

**IZABELA BATISTA DA SILVA**

**IDENTIFICAÇÃO DE TRINCAS EM MÁQUINAS  
ROTATIVAS BASEADA EM TÉCNICAS DE SEGUNDA  
DERIVADA DO MODO DE VIBRAR E COMBINAÇÃO DE  
RESSONÂNCIA**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**2023**

**IZABELA BATISTA DA SILVA**

**IDENTIFICAÇÃO DE TRINCAS EM MÁQUINAS ROTATIVAS  
BASEADA EM TÉCNICAS DE SEGUNDA DERIVADA DO MODO DE  
VIBRAR E COMBINAÇÃO DE RESSONÂNCIA**

**Tese** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **DOUTORA EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Orientador: Aldemir Cavalini Júnior

**UBERLÂNDIA - MG**

**2023**

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU  
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

S586 2023	<p>Silva, Izabela Batista da, 1990- Identificação de trincas em máquinas rotativas baseada em técnicas de segunda derivada do modo de vibrar e combinação de ressonância [recurso eletrônico] / Izabela Batista da Silva. - 2023.</p> <p>Orientador: Aldemir Aparecido Cavalini Junior. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Engenharia Mecânica. Modo de acesso: Internet. Disponível em: <a href="http://doi.org/10.14393/ufu.te.2023.94">http://doi.org/10.14393/ufu.te.2023.94</a> Inclui bibliografia.</p> <p>1. Engenharia mecânica. I. Cavalini Junior, Aldemir Aparecido ,1983-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU: 621</p>
--------------	--

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:  
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091  
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
 Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica  
 Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902  
 Telefone: (34) 3239-4282 - www.posmecanicaufu.com.br - secposmec@mecanica.ufu.br



### ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Tese de Doutorado Acadêmico, nº 351, PPGEM				
Data:	24/02/2023	Hora de início:	13:30	Hora de encerramento:	16:30
Matrícula do Discente:	11813EMC016				
Nome do Discente:	Izabela Batista da Silva				
Título do Trabalho:	Identificação de trincas em máquinas rotativas baseada em técnicas de segunda derivada do modo de vibrar e combinação de ressonância				
Área de concentração:	Mecânica dos Sólidos e Vibrações				
Linha de pesquisa:	Dinâmica de Sistemas Mecânicos				
Projeto de Pesquisa de vinculação:					

Reuniu-se por meio de videoconferência a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Professores Doutores: Washington Martins da Silva Junior - FEMEC/UFU; João Marcelo Vedovotto - FEMEC/UFU; Edson Hideki Koroishi - UTFPR; Fabian Andres Lara Molina - UFTM; e Aldemir Aparecido Cavalini Junior - FEMEC/UFU, orientador da candidata.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Dr. Aldemir Aparecido Cavalini Junior, apresentou a Comissão Examinadora e a candidata, agradeceu a presença do público, e concedeu à Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação da Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutora.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Aldemir Aparecido Cavalini Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 24/02/2023, às 16:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Edson Hideki Koroishi, Usuário Externo**, em 24/02/2023, às 16:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Fabian Andres Lara Molina, Usuário Externo**, em 24/02/2023, às 16:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **João Marcelo Vedovotto, Professor(a) do Magistério Superior**, em 24/02/2023, às 16:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Washington Martins da Silva Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 24/02/2023, às 16:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **4279397** e o código CRC **8E310C86**.

*À minha família, com toda minha  
dedicação*

## AGRADECIMENTOS

Diante de todo conhecimento agregado e da possibilidade de concluir mais uma etapa da minha carreira acadêmica, venho primeiramente agradecer a Deus por ter permitido minha entrada e permanência neste prestigiado curso.

Agradeço também ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia pela oportunidade concedida, pela estrutura e recursos disponibilizados.

À minha família, em especial à minha mãe Glaucilane, minha avó Milaneza e minha irmã Iandra que sempre me apoiaram em todas as minhas escolhas, se fizeram presentes nos momentos difíceis e são as pessoas que me inspiram gratidão, humildade e força ao longo dos desafiadores percursos da vida.

Aos meus sogros, Cátia e Helvio, e meus cunhados Pedro e Artur, deixo também toda minha gratidão pelo acolhimento e pelo carinho que sempre dedicaram a mim.

Aos meus queridos tios do coração, Edel e Cassius pelo incentivo e acima de tudo, pelas boas risadas juntos.

Ao meu marido e companheiro de vida, Paulo, pela compreensão, paciência, por ter acreditado em mim, por ter sido tão parceiro e por ter se dedicado tanto à nós.

Aos colegas e amigos do laboratório que direta ou indiretamente me ajudaram com meus experimentos e compartilharam seus conhecimentos comigo.

Agradeço imensamente ao meu orientador Aldemir Ap Cavalini Jr por todo ensinamento e por todo tempo dedicado à minha pesquisa. A sua participação foi de grande importância para o desenvolvimento e conclusão desta tese. É um privilégio estar em meio aos mais brilhantes professores e uma grande honra fazer parte do grupo de pesquisas em Dinâmica de Rotação.

Agradeço aos órgãos de fomento: o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG).

Por fim, agradeço às empresas Foz do Chapecó, Baesa, Enercan, Ceran, CSC Energia e CPFL Energia, através do projeto de Pesquisa e Desenvolvimento PD-02949-3007/2021 - “Solução integrada para o diagnóstico de defeitos, análise dinâmica e monitoramento contínuo de unidades geradoras francis” com recursos do programa de P&D da ANEEL, pelo apoio financeiro concedido durante a realização deste trabalho.

SILVA, Izabela Batista da. **Identificação de trincas em máquinas rotativas baseada em técnicas de segunda derivada do modo de vibrar e combinação de ressonância**. 2023. 70 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2023. DOI <http://doi.org/10.14393/ufu.te.2023.94>

## RESUMO

A detecção de falhas, especialmente trincas, em máquinas rotativas é um tema crítico em vários setores industriais, como aeronáutica, geração de energia e manufatura. As trincas podem levar à falha catastrófica de um componente e, por isso, a detecção precoce e precisa é essencial para garantir a segurança e minimizar interrupções inesperadas na produção. Uma técnica comumente empregada para o Monitoramento da Integridade Estrutural (SHM) destes equipamentos se baseia na construção de modelos matemáticos que permitem a análise destes sistemas. Diante deste contexto, este trabalho propôs a comparação de três modelos de trinca disponíveis na literatura e a utilização dos mesmos na demonstração de duas técnicas de SHM: combinação de ressonância e cálculo da derivada de segunda ordem do modo de vibrar. Verificou-se que a ocorrência das combinações de ressonância podem ser associadas como evidência de características não lineares no sistema como trincas transversais por exemplo, no entanto, sem identificação clara de sua localização. A posição da trinca no sistema pôde então ser determinada usando formas modais operacionais (modos de vibração) reconstruídas a partir das respostas de vibração do rotor, também com o auxílio de uma combinação de ressonância. Para a avaliação da metodologia proposta, um modelo de elementos finitos capaz de representar adequadamente o comportamento dinâmico de uma máquina rotativa foi utilizado levando em conta além dos seus componentes, as características do comportamento *breathing* para trincas transversais. Os resultados experimentais e simulados mostraram que as técnicas propostas podem identificar a presença e a localização de trincas transversais em máquinas rotativas, contribuindo para aprimorar a segurança e a eficiência desses equipamentos.

*Palavras-chave: Dinâmica de Rotação, Trincas Transversais, Combinação de Ressonância, Modo de Vibrar, Derivadas de Segunda Ordem*

SILVA, Izabela Batista da. **Crack identification in rotating machines based on mode shape derivatives and combination resonances**. 2023. 139 p. Thesis (PhD in Mechanical Engineering) - Federal University of Uberlândia, Uberlândia, 2023. DOI <http://doi.org/10.14393/ufu.te.2023.94>

### ABSTRACT

Fault detection in rotating machines is a critical topic in many industrial sectors such as aeronautics, power generation and manufacturing. Cracks can lead to catastrophic component failure, so early and accurate detection is essential to ensure safety and minimize unexpected production interruptions. A commonly used technique for Structural Integrity Monitoring (SHM) of these equipment is based on the development of mathematical models. In this context, this work proposed the comparison of three crack models available in the literature and their use in demonstrating two SHM techniques: combination resonance and second-order derivative of the mode shape. It was found that the occurrence of combination resonances can be associated with evidence of non-linear characteristics in the system, such as transverse cracks for example, however, without clearly identifying their location. The crack position in the system could be determined using operational modal shape (vibration modes) reconstructed from the rotor vibration responses, also by using a combination resonance. Concerning the evaluation of the proposed methodology, a finite element model capable of representing the dynamic behavior of a rotating machine was used, taking into account, in addition to its components, the characteristics of the *breathing* behavior for transverse cracks. The experimental and simulated results showed that the proposed techniques can identify the presence and location of transverse cracks in rotating machinery, contributing to improving the safety and efficiency of these equipments.

*Keywords: Rotating Machines, Transversal Cracks, Combination Resonances, Mode Shape, Second-Order Derivative*

## LISTA DE FIGURAS

2.1	Exemplos de máquinas rotativas. . . . .	7
3.1	Graus de liberdade (GDL) associados ao elemento finito construído para representar o eixo. . . . .	19
3.2	Representação de um ponto arbitrário B (Fonte: (LALANNE; FERRARIS, 1998)). . . . .	22
3.3	Representação do elemento de disco (Fonte: Cavalini Jr (2013)) . . . . .	25
3.4	Formas de incorporar o disco ao eixo em elementos finitos (Fonte: (LALANNE; FERRARIS, 1998)) . . . . .	27
3.5	Coeficientes de rigidez e amortecimento do mancal (Fonte: Cavalini Jr (2013)).	28
3.6	Coordenadas relativas à massa de desbalanceamento (Fonte: Cavalini Jr (2013)).	29
4.1	Elemento de eixo e parâmetros geométricos (Fonte: Cavalini Jr (2013)). . . . .	33
4.2	Modos de carregamentos aplicados à uma trinca (Fonte: Anderson (2005)). . .	34
4.3	Flexibilidades adicionais introduzidas pela trinca em um elemento de eixo. . . .	37
4.4	Flexibilidades adicionais introduzidas pela trinca em um elemento de eixo com 4 GDL por nó. . . . .	38
4.5	Coordenadas rotativas para o modelo de trinca (Fonte: Cavalini Jr (2013)). . . .	39
4.6	Representação da abertura e fechamento da trinca (Fonte: Bachschmid, Pennacchi e Tanzi (2010)). . . . .	39
4.7	Representação da deflexão estática para rotores pesados - fonte: Bachschmid, Pennacchi e Tanzi (2010). . . . .	43
4.8	Curvas das rigidezes em coordenadas rotativas segundo o modelo de Gasch. . .	46
4.9	Curvas das rigidezes em coordenadas fixas segundo o modelo de Gasch. . . . .	47
4.10	Curvas das rigidezes em coordenadas rotativas segundo o modelo de Mayes. . .	48
4.11	Curvas das rigidezes em coordenadas fixas segundo o modelo de Mayes. . . . .	48
4.12	Curvas das rigidezes em coordenadas rotativas segundo o modelo <i>open</i> . . . . .	50

4.13	Curvas das rigidezes em coordenadas fixas segundo o modelo <i>open</i> . . . . .	50
4.14	Elemento de viga equivalente $L_c$ (Fonte: Bachschmid, Pennacchi e Tanzi (2010)).	51
4.15	Tamanho do elemento equivalente $L_c$ (Fonte: Bachschmid et al. (2003)). . . . .	52
4.16	Divisão da seção transversal da trinca: ■ - seção da trinca em tração, ■ - seção da trinca em compressão, ■ - seção não trincada, ● - centro geométrico (Fonte: Morais et al. (2010)). . . . .	53
4.17	Divisão da seção transversal da trinca - representação em números complexos (Fonte: Cavalini Jr (2013)). . . . .	54
4.18	Curvas dos momentos de Inércia segundo modelo Flex. . . . .	55
5.1	Esquema para reconstruir o modo de vibrar. . . . .	63
5.2	Fluxograma para técnica de detecção. . . . .	64
6.1	Bancada experimental utilizado nas simulações numéricas. . . . .	65
6.2	Discretização do rotor utilizado nas simulações numéricas. . . . .	66
6.3	Diagrama de Campbell. . . . .	67
6.4	FRFs numéricas e experimentais. . . . .	68
6.5	Diagrama para o módulo de simulação de trincas. . . . .	69
6.6	Diagrama para o módulo de integração com o método Newmark, convergência Newton Raphson e chamada do método de trinca com modelos de Mayes e Gasch.	72
6.7	Diagrama para o módulo de integração com o método Newmark, convergência Newton Raphson e chamada do método de trinca com modelos de Flex. . . . .	73
7.1	Órbitas para os nós 7 e 27. . . . .	75
7.2	Respostas tempotais para os nós 7 e 27, nas direções X e Z. . . . .	75
7.3	DFTs os nós 7 e 27, nas direções X e Z. . . . .	76
7.4	Resposta temporal para o nó $S_{7X}$ . . . . .	77
7.5	Órbitas para o nó $S_7$ . . . . .	77
7.6	Resposta temporal para o nó $S_{27X}$ . . . . .	78
7.7	Órbitas para o nó $S_{27}$ . . . . .	78
7.8	DFTs obtidas para o nó $S_{7X}$ . . . . .	79
7.9	DFTs obtidas para o nó $S_{27X}$ . . . . .	79
7.10	DFT obtidas para o nó $S_{7X}$ considerando uma trinca com 50% de profundidade	80

7.11 Modos de vibrar do eixo utilizando frequência de excitação externa $\Omega_{ext} = 71,725$ Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância $ \Omega - \omega_{\Omega}  = 31,725$ Hz. . . . .	81
7.12 Máxima amplitude dos modos em função da profundidade de trinca considerando $\Omega_{ext} = 71,725$ Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância $ \Omega - \omega_{\Omega}  = 31,725$ Hz. . . . .	81
7.13 Mapa de calor referente à segunda derivada do modo de vibrar utilizando frequência de excitação externa $\Omega_{ext} = 71,725$ Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância $ \Omega - \omega_{\Omega}  = 31,725$ Hz. . . . .	82
7.14 Percentuais de erro sobre a acurácia da localização da trinca - trinca com 50% de profundidade. . . . .	83
7.15 Modos de vibrar do eixo utilizando frequência de excitação externa $\Omega_{ext} = 71,725$ Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância $ \Omega - \omega_{\Omega}  = 31,725$ Hz (Posição da trinca no elemento 15). . . . .	84
7.16 Mapa de calor referente à segunda derivada do modo de vibrar utilizando frequência de excitação externa $\Omega_{ext} = 71,725$ Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância $ \Omega - \omega_{\Omega}  = 31,725$ Hz (Posição da trinca no elemento 15). . . . .	84
7.17 Resposta temporal para o nó $S_{7X}$ . . . . .	85
7.18 Órbitas para o nó $S_7$ . . . . .	85
7.19 Resposta temporal para o nó $S_{27X}$ . . . . .	86
7.20 Órbitas para o nó $S_{27}$ . . . . .	86
7.21 DFTs obtidas para o nó $S_{7X}$ . . . . .	87
7.22 DFTs obtidas para o nó $S_{27X}$ . . . . .	87
7.23 Modos de vibrar do eixo utilizando frequência de excitação externa $\Omega_{ext} = 71,725$ Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância $ \Omega - \omega_{\Omega}  = 31,725$ Hz. . . . .	88
7.24 Máxima amplitude dos modos em função da profundidade de trinca considerando $\Omega_{ext} = 71,725$ Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância $ \Omega - \omega_{\Omega}  = 31,725$ Hz. . . . .	88

7.25	Mapa de calor referente à segunda derivada do modo de vibrar utilizando frequência de excitação externa $\Omega_{ext} = 71,725$ Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância $ \Omega - \omega_{\Omega}  = 31,725$ Hz. . . . .	89
7.26	Percentuais de erro sobre a acertividade da localização da trinca - trinca com 50% de profundidade. . . . .	90
7.27	Resposta temporal para o nó $S_{7X}$ . . . . .	91
7.28	Órbitas para o nó $S_7$ . . . . .	91
7.29	Resposta temporal para o nó $S_{27X}$ . . . . .	92
7.30	Órbitas para o nó $S_{27}$ . . . . .	92
7.31	DFTs obtidas para o nó $S_{7X}$ . . . . .	93
7.32	DFTs obtidas para o nó $S_{27X}$ . . . . .	93
7.33	Modos de vibrar do eixo utilizando frequência de excitação externa $\Omega_{ext} = 71,725$ Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância $ \Omega - \omega_{\Omega}  = 31,725$ Hz. . . . .	94
7.34	Máxima amplitude dos modos em função da profundidade de trinca considerando $\Omega_{ext} = 71,725$ Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância $ \Omega - \omega_{\Omega}  = 31,725$ Hz. . . . .	95
7.35	Mapa de calor referente à segunda derivada do modo de vibrar utilizando frequência de excitação externa $\Omega_{ext} = 71,725$ Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância $ \Omega - \omega_{\Omega}  = 31,725$ Hz. . . . .	96
7.36	Percentuais de erro sobre a acertividade da localização da trinca - trinca com 50% de profundidade. . . . .	96
8.1	Bancada experimental e equipamentos utilizados. . . . .	97
8.2	Rolamento com camada dupla de esferas. . . . .	98
8.3	Conjunto <i>OFV-505/503 Vibrometer Sensor Head</i> e <i>OFV-5000 Modular Vibrometer</i> . . . . .	98
8.4	Medição da vibração ao longo do eixo pelo laser. . . . .	98
8.5	Excitador eletrodinâmico Labworks® modelo ET-126 acoplado ao mancal. . .	99
8.6	Detalhes da trinca no eixo. . . . .	99
8.7	DFTs obtidas utilizando frequência de excitação externa $\Omega_{ext} = 71,725$ Hz. . .	100

8.8	DFTs experimentais obtidas utilizando frequência de excitação externa $\Omega_{ext} = 71,725$ Hz. . . . .	101
8.9	DFTs experimentais obtidas utilizando frequência de excitação externa $\Omega_{ext} = 71,725$ Hz. . . . .	102
8.10	Modo de vibrar do eixo utilizando frequência de excitação externa $\Omega_{ext} = 71,725$ Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância $ \Omega - \omega_{\Omega}  = 31,725$ Hz. . . . .	103
8.11	Mapa de calor referente à segunda derivada do modo de vibrar utilizando frequência de excitação externa $\Omega_{ext} = 71,725$ Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância $ \Omega - \omega_{\Omega}  = 31,725$ Hz. . . . .	103
8.12	DFTs obtidas utilizando frequência de excitação externa $\Omega_{ext} = 31,725$ Hz. . . . .	104
8.13	Modo de vibrar do eixo utilizando frequência de excitação externa $\Omega_{ext} = 31,725$ Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância $ \Omega - \omega_{\Omega}  = 71,725$ Hz. . . . .	105
8.14	Mapa de calor referente à segunda derivada do modo de vibrar utilizando frequência de excitação externa $\Omega_{ext} = 31,725$ Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância $ \Omega - \omega_{\Omega}  = 71,725$ Hz. . . . .	106

## LISTA DE TABELAS

6.1	Parâmetros determinados através do ajuste do modelo. . . . .	68
7.1	Frequências de excitação $\Omega_{ext}$ considerando $\omega_{\Omega} = 51,725$ Hz. . . . .	76

## LISTA DE SÍMBOLOS

- $A_c$  - Área trincada da seção transversal do elemento de eixo;  
 $B$  - Ponto arbitrário no eixo;  
 $B_1$  - Rolamento 1;  
 $B_2$  - Rolamento 2;  
 $C$  - Centro geométrico do eixo;  
 $D$  - Matriz de amortecimento;  
 $D_D$  - Matriz do efeito giroscópico do disco;  
 $D$  - Matriz do efeito giroscópico;  
 $D_S$  - Matriz do efeito giroscópico do eixo;  
 $D_1$  - Disco 1;  
 $D_2$  - Disco 2;  
 $E$  - Módulo de Elasticidade;  
 $F_{crack}$  - Vetor das forças produzidas pela trinca;  
 $F_m$  - Vetor das forças produzidas pelos mancais;  
 $F_d$  - Vetor das forças de excitação externa;  
 $F_{inercial}$  - Vetor de forças de elásticas em coordenadas inerciais;  
 $F_{mu}$  - Força de sustentação desenvolvida pelo mancal na direção  $X$ ;  
 $F_{mw}$  - Força de sustentação desenvolvida pelo mancal na direção  $Z$ ;  
 $F_{m\theta}$  - Força de sustentação desenvolvida pelo mancal na direção  $\theta$ ;  
 $F_{m\varphi}$  - Força de sustentação desenvolvida pelo mancal na direção  $\varphi$ ;  
 $F_{rot}$  - Vetor de forças de elásticas em coordenadas rotativas;  
 $F_u$  - Vetor de forças de desbalanceamento;  
 $F_{unbx}$  = Forças de desbalanceamento na direção  $X$ ;  
 $F_{unbz}$  - Forças de desbalanceamento na direção  $Z$ ;  
 $G$  - Módulo de cisalhamento;  
 $I$  - Momento de inércia de área do eixo;  
 $I_{Dx}$  - Momento de inércia de massa referente ao eixo  $X$ ;  
 $I_{Dy}$  - Momento de inércia de massa referente ao eixo  $Y$ ;

- $I_{Dz}$  - Momento de inércia de massa referente ao eixo  $Z$ ;
- $I_{XX}$  - Momento de inércia com relação ao centro geométrico e a direção  $X$ ;
- $I_{XZ}$  - Momento de inércia com relação ao centro geométrico e as direções  $X$  e  $Z$ ;
- $I_{ZZ}$  - Momento de inércia com relação ao centro geométrico e a direção  $Z$ ;
- $I_X$  - Momento de inércia do eixo em relação a direção  $X$ ;
- $I_Z$  - Momento de inércia do eixo em relação a direção  $Z$ ;
- $J$  - Função densidade de energia de deformação;
- $\mathbf{K}$  - Matriz de rigidez;
- $\mathbf{K}_0$  - Matriz de rigidez sem a trinca;
- $\mathbf{K}_{ce}$  - Matriz de rigidez nodal para o elemento com trinca;
- $\mathbf{K}_{st}$  - Matriz de enrijecimento do disco quando em regime transiente;
- $K_I, K_{II}, K_{III}$  - Fatores intensificadores de tensão;
- $L$  - Comprimento do elemento de eixo;
- $L_c$  - Comprimento do elemento com trinca no modelo Flex;
- $\mathbf{M}$  - Matriz de massa;
- $M_D$  - Massa do disco;
- $\mathbf{M}_D$  - Matriz de massa do disco;
- $\mathbf{M}_S$  - Matriz clássica de massa do eixo;
- $\mathbf{M}_T$  - Matriz do efeito secundário da inércia de rotação;
- $M_X$  - Momento dinâmico em relação ao eixo  $X$  utilizado no modelo Flex;
- $M_Z$  - Momento dinâmico em relação ao eixo  $Z$  utilizado no modelo Flex;
- $\mathbf{N}_1$  e  $\mathbf{N}_2$  - Vetores dos coeficientes das funções de forma;
- $P_{1-12}$  - Carregamentos atuantes no eixo;
- $Q_i$  - Esforços generalizados;
- $R_i$  - Resíduo;
- $S$  - Área de sessão transversal do eixo;
- $S_r$  - Área reduzida de sessão transversal do eixo;
- $T$  - Soma das energias cinéticas;
- $\mathbf{T}$  - Matriz de transformação;
- $T_D$  - Energia cinética do disco;
- $T_S$  - Energia cinética do eixo;
- $T_U$  - Energia cinética da massa de desbalanceamento;

$U$  - Soma das energias de deformação;  
 $U^0$  - Energia de deformação do elemento de eixo sem trinca;  
 $U^c$  - Energia de deformação adicional devido à presença da trinca;  
 $X, Y, Z$  - Eixos de coordenadas fixas do plano cartesiano;  
 $W$  - Força peso (das partes girantes);

$\mathbf{a}$  - vetor de aceleração;  
 $\mathbf{c}$  - Matriz de flexibilidade adicional nodal;  
 $\mathbf{c}_{ce}$  - Matriz de flexibilidade total nodal;  
 $c_{ij}$  - Coeficientes de flexibilidade adicional;  
 $\mathbf{c}_0$  - Matriz de flexibilidade nodal para o elemento sem trinca;  
 $d$  - Distância do ponto ao eixo geométrico do eixo;  
 $d_{ij}$  - Coeficientes de amortecimento dos mancais;  
 $f$  - *Steering functions*;  
 $\mathbf{d}$  - Vetor de deslocamentos;  
 $h_d$  - Largura do disco;  
 $k_{ij}$  - Coeficientes de rigidez dos mancais;  
 $m_d$  - Massa de desbalanceamento;  
 $\mathbf{q}$  - Vetor de deslocamentos do eixo;  
 $\mathbf{q}_D$  - Vetor de deslocamentos do disco;  
 $\mathbf{q}_i$  - Coordenadas generalizadas;  
 $\mathbf{q}_u$  - Vetor de deslocamentos nodais na direção  $X$ ;  
 $\mathbf{q}_{unb}$  - Vetor de deslocamentos nodais da massa de desbalanceamento;  
 $\mathbf{q}_w$  - Vetor de deslocamentos nodais na direção  $Z$ ;  
 $t$  - Tempo;  
 $u$  - Deslocamento na direção  $X$ ;  
 $u^*$  - Deslocamento na direção  $X$  em coordenadas rotativas;  
 $\mathbf{v}$  - vetor de velocidade;  
 $x, y, z$  - Eixos de coordenadas rotativas do plano cartesiano;  
 $w$  - Deslocamento na direção  $Z$ ;  
 $w^*$  - Deslocamento na direção  $Z$  em coordenadas rotativas;

$\Omega$  - Velocidade de rotação;

$\Omega_{diag}$  - Frequência de diagnóstico;

$\Omega_{ext}$  - Frequência de excitação externa;

$\alpha$  - Profundidade da trinca transversal;

$\alpha_x$  - Profundidade da trinca transversal infinitesimal;

$\varepsilon$  - Deformação normal;

$\varphi$  - Ângulo de rotação em relação ao eixo  $Z$ ;

$\theta$  - Ângulo de rotação em relação ao eixo  $X$ ;

$\vartheta_y$  - Parâmetro de cisalhamento;

$\rho$  - Densidade;

$\sigma$  - Tensão normal;

$\nu$  - Coeficiente de Poisson;

$\omega_x$  - Velocidades instantâneas na direção  $X$ ;

$\omega_z$  - Velocidades instantâneas na direção  $Z$ ;

$\omega_\Omega$  - Velocidade crítica.

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>xiv</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b>	<b>xv</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b>	<b>xvi</b>
<b>CÁPITULO I - INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos . . . . .	3
1.1.1 Objetivos Gerais . . . . .	3
1.1.2 Objetivos Específicos . . . . .	4
1.2 Estudos realizados previamente no Lmest . . . . .	4
<b>CÁPITULO II - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>7</b>
2.1 Máquinas Rotativas e Contexto Histórico . . . . .	7
2.2 Detecção e Monitoramento de Trincas Baseados em Modelos . . . . .	10
2.2.1 Estudo de Detecção Através dos Princípios da Mecânica da Fratura . . . . .	10
2.2.2 Técnicas Baseadas nos Sinais de Vibração . . . . .	12
2.2.3 Técnicas Baseadas em Testes Modais . . . . .	14
2.2.4 Métodos Não-Tradicionais . . . . .	15
<b>CÁPITULO III - COMPORTAMENTO DINÂMICO DE ROTORES</b>	<b>18</b>
3.1 Modelagem dos elementos constituintes do rotor . . . . .	19
3.1.1 Eixo . . . . .	19
3.1.2 Disco . . . . .	25
3.1.3 Mancais . . . . .	27
3.1.4 Massa de desbalanceamento . . . . .	28
<b>CÁPITULO IV - CONCEITOS BÁSICOS PARA A MODELAGEM DA TRINCA</b>	<b>31</b>

4.1	Flexibilidade Adicional Introduzida pela Trinca . . . . .	32
4.2	Modelos para representar o <i>breathing</i> . . . . .	37
4.3	Equações de movimento e linearização para um eixo horizontal com trinca transversal . . . . .	42
4.4	<i>Breathing steering funtions</i> . . . . .	44
4.4.1	Modelo de Gasch . . . . .	44
4.4.2	Modelo de Mayes . . . . .	46
4.4.3	Modelo de trinca <i>Open</i> . . . . .	49
4.5	Modelo de viga equivalente - <i>Flex</i> . . . . .	51
 <b>CÁPITULO V - COMBINAÇÃO DE RESSONÂNCIA E TÉCNICA DE DETECÇÃO BASEADA EM SEGUNDA DERIVADA DO MODO DE VIBRAR</b>		<b>56</b>
5.1	Técnicas de combinação de ressonância e segunda derivada do modo de vibrar .	57
5.2	Metodologia proposta . . . . .	59
5.2.1	Método das Múltiplas Escalas para Determinação das Combinações de Ressonância . . . . .	59
5.2.2	Método da derivada de segunda ordem do modo de vibrar . . . . .	63
 <b>CÁPITULO VI - BANCADA EXPERIMENTAL E MODELAGEM NUMÉRICO-COMPUTACIONAL</b>		<b>65</b>
6.1	Ajuste do modelo - otimização . . . . .	67
6.2	Estrutura da modelagem numérico-computacional . . . . .	68
6.3	Solução do sistema de equações de equilíbrio no domínio do tempo . . . . .	70
 <b>CÁPITULO VII - RESULTADOS NUMÉRICOS</b>		<b>74</b>
7.1	Comparação entre os modelos Gasch, Mayes e Flex . . . . .	74
7.2	Técnica de detecção . . . . .	75
7.2.1	Aplicação numérica com o modelo Mayes . . . . .	77
7.2.2	Aplicação numérica com o modelo Gasch . . . . .	85
7.2.3	Aplicação numérica com o modelo Flex . . . . .	90
 <b>CÁPITULO VIII RESULTADOS EXPERIMENTAIS</b>		<b>97</b>
 <b>CÁPITULO IX - CONCLUSÃO</b>		<b>107</b>

9.1 Trabalhos Futuros . . . . . 109

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS** 110

# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

Muito tem sido visto sobre os avanços em pesquisas na área de máquinas rotativas. Segundo Ferreira (2010), um grande desafio associado à manutenção destes equipamentos relaciona-se à capacidade de identificar quando e, possivelmente, em que local da máquina uma falha vai ocorrer.

A NBR 5462 (Associação Brasileira de Normas Técnicas, 1994) define o termo defeito como “qualquer desvio de uma característica de um item em relação aos seus requisitos” diferentemente de falha que é o “término da capacidade de um item desempenhar a função requerida”.

Um caso especial de falha em componentes mecânicos deste segmento se dá em eixos flexíveis com a ocorrência de defeitos como trincas transversais. Estes componentes estão sujeitos à ação de diversos tipos de carregamentos que favorecem o aumento da concentração de tensões em locais de descontinuidades geométricas (MUSZYNSKA, 1994).

Segundo Liong (2014), os eixos estão entre os componentes sujeitos talvez às condições de trabalho mais árduas em equipamentos de rotação de alto desempenho usados em plantas de processo e utilidades. Embora geralmente bastante robustos e bem projetados, os eixos em operação às vezes são suscetíveis a sérios defeitos que se desenvolvem sem muito aviso aparente. Eles são os principais candidatos para trincas de fadiga, devido à natureza de rápida flutuação das tensões de flexão, à presença de numerosos elementos elevadores de tensão e à possível falha no projeto de fabricação.

Muszynska (2005) ainda afirma que a detecção de uma trinca em sua fase inicial e a previsão do seu comportamento são capazes de evitar falhas dispendiosas da máquina e paralisações

subsequentes de plantas inteiras. Além disso é possível evitar desastres a níveis catastróficos e até mesmo fatais quando uma intervenção pode ser feita antes de um eixo sofrer uma quebra devido ao crescimento de uma trinca.

Porém, até os dias atuais, ainda existe uma grande dificuldade na detecção e identificação da evolução de trincas transversais, e principalmente a distinção desta de outros defeitos comuns como desbalanceamento, desalinhamento, assimetrias, folgas, entre outros defeitos que apresentam não linearidades envolvidas, já que podem afetar o comportamento dinâmico da máquina principalmente ao modificar a rigidez do sistema.

O SHM (*Structural Health Monitoring*), como exemplificam Farrar e Worden (2007), é uma estratégia interessante e viável em muitos casos e consiste na observação de uma estrutura ou sistema mecânico ao longo do tempo. Para isso é realizada a extração de dados e informações associadas às mudanças das características sensíveis aos danos e a análise estatística para determinar o estado atual da saúde estrutural do sistema. Ao serem associados a modelos matemáticos capazes de descrever, reproduzir e prever as condições de operação anormais ou não seguras, competem diretamente com testes não destrutivos utilizados nos planos de manutenção.

Bachschnid, Pennacchi e Tanzi (2010) apontam que as técnicas de SHM baseadas em medições de sinais de vibração são vastamente utilizadas na identificação de trincas em eixos de máquinas rotativas, visto que a redução da rigidez local do eixo produz alterações no comportamento dinâmico do sistema.

De acordo com Dimarogonas (1996), com o uso das relações da mecânica da fratura linear entre a função densidade de energia de deformação e o fator de intensificação de tensão, bem como o teorema de Castigliano, é possível calcular a flexibilidade local da região da trinca, e posteriormente a variação da rigidez associada.

Apesar de ser uma área de grande importância para a indústria, os estudos acerca da mecânica da fratura tiveram seu início em meados do século XX. Sabe-se que antes da Segunda Guerra Mundial, esta ciência era praticamente inexistente, mas desde então amadureceu e vem sendo amplamente discutida pela comunidade acadêmica e industrial (ANDERSON, 2005).

Outras abordagens, utilizando modelagens baseadas em gêmeos digitais (*Digital Twin*), que consiste em implementar e manter uma consistência entre o modelo virtual (baseado por exemplo em Elementos Finitos) e a entidade física, têm ganhado grande discussão como umas das tecnologias que envolvem as novas bases da indústria 4.0 juntamente com o desenvolvimento das ferramentas e dispositivos que possibilitam essa interação.

Atualmente, os gêmeos digitais estão revolucionando a tecnologia empregada na indústria. Com base em modelos mais refinados e dinâmicos, bem como unidades de dados mais ricas e originárias, os gêmeos digitais desempenharam um papel importante no monitoramento de operações, simulação, otimização, manutenção preditiva, entre outros (TAO; QI; NEE, 2022).

Ainda segundo Tao, Qi e Nee (2022), os modelos digitais na abordagem dos gêmeos digitais são o verdadeiro mapeamento equivalente ao sistema físico. Ao coletar o status do sistema em tempo real e atualizar dinamicamente o modelo digital, o gêmeo digital pode monitorar o sistema físico em tempo real. Por um lado, os gêmeos digitais podem usar realidade virtual e realidade aumentada para visualizar modelos geométricos e modelos de elementos finitos.

O método de diagnóstico de falhas baseado em modelos físicos baseia-se na teoria da dinâmica física para estabelecer modelos matemáticos correspondentes a diferentes falhas e descrever sua deterioração ou prever a vida útil restante com base no efeito cumulativo do dano (como o comprimento da trinca).

Além de melhorar a compreensão do comportamento da máquina, os modelos matemáticos facilitam a geração de dados para a realização de estudos posteriores, que podem ser difíceis de obter por meio de configurações experimentais.

## **1.1 Objetivos**

### *1.1.1 Objetivos Gerais*

Esta tese possui como objetivo geral, contribuir com as pesquisas nesta área, e ainda ampliar a compreensão sobre o tema através da avaliação das influências que a presença de uma trinca pode exercer sobre o comportamento dinâmico de eixos de máquinas rotativas. Pretende-se ainda abordar a construção de modelos numérico-computacionais de rotores associado a uma trinca transversal, e diferenciar abordagens quanto a representação da trinca de acordo com modelos específicos disponíveis e validados na literatura.

Utilizou-se ainda a representação de uma bancada experimental para reproduzir simulações e aplicar uma nova metodologia de detecção e localização de uma trinca presente no sistema. A grande vantagem acerca do proposto, é a possibilidade de utilização com a máquina em operação.

### *1.1.2 Objetivos Específicos*

Como objetivo específico, pretende-se utilizar a união de duas técnicas para detectar e localizar uma trinca transversal ao longo do eixo de uma máquina rotativa.

Para isso, destaca-se o efeito conhecido como combinação de ressonância, que pode ser entendido como o aparecimento de picos na resposta espectral do sistema em virtude do efeito não linear associado. O aparecimento dessas novas frequências no contexto deste trabalho se associa às assinaturas do efeito não linear ocasionado pela presença de trincas transversais no sistema. O uso deste fenômeno para identificação e localização do dano apresenta dentre outras vantagens a possibilidade em se manter uma velocidade de operação longe de uma velocidade crítica.

De forma geral, o trabalho agrega grande importância prática por oferecer uma perspectiva ampla sobre a formulação matemática acerca dos modelos empregados, além de incorporar estratégias ainda não totalmente exploradas sobre o uso aplicável de forças de diagnóstico capazes de induzir às combinações de ressonância no sistema quando o mesmo está sujeito à um comportamento não linear.

## **1.2 Estudos realizados previamente no Lmest**

A Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia (FEMEC-UFU), através do Laboratório de Mecânica de Estruturas “José Eduardo Tannús Reis” (LMEst) tem contribuído de forma significativa em pesquisas realizadas nas diversas áreas da dinâmica de máquinas rotativas. Especificamente, trabalhos importantes sobre técnicas de monitoramento da integridade estrutural foram desenvolvidos.

Burbano (2005) apresentou um estudo do comportamento dinâmico de um rotor com trinca no regime transiente, tanto na parada como na partida, por meio de um modelo numérico, com alguns ensaios experimentais em bancada de laboratório.

Tsuruta (2008) avaliou o uso de uma técnica de monitoramento baseada em impedância eletromecânica para a detecção e quantificação de danos causados por impactos de baixa energia em placas de material composto.

Moura Jr (2008), ainda nesta vertente, avaliou o uso de sistemas de monitoramento da integridade estrutural aplicados em componentes aeronáuticos e espaciais.

