

---

**Universidade Federal de Uberlândia**

Faculdade de Matemática - FAMAT

Licenciatura em Matemática

---

**Um breve estudo sobre a estabilidade e  
controlabilidade de sistemas autônomos**

**Dhara Cristina de Freitas Lago Grande**

Trabalho de Conclusão de Curso - Uberlândia, MG - 2023

Profa. Dra. **Luciana Aparecida Alves**

Orientadora

DHARA CRISTINA DE FREITAS LAGO GRANDE

# Um breve estudo sobre a estabilidade e controlabilidade de sistemas autônomos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Luciana Aparecida Alves, UFU.

Este trabalho foi julgado adequado para a obtenção do título de licenciatura em Matemática, sendo aprovado em sua forma final pela banca examinadora:

Profa. Dra. Luciana Aparecida Alves, UFU

Profa. Dra. Ligia Laís Fêmina, UFU

Prof. Dr. Marcus Augusto Bronzi, UFU.

Uberlândia, 03 de março de 2023.

# Agradecimentos

Agradeço à minha mãe e ao meu pai que sempre me ajudaram durante toda minha vida escolar, me proporcionaram condições para ter um estudo de qualidade e apoiaram as minhas decisões acadêmicas, em especial quando disse que cursaria matemática.

Agradeço às minhas amigas e amigos que estiveram comigo durante todo esse processo e me deram forças para continuar. Agradeço ao grupo “Minha outra outra família” pelas experiências compartilhadas ao longo desse período. Em especial agradeço à Alinne, Luiza, Dudu e Henrique que escutaram os meus choros e desabafos, me consolaram, estiveram sempre ao meu lado e foram peças fundamentais para que eu encontrasse forças de continuar. Obrigada pelo carinho e pela amizade de vocês.

Agradeço aos meus amigos de faculdade, por terem me acompanhado nessa jornada e terem feito parte do meu crescimento, tanto acadêmico, quanto pessoal. Em especial, agradeço ao Leonardo Silva, por ser um grande amigo e sempre ter paciência comigo e me ajudar em situações que eu me encontrava mais desesperada. Agradeço à turma 91 por ter sido tão acolhedora e que, desde o começo do curso, tiveram pessoas que foram essenciais para que eu me adaptasse ao ritmo de graduação. Vocês têm um lugar muito especial no meu coração e, mesmo para aqueles que, posteriormente, encontraram seus caminhos fora da matemática, eu desejo que tenham muito sucesso na vida.

Agradeço ao Programa de Educação Tutorial (PET) por ter me fornecido a oportunidade de ter tantas experiências incríveis dentro da faculdade e, ao mesmo

tempo, ter possibilitado que eu conhecesse pessoas maravilhosas que me ajudaram imensamente no meu crescimento pessoal e acadêmico. Em especial, agradeço à Aline, Japa, Ana Laura, Fernanda e Laura, que são pessoas incríveis que tive e ainda tenho o prazer de chamar de amigas e que me acompanharam em tantas jornadas; e à Elisa e ao Bronzi que foram tutores do programa no período em que fiz parte e me ajudaram no meu desenvolvimento dentro do grupo.

Agradeço às professoras e professores do curso, que a cada semestre me faziam encantar mais pela matemática e pela profissão. Em especial, agradeço à Fabiana e à Ana Cláudia, que fizeram minha passagem pela licenciatura ser tão enriquecedora e repleta de conhecimentos que levarei para a vida toda. Agradeço às professoras Lígia, Ana Carla, Dylene e Rosana, que posso dizer, sem dúvidas, que foram umas das melhores professoras que eu poderia ter o prazer de ser aluna e que me ensinaram tanto, não somente de conteúdo, mas profissionalmente falando também.

Agradeço à Luciana, por ter me orientado durante a maior parte da minha graduação, ter tido paciência comigo durante todo o processo de desenvolvimento desse trabalho e me auxiliado com tamanha compreensão e sabedoria durante esse período.

E, por fim, agradeço à todos aqueles que, direta, ou indiretamente, fizeram parte da minha graduação e aos que contribuíram para que eu sempre tivesse orgulho de ter escolhido a profissão que escolhi.

# Resumo

Neste trabalho, estudaremos os sistemas dinâmicos lineares em  $\mathbb{R}^2$ , que são basicamente constituídos por um sistema de duas equações diferenciais lineares da forma  $x' = Ax$ , e discutiremos sua dinâmica com base no traço e determinante da matriz  $A$ . Além disso, introduziremos o conceito de controlabilidade de sistemas lineares e apresentaremos algumas propriedades correspondentes à teoria de controle que serão essenciais para o entendimento de suas aplicações.

**Palavras-chave:** Equações diferenciais, sistemas dinâmicos lineares, teoria de controle, controlabilidade, conjunto controlável.



# Abstract

In this work, we will study linear dynamical systems in  $\mathbb{R}^2$ , which are basically composed by a system of two linear differential equations in the form  $x' = Ax$ , and discuss their dynamics based on the trace and determinant of the matrix  $A$ . In addition, we will introduce the concept of controllability of linear systems and present some properties inside the control theory that will be essential for understanding its applications.

**Key-words:** Differential equations, linear dynamical systems, control theory, controllability, controllable set.





# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Sistemas Dinâmicos</b>	<b>3</b>
1.1 Sistemas Dinâmicos . . . . .	3
1.2 Sistemas Dinâmicos Lineares (SDL) em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	3
1.2.1 Solução de um SDL no $\mathbb{R}^2$ . . . . .	5
1.2.2 Classificação do Ponto Crítico . . . . .	6
1.3 Oscilador Harmônico . . . . .	19
1.3.1 Velocidade escalar nula ( $b = 0$ ): Oscilador Harmônico Simples	19
1.3.2 Velocidade não-nula ( $b \neq 0$ ): Oscilador Harmônico Amortecido	22
<b>2 Controlabilidade</b>	<b>29</b>
2.1 Controlabilidade para Sistemas Lineares . . . . .	29
2.1.1 Conjunto Controlável . . . . .	31
2.2 Matriz de Controlabilidade . . . . .	35
2.3 Conjunto dos Estados Atingíveis . . . . .	43
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>49</b>

# Introdução

De modo geral, um sistema é caracterizado por um conjunto de elementos ordenados de forma que exista alguma relação entre eles. Em [5], Monteiro retrata muito bem esse conceito em um parágrafo que indaga qual o motivo do estudo de sistemas dinâmicos e cita alguns exemplos importantes para compreendermos o quão vasta e abrangente pode ser essa área, dentre eles podemos citar: “o circuito elétrico de um rádio-telescópio, Júpiter e seus satélites, o sistema nervoso de um canguru, a situação financeira de uma família, o ecossistema de um mangue. Um sistema é *dinâmico* quando algumas grandezas que caracterizam seus objetos constituintes variam no tempo. Leibniz foi o primeiro a usar a palavra dinâmica nesse contexto. Nos exemplos anteriores, variam: a tensão entre as placas de um capacitor, a posição de Ganimedes, a atividade dos neurônios do córtex visual, os gastos com vestuário, o número de caranguejos fêmeas.”

Em termos matemáticos, sistemas dinâmicos são sistemas compostos por equações diferenciais ordinárias (EDO's) de ordem  $n$ , cujas equações estabelecem uma relação entre uma função incógnita e suas derivadas, e apresentam uma lei de comportamento com relação ao tempo. Neste trabalho definiremos sistemas dinâmicos lineares e estudaremos a sua evolução baseada nos resultados obtidos por meio das soluções das EDO's que o caracterizam e forneceremos condições para a elaboração dos retratos de fase que permitirão ter uma visualização mais ampla de cada caso apresentado.

Demonstraremos dois exemplos clássicos dentro do conteúdo de sistemas dinâmicos: o oscilador harmônico simples e o oscilador harmônico amortecido que são

sistemas massa-mola em que um corpo de massa  $m$  sofre um deslocamento em relação à sua posição de equilíbrio, causando uma deformação na mola acoplada a ele e resultando em um movimento harmônico simples que poderá ser caracterizado com o apoio do conteúdo aqui descrito.

Ao longo dos capítulos perceberemos a importância de conseguirmos controlar um sistema físico para obtermos um resultado desejado. Dessa forma, introduziremos, também, os conceitos de controlabilidade de sistemas lineares e mostraremos o seu papel essencial nas soluções de muitos problemas importantes de controle. Neste trabalho, portanto, apresentaremos alguns dos conceitos presentes na teoria de sistemas lineares de controle e que serão essenciais para o entendimento de uma de suas aplicações. Para isso, definiremos o que é a controlabilidade de um sistema e, posteriormente, introduziremos algumas propriedades sobre os conjuntos controláveis e outras definições necessárias para o estudo do tema.

# Capítulo 1

## Sistemas Dinâmicos

### 1.1 Sistemas Dinâmicos

Seja  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , função. Os sistemas dinâmicos de primeira ordem são representados pela equação

$$X' = F(X) = AX + h(X), \quad (1.1)$$

onde  $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor solução do sistema,  $X' = (x'_1, \dots, x'_n)$  é o vetor velocidade das órbitas,  $x'_i$  é a derivada de  $x_i$  em relação ao tempo  $t$ , com  $i = 1, \dots, n$ , e  $F = (f_1, \dots, f_n)$  é a função campo vetorial.

Neste trabalho serão abordados apenas os sistemas dinâmicos, nos quais a função campo vetorial é linear e  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ , com  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Além disso, vale lembrar que todas as variáveis se encontram em função de  $t$ . A fim de simplificar notação,  $X'(t) = \frac{d}{dt}X(t)$  será representado apenas como  $X'$  e o mesmo é válido para as demais funções dependentes de  $t$ .

### 1.2 Sistemas Dinâmicos Lineares (SDL) em $\mathbb{R}^2$

**Definição 1.2.1** *Os sistemas dinâmicos lineares no  $\mathbb{R}^2$  são representados por  $X' = AX + h(X)$ , onde a função  $h(X)$  é nula e, por isso, podemos reescrever (1.1)*

da forma

$$X' = AX, \quad (1.2)$$

onde  $A \in M_2(\mathbb{R})$  possui coeficientes constantes. É equivalente escrever (1.2) como

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (1.3)$$

ou, em sua forma matricial,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

**Definição 1.2.2** Um ponto  $P \in \mathbb{R}^2$  é chamado **ponto crítico** ou **ponto de equilíbrio** do sistema se  $f_i(P) = 0$ , para  $i = 1, 2$ .

**Observação 1.2.1** Se o ponto  $P = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$  for o único ponto de equilíbrio do sistema em  $\mathbb{R}^2$ , então  $\det A \neq 0$ .

