são nilpotentes}\},$$

e note que

$$G_{ij} = \{s_{ij} \in U_{ij} \mid \text{todos os elementos de } U_{ij}s_{ij} \text{ são nilpotentes}\}.$$

**Lema 3.16** *Nas condições acima, cada $G_{ij}$ $(i, j = 0, 1, \ldots, t)$ é um subespaço de $U$, e $G_{ij} \subseteq B$, o conjunto de elementos propriamente nilpotentes de $U$.*

**Demonstração:** Como $U_{00}$ é uma nilalgebra, então $G_{00} = U_{00} \subseteq B$. Também temos $G_{0j} = \{s_{0j} \in U_{0j} \mid \text{todos os elementos } s_{0j}U_{j0} \text{ são nilpotentes}\}$. Mas $U_{0j}U_{0j} \subset U_{00}$ que é uma nilálgebra. Portanto, $G_{0j} = U_{0j}$. Se $x_{0j} \in U_{0j}$, para todo $a \in U$ por 3.21

$$(x_{0j}a)^m = (x_{0j}a_{0j})^{m-1} \sum_{k=0}^{t} x_{0j}a_{jk} + (x_{0j}a_{0j})(x_{0j}a_{j0})^{m-1},$$

logo $x_{0j}a$ é nilpotente e, assim, $x_{0j} \in B$ então $U_{0j} \subseteq B$. Note que $G_{i0} = \{s_{i0} \in U_{i0} \mid \text{todos os elementos } s_{i0}U_{i0} \text{ são nilpotentes}\}$ e

$$\begin{aligned}(x_{i0}a)^m &= (x_{i0}a_{i0})^{m-1} \sum_{k=0}^{t} x_{i0}a_{0k} + (x_{i0}a_{i0})(x_{i0}a_{0i})^{m-1} \\ &= x_{i0}(a_{0i}x_{i0})^{m-2}a_{0i} \sum_{k=0}^{t} x_{i0}a_{0k} + (x_{i0}a_{i0})x_{i0}(a_{0i}x_{i0})^{m-2}a_{0i}\end{aligned}$$

Assim temos que $x_{i0}a$ é nilpotente para todo $a \in U$, donde $G_{i0} = U_{i0} \subset B$. Resta considerar $G_{ij}$ com $i \neq 0$ e $j \neq 0$. Sejam $s_{ij}$ e $s'_{ij} \in G_{ij}$, com $s_{ij}a_{ji}$, $s'_{ij}a_{ji} \in U_{ii}$ pertencentes ao ideal de elementos nilpotentes da subálgebra $U_{ii}$. Logo $(\alpha s_{ij} + \beta s'_{ij})\, a_{ji}$ é nilpotente para todos $\alpha, \beta \in F$. Portanto, $\alpha s_{ij} + \beta s'_{ij} \in G_{ij}$, donde temos que $G_{ij}$ é um subespaço de $U$. De 3.20 e 3.21 temos que $G_{ij}$ é formado por elementos propriamente nilpotentes.

■

**Teorema 3.17 (Zorn)** *O radical $R$ de qualquer álgebra alternativa $U$ de dimensão finita é o conjunto $B$ de todos os propriamente nilpotentes de $U$.*

**Demonstração:** Vamos considerar $G = \sum G_{ij}$. Denote $\overline{B}$ o subespaço gerado por $B$. Temos que $G \subseteq \overline{B}$. Vamos mostrar que $G = \overline{B}$ é um ideal de $U$.

1. Suponha que exista $x \in B$ com $x \notin G = \sum G_{ij}$. Então $x = \sum x_{ij}$, $x_{ij} \in U_{ij}$ com pelo menos um $x_{ij} \notin G_{ij}$. Pela demonstração do lema anterior, $i \neq 0$ e $j \neq 0$ para esse elemento $x_{ij}$ específico.

2. Se $i = j$, o elemento $x_{jj} \in U_{ij}$ não sendo nilpotente, possui um inverso $b_{jj} \in U_{jj}$ com respeito à unidade $e_j$ de $U_{jj}$ e $b_{jj}x_{jj} = e_i$.