Em sua tese de doutorado, Morais et al. (2010) avaliou o efeito de não-linearidades causadas

por trincas transversais em eixos de máquinas rotativas e estudou a aplicação de atuadores eletromagnéticos no controle do processo de fadiga de eixos.

Ainda através do uso impedância eletromecânica, Palomino (2012) propôs identificar danos pequenos em estruturas simples, avaliando as diversas métricas de dano.

Cavalini Jr (2013) propôs duas técnicas de monitoramento da integridade estrutural com o objetivo de identificar trincas transversais em eixos. O primeiro método, baseado no comportamento não-linear da trinca, e o segundo baseado na impedância eletromecânica. Três modelos de trincas foram abordados em suas análises que contaram com simulação computacional e validação experimental.

Um método de deslocamento efetivo em frequência foi desenvolvido por Rabelo (2014) para compensar as medições de impedância devido a mudanças resultantes de flutuações da temperatura ambiente. Rabelo (2017) desenvolveu também técnicas de normalização de dados para compensação das perdas de informação provocadas pelas mudanças nas condições ambientais ou operacionais quando do monitoramento da integridade estrutural através da impedância eletromecânica.

Vários outros trabalhos sobre controle de vibração, utilização de mancais hidrodinâmicos e magnéticos, além de investigações sobre o uso de materiais compostos em eixos de máquinas rotativas têm sido desenvolvidos continuamente pelo LMEst, cujos objetivos incluem o ensino e a pesquisa aplicados aos estudos do comportamento estático e dinâmico de estruturas, com foco nos rotores inteligentes.

Barbosa (2018) em seu trabalho, apresentou vantagens na utilização de eixos de materiais compostos em rotores e apresentou uma comparação entre modelos simplificados para representação destes em análises das velocidades críticas do rotor, das amplitudes de vibração e da velocidade de instabilidade.

Silva (2018) apresentou contribuições sobre o efeito de trincas em eixos rotativos através de modelos representativos desenvolvidos em elementos finitos (modelo 1D e 3D) além de validar experimentalmente os resultados obtidos. Este trabalho possibilitou a continuação da investigação acerca da modelagem numérico-computacional destes defeitos por meio da presente tese de doutorado.

Ainda sobre os estudos acerca de trincas em máquinas rotativas, Leão (2019) apresentou o ajuste de um modelo matemático que representa o comportamento dinâmico de uma máquina rotativa real, além da aplicação numérica e experimental de um método de detecção de falhas

baseado no sinal de vibração do rotor e de um método de controle ativo de trincas que reduziu os níveis dos super-harmônicos 2X e 3X excitados pela presença da trinca no espectro de frequência do rotor.

Neste mesmo ano, Oliveira (2019) se dedicou ao estudo de controladores utilizados em rotores supercríticos suportados por mancais magnéticos, além de mostrar a possibilidade da utilização de metamodelos Kriging para o estudo e projeto destes equipamentos.

Rende (2020) desenvolveu um modelo matemático de rotor acoplado a quatro vigas (palhetas) que representam as pás. Foi também realizado um estudo da estabilidade do sistema utilizando a teoria de Floquet e a transformação de coordenadas multi-pás. Em continuidade, mas já inserindo defeitos do tipo trinca transversal nestas estruturas, Nascimento (2022) analisou o comportamento dinâmico deste sistema, adicionando ao mesmo a modelagem FLEX para introduzir a trinca nas palhetas.

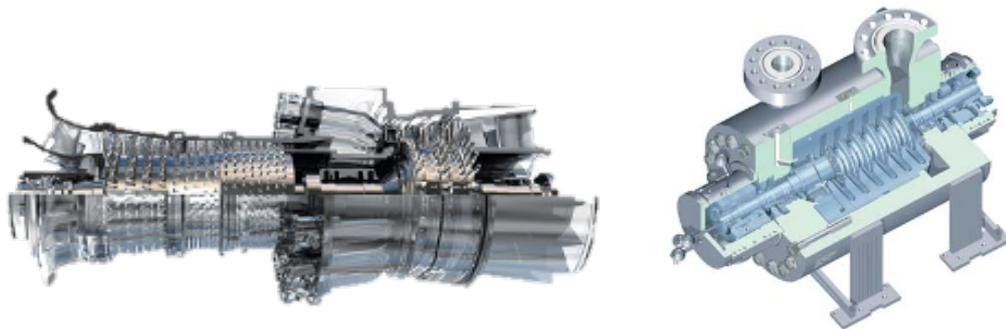
Diversos outros trabalhos ainda vem sendo desenvolvidos com o intuito de aprofundar o conhecimento sobre o tema, além de expandir os conceitos da dinâmica de rotação e sua aplicabilidade no que tange as melhorias em termos de modelagem e experimentação pelo LMEst. Assim esta tese se enquadra no escopo dos temas apresentados e traz contribuições importantes ao diz respeito à detecção de falhas em máquinas rotativas.

# CAPÍTULO II

## REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Máquinas Rotativas e Contexto Histórico

No âmbito da Engenharia Mecânica, as máquinas rotativas representam uma vasta e importante classe de equipamentos usadas no transporte de fluidos, geração de energia, propulsão de aeronaves, dentre diversas outras aplicações, com a finalidade de transformar energia elétrica em mecânica ou o contrário (MUSZYNSKA, 2005). Alguns exemplos são apresentados na Fig. 2.1.



(a) GE 9E - Turbina a gás (2012 General Electric Company®). (b) STC-SV Siemens - Compressor (Siemens AG®).

Figura 2.1: Exemplos de máquinas rotativas.

Uma definição baseada nas características dos rotores é apresentada por Lalanne e Ferraris (1998) e por Ishida e Yamamoto (2013). Estes autores descrevem máquinas rotativas como aquelas que possuem os seguintes elementos principais: discos de formatos diversos, eixos normalmente circulares cujos diâmetros podem variar com a posição longitudinal e rolamentos situados em diversas posições ao longo do eixo. É possível ainda classificar as máquinas

rotativas em função da deformação do eixo rotativo em operação. Quando se pode desprezar estas deformações, os mesmos autores classificam os rotores como rígidos. Ao passo que, se as deformações do eixo são consideradas, os rotores são chamados de flexíveis. Embora a maioria dos eixos presentes em máquinas rotativas tenha seção transversal circular, outras geometrias podem ser utilizadas de acordo com a aplicação, como por exemplo, eixos quadrados empregados como eixos de transmissão em sistema de transporte, tais como as esteiras e alguns tipos de geradores de energia elétrica.

Por sua ampla utilização na indústria, o bom funcionamento de máquinas rotativas tem sido um objetivo bastante buscado, principalmente quando sua operação correta e manutenção implicam diminuição de custos e eventuais perdas devidas a paradas não planejadas. Neste sentido, Muszynska (2005) afirma que o estudo da dinâmica de rotação se torna fundamental para a compreensão do comportamento das máquinas rotativas e engloba uma grande variedade de fenômenos físicos que podem interferir no desempenho destas máquinas.

Historicamente, sabe-se que os primeiros estudos em dinâmica de rotação datam do final do século XIX, época em que Rankine (1869) concluiu erroneamente que as máquinas rotativas não conseguiriam operar acima de uma determinada velocidade. Contribuições importantes surgiram também devido aos problemas associados às turbinas de alta velocidade de LAVAL (U. S. Patent No 522,066. 26 Jun. 1894). Posteriormente, trabalhos numéricos e experimentais com eixos complexos foram realizados por Dunkerley (1895) que apresentou o termo velocidade crítica como sendo uma velocidade de operação em que o rotor apresenta grandes amplitudes de vibração. Além disso, desenvolveu um método numérico capaz de calcular a menor frequência natural de rotores que foi comprovado teoricamente por Jeffcott (1919).

Segundo Vance, Zeidan e Murphy (2010), a maioria das investigações em dinâmica de rotação foram motivadas por problemas de funcionamento ou falhas. Atualmente, as falhas nem sempre são associadas à defeitos de fabricação, muitas vezes elas surgem apenas pela falta de conhecimento específico sobre o funcionamento do rotor em condições específicas. Dessa forma, muitos relatórios e análises publicadas auxiliaram a comunidade de engenharia no aprimoramento dessas máquinas com base nos conhecimentos adquiridos e na solução de problemas até então com causas desconhecidas.

No entanto, Vance, Zeidan e Murphy (2010) afirmam que a indústria se tornou competitiva e passou a manter certas descobertas em sigilo, e exemplificam o caso ocorrido com a General Electric Review cujos artigos foram de fundamental importância para o desenvolvimento das

máquinas rotativas no início dos anos 1900 e depois desapareceram na década de 1950.

Visto que as causas das falhas em equipamentos, de maneira geral, se enquadram em alguns tópicos como projeto do componente, seleção inadequada de materiais, defeitos e imperfeições presentes nos materiais, defeitos de fabricação, instalação e montagem, além de erros provenientes na manutenção e montagem dos equipamentos, e que se não previstos ou detectados a tempo podem acarretar em quebras, acidentes ou perdas irreparáveis comprometendo não só o financeiro de uma produção mas também a segurança de uma instalação (AFFONSO, 2013).

Affonso (2013) ainda reitera que o aparecimento de falhas em máquinas rotativas pode ocorrer em diversos componentes, principalmente em eixos, cuja função principal é suportar os demais componentes ou transmitir torque de uma parte a outra. Além de serem submetidos a condições de operação variadas, os eixos rotativos ficam sujeitos a carregamentos combinados de tração, torção ou flexão. Affonso (2013) afirma que a maioria das falhas ocorridas em eixos são devido à fratura por fadiga, originadas em pontos de concentração de tensão, normalmente associados a trincas.

Broberg (1999) define trinca como uma separação de material por abertura ou deslizamento, cuja distância de separação (espessura) é menor que o comprimento (profundidade). Observa-se que o crescimento de uma trinca por fadiga ou a fratura frágil ocorre perpendicularmente à direção do esforço principal de tensão, ao passo que uma fratura dúctil se dá na direção do maior esforço de cisalhamento. Além dos esforços submetidos, observa-se ainda que tensões e choques térmicos, devido ao fluido de trabalho, são capazes de iniciar a propagação de uma fissura em máquinas como turbinas a vapor e a gás.

Em função das necessidades da indústria, os testes não destrutivos foram e ainda são vastamente utilizados na manutenção de equipamentos para detecção e monitoramento da severidade de danos existentes. Dentre eles, citam-se os procedimentos de inspeção visual direta, raio X e Gama, ensaio de líquido penetrante, análise por ultrassom, ensaio por partículas magnéticas e por emissão acústica, e outros (BACHSCHMID; PENNACCHI; TANZI, 2010). No entanto, estes métodos provaram ser caros, uma vez que resultados satisfatórios dependem de inspeções detalhadas e periódicas e dispendiam do tempo de parada das máquinas.

Alternativamente, um esforço significativo em pesquisas tem se concentrado no desenvolvimento de métodos capazes de detectar danos através do monitoramento contínuo e em tempo real de sistemas. No intuito de minimizar e evitar que falhas repentinas possam ocorrer, as técnicas de SHM surgiram como uma ferramenta promissora e se baseiam no uso integrado de

sensores, materiais inteligentes, transmissão de dados e a capacidade de processamento computacional para que através dos sinais de vibração possam ser capazes detectar trincas e outros defeitos. Balageas, Fritzen e Güemes (2010) relatam que o uso de técnicas de SHM podem diminuir em até 40% o tempo gasto numa inspeção de aeronaves militares como exemplo, além de permitir uma maior confiabilidade, segurança e desempenho de equipamentos. Assim, são evidentes as vantagens do ponto de vista econômico e operacional, que tornam essa técnica atrativa.

As técnicas de SHM, segundo Cavalini Jr (2013), em conjunto com uso de modelos matemáticos representativos, ganharam cada vez mais destaque na detecção de trincas, uma vez que conduzem a resultados satisfatórios mesmo quando o dano ocorre em lugares inacessíveis como é o caso de trincas de subsuperfície ou mesmo quando elas são incipientes - trincas com pouca profundidade. Nestes casos é observado a variação de parâmetros como a rigidez do sistema para indicar existência da trinca. Além disso, são utilizados os princípios da mecânica da fratura linear como uma metodologia auxiliar na construção dos modelos.

## **2.2 Detecção e Monitoramento de Trincas Baseados em Modelos**

### *2.2.1 Estudo de Detecção Através dos Princípios da Mecânica da Fratura*

Apesar de ser uma área de grande importância para a indústria, os estudos sobre a mecânica da fratura tiveram seu início em meados do século XX. Sabe-se que antes da Segunda Guerra Mundial, esta ciência era praticamente inexistente, mas desde então amadureceu e vem sendo amplamente discutida pela comunidade acadêmica e industrial (ANDERSON, 2005).

Bachschnid, Pennacchi e Tanzi (2010) descrevem as principais áreas que se enquadram nas pesquisas sobre mecânica da fratura, são elas: a propagação de trincas, a direção de propagação e a velocidade de propagação. É importante ressaltar que muitas estruturas possuem trincas que são consideradas inofensivas e não apresentam riscos de fratura, ao contrário daquelas que se encontram em zonas de grandes tensões, estas sim devem ser monitoradas constantemente e geram riscos aos equipamentos.

Estudos foram apresentados pelo grupo de pesquisa do *Naval Research Laboratory*, liderado pelo Dr. G. R. Irwin após os subsequentes problemas de fraturas ocorridas nos navios americanos do programa *Liberty* durante a Segunda Guerra Mundial. Irwin (1956) desenvolveu o conceito de taxa de liberação de energia, e posteriormente utilizando a teoria de Westergaard

(1939), desenvolveu uma técnica semi-inversa para analisar as tensões e deslocamentos nas proximidades da ponta de uma trinca aguda, que poderiam ser descritos por uma única constante relacionada à taxa de liberação de energia ( $G$ ). Este parâmetro mais tarde tornou-se conhecido como Fator de Intensificação de Tensão (do inglês *Stress Intensity Factor* - SIF) (ANDERSON, 2005).

A partir da associação da taxa de liberação de energia com a redução de flexibilidade local produzida por uma trinca em vigas prismáticas, diversos outros trabalhos foram publicados. Dimarogonas (1970) descreveu por meio de resultados experimentais a diferença entre as rigidezes ao longo de duas direções perpendiculares em eixos na presença de trincas transversais. Seguindo a mesma metodologia, este autor também apresentou uma formulação para caracterizar o comportamento dinâmico de trincas em vigas retangulares.

Henry (1973) estudou a influência do peso do eixo no seu comportamento dinâmico considerando a inclusão de uma trinca e avaliou a resposta deste sistema ao desbalanceamento. Mayes e Davies (1976) desenvolveram um critério baseado em vibração para detecção de trincas em eixos de turbogeradores. Gasch (1976) utilizou um mecanismo simplificado para simular as não linearidades inseridas em eixos rotativos devido à abertura e fechamento da trinca.

Desde então, diversas pesquisas sobre trincas transversais em eixos rotativos foram realizadas. Ressalta-se que o termo transversal indica que a superfície da trinca é ortogonal ao eixo de rotação do eixo. Foram também relatados outros tipos de trincas, como as oblíquas, apesar de trincas transversais serem de maior ocorrência em máquinas rotativas já que as tensões de flexão axial são predominantes (BACHSCHMID; PENNACCHI; TANZI, 2010).

Grabowski (1980) utilizou uma análise modal para investigar o comportamento vibratório de rotores de turbinas na presença de trincas transversais.

Posteriormente, Mayes e Davies (1984) propuseram um método em elementos finitos, capaz de prever a resposta vibratória de um sistema horizontal de eixos acoplados, no qual trincas transversais foram detectadas antes da falha total do sistema. Foi considerado um movimento de abertura e fechamento de trinca chamado de *breathing*. Uma avaliação experimental também foi realizada. Gasch (1993) apresentou um estudo sobre estabilidade de eixos desbalanceados e com trincas transversais utilizando o modelo de trinca apresentado por ele em 1976 (conhecido como *hinge model*). Neste modelo, diferentemente do modelo proposto por Mayes e Davies (1984), considerou-se o movimento de abertura e fechamento da trinca de forma abrupta.

O acoplamento entre as vibrações longitudinais e de flexão de um rotor com uma trinca

transversal aberta foi numericamente abordado por Papadopoulos e Dimarogonas (1987). Este tipo de trinca introduz no sistema um comportamento semelhante ao de um rotor com diferentes momentos de inércia ao longo de duas direções perpendiculares. O acoplamento entre as vibrações torcionais e de flexão devido à inclusão do cisalhamento foi também mostrado por Papadopoulos e Dimarogonas (1987) e Ostachowicz e Krawczuk (1992).

Papadopoulos e Dimarogonas (1987) descreveram o acoplamento entre as vibrações longitudinais e de flexão de um rotor, porém reduzindo a matriz de flexibilidade local do elemento de trinca para  $2 \times 2$ . Neste caso, o eixo é submetido apenas à uma força axial e um momento fletor.

Outras análises teóricas são apresentadas por Nelson e Nataraj (1986), que utilizaram uma expansão da série de Fourier para representar a variação de rigidez do elemento de eixo com trinca. Seus resultados foram comparados à trabalhos anteriores (analíticos e experimentais) de Grabowski (1980).

Trabalhos voltados para detecção de trincas em tempo real foram desenvolvidos por Imam et al. (1989), Ratan, Baruh e Rodriguez (1996), Seibold e Weinert (1996), dentre outros.

Grandes avanços foram obtidos com intuito de inovar as técnicas de SHM aplicadas em eixos rotativos. Sabnavis et al. (2004) subdivide as técnicas mais comumente pesquisadas em 3 categorias: aquelas baseadas nos sinais de vibração, baseadas em análise modal e as baseadas em métodos não tradicionais. Nas subseções a seguir serão apresentados alguns dos mais relevantes trabalhos em cada categoria.

### 2.2.2 *Técnicas Baseadas nos Sinais de Vibração*

As técnicas baseadas nos sinais de vibração associadas às técnicas de SHM, têm sido amplamente investigadas e ganharam grande visibilidade na comunidade acadêmica e industrial.

Muszynska (1996) se contrapôs à ideia de que apenas o controle dos níveis de vibração utilizados pela indústria seria necessário para manutenção dos rotores. A autora propôs a utilização de métodos para avaliar a distribuição de tensão nos rotores como auxílio na detecção de possíveis problemas relacionados.

Seibold e Weinert (1996) desenvolveram um algoritmo de identificação no domínio do tempo chamado de Filtro de Kalman Extendido. Neste caso, um banco de filtros é construído para localização da trinca e a determinação de sua profundidade durante a operação normal do rotor.

Benthy e Williams (1986) afirmaram que as respostas de vibração com mais informações

para a detecção de trincas incipientes em eixos são as respostas laterais síncronas 1X e as respostas laterais 2X.

Saavedra e Cuitino (2002), Penny e Friswell (2003) e Green e Casey (2005) consideram que apenas o componente 2X quando excitado pela metade da primeira velocidade crítica de precessão direta pode ser um indicador para identificação de trincas em eixos rotativos.

Além dos componentes harmônicos 1X e 2X, Ishida e Yamamoto (2013) afirmam que as mudanças nos componentes 3X, 1/2X e 3/2X, dependendo da direção e amplitude do desbalanceamento, podem ser observadas para determinar a presença de trincas.

O estudo da órbita em eixos com trincas transversais é apresentado por Sinou e Lees (2005). Os autores afirmam que a presença de distorções e a formação de um “laço” duplo ou um “laço” interno nas órbitas são características observadas quando o rotor apresenta uma trinca. Além disso, a relação entre a profundidade da trinca e as amplitudes das órbitas são investigadas quando a velocidade de rotação se iguala à metade da velocidade crítica de precessão direta.

Kulesza e Sawicki (2011) propuseram um novo método para detecção de trinca em rotores baseado no aumento do modelo do sistema. Neste caso, um observador de estados de um grau de liberdade foi incorporado nas equações do movimento da máquina rotativa. As estimativas de suas duas variáveis de estado atuam como indicadores da presença da trinca.

Técnicas usando modelos 3D criados no programa ABAQUS<sup>®</sup> também foram utilizadas por alguns pesquisadores, como Hassan, Bruni e Carboni (2016). Os autores avaliaram o uso dos sinais de vibração em simulações de eixos ferroviários com trincas. Bachschmid et al. (2003) também utilizaram um modelo 3D construído no mesmo ambiente para comparação de resultados do comportamento estático obtidos por outros modelos numéricos.

Liong e Proppe (2013) avaliaram a perda de rigidez de um eixo com trinca transversal considerando o mecanismo *breathing* e um método de zona coesiva (do inglês *Cohesive Zone Model* - CZM) como uma alternativa ao SIF em um modelo 3D.

Investigações teórico-experimentais sobre detecção de trincas e o comportamento dinâmico de rotores utilizando um método de decomposição empírica (do inglês *Empirical Mode Decomposition* - EMD) foi apresentado por Guo, Yan e Yang (2017). Os mesmos autores observaram distorções da órbita durante a passagem por 1/3 e por 1/2 da velocidade de rotação, comparando o caso de um eixo com e sem trinca.

Cavalini Jr et al. (2020) trouxeram uma metodologia baseada no balanceamento harmônico como uma formulação capaz de expressar as características não lineares do sistema na presença

de uma trinca. Além disso, é demonstrado que os ângulos de fase nas combinações de ressonância podem ser usados como um sintoma de trinca.

### 2.2.3 *Técnicas Baseadas em Testes Modais*

As técnicas baseadas no domínio modal incluem observações das mudanças que ocorrem nas características do sistema, tais como a forma dos modos de vibrar e as frequências naturais do sistema.

Hamidi et al. (1994) desenvolveram dois modelos matemáticos para o estudo dos parâmetros modais de um rotor com trinca, um modelo baseado no método de Rayleigh-Ritz e outro de elementos finitos. As frequências naturais e os deslocamentos da linha elástica foram avaliados em função da localização e profundidade da trinca.

Uma análise acerca das mudanças da frequência natural de um rotor numa condição estática devido à presença da trinca é abordada por Dong, Chen e Zou (2004). Eles notaram que existe uma relação entre a redução da frequência natural e a proximidade da trinca com os pontos antinodais dos modos de vibrar. Quanto mais próxima de um ponto antinodal, maior será a redução da frequência natural. Os autores também mostraram que é possível, com o modelo contínuo apresentado em seu trabalho, identificar a posição da trinca a partir da comparação entre os modos de vibrar do eixo com e sem trinca.

Modelos analíticos e numéricos devem ser representativos, para que possam ser utilizados no monitoramento de componentes ou máquinas rotativas. Sendo assim, testes experimentais modais podem ser empregados para a validação dos dados obtidos pelos modelos. Alguns trabalhos que utilizam essa metodologia serão apresentados na sequência.

Collins, Plaut e Wauer (1991) avaliaram o comportamento dinâmico de rotores com trincas transversais usando excitações externas na forma de pulsos axiais. Três profundidades de trinca (10%, 20% e 30%) foram avaliadas considerando a resposta de vibração vertical sob excitação periódica externa. Os autores concluíram que ocorre um aumento não linear na amplitude da resposta de vibração com o aumento da profundidade da trinca. Darpe, Gupta e Chawla (2003) realizaram testes experimentais com excitação axial na forma de pulsos periódicos em eixos com e sem trinca. Os autores confirmaram a ocorrência do acoplamento entre as vibrações longitudinais e de flexão do eixo na presença do dano.

Uma visão geral dos desenvolvimentos mais recentes, assim como as vantagens e desvantagens acerca dos modelos e das técnicas modais mais comumente empregadas, são dadas por

Bucher e Ewins (2001) e Lees, Sinha e Friswell (2009).

Sawicki et al. (2011) fez uso de excitação externa auxiliar através de mancais magnéticos para detectar a presença de trincas em eixos rotativos. A aplicação de uma excitação sinusoidal em eixos trincados, gerou no espectro de frequências, harmônicos que são combinações da velocidade de rotação do rotor e da frequência de excitação. Esta informação foi usada para evidenciar a presença de trinca no eixo do rotor analisado.

Ong, Rahman e Ismail (2014) utilizaram dados experimentais obtidos com o uso da análise modal para identificar posição e severidade de uma trinca. Neste caso, foi utilizado um algoritmo que se baseia na sensibilidade modal ou na alteração de rigidez local do sistema.

Zhao, DeSmidt e Yao (2014) mostraram investigações sobre o comportamento de eixos com trincas transversais com comportamento *breathing* considerando diferentes amplitudes de excitação harmônica. Os autores afirmam que em baixas velocidades de rotação, a excitação axial harmônica tende a influenciar de maneira mais significativa o comportamento da trinca. Para velocidades de rotação maiores, esse comportamento é afetado pela amplitude da força harmônica aplicada.

Uma metodologia semelhante foi utilizada na técnica para detecção de trincas apresentada por Lu et al. (2017). Os autores avaliaram descontinuidades introduzidas pela trinca no modo de deflexão característico (do inglês *Characteristic Deflection Shape* - CDS) do sistema. Este modo é obtido a partir das respostas do rotor em condição de operação. Neste trabalho foi utilizada a Decomposição em Valores Singulares (do inglês *Singular Value Decomposition*) no domínio da frequência para obter o CDS. De forma a evitar as interferências produzidas pelas diferenças da área de seção transversal do eixo, foram usados os CDSs nas frequências super-harmônicas.

#### 2.2.4 Métodos Não-Tradicionais

Técnicas não-tradicionais são aquelas que não se encaixam em nenhuma das duas classes descritas. Sampaio e Nicoletti (2016) afirmam que técnicas não-tradicionais podem levar em consideração informações do domínio no tempo ou frequência para detectar e identificar trincas em eixos rotativos. Como exemplo, tem-se os métodos de otimização, rede neural artificial, transformada de wavelet, dentre outras.

O uso de Algoritmo Genético na identificação de trincas é apresentado em He, Guo e Chu (2001) como uma alternativa para solução do problema inverso associado à detecção da trinca.

A solução do problema foi obtida minimizando a função objetivo considerada, sendo esta, a diferença entre a resposta de vibração experimental e a calculada para uma configuração de trinca. Apesar do sucesso obtido na detecção da trinca, observou-se um custo computacional elevado, ultrapassando 10 horas de simulação mesmo para pequenas populações iniciais do Algoritmo Genético.

Castejón et al. (2015) aplicaram a teoria da transformada discreta de wavelet e análises de multi-resolução (do inglês *Multiresolution Analysis*) em sinais de vibração como ferramentas para determinar características padrões em eixos rotativos com trincas transversais. A técnica se mostrou eficiente mesmo para trincas incipientes.

Sampaio e Nicoletti (2016) utilizam para a detecção de trincas em máquinas rotativas a técnica da entropia aproximada (do inglês *Approximate Entropy* - ApEn), também classificada como uma metodologia não-tradicional devido ao processamento de sinal não convencional envolvido. O ApEn se baseia na determinação de um valor estatístico que quantifica a irregularidade de uma série temporal. Esse valor, obtido por um algoritmo aplicado aos dados, é amplamente utilizado nas áreas de biologia e medicina para extrair informações de sinais relacionado à presença e características da patologia.

Nasiri, Khosravani e Weinberg (2017) apresentaram uma série de discussões sobre o uso de inteligência artificial (do inglês *Artificial Intelligence* - AI) em quatro subáreas da mecânica da fratura e suas aplicações em sistemas mecânicos: modo de falha e identificação do mecanismo de falha, detecção e diagnóstico de danos e falhas, detecção de falha e erros, e diagnóstico e parâmetros mecânicos de fratura. Dentro destas subáreas são empregados diferentes tipos de métodos de AI, cinco deles foram abordados: Rede Bayesiana, Redes Neurais Artificiais, Algoritmo Genético, Lógica Fuzzy e Raciocínio Baseado em Casos.

Em um estudo publicado por Müller et al. (2021), recursos estatísticos de imagem são usados em combinação com classificadores de aprendizado de máquina para criar uma metodologia para a detecção automática de trincas superficiais em experimentos mecânicos. Imagens obtidas de experimentos de fratura por tensão e flexão são usadas para calcular recursos de textura Haralick de primeira ordem e ordem superior. Um subconjunto de recursos de imagem altamente significativos é identificado usando a Razão Discriminante de Fisher (do inglês *Fisher's Discriminant Ratio* - FDR) juntamente com uma matriz de correlação para cada conjunto de dados. Diferentes modelos de aprendizado de máquina são treinados e testados em dados reais, antes de recomendar o classificador menos complexo que forneça previsões confiáveis dos instantes

de início da fratura em experimentos mecânicos.

Recentemente, Rao e Reddy (2022) propuseram uma pesquisa com a utilização da técnica de detecção de trincas baseada em Transformadas Onduladas Discretas (do inglês *Discrete Wavelet Transforms* - DWT) e Sistemas de Inferência Neuro-Fuzzy Adaptativos (do inglês *Adaptive Neuro-Fuzzy Inference Systems* - ANFIS). O ANFIS baseado em DWT é usado para reduzir o ruído da resposta do rotor com trincas abertas.

Em geral, embora os estudos e trabalhos apresentados tenham contribuído para o entendimento e para a detecção de trincas em máquinas rotativas, muitos deles utilizam abordagens com limitações práticas ou demandam custo computacional elevado e/ou complexo do ponto de vista de implantação.

Assim, esta tese propõe a combinação de metodologias simplificadas que garantem vantagens significativas, como a possibilidade de serem aplicadas sem a necessidade de parar o equipamento ou alterar sua velocidade operacional. As metodologias propostas utilizam técnicas de processamento de sinais e análise de vibrações para identificar padrões que indicam a presença de trincas nas máquinas.

Além disso, foram realizados testes experimentais para avaliar a efetividade das metodologias. Os resultados mostraram que as metodologias propostas apresentaram um desempenho satisfatório na detecção de trincas, e podem contribuir para a manutenção preventiva de máquinas rotativas.

## CAPÍTULO III

### COMPORTAMENTO DINÂMICO DE ROTORES

Modelos matemáticos para estimar a posição e profundidade de trincas em eixos rotativos têm sido vastamente utilizados ao longo dos anos por diversos autores, como já descritos em tópicos anteriores. Dentre as metodologias empregadas, a que têm ganhado maior destaque é o método dos elementos finitos devido às suas aplicabilidades e facilidade de implementação. Neste capítulo será apresentada a formulação para a representação matemática dos componentes mais comuns de uma máquina rotativa.

Nesta formulação, as equações que descrevem o comportamento dinâmico de um rotor são obtidas a partir das energias envolvidas (cinética e de deformação) e do trabalho virtual das forças externas para cada componente do sistema (LALANNE; FERRARIS, 1998).

Considera-se que o rotor é composto por um eixo flexível, um disco rígido acoplado e suportado por mancais de rolamento. A Eq. (3.1) é uma equação diferencial que descreve numericamente o comportamento dinâmico de uma máquina rotativa (LALANNE; FERRARIS, 1998).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{D} + \Omega\mathbf{D}_g] \dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K} + \dot{\Omega}\mathbf{K}_{st}] \mathbf{q} = \mathbf{W} + \mathbf{F}_u + \mathbf{F}_m + \mathbf{F}_d \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa,  $\mathbf{D}$  é a matriz de amortecimento,  $\mathbf{D}_g$  é a matriz do efeito giroscópico,  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez e  $\mathbf{K}_{st}$  representa o enrijecimento do sistema quando em regime transitente (matrizes obtidas via Elementos Finitos). Todas estas matrizes são associadas às partes girantes da máquina, tais como os discos, o acoplamento e o eixo. O vetor de deslocamentos é representado por  $\mathbf{q}$  e a velocidade de rotação é dada por  $\Omega$ . A força peso,  $\mathbf{W}$ , contempla apenas às partes girantes,  $\mathbf{F}_u$  representa as forças de desbalanceamento,  $\mathbf{F}_m$  é o vetor das forças

produzidas pelos mancais a fim de suportar o eixo e  $\mathbf{F}_d$  representa a força de excitação externa se a mesma for adicionada ao sistema.

### 3.1 Modelagem dos elementos constituintes do rotor

Para determinar as matrizes associadas à energia cinética ( $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}_g$  e  $\mathbf{K}_{st}$ ) e à energia de deformação ( $\mathbf{K}$ ) é necessário primeiro avaliar as energias provenientes de cada elemento separadamente e aplicá-las nas equações de Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_i} = Q_i \quad (3.2)$$

onde  $T$  representa a soma das energias cinéticas,  $U$  é a energia de deformação do eixo e  $Q_i$  representa os esforços generalizados.

#### 3.1.1 Eixo

O eixo é modelado como uma viga de seção transversal circular e com diâmetro constante. Este elemento finito (comprimento  $L$ ) possui dois nós (1 e 2), incluindo quatro deslocamentos ( $u_1, u_2, w_1$  e  $w_2$ ) e quatro rotações ( $\theta_1, \theta_2, \varphi_1$  e  $\varphi_2$ ), como mostra a Fig. 3.1.

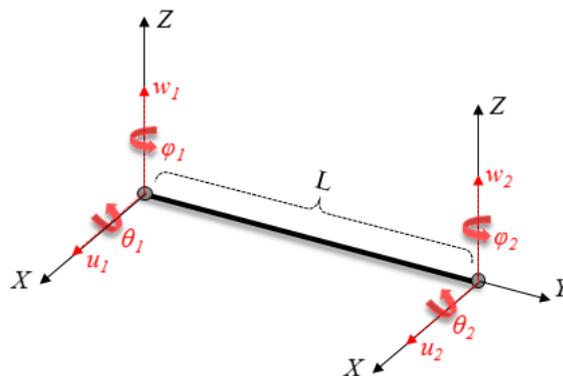


Figura 3.1: Graus de liberdade (GDL) associados ao elemento finito construído para representar o eixo.

Com relação aos GDLs do elemento de eixo, o vetor de deslocamentos nodais do eixo é dado por:

$$\mathbf{q} = \left\{ u_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad \varphi_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \theta_2 \quad \varphi_2 \right\}^t \quad (3.3)$$

Este vetor inclui os deslocamentos  $\mathbf{q}_u$  e  $\mathbf{q}_w$ , correspondendo aos movimentos nas direções

$X$  e  $Z$ , respectivamente. O elemento finito é construído a partir das seguintes relações:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{N}_1 \mathbf{q}_u \\ \mathbf{w} &= \mathbf{N}_2 \mathbf{q}_w\end{aligned}\tag{3.4}$$

onde  $\mathbf{N}_1$  e  $\mathbf{N}_2$  (ver Eq. (3.5)) são vetores formados por coeficientes de equações polinomiais de terceira ordem (hipótese considerada), conhecidos como polinômios de Hermite (IMBERT, 1995). Tais polinômios descrevem os deslocamentos nodais nos planos  $XY$  e  $ZY$ , respectivamente. Os coeficientes das funções de interpolação são determinados, resultando nas equações de deslocamento e rotação ao longo do comprimento da árvore.

As matrizes  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}_s$ ,  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{K}_{st}$  são determinadas substituindo  $\mathbf{N}_1$  e  $\mathbf{N}_2$  nas equações que definem a energia cinética e a energia de deformação do eixo, com subsequente integração ao longo do comprimento  $L$  (LALANNE; FERRARIS, 1998).

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_1 &= \left\{ 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} - y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right\} \\ \mathbf{N}_2 &= \left\{ 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} - \frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right\}\end{aligned}\tag{3.5}$$

A energia cinética do eixo pode então ser obtida através da Eq. (3.6).

$$T_S = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho I L \Omega^2 + 2\rho I \Omega \int_0^L \phi \theta dy\tag{3.6}$$

onde,  $\rho$  é a densidade,  $S$  é a área de seção transversal do eixo e  $I$  é o momento de inércia de área.

Substituindo as Eqs. (3.4) a (3.5) na Eq. (3.6), obtém-se a energia cinética para o eixo na sua forma compacta, conforme mostra a Eq. (3.7).

$$\begin{aligned}T_S &= \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{\mathbf{q}}_u^t \mathbf{N}_1^t \mathbf{N}_1 \dot{\mathbf{q}}_u + \dot{\mathbf{q}}_w^t \mathbf{N}_2^t \mathbf{N}_2 \dot{\mathbf{q}}_w) dy + \dots \\ &\quad \dots + \frac{\rho I}{2} \int_0^L \left( \dot{\mathbf{q}}_u^t \frac{d\mathbf{N}_1^t}{dy} \frac{d\mathbf{N}_1}{dy} \dot{\mathbf{q}}_u + \dot{\mathbf{q}}_w^t \frac{d\mathbf{N}_2^t}{dy} \frac{d\mathbf{N}_2}{dy} \dot{\mathbf{q}}_w \right) dy + \dots \\ &\quad \dots + \rho I L \Omega^2 - 2\rho I \Omega \int_0^L \dot{\mathbf{q}}_u^t \frac{d\mathbf{N}_1^t}{dy} \frac{d\mathbf{N}_2}{dy} \dot{\mathbf{q}}_w dy\end{aligned}\tag{3.7}$$

Aplicando a equação de Lagrange (Eq. (3.2)) na equação da energia cinética do eixo, chega-

se à expressão apresentada na Eq. (3.8).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_S}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T_S}{\partial \mathbf{q}} = (\mathbf{M}_S + \mathbf{M}_T) \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{D}_S \dot{\mathbf{q}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{K}_{st} \mathbf{q} \quad (3.8)$$

onde as matrizes  $\mathbf{M}_S$ ,  $\mathbf{M}_T$ ,  $\mathbf{D}_S$  e  $\mathbf{K}_{st}$  são apresentadas nas Eqs. (3.9) a (3.12).

$$\mathbf{M}_S = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{M}_T = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & -3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{D}_S = \frac{\rho I}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{K}_{st} = \frac{\rho I}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

onde a matriz  $\mathbf{M}$  da Eq. (3.1) é resultado da soma das matrizes  $\mathbf{M}_S$  e  $\mathbf{M}_T$ .

A energia de deformação para o eixo simétrico é obtida com base nas tensões ( $\sigma$ ) e deformações ( $\epsilon$ ) desenvolvidas. De acordo com a Fig. 3.2, pode-se definir a deformação longitudinal mostrada na Eq. (3.13) de um ponto arbitrário B no eixo.