Antes de definirmos os próximos conceitos, será preciso trabalharmos com o sistema de equações fornecido anteriormente. Dessa forma, isolando a variável  $y$  na primeira equação de (1.3), temos, para  $b \neq 0$ :

$$y = \frac{1}{b} \left( \frac{dx}{dt} - ax \right).$$

Contudo, queremos determinar  $y'$  para que seja possível substituímos a variável na segunda equação do sistema. Dessa forma, derivando em relação à  $t$  e realizando a substituição de  $y'$  e  $y$ , obtemos:

$$\frac{1}{b} \left( \frac{d^2x}{dt^2} - a \frac{dx}{dt} \right) = cx + d \left[ \frac{1}{b} \left( \frac{dx}{dt} - ax \right) \right].$$

Para finalizar, multiplicaremos ambos os lados da igualdade por  $b$ , isolando todos os termos em um dos lados da equação, e colocaremos os termos em função de  $x$  em evidência, resultando em:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (a + d) \frac{dx}{dt} + (da - bc)x = 0. \quad (1.4)$$

Tomando como referência a matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  definida anteriormente, note que  $a + d = \Theta$  é soma dos elementos da diagonal principal de  $A$ , ou seja, o **traço** ( $Tr(A)$ ) da matriz  $A$ , e  $(ad - bc)$  é o **determinante** ( $Det(A)$ ) de  $A$ , que será denotado por  $\Gamma$ . Conseguimos, assim, relacionar (1.4) com o **polinômio característico** de  $A$  na forma:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \Theta\lambda + \Gamma = 0, \quad (1.5)$$

onde  $\lambda \in \mathbb{R}$  são as raízes do polinômio, ou seja, os **autovalores** de  $A$ .

### 1.2.1 Solução de um SDL no $\mathbb{R}^2$

**Definição 1.2.3** *O vetor solução*  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  *é uma matriz coluna cujos elementos são funções diferenciáveis que satisfazem (1.2) em um intervalo.*

Isto posto, podemos dizer que existirão duas soluções da forma  $x = \phi_1(t)$  e  $y = \phi_2(t)$  que representarão um conjunto de equações paramétricas de uma curva em  $\mathbb{R}^2$ . Além disso, como estamos trabalhando em  $\mathbb{R}^2$ , as soluções determinarão uma curva no plano  $xy$  que denominaremos de **trajetória** e poderá ser representada em um **retrato de fase** que será construído mediante algumas condições posteriormente apresentadas.

**Teorema 1.2.1** *De modo geral, dadas  $c_1, c_2, d_1$  e  $d_2$  constantes e  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  as raízes de (1.5), a solução do sistema (1.3) será dada por:*

a) Se  $\Delta > 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$ :

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{t\lambda_1} + c_2 e^{t\lambda_2} \\ y(t) = d_1 e^{t\lambda_1} + d_2 e^{t\lambda_2} \end{cases}, \quad (1.6)$$

b) Se  $\Delta = 0, \lambda_1 = \lambda_2$ :

$$\begin{cases} x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t} \\ y(t) = (d_1 + d_2 t) e^{\lambda t} \end{cases}. \quad (1.7)$$

c) Se  $\Delta < 0$ ,  $\lambda = \alpha \pm i\beta$ :

$$\begin{cases} x(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)) \\ y(t) = e^{\alpha t}(d_1 \cos(\beta t) + d_2 \sin(\beta t)) \end{cases} \quad (1.8)$$

É importante observar que cada valor de  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $d_1$  e  $d_2$  adotados representarão uma trajetória correspondente no retrato de fase do sistema. A demonstração do teorema acima encontra-se em [2].

## 1.2.2 Classificação do Ponto Crítico

Para se obter o comportamento do nosso sistema bidimensional linear, não é suficiente apenas encontrarmos a solução, é necessário haver um estudo do ponto crítico  $P = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ , que dependerá dos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  soluções de  $P(\lambda)$ . Assim sendo, nessa seção apresentaremos as condições necessárias para a construção do retrato de fase e análise do comportamento do sistema dinâmico.

Vale observar que um estudo mais aprofundado de (1.5) nos fornecerá informações significativas que nos permitirá classificar o tipo de estabilidade do ponto crítico e os tipos de órbitas obtidas para, então, podermos montar o retrato de fase do nosso sistema linear e estudarmos seu comportamento. Assim sendo, a natureza do ponto de equilíbrio dependerá dos valores das raízes do polinômio característico e mais ainda, conhecendo a solução  $\phi(t)$  do sistema, conseguimos classificar  $P = (0, 0)$  como:

1. **assintoticamente estável** se existe  $\delta_0 > 0$  tal que, se  $\|\phi(t) - P\| < \delta_0$ , então

$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = P$ . Ou seja:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0.$$

Isso ocorre quando  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$  ou quando  $\alpha < 0$ , para o caso em que  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ .

2. **estável** se dado  $\varepsilon > 0$  e  $\delta > 0$ , para toda solução  $\phi(t)$  que satisfaça  $t = t_0$ , tem-se que, se  $\|\phi(t_0) - P\| < \varepsilon$ , então  $\|\phi(t) - P\| < \delta$ , para todo  $t \geq t_0$ .

Ou seja, toda solução que se inicia próxima ao ponto crítico (com raio  $\delta$ ) se mantém próxima ao ponto  $P = (0, 0)$  (com raio  $\varepsilon$ ) visto que  $x(t)$  e  $y(t)$  permanecem limitadas quando  $t \rightarrow +\infty$ ; isso ocorrerá quando os autovalores são números imaginários da forma  $\lambda_{1,2} = \pm\beta i$ .

3. **instável** se existe  $\varepsilon > 0$  tal que, para todo  $\delta > 0$  tem-se que, se  $\|\phi(t_0) - P\| < \delta$ , então  $\|\phi(t) - P\| > \varepsilon$ , para algum  $t > t_0$ . Ou seja:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty \text{ e } \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty.$$

Ao contrário do ponto de estabilidade estável, pelo menos uma solução que se inicia próxima ao ponto crítico (com raio  $\delta$ ) se afasta de  $P = (0, 0)$  (com raio  $\varepsilon$ ). E isso vale para os casos em que  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2$  forem positivos.

Os casos listados anteriormente constituem o seguinte resultado:

**Teorema 1.2.2** *Sejam  $P = (0, 0)$  o ponto crítico do sistema linear,  $\Theta = (a + d)$  e  $\Gamma = \det(A)$ , classificamos  $P = (0, 0)$  como:*

1. **assintoticamente estável** se  $\Theta < 0$  e  $\Gamma > 0$ ;
2. **estável** se  $\Theta = 0$  e  $\Gamma > 0$ ;
3. **instável** se  $\Theta > 0$  e  $\Gamma < 0$ .

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada em [1].

## Exemplos

Nos exemplos a seguir esboçaremos melhor o processo de construção do plano de fase e, neste caso, análise das soluções de um sistema da forma (1.2), com  $A \in \mathbb{R}^2$ .



**Exemplo 1.2.1** *Considere o sistema*

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X. \quad (1.9)$$

Para encontrarmos a solução do sistema, primeiro é necessário determinarmos os autovalores e autovetores da matriz que serão resultados do polinômio característico calculado por:

$$P(\lambda) = \det \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3.$$

As raízes  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = 3$  da equação acima serão os autovalores de  $A$ . Basta, então, resolvermos o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda_{1,2} & 1 \\ 4 & 1 - \lambda_{1,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e encontraremos o autovetor correspondente para cada autovalor. Assim sendo, se considerarmos  $\lambda_1 = -1$ , encontraremos o autovetor

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

E, seguindo o mesmo processo anterior para  $\lambda_2 = 3$ , obtemos o autovetor

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dessa maneira, a solução do sistema será dada por

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t},$$

com  $c_1$  e  $c_2$  constantes arbitrárias. Reescrevendo  $X$ , no formato de (1.6), temos:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} \\ y(t) = -2c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{3t} \end{cases}.$$

A fim de visualizarmos melhor as trajetórias no plano  $xy$  para os valores de  $c_1$  e  $c_2$ , analisaremos as soluções correspondentes à cada um dos autovetores separadamente. Para  $v_1$ , temos  $x = c_1e^{-t}$  e  $y = -2c_1e^{-t}$ . Quando  $c_1 > 0$ , notamos que  $x = c_1e^{-t} > 0$  e  $y = -2c_1e^{-t} < 0$ , logo a solução do sistema se encontrará no quarto quadrante. E quando  $c_1 < 0$ , a solução estará no segundo quadrante, com  $x = c_1e^{-t} < 0$  e  $y = -2c_1e^{-t} > 0$ . Em ambos os casos, podemos perceber que, se considerarmos uma partícula em movimento, na medida em que o tempo  $t$  aumenta, essa partícula aproxima-se da origem.

Já para  $v_2$ , temos  $x = c_2e^{3t}$  e  $y = 2c_2e^{3t}$ . Quando  $c_2 > 0$ , notamos que  $x = c_2e^{3t} > 0$  e  $y = 2c_2e^{3t} > 0$ , logo, a solução do sistema se encontrará no primeiro quadrante. E quando  $c_2 < 0$ , a solução estará no terceiro quadrante, com  $x = c_2e^{3t} < 0$  e  $y = 2c_2e^{3t} < 0$ . Neste caso, o movimento da partícula será no sentido contrário a origem na medida em que  $t$  aumenta. A figura (1.1) mostra o plano de fase contendo as diversas trajetórias correspondente às soluções encontradas para (1.9). Esse padrão de trajetórias é chamada de **ponto de sela** e ele é **instável**, pois quase todas as trajetórias tendem a se afastar deste ponto a partir de um certo  $t$ .

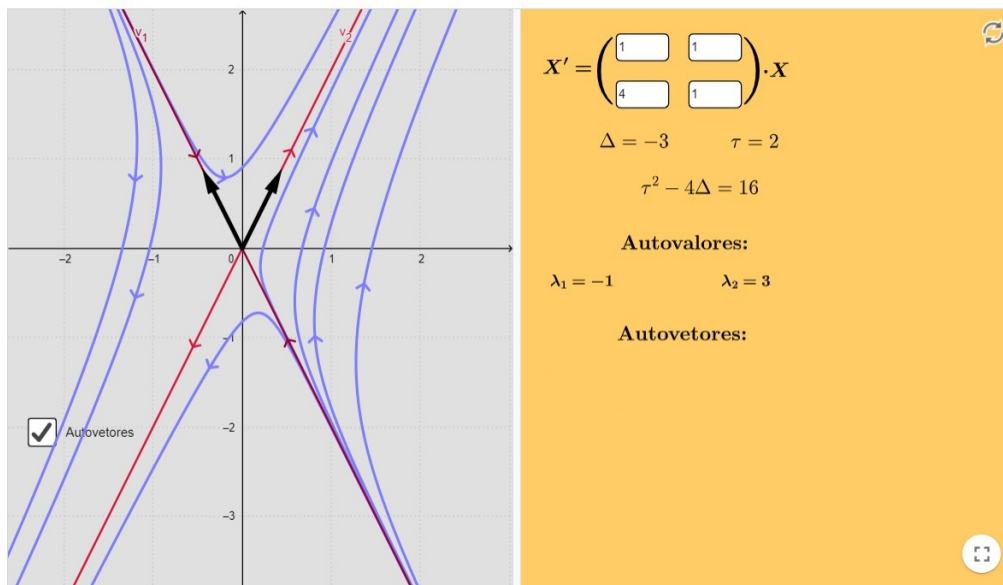


Figura 1.1: Fonte: GeoGebra

**Exemplo 1.2.2** *Dado o sistema*

$$X' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} X. \quad (1.10)$$

Seguindo o mesmo raciocínio do exemplo anterior, encontraremos as raízes do polinômio característico dado por:

$$P(\lambda) = \det \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + \frac{5}{4} = 0.$$