3. Se $i \neq j$ e $x_{ij} \notin G_{ij}$ então existe $c_{ij} \in U_{ij}$ tal que $c_{ji}x_{ij} \in U_{jj}$ não é nilpotente. Logo existe $d_{jj} \in U_{jj}$ tal que $d_{jj}(c_{ji}x_{ij}) = e_j$ por 3.13 temos $(d_{jj}c_{ji})x_{ij} = e_j$ então $b_{ji}x_{ij} = e_j$ com $b_{ji} = d_{jj}c_{ji} \in U_{ji}$.

Logo, a equação $b_{ji}x_{ij} = e_j$ vale se $i = j$ e se $i \neq j$. Utilizando a equação 3.22 temos

$$e_j(b_{ji}x)^m e_j = (b_{ji}x_{ij})_j^m = e_j \neq 0$$

. Logo o elemento $(b_{ji})x$ não é nilpotente e portanto $x \notin B$, o que é uma contradição logo $B \subset G$ e como $G$ é um subespaço, $\overline{B} \subset G$ e assim $G = \overline{B}$. Vamos mostrar que $G$ é um ideal de $U$. Primeiramente verificaremos que

$$G_{ij}U_{jk} \subseteq G_{ik},\ i,j,k = 0,1,\dots,t \tag{3.26}$$

e

$$G_{ij}U_{ij} \subseteq G_{ji},\ i \neq j, i,j = 0,1,\dots,t \tag{3.27}$$

Para 3.26, consideremos primeiro o caso $i = k$. Se $s_{ij} \in G_{ij}$, então todos os elementos de $s_{ij}U_{ji}$ são nilpotentes, logo $s_{ij}U_{ji} \subseteq G_{ii}$ que é o ideal de elementos nilpotentes de $U_{ii}$. Logo $G_{ij}U_{ji} \subseteq G_{ii}$. Agora, se $i \neq k$, então por 3.13

$$(G_{ij}U_{jk})U_{ki} = G_{ij}(U_{jk}U_{ki}) \subseteq G_{ij}U_{ji} \subseteq G_{ii}$$

Então $s_{ik}U_{ik}$ consiste de elementos nilpotentes para os quais $x_{ik} \in G_{ij}U_{jk} \subseteq U_{ik}$. Portanto

$G_{ij}U_{jk} \subset G_{ik}$. Para 3.27 temos que, por 3.15

$$(G_{ij}U_{ij})U_{ij} = (U_{ij}U_{ij})G_{ij} \subset U_{ji}G_{ij} \subset G_{jj}$$

já que $U_{ji}G_{ij}$ são elementos nilpotentes de $U_{jj}$. Assim $G_{ij}U_{ij} \subseteq G_{ji}$. Assim $GU = (\sum G_{ij})(\sum U_{kl}) = \sum G_{ij}U_{jk} + \sum_{i \neq j} G_{ij}U_{ij} \subseteq G$ e, portanto $G$ é um ideal à direita de $U$. De maneira similar prova-se que $G$ é um ideal à esquerda de $U$. Portanto $G = \overline{B}$ é um ideal de $U$. Resta agora mostrar que $B$ é o radical $R$ de $U$. Como $B$ é o conjunto de todos os elementos (propriamente) nilpotentes de $U$, claramente $R \subset B$. Vamos mostrar que $\overline{B} \subset R$. Para isso, observemos que o ideal $\overline{B}$ não depende da escolha dos idempotentes da decomposição de Peirce. Assuma então $\overline{B}$ não seja um nilideal. Como $\overline{B}$ tem dimensão finita, então existe $u \in \overline{B}$ idempotente. Considere os idempotentes primitivos dois a dois ortogonais $e_1, \ldots, e_r, \ldots, e_t$ em $U$ tais que $u = e_1 + \cdots + e_r$ enquanto $e = e_1 + \cdots + e_r + \cdots + e_t$ é um idempotente principal. Então $u = e_1 + \cdots + e_r \in \overline{B} = G = \sum G_{ij}$ implica que $e_1 \in G_{11}$ é nilpotente, o que é uma contradição. Logo, todo elemento de $\overline{B}$ é nilpotente. Assim $\overline{B} \subseteq R$. De $R \subset B \subset \overline{B} \subseteq R$ temos $B = R$.