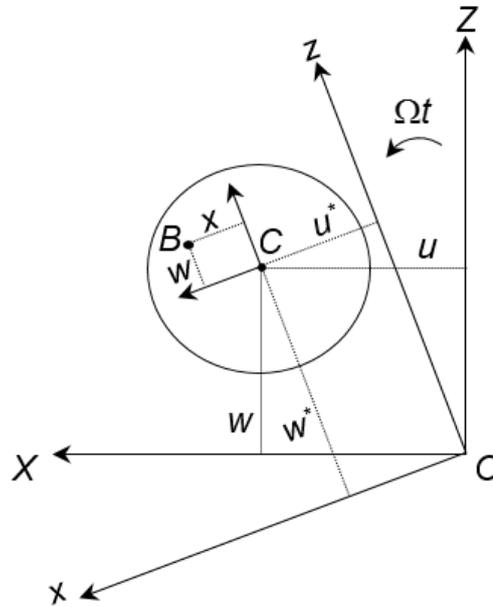


Figura 3.2: Representação de um ponto arbitrário B (Fonte: (LALANNE; FERRARIS, 1998)).

$$\epsilon = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \quad (3.13)$$

onde  $u$  e  $w$  são os deslocamentos em coordenadas fixas relacionados aos eixos  $X$  e  $Z$ , respectivamente, e  $u^*$  e  $w^*$  são os deslocamentos para as coordenadas rotativas  $x$  e  $z$  respectivamente

(veja as Eqs. (3.14)).

$$\begin{aligned} u^* &= u \cos(\Omega t) - w \sin(\Omega t) \\ w^* &= u \sin(\Omega t) + w \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

A Energia de deformação para o eixo pode ser calculada a partir da Eq. (3.15).

$$U = \frac{1}{2} \int_v \boldsymbol{\varepsilon}^t \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3.15)$$

Através da relação entre tensão e deformação da Lei de Hooke (veja a Eq. (3.16)), pode-se reescrever a Eq. (3.22), conforme mostra a Eq. (3.17).

$$\boldsymbol{\sigma} = E \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.16)$$

$$U = \frac{E}{2} \int_v \boldsymbol{\varepsilon}^t \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (3.17)$$

Substituindo a Eq. (3.13) na Eq. (3.17), obtém-se:

$$\begin{aligned} U &= \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left( -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 dS dy \\ &= \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left[ x^2 \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] dS dy \end{aligned} \quad (3.18)$$

De acordo com Lalanne e Ferraris (1998), ao considerar a simetria da seção transversal do eixo com respeito as direções  $X$  e  $Z$ , e as relações de momentos de inércia de área conforme apresentado pela Eq. (3.19), a Eq. (3.18) é reescrita como a Eq. (3.20).

$$\begin{aligned} I_x &= \int_S z^2 dS \\ I_z &= \int_S x^2 dS \\ \int_S xz dS &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \left[ I_z \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (3.20)$$

Considerando que  $I_x = I_z = I$  e substituindo as Eqs. (3.4) a (3.5), (3.14) na Eq. (3.20), chega-se à expressão da energia de deformação apresentada na Eq. (3.21), onde os efeitos da força axial não estão sendo levados em conta.

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ \mathbf{q}_u^t \frac{d^2 \mathbf{N}_1^t}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_1}{dy^2} \mathbf{q}_u + \mathbf{q}_w^t \frac{d^2 \mathbf{N}_2^t}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_2}{dy^2} \mathbf{q}_w \right] dy \quad (3.21)$$

Aplicando a equação de Lagrange (Eq. (3.2)) na Eq. (3.21), conforme mostra a Eq. (3.22), obtém-se a matriz de rigidez apresentada pela Eq. (3.23).

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{K} = k_L \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4 + \vartheta_Y)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2 - \vartheta_Y)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4 + \vartheta_Y)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2 - \vartheta_Y)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2 - \vartheta_Y)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4 + \vartheta_Y)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2 - \vartheta_Y)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4 + \vartheta_Y)L^2 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

onde  $k_L$  é dado pela Eq. (3.24) e  $\vartheta_Y$  pela Eq. (3.25).

$$k_L = \frac{EI}{(1 + \vartheta_Y)L^3} \quad (3.24)$$

$$\vartheta_Y = \frac{12EI}{GS_r L^2} \quad (3.25)$$

sendo  $S_r$  a área reduzida da seção transversal e  $G$  é o módulo de cisalhamento, dado pela Eq. (3.26) em função do módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson ( $\nu$ ).

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.26)$$

Esta matriz de rigidez (matriz  $\mathbf{K}$ ) leva em consideração o cisalhamento nas seções transversais durante a flexão, conforme o modelo de viga de Timoshenko.

### 3.1.2 Disco

O disco é representado conforme ilustra a Fig. 3.3 e é assumido como sendo rígido. Portanto apenas sua energia cinética é avaliada no modelo 1D do sistema.

O sistema de coordenadas fixas ( $R_0$ ) continua sendo representado pelos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  e o sistema de coordenadas rotativas ( $R$ ) posicionado no centro no disco, representado pelos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

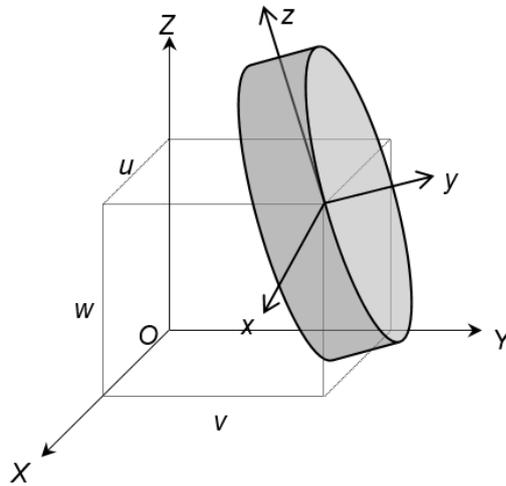


Figura 3.3: Representação do elemento de disco (Fonte: Cavalini Jr (2013))

Com quatro graus de liberdade, dois deslocamentos laterais ( $u$  e  $w$ ) e duas rotações ( $\theta$  e  $\varphi$ ), o vetor de deslocamentos nodais é representado pela Eq. (3.27).

$$\mathbf{q}_D = \{u \quad w \quad \theta \quad \varphi\}^t \quad (3.27)$$

Conforme Lalanne e Ferraris (1998) demonstra, a energia cinética para o elemento de disco pode ser calculada segundo a Eq. (3.28).

$$T_D = \frac{1}{2} m_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{Dx} \omega_x^2 + I_{Dy} \omega_y^2 + I_{Dz} \omega_z^2) \quad (3.28)$$

onde  $m_D$  é a massa do disco,  $I_{Dx}$ ,  $I_{Dy}$  e  $I_{Dz}$  representam os momentos de inércia e  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  e  $\omega_z$  são as velocidades angulares (Eq. (3.29)), todos em relação aos eixos de coordenadas rotativas

( $x$ ,  $y$  e  $z$ ).

$$\boldsymbol{\omega}_{R/R_0}^R = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\phi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\phi} \sin \theta \\ \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

A Eq. (3.28) pode ainda ser simplificada como mostra a Eq. (3.30), assumindo que o disco é simétrico ( $I_{Dx} = I_{Dz} = I_D$ ), que os ângulos  $\theta$  e  $\phi$  são suficientemente pequenos.

$$T_D = \frac{1}{2} m_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_D (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2} I_{Dy} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\phi}\theta) \quad (3.30)$$

O efeito giroscópico é representado pelo termo  $I_{Dy}\Omega\dot{\phi}\theta$ . Aplicando as equações de Lagrange (Eq. (3.2)) na energia cinética do disco, obtém-se a expressão apresentada pela Eq. (3.31).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_D}{\partial \dot{\mathbf{q}}_D} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial \mathbf{q}_D} = \mathbf{M}_D \ddot{\mathbf{q}}_D + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{D}_D \dot{\mathbf{q}}_D + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{K}_{D_t} \mathbf{q}_D \quad (3.31)$$

onde as matrizes  $\mathbf{M}_D$ ,  $\mathbf{D}_D$  e  $\mathbf{K}_{D_t}$  são descritas pelas Eqs. (3.32) a (3.34).

$$\mathbf{M}_D = \begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_D \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{D}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{K}_{D_t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

sendo a matriz  $\mathbf{D}_g$  da Eq. (3.1) o resultado da soma das matrizes  $\mathbf{D}_S$  e  $\mathbf{D}_D$  nos graus de liberdade correspondentes.

Segundo Lalanne e Ferraris (1998), o disco pode ser incorporado no modelo de elementos finitos com três diferentes configurações, conforme mostra a Fig. 3.4. Na primeira configuração assume-se que o disco não altera a rigidez do eixo e as características de inércia do disco são concentradas no nó correspondente ao elemento finito do eixo. Na segunda, o disco altera a rigidez do eixo. O raio do eixo é acrescido em  $h_d/2$ , onde  $h_d$  corresponde à espessura do disco. As características do disco são concentradas no nó 2 (veja a Fig. 3.4). Se a espessura do disco for suficientemente grande, as características de inércia do disco devem ser distribuídas nos três nós, como mostra a configuração III. No presente trabalho, a configuração II foi utilizada para acoplar o disco ao eixo do sistema em análise.

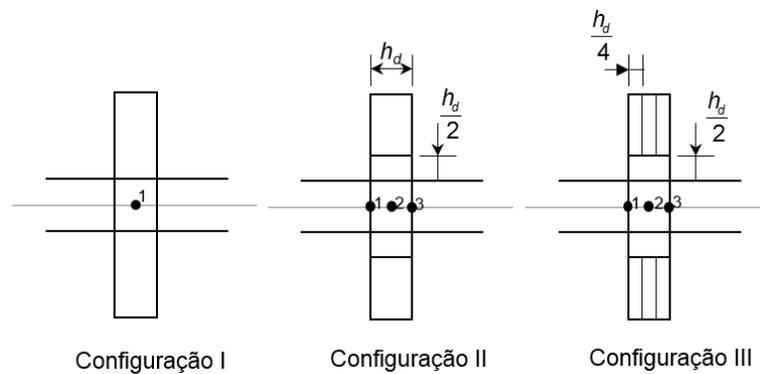


Figura 3.4: Formas de incorporar o disco ao eixo em elementos finitos (Fonte: (LALANNE; FERRARIS, 1998))

### 3.1.3 Mancais

Assume-se que os mancais são de rolamento e possuem coeficientes de rigidez e amortecimento viscoso (Fig. 3.5). Estes coeficientes devem ser determinados através da solução de um problema inverso onde o resultado de simulações computacionais são aproximados de respostas de vibração experimentais do sistema em análise. Neste trabalho, a solução do problema inverso é realizada por um método de otimização chamado de Evolução Diferencial (do inglês *Differential Evolution - DE*) (STORN; PRICE, 1995).

O trabalho virtual das forças produzidas pelos mancais e atuantes sobre o eixo pode ser escrito como mostra a Eq. (3.35).

$$\delta W = -k_{xx}u\delta u - k_{xz}w\delta u - k_{zz}w\delta w - k_{zx}u\delta w - d_{xx}\dot{u}\delta u - d_{xz}\dot{w}\delta u - d_{zz}\dot{w}\delta w - d_{zx}\dot{u}\delta w \quad (3.35)$$

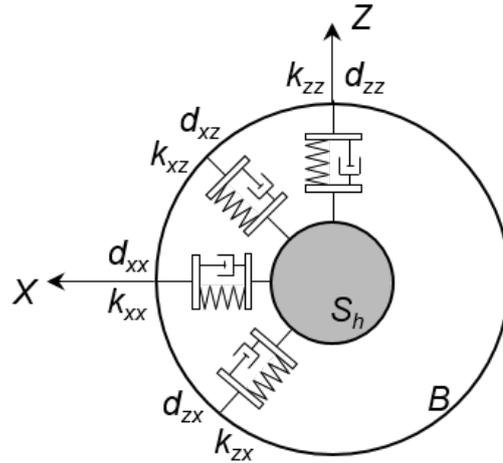


Figura 3.5: Coeficientes de rigidez e amortecimento do mancal (Fonte: Cavalini Jr (2013)).

A Eq. (3.35) pode também ser simplificada conforme a Eq. (3.36).

$$\delta W = F_{mu}\delta u + F_{mw}\delta w \quad (3.36)$$

onde  $F_{mu}$  e  $F_{mw}$  são as forças generalizadas e são expressas na forma matricial como mostra a Eq. (3.37).

$$\begin{bmatrix} F_{mu} \\ F_{mw} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xz} \\ d_{zx} & d_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

A Eq. (3.37) pode ser escrita de forma expandida com os graus de liberdade utilizados na formulação do elemento finito de eixo (graus de liberdade de um dos nós do elemento), conforme apresenta a Eq. (3.38).

$$\begin{bmatrix} F_{mu} \\ F_{m\theta} \\ F_{mw} \\ F_{m\phi} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & k_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{zx} & 0 & k_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \theta \\ w \\ \phi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_{xx} & 0 & d_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{zx} & 0 & d_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \\ \dot{w} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

#### 3.1.4 Massa de desbalanceamento

A força de desbalanceamento é definida por uma massa  $m_u$  situada a uma distância  $d$  do centro geométrico do eixo que por sua vez têm coordenadas ( $u$  e  $w$ ) em relação ao ponto  $O$ ,

conforme ilustra a Fig. 3.6. A massa  $m_u$  é assumida como sendo muito menor que a massa do rotor. A energia cinética  $T_U$  da massa  $m_u$  pode então ser calculada conforme mostra a Eq. (3.39).

$$T_u = \frac{m_u}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega d \dot{u} \sin(\Omega t) - 2\Omega \dot{w} d \cos(\Omega t)) \quad (3.39)$$

onde o termo  $\Omega^2 d^2$  é constante e não tem influência nas equações. Assim, a expressão da energia cinética é escrita como:

$$T_u \approx m_u \Omega d (\dot{u} \sin(\Omega t) - \dot{w} \cos(\Omega t)) \quad (3.40)$$

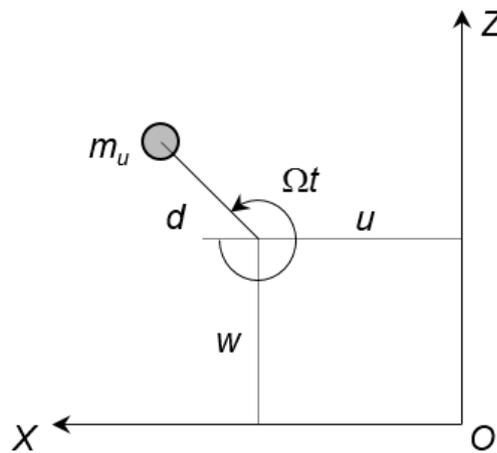


Figura 3.6: Coordenadas relativas à massa de desbalanceamento (Fonte: Cavalini Jr (2013)).

O vetor de deslocamentos nodais para a massa de desbalanceamento é composto apenas pelos deslocamentos laterais, conforme mostra a Eq. (3.41).

$$\mathbf{q}_{\text{unb}} = \begin{Bmatrix} u & w \end{Bmatrix}^t \quad (3.41)$$

A Eq. (3.42) é resultado da aplicação das equações de Lagrange (veja a Eq. (3.2)) sobre a energia cinética da massa de desbalanceamento.

$$\frac{dT_u}{dt} \left( \frac{\partial T_u}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\text{unb}}} \right) - \frac{\partial T_u}{\partial \mathbf{q}_{\text{unb}}} = \begin{bmatrix} -m_u d \dot{\Omega} \sin(\Omega t) - m_u d \Omega^2 \cos(\Omega t) \\ -m_u d \dot{\Omega} \cos(\Omega t) + m_u d \Omega^2 \sin(\Omega t) \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

As forças de desbalanceamento nas direções  $X$  e  $Z$  podem então ser descritas como mostra a Eq. (3.43).

$$\begin{bmatrix} F_{unbx} \\ F_{unbz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_u d \dot{\Omega} \sin(\Omega t) - m_u d \Omega^2 \cos(\Omega t) \\ -m_u d \dot{\Omega} \cos(\Omega t) + m_u d \Omega^2 \sin(\Omega t) \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

# CAPÍTULO IV

## CONCEITOS BÁSICOS PARA A MODELAGEM DA TRINCA

O objetivo desta seção é introduzir um modelo simplificado para um rotor horizontal na presença de trinca, de forma a ampliar os conhecimentos básicos sobre o efeito que este tipo de dano oferece na estrutura. Neste caso será negligenciado o acoplamento das vibrações laterais, torsionais e axiais.

Segundo Bachschmid, Pennacchi e Tanzi (2010), a linha de deflexão de um eixo contendo uma trinca em sua posição central, é dada pela superposição de duas partes: pela linha de deflexão de eixo saudável em adição à deflexão adicional devido à flexibilidade local inserida pela presença da trinca. Esta parte adicional não pode ser determinada pela teoria de vigas, uma vez que pela teoria de vigas a trinca é considerada um enfraquecimento da rigidez à flexão  $EI$  em um comprimento zero.

De fato, um eixo cilíndrico com trinca por não ser simétrico e isotrópico, produzirá acoplamento das vibrações lateral, axial e torsional. Porém para simplificar e facilitar o entendimento dos conceitos básicos da modelagem isto será desprezado a princípio. Dependendo do tipo de trinca, diferentes mecanismos podem ser inseridos no modelo de elementos finitos do rotor e diferentes efeitos são então evidenciados. Sabnavis et al. (2004) fazem uma classificação das trincas quanto sua geometria e efeitos associados. Citam-se:

- Trincas transversais: são trincas perpendiculares ao eixo. Mais comuns e mais graves, pois reduzem a seção transversal e enfraquecem o rotor. Elas introduzem uma flexibilidade adicional devido à energia de deformação concentrada na proximidade da extremidade da trinca;
- Trincas longitudinais: são trincas paralelas à direção longitudinal do eixo;

- Trincas oblíquas: são trincas que possuem inclinação em relação ao eixo longitudinal do rotor. Influenciam no comportamento de torção de uma maneira bastante semelhante ao efeito das trincas transversais no comportamento lateral do eixo;
- Trincas *breathing*: trincas que se abrem quando submetidas a tensões de tração e se fecham quando submetidas a tensões de compressão. Esse comportamento resulta em não linearidades induzidas no comportamento vibratório do rotor;
- Trincas abertas: também chamadas de entalhes, permanecem sempre abertas e são mais fáceis de se reproduzir em laboratório. São conhecidas também como trincas *open*;
- Trincas de superfície: são trincas que se localizam na superfície do eixo. Normalmente, podem ser detectados por técnicas como líquido penetrante ou a inspeção visual;
- Trincas de subsuperfície: são trincas que não aparecem na superfície. Para serem detectadas é preciso a utilização de técnicas como ultrassom, raio X ou partículas magnéticas.

Para a simulação do comportamento da trinca, uma flexibilidade adicional do eixo é considerada no elemento finito que contém o dano. Os princípios e o desenvolvimento teórico para a matriz de flexibilidade adicional devido à trinca foram desenvolvidos primeiramente por Dimarogonas, Paipetis e Chondros (1983) para vigas retangulares e posteriormente estendidas à eixos circulares por Papadopoulos e Dimarogonas (1987). Os termos de flexibilidade adicional, que neste caso são calculados com as bases da teoria da Mecânica da Fratura Linear Elástica, serão descritos na subseção seguinte.

#### 4.1 Flexibilidade Adicional Introduzida pela Trinca

Para o cálculo dos coeficientes de flexibilidade adicional devido à trinca, considere um elemento de eixo com seis graus de liberdade por nó, de comprimento  $L$  e diâmetro  $D$ , contendo uma trinca transversal de profundidade  $\alpha$ , sujeito a carregamentos  $P_1$  e  $P_7$  (forças axiais),  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_8$  e  $P_9$  (forças cisalhantes),  $P_4$  e  $P_{10}$  (momentos de torção),  $P_5$ ,  $P_6$ ,  $P_{11}$  e  $P_{12}$  (momentos fletores), como mostra a Fig. 4.1.

Segundo Darpe, Gupta e Chawla (2004), o deslocamento ao longo da  $i$ -ésima coordenada

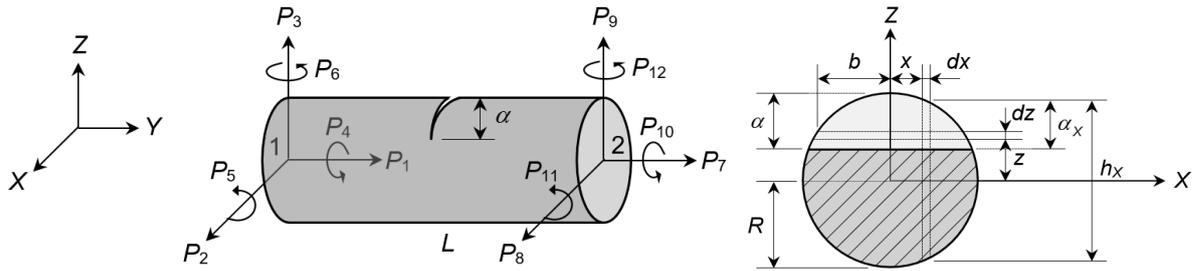


Figura 4.1: Elemento de eixo e parâmetros geométricos (Fonte: Cavalini Jr (2013)).

pode ser determinado pelo segundo teorema de Castigliano conforme mostra a Eq. (4.1).

$$q_i = \frac{dU}{dP_i} \quad (4.1)$$

onde  $U$  é a energia de deformação total dada pela Eq. (4.2).

$$U = U^0 + U^c \quad (4.2)$$

sendo  $U^0$  é a energia de deformação do elemento de eixo sem trinca e  $U^c$  é a energia de deformação adicional devido à presença da trinca. Logo, a Eq. (4.2) pode ser reescrita conforme a Eq. (4.3).

$$q_i = \frac{\partial U^0}{\partial P_i} + \frac{\partial U^c}{\partial P_i} \quad (4.3)$$

Considerando as forças atuantes no elemento de eixo, a energia de deformação adicional devido à trinca  $U^c$  é representada conforme os conceitos da mecânica da fratura pela Eq. (4.4).

$$U^c = \int_{A_c} J(A_c) dA_c \quad (4.4)$$

onde  $J(A_c)$  é a função densidade de energia de deformação sobre a área do elemento correspondente à seção que contém a trinca (área não hachurada da Fig. (4.1)) e é expressa conforme mostra a Eq. (4.5).

$$U^c = \int_{A_c} \frac{1-\nu}{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^6 K_{Ii} \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^6 K_{IIi} \right)^2 + (1+\nu) \left( \sum_{i=1}^6 K_{IIIi} \right)^2 \right] dA_c \quad (4.5)$$

onde  $K_{Ii}$ ,  $K_{IIi}$  e  $K_{IIIi}$  são os fatores de intensificação de tensão (do inglês *Stress Intensity Factor*

- SIF) para o modo *I* de tração, modo *II* de cisalhamento e modo *III* de torção, respectivamente, segundo ilustra a Fig. 4.2.

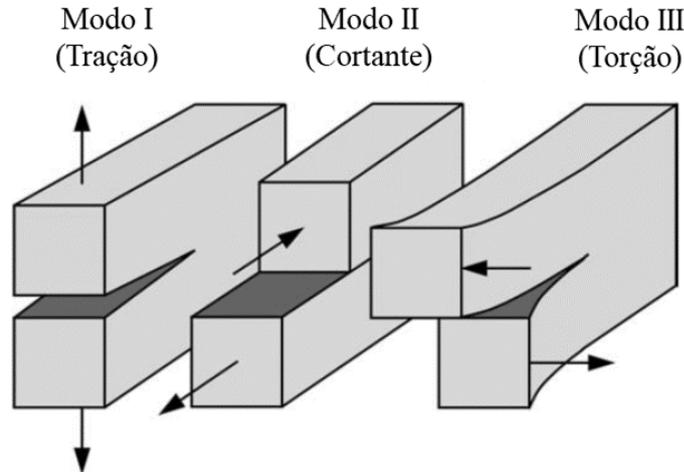


Figura 4.2: Modos de carregamentos aplicados à uma trinca (Fonte: Anderson (2005)).

Os SIFs dependem da geometria do eixo e do modo de carregamento, podendo ser escritos conforme a Eq. (4.6), (ANDERSON, 2005).

$$K_{mi} = \sigma_i \sqrt{\pi \alpha_x} F_j \left( \frac{\alpha_x}{h_x} \right) \quad (4.6)$$

onde as tensões na trinca,  $\sigma_i$ , são representadas pelas resultantes dos esforços aplicados pelas forças  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) e  $F_j$  ( $j = 1, 2, II e III$ ) são as funções de forma que dependem de  $\alpha_x$  (profundidade da trinca) e do diâmetro de um elemento infinitesimal de eixo (Fig. 4.1).

A flexibilidade adicional devido à presença da trinca é dada pela Eq. (4.7).

$$c_{ij} = \frac{\partial^2 U^c}{\partial P_i \partial P_j} = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \left[ \int_{A_c} J(A_c) dA_c \right] \quad (4.7)$$

Papadopoulos e Dimarogonas (1987) ressaltam que os SIFs são calculados na literatura considerando uma tira de espessura unitária.

Como o valor da densidade de energia é escalar, é permissível integrá-lo ao longo de toda trinca assumindo que a profundidade da trinca é variável e os SIFs dados para uma faixa elementar.

O cálculo para a obtenção dos SIFs é mostrado pela Eq. (4.8), conforme descrito em Papadopoulos e Dimarogonas (1987).

$$\begin{aligned}
K_{I1} &= \sigma_1 \sqrt{\pi \alpha_x} F_1 \left( \alpha_x / h_x \right) \sigma_1 = P_1 / \pi R^2 \\
K_{I5} &= \sigma_5 \sqrt{\pi \alpha_x} F_2 \left( \alpha_x / h_x \right) \sigma_5 = \left( 4P_5 / \pi R^4 \right) \sqrt{(R^2 - x^2)} \\
K_{I6} &= \sigma_6 \sqrt{\pi \alpha_x} F_1 \left( \alpha_x / h_x \right) \sigma_4 = \left( 4P_6 / \pi R^4 \right) x \\
K_{I2} &= K_{I3} = K_{I4} = 0 \\
K_{II3} &= \sigma_{II3} \sqrt{\pi \alpha_x} F_{II} \left( \alpha_x / h_x \right) \sigma_{II3} = kP_3 / \pi R^2 \\
K_{II4} &= \sigma_{II4} \sqrt{\pi \alpha_x} F_{II} \left( \alpha_x / h_x \right) \sigma_{II4} = \left( 2P_4 / \pi R^4 \right) x \\
K_{II1} &= K_{II2} = K_{II5} = K_{II6} = 0 \\
K_{III2} &= \sigma_{III2} \sqrt{\pi \alpha_x} F_{III} \left( \alpha_x / h_x \right) \sigma_{III2} = kP_2 / \pi R^2 k = \frac{6(1+\nu)}{(7+6\nu)} \\
K_{III4} &= \sigma_{III4} \sqrt{\pi \alpha_x} F_{III} \left( \alpha_x / h_x \right) \sigma_{III4} = \left( 2P_4 / \pi R^4 \right) \sqrt{(R^2 - x^2)} \\
K_{III1} &= K_{III3} = K_{III5} = K_{III6} = 0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Os fatores de forma  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_{II}$  e  $F_{III}$  são apresentados na Eq. (4.9). Substituindo as Eqs. (4.8) e (4.9) nas Eqs. (4.5) e (4.6), obtêm-se os termos de flexibilidade adimensionais Eq. (4.10).

$$\begin{aligned}
F_1 \left( \frac{\alpha_x}{h_x} \right) &= \sqrt{\left( \frac{\tan \lambda}{\lambda} \right)} \left[ \frac{0.752 + 2.02(\alpha_x/h_x) + 0.37(1 - \sin \lambda)^3}{\cos \lambda} \right] \\
F_2 \left( \frac{\alpha_x}{h_x} \right) &= \sqrt{\left( \frac{\tan \lambda}{\lambda} \right)} \left[ \frac{0.923 + 0.199(1 - \sin \lambda)^4}{\cos \lambda} \right] \\
F_{II} \left( \frac{\alpha_x}{h_x} \right) &= \frac{1.122 - 0.561(\alpha_x/h_x) + 0.085(\alpha_x/h_x)^2 + 0.18(\alpha_x/h_x)^3}{\sqrt{[1 - (\alpha_x/h_x)]}} \\
F_{III} \left( \frac{\alpha_x}{h_x} \right) &= \left( \sqrt{\left( \frac{\tan \lambda}{\lambda} \right)} \right) \quad \lambda = \frac{\pi \alpha_x}{2h_x}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{11} &= \frac{ER}{1-\nu^2} c_{11} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\bar{\alpha}_x} \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \bar{x} F_1^2 \left( \bar{z} / \bar{h}_x \right) d\bar{x} d\bar{z} \\
\bar{c}_{15} &= \frac{ER^2}{1-\nu^2} c_{15} = \frac{8}{\pi} \int_0^{\bar{\alpha}_x} \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \bar{z} \sqrt{(1 - \bar{x}^2)} F_1 \left( \bar{z} / \bar{h}_x \right) F_2 \left( \bar{z} / \bar{h}_x \right) d\bar{x} d\bar{z} \\
\bar{c}_{16} &= \frac{ER^2}{1-\nu^2} c_{16} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\bar{\alpha}_x} \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \bar{x} \bar{z} F_1^2 \left( \bar{z} / \bar{h}_x \right) d\bar{x} d\bar{z} \\
\bar{c}_{22} &= \frac{ER}{1-\nu^2} c_{22} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\bar{\alpha}_x} \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \bar{z} F_{III}^2 \left( \bar{z} / \bar{h}_x \right) d\bar{x} d\bar{z} \\
\bar{c}_{24} &= \frac{ER^2}{1-\nu^2} c_{24} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\bar{\alpha}_x} \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \sqrt{(1 - \bar{x}^2)} \bar{z} F_{III}^2 \left( \bar{z} / \bar{h}_x \right) d\bar{x} d\bar{z} \\
\bar{c}_{33} &= \frac{ER}{1-\nu^2} c_{33} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\bar{\alpha}_x} \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \bar{z} F_{II}^2 \left( \bar{z} / \bar{h}_x \right) d\bar{x} d\bar{z} \\
\bar{c}_{34} &= \frac{ER^2}{1-\nu^2} c_{34} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\bar{\alpha}_x} \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \bar{x} \bar{z} F_{II}^2 \left( \bar{z} / \bar{h}_x \right) d\bar{x} d\bar{z} \\
\bar{c}_{44} &= \frac{ER^3}{1-\nu^2} c_{34} = \frac{8}{\pi} \int_0^{\bar{\alpha}_x} \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \bar{x}^2 \bar{z} F_{II}^2 \left( \bar{z} / \bar{h}_x \right) + (1 + \nu) (1 - \bar{x}^2) \bar{z} F_{III}^2 \left( \bar{z} / \bar{h}_x \right) d\bar{x} d\bar{z} \\
\bar{c}_{55} &= \frac{ER^3}{1-\nu^2} c_{55} = \frac{32}{\pi} \int_0^{\bar{\alpha}_x} \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \bar{z} (1 - \bar{x}^2) F_2^2 \left( \bar{z} / \bar{h}_x \right) d\bar{x} d\bar{z} \\
\bar{c}_{56} &= \frac{ER^3}{1-\nu^2} c_{56} = \frac{32}{\pi} \int_0^{\bar{\alpha}_x} \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \bar{x} \bar{z} \sqrt{(1 - \bar{x}^2)} F_1 \left( \bar{z} / \bar{h}_x \right) F_2 \left( \bar{z} / \bar{h}_x \right) d\bar{x} d\bar{z} \\
\bar{c}_{66} &= \frac{ER^3}{1-\nu^2} c_{66} = \frac{16}{\pi} \int_0^{\bar{\alpha}_x} \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \bar{x}^2 \bar{z} F_1^2 \left( \bar{z} / \bar{h}_x \right) d\bar{x} d\bar{z}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

onde,

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= x/R \\
 \bar{z} &= z/R \\
 \bar{h}_x &= h_x/R \\
 \bar{b} &= b/R \\
 \bar{\alpha}_x &= \alpha_x/R
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Os limites das integrais da Eq. (4.10) podem ser calculados como mostra a Eq. (4.12). A matriz de flexibilidade nodal (Eq. (4.13)) para o elemento finito com trinca é dada pela soma da matriz de flexibilidade adicional nodal  $\mathbf{c}$ , apresentada pela Eq. (4.14), com a matriz de flexibilidade nodal  $\mathbf{c}_0$  do elemento sem trinca, conforme mostrado em Papadopoulos e Dimarogonas (1987).

$$\begin{aligned}
 b &= \sqrt{[R^2 - (R - \alpha)^2]} \\
 \bar{b} &= \sqrt{[1 - (1 - \bar{\alpha})^2]} \\
 \alpha_x &= \frac{h_x}{2} - (R - \alpha) = \sqrt{(R^2 - x^2)} - (R - \alpha) \\
 \bar{\alpha}_x &= \frac{\bar{h}_x}{2R} - (1 - \frac{\alpha}{R}) = \sqrt{(1 - \bar{x}^2)} - (1 - \bar{\alpha}) \\
 h_x &= 2\sqrt{(R^2 - x^2)} \\
 \bar{h}_x &= 2\sqrt{(1 - \bar{x}^2)}
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\mathbf{c}_{ce} = [\mathbf{c}_0] + [\mathbf{c}] \tag{4.13}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{15} & \bar{c}_{16} \\ & \bar{c}_{22} & 0 & \bar{c}_{24} & 0 & 0 \\ & & \bar{c}_{33} & \bar{c}_{34} & 0 & 0 \\ & & & \bar{c}_{44} & 0 & 0 \\ & & & & \bar{c}_{55} & \bar{c}_{56} \\ sim. & & & & & \bar{c}_{66} \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

Os coeficientes de flexibilidade adicional são mostrados na Fig. 4.3.

O elemento finito adotado neste trabalho para representar o eixo possui dois nós com quatro GDLs por nó. Logo, desconsiderando as forças axiais  $P_1$ ,  $P_7$  e os momentos  $P_4$ , e  $P_{10}$  da Fig. 4.1, além dos modos de carregamento *II* e *III* (ver em Fig. 4.1) por serem menos expressivos

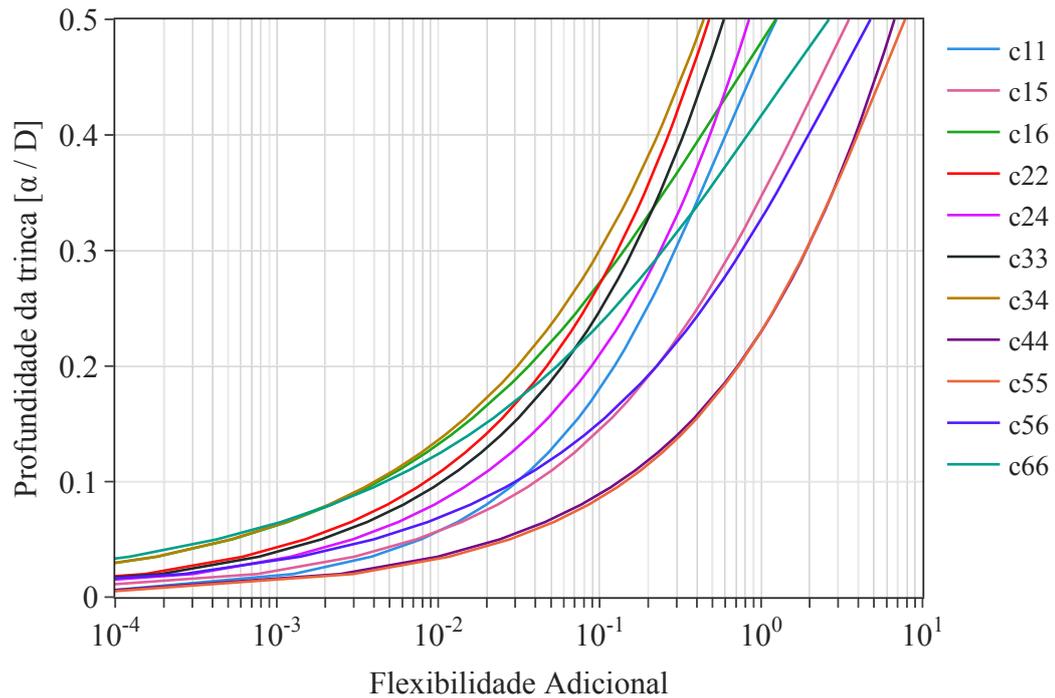


Figura 4.3: Flexibilidades adicionais introduzidas pela trinca em um elemento de eixo.

comparados ao modo de carregamento  $I$ , a flexibilidade adicional nodal inserida no elemento de eixo devido à trinca expressa pela Eq. (4.15) é representada somente pelos coeficientes  $c_{55}$ ,  $c_{56}$  e  $c_{66}$ .

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \bar{c}_{55} & \bar{c}_{56} \\ sim. & & & \bar{c}_{66} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Para melhor visualização os coeficientes resultantes para os GDLs são apresentados na Fig. 4.4

## 4.2 Modelos para representar o *breathing*

Existem diversas abordagens para representar o mecanismo *breathing* descritas pela literatura. Este mecanismo ocorre quando as vibrações em um rotor com trinca são dominadas pela deflexão estática do eixo.