Resolvendo a equação do segundo grau acima, teremos  $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i$  e  $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - i$  autovalores complexos de  $A$ . Resolvendo, assim, o sistema

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda_{1,2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} - \lambda_{1,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

encontraremos, para  $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i$ , o autovetor

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

e, para  $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - i$ , o autovetor

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right].$$

Dados os autovalores, temos que o conjunto solução de (1.10), será da forma  $x(t) = e^{\lambda_1 t} v_1$  e  $y(t) = e^{\lambda_2 t} v_2$ . Fazendo a análise de apenas uma dessas soluções, obtemos:

$$e^{(-\frac{1}{2}+i)t} v_1 = e^{-\frac{t}{2}} (\cos t + i \sin t) \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = e^{-\frac{t}{2}} \left[ \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right].$$

Logo, o conjunto soluções reais do sistema será dado por todas as combinações lineares de  $x(t)$  e  $y(t)$ , com

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad y(t) = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

A figura (1.2) mostra algumas das trajetórias correspondentes às soluções encontradas. Perceba que, se considerarmos uma partícula em movimento quando  $t \rightarrow \infty$ , a mesma tende a se aproximar da origem ao longo de uma espiral e isso ocorre porque, como encontramos em (1.11), as soluções do nosso sistema serão sempre os produtos de uma exponencial decrescente pelas funções seno e cosseno. Note que, neste caso, teremos um ponto crítico classificado como **ponto espiral** e **assintoticamente estável**, já que todas as trajetórias possuem o mesmo comportamento de se aproximar da origem quando  $t$  aumenta.

Vale observar que, para os casos em que os autovalores são complexos, mas sua parte real é positiva, o ponto crítico também será classificado como espiral, porém, assim como no exemplo anterior, sua estabilidade será classificada como instável, pois suas trajetórias tendem a se afastar da origem quando  $t \rightarrow \infty$ . Mais ainda, se a parte real se anular, ou seja, for zero, o ponto crítico será do tipo **centro** e **estável**.

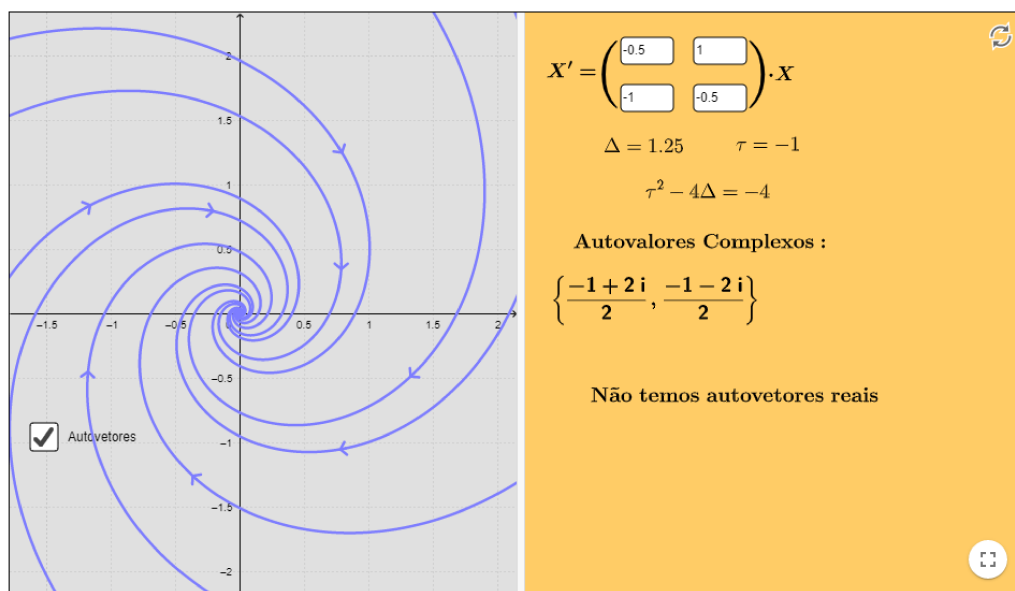


Figura 1.2: Fonte: GeoGebra

**Exemplo 1.2.3** *Apresentado o sistema abaixo*

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X. \quad (1.12)$$

Analogamente aos exemplos anteriores, precisamos encontrar, primeiramente, os autovalores de  $A$ .

$$P(\lambda) = \det \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Como o polinômio acima possui discriminante igual a zero, teremos que  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$  será a única raiz de  $P(\lambda)$ , portanto, o autovalor terá multiplicidade 2. Logo, basta resolvermos o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 - 2 & -1 \\ 1 & 3 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

que conseguimos encontrar um autovetor

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

associado a esse autovalor. Logo, uma das soluções do sistema será dada da forma:

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Como nosso autovalor tem multiplicidade algébrica 2, não é possível aplicarmos o mesmo processo para tentarmos encontrar um autovetor diferente, logo, vamos supor  $y(t)$  uma segunda solução da forma:

$$y(t) = v_1 t e^{2t} + v_2 e^{2t}, \tag{1.14}$$

no qual  $v_2$  será um vetor ainda a ser determinado. Se substituirmos (1.14) na equação (1.12) do nosso sistema e abrirmos a conta, obtemos

$$2v_1 t e^{2t} + (v_1 + 2v_2) e^{2t} = A(v_1 t e^{2t} + v_2 e^{2t}).$$

Colocando em evidência e igualando os coeficientes de  $t e^{2t}$  e  $e^{2t}$ , ficamos com duas condições:

$$(A - 2I)v_1 = 0 \quad \text{e} \quad (A - 2I)v_2 = v_1,$$

com  $I \in M_2(\mathbb{R})$  matriz identidade.

Realizando os devidos cálculos, conseguimos

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

com  $k$  arbitrário. Logo, podemos substituir os autovetores soluções encontrados na equação (1.14) e, assim, teremos uma nova solução da forma:

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Contudo, perceba que o último termo de  $y(t)$  é múltiplo da solução inicial  $x(t)$  que havíamos encontrado, logo, não é necessário repetí-lo na equação, portanto, podemos reescrevê-la como:

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

e, como visto no teorema (1.2.1), a solução geral de (1.12) será dada por  $X = c_1x(t) + c_2y(t)$ , ou seja:

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} \right].$$

Perceba que, neste caso, teremos um ponto crítico do tipo **nó** e como seus autovalores são positivos, as suas trajetórias se afastam da origem, ou seja, na medida que  $t$  aumenta, as partículas tendem a se afastar do ponto, logo, será classificado como **instável**. Além disso, note que, quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $x$  também tende para infinito e, quando  $t \rightarrow -\infty$ ,  $x$  tende para zero. Esse comportamento pode ser identificado no plano de fase da figura (1.3) abaixo.

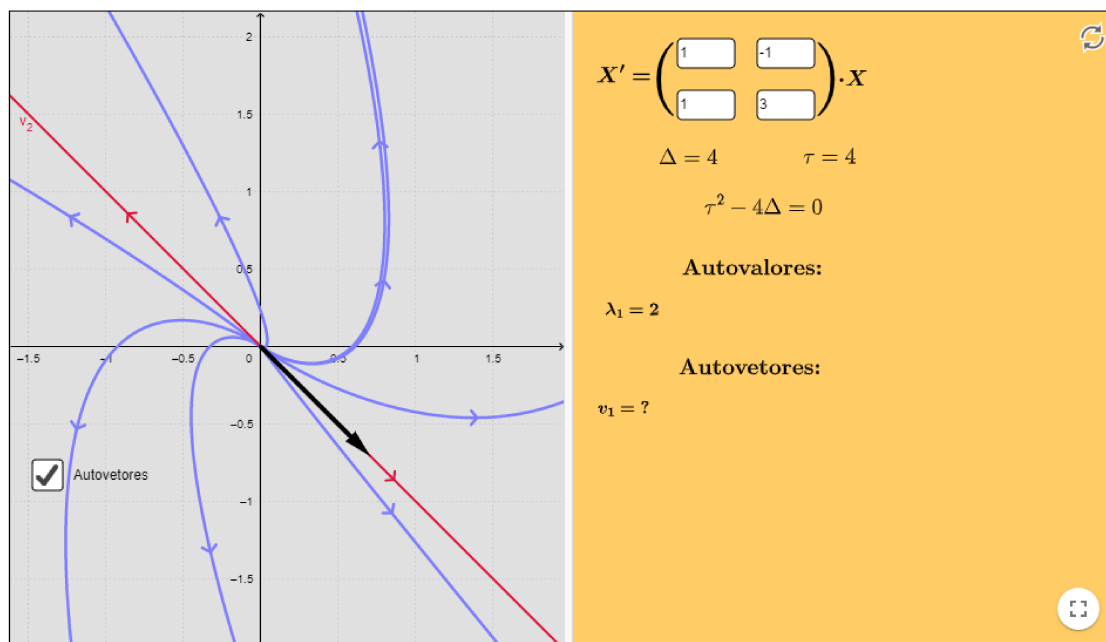


Figura 1.3: Fonte: GeoGebra



A tabela a seguir resume todas as condições apresentadas acima e, logo em seguida, alguns esboços de retratos de fase que não foram abordados nos exemplos anteriores.

Discriminante	Autovalor	Tipos de ponto crítico	Esboço da órbita (n <sup>o</sup> figura)	Estabilidade
$\Delta > 0$	$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Nó	(1.5)	Instável
	$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Nó		Assintoticamente Estável
$\Delta = 0$	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Ponto de Sela	(1.1)	Instável
	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Nó	(1.3)	Instável
	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Nó	(1.4)	Assintoticamente Estável
$\Delta < 0$	$\lambda = \alpha \pm \beta i$			
	$\alpha > 0$	Ponto Espiral	(1.7)	Instável
	$\alpha < 0$	Ponto Espiral	(1.2)	Assintoticamente Estável
	$\alpha = 0$	Centro	(1.6)	Estável

Tabela 1.1: Fonte: Autoria própria

Ponto crítico do tipo nó, com trajetórias de mesmo comportamento se aproximando da origem, logo, assintoticamente estável.

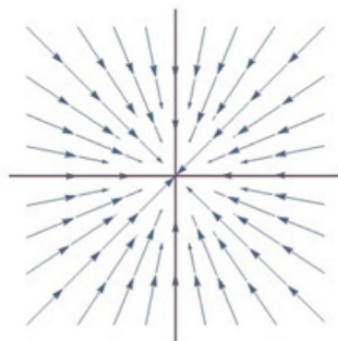


Figura 1.4: Fonte: [2]

Ponto crítico do tipo nó, com trajetórias se afastando da origem quando  $t \rightarrow \infty$ , logo, instável.

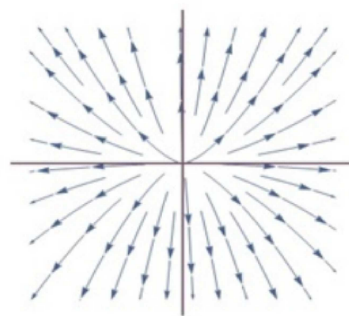


Figura 1.5: Fonte: [2]

Ponto crítico do tipo centro.