■

**Corolário 3.18** *Seja e um idempotente em uma álgebra alternativa $U$ de dimensão finita com radical $R$. Seja $U = U_{00} \oplus U_{01} \oplus U_{10} \oplus U_{11}$ a decomposição de Peirce em relação à e. Então, o radical de $U_{ii}$ é $R \cap U_{ii}$ $(i = 0, 1)$.*

**Demonstração:** Como $U_{ii}$ é uma subálgebra alternativa de dimensão finita, seu radical $R_i$ é formado pelos elementos propriamente nilpotentes de $U_{ii}$. Por 3.20 os elementos propriamente nilpotentes em $U_{ii}$ também são propriamente nilpotentes em $U$. Logo $R_i \subseteq R \cap U_{ii}$. Reciprocamente, se $x_{ii} \in U_{ii}$ é propriamente nilpotente em $U$, então $x_{ii} \in R \cap U_{ii}$ e assim $R \cap U_{ii} \subseteq R_i$.

■

**Corolário 3.19** *Seja e um idempotente principal em uma álgebra alternativa $U$ de dimensão finita e seja $U = U_{11} \oplus U_{10} \oplus U_{01} \oplus U_{00}$ a decomposição de Peirce de $U$ relativa a e. Então $U_{10} + U_{01} + U_{00}$ está contido no radical $R$ de $U$.*

**Demonstração:** Usando a notação da demonstração do Teorema 3.17 temos $U_{10} = \sum_{i=1}^{t} G_{i0}, U_{01} = \sum_{j=1}^{t} G_{0j}, U_{00} = G_{00}$. Cada um desses subespaços está contido em $\overline{B} = R$.

■

**Teorema 3.20** *Toda álgebra alternativa semissimples de dimensão finita com $U \neq 0$ possui um elemento identidade* $1$.

**Demonstração:** Uma vez que $U$ não é uma nilálgebra, $U$ possui um idempotente principal $e$. Seja $U = U_{11} \oplus U_{10} \oplus U_{01} \oplus U_{00}$ a decomposição de Peirce relativa a $e$. Temos que $U_{10} + U_{01} + U_{00} \subseteq R = 0$, donde $U = U_{11} = eUe$, ou seja $e = 1$. Então $e$ é elemento identidade de $U$.

■

**Corolário 3.21** *Toda álgebra alternativa simples de dimensão finita tem um elemento unidade* $1$. *O centro $Z$ de $U$ é um corpo, e $U$ é uma álgebra alternativa simples central de dimensão finita sobre $Z$.*

**Corolário 3.22** *Seja $U$ uma álgebra alternativa semissimples de dimensão finita. Então, todo ideal de $U$ é semissimples.*

**Demonstração:** Seja $B$ um ideal de $U$. Queremos mostrar que o radical do ideal $B$, $R_B$ é trivial. Pelo Teorema de Zorn, $R_B$ é formado pelos elementos propriamente nilpotentes de $B$. Seja $z \in R_B$. Como $B$ é um ideal, $aza \in B$ para todo $a \in U$, donde $z(aza) = (za)^2$ é nilpotente. Assim $za$ é nilpotente para todo $a \in U$, o que implica que $z$ é propriamente nilpotente em $U$. Como $U$ é semissimples, $z = 0$ e assim $R_B = \{0\}$.