Quase todos os estudos sobre este tema assumem que quando os carregamentos estáticos prevalecem sobre os dinâmicos (eixos horizontais relativamente pesados com pequeno nível

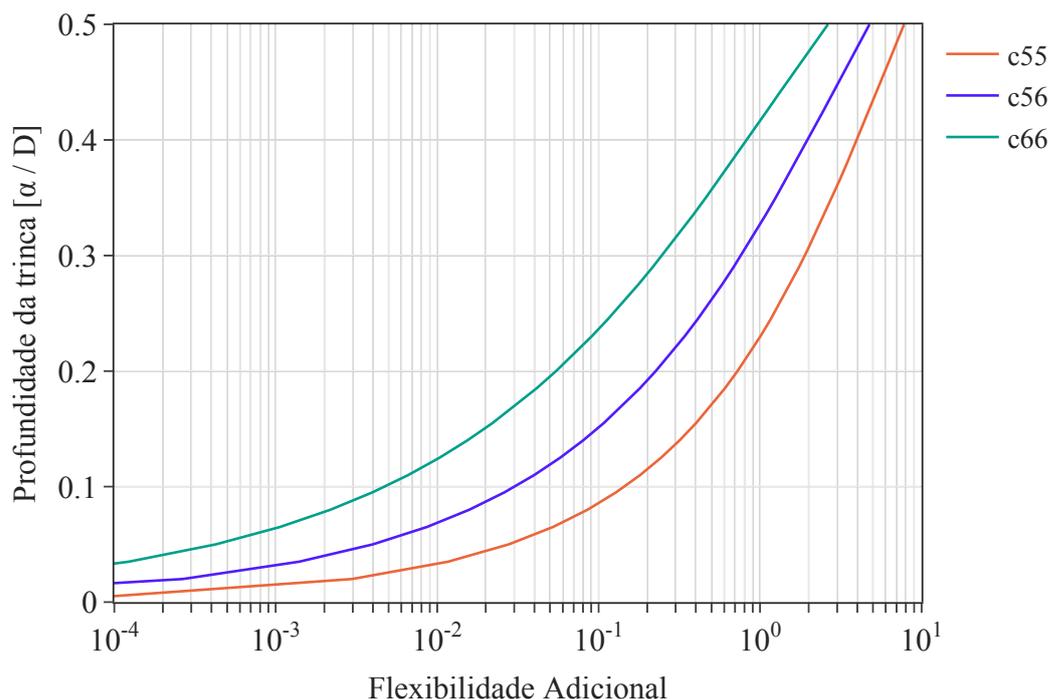


Figura 4.4: Flexibilidades adicionais introduzidas pela trinca em um elemento de eixo com 4 GDL por nó.

de desbalanceamento), a trinca abre e fecha gradualmente a cada revolução do sistema. Desta forma, o *breathing* assume uma condição de *Weight Dominance*.

Dentre os modelos mais citados, têm-se o modelo de Gasch (1993) e o modelo proposto por Mayes e Davies (1984) que se baseiam no mecanismo *breathing* para trincas transversais. Os modelos que apresentam o comportamento *breathing*, devem incorporar a flexibilidade adicional em função da abertura da trinca, que pode ser de forma gradual (modelo de Mayes) ou de forma abrupta (modelo de Gasch). Ferreira (2010) explica que diferentemente do modelo de trinca que permanece sempre aberta (trinca aberta), o *breathing* representa o fenômeno através do qual são observadas aberturas e fechamentos consecutivos da trinca em função do carregamento cíclico a ela imposta e do próprio peso do eixo. Além dos conceitos da mecânica da fratura linear, esses modelos utilizam funções matemáticas que caracterizam essa condição.

De maneira geral, a deflexão em uma posição de disco, por exemplo, com uma trinca em sua proximidade, pode ser escrita como mostrado pela Eq. (4.16), onde  $c_0$  é a flexibilidade sem trinca,  $\Delta c_\xi$  é a flexibilidade adicional na direção rotativa de  $Z$  e  $f_\xi$ ,  $f_\eta$  é a força nas direções rotativas de  $Z$  e  $X$  respectivamente. O termo da flexibilidade adicional - direção  $X$ , muitas vezes é desprezado por apresentar valores consideravelmente menores, ou seja, possui influência que comparativamente à direção  $Z$  - onde atua a força peso, pode ser desprezível (BACHSCHMID;

PENNACCHI; TANZI, 2010; GASCH, 1993).

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 + \Delta c_\xi & 0 \\ 0 & c_0 + 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_\xi \\ f_\eta \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

Neste caso as coordenadas fixas são representadas pelo referencial  $O - XYZ$ , enquanto as coordenadas rotativas são representadas pelo referencial  $O - \xi, \eta, \zeta$  baseadas na direção da trinca e na posição angular  $\theta = \omega t$  (Fig. 4.5).

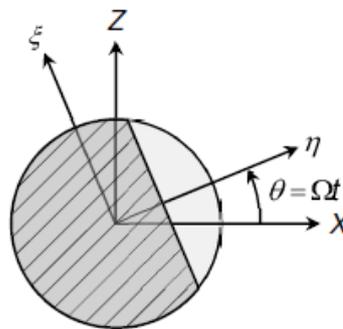


Figura 4.5: Coordenadas rotativas para o modelo de trinca (Fonte: Cavalini Jr (2013)).

O comportamento *breathing* assume que a trinca está completamente aberta quando o eixo  $\eta$  coincide com o eixo negativo de  $Z$  (zona de tensão) e completamente fechada quando  $\eta$  está alinhado ao eixo positivo de  $Z$  (zona de compressão), exemplificado pela Fig 4.6.

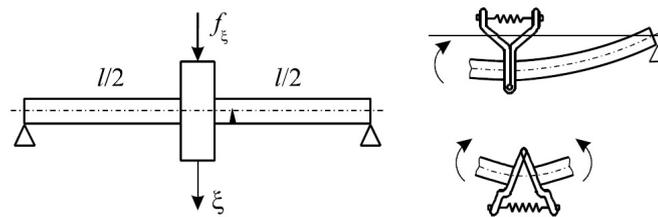


Figura 4.6: Representação da abertura e fechamento da trinca (Fonte: Bachschmid, Pennacchi e Tanzi (2010)).

Assim, este mecanismo é considerado não linear, ou mais exatamente bi-linear (BACHSCHMID; PENNACCHI; TANZI, 2010) conforme as hipóteses assumidas e a Eq. (4.16) pode ser reescrita como:

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} c_0 & 0 \\ 0 & c_0 \end{bmatrix} + f(\Omega t) \begin{bmatrix} \Delta c_\xi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} f_\xi \\ f_\eta \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

onde  $f(\Omega t)$  é conhecido como *steering function* e será discutido na próxima seção. Para facilitar e tornar mais prática a formulação baseada nas matrizes de rigidez faz-se a inversão da matriz de flexibilidade:

$$\begin{bmatrix} c_0 + f(\Omega t) \Delta c_\xi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{c_0 (c_0 + f(\Omega t) \Delta c_\xi)} \begin{bmatrix} c_0 & 0 \\ 0 & c_0 + f(\Omega t) \Delta c_\xi \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

A rigidez do eixo sem trinca é dada por  $k_0 = 1/c_0$ , logo:

$$\frac{1}{c_0 + \Delta c_\xi} = k_0 - \Delta k_\xi \quad (4.19)$$

onde  $\Delta k_\xi$  é a perda de rigidez devido à abertura da trinca, Calculada a partir da Eq. (4.15):

$$\mathbf{c}_{ce} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{L^3(\frac{a}{4}+1)}{3EI} & 0 & 0 & -\frac{L^2}{2EI} \\ & \frac{L^3(\frac{a}{4}+1)}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} & 0 \\ & & \frac{L}{EI} & 0 \\ \text{sim.} & & & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_0} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \bar{c}_{55} & \bar{c}_{56} & \\ \text{sim.} & & & \bar{c}_{66} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$\Delta k_\xi = \underbrace{\mathbf{c}_0^{-1}}_{k_0} - \underbrace{\mathbf{c}_{ce}^{-1}}_{k_{cx}}(1, 1) \quad (4.21)$$

$$\Delta k_\eta = \underbrace{\mathbf{c}_0^{-1}}_{k_0} - \underbrace{\mathbf{c}_{ce}^{-1}}_{k_{cz}}(2, 2)$$

Assim a formulação passa a ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} f_\xi \\ f_\eta \end{Bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 \end{bmatrix} - f(\Omega t) \begin{bmatrix} \Delta k_\xi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{F}_{rot} = [\mathbf{K}_{0,rot} - f(\Omega t) \Delta \mathbf{K}_{rot}(\xi_{rot}, t)] \mathbf{q}_{rot} \quad (4.23)$$

onde  $\mathbf{F}_{rot}$  e  $\mathbf{q}_{rot}$  são os vetores das forças elásticas e os deslocamentos em coordenadas rotativas respectivamente. A obtenção das matrizes em coordenadas fixas é dada pela multiplicação

da matriz de transformação:

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 \\ -S_1 & C_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ X \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

onde  $C_1 = \cos(\Omega t)$  e  $S_1 = \sin(\Omega t)$ .

$$\mathbf{q}_{rot} = [\mathbf{T}(\Omega t)] \mathbf{q}_{inercial} \quad (4.25)$$

Similarmente:

$$\mathbf{F}_{rot} = [\mathbf{T}(\Omega t)] \mathbf{F}_{inercial} \quad (4.26)$$

$$\mathbf{F}_{inercial} = [\mathbf{T}(\Omega t)]^T \mathbf{F}_{rot} = [\mathbf{T}(\Omega t)]^T [\mathbf{K}_{0,rot} - f(\Omega t) \Delta \mathbf{K}_{rot}(\xi_{rot}, t)] [\mathbf{T}(\Omega t)] \mathbf{q}_{inercial}$$

A Eq. (4.26) corresponde explicitamente às Eqs. (4.27).

$$\begin{Bmatrix} f_Z \\ f_X \end{Bmatrix} = \left[ \begin{bmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 \end{bmatrix} - f(\Omega t) \Delta k_\xi \begin{bmatrix} C_1^2 & S_1 C_1 \\ S_1 C_1 & S_1^2 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} Z \\ X \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

$$\begin{Bmatrix} f_Z \\ f_X \end{Bmatrix} = \left[ \begin{bmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} f(\Omega t) \Delta k_\xi \begin{bmatrix} 1 + C_2 & S_2 \\ S_2 & 1 - C_2 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} Z \\ X \end{Bmatrix}$$

onde  $C_2 = \cos(2\Omega t)$  e  $S_2 = \sin(2\Omega t)$ .

De maneira análoga, quando se amplia as considerações referentes aos coeficientes de flexibilidade / rigidez na direção  $X$  ( $\eta$ ) (LIONG, 2014):

$$\begin{Bmatrix} f_\xi \\ f_\eta \end{Bmatrix} = \left[ \begin{bmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 \end{bmatrix} - f(\Omega t) \begin{bmatrix} \Delta k_\xi & 0 \\ 0 & \Delta k_\eta \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\begin{Bmatrix} f_Z \\ f_X \end{Bmatrix} = \left[ \begin{bmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 \end{bmatrix} - f(\Omega t) \begin{bmatrix} \Delta k_\xi C_1^2 + \Delta k_\eta S_1^2 & \Delta k_2 S_1 C_1 \\ \Delta k_2 S_1 C_1 & \Delta k_\xi S_1^2 + \Delta k_\eta C_1^2 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} Z \\ X \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

$$\begin{Bmatrix} f_Z \\ f_X \end{Bmatrix} = \left[ \begin{bmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} f(\Omega t) \begin{bmatrix} \Delta k_1 + \Delta k_2 C_2 & \Delta k_2 S_2 \\ \Delta k_2 S_2 & \Delta k_1 + \Delta k_2 C_2 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} Z \\ X \end{Bmatrix}$$

onde:

$$\begin{aligned}\Delta k_1 &= \Delta k_\xi + \Delta k_\eta \\ \Delta k_2 &= \Delta k_\xi - \Delta k_\eta\end{aligned}\quad (4.30)$$

Logo, pode-se definir que a modelagem do comportamento *breathing* pode ser feita através do cálculo da variação de rigidez para o eixo com trinca que é expresso por uma série de cossenos truncada. A matriz de rigidez pode ainda ser escrita conforme mostra a Eq. (4.31), na qual a mesma é duas vezes dependente do tempo.

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}(\Omega, t)] = [\mathbf{K}_0] - [\Delta\mathbf{K}(\Omega, t)] \quad (4.31)$$

### 4.3 Equações de movimento e linearização para um eixo horizontal com trinca transversal

A equação (4.32) apresenta o comportamento do movimento de um rotor na presença de uma trinca transversal (Fig. 4.7), com velocidade de rotação constante  $\Omega$ , incluindo massa de desbalanceamento em um disco, coeficiente de amortecimento  $c$  e a matriz de rigidez derivada da Eq. (4.31).

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_Z \\ f_X \end{Bmatrix} = me\Omega^2 \begin{Bmatrix} C_\delta \\ S_\delta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} mg \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

$$[\mathbf{M}] \{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}] \{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}(\Omega, t)] \{\mathbf{q}\} = \mathbf{F}_u + \mathbf{W}$$

onde  $C_\delta = \cos(\Omega t + \delta)$ ,  $S_\delta = \sin(\Omega t + \delta)$ ,  $[\mathbf{M}]$  e  $[\mathbf{C}]$  representam a matriz de massa e amortecimento (incluindo efeito giroscópico) respectivamente.  $[\mathbf{F}_u]$  é o vetor das forças de desbalanceamento e  $\mathbf{W}$  é o vetor de força peso.

O vetor de força peso é de grande importância quando as equações do movimento são linearizadas. Considerando um rotor horizontal pesado, sem trinca, a deflexão estática  $\mathbf{x}_0$  é grande em comparação com as deflexões adicionais causadas pelo comportamento dinâmico do eixo rotativo (ver Fig. 4.7). Por exemplo, para o rotor de uma grande turbina, a deflexão estática deve ser da ordem de 1 mm, enquanto em operação a amplitude de vibração observada é da ordem de 250  $\mu\text{m}$  (SAWICKI et al., 2011).

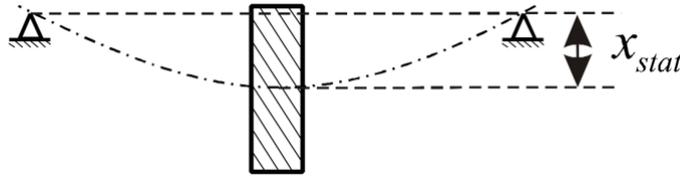


Figura 4.7: Representação da deflexão estática para rotores pesados - fonte: Bachschmid, Pennacchi e Tanzi (2010).

A deflexão total é dada então pela soma da parcela de deflexão estática com a parcela de deflexão dinâmica mostrada na Eq. (4.33).

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} mg/k_0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \Delta\mathbf{x}(t) \quad (4.33)$$

Para linearizar a equação do movimento é necessário incluir o efeito de peso dominante além das deflexões acima descritas. A Eq. (4.32) pode então ser escrita como (fazendo o deslocamento  $\Delta\mathbf{x}(t) = \Delta\mathbf{q}(t)$ ):

$$[\mathbf{M}] \Delta\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{C}] \Delta\dot{\mathbf{q}} + ([\mathbf{K}_0] - [\Delta\mathbf{K}(\Omega t)]) (\mathbf{q}_0 + \Delta\mathbf{q}) = \mathbf{F}_u + \mathbf{W} \quad (4.34)$$

Considerando que para o equilíbrio estático:

$$\begin{bmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{stat} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} mg \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

$$[\mathbf{K}_0] \mathbf{q}_0 = \mathbf{W}$$

Substituindo a Eq. (4.35) em (4.34), tem-se que:

$$[\mathbf{M}] \Delta\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{C}] \Delta\dot{\mathbf{q}} + ([\mathbf{K}_0] - [\Delta\mathbf{K}(\Omega t)]) \Delta\mathbf{q} = \mathbf{F}_u + [\Delta\mathbf{K}(\Omega t)] \mathbf{q}_0 \quad (4.36)$$

A matriz de rigidez periódica variante no tempo  $[\Delta\mathbf{K}(t)]$  aparece duas vezes. No lado esquerdo, determina-se (junto com o amortecimento) se o sistema é estável ou não. No lado direito, essa matriz multiplicada pela deflexão estática  $\mathbf{q}_0$  produz uma força de excitação adicional - a excitação equivalente à trinca - que é periódica no tempo.

Uma aproximação comumente usada na análise de rotores trincados é conhecida como

*weight dominance* - esta é uma condição que ocorre quando os carregamentos estáticos prevalecem sobre os dinâmicos (eixos horizontais relativamente pesados com pequeno nível de desbalanceamento), a trinca abre e fecha gradualmente a cada revolução do sistema. Se o sistema possui essa característica, é possível assumir que  $\mathbf{q}_0 \gg \Delta\mathbf{q}$ . Por exemplo, para um rotor de turbina de grande porte, a deflexão estática pode ser da ordem de 1 mm, enquanto na velocidade de operação, a amplitude de vibração é tipicamente de 50  $\mu\text{m}$ . Mesmo em uma velocidade crítica, o valor admissível da amplitude de vibração será de apenas 250  $\mu\text{m}$  (SAWICKI et al., 2011). Assim, considerando apenas as deflexões dinâmicas são consideradas:

$$[\mathbf{M}] \Delta\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{C}] \Delta\dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K}_0] \Delta\mathbf{q} = \mathbf{F}_u - [\Delta\mathbf{K}(t)] \Delta\mathbf{q} \quad (4.37)$$

#### 4.4 Breathing steering funtions

Nesta seção, serão descritos alguns modelos para o *Breathing steering funtions* -  $f(\Omega t)$  que variam conforme proposto por Gasch (1993), Mayes e Davies (1984), além da trinca *open*.

##### 4.4.1 Modelo de Gasch

O modelo proposto por Gasch (1993) (GASCH, 1993) assume uma transição entre abertura e o fechamento da trinca de maneira abrupta. Também é conhecido como *hinge model* e assume a *steering funtions* -  $f(\Omega t)$  conforme mostrado:

$$f(\Omega t) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} \leq \Omega t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq \Omega t < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad (4.38)$$

Buscando uma solução numérica mais representativa para este modelo (em termos dos componentes 2X, 3X, 4X ...) a *steering funtions* -  $f(\Omega t)$  representada por uma onda quadrada, pode ser expandida por uma série de Fourier - Eq. (4.39):

$$f(\Omega t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t) \quad (4.39)$$

Os coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$  são determinados conforme mostrado nas equações seguintes.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx = 1 \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx) dx, \text{ para } n = 1, 2, 3 \dots \\
a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = \frac{2}{\pi} \\
a_3 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x) dx = -\frac{2}{3\pi} \\
a_5 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(5x) dx = \frac{2}{5\pi} \\
a_7 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(7x) dx = -\frac{2}{7\pi} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Observa-se pela Eq. 4.41 que para  $n$  par,  $a_n$  é zero.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(nx) dx = 0 \tag{4.42}$$

Logo,

$$f(\Omega t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( C_1 - \frac{C_3}{3} + \frac{C_5}{5} - \frac{C_7}{7} \right) \tag{4.43}$$

onde  $C_1 = \cos(\Omega t)$ ,  $C_3 = \sin(3\Omega t)$ ,  $C_5 = \sin(5\Omega t)$  e  $C_7 = \sin(7\Omega t)$

Através da Eq. (4.28) pode-se então determinar a matriz de rigidez em coordenadas rotativas

$\mathbf{k}_{RG}$  :

$$\begin{Bmatrix} f_\xi \\ f_\eta \end{Bmatrix} = \underbrace{\left( \begin{bmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 \end{bmatrix} - f(\Omega t) \begin{bmatrix} \Delta k_\xi & 0 \\ 0 & \Delta k_\eta \end{bmatrix} \right)}_{=\mathbf{k}_{RG}} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \tag{4.44}$$

$$\mathbf{k}_{RG} = \begin{bmatrix} k_\xi & 0 \\ 0 & k_\eta \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

onde  $k_\xi$  e  $k_\eta$  são as rigidezes ao longo da direção  $\xi$  e  $k_\eta$  quando a trinca encontra-se aberta.

$$\begin{aligned}
k_\xi &= k_0 - \frac{\Delta k_\xi}{2} + \frac{2\Delta k_\xi}{\pi} \left( C_1 - \frac{C_3}{3} + \frac{C_5}{5} - \frac{C_7}{7} \dots \right) \\
k_\eta &= k_0 - \frac{(k_0 - k_{cx})}{2} + \frac{2(k_0 - k_{cx})}{\pi} \left( C_1 - \frac{C_3}{3} + \frac{C_5}{5} - \frac{C_7}{7} \dots \right)
\end{aligned} \tag{4.46}$$

$$k_{\eta} = k_0 - \frac{\Delta k_{\eta}}{2} + \frac{2\Delta k_{\eta}}{\pi} \left( C_1 - \frac{C_3}{3} + \frac{C_5}{5} - \frac{C_7}{7} \dots \right) \quad (4.47)$$

$$k_{\eta} = k_0 - \frac{(k_0 - k_{cz})}{2} + \frac{2(k_0 - k_{cz})}{\pi} \left( C_1 - \frac{C_3}{3} + \frac{C_5}{5} - \frac{C_7}{7} \dots \right)$$

As curvas representativas para este modelo em termos da Eq. (4.46) e (4.47) são mostradas na Fig. 4.8, onde diferentes profundidades de trinca foram avaliadas para uma máquina rotativa genérica. O intuito aqui é obter uma visualização a respeito da mudança abrupta no comportamento referente à abertura e fechamento da trinca.

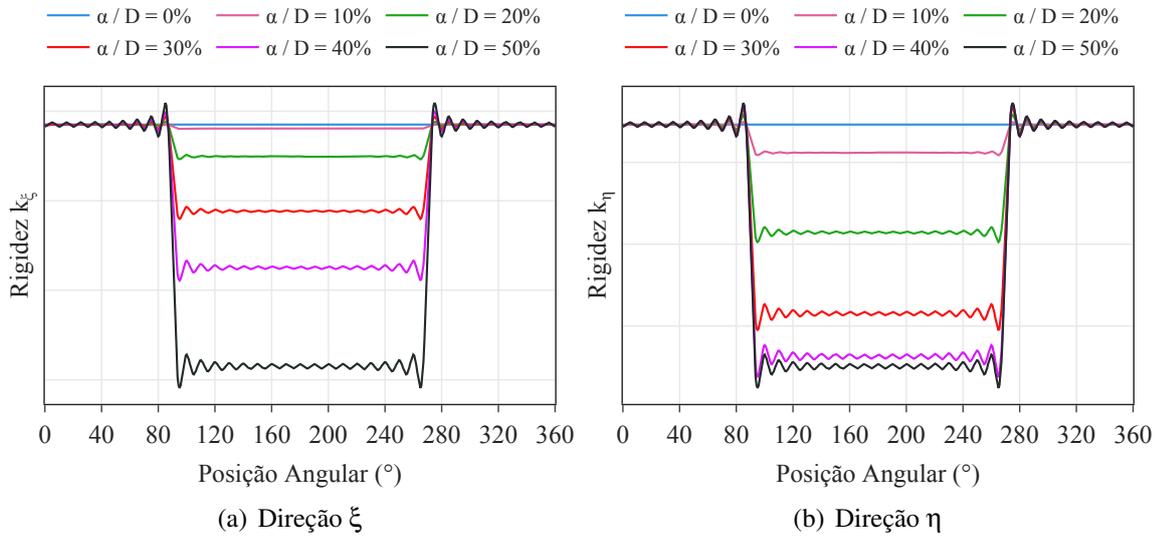


Figura 4.8: Curvas das rigidezes em coordenadas rotativas segundo o modelo de Gasch.

Em coordenadas fixas (conforme passagem mostrada na Eq. (4.26)), temos que:

$$\mathbf{k}_{FG} = [\mathbf{T}(\Omega t)]^T k_{\xi/\eta} [\mathbf{T}(\Omega t)] \quad (4.48)$$

A Fig. 4.9 apresenta a curva que representa os termos de rigidezes em coordenadas fixas. Note que, conforme mencionado, a abertura e fechamento da trinca ocorrem de maneira abrupta quando a posição angular da mesma está em  $90^\circ$  e  $270^\circ$  (em relação ao eixo X positivo).

#### 4.4.2 Modelo de Mayes

Mayes e Davies (1984), propuseram um modelo igualmente não linear, embora incorpore uma transição mais suave entre o movimento de abertura e fechamento da trinca. Para este modelo, a *steering functions* -  $f(\Omega t)$  é considerada sendo uma função cosseno:

$$f(\Omega t) = \frac{1}{2} (1 + C_1) \quad (4.49)$$

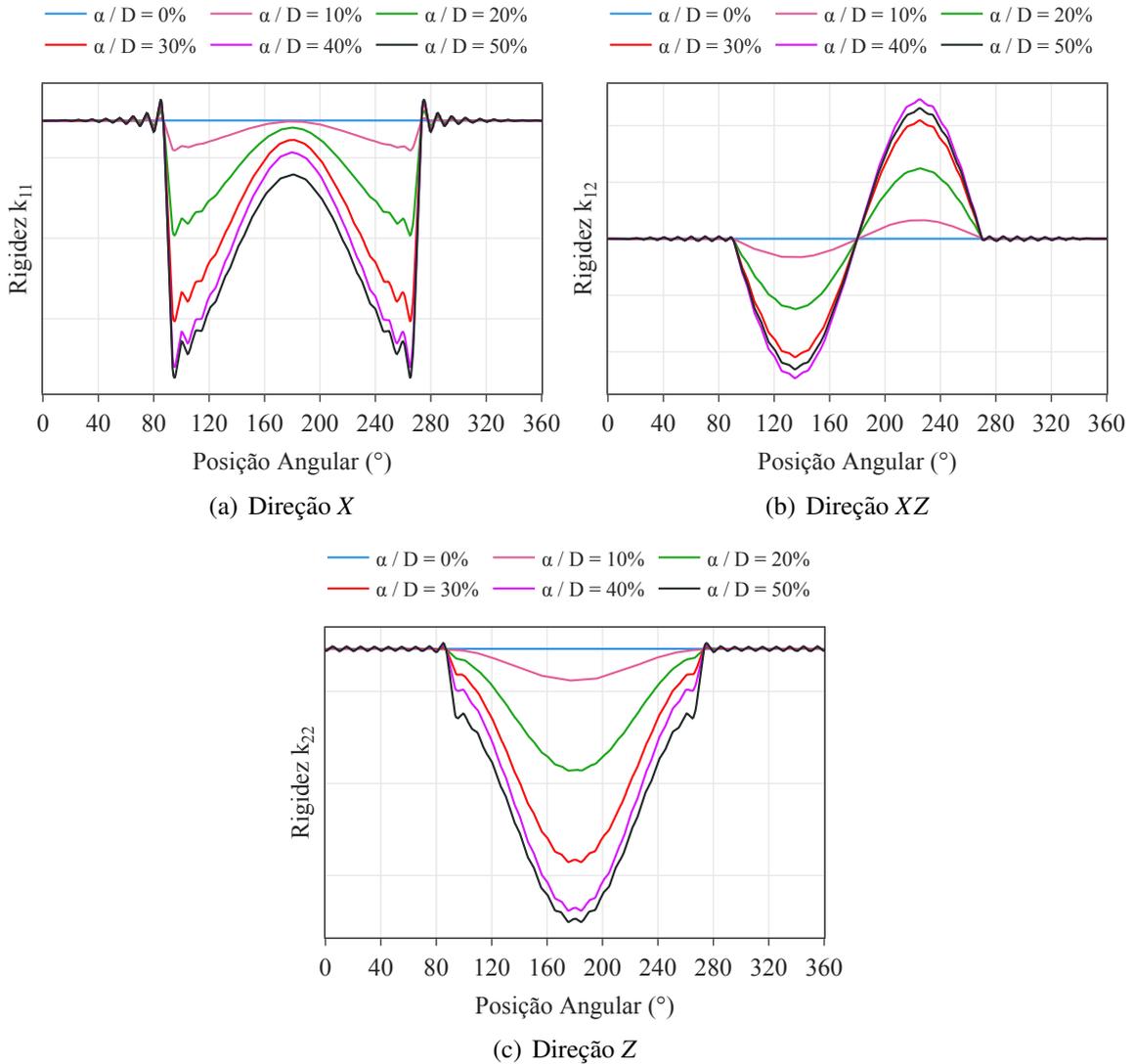


Figura 4.9: Curvas das rigidezes em coordenadas fixas segundo o modelo de Gasch.

A matriz dos termos contendo as rigidezes  $k_{\xi}$  e  $k_{\eta}$  é semelhante à apresentada na Eq. (4.45). Neste modelo elas podem ser determinadas mediante o uso da *steering functions* e de forma análoga à metodologia apresentada anteriormente (Eq. (4.28) - neste caso  $\mathbf{k}_{MR}$ ), sendo a expressão resultante mostrada na Eq (4.50).

$$\begin{aligned}
 k_{\xi} &= \frac{k_0 + k_{\xi}}{2} + \frac{k_0 - k_{\xi}}{2} C_1 \\
 k_{\eta} &= \frac{k_0 + k_{\eta}}{2} + \frac{k_0 - k_{\eta}}{2} C_1
 \end{aligned}
 \tag{4.50}$$

Assim, a trinca encontra-se completamente aberta em  $\Omega t = 180^\circ$ , enquanto em  $\Omega t = 0$  ou  $360^\circ$  a trinca encontra-se fechada. Observa-se a ocorrência de um comportamento suave de transição (Fig. 4.10). As rigidezes em coordenadas fixas são mostradas na Fig. 4.11.

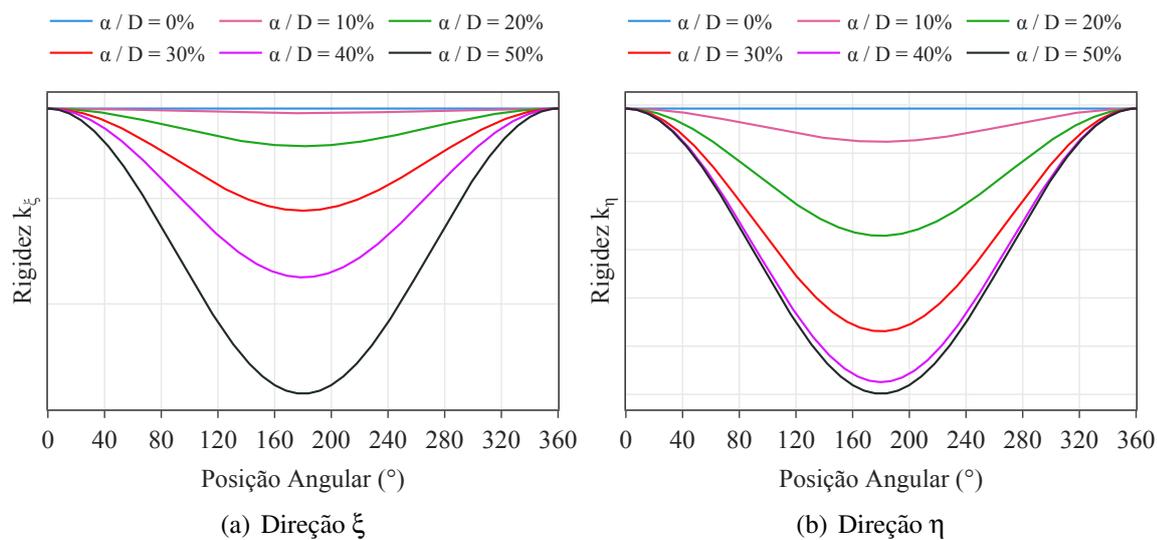


Figura 4.10: Curvas das rigidezes em coordenadas rotativas segundo o modelo de Mayes.

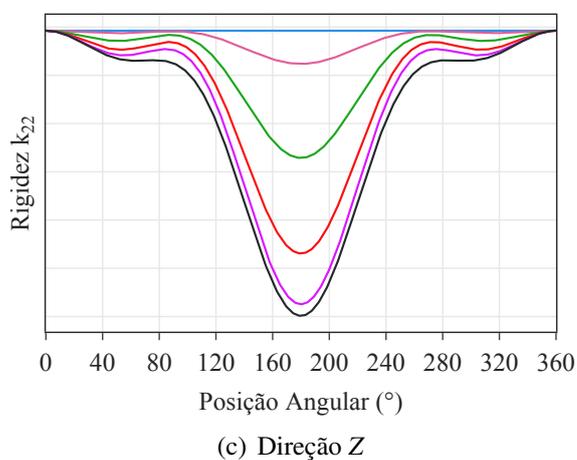
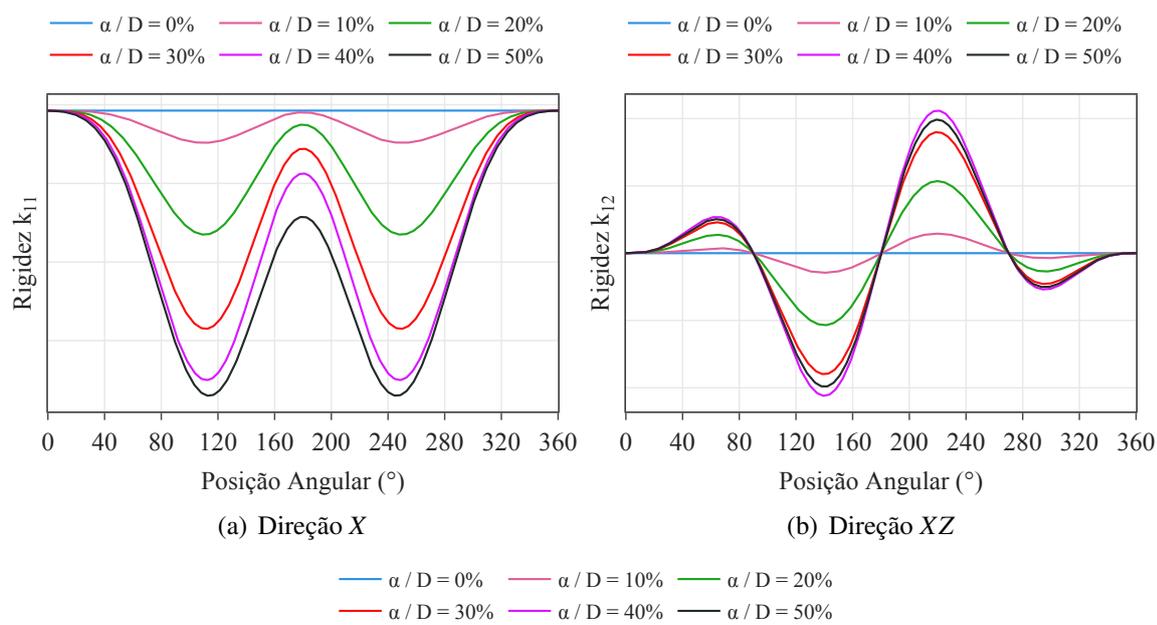


Figura 4.11: Curvas das rigidezes em coordenadas fixas segundo o modelo de Mayes.

#### 4.4.3 Modelo de trinca Open

Os modelos que assumem o comportamento *breathing* alteram a rigidez do rotor somente quando a trinca está total ou parcialmente aberta, portanto, a rigidez será função da orientação do rotor.

Existem casos onde a trinca permanece aberta durante toda a rotação do eixo se o desbalanceamento for muito alto. Ou ainda modelos considerados para uma trinca do tipo *open* em que a trinca se encontra aberta todo o tempo.

Nestes modelos, a *steering function* é dada por um valor unitário:

$$f(\Omega t) = 1 \quad (4.51)$$

Se a trinca permanece aberta, uma assimetria local é mantida e esta condição pode levar a problemas de instabilidade (LIONG, 2014).

A hipótese de uma trinca aberta leva a um comportamento dinâmico semelhante ao de um rotor com momentos de inércia diferentes ao longo de duas direções perpendiculares. A trinca *breathing* assume momentos de inercia que variam como função da posição angular do eixo.

Neste modelo as rigidezes  $k_\xi$  e  $k_\eta$  podem ser determinadas conforme Eq. (4.20) e Eq. (4.28):

$$\begin{aligned} k_\xi &= \underbrace{\mathbf{C}\mathbf{c}^{-1}(1,1)}_{k_{cx}} \\ k_\eta &= \underbrace{\mathbf{C}\mathbf{c}^{-1}(2,2)}_{k_{cz}} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Os termos de rigidezes em coordenadas rotativas são apresentados na Fig. 4.12, enquanto os termos em coordenadas fixas apresentados na Fig. 4.13.

Apesar de ser um modelo descrito pela literatura, em termos práticos possui pouca aplicabilidade quando comparado aos modelos *breathing* quando se trata de rotores horizontais.

Neste trabalho, serão destacados apenas os modelos com o comportamento *breathing* por estarem mais aderentes à proposta apresentada, mas ainda assim é importante pontuar a existência de outras abordagens como a de trinca *open*, que está melhor detalhada no trabalho desenvolvido por Silva (2018).

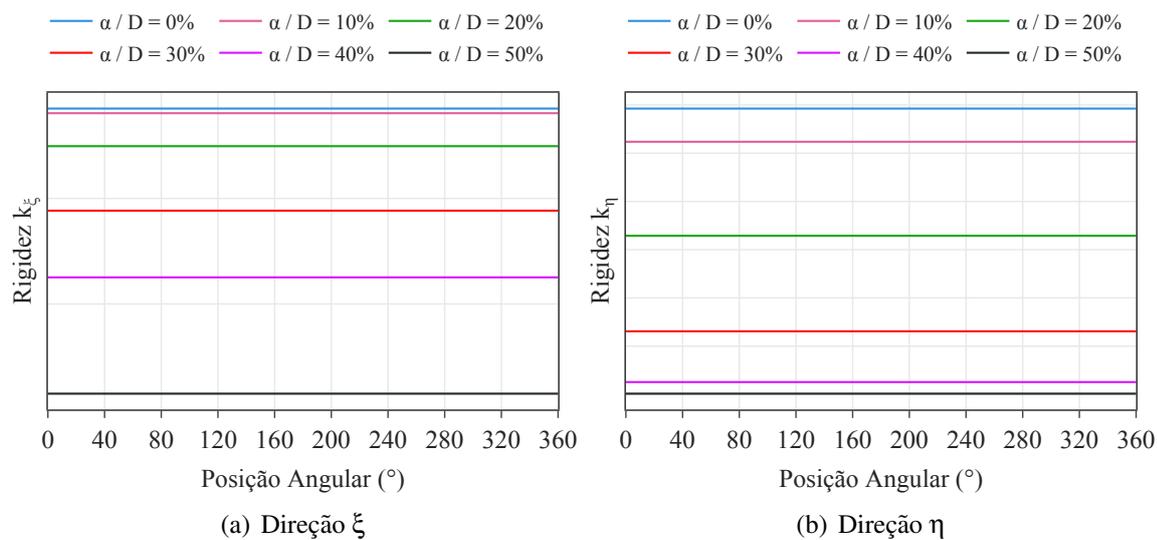


Figura 4.12: Curvas das rigidezes em coordenadas rotativas segundo o modelo *open*.