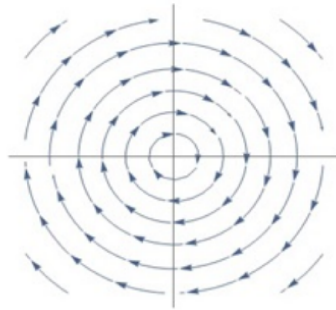


Figura 1.6: Fonte: [2]

Ponto crítico do tipo espiral, com trajetórias se afastando da origem quando  $t \rightarrow \infty$ , logo, instável.

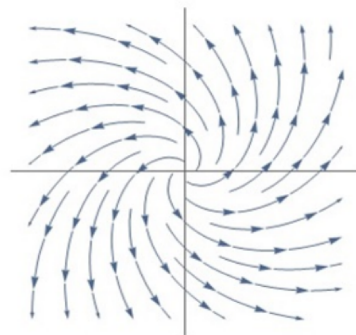


Figura 1.7: Fonte: [2]

## 1.3 Oscilador Harmônico

Nessa seção, trabalharemos com alguns casos envolvendo o oscilador harmônico, um dos principais exemplos dentro do estudo de sistemas dinâmicos lineares. De [2] e [5], temos que a equação de um oscilador harmônico referente à (1.4) é dada por:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0, \quad (1.15)$$

onde  $x(t)$  é o deslocamento do corpo,  $m$  é a massa,  $k$  é a constante da mola e  $b$  é a velocidade escalar. Vale observar que o deslocamento é calculado em relação a uma posição de equilíbrio em que  $x = 0$ . Além disso, nos restringiremos ao caso em que  $m = 1$  e trabalharemos nos casos em que  $b = 0$ ,  $b > 0$  e  $b < 0$ . Isto posto, podemos reescrever (1.15) da forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (1.16)$$

É importante ressaltar que adotaremos  $k > 0$  e que somente serão detalhadas as demonstrações para o caso em que a velocidade escalar é nula, porém as demais podem ser encontradas em [2].

### 1.3.1 Velocidade escalar nula ( $b = 0$ ): Oscilador Harmônico Simples

Um sistema massa-mola que oscila livremente em uma superfície horizontal satisfaz a seguinte equação:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \quad (1.17)$$

A fim de recorrer aos conhecimentos expostos nas seções anteriores e reduzir (1.17) a um sistema de equações diferenciáveis, chamaremos  $\frac{dx}{dt} = y$  para que possamos obter:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -kx \end{cases} \quad (1.18)$$

Reescrevendo o sistema (1.18) na forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (1.19)$$

Nesse caso, encontraremos  $\Theta = 0$  e  $\Gamma = k$ . Ainda mais, de (1.5) podemos encontrar  $\Delta = -4k$  referente ao polinômio  $P(\lambda) = \lambda^2 + k = 0$ . Como  $\Delta < 0$ , obtemos duas raízes complexas conjugadas da forma  $\alpha \pm \beta i$ , com  $\alpha = 0$  onde  $\lambda_1 = +i\sqrt{k}$  e  $\lambda_2 = -i\sqrt{k}$  serão soluções da equação do segundo grau em  $\lambda$ . E logo poderemos obter as trajetórias das órbitas correspondentes à esse sistema no retrato de fase que seguirá as condições apresentadas na Tabela 1.1.

Usando o Teorema 1.2.1, item (c), temos que a solução geral desse sistema é dada por:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \cos(\sqrt{k}t) + c_2 \sin(\sqrt{k}t) \\ y(t) = d_1 \cos(\sqrt{k}t) + d_2 \sin(\sqrt{k}t) \end{cases}.$$

Para analisarmos o comportamento das órbitas do nosso sistema, basta realizarmos os devidos cálculos no sistema acima para encontrarmos a equação:

$$\frac{x^2}{(\sqrt{\frac{C}{k}})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{C})^2} = 1, \quad (1.20)$$

com  $C$  constante. Note que a equação encontrada representa uma elipse. Assim sendo, analisando a Tabela 1.1, concluímos que o ponto de equilíbrio será do tipo

centro e estável, além disso, temos dados suficientes para construir os seguintes retratos de fase.

- Para  $0 < k < 1$ : trajetórias elípticas no sentido horário e achatada no eixo  $y$ .

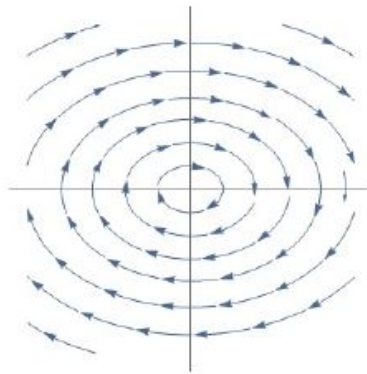


Figura 1.8: Fonte: [2]

- Para  $k = 1$ : circunferências concêntricas.

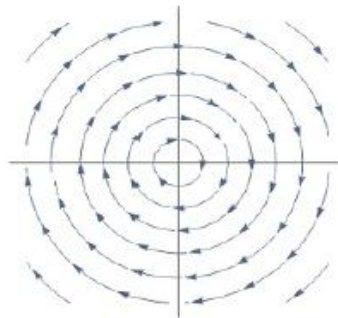


Figura 1.9: Fonte: [2]

- Para  $k > 1$ : trajetórias elípticas no sentido horário e achatada no eixo  $x$ .

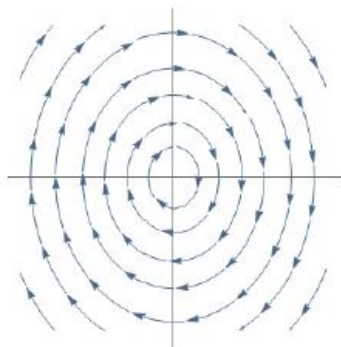


Figura 1.10: Fonte: [2]

### 1.3.2 Velocidade não-nula ( $b \neq 0$ ): Oscilador Harmônico Amortecido

#### Velocidade positiva ( $b > 0$ )

Realizando as devidas substituições assim como no caso anterior, considerando  $b > 0$ , podemos reescrever (1.18) da forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -kx - by \end{cases} \quad (1.21)$$

Ou, em sua forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

em que  $\Theta = -b < 0$  e  $\Gamma = k > 0$ . Com essas informações, somos capazes de obter o polinômio característico  $P(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + k = 0$ . Ao resolvermos a equação do segundo grau apresentada, dado  $\Delta = b^2 - 4k$ , encontramos  $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4k}}{2}$ ,

contudo, percebe-se que o discriminante varia conforme é adotada uma relação entre os termos  $b^2$  e  $4k$ , resultando em  $\Delta < 0$ ,  $\Delta = 0$  ou  $\Delta > 0$ .

- Se  $b^2 < 4k$  temos o caso em que  $\Delta < 0$ , assim sendo:

$$\lambda_1 = -\frac{b}{2} + i\frac{\sqrt{b^2 - 4k}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\frac{b}{2} - i\frac{\sqrt{b^2 - 4k}}{2},$$

com  $\alpha = -\frac{b}{2} < 0$  e  $\beta = \frac{\sqrt{b^2 - 4k}}{2}$ . Logo, o ponto crítico é do tipo espiral e assintoticamente estável, além disso o esboço do plano de fase é dado por:

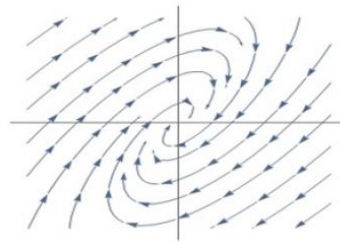


Figura 1.11: Fonte: [2]

- Se  $b^2 = 4k$  temos o caso em que  $\Delta = 0$ , ou seja,  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2} < 0$  e o vetor solução é da forma:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-\frac{bt}{2}} + c_2 e^{-\frac{bt}{2}} \\ y(t) = d_1 e^{-\frac{bt}{2}} + d_2 e^{-\frac{bt}{2}} \end{cases} .$$

Basta observarmos, portanto, que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ , logo, o ponto crítico é do tipo nó e assintoticamente estável, com retrato de fase esboçado por:



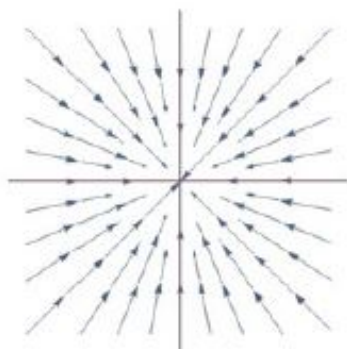


Figura 1.12: Fonte: [2]

- Se  $b^2 > 4k$  temos o caso em que  $\Delta > 0$  e  $\lambda_{1,2}$  são diferentes e negativos, com vetor solução da forma:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4k}}{2} t} + c_2 e^{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4k}}{2} t} \\ y(t) = d_1 e^{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4k}}{2} t} + d_2 e^{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4k}}{2} t} \end{cases} .$$

Teremos, assim, um ponto de sela instável com retrato de fase:

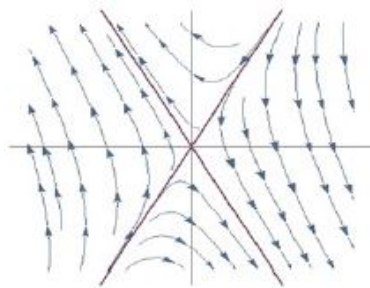


Figura 1.13: Fonte: [2]

### Velocidade negativa ( $b < 0$ )

Antes de analisarmos o caso em que a velocidade escalar é negativa, vale lembrar que todas as demonstrações e teorias aprofundadas desse conteúdo podem ser encontrados em [2] e [5]. Para  $b < 0$ , podemos reescrever (1.18) da forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -kx + by \end{cases} . \quad (1.22)$$

Ou, em sua forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

em que  $\Theta = b < 0$ ,  $\Gamma = k > 0$  e o polinômio característico é da forma  $P(\lambda) = \lambda^2 - b\lambda + k = 0$ . Assim sendo, sabendo que  $\Delta = b^2 - 4k$ , encontramos  $\lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4k}}{2}$ , e, similar ao caso anterior, percebe-se que o discriminante varia conforme é adotada uma relação entre os termos  $b^2$  e  $4k$ .