■

**Corolário 3.23** *Seja $U$ uma álgebra alternativa semissimples de dimensão finita com centro $C$. Então todo ideal não nulo $B$ de $U$ é da forma $B = Ue$, onde $e$ é um idempotente central de $U$.*

**Demonstração:** Seja $B \neq 0$ um ideal de $U$. Como $B$ é semissimples e de dimensão finita temos que $B$ possui um elemento unidade $e$. Claramente $e$ é um idempotente pois $e^2 = e \neq 0$. Vamos mostrar que $e$ é central. Para todos $a, b \in U$ temos que $ea, ae$ e $eb \in B$ e vale

$$ae = e(ae) = (ea)e = ea,$$

e

$$(ae)b = (eae)b = e[a(eb)] = a(eb),$$

onde na última linha usamos a identidade de Moufang à esquerda. Logo $e$ associa e comuta com todos os elementos de $U$. Portanto, $e$ é central. Finalmente, como $e$ é o elemento unidade de $B$

temos $B = eB \subseteq eU = Ue$ e, como $B$ é um ideal $eU = Ue \subseteq B$. Logo $B = Ue$.

■

**Teorema 3.24** *[Zorn] Se uma álgebra alternativa $U \neq 0$ de dimensão finita é semissimples então $U = G_1 \oplus \ldots \oplus G_t$, onde $G_i$ é um ideal simples de $U$, $(i = 1, \ldots, t)$.*

**Demonstração:** Suponha que $U \neq 0$ é uma álgebra alternativa semissimples de dimensão finita. Vamos proceder por indução sobre $n = \dim U$. Se $\dim U = 1$, então $U$ é simples. Por hipótese de indução suponha que qualquer álgebra alternativa semissimples com dimensão menor que $n$ é escrita como soma direta de ideais simples. Se $U$ for simples, nada precisa ser demonstrado. Suponha $B \neq 0$ um ideal próprio de $U$.

Pelo corolário anterior, $B = Ue$ para algum idempotente central $e$. Como $U$ tem elemento unidade 1; seja $e_1 = 1 - e$. Temos que $e_1$ é um idempotente (central) pois $e_1^2 = (1-e)^2 = 1 - e - e + e^2 = e_1$. Defina $B_1 = Ue_1 = e_1U$. Temos que $B_1 \neq 0$ é um ideal de $U$. Observemos que $e_1$ é o elemento unidade de $B_1$. De fato, para todo $y \in B_1, y = xe_1$ para $x \in U$. Então $e_1y = ye_1 = (xe_1)e_1 = xe_1^2 = xe_1 = y$. Agora, para todos $y \in B_1$ e $w \in B$, temos que $wy = (we)(e_1y) = w(ee_1)y = 0$ pois $e, e_1$ são centrais e $ee_1 = 0$. Para todo $x \in U$, temos que $x = xe + (1-e)x$, o que implica que $U = B + B_1$.

Além disso, se $x \in B \cap B_1$, então $x = ex = e(e_1x) = (ee_1)x = 0x = 0$, donde $U = B \oplus B_1$. Como $\dim B < n$, pela hipótese de indução temos que $B$ e $B_1$ são somas diretas de ideais simples. Como $BB_1 = 0$, temos que os ideais de $B$ e $B_1$ também são ideais de $U$. Logo, $U$ é soma direta de ideais simples.

■

# Referências Bibliográficas


[1] GOODAIRE, E. G., JESPERS, E. e MILIES, C. P. “**Alternative Loop Rings**”. Em: ***North Holland - Mathematics Studies*** (1996).

[2] JACOBSON, N. ***Basic Algebra I***. 2ª ed. Vol. 1. W. H. Freeman e Company, (1996).

[3] MUNHOZ, M. “**Tópicos de Álgebras Alternativas**”. Dissertação de Mestrado. USP - São Carlos, 2007.

[4] PERESI, L. A. “**Álgebras não-associativas**”. Em: ***Departamento de Matemática, Universidade de São Paulo*** (Caixa Postal 66281, São Paulo-SP, Brazil, 05315-970).

[5] SCHAFER, R. D. “**An Introduction to Nonassociative Algebras**”. Em: ***Department of Mathematics Massachusetts Institute of Technology Cambridge, Massachusetts, Academic Press*** (1966) (citado nas páginas 26, 34).