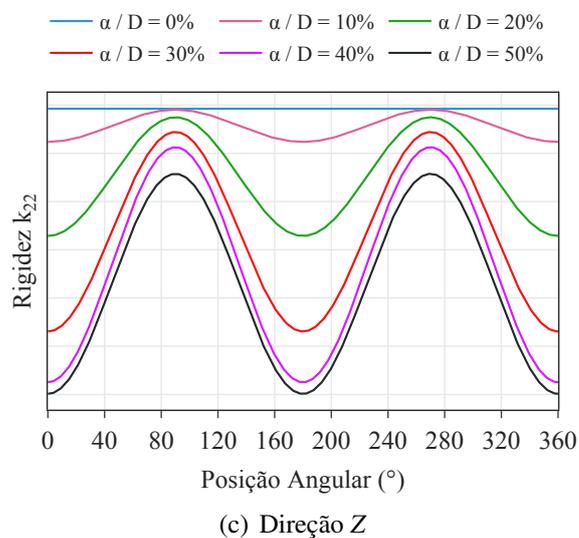
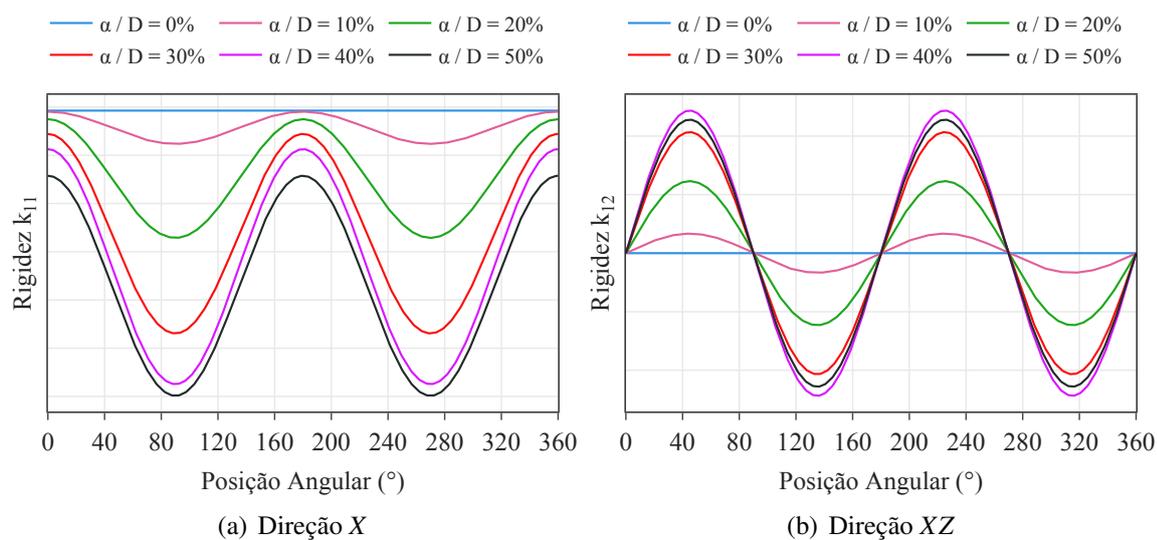


Figura 4.13: Curvas das rigidezes em coordenadas fixas segundo o modelo *open*.

#### 4.5 Modelo de viga equivalente - *Flex*

A abordagem apresentada anteriormente, considera a abertura e fechamento da trinca como função dos carregamentos estáticos do rotor combinados com os carregamentos dinâmicos, que em geral é o fenômeno onde se observa a dominância do peso do rotor sobre as forças de desbalanceamento e inércia - *breathing*. Outros modelos podem também representar e simular a ocorrência de uma trinca transversal com resultados igualmente interessantes do ponto de vista da dinâmica do movimento vibracional do sistema.

Nesta seção apresenta-se o modelo claramente não linear proposto por Bachschmid, Pennacchi e Tanzi (2010). Este modelo foi desenvolvido a partir dos cálculos do campo de tensão que ocorre na região da trinca. Alguns trabalhos de referência abordam com detalhes sobre a metodologia, tais como Morais et al. (2010) e Cavalini Jr (2013).

Considera-se uma distribuição de tensão e deformação linear na área de seção transversal da trinca e a abertura e fechamento da mesma é assumido de acordo com a tensão atuante (CAVALINI JR, 2013).

Este modelo foi validado experimentalmente e quando comparado com modelos robustos como o modelo 3D (que possui um custo computacional elevado), apresenta resultados bastante semelhantes a Bachschmid, Pennacchi e Tanzi (2010).

O primeiro passo para simular um sistema rotativo com esta abordagem é a discretização da seção transversal da trinca e a utilização da matriz de rigidez apresentada na Eq. 4.53 para o elemento finito que será representado por ela. Esta rigidez é determinada assumindo um elemento de viga equivalente de comprimento  $L_c$ , calculada como uma viga de Timoshenko com área e segundo momento de área constantes ao longo de seu comprimento (ver Fig. 4.14).

A relação entre o comprimento  $L_c$  e a profundidade da trinca foi investigada por Bachschmid, Pennacchi e Tanzi (2010), e é apresentada no gráfico da Fig 4.15.

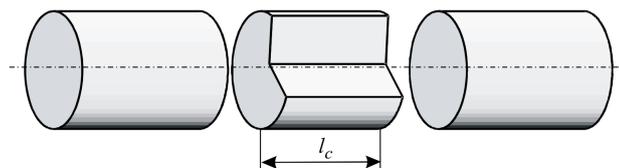


Figura 4.14: Elemento de viga equivalente  $L_c$  (Fonte: Bachschmid, Pennacchi e Tanzi (2010)).

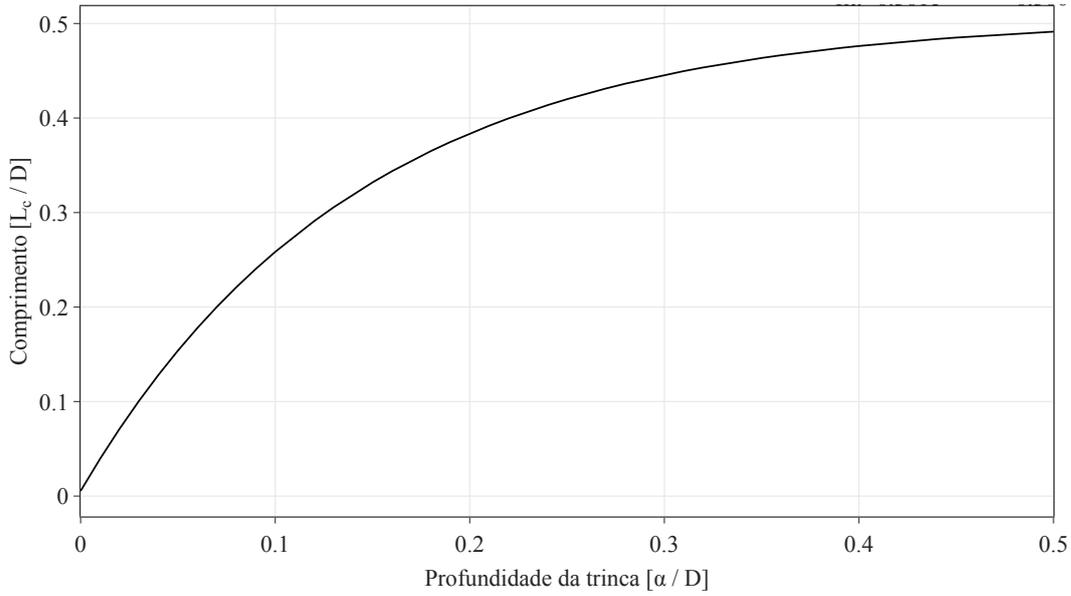


Figura 4.15: Tamanho do elemento equivalente  $L_c$  (Fonte: Bachschmid et al. (2003)).

$$K_{ce} = \begin{bmatrix} b_F & p_F & -q_F & -d_F & -b_F & -p_F & -q_F & -d_F \\ & a_F & c_F & q_F & -p_F & -a_F & c_F & q_F \\ & & e_F & r_F & q_F & -c_F & f_F & s_F \\ & & & h_F & d_F & -q_F & s_F & g_F \\ & & & & b_F & p_F & q_F & d_F \\ & & & & & a_F & -c_F & -q_F \\ & & & & & & e_F & r_F \\ \text{sim.} & & & & & & & h_F \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} a_F &= \frac{12EI_{ZZ}}{L^3(1+\vartheta_{FZZ})} & b_F &= \frac{12EI_{XX}}{L^3(1+\vartheta_{FXX})} & c_F &= \frac{6EI_{ZZ}}{L^2(1+\vartheta_{FZZ})} & d_F &= \frac{6EI_{XX}}{L^2(1+\vartheta_{FXX})} \\ e_F &= \frac{EI_{ZZ}(4+\vartheta_{FZZ})}{L(1+\vartheta_{FZZ})} & f_F &= \frac{EI_{ZZ}(2-\vartheta_{FZZ})}{L(1+\vartheta_{FZZ})} & g_F &= \frac{EI_{XX}(2-\vartheta_{FXX})}{L(1+\vartheta_{FXX})} & h_F &= \frac{EI_{XX}(4+\vartheta_{FXX})}{L(1+\vartheta_{FXX})} \\ p_F &= \frac{12EI_{XZ}}{L^3(1+\vartheta_{FXZ})} & q_F &= \frac{6EI_{XZ}}{L^2(1+\vartheta_{FXZ})} & r_F &= \frac{EI_{XZ}(4+\vartheta_{FXZ})}{L(1+\vartheta_{FXZ})} & s_F &= \frac{EI_{XZ}(2-\vartheta_{FXZ})}{L(1+\vartheta_{FXZ})} \end{aligned} \quad (4.54)$$

onde,  $\vartheta_{FXX} = \frac{12EI_{XX}}{GSL^2}$ ,  $\vartheta_{FZZ} = \frac{12EI_{ZZ}}{GSL^2}$  e  $\vartheta_{FXZ} = \frac{12EI_{XZ}}{GSL^2}$

Nesta abordagem, a abertura e fechamento da trinca são determinados a cada passo de tempo determinando-se os locais onde existem uma zona de tensão e compressão, a partir da subdivisão da seção transversal onde a trinca está localizada, para isso uma notação complexa é utilizada,

facilitando assim os cálculos, conforme mostrado na Fig 4.16.

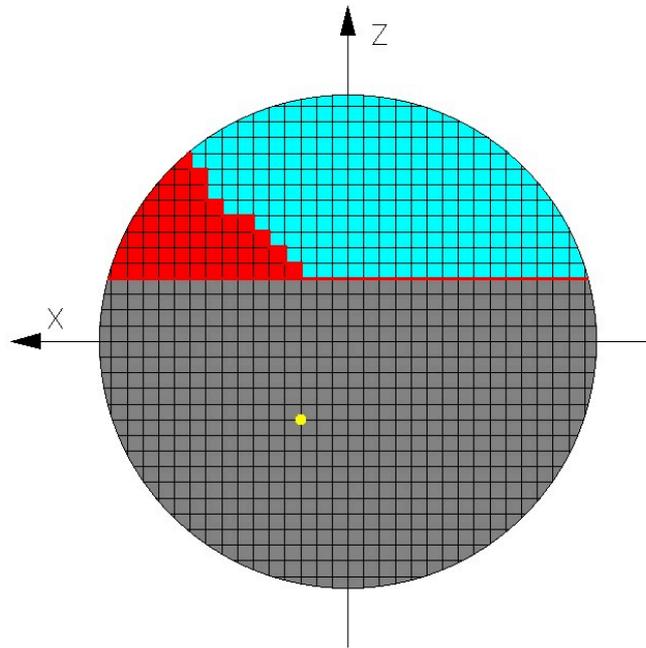


Figura 4.16: Divisão da seção transversal da trinca: ■ - seção da trinca em tração, ■ - seção da trinca em compressão, ■ - seção não trincada, ● - centro geométrico (Fonte: Moraes et al. (2010)).

De acordo com Moraes et al. (2010) e Cavalini Jr (2013) cada nó da discretização pode ser representado por um número complexo do tipo  $R_a = X_a + Z_a i$ , que em uma rotação de  $s$  radianos, é expresso pela soma do deslocamento angular dado pela Eq. 4.55 - ver Fig. 4.17.

$$R_{a+s} = |R_a| e^{i(\theta_a+s)} \quad (4.55)$$

onde,  $\theta_a$  é ângulo inicial dado pelo número complexo de amplitude  $R_a$ .

Inicialmente é calculado os momentos dinâmicos (Eq. (4.56)) associados aos deslocamentos angulares, estes determinados pela solução da equação do movimento (Eq. (3.1)).

$$M_X = EI \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad M_Z = EI \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (4.56)$$

onde  $\partial \theta = \theta_{i+1} - \theta_i$ ,  $\partial \varphi = \varphi_{i+1} - \varphi_i$ , sendo o índice  $i$  o nó da extremidade do elemento de trinca e  $\partial y = L_c$  (Fig. 4.15).

Para a determinação da parcela da trinca que está aberta ou fechada, deve-se portanto calcu-

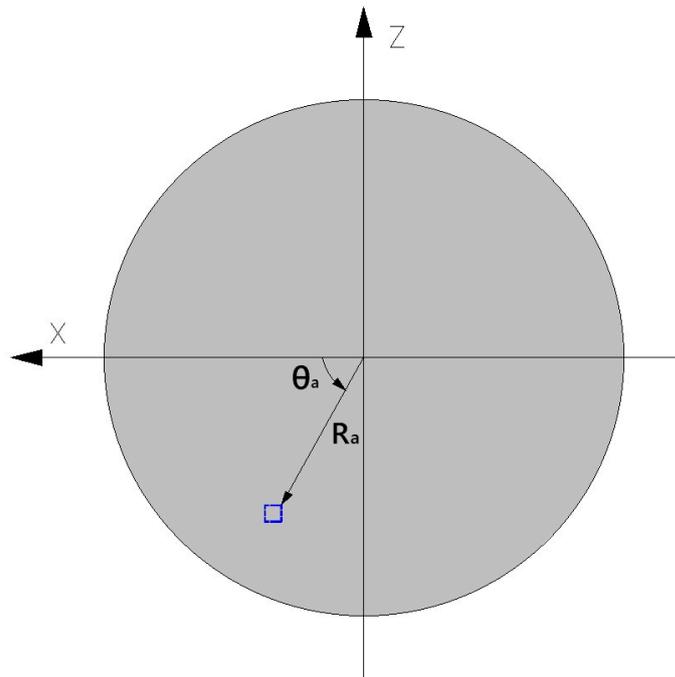


Figura 4.17: Divisão da seção transversal da trinca - representação em números complexos (Fonte: Cavalini Jr (2013)).

lar a distribuição de tensão ao longo da área de seção transversal conforme a Eq (4.57).

$$\sigma_a = \frac{M_Z I_{XX} + M_X I_{XZ}}{I_{XX} I_{ZZ} - I_{XZ}^2} X_{ag} - \frac{M_X I_{ZZ} + M_Z I_{XZ}}{I_{XX} I_{ZZ} - I_{XZ}^2} Z_{ag} \quad (4.57)$$

sendo,  $I_{XX} = \int_{A_r} Z^2 dA_r$ ,  $I_{ZZ} = \int_{A_r} X^2 dA_r$  e  $I_{XZ} = \int_{A_r} XZ dA_r$ .  $X_{ag}$  e  $Z_{ag}$  são as distâncias entre  $C_g$  (centro geométrico) e a posição na malha onde a tensão está sendo calculada. Por fim,  $A_c$  é a área restante da seção transversal.

Assume-se que onde a tensão é de tração (sinal positivo), a trinca está aberta e onde a tensão é de compressão (sinal negativo), a trinca encontra-se fechada.

Após a determinação da parte aberta e fechada (área total da trinca), calcula-se o novo  $C_g$  da seção transversal, e repete-se o cálculo dos momentos de inércia e das tensões atuantes, este processo ocorre até a convergência.

A partir dos momentos de inércia  $I_{XX}$ ,  $I_{ZZ}$ ,  $I_{XZ}$  (ver Fig. 4.18) para cada posição angular do eixo, é possível obter a matriz apresentada pela Eq. (4.53), que será atribuída ao elemento de trinca, e a solução da equação do movimento será determinada em cada passo de tempo. Fica evidente a não linearidade do sistema, já que o mesmo depende da matriz de rigidez do elemento de trinca influenciando a resposta do sistema (MORAIS et al., 2010).

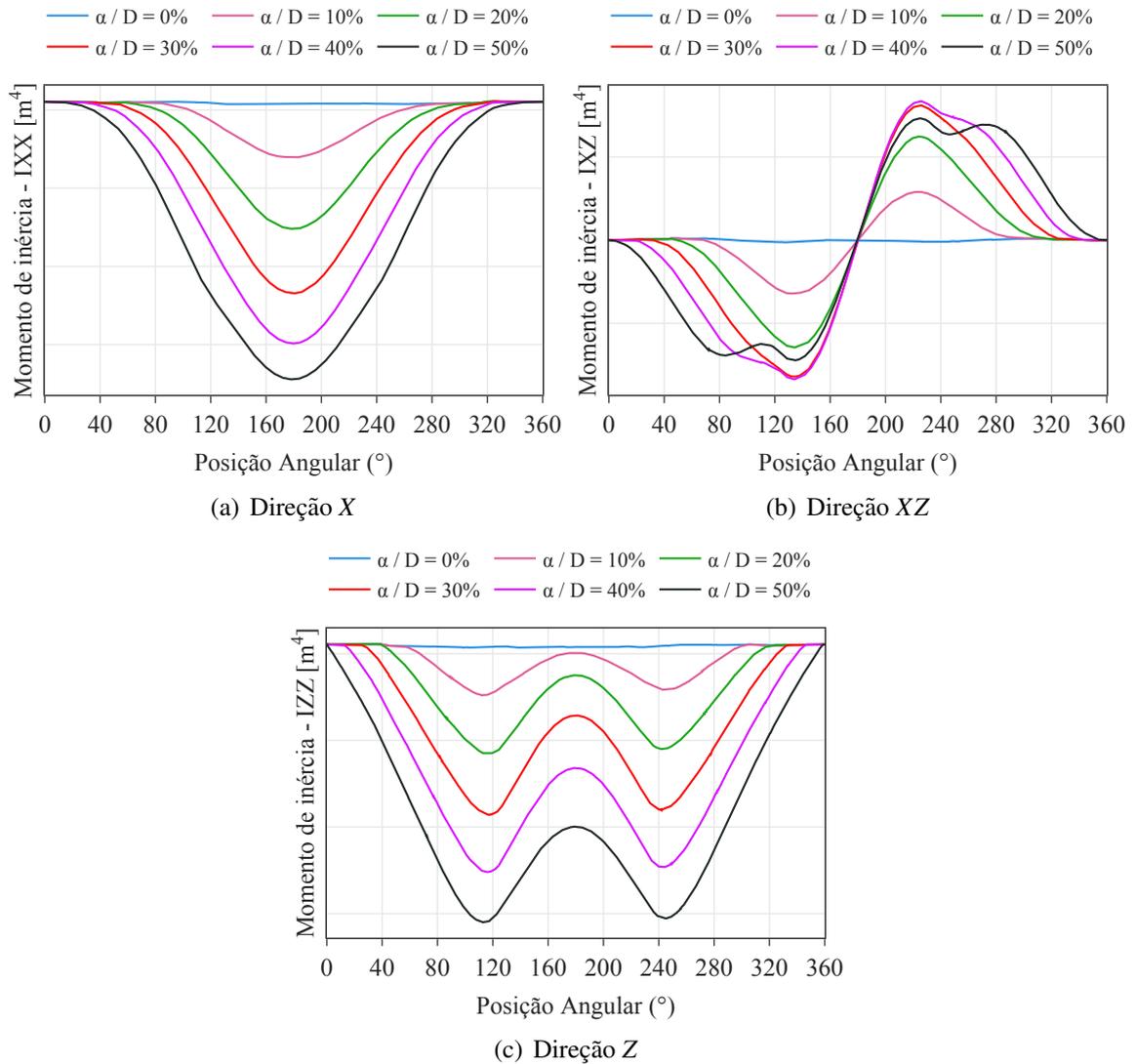


Figura 4.18: Curvas dos momentos de Inércia segundo modelo Flex.

## CAPÍTULO V

### COMBINAÇÃO DE RESSONÂNCIA E TÉCNICA DE DETECÇÃO BASEADA EM SEGUNDA DERIVADA DO MODO DE VIBRAR

Os métodos de SHM baseados em sinais de vibração podem ser considerados bem estabelecidos no contexto de manutenção preditiva para identificação e prevenção de falhas, porém um progresso lento ainda se observa quanto ao que se refere em desenvolvimento de técnicas robustas para detecção de trincas *online* (SAWICKI; FRISWELL; BAAKILINI, 2008).

Com intuito de melhorar este cenário, muitos trabalhos têm sido desenvolvidos a partir da observação das características não lineares destes sistemas, algumas delas apresentadas por Ishida e Yamamoto (2013), que exemplificam que quando um rotor tem características não-lineares fenômenos de salto podem ocorrer. Além disso, vários tipos de ressonâncias não lineares podem ser observadas nas respostas de vibração do sistema. Ressonância sub-harmônica, ressonância super-harmônica e combinação de ressonâncias podem ocorrer quando as frequências naturais, velocidade de rotação e/ou frequência de excitação externa possuem relações específicas, tais como:

- (i) Nas proximidades da velocidade de rotação, onde a velocidade de rotação  $\Omega$  torna-se um múltiplo inteiro de uma frequência natural  $p_i$ . Isto é, quando  $\Omega \approx \pm m p_i$ , uma frequência sub-harmônica  $\Omega_i = \pm \Omega / m (\approx p_i)$  ocorre;
- (ii) Em uma situação oposta, quando  $m \Omega (\approx p_i)$ , uma frequência super-harmônica de valor  $\Omega_i = \pm m \Omega (\approx p_i)$  ocorre;
- (iii) Em um sistema com múltiplos GDLs com frequências naturais  $p_i, p_j, \dots$ , onde a relação  $\Omega = \pm m p_i \pm n p_j \pm \dots$  existe, uma combinação de ressonância nas frequências  $\Omega_i (\approx p_i)$ ,

$\Omega_j (\approx p_j)$  ocorre;

- (iv) Em um sistema com múltiplas forças externas com frequências  $\Omega, \omega_i, \dots$ , uma combinação de ressonância modulada com frequência  $\Omega (= \pm m\Omega \pm n\omega_i \pm \dots \approx p_i)$  ocorre.

Recentemente, foi apresentada uma abordagem não linear para detectar trincas em máquinas rotativas (NICOLETTI; CAVALINI; STEFFEN, 2018). A ideia desta nova técnica é excitar o eixo usando uma força harmônica para induzir ressonâncias combinadas no sistema (conhecidas como combinações de ressonância).

Salienta-se aqui que uma combinação de ressonância, de modo geral, pode ser entendida como o aparecimento de picos na resposta espectral do sistema em virtude do efeito não linear associado. O aparecimento dessas novas frequências no contexto deste trabalho se associa às assinaturas do efeito não linear ocasionado pela presença de trincas transversais no sistema.

Segundo Mani, Quinn e Kasarda (2006), esta técnica de detecção de danos não requer que o eixo opere em uma velocidade específica e pode, portanto, ser usada como uma estratégia de monitoramento de integridade *online* sob cargas normais e condições de operação em estado estacionário.

Neste trabalho, verificou-se a ocorrência de combinações de ressonância como evidência de características não lineares no sistema, tanto através de experimentos quanto de simulações numéricas. Além disso, combinou-se essa metodologia com a técnica conhecida de derivada de segunda ordem do modo de vibrar (normalmente utilizada em vigas) para além de identificar, localizar uma trinca em um eixo rotativo durante seu funcionamento.

A utilização dessas duas técnicas juntas pode ser extremamente benéfica na detecção de danos em sistemas mecânicos, bem como na realização de análises precisas e detalhadas para garantir a segurança e confiabilidade destes sistemas.

## 5.1 Técnicas de combinação de ressonância e segunda derivada do modo de vibrar

Máquinas rotativas são muito utilizadas na indústria que prezam pela máxima segurança nas condições de operação e manutenção, uma vez que paradas não planejadas implicam em eventuais perdas econômicas e falhas não detectadas podem acarretar em desastres catastróficos.

O aparecimento de falhas em rotores ocorrem em vários componentes, destaca-se aqui o surgimento de trincas transversais no eixos sujeitos a cargas de flexão combinada, axiais e/ou torsionais. Vários modelos matemáticos foram propostos para representar os efeitos das trincas

no comportamento estático e dinâmico de eixos rotativos. Alguns deles já mostrados no capítulo anterior.

Quanto às técnicas dedicadas à detecção de trincas em máquinas rotativas, aponta-se algumas com maior relevância diante do tema central do presente estudo: àquelas baseadas na aplicação de uma força de excitação externa (IWATSUBO; ARII; OKS, 1992; ISHIDA; INOUE, 2004; SAWICKI; FRISWELL; BAAKILINI, 2008; SAWICKI; KULESZA, 2015; KULESZA; SAWICKI, 2017). Estes autores observaram o aparecimento de harmônicos em combinações de ressonância devido ao comportamento não linear induzido pela trinca nas respostas de vibração do rotor.

Vale ressaltar que as combinações de ressonância por si só não são eficazes para indicar a localização da trinca ao longo do eixo. Para essa finalidade, a metodologia proposta deve ser combinada com outras técnicas.

Cavalini Jr et al. (2016) associaram as combinações de ressonância e um modelo matemático representativo do rotor e da trinca para identificar a posição desta ao longo do eixo de uma máquina rotativa horizontal. Os resultados obtidos por estes autores demonstraram a eficácia da abordagem proposta. No entanto, os autores ainda destacaram que modelos matemáticos representativos são necessários para obter resultados satisfatórios usando a metodologia considerada.

Outra técnica usual relatada na literatura, refere-se na observação das derivadas do modo de vibrar. Muitos pesquisadores propuseram um indicador de danos usando diferenças entre as derivadas de segunda ordem do modo de vibrar de estruturas com danos e estruturas intactas. A maioria dos trabalhos está relacionada à localização de falhas nas estruturas de vigas, especialmente usando modelos analíticos (PANDEY; BISWAS; SAMMAN, 1991; ISMAIL; RAZAK; RAHMAN, 2006; MORENO-GARCÍA; SANTOS; LOPES, 2017).

Como mencionado, a presente contribuição propõe mesclar duas técnicas: de combinação de ressonância e segunda derivada do modo de vibrar, para identificar a presença e localização de trincas em eixos rotativos.

Vale ressaltar que a abordagem de identificação proposta na presente tese se destaca uma vez que se aplicada a diversas condições operacionais de máquinas rotativas ao contrário do método da derivada de segunda ordem tradicional que é associado apenas à excitação do sistema próximo a uma de suas frequências naturais.

## 5.2 Metodologia proposta

A combinação de ressonância, pode ser definida como uma ressonância que surge através da interação de duas diferentes frequências de excitação quando não linearidades estão presentes no sistema mecânico. No presente trabalho, o método de múltiplas escalas foi utilizado para determinar as frequências das excitações externas, capazes de induzir as combinações de ressonância no eixo rotativo com uma trinca.

O comportamento dinâmico do eixo flexível na presença de trinca e suportado por rolamentos autocompensadores de esferas é matematicamente representado na Eq. (4.32). Nesta equação deve-se ainda acrescentar o vetor de forças externas  $\mathbf{F}_e$ . O modelo de elementos finitos utilizado foi apresentado anteriormente. Para a modelagem da trinca utilizou-se a metodologia desenvolvida por Mayes e Davies (1984) também já discutido anteriormente.

### 5.2.1 Método das Múltiplas Escalas para Determinação das Combinações de Ressonância

Assumindo um sistema massa-mola com um grau de liberdade, não amortecido, na presença de uma trinca e excitado por duas frequências distintas  $\Omega$ ,  $\Omega_{diag}$ . Sabendo também que a trinca possui um comportamento *breathing*, onde o movimento de abertura e fechamento é periódico, logo a rigidez associada pode ser expandida pelo truncamento da série de Fourier (Eqs. (5.1), (5.2)) na *steering function* aplicada ao modelo proposto por Mayes e Davies (1984).

$$k_c \Rightarrow [k_o - f(\Omega t) \Delta K_\xi] \quad (5.1)$$

$$f(\Omega t) = \frac{1}{2} (1 - C_1 - C_2) \quad (5.2)$$

$$k_c = \frac{1}{2} [k_o + k_\xi] + \frac{1}{2} [k_o - k_\xi] C_1 + \frac{1}{2} [k_o - k_\xi] C_2 \quad (5.3)$$

Mais uma vez,  $C_1 = \cos(\Omega t)$  e  $C_2 = \cos(2\Omega t)$ . A equação diferencial que descreve o comportamento deste sistema é então apresentado pela Eq. (5.4).

$$M\ddot{q}(t) + \frac{1}{2} [k_o + k_\xi] q(t) + \frac{1}{2} [k_o - k_\xi] C_1 q(t) + \dots \quad (5.4)$$

$$\dots + \frac{1}{2} [k_o - k_\xi] C_2 q(t) = FS_1 + F_{diag} S_{diag}$$

onde,  $S_{diag} = \sin(\Omega_{diag} t)$ .

Considerando que  $k_{D\xi} = 1/2 [k_o - k_\xi]$  e  $k_{M\xi} = 1/2 [k_o + k_\xi]$ , a Eq. (5.4) se torna:

$$M\ddot{q}(t) + k_{M\xi}q(t) = FS_1 + F_{diag}S_{diag} - k_{D\xi}C_1q(t) - k_{D\xi}C_2q(t) \quad (5.5)$$

O método das múltiplas escalas é um método conhecido como método de perturbação, e sua aplicação se restringe a sistemas fracamente não lineares, ou seja, sistemas em que os termos não lineares são muito pequenos comparados aos termos lineares. Um parâmetro pequeno  $\varepsilon$  deve ser introduzido apenas como uma forma de contabilizar e indicar os termos não lineares intrínsecos ao sistema em questão (Eq. (5.6)).

$$M\ddot{q}(t) + k_{M\xi}q(t) = FS_1 + F_{diag}S_{diag} - \varepsilon k_{D\xi}C_1q(t) - \varepsilon k_{D\xi}C_2q(t) \quad (5.6)$$

De modo a representar essa relação entre frequência e amplitude, o método das múltiplas escalas permite que a solução seja uma função de múltiplas escalas de tempo variável. Por exemplo, uma escala rápida pode ser usada para observar movimentos nas frequências comparáveis com as frequências naturais lineares do sistema, já as escalas mais lentas são consideradas em modulações lentas de amplitude e fase. Logo, é válido assumir a seguinte expansão da solução do problema em função de escalas de tempo independentes ( $T_j = \varepsilon^j t$ ,  $j = 0, 1, \dots$ ,  $\varepsilon \ll 1$ ).

$$q(t, \varepsilon) = q_0(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon q_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^2 q_2(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots \quad (5.7)$$

Destaca-se ainda que a quantidade de escalas de tempo independentes são proporcionais à quantidade de termos da expansão da solução - Eq. (5.7), ou seja, se a expansão é da ordem  $O(\varepsilon^n)$ , é necessário escalas  $T_j = 0, n$ . Para o problema massa-mola ilustrado, assume-se uma expansão de ordem 1:

$$q(t, \varepsilon) = q_0(T_0, T_1) + \varepsilon q_1(T_0, T_1) \quad (5.8)$$

onde  $T_0$  é a escala rápida de tempo e  $T_1$  é a escala de tempo lenta:  $T_0 = t$ ,  $T_1 = \varepsilon t$ :

Substituindo a Eq. (5.8) em (5.6), deve-se calcular as derivadas conforme necessário:

$$\frac{d}{dt} = \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial}{\partial T_1} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} = D_0 + \varepsilon D_1 \quad (5.9)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial(D_0 + \varepsilon D_1)}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial(D_0 + \varepsilon D_1)}{\partial T_1} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 \quad (5.10)$$

onde o operador  $D_i^j$  é definido como:

$$D_i^j = \frac{\partial^j}{\partial T_i^j} \quad (5.11)$$

Substituindo as Eqs (5.8), (5.9) e (5.10), e separando os termos referentes às ordens ( $\varepsilon^0$ ), ( $\varepsilon^1$ ) e ( $\varepsilon^2$ ) obtém-se as seguintes equações:

$$(\varepsilon^0) \quad mD_0^2 q_0(T_0, T_1) + k_{M\xi} q_0(T_0, T_1) = F S_{T_0} + F_{diag} S_{diag T_0} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} (\varepsilon^1) \quad mD_0^2 q_1(T_0, T_1) + 2mD_0 D_1 q_0(T_0, T_1) + K_{M\xi} q_1(T_0, T_1) = \dots \\ \dots = -k_{D\xi} C_{T_0} q_0(T_0, T_1) - k_{D\xi} C_{2T_0} q_0(T_0, T_1) \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$(\varepsilon^2) \quad 2mD_0 D_1 q_1(T_0, T_1) = -k_{D\xi} C_{T_0} q_1(T_0, T_1) - k_{D\xi} C_{2T_0} q_1(T_0, T_1) \quad (5.14)$$

onde  $S_{T_0} = \sin(\Omega T_0)$ ,  $S_{diag T_0} = \sin(\Omega_{diag} T_0)$ ,  $C_{T_0} = \cos(\Omega T_0)$ ,  $C_{2T_0} = \cos(2\Omega T_0)$ .

Para este problema, os termos de alta ordem serão desconsiderados, uma vez que a solução foi assumida conter apenas termos  $O(\varepsilon^0)$  e  $O(\varepsilon^1)$ .

A solução atribuída para a Eq. (5.12) pode ser apresentada da forma como mostrado na Eq. (5.15), que envolve a soma de duas soluções, uma primeira homogênea  $q_h(t)$  e a segunda, uma solução particular  $q_p(t)$ .

A solução homogênea  $q_h(t)$  corresponde a solução da equação quando as forças externas são nulas e representa um termo transitório provocado pela resposta livre, já a solução permanente  $q_p(t)$  depende da frequência de excitação e é uma resposta em regime permanente.

$$\begin{aligned} q_0(T_0, T_1) = A_1(T_1) e^{i\omega_{0\xi} T_0} + \bar{A}_1(T_1) e^{-i\omega_{0\xi} T_0} + A_2(T_1) e^{i\Omega T_0} + \dots \\ \dots + \bar{A}_2(T_1) e^{-i\Omega T_0} + A_3(T_1) e^{i\Omega_{diag} T_0} + \bar{A}_3(T_1) e^{-i\Omega_{diag} T_0} \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde  $\omega_{0\xi} = \sqrt{(k_{M\xi}/m)}$ ,  $A$  é um valor complexo que é função da escala de tempo lenta  $T_1$  e  $\bar{A}$  é

o complexo conjugado de  $A$ . A Eq. (5.13) pode ser reescrita em termos da função exponencial:

$$\begin{aligned}
mD_0^2 q_1(T_0, T_1) + k_{M\xi} q_1(T_0, T_1) + 2mD_1 D_0 q_0(T_0, T_1) = \dots \\
\dots = -\frac{1}{2} k_{D\xi} q_0(T_0, T_1) e^{i\Omega T_0} - \frac{1}{2} k_{D\xi} q_0(T_0, T_1) e^{-i\Omega T_0} - \dots \\
\dots - \frac{1}{2} k_{D\xi} q_0(T_0, T_1) e^{2i\Omega T_0} - \frac{1}{2} k_{D\xi} q_0(T_0, T_1) e^{-2i\Omega T_0}
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Substituindo a Eq. (5.15) na Eq. (5.16), obtém-se a Eq. (5.17). Percebe-se então o aparecimento de algumas combinações. Se assumirmos que o tempo total é grande, o termo transiente torna-se muito pequeno e conseqüentemente a resposta de regime permanente fica predominante na resposta final, isso significa que apenas as combinações  $\Omega$ ,  $2\Omega$ ,  $(\Omega + \Omega_{diag})$ ,  $(2\Omega + \Omega_{diag})$ ... e seus complexos conjugados estarão presentes quando visto o regime permanente.

$$\begin{aligned}
mD_0^2 q_1(T_0, T_1) + k_{M\xi} q_1(T_0, T_1) = \dots \\
\dots - \left[ 2i \frac{dA_1(T_1)}{dT_1} m\omega_{0\xi} e^{i\omega_{0\xi} T_0} + 2i \frac{dA_2(T_1)}{dT_1} m\Omega e^{i\Omega T_0} + 2i \frac{dA_3(T_1)}{dT_1} m\Omega_{diag} e^{i\Omega_{diag} T_0} + cc \right] \dots \\
\dots - \left[ \frac{1}{2} k_{D\xi} A_1(T_1) e^{iT_0(\Omega + \omega_{0\xi})} + \frac{1}{2} k_{D\xi} A_1(T_1) e^{iT_0(-\Omega + \omega_{0\xi})} + \dots \right. \\
\dots + \frac{1}{2} k_{D\xi} A_2(T_1) e^{iT_0(\Omega + \Omega)} + \frac{1}{2} k_{D\xi} A_2(T_1) e^{iT_0(-\Omega + \Omega)} + \dots \\
\dots + \frac{1}{2} k_{D\xi} A_3(T_1) e^{iT_0(\Omega + \Omega_{diag})} + \frac{1}{2} k_{D\xi} A_3(T_1) e^{iT_0(-\Omega + \Omega_{diag})} - \dots \\
\dots + \frac{1}{2} k_{D\xi} A_1(T_1) e^{iT_0(2\Omega + \omega_{0\xi})} + \frac{1}{2} k_{D\xi} A_1(T_1) e^{iT_0(-2\Omega + \omega_{0\xi})} - \dots \\
\dots + \frac{1}{2} k_{D\xi} A_2(T_1) e^{iT_0(2\Omega + \Omega)} + \frac{1}{2} k_{D\xi} A_2(T_1) e^{iT_0(-2\Omega + \Omega)} - \dots \\
\dots \left. + \frac{1}{2} k_{D\xi} A_3(T_1) e^{iT_0(2\Omega + \Omega_{diag})} + \frac{1}{2} k_{D\xi} A_3(T_1) e^{iT_0(-2\Omega + \Omega_{diag})} + cc \right]
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Sabe-se ainda que caso a frequência de excitação  $\Omega$  e/ou  $\Omega_{diag}$  seja igual ou próxima da frequência natural  $\omega_{0\xi}$ , ocorre o fenômeno conhecido como ressonância onde as amplitudes de vibração do sistema podem ficar muito grandes.