- Se  $b^2 = 4k$ , temos o caso em que  $\Delta = 0$  e o ponto crítico é do tipo nó e instável (o esboço do retrato de fase desse tipo já foi esboçado anteriormente).
- Se  $b^2 > 4k$ , temos o caso em que  $\Delta > 0$  e o ponto de equilíbrio é do tipo ponto de sela e instável (plano de fase já representado).
- Se  $b^2 < 4k$ , temos o caso em que  $\Delta < 0$  e  $\lambda_{1,2}$  possuem sinais opostos, com  $\alpha = \frac{b}{2}$ . Logo, o ponto de equilíbrio é do tipo espiral e assintoticamente estável, mas ao contrário do modelo apresentado anteriormente, as soluções tendem a se afastar da origem e o retrato de fase é dado por:

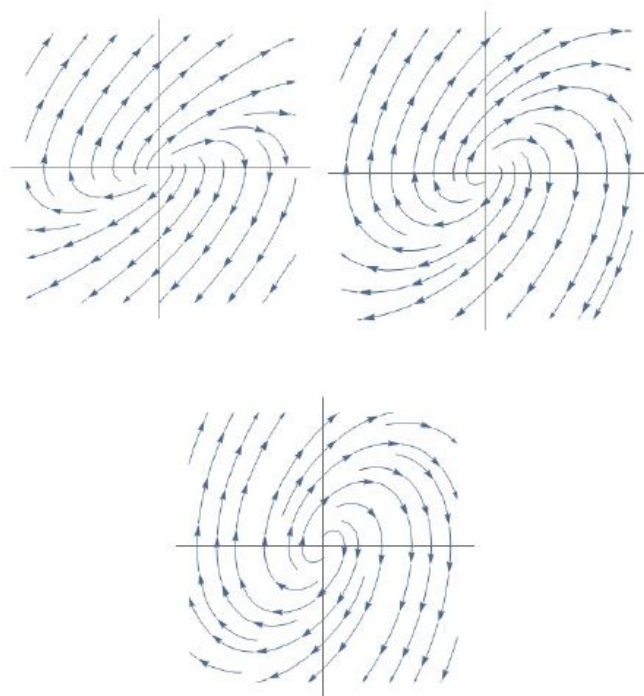
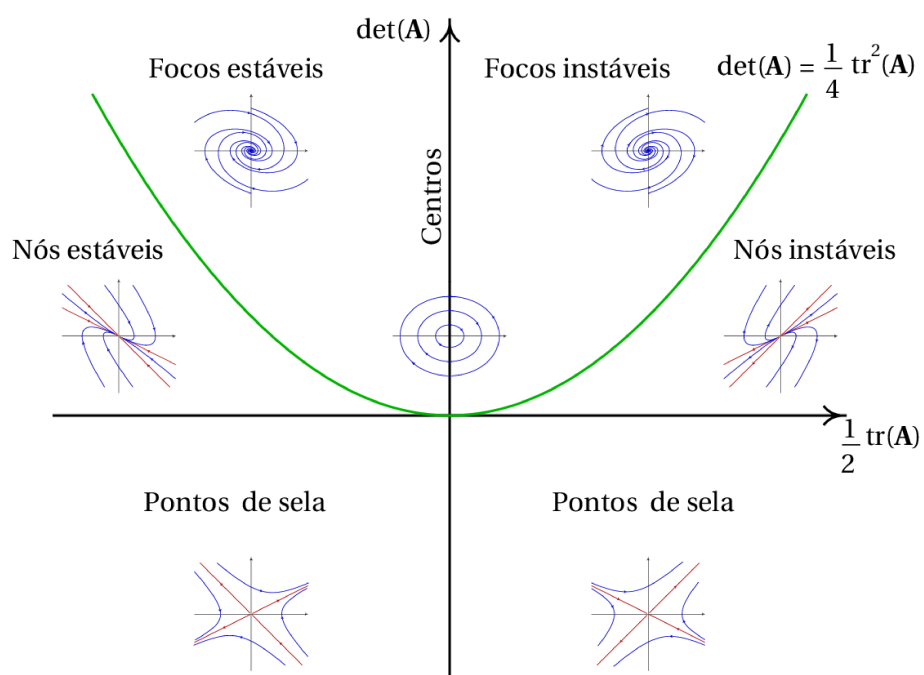


Figura 1.14: Fonte: [2]

De forma geral, percebemos que esboçar o retrato de fase de um sistema nos permite encontrar várias soluções para as equações apresentadas, visto que cada trajetória corresponde a uma solução na medida em que o sistema dinâmico evolui com o tempo. Por isso, a fim de tornar dinâmica a aprendizagem quanto à construção desses planos, a imagem abaixo tem como objetivo resumir cada um dos casos acima apresentados.

Figura 1.15: Fonte: <https://def.fe.up.pt/>



# Capítulo 2

## Controlabilidade

### 2.1 Controlabilidade para Sistemas Lineares

Para definirmos a controlabilidade de um sistema, considere

$$x' = f(x, u) \tag{2.1}$$

chamada de *equação de estado*, em que  $f \in C^1$ . Dizemos que ele é *controlável* se, para quaisquer estado inicial e estado final  $x_0$  e  $x_1$ , existir uma função  $u(t)$ , denominada *controle*, que leve o sistema de  $x_0$  até  $x_1$  em um tempo finito  $t$ . No caso em que  $f$  é linear, a equação de estado (2.1) pode ser reescrita como

$$x' = Ax + Bu,$$

na qual  $A \in M_n(\mathbb{R})$  e  $B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ , com  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $u \in \mathbb{R}^m$ .

Consideraremos, inicialmente, a controlabilidade à origem, ou seja, o nosso *estado final* (ou *estado alvo*) será  $x = 0$ , dessa forma, temos  $f(0, 0) = 0$  e podemos garantir que o sistema atingirá o estado final desejado e permanecerá naquele ponto mesmo com as mudanças de controle. Além disso, como estamos trabalhando com sistemas autônomos, podemos definir um tempo inicial  $t = 0$ , de modo que o *estado inicial* seja da forma:  $x(0) = x_0$ .

As variáveis de controle são funções de  $t$ , integráveis, e as classificaremos de acordo com seus diferentes tipos. Defina  $\mathcal{U}_{bb}$ ,  $\mathcal{U}_b$  e  $\mathcal{U}_u$  **conjuntos de controle** e  $u$  variável de controle, temos que:

- se estas funções são *ilimitadas*, então  $u \in \mathcal{U}_u$ ;
- se *limitadas*, ou seja, se  $|u_i(t)| \leq 1$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$ , então  $u \in \mathcal{U}_b$ ;
- se  $|u_i(t)| = 1$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$ , então  $u \in \mathcal{U}_{bb}$ .

Logo,  $\mathcal{U}_{bb} \subset \mathcal{U}_b \subset \mathcal{U}_u$ .

**Definição 2.1.1** *Definimos o conjunto controlável no tempo  $t_1$  como sendo o conjunto dos estados iniciais  $x_0$  que podem ser levados até a origem em um tempo  $t_1$ , usando um controle que seja admissível, ou seja, que pertença ao conjunto de controle  $\mathcal{U}$  escolhido.*

A notação a ser utilizada para nos referirmos ao conjunto definido acima será  $\mathcal{C}(t_1)$  ou, caso seja necessário um detalhamento maior,  $\mathcal{C}(t_1, u, 0)$ , com  $t_1$ ,  $u$  e  $0$ , o tempo, o controle e o estado alvo, respectivamente.

**Definição 2.1.2** *O conjunto controlável  $\mathcal{C}$  é o conjunto de pontos que podem ser levados à origem em tempo finito qualquer. Escrevemos:*

$$\mathcal{C} = \bigcup_{t_1 \geq 0} \mathcal{C}(t_1).$$

Se todos os estados iniciais forem controláveis à origem, ou seja, se  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$ , dizemos que o sistema é **completamente controlável**.

Vale observar que a solução da equação de estado dada por  $x' = Ax + Bu$  é da forma

$$x(t) = e^{tA} \left( x_0 + \int_0^t e^{-sA} Bu(s) ds \right). \quad (2.2)$$

A demonstração da solução acima pode ser encontrada em [4].

Além disso,  $x_0$  pertencerá ao conjunto controlável  $\mathcal{C}(t_1)$ , se, e somente se, existir um controle  $u \in \mathcal{U}$ , tal que  $x(t_1) = 0$ , ou seja

$$0 = e^{t_1 A} \left( x_0 + \int_0^{t_1} e^{-sA} B u(s) ds \right)$$

e, como a função exponencial nunca irá se anular, podemos reescrever a equação solução acima por

$$x_0 = - \int_0^{t_1} e^{-sA} B u(s) ds. \quad (2.3)$$

É muito importante guardarmos essa informação, pois a utilizaremos no decorrer de todo o capítulo para demonstrar algumas proposições que serão apresentadas.

### 2.1.1 Conjunto Controlável

Definida a controlabilidade de um sistema, estudaremos, agora, algumas propriedades dos conjuntos controláveis.

**Proposição 2.1.1** *Se  $x_0$  pertence ao conjunto controlável  $\mathcal{C}$  e temos  $y$  um ponto na trajetória, ou seja, no caminho percorrido, de  $x_0$  até 0, então  $y \in \mathcal{C}$ .*

**Demonstração.** Suponhamos  $x(t)$  uma trajetória, com controle  $u(t)$ . Por hipótese, temos que  $x_0 \in \mathcal{C}$ , logo,  $x(t_1) = 0$ , com  $t_1 \geq 0$ . Além disso, sabemos também que  $y$  é um ponto nessa trajetória, portanto existe um tempo  $t_2$  tal que  $x(t_2) = y$ . Tomaremos, então, outro controle  $v(t) = u(t + t_2)$ . Como  $x(t_2) = y$ , podemos seguir a trajetória de  $x_0$  de forma que, em um tempo  $t_1 - t_2$ , alcançamos a origem. Isto posto, teremos que  $y \in \mathcal{C}(t_1 - t_2)$  e, por definição,  $y \in \mathcal{C}$ .  $\square$



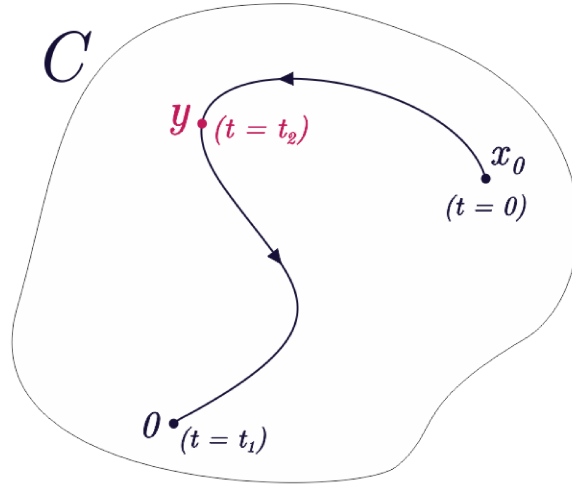


Figura 2.1: Ilustração da Proposição 2.1.1. Fonte: Autoria própria

**Definição 2.1.3** *Seja  $a$  um ponto do conjunto  $A \in \mathbb{R}^n$ , dizemos que  $A$  é **aberto**, se todos os seus pontos forem pontos interiores, ou seja, existe  $r > 0$ , tal que a bola  $\mathcal{B}(a, r) \subset A$ . Em outras palavras,  $A = \text{int}A$ , onde  $\text{int}A$  é a notação para o interior do conjunto  $A$ .*

**Proposição 2.1.2**  *$\mathcal{C}$  é aberto, se e somente se,  $0 \in \text{int}\mathcal{C}$ .*

**Demonstração.** Inicialmente, provemos que se  $\mathcal{C}$  é aberto, então  $0 \in \text{int}\mathcal{C}$ . Sabemos que  $0 \in \mathcal{C}$  e, além disso, pela hipótese, temos que  $\mathcal{C} = \text{int}\mathcal{C}$ , logo,  $0 \in \text{int}\mathcal{C}$ .