Assim, as combinações foco deste trabalho podem então ser induzidas a partir da seguinte equação:

$$\Omega_{ext} = \Omega_{diag} = |n\Omega - \omega_{0\xi}| \tag{5.18}$$

onde  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . Um conjunto de frequências pode ser obtido usando a Eq. (5.18), que deve ser aplicado separadamente no sistema rotativo máquina para identificação de trincas.

### 5.2.2 Método da derivada de segunda ordem do modo de vibrar

Após a aplicação da excitação externa, é construída a forma modal do eixo através das amplitudes máximas de vibração medidas ao longo do eixo em uma dada combinação de ressonância. A Figura 5.1 mostra o esquema usado para obter a forma modal do eixo.

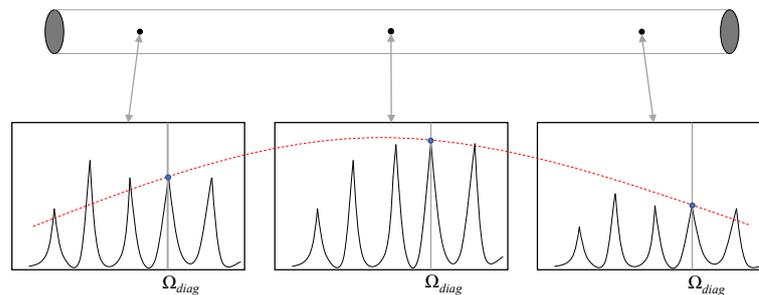


Figura 5.1: Esquema para reconstruir o modo de vibrar.

Observe que uma forma modal operacional, considerando apenas uma direção, é obtida com base na Transformada Discreta de Fourier (DFT; apenas a parte real) das respostas de vibração no domínio do tempo. Claramente, quanto maior o número de pontos utilizados (de nós, em caso de resposta numérica discreta) para medir a resposta da vibração e estimar a forma do modo, maior precisão é alcançada.

Em seguida, a derivada de segunda ordem da forma modal pode ser determinada. Sua amplitude máxima é usada como indicação da posição de trinca  $C_p$ , conforme mostra a Eq. 5.19.

$$C_p = \max \left( \frac{d^2 q^k(x)}{dx^2} \right) \quad (5.19)$$

onde  $q^k(x)$ , ( $0 \leq x \leq L_s$ ) é o vetor que contém as amplitudes máximas de vibração medidas ao longo do eixo em uma dada combinação de ressonância  $k$  e  $L_s$  é o comprimento do eixo. Uma forma de visualização mais eficaz para este resultado é a representação gráfica em mapas de calor, que evidencia através da coloração os locais onde as amplitudes em função do comprimento do eixo são maiores.

A Fig. 5.2 mostra um fluxograma com detalhes do procedimento da técnica proposta para detecção de trinca utilizando as metodologias propostas.

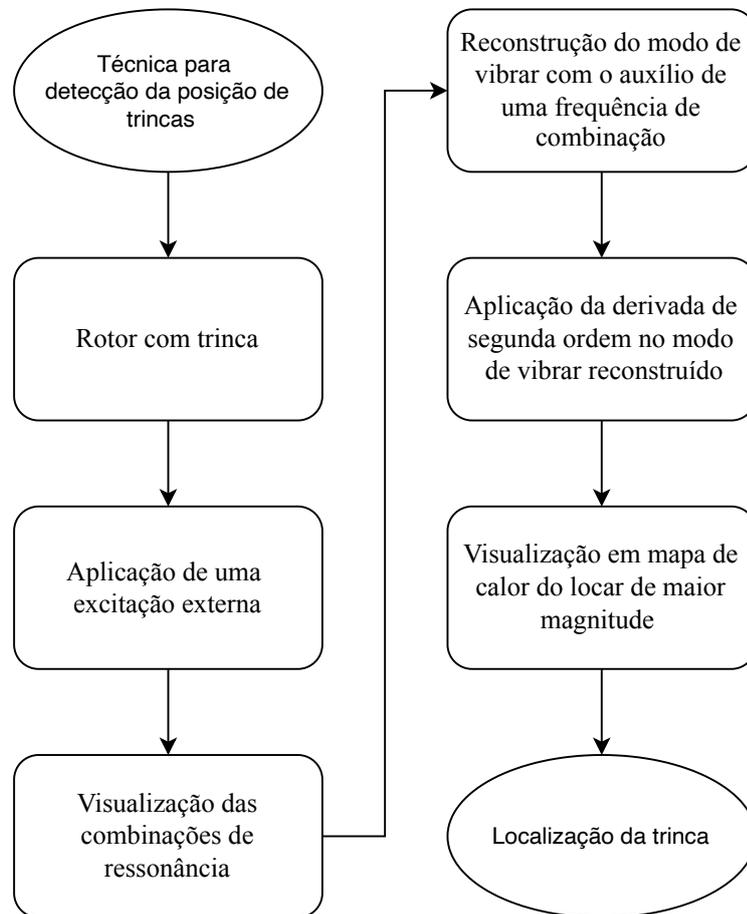


Figura 5.2: Fluxograma para técnica de detecção.

## CAPÍTULO VI

### BANCADA EXPERIMENTAL E MODELAGEM NUMÉRICO-COMPUTACIONAL

Neste trabalho o modelo numérico-computacional foi desenvolvido em concordância com uma bancada experimental (ver Fig. 6.1) disponível no LMEst da Universidade Federal de Uberlândia. Assim sendo, foi desenvolvida a representação virtual que traduz com fidelidade o comportamento vibratório físico deste equipamento.

Nesse caso, o modelo FE utilizado para representar o rotor foi formulado com 35 elementos, como mostrado na Fig. 6.2. O sistema é composto por um eixo de aço flexível com 850 mm de comprimento e 19 mm de diâmetro ( $E = 182 \text{ GPa}$ ,  $\rho = 7930 \text{ kg/m}^3$  e  $\nu = 0,29$ ), dois discos rígidos  $D_1$  (nó 17; 0,656 kg) e  $D_2$  (nó 24; 0,658 kg), ambos de alumínio com 150 mm de diâmetro e 20 mm de espessura, e dois rolamentos autocompensadores de esferas ( $B_1$  e  $B_2$ , localizados nos nós 5 e 32, respectivamente).

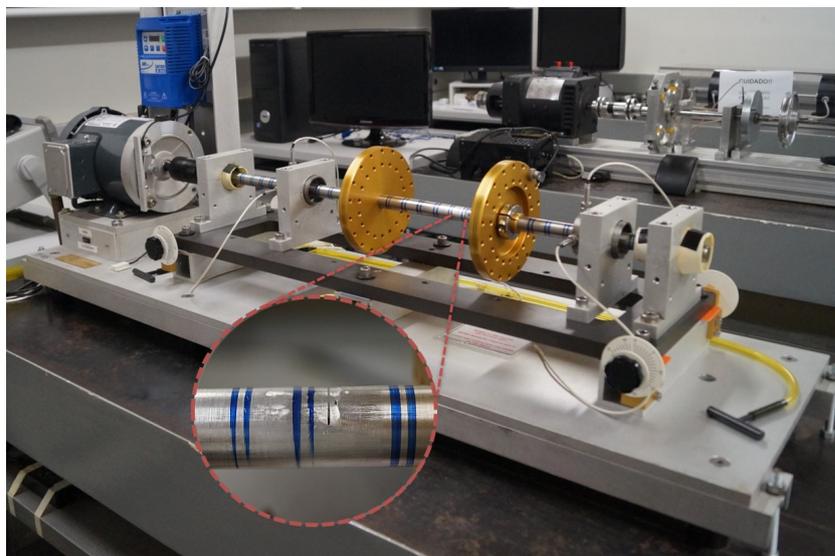


Figura 6.1: Bancada experimental utilizado nas simulações numéricas.

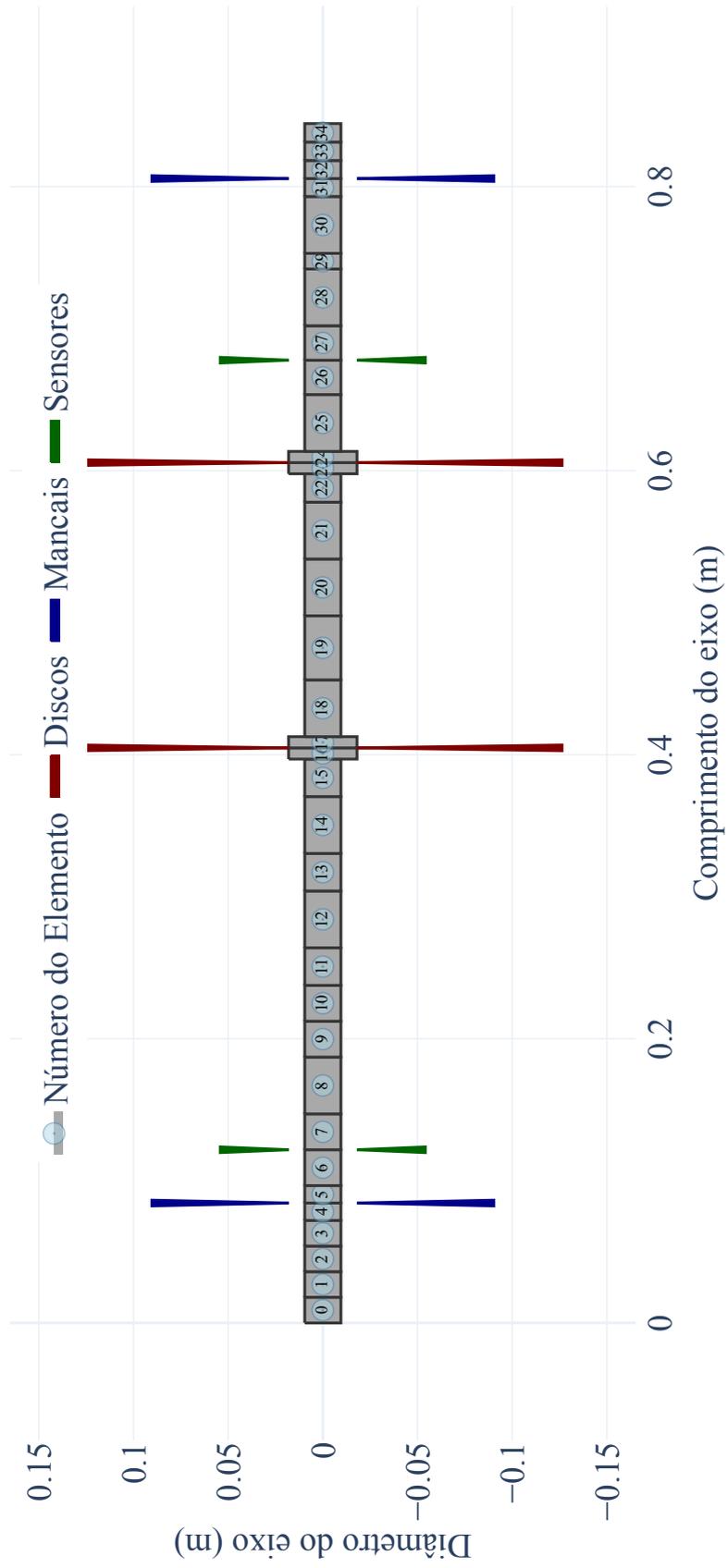


Figura 6.2: Discretização do rotor utilizado nas simulações numéricas.

Para esta configuração, a primeira e a segunda velocidades críticas de precessão direta da máquina rotativa são 51,725 Hz e 208,5 Hz respectivamente. A primeira e a segunda velocidades críticas de precessão inversa são 51,220 Hz e 193,5 Hz respectivamente, conforme o diagrama de Campbell mostrado na Fig. 6.3.

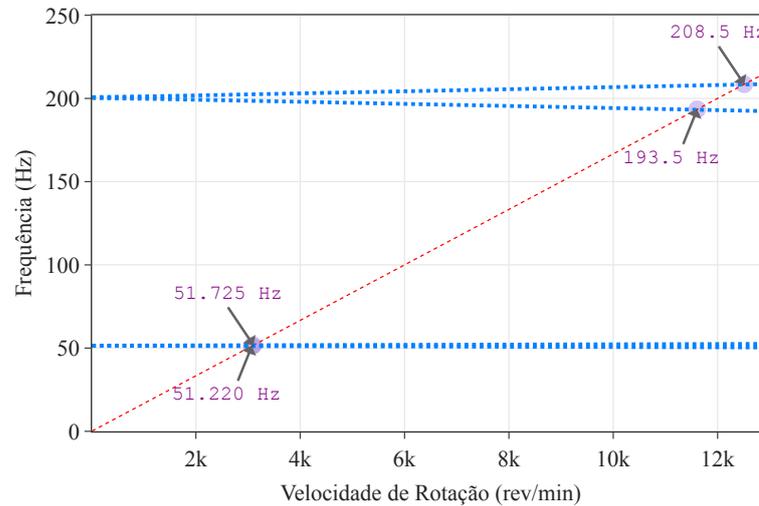


Figura 6.3: Diagrama de Campbell.

## 6.1 Ajuste do modelo - otimização

Um procedimento de otimização foi utilizado a fim de se obter com precisão o modelo representativo para as simulações numérico-computacionais apresentadas neste trabalho. Assim, empregou-se a técnica de otimização heurística Evolução Diferencial (STORN; PRICE, 1995) para determinar os parâmetros desconhecidos do modelo, a saber, os coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais, o amortecimento proporcional adicionado à matriz  $\mathbf{D}$  (coeficientes  $\gamma$  e  $\beta$ ;  $\mathbf{D}_p = \gamma\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$ ) e a rigidez angular  $k_{ROT}$  devido ao acoplamento entre o motor elétrico e o eixo (adicionado em torno das direções ortogonais  $X$  e  $Z$  do nó 0).

Nesse caso, a função objetivo consistiu-se em minimizar a diferença entre as respostas numéricas e experimentais da Função de Resposta em Frequência (FRF), conforme apresentado na Eq. (6.1).

$$DE_{OF} = \sum_{i=1}^N \frac{\|FRF_{exp,i} - FRF_{num,i}\|}{\|FRF_{exp,i}\|} \quad (6.1)$$

onde  $N$  é o número de FRFs usadas no processo ( $N = 8$ ),  $FRF_{num}$  são as FRFs numéricas obtidos a partir do modelo FE, e  $FRF_{exp}$  são as FRFs experimentais correspondentes.

Todo o processo no domínio da frequência foi realizado dez vezes, considerando 100 indivíduos na população inicial do otimizador. Outros parâmetros utilizados foram os seguintes:  $F_{DE} = 0,8$ , que se refere ao peso aplicado ao diferencial aleatório (fator de escala -  $F_{DE}$ ), e  $CR_{DE} = 0,5$ , relacionado à taxa de mutação.

Mais detalhes sobre a técnica de otimização podem ser visto em Silva (2018). O melhor resultado dentre os dez processos considerando a função de ajuste (*Fitness*) foi selecionado.

A Tab. 6.1 resume os parâmetros determinados no final do processo de a minimização.

Tabela 6.1: Parâmetros determinados através do ajuste do modelo.

Rigidez [N/m]	Amortecimento [Ns/m]	Amortecimento Propor.
$k_{X/B1} = 2,69 \times 10^9$	$d_{X/B1} = 87,33$	$\gamma = 149,99$
$k_{Z/B1} = 9,54 \times 10^7$	$d_{Z/B1} = 45,48$	$\beta = 9.95 \times 10^{-6}$
$k_{X/B2} = 3,97 \times 10^9$	$d_{X/B2} = 26,91$	-
$k_{Z/B2} = 8,93 \times 10^7$	$d_{Z/B2} = 125,84$	-
$k_{ROT} [N/rad] = 3,37 \times 10^3$	-	-

As FRFs experimentais foram medidas com o rotor em repouso, aplicando forças de impacto ao longo das direções X e Z de ambos os discos separadamente. Os sinais de resposta foram obtidos pelas dois sensores de proximidade posicionadas nas mesmas direções das forças de impacto, resultando em 8 FRFs. A Figura 6.4 compara duas FRFs simuladas e experimentais, considerando os parâmetros mostrados na Tab 6.1.

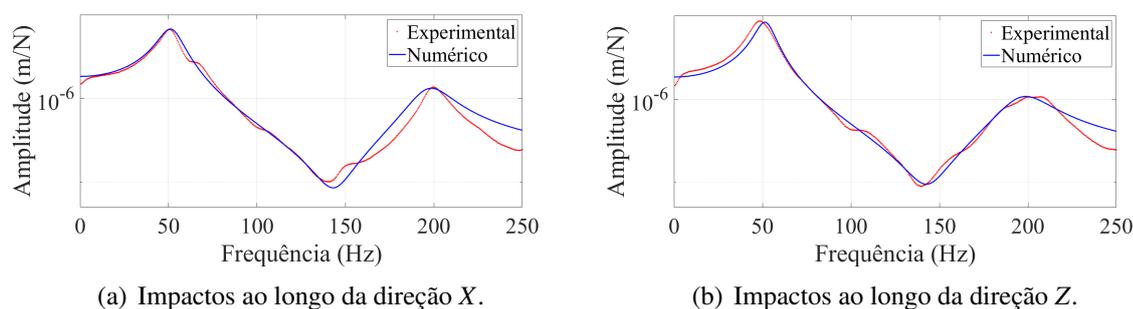


Figura 6.4: FRFs numéricas e experimentais.

## 6.2 Estrutura da modelagem numérico-computacional

O modelo numérico-computacional foi desenvolvido em linguagem Python<sup>®</sup>, através do paradigma de programação orientada a objetos (OOP).

A OOP possui uma vantagem neste contexto, pois nos possibilita a criação de um software de dinâmica de rotação seguro e confiável, já que no grupo de pesquisa do LMEst existem inúmeros trabalhos em paralelo sendo desenvolvidos e utilizados até mesmo em projetos com indústrias diversas. Esta estrutura ainda nos permite codificar mais rápido, embora isso não signifique escrever menos linhas de código. Significa que você pode implementar mais recursos em menos tempo, sem comprometer a estabilidade de um projeto.

O diagrama da estrutura utilizada (para o módulo de análises de trinca) é apresentado na Fig. 6.5.

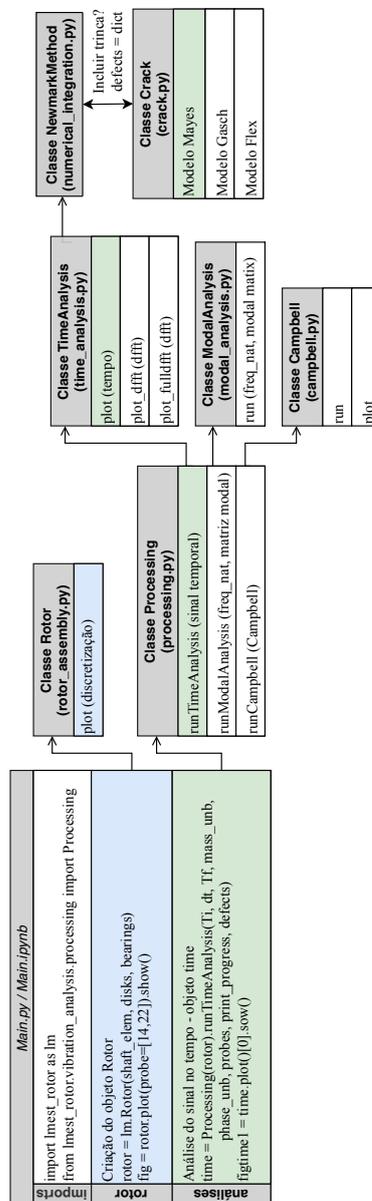


Figura 6.5: Diagrama para o módulo de simulação de trincas.

### 6.3 Solução do sistema de equações de equilíbrio no domínio do tempo

Para a resolução do sistema de equações acoplada no domínio do tempo, existem diversos métodos descritos pela literatura. A ideia principal se baseia na integração das equações em intervalos de tempo  $dt$ . Assim a solução é encontrada para cada instante de tempo.

Simplificando a Eq. 4.37 apenas para entendimento do procedimento de integração numérica, substitui-se os vetores de deslocamento ( $\Delta\mathbf{q}$ ), velocidade ( $\Delta\dot{\mathbf{q}}$ ) e aceleração ( $\Delta\ddot{\mathbf{q}}$ ) por  $\mathbf{d}^t$ ,  $\mathbf{v}^t$  e  $\mathbf{a}^t$  respectivamente (ver Eq. 6.2).

$$\mathbf{M}\mathbf{a}^t + \mathbf{C}\mathbf{v}^t + \mathbf{K}\mathbf{d}^t = \mathbf{F}(t) \quad (6.2)$$

O método de integração numérica Newmark é uma técnica usada para solução de equações diferenciais ordinárias que descrevem sistemas dinâmicos. Este método é baseado na integração numérica de equações de movimento, utilizando uma abordagem explícita para a integração no tempo. A convergência Newton-Raphson é uma técnica iterativa usada para aproximar a solução de uma equação não-linear. Quando combinados, o método de integração numérica Newmark e a convergência Newton-Raphson permitem uma solução mais precisa e estável dos sistemas dinâmicos descritos pelas equações diferenciais ordinárias. Isso é alcançado pela combinação da capacidade do Newmark de integrar no tempo com a capacidade do Newton-Raphson de encontrar a solução precisa da equação não-linear. Em resumo, a combinação do método de integração numérica Newmark com a convergência Newton-Raphson é uma técnica eficaz para a solução de sistemas dinâmicos complexos.

O método Newmark (NEWMARK, 1959) utilizado pelo presente trabalho é desenvolvido através das relações apresentadas pela Eq. 6.3, em que a hipótese de relação linear para aceleração entre dois instantes quaisquer de tempo (BELONSI, 2017).

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{t+\Delta t} &= \mathbf{d}^t + \Delta t \mathbf{v}^t + \frac{\Delta t^2}{2} \left[ (1 - 2\beta) \mathbf{a}^t + 2\beta \mathbf{a}^{t+\Delta t} \right] \\ \mathbf{v}^{t+\Delta t} &= \mathbf{v}^t + \Delta t \left[ (1 - \gamma) \mathbf{a}^t + \gamma \mathbf{a}^{t+\Delta t} \right] \end{aligned} \quad (6.3)$$

Os parâmetros  $\beta$ ,  $\gamma$  são introduzidos para indicar o quanto a aceleração se relaciona com o deslocamento e a velocidade no final do intervalo de tempo. As Eqs. 6.2 e 6.3, são resolvidas em uma sequência de iterações a partir de valores iniciais.

Com os valores de  $\mathbf{d}^{t+\Delta t}$ ,  $\mathbf{v}^{t+\Delta t}$  e  $\mathbf{a}^{t+\Delta t}$  determinados no instante inicial, calcula-se o resíduo, conforme mostrado na Eq. 6.4.

$$R_i = \mathbf{M}\mathbf{a}^{t+\Delta t} + \mathbf{C}\mathbf{v}^{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{d}^{t+\Delta t} - \mathbf{F}(t) \quad (6.4)$$

O critério de convergência aplicado se baseia no método de Newton-Raphson. Através da expansão em série de Taylor, o resíduo da iteração seguinte no processo de convergência é determinado pela Eq. 6.5

$$R_{i+1} = R_i + \frac{\partial R_i}{\partial \mathbf{a}} \frac{\partial \mathbf{a}^{t+\Delta t}}{\partial t} + \frac{\partial R_i}{\partial \mathbf{v}} \frac{\partial \mathbf{v}^{t+\Delta t}}{\partial t} + \frac{\partial R_i}{\partial \mathbf{d}} \frac{\partial \mathbf{d}^{t+\Delta t}}{\partial t} \quad (6.5)$$

onde,

$$\frac{\partial R_i}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{M}; \quad \frac{\partial R_i}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{C}; \quad \frac{\partial R_i}{\partial \mathbf{d}} = \mathbf{K} \quad (6.6)$$

Considera-se as derivadas da velocidade e deslocamento em função da aceleração (Eq. 6.7) e substituindo a Eq. 6.3 em 6.5, tem-se então a Eq. 6.8.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}^{t+\Delta t}}{\partial t} &= \gamma \Delta t \frac{\partial \mathbf{a}^{t+\Delta t}}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathbf{d}^{t+\Delta t}}{\partial t} &= \Delta t \frac{\partial \mathbf{v}^{t+\Delta t}}{\partial t} + \beta \Delta t^2 \frac{\partial \mathbf{a}^{t+\Delta t}}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$R_{i+1} = R_i + (\mathbf{M} + \gamma \Delta t \mathbf{C} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K}) \frac{\partial \mathbf{a}^{t+\Delta t}}{\partial t} \quad (6.8)$$

Assumindo a hipótese que na próxima iteração  $R_{i+1}$  é nulo, tem-se o seguinte sistema linear:

$$\frac{\partial \mathbf{a}^{t+\Delta t}}{\partial t} = -R_i \frac{1}{(\mathbf{M} + \gamma \Delta t \mathbf{C} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K})} \quad (6.9)$$

Ao obter o resultado para a Eq. 6.9, determina-se em sequência as Eqs. 6.7, que são incrementados nos resultados para  $\mathbf{d}^{t+\Delta t}$ ,  $\mathbf{v}^{t+\Delta t}$  e  $\mathbf{a}^{t+\Delta t}$ , sendo utilizados para o cálculo do novo resíduo e o processo continua até atingir a convergência dentro do mesmo intervalo de tempo.

As figuras 6.6 e 6.7, mostram um fluxograma da integração numérica utilizada com chamada dos métodos para inclusão da trinca de acordo com os modelos de Mayes, Gasch e Flex.

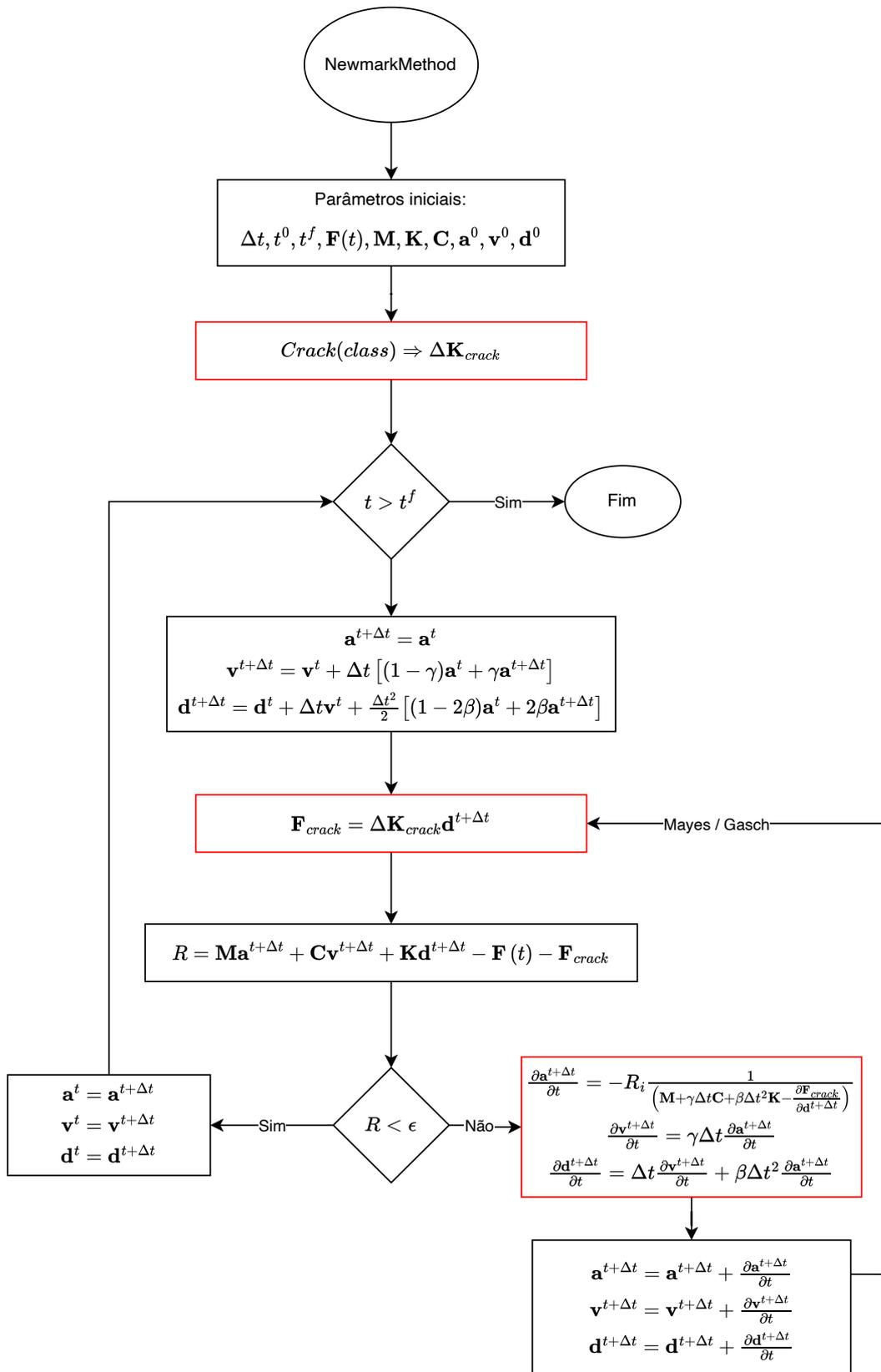


Figura 6.6: Diagrama para o módulo de integração com o método Newmark, convergência Newton Raphson e chamada do método de trinca com modelos de Mayes e Gasch.

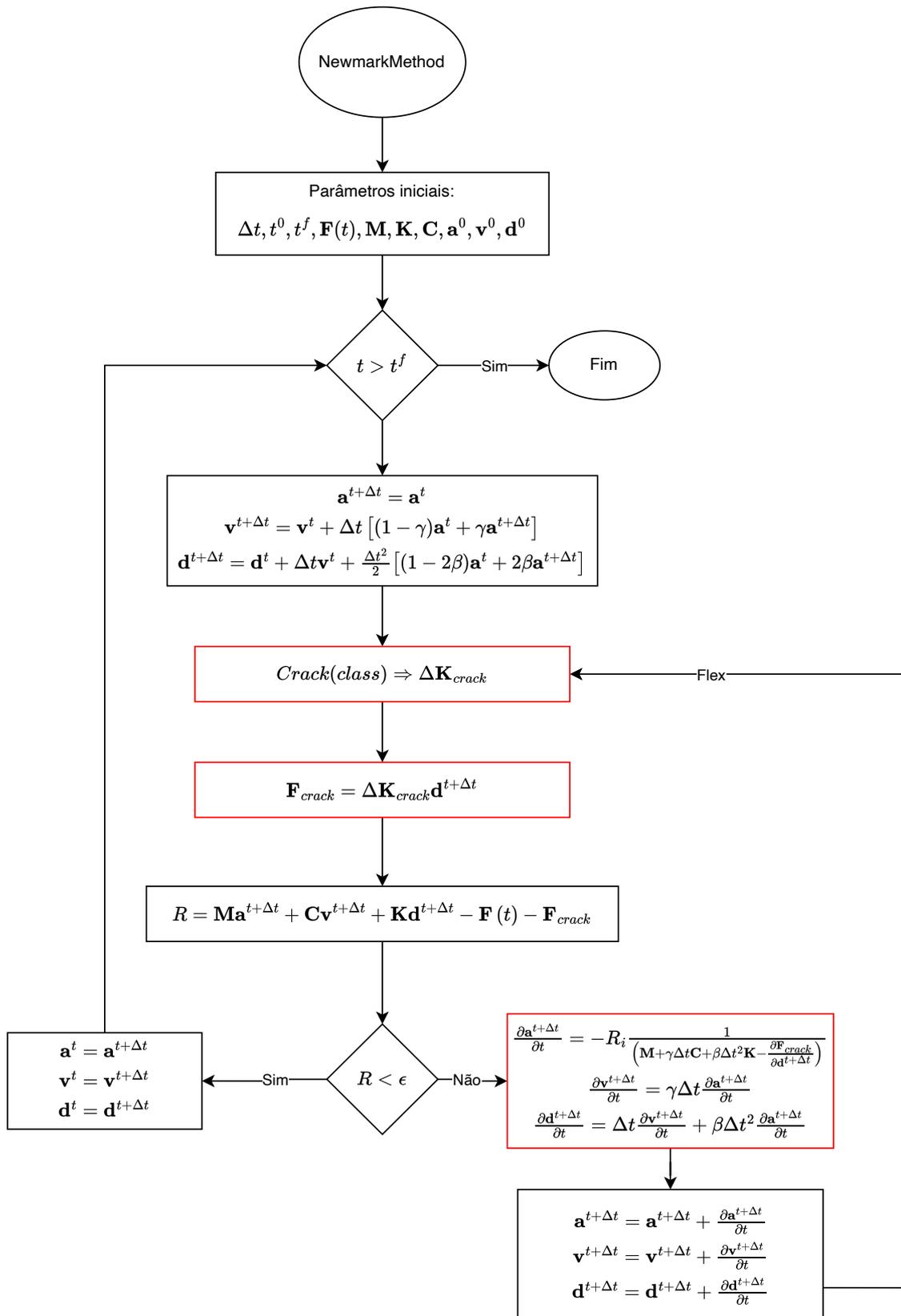


Figura 6.7: Diagrama para o módulo de integração com o método Newmark, convergência Newton Raphson e chamada do método de trinca com modelos de Flex.

# CAPÍTULO VII

## RESULTADOS NUMÉRICOS

### 7.1 Comparação entre os modelos Gasch, Mayes e Flex

A medição dos dados de vibração em uma máquina rotativa é uma poderosa ferramenta de diagnóstico que possibilita a detecção e prevenção de vários tipos de falhas potenciais e redução do tempo de inatividade das máquinas.

Por isso, os modelos apresentados no Capítulo IV foram utilizados afim de comparar os resultados para resposta de vibração de uma máquina virtual da bancada apresentada anteriormente sob a condição da presença de trinca modelada com os modelos de Mayes (MAYES; DAVIES, 1984), Gasch (GASCH, 1993) e Flex (BACHSCHMID; PENNACCHI; TANZI, 2010).

Para os resultados que serão apresentados a seguir, a velocidade de rotação foi fixada em 1200 RPM e uma trinca foi inserida no elemento 21 com uma profundidade igual a 50%. Os resultados são então apresentados para os nós 7 ( $S_7$ ) e 27 ( $S_{27}$ ), nas direções X e Z.

As órbitas representam a trajetória do centro, apresentadas (ver Fig. 7.1), ficam visíveis as semelhanças entre os modelos, tanto pelo formato de curva apresentado quanto pelas escalas na amplitude de vibração. Essas semelhanças são confirmadas pela análise no domínio do tempo mostradas na Fig. 7.2.

Além disso, a análise no domínio da frequência através das DFTs (*Discrete Fourier Transforms*) apresentada pela Fig. 7.3, verifica-se que todos os modelos são capazes de exibir frequências adicionais provenientes do comportamento da trinca. A DFT é uma técnica utilizada para transformar um sinal do domínio do tempo em seu equivalente no domínio da frequência. Isso permite analisar o sinal em termos de suas frequências constituintes.

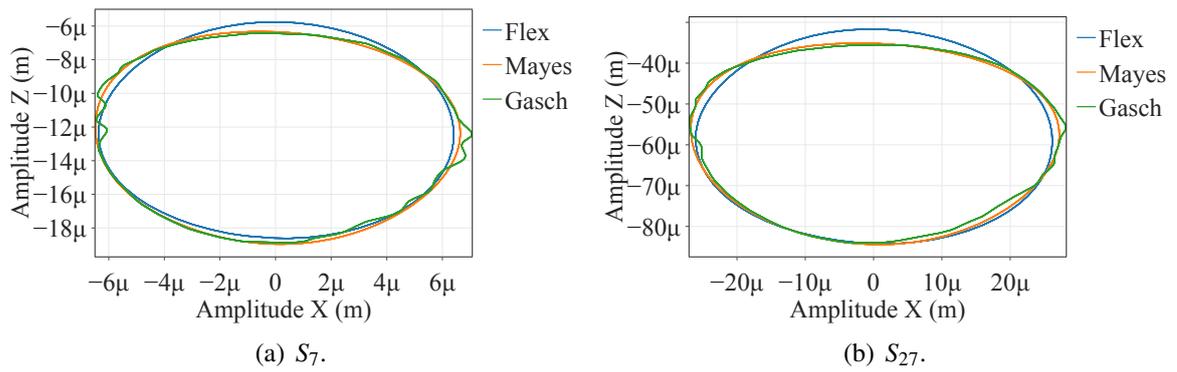


Figura 7.1: Órbitas para os nós 7 e 27.

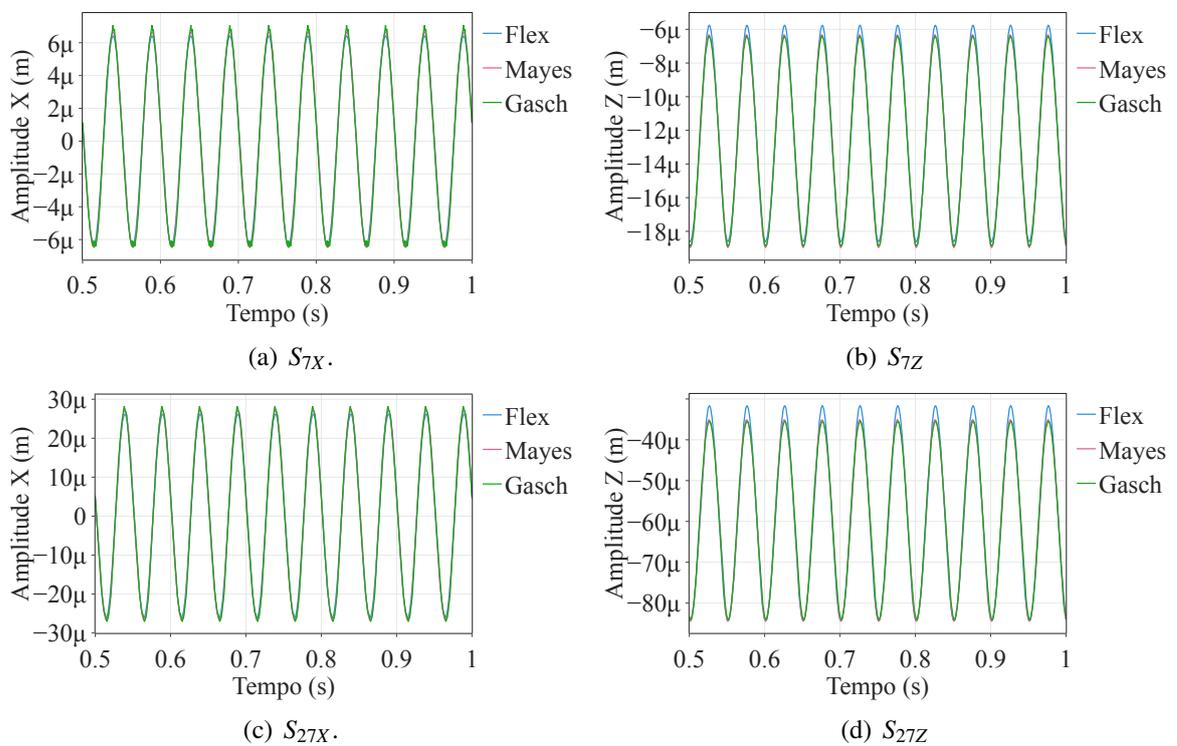


Figura 7.2: Respostas tempotais para os nós 7 e 27, nas direções X e Z.

## 7.2 Técnica de detecção

De acordo com a metodologia apresentada, um conjunto considerando diferentes valores de  $n$  pode ser determinado para utilização como frequência da força de excitação/diagnóstico (Eq. (5.18)).

Através das velocidades críticas de *forward* mostradas na Fig. 6.3, foram então calculadas algumas frequências que diante desta abordagem, seriam presentes na resposta do sistema caso ele tenha presente uma trinca. Esse conjunto foi obtido considerando a velocidade de rotação  $\Omega = 1200$  RPMs (ver Tab. 7.1).

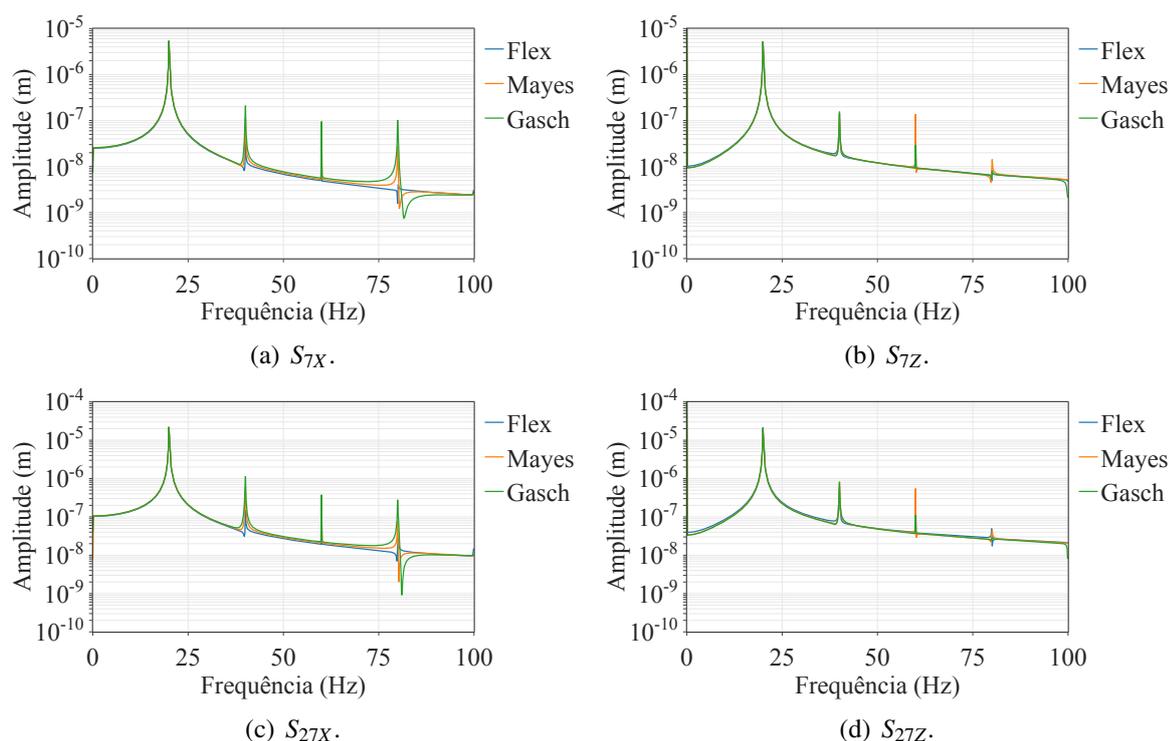


Figura 7.3: DFTs os nós 7 e 27, nas direções X e Z.

Tabela 7.1: Frequências de excitação  $\Omega_{ext}$  considerando  $\omega_{\Omega} = 51,725$  Hz.

$\omega_{\Omega} = 51,725$ Hz				$\omega_{\Omega} = 208,5$ Hz			
$n$	Frequência (Hz)	$n$	Frequência (Hz)	$n$	Frequência (Hz)	$n$	Frequência (Hz)
-1	71,725	+1	31,725	-1	228,5	+1	188,5
-2	91,725	+2	11,725	-2	248,5	+2	168,5
-3	111,725	+3	8,275	-3	268,5	+3	148,5
-4	131,725	+4	28,275	-4	288,5	+4	128,5
-5	151,725	+5	48,275	-5	308,5	+5	108,5

A metodologia de identificação de trinca foi testada numericamente para o rotor sob uma frequência de excitação externa iguais à  $\Omega_{diag} = 71,725$  Hz ( $n = -1$ ), considerando a primeira velocidade crítica, no intuito de avaliar a performance diante do primeiro modo de vibrar do sistema.

Para os resultados que serão apresentados a seguir, aplicou-se um valor de amplitude satisfatório para a excitação externa igual à 25 N (força aplicada ao longo da direção X no nó 33 do modelo FE; veja a Fig. 6.2). Além disso, trincas do tipo *breathing* com 10%, 20%, 30%, 40% e 50% de profundidade foram consideradas separadamente no elemento 21 do modelo. A condição saudável do eixo também é avaliada para fins de comparação. Foi considerado um desbalanceamento de 637,5 g.mm/270° aplicado ao disco  $D_1$ .

### 7.2.1 Aplicação numérica com o modelo Mayes

Utilizando a metodologia do modelo de trinca de Mayes (MAYES; DAVIES, 1984) (ver Cap. IV), avaliou-se a técnica proposta de detecção onde as respostas temporais e a característica das órbita referente ao modelo numérico para o nó 7 são apresentadas nas Figs. 7.4 e 7.5, já para o nó 27 ver Figs. 7.6 e 7.7.

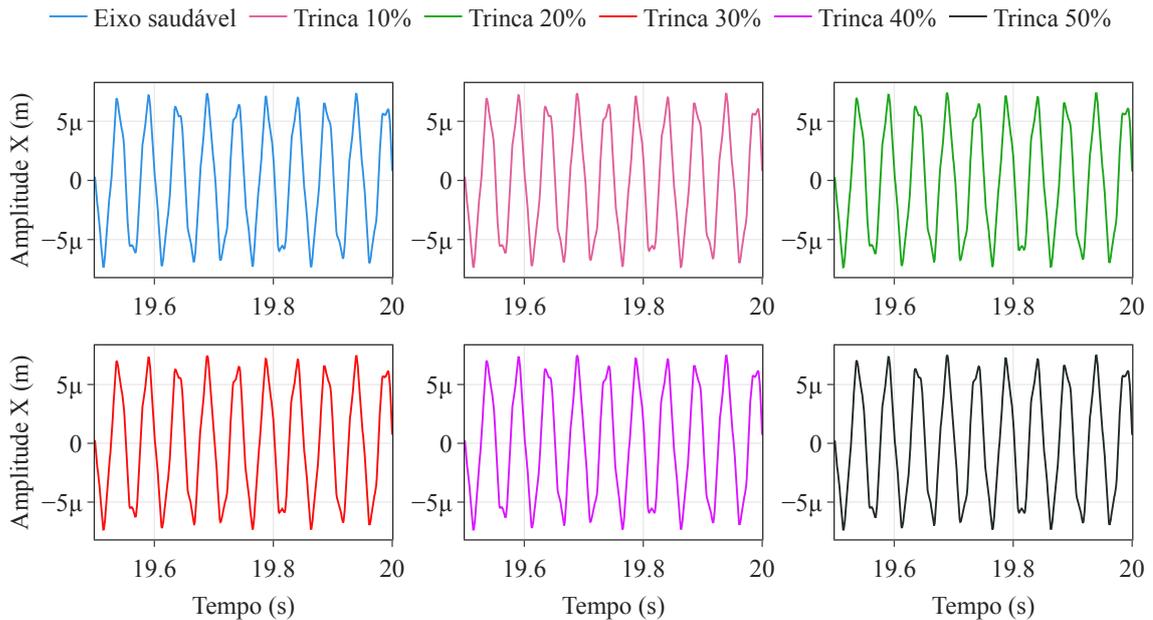


Figura 7.4: Resposta temporal para o nó  $S_{7X}$

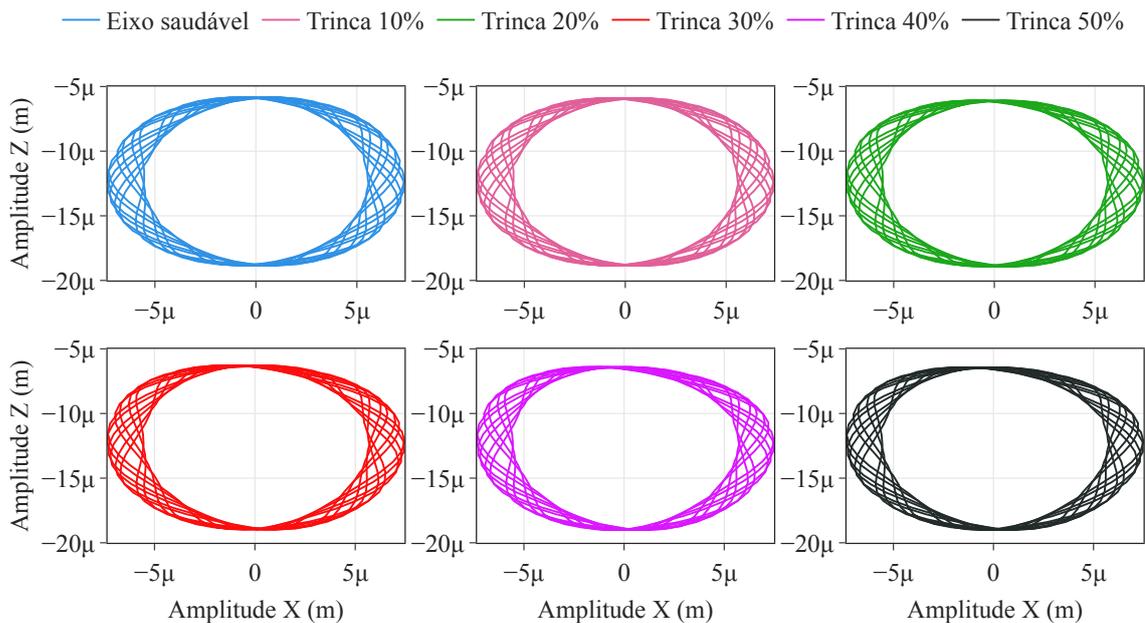


Figura 7.5: Órbitas para o nó  $S_7$

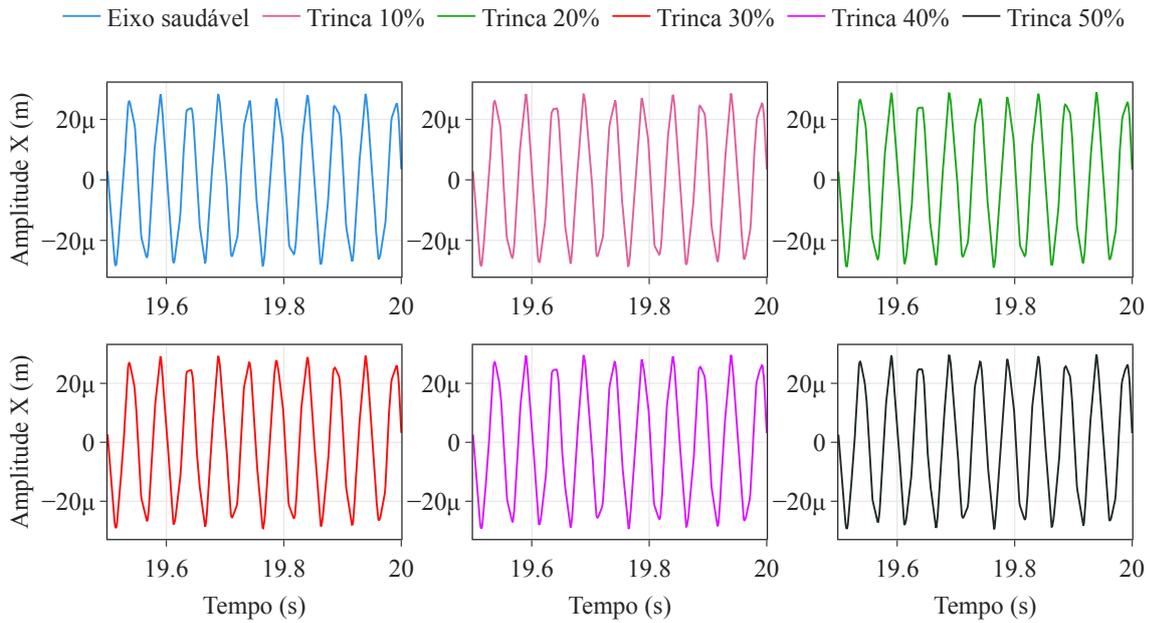


Figura 7.6: Resposta temporal para o nó  $S_{27X}$

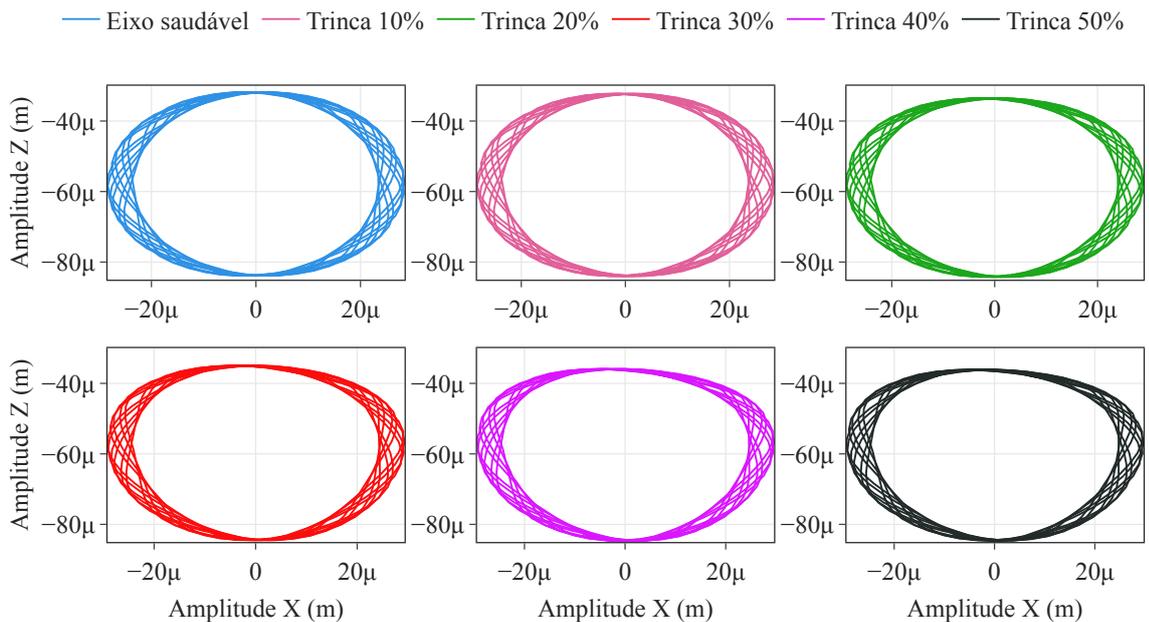


Figura 7.7: Órbitas para o nó  $S_{27}$

Observe que as respostas temporais possuem em sua característica principal, harmônicos provenientes majoritariamente da frequência da velocidade de rotação e da frequência de excitação externa. É impossível atribuir a estes sinais a presença de uma trinca no sistema.

Considerando os formatos das órbitas, é interessante perceber que o formato característico no nó 27 apresenta uma distorção mais aparente em função da profundidade da trinca já que a mesma se encontra em proximidade a esta posição. Note ainda uma característica estilo malha

(nas órbitas) proveniente da aplicação da força externa. Mais uma vez, este tipo de visualização não fornece uma indicação específica de trinca no sistema, o que nos traz a necessidade de abordagens adicionais para determinação deste defeito no sistema em questão.

As Figuras 7.8 e 7.9 mostram as DFTs das respostas de vibração do eixo na direção horizontal dos nós 7 ( $S_{7X}$ ) e 27 ( $S_{27X}$ ) respectivamente, considerando  $\Omega_{diag} = 71, 725$  Hz.

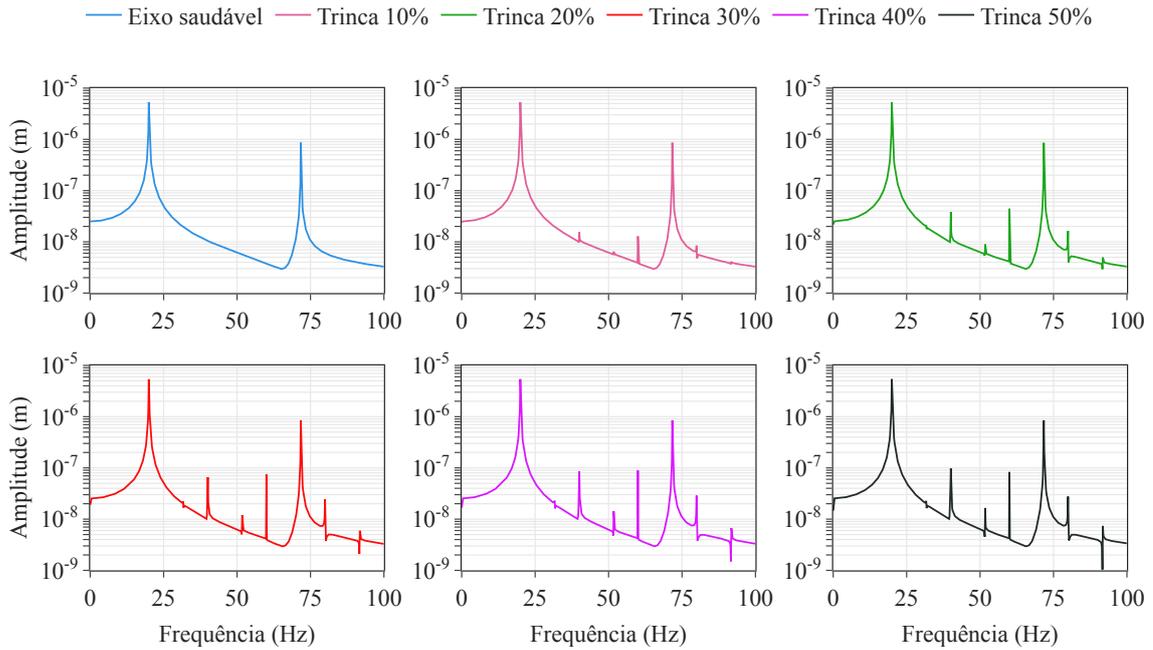


Figura 7.8: DFTs obtidas para o nó  $S_{7X}$

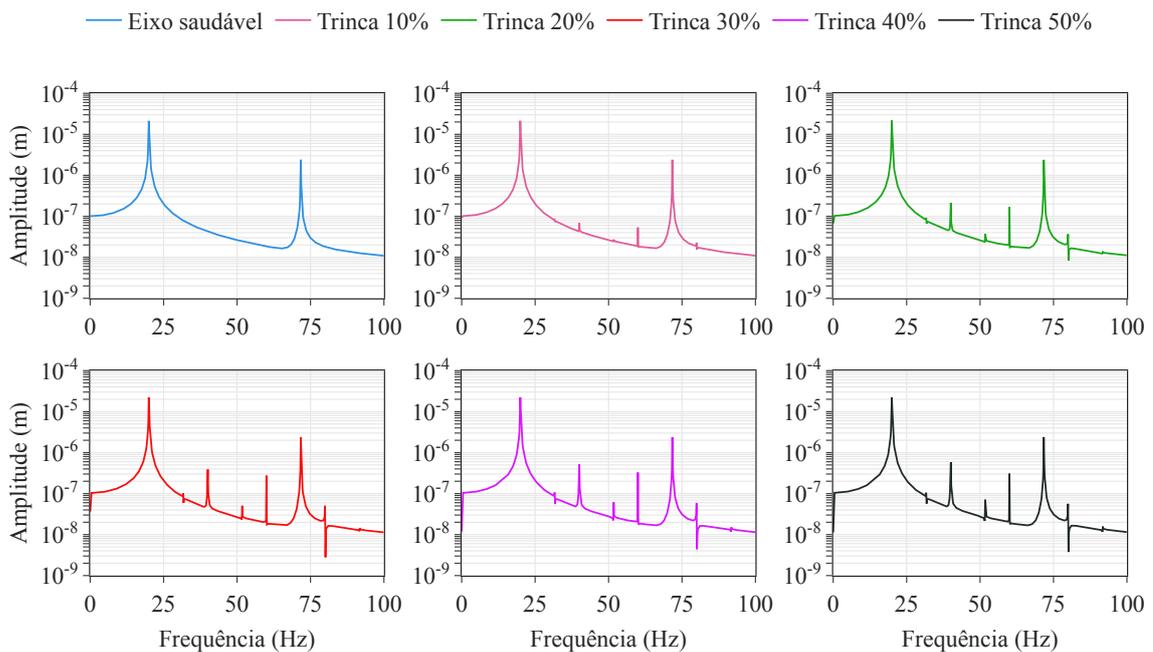


Figura 7.9: DFTs obtidas para o nó  $S_{27X}$

É possível perceber que os picos nas combinações de ressonância aparecem devido à trinca. Como esperado, os harmônicos da velocidade de rotação ( $2\Omega$ ,  $3\Omega$  e  $4\Omega$ ) podem também ser observados nas respostas espectrais. Uma visualização com mais detalhes é vista na Fig. 7.10. Além disso, pode-se notar que as amplitudes dos picos nas combinações de ressonância aumentam de acordo com a profundidade da trinca.

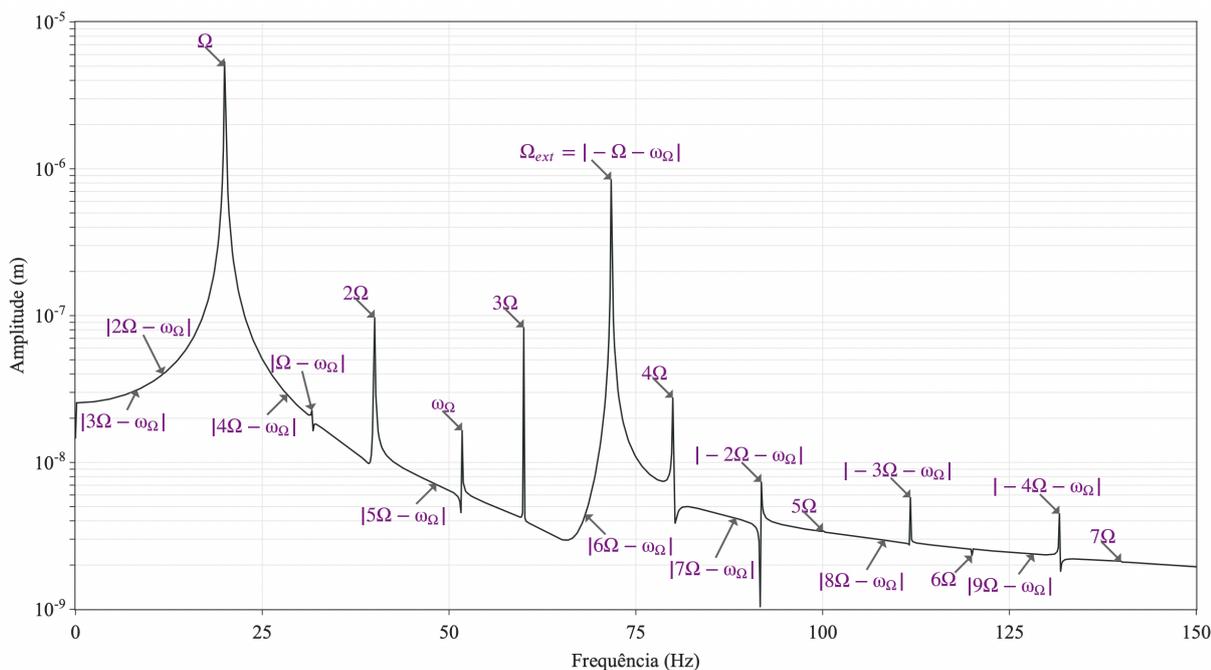


Figura 7.10: DFT obtidas para o nó  $S_{7X}$  considerando uma trinca com 50% de profundidade

A Figura 7.11 apresenta os modos de vibrar do eixo, reconstruídos usando a amplitude máxima de vibração nas combinações de ressonância  $|\Omega - \omega_{\Omega}| = 31,725$  Hz. Nesse caso, as DFTs foram determinadas usando as respostas de vibração horizontal medidas de todos os nós do modelo conforme exemplificado pela Fig. 5.1. As condições saudáveis e com falha no eixo foram avaliadas.

Destaca-se que a observação das amplitudes é uma medida fundamental para avaliar a severidade e a progressão da trinca. A observação das amplitudes correspondentes ao modo de trinca de 50% evidencia uma questão importante, já que elas são menores do que as amplitudes correspondentes ao modo de trinca de 40%. Esse comportamento pode ser explicado pela curva apresentada na Figura 7.12, que representa as máximas amplitudes da reconstrução do modo de vibrar (nas mesmas condições utilizada para Fig. 7.11) em relação à profundidade da trinca. O resultado indica a presença de não-linearidade no sistema, uma vez que é possível observar uma diminuição nas amplitudes a partir de uma profundidade de 40% (SILVA, 2018).

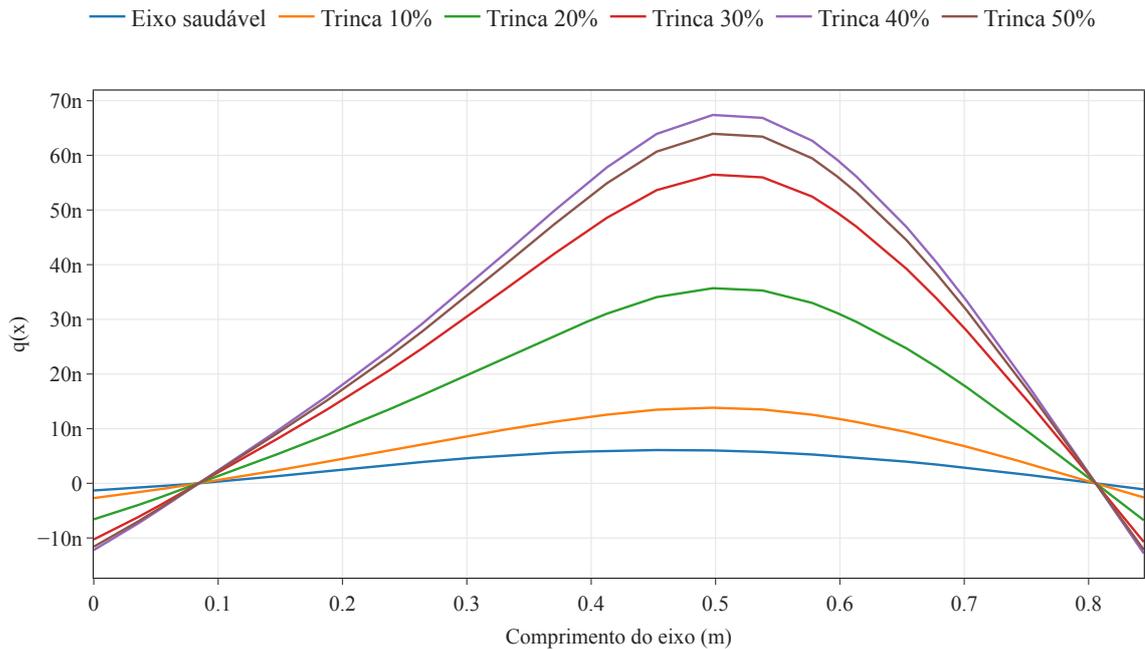


Figura 7.11: Modos de vibrar do eixo utilizando frequência de excitação externa  $\Omega_{ext} = 71,725$  Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância  $|\Omega - \omega_{\Omega}| = 31,725$  Hz.

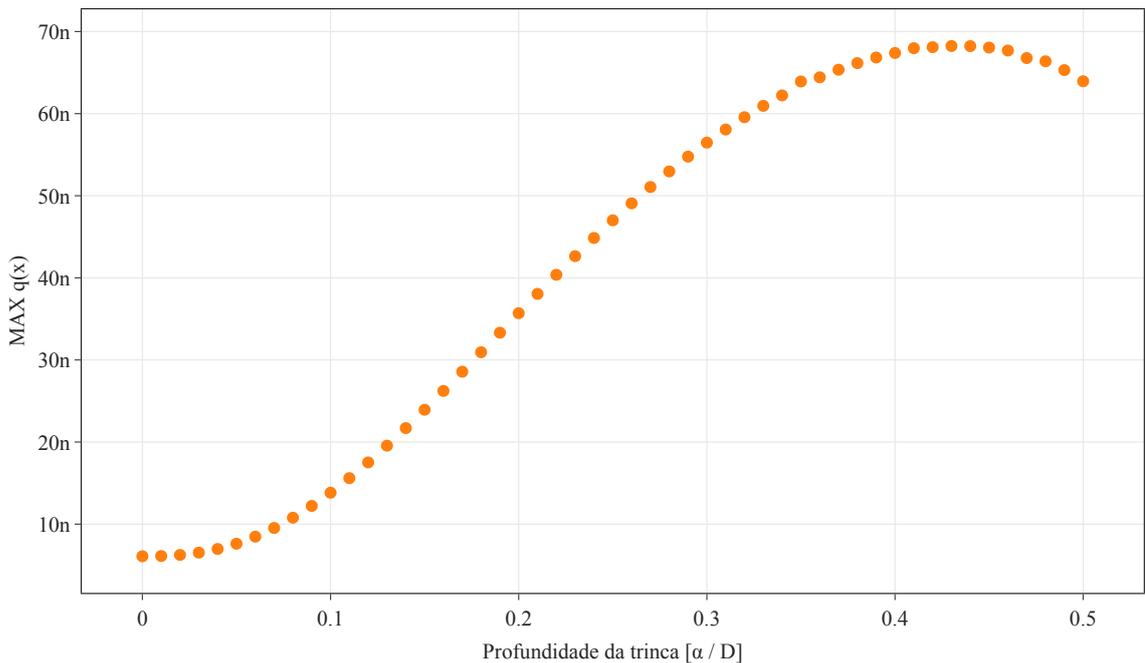


Figura 7.12: Máxima amplitude dos modos em função da profundidade de trinca considerando  $\Omega_{ext} = 71,725$  Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância  $|\Omega - \omega_{\Omega}| = 31,725$  Hz.

A Figura 7.13 mostra o mapa de calor referente à derivada de segunda ordem dos modos de vibrar apresentados na Fig. 7.11. Um mapa de calor é uma representação gráfica de dados numéricos que utiliza cores para indicar diferentes níveis de densidade ou intensidade em um

conjunto de dados. Geralmente, é um tipo de visualização bidimensional que codifica os valores de uma matriz de dados em um gradiente de cores, onde os valores mais altos são associados a cores mais quentes e os valores mais baixos são associados a cores mais frias. Este tipo de visualização é comumente usado para identificar padrões ou tendências em grandes conjuntos de dados, permitindo uma rápida identificação de áreas de interesse ou anomalias.

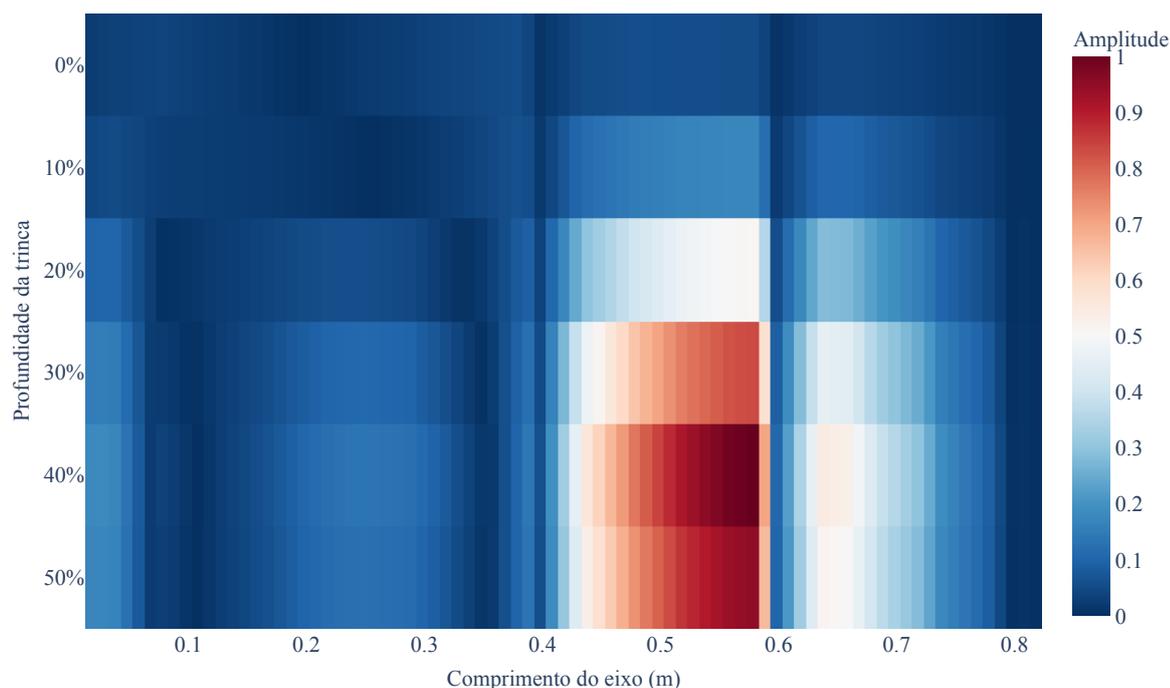


Figura 7.13: Mapa de calor referente à segunda derivada do modo de vibrar utilizando frequência de excitação externa  $\Omega_{ext} = 71,725$  Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância  $|\Omega - \omega_{\Omega}| = 31,725$  Hz.

Observe que a possível posição da trinca pode ser identificada onde as cores de destaque se aproximam da coloração vermelho (amplitude normalizada que tende a 1) que se encontra entre 0,5 m e 0,6 m.

Vale ressaltar que mesmo se o modo de vibrar reconstruído (Fig. 7.11) seja capaz de identificar a posição da trinca, a aplicação da derivada de segunda ordem é importante para minimizar a influência da condição de desbalanceamento do rotor nos resultados obtidos.

A possibilidade de utilizar outras frequências de combinação para reconstruir o modo de vibração e determinar a posição da trinca foi investigada e apresentada na Figura 7.14. Essa figura mostra o erro percentual absoluto na detecção e localização da trinca para cada par de frequências utilizadas na reconstrução do modo. No eixo vertical, é representada a frequência de aplicação da força externa, enquanto no eixo horizontal, é representada a frequência de combinação de ressonância na qual a amplitude de vibração será obtida para a reconstrução

do modo. Percebe-se que a utilização de diversas combinações é possível com acertividade relativamente eficaz da localização da trinca ao longo do eixo.

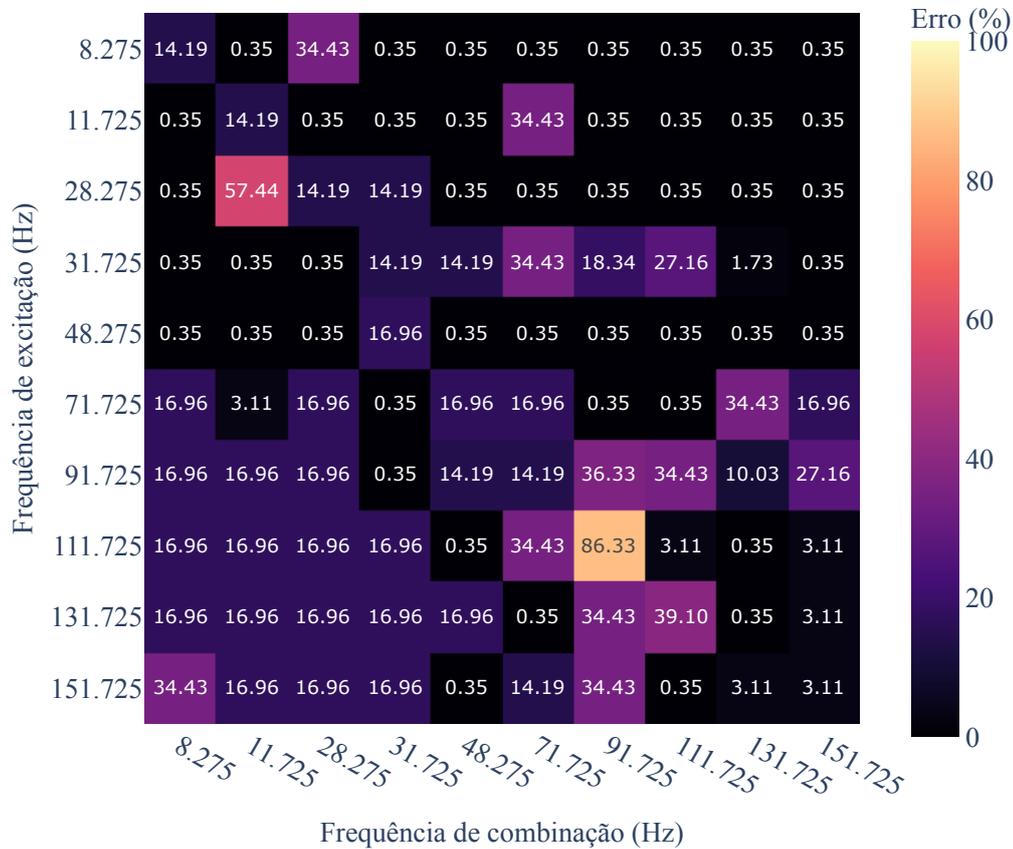


Figura 7.14: Percentuais de erro sobre a acertividade da localização da trinca - trinca com 50% de profundidade.