Basta, agora, provarmos que se  $0 \in \text{int}\mathcal{C}$ , então  $\mathcal{C}$  é aberto. Por definição, se  $0 \in \text{int}\mathcal{C}$ , então existe  $r > 0$ , tal que  $\mathcal{B}(0, r) \subset \mathcal{C}$ . Considere  $x_0 \in \mathcal{C}$  e sejam  $u(t)$ , um controle que leva  $x_0$  até  $0$  em um determinado tempo  $t_1$  e  $y(0) = y_0$ , uma solução da equação tal que  $y_0 \in \mathcal{B}(x_0, r_0)$ . Como  $f$  é contínua, temos que  $y(t_1) = y_1$ , com  $y_1 \in \mathcal{B}(0, r)$  para um  $r_0$  suficientemente pequeno.

Como sabemos que  $\mathcal{B}(0, r) \subset \mathcal{C}$ , conseguimos encontrar um outro controle  $\hat{u}(t)$  que leve  $y_1$  até  $0$  em um tempo  $t_2$  desejado. Tomemos, assim, o controle  $v(t)$  definido da seguinte forma:

$$v(t) = \begin{cases} u(t), & \text{para } 0 \leq t \leq t_1 \\ \hat{u}(t - t_1), & \text{para } t_1 \leq t \leq t_1 + t_2. \end{cases}$$

Logo, se usarmos o controle  $v(t)$ , conseguimos levar  $y_0$  até 0 no tempo  $t_1 + t_2$ , de forma que  $y_0 \in \mathcal{C}(t_1 + t_2)$  e  $\mathcal{B}(x_0, r_0) \subset \mathcal{C}$ , para todo  $x_0 \in \mathcal{C}$ . Concluimos, assim, que  $\mathcal{C}$  é aberto, se  $0 \in \text{int } \mathcal{C}$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

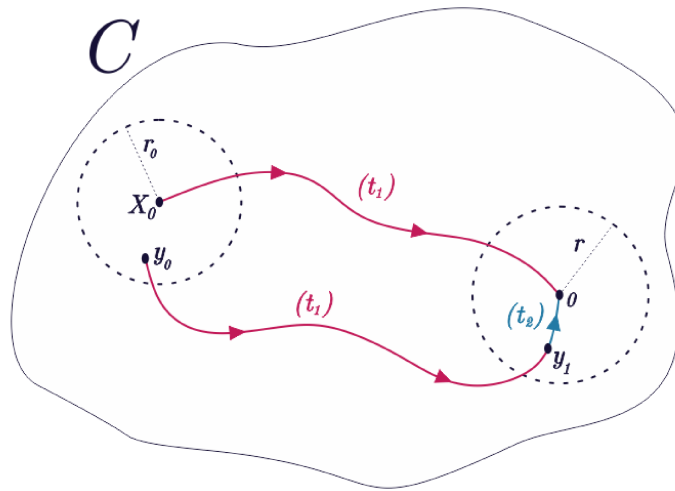


Figura 2.2: Ilustração da Proposição 2.1.2. Fonte: Autoria própria

**Proposição 2.1.3** Se  $t_1 \leq t_2$ , então  $\mathcal{C}(t_1) \subset \mathcal{C}(t_2)$ .

**Demonstração.** Seja  $x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$  um ponto qualquer, com controle  $u(t)$ . Definiremos um outro controle  $v$  por

$$v(t) = \begin{cases} u(t), & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0, & t_1 < t \leq t_2 \end{cases}.$$

Aplicando  $v$  em  $x_0$ , temos

$$\begin{cases} x(t_1) = 0 \\ x' = Ax, & t_1 < t \leq t_2 \end{cases}.$$

Logo,  $x(t) = 0$  será solução de  $x' = Ax$  para  $t_1 < t \leq t_2$  e  $v$  será integrável e admissível em  $\mathcal{C}(t_1)$ , ou seja, pertence ao conjunto de controle escolhido. Desta forma, também teremos que  $x_0 \in \mathcal{C}(t_2)$  e, assim, concluímos que o conjunto controlável em qualquer tempo também contém o conjunto controlável nos tempos anteriores.  $\square$

**Exemplo 2.1.1** *Dadas as seguintes equações de estado:*

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + u_1 \\ x'_2 = x_2 + u_1 \end{cases},$$

com  $u_1 \in \mathcal{U}_b$ , ou seja,  $|u_1| \leq 1$ .

O sistema acima é equivalente a  $x' = Ax + Bu$ , com  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ .

De (2.3), sabemos que a solução de um sistema da forma  $x' = Ax + Bu$  é dada por:

$$x_0 = - \int_0^{t_1} e^{-sA} Bu(s) ds,$$

com  $x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$ . Do exemplo, como  $A = I$ , matriz identidade de ordem 2, temos:

$$x_1 = x_2 = - \int_0^{t_1} e^{-Is} Bu_1(s) ds.$$

Mas sabemos que  $e^{-Is} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-s)^k I^k}{k!} = I \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-s)^k}{k!} = Ie^{-s}$ . Logo,  $x_1 = x_2 = - \int_0^{t_1} e^{-s} u_1(s) ds$  e, como  $|u_1| \leq 1$ :

$$|x_1| = \left| - \int_0^{t_1} e^{-s} u_1(s) ds \right| \leq \int_0^{t_1} |e^{-s}| |u_1(s)| ds = \int_0^{t_1} e^{-s} ds = -e^{-t_1} + 1.$$

Dessa forma, podemos concluir que  $\mathcal{C}(t_1) = \{(x_1, x_2); |x_1| \leq -e^{-t_1} + 1\}$  e  $\mathcal{C} = \{(x_1, x_2); |x_1| < 1\}$ .

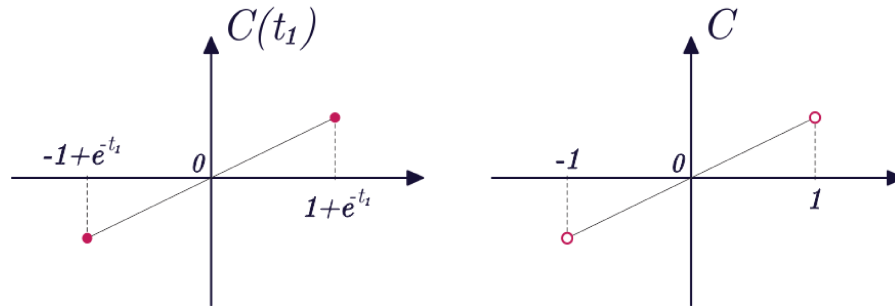


Figura 2.3: Ilustração do Exemplo 2.1.1. Fonte: Autoria própria

Vale observar que, para qualquer ponto que não está em  $\mathcal{C}$ , o sistema será **incontrolável**, ou seja, qualquer desvio da origem o levará a um estado de desequilíbrio.

## 2.2 Matriz de Controlabilidade

Nesta seção definiremos o que é uma matriz de controlabilidade e apresentaremos algumas propriedades que ela possui, porém, antes de começarmos, é necessário entendermos o que é o posto de uma matriz.

**Definição 2.2.1** *O posto de uma matriz corresponde ao número de linhas não-nulas que a mesma possui quando escrita de forma escalonada ou, em outras palavras, seu número de linhas (ou colunas) linearmente independentes.*

Vale observar que o número de linhas e colunas linearmente independentes sempre serão igual e, dada uma matriz  $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ , o valor máximo que seu posto pode atingir é igual ao  $\min\{n, m\}$ .

Apresentado o conceito que precisávamos, sejam  $A \in M_n(\mathbb{R})$  e  $B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$  matrizes. Dado o sistema  $x' = Ax + Bu$ , definimos a **matriz de controlabilidade** como

$$M = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B].$$

Dizemos, ainda, que o sistema será **controlável** se o posto da matriz for igual a  $n$ .

**Proposição 2.2.1**  $0 \in \text{int } \mathcal{C}$  se, e somente se,  $\text{posto}(M) = n$ .

**Demonstração.** Primeiro, provemos que, se  $0 \in \text{int } \mathcal{C}$ , então  $\text{posto}(M) = n$ .

Suponhamos, por absurdo, que  $\text{posto}(M) \neq n$ . Logo, como visto anteriormente, não conseguiremos  $n$  colunas de  $M$  que são linearmente independentes e existirá, portanto, pelo menos um vetor  $y \in \mathbb{R}^n$ , com  $\|y\| = 1$ , tal que este vetor seja ortogonal às colunas de  $M$ . Assim, sendo, como sabemos que o produto escalar de vetores ortogonais é nulo, temos:

$$y^t M = y^t A^k B = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Como toda matriz é raiz do próprio polinômio característico, pelo Teorema de Cayley-Hamilton, conseguimos que

$$y^t A^k B = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

E sabemos que

$$e^{-sA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-s)^k A^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}$$

ou seja,  $e^{-sA}$  é uma combinação linear de  $A^k$ , logo, das duas últimas equações, temos:

$$y^t e^{-sA} B = 0.$$

De (2.3), sabemos que, se  $x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$ , então

$$x_0 = - \int_0^{t_1} e^{-sA} B u(s) ds,$$

dessa forma, conseguimos que,

$$y^t x_0 = - \int_0^{t_1} y^t e^{-sA} B u(s) ds = 0,$$

para todo  $x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$ . Como esse produto é zero, temos que  $\mathcal{C}(t_1)$  fica no hiperplano com normal  $y$ , para todo  $t_1 > 0$ , por consequência, o conjunto controlável  $\mathcal{C}$  fica no mesmo hiperplano, logo, não será possível conseguir uma bola de centro 0 e raio  $r$  contida em  $\mathcal{C}$ , para todo  $r$ , visto que a dimensão do hiperplano é sempre menor que a de  $\mathcal{B}(0, r)$ , nesse caso, não tem como encaixar uma esfera no plano dado. Por consequência,  $0 \notin \text{int } \mathcal{C}$ , o que contradiz a hipótese inicial, portanto  $\text{posto}(M) = n$ .

Basta provar agora que  $0 \in \text{int } \mathcal{C}$ .

Suponhamos, por absurdo, que  $0 \notin \text{int } \mathcal{C}$ . Como  $\mathcal{C}(t_1) \subset \mathcal{C}$ , para todo  $t_1$ , então  $0 \notin \text{int } \mathcal{C}(t_1)$ , mas  $0 \in \mathcal{C}(t_1)$  o que implica que 0 tem que estar na fronteira de  $\mathcal{C}(t_1)$ . Além disso, conseguimos um hiperplano suporte à  $\mathcal{C}(t_1)$  passando por 0, com normal  $b(t_1)$ , para todo  $t_1$ . Dessa forma,  $b^t x_0 \leq 0$ , para todo  $x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$ , visto que o ângulo entre esses vetores será obtuso e, quando realizarmos o produto escalar, teremos  $\cos \theta < 0$ . Mas já vimos que, como  $x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$ , vale que

$$x_0 = - \int_0^{t_1} e^{-sA} B u(s) ds.$$

Logo,

$$-b^t x_0 = \int_0^{t_1} b^t e^{-sA} B u(s) ds \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{U}.$$

Mas também temos que  $-u \in \mathcal{U}$ , portanto, realizando o jogo de sinais necessário, temos:

$$b^t x_0 = \int_0^{t_1} b^t e^{-sA} B u(s) ds \leq 0.$$

E das desigualdades acima, podemos concluir que a única possibilidade é que

$$\int_0^{t_1} b^t e^{-sA} B u(s) ds = 0,$$

o que implica que

$$b^t e^{-sA} B = 0, \tag{2.4}$$

para todo  $s$  pertencente ao intervalo  $[0, t_1]$ , dessa forma, conseguimos escolher  $s = 0$  de forma que  $b^t B = 0$ . Além disso, para esse mesmo valor de  $s$ , se derivarmos (2.4)

$k$  vezes, obtemos

$$b^t A^k B = 0,$$

mas  $M = A^k B$ , logo, da igualdade acima, concluímos que  $b$  é ortogonal a todas as colunas de  $M$ , que, neste caso, não serão linearmente independentes, ou seja,  $\text{posto}(M) \neq n$ , o que contradiz a hipótese inicial, portanto  $0 \in \text{int } \mathcal{C}$ .  $\square$

**Proposição 2.2.2** *Se  $\text{posto}(M) = n$  e  $u \in \mathcal{U}_u$ , então  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$ .*

**Demonstração.** Por hipótese, temos que  $\text{posto}(M) = n$  e por consequência, pela proposição que acabamos de demonstrar,  $0 \in \text{int } \mathcal{C}$ . Dessa forma, conseguimos  $r > 0$  tal que exista uma bola  $\mathcal{B}(0, r) \subset \mathcal{C}$ . Além disso, seja  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  um ponto arbitrário e definindo  $y_0 = cx_0$ , com  $c = \frac{r}{2} \frac{1}{\|x_0\|}$ , temos:

$$\|y_0\| = \|cx_0\| = c\|x_0\| = \frac{r}{2} \frac{\|x_0\|}{\|x_0\|} = \frac{r}{2}.$$

Logo, como a norma de  $y_0$  é menor que o raio  $r$  da bola determinada, temos que  $y_0 \in \mathcal{B}(0, r)$ , tornando-o controlável com um controle  $v \in \mathcal{U}_u$ . Vale, portanto, que

$$y_0 = - \int_0^{t_1} e^{-sA} B v(s) ds.$$

Mas como  $y_0 = cx_0$ ,

$$cx_0 = - \int_0^{t_1} e^{-sA} B v(s) ds \Rightarrow x_0 = - \int_0^{t_1} e^{-sA} B \frac{v(s)}{c} ds.$$

Tomando  $\frac{v(s)}{c} = u(s) \in \mathcal{U}_u$ , temos que

$$x_0 = - \int_0^{t_1} e^{-sA} B u(s) ds,$$

ou seja,  $x_0$  é controlável e, como  $x_0$  também é arbitrário, conseguimos que  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$ .  $\square$

Para as três proposições a seguir, iremos considerar apenas o conjunto de controle  $\mathcal{U}_b$ .

**Proposição 2.2.3** *Se  $\text{posto}(M) = n$  e a parte real de cada autovalor  $\lambda_i$  de  $A$  for menor que 0, então  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$ .*

**Demonstração.** Suponhamos o caso em que  $A$  é diagonalizável e consideremos  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  um ponto arbitrário. Dada a equação

$$x' = Ax, \quad (2.5)$$

conseguimos uma transformação  $x = Py$ , onde  $P$  é a matriz formada pelos autovetores linearmente independentes correspondentes aos autovalores  $\lambda_i$ , de  $A$ . Temos, assim, que

$$x' = Py' \quad (2.6)$$

e, igualando (2.5) e (2.6):

$$Py' = Ax = APy \Rightarrow y' = P^{-1}APy \Rightarrow y' = Dy,$$

com  $D$  sendo a matriz diagonal dada por

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Sabemos que a solução da equação diferencial  $y' = Dy$  é dada por

$$y(t) = e^{Dt}y_0, \quad (2.7)$$

com  $y_0 = P^{-1}x_0$ . Dessa forma, basta determinarmos  $e^{Dt}$ . Sabemos que

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$



e que a série de Taylor para a função exponencial é dada por  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ , logo,

$$e^{Dt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k t^k}{k!} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k t^k}{k!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^k t^k}{k!} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k t^k}{k!} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

Por hipótese, temos que  $\text{posto}(M) = n$ , logo, pela proposição (2.2.1), temos que  $0 \in \text{int } \mathcal{C}$ , dessa forma, existe um  $\delta > 0$  arbitrariamente pequeno de maneira que conseguimos uma bola  $\mathcal{B}(0, \delta) \subset \mathcal{C}$ . Ainda pela hipótese, como a parte real de  $\lambda_i$  é negativa, temos que  $e^{\lambda_i t}$  tende a zero quando  $t \rightarrow \infty$  e, assim, de (2.7), concluímos que  $\|y(t)\| \rightarrow 0$ . Além disso, da equação  $x = Py$ , temos:

$$\|x(t)\| = \|Py(t)\| \leq \|P\| \|y(t)\|,$$

mas como  $\|y(t)\| \rightarrow 0$ , então  $\|x(t)\| \rightarrow 0$ , ou seja, conseguimos um  $t_1 > 0$  de modo que  $\|x(t_1)\| < \delta$ . Isto posto, existirá um controle  $u \in \mathcal{U}_b$  que leva  $x(t_1)$  até a origem 0 em um tempo  $t_2$  definido. Considerando, assim, o controle  $v$  definido por

$$v(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t_1 \\ t, & t_1 < t \leq t_2 \end{cases},$$

conseguimos levar  $x_0$  até 0 em um tempo  $t_1 + t_2$  determinado, ou seja,  $x_0 \in \mathcal{C}(t_1 + t_2) \subset \mathcal{C}$  e como  $x_0$  é arbitrário em  $\mathbb{R}^n$ , temos que  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$ .

Para o caso em que a matriz  $A$  não é diagonalizável, a matriz diagonal  $D$  terá alguns elementos não nulos acima da diagonal principal, porém, o resto da demonstração

ainda será válida e  $\|y(t)\| \rightarrow 0$ , logo, podemos seguir com a demonstração normalmente, chegando à mesma conclusão de que  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Proposição 2.2.4** *Se  $\text{posto}(M) = n$  e a parte real de cada autovalor  $\lambda_i$  de  $A$  for menor ou igual a zero, então  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$ .*

**Demonstração.** Suponhamos, por absurdo, que  $\mathcal{C} \neq \mathbb{R}^n$ , então existe  $y \in \mathbb{R}^n$  tal que  $y \notin \mathcal{C}$ . Conseguimos, assim, um hiperplano, de normal  $b$ , que separa  $y$  e  $\mathcal{C}$ , de forma que

$$b^t x_0 \leq 0, \forall x_0 \in \mathcal{C} \quad \text{e} \quad b^t y > 0. \quad (2.8)$$

Mas, de (2.3), temos que  $x_0 = -\int_0^{t_1} e^{-sA} B u(s) ds$ , logo, basta mostrarmos que

$$b^t x_0 = x_0 = -\int_0^{t_1} b^t e^{-sA} B u(s) ds > 0,$$

para um  $t_1$  suficientemente grande e para um controle  $u \in \mathcal{U}$ , que teremos uma contradição com as condições apresentadas mediante a suposição inicial.

Definimos,  $b^t e^{-sA} B = z^t(s)$ , de forma que  $z(t) \neq 0$ , para  $0 \leq t \leq t_1$ . Podemos, assim, escolher um controle  $u_i(t) = -\text{sgn } z_i(t)$ , no qual

$$b^t x_0 = \int_0^{t_1} \|z(t)\| dt.$$

Lembrando que  $\text{sgn}$  é a função sinal que irá nos retornar o sinal de  $z_i(t)$  na coordenada  $i$ . Considerando, assim, os autovalores de parte real estritamente negativa, teremos que cada componente de  $z_i(t)$  será uma combinação de termos da forma  $q(t)e^{\lambda_i t}$ , com  $q$  polinômio e  $\lambda_i$  autovalor de  $A$ , logo, podemos concluir que  $q(t)e^{\lambda_i t} \rightarrow \infty$ , quando  $t \rightarrow \infty$ .

Já as componentes de  $z_i(t)$ , quando a parte real dos autovalores é zero, serão polinômios ou termos periódicos de  $t$ . Neste caso, como estamos trabalhando com funções polinomiais positivas, a integral acima também será positiva em um intervalo não

nulo, logo,  $b^t x_0 = \int_0^{t_1} \|z(t)\| dt$  será arbitrariamente grande para um  $t_1$  também suficientemente grande determinado. Temos, assim, uma contradição com as inequações em (2.8), portanto,  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Proposição 2.2.5** *Se posto(M) = n e A tiver pelo menos um autovalor com parte real positiva, então  $\mathcal{C} \neq \mathbb{R}^n$ .*

**Demonstração.** Sejam  $\lambda$  um autovalor de  $A$  com parte real positiva e  $y$ , um autovetor à esquerda correspondente, então  $y^t A = \lambda y^t$ . Logo, realizando as devidas operações, temos:

$$y^t A A = \lambda y^t A \Leftrightarrow y^t A^2 = \lambda \lambda y^t \Leftrightarrow y^t A^2 = \lambda^2 y^t.$$

Suponhamos, por indução, que  $y^t A^{k-1} = \lambda^{k-1} y^t$ , dessa forma:

$$y^t A^{k-1} A = \lambda^{k-1} y^t A \Leftrightarrow y^t A^k = \lambda^{k-1} \lambda y^t \Leftrightarrow y^t A^k = \lambda^k y^t.$$

Provamos, assim, que  $y^t A^k = \lambda^k y^t$ , mas também sabemos que  $e^{-sA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-s)^k A^k}{k!}$ , logo, segue que

$$\begin{aligned} y^t e^{-sA} &= y^t \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-s)^k A^k}{k!} \right) \\ &= y^t \left( I_d - As + \frac{A^2 s^2}{2!} - \frac{A^3 s^3}{3!} + \dots \right) \\ &= y^t I_d - y^t A s + \frac{y^t A^2 s^2}{2!} - \frac{y^t A^3 s^3}{3!} + \dots \\ &= y^t - \lambda y^t s + \frac{\lambda^2 y^t s^2}{2!} - \frac{\lambda^3 y^t s^3}{3!} + \dots \\ &= y^t \left( 1 - \lambda s + \frac{\lambda^2 s^2}{2!} - \frac{\lambda^3 s^3}{3!} + \dots \right) \\ &= y^t \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k (-s)^k}{k!} \right) \\ &= y^t e^{-\lambda s} \end{aligned}$$

Temos, assim, que

$$y^t e^{-sA} = y^t e^{-\lambda s}.$$

Além disso, para  $x_0 \in \mathcal{C}$ , segue que  $x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$ , para algum  $t_1 > 0$ , logo, vale que  $x_0 = -\int_0^{t_1} e^{-sA} B u(s) ds$  e temos que:

$$y^t x_0 = -\int_0^{t_1} y^t e^{-sA} B u(s) ds = -\int_0^{t_1} y^t e^{-\lambda s} B u(s) ds. \quad (2.9)$$

Analisando a integral acima, observamos que, como estamos integrando em relação a  $s$ ,  $e^{-\lambda s}$  tende a 0 quando  $t_1$  tende a infinito, visto que a parte real de  $\lambda$  é positiva, ou seja,  $e^{-\lambda s}$  é limitada. Dessa forma, sem perda de generalidade, podemos supor que  $y^t B$  é constante e  $u(s) \in \mathcal{U}_b$ , de forma que  $y^t e^{-\lambda s} B u(s)$  seja limitada, resultando que a integral acima também seja limitada, isto é:

$$-\int_0^{t_1} y^t e^{-\lambda s} B u(s) ds < c, \quad \text{para algum } c > 0$$

Concluimos, assim, de (2.9), que  $y^t x_0 < c$  e, por isso, conseguimos um hiperplano de normal  $y$  que separa  $\mathcal{C}$ , de maneira que o conjunto controlável  $u$  fique em apenas um dos semi-espacos deste hiperplano, ou seja,  $\mathcal{C} \neq \mathbb{R}^n$ .  $\square$

## 2.3 Conjunto dos Estados Atingíveis

Nas seções anteriores definimos controlabilidade à origem, porém, também conseguimos representar a controlabilidade a um ponto. Escrevemos, assim,  $\mathcal{C}(t_1, x_1)$ , como sendo o conjunto dos pontos que podem ser levados até  $x_1$  no tempo  $t_1$ , de maneira que  $x_0 \in \mathcal{C}(t_1, x_1)$ , se, e somente se, existir um controle  $u \in \mathcal{U}$ , tal que  $x(t_1) = x_1$ , e, diretamente de (2.2), temos:

$$x_1 = e^{t_1 A} \left( x_0 + \int_0^{t_1} e^{-sA} B u(s) ds \right).$$

Realizando as manipulações necessárias,

$$x_0 = e^{-t_1 A} x_1 - \int_0^{t_1} e^{-sA} B u(s) ds.$$

É interessante comentarmos que muitos resultados que foram provados para  $\mathcal{C}(t_1)$  também são válidos para  $\mathcal{C}(t_1, x_1)$ , porém não são todos, como é o caso de que, se não existir um controle  $u$  tal que  $Ax_1 + Bu = 0$ , então não poderemos afirmar que  $\mathcal{C}(t_1, x_1) \subset \mathcal{C}(t_2, x_1)$ , para  $t_2 > t_1$ .

**Definição 2.3.1** Definimos  $\mathcal{R}(t_1, x_0)$  como sendo o conjunto dos pontos que são atingidos a partir de um ponto inicial  $x_0$  em um tempo  $t_1$  e, de (2.2), conseguimos que, quando  $x_1 \in \mathcal{R}(t_1, x_0)$ , vale que

$$x_1 = e^{t_1 A} \left( x_0 + \int_0^{t_1} e^{-sA} B u(s) ds \right). \quad (2.10)$$

Como vimos anteriormente,  $x_0$  pertencer ao conjunto  $\mathcal{C}(t_1, x_1)$  é referente ao caminho percorrido a partir do ponto  $x_0$  até chegar em  $x_1$ , num tempo  $t_1$ . Analisando a definição 2.3.1, conseguimos observar uma reciprocidade entre estes dois conjuntos, visto que, quando  $x_1 \in \mathcal{R}(t_1, x_0)$ , temos que  $x_0 \in \mathcal{C}(t_1, x_1)$ .

Além disso, conseguimos definir o **sistema tempo-inverso**, que corresponde ao sistema de equação de estado  $x' = -Ax - Bu$ , e, para este caso, precisaremos determinar quando  $x_0 \in \mathcal{C}(t_1, x_1)$  e  $x_1 \in \mathcal{R}(t_1, x_0)$ . Mas, de (2.2), temos que a solução do sistema tempo-inverso é dada por

$$x(t) = e^{-tA} \left( x_0 - \int_0^t e^{sA} B u(s) ds \right).$$

Assim sendo,  $x_0 \in \mathcal{C}(t_1, x_1)$  se

$$x_0 = e^{t_1 A} x_1 + \int_0^{t_1} e^{-sA} B u(s) ds, \quad (2.11)$$

e  $x_1 \in \mathcal{R}(t_1, x_0)$  se

$$x_1 = e^{-t_1 A} \left( x_0 - \int_0^{t_1} e^{sA} B u(s) ds \right). \quad (2.12)$$

Note que, se fizermos uma mudança de variável em (2.11) para  $s = t_1 - \tau$ , então

$$\begin{aligned} x_0 &= e^{t_1 A} x_1 + \int_{t_1}^0 e^{t_1 A} e^{-\tau A} B u(t_1 - \tau) (-d\tau) \\ &= e^{t_1 A} x_1 + e^{t_1 A} \int_0^{t_1} e^{-\tau A} B u(t_1 - \tau) d\tau \\ &= e^{t_1 A} \left( x_1 + \int_0^{t_1} e^{-\tau A} B \hat{u}(\tau) d\tau \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

com  $\hat{u}(\tau) = u(t_1 - \tau)$ , conseguimos, assim, criar uma relação entre o sistema tempo-inverso e  $x' = Ax + Bu$ . Comparando, por fim, (2.10) com (2.13), conseguimos observar que o conjunto controlável para o sistema tempo-inverso é igual ao conjunto dos estados atingíveis para o sistema  $x' = Ax + Bu$ , ou seja, todas as propriedades gerais que são válidas para um, também são válidas para o outro.

**Exemplo 2.3.1** *Dado o sistema*

$$\begin{cases} x' = x + u \\ x_0 = \frac{1}{2}, |u| \leq 1 \end{cases} .$$

De (2.10) temos que  $x_1 \in \mathcal{R}(t_1, \frac{1}{2})$  se

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{t_1} \left( \frac{1}{2} + \int_0^{t_1} e^{-s} u(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{t_1} + e^{t_1} \int_0^{t_1} e^{-s} u(s) ds. \end{aligned}$$

Aplicando o módulo dos dois lados da equação, como  $|u| \leq 1$  temos:

$$\begin{aligned} \left| x_1 - \frac{1}{2} e^{t_1} \right| &\leq e^{t_1} \int_0^{t_1} e^{-s} ds \\ &= e^{t_1} (-e^{-t_1} + 1) \\ &= -1 + e^{t_1}. \end{aligned}$$

A inequação modular fornece

$$1 - e^{t_1} \leq x_1 - \frac{1}{2}e^{t_1} \leq e^{t_1} - 1$$

e isolando  $x_1$ , obtemos:

$$1 - \frac{1}{2}e^{t_1} \leq x_1 \leq -1 + \frac{3}{2}e^{t_1}.$$

Podemos, assim, concluir que

$$\mathcal{R}\left(t_1, \frac{1}{2}\right) = \left[1 - \frac{1}{2}e^{t_1}, -1 + \frac{3}{2}e^{t_1}\right].$$

Analisaremos, agora, quando  $x_1$  pertence a  $\mathcal{R}\left(t_1, \frac{1}{2}\right)$  para o caso em que trabalhamos com o sistema tempo-inverso. De (2.12), temos que

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-t_1} \left( \frac{1}{2} - \int_0^{t_1} e^s u(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{2}e^{-t_1} - e^{-t_1} \int_0^{t_1} e^s u(s) ds. \end{aligned}$$

Novamente, aplicando módulo dos dois lados da equação e considerando que  $|u| \leq 1$ , temos:

$$\begin{aligned} \left| x_1 - \frac{1}{2}e^{-t_1} \right| &\leq e^{-t_1} \int_0^{t_1} e^s ds \\ &= e^{-t_1}(e^{t_1} - 1) \\ &= 1 - e^{-t_1}. \end{aligned}$$

E realizando os mesmos procedimentos acima de abrir a inequação modular e isolar  $x_1$ , obtemos que o conjunto dos estados atingíveis procurado é o intervalo fechado

$$\left[ -1 + \frac{3}{2}e^{-t_1}, 1 - \frac{1}{2}e^{-t_1} \right],$$

ou seja, o conjunto controlável no ponto  $\frac{1}{2}$  para o sistema apresentado. Observando os gráficos abaixo, podemos perceber que todos os pontos de  $\mathbb{R}$  são atingíveis a partir  $\frac{1}{2}$  em um determinado tempo finito, porém, somente os pontos pertencentes ao intervalo  $(-1, 1)$  serão controláveis a  $\frac{1}{2}$ .

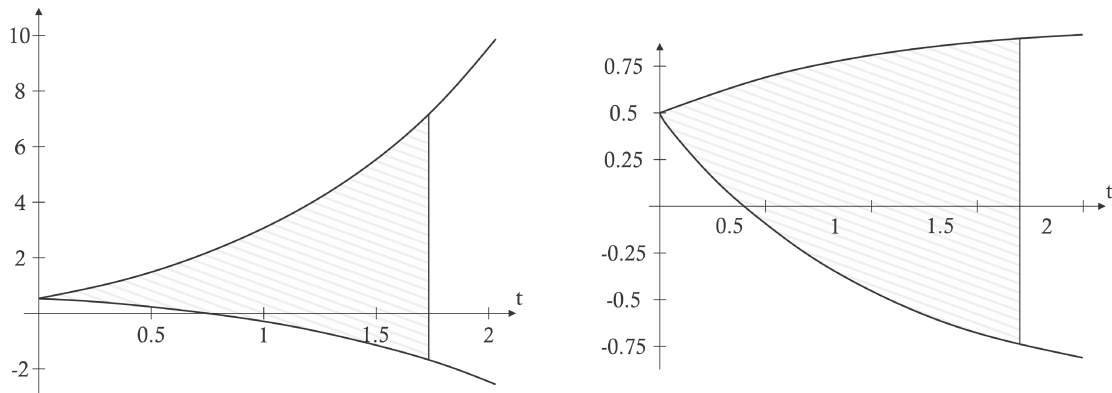


Figura 2.4: A linha vertical na imagem a esquerda representa o conjunto  $\mathcal{R}(t_1, \frac{1}{2})$  e, na imagem a direita, representa o conjunto  $\mathcal{C}(t_1, \frac{1}{2})$ , considerando um tempo  $t_1$  arbitrariamente grande. Fonte: Autoria própria.





# Referências Bibliográficas

- [1] BOYCE, W. E. E DIPRIMA, R.C., *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, tradução e revisão Valéria de Magalhães Iório, Rio de Janeiro, LTC, 2010.
- [2] FERREIRA, J. S. P., *Sistemas Dinâmicos Lineares no  $\mathbb{R}^n$* , 1 ed., Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.
- [3] HANSER, É. T., *Equações diferenciais autônomas e aplicações*, Rio Claro: Dissertação (mestrado), Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 87 pg., 2016.
- [4] LEITÃO, A. E SILVA, G. N., *Tópicos em Teoria de Controle*, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Departamento de Computação e Estatística, Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2004.
- [5] MONTEIRO, L. H. A., *Sistemas Dinâmicos*, 2 ed., São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.
- [6] ZILL, D. G., *Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem*, tradução Cyro de Carvalho Patarra, revisão técnica Antônio Luiz Pereira, São Paulo: Cengage Learning, 2009.