Ressalta-se uma discrepância em uma frequência de excitação específica - 111,725 Hz, aplicada à frequência de combinação de 91,725 Hz. Possivelmente um erro numérico associado a esta frequência devido à inversão do pico durante a transformada discreta de Fourier tenha sido a causa deste ponto isolado no gráfico.

Uma outra configuração ainda foi testada, modificando-se a posição da trinca ao longo do eixo, afim de verificar a performance e eficácia da técnica proposta. Nesta configuração, a trinca foi inserida no elemento 15. Esta escolha foi feita de forma arbitrária, a título de demonstração. Os resultados do modo vibrar, juntamente com os resultados da segunda derivada são apresentados pelas Figs. 7.15 e 7.16, onde percebe-se a amplitude máxima indicando a localização da trinca.

É relevante ainda observar que, para profundidades abaixo de 30%, a técnica perde parte de sua eficácia na identificação da posição da trinca, o que pode tornar o processo mais complexo

em profundidades incipientes. Isso acontece porque a amplitude da vibração é menor e pode ser insuficiente para a trinca ser detectada com precisão.

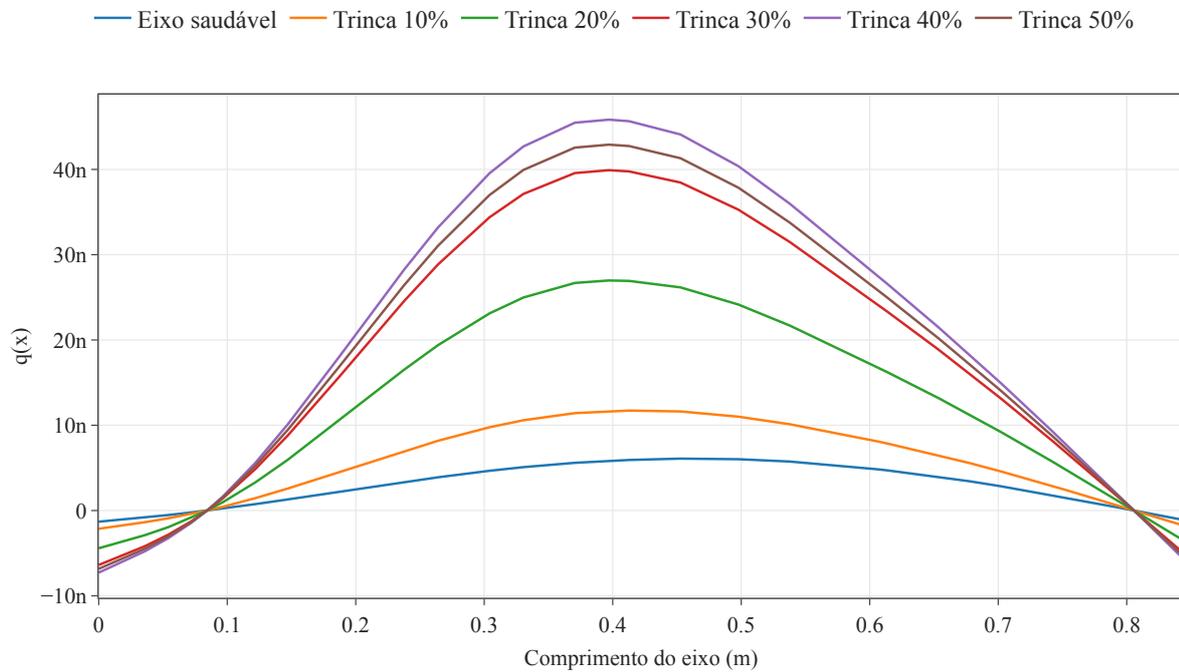


Figura 7.15: Modos de vibrar do eixo utilizando frequência de excitação externa  $\Omega_{ext} = 71,725$  Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância  $|\Omega - \omega_{\Omega}| = 31,725$  Hz (Posição da trinca no elemento 15).

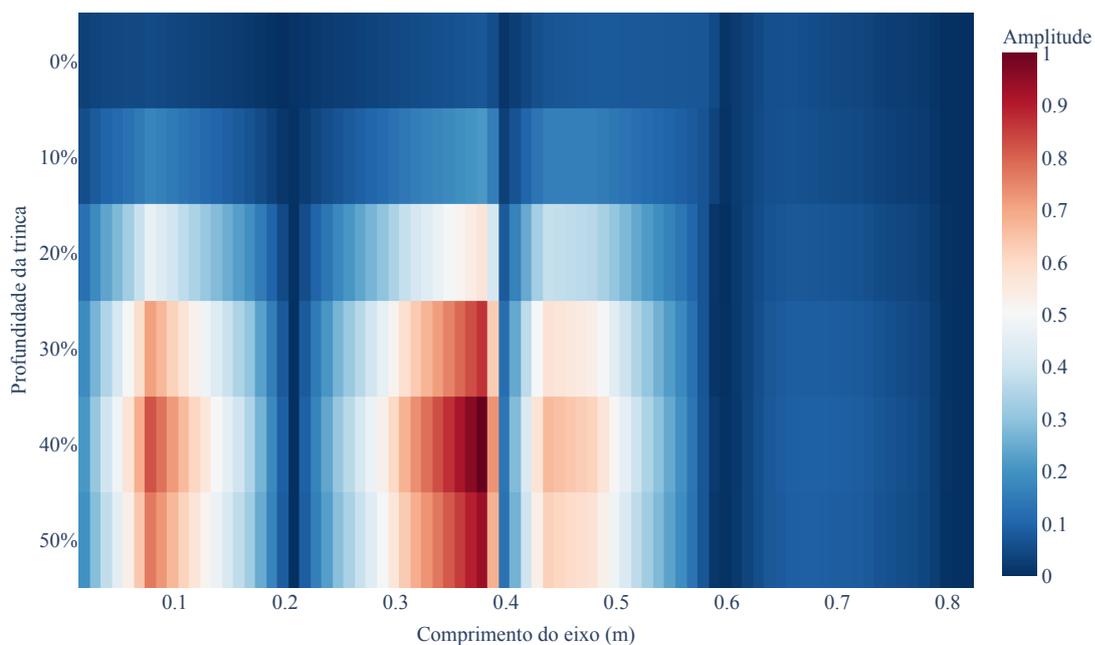


Figura 7.16: Mapa de calor referente à segunda derivada do modo de vibrar utilizando frequência de excitação externa  $\Omega_{ext} = 71,725$  Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância  $|\Omega - \omega_{\Omega}| = 31,725$  Hz (Posição da trinca no elemento 15).

### 7.2.2 Aplicação numérica com o modelo Gasch

Da mesma forma que as simulações foram apresentadas de acordo com o modelo Mayes, nesta seção serão mostrados os resultados obtidos a partir da utilização do modelo Gasch. A análise foi realizada nas mesmas condições e as respostas temporais e a característica das órbitas para o nó 7 são apresentadas nas Figs. 7.17 e 7.18, já para o nó 27 ver Figs. 7.19 e 7.20.

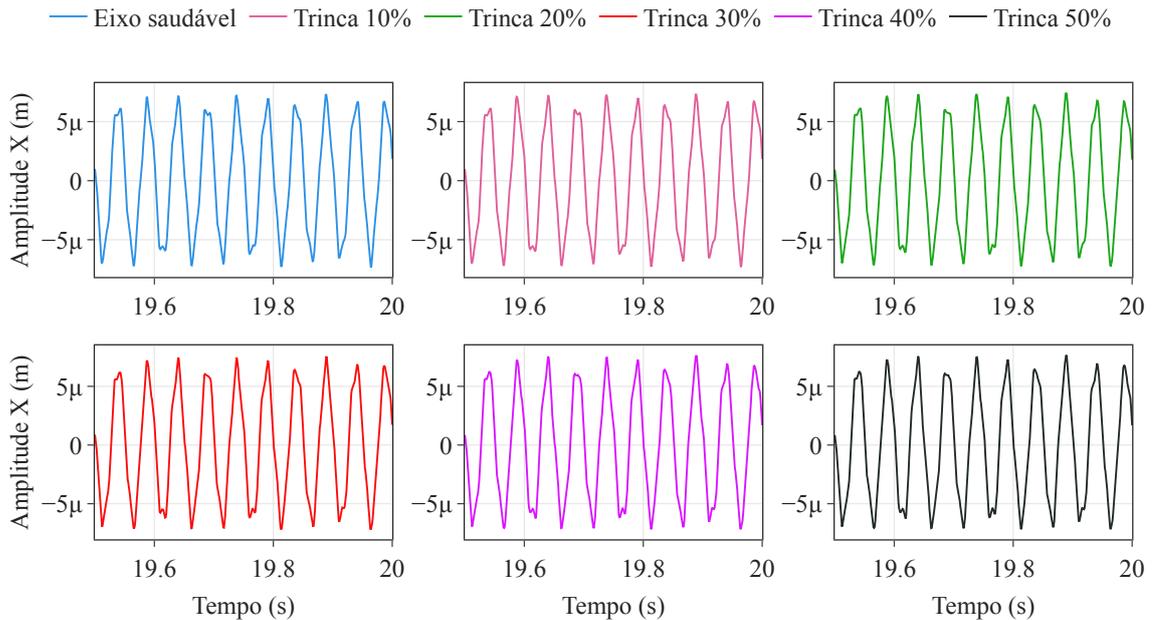


Figura 7.17: Resposta temporal para o nó  $S_{7X}$

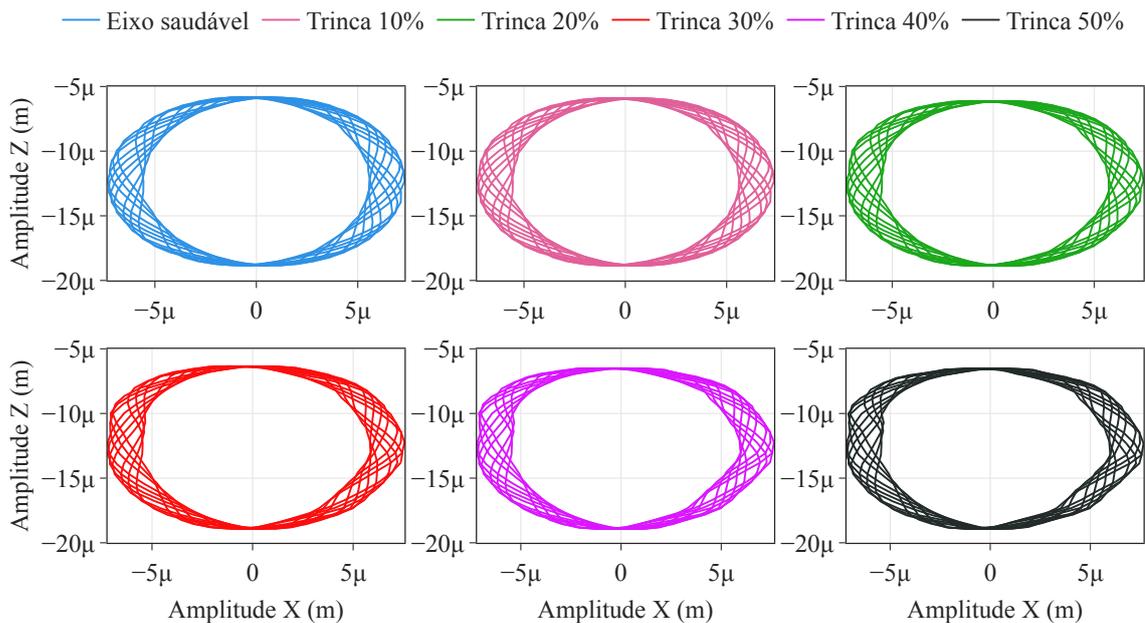


Figura 7.18: Órbitas para o nó  $S_7$

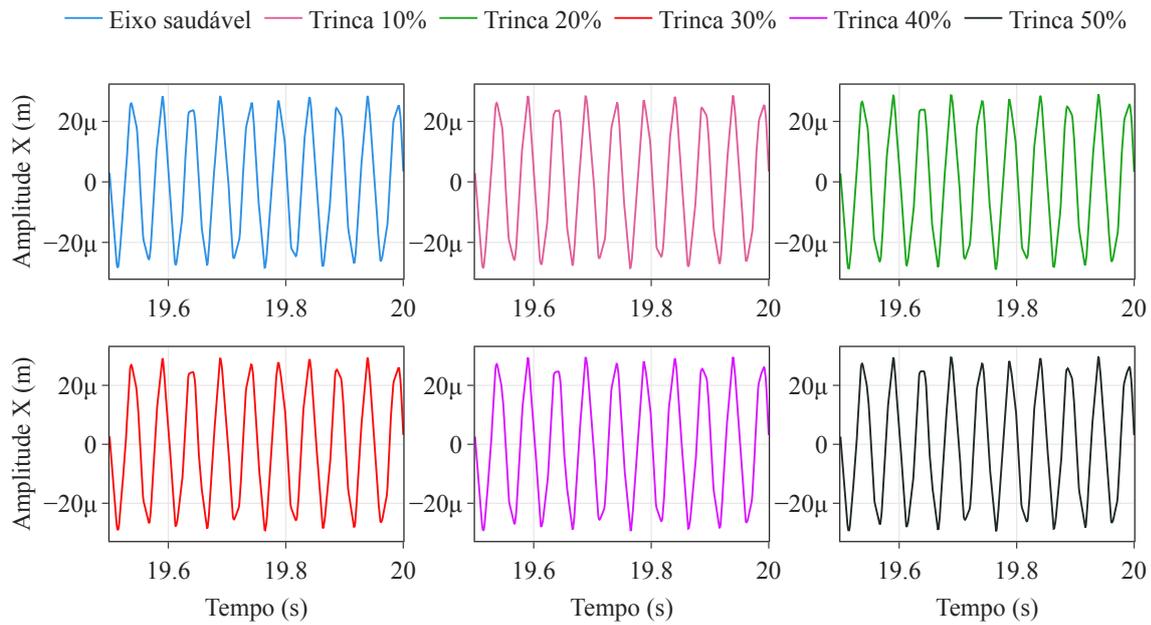


Figura 7.19: Resposta temporal para o nó  $S_{27X}$

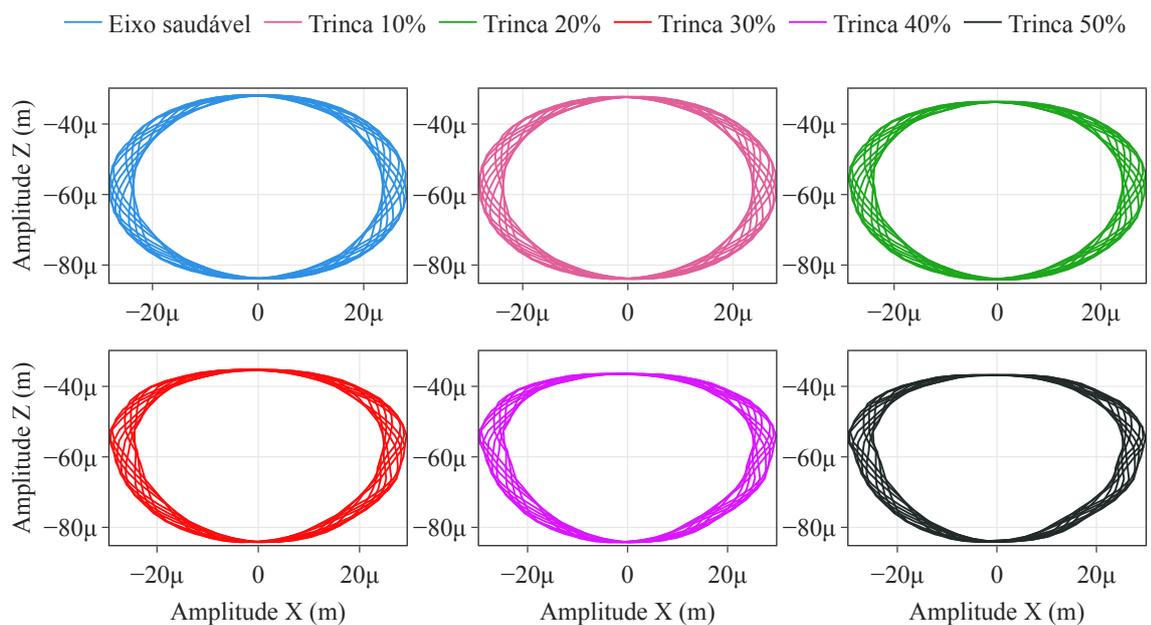


Figura 7.20: Órbitas para o nó  $S_{27}$

Nota-se características semelhantes aos resultados obtidos segundo o modelo Mayes. As amplitudes dos sinais se mantiveram consistentes em ambos nós avaliados, indicando a presença de uma resposta estrutural análoga.

As DFTs das respostas de vibração também se mostraram essencialmente semelhantes, com o aparecimento dos múltiplos da velocidade de rotação e as combinações conforme mostrado nas Figs. 7.21 e 7.22.

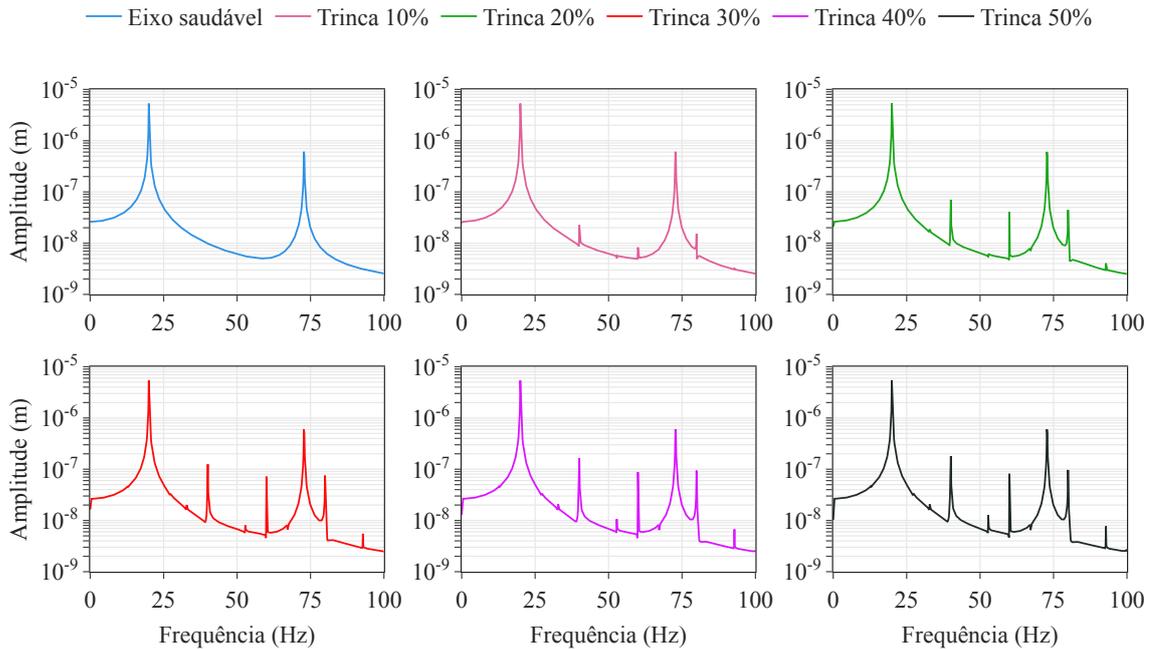


Figura 7.21: DFTs obtidas para o nó  $S_{7X}$

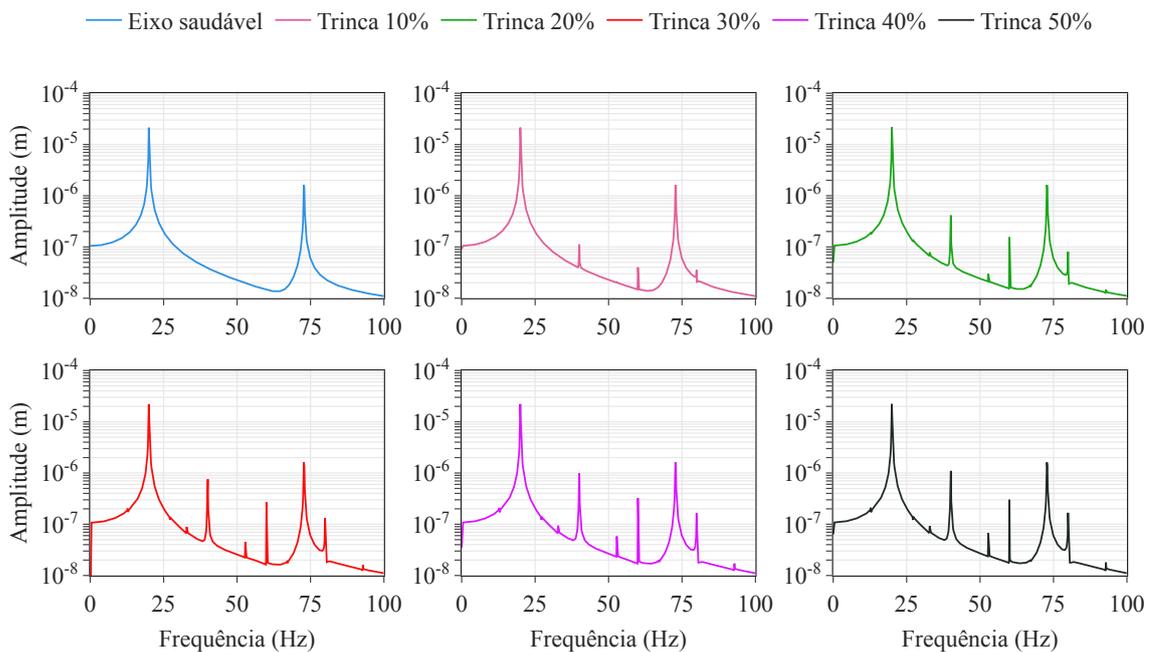


Figura 7.22: DFTs obtidas para o nó  $S_{27X}$

A Figura 7.23 apresenta os modos de vibrar do eixo, reconstruídos usando a amplitude máxima de vibração nas combinações de ressonância  $|\Omega - \omega_\Omega| = 31,725$  Hz segundo o modelo Gasch destacado por esta seção. Da mesma forma, foram obtidas as DFTs a partir das respostas de vibração horizontal medidas em todos os nós do modelo, e o modo reconstruído buscando a amplitude na combinação  $|\Omega - \omega_\Omega| = 31,725$  Hz, como ilustrado na Fig. 5.1.

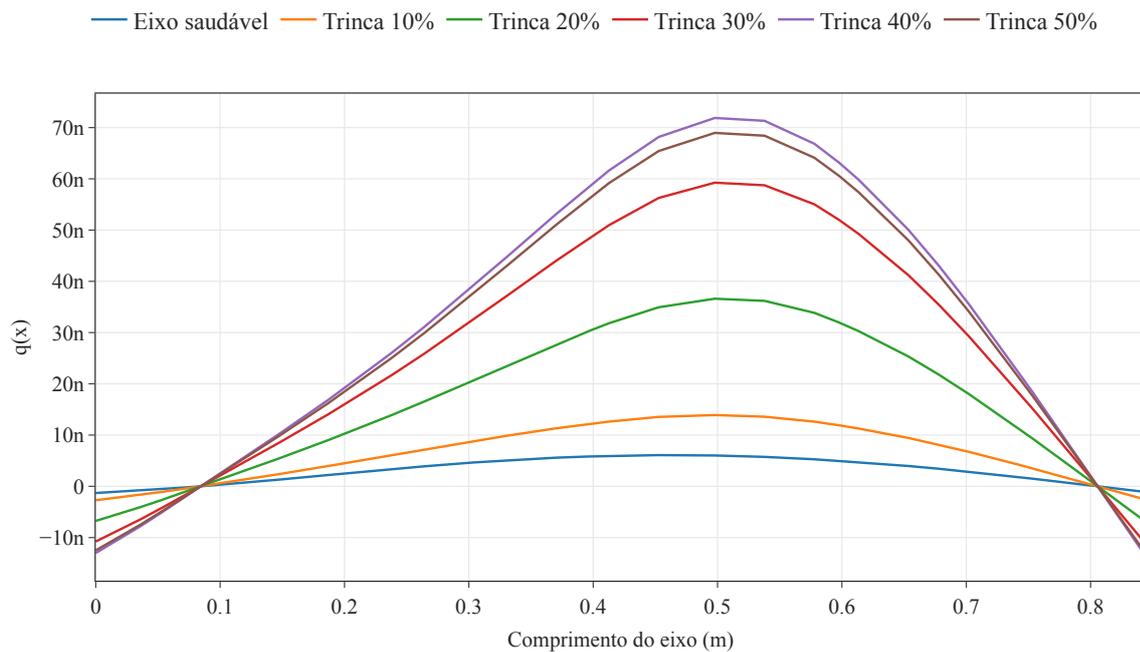


Figura 7.23: Modos de vibrar do eixo utilizando frequência de excitação externa  $\Omega_{ext} = 71,725$  Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância  $|\Omega - \omega_{\Omega}| = 31,725$  Hz.

A Fig. 7.24 apresenta, assim como na seção anterior, a curva das máximas amplitudes dos modos de vibrar (nas mesmas condições utilizada para Fig. 7.23) em função da profundidade de trinca.

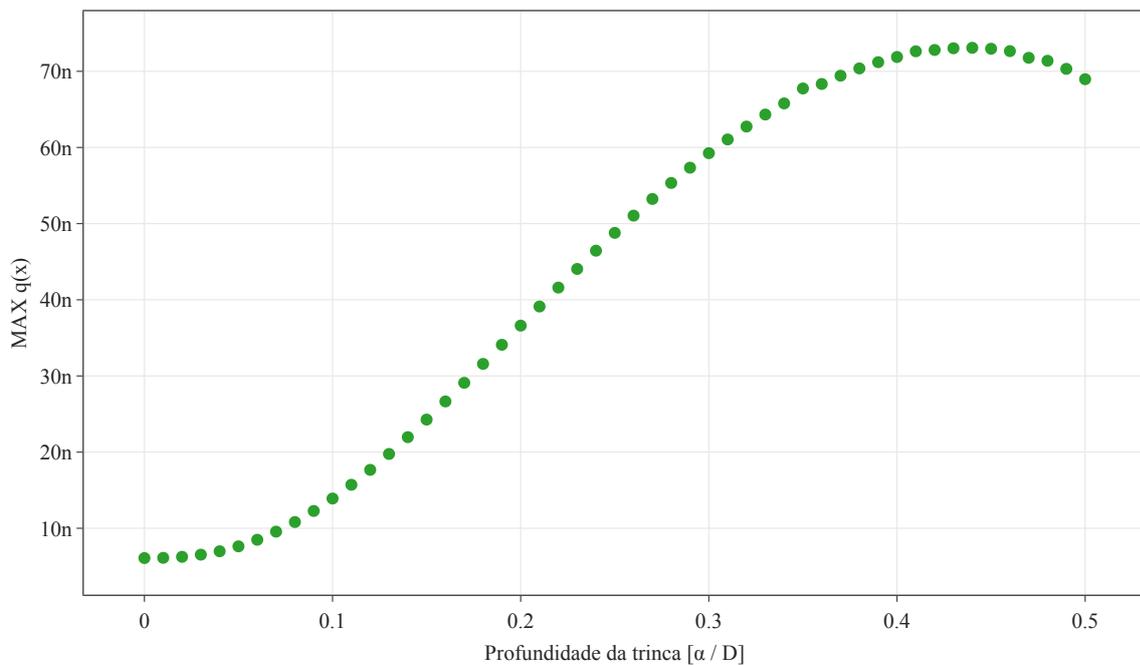


Figura 7.24: Máxima amplitude dos modos em função da profundidade de trinca considerando  $\Omega_{ext} = 71,725$  Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância  $|\Omega - \omega_{\Omega}| = 31,725$  Hz.

O formato da curva mostrada na Fig. 7.24 é muito similar ao modelo de Mayes e Davies (1984). Percebe-se o decaimento das amplitudes para trincas superiores à 40% de profundidade. Isso explica a curva do modo de vibrar para trinca de 50% de profundidade ser de menor amplitude que à curva de 40% de profundidade na Fig. 7.23.

O mapa de calor que representa a segunda derivada do modo de vibrar para esta abordagem é apresentado na Fig. 7.25. Este resultado se assemelha ao resultado apresentado na seção anterior com o modelo Mayes (ver Fig. 7.13). Essa semelhança reforça a capacidade dessa modelagem em detectar a presença da trinca de forma representativa.

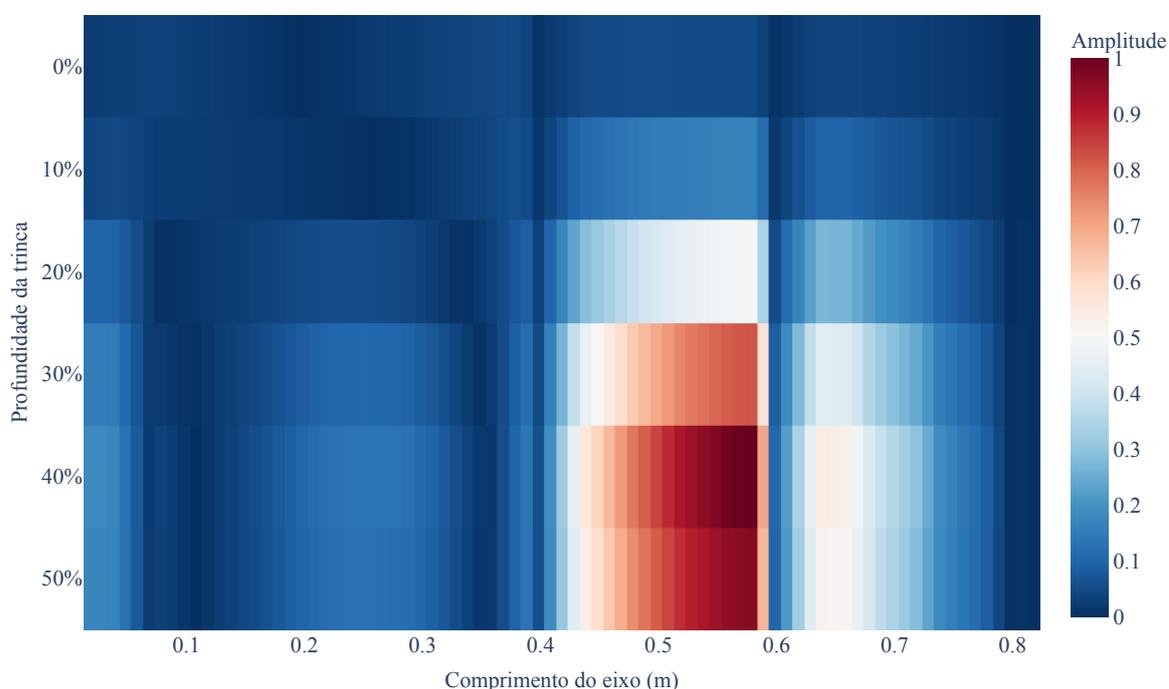


Figura 7.25: Mapa de calor referente à segunda derivada do modo de vibrar utilizando frequência de excitação externa  $\Omega_{ext} = 71,725$  Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância  $|\Omega - \omega_{\Omega}| = 31,725$  Hz.

Durante a avaliação do modelo Gasch (1993), verificou-se o erro em porcentagem ao determinar a posição da trinca, variando as condições de frequência de excitação e a frequência de combinação que fornece a amplitude para reconstrução do modo de vibrar. A Fig. 7.26 apresenta o resultado, o qual mostra que existem muitas possibilidades em que a localização da trinca ao longo do eixo pode ser identificada com precisão. No entanto, é importante destacar que alguns pares de frequência de excitação e combinação na reconstrução do modo se mostraram pouco viáveis, com erro superior a 20%, o que pode ser um fator limitante para a aplicação prática da técnica em algumas situações.

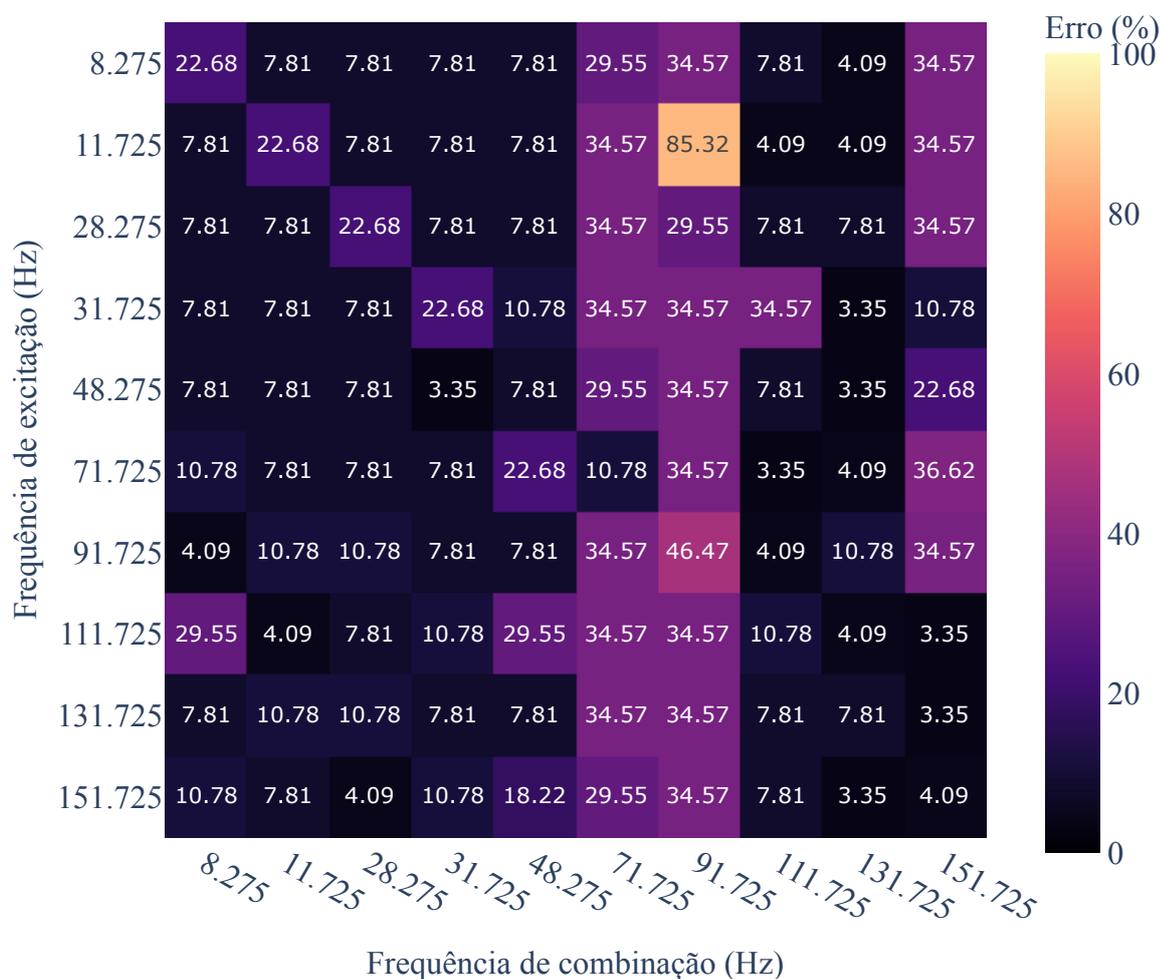


Figura 7.26: Percentuais de erro sobre a acertividade da localização da trinca - trinca com 50% de profundidade.

### 7.2.3 Aplicação numérica com o modelo Flex

O modelo Flex também foi avaliado com a metodologia de detecção, nas condições de operação idênticas às utilizadas para modelos anteriores.

Este modelo, possui características intrínsecas na formulação, que conferem um aumento considerável no custo computacional quando comparado com os modelos Mayes e Gasch (ver fluxogramas nas Figs. 6.6 e 6.7).

Além disso, uma importante consideração neste modelo é a subdivisão da seção transversal em que a trinca é inserida, sendo que, para fins de simulação, este parâmetro foi definido em 30 elementos, uma vez que o custo computacional também se eleva com o melhor refino desta discretização. Ressalta-se ainda que a intenção aqui não é determinar o melhor modelo para representação da trinca, mas apresentar os modelos que simulam este defeito nas respostas de vibração de uma máquina virtual a fim de testar a metodologia de detecção proposta.

As Figuras 7.27 e 7.28 apresentam as respostas temporais e as características das órbitas referentes ao modelo numérico para o nó 7, enquanto as Figs. 7.29 e 7.30 referem-se ao nó 27. É possível observar que todos os modelos de representação da trinca apresentaram respostas de vibração com formatos similares. Além disso, as amplitudes de vibração de todos os modelos de trinca mantiveram-se em uma escala semelhante, com diferenças pontuais não significativas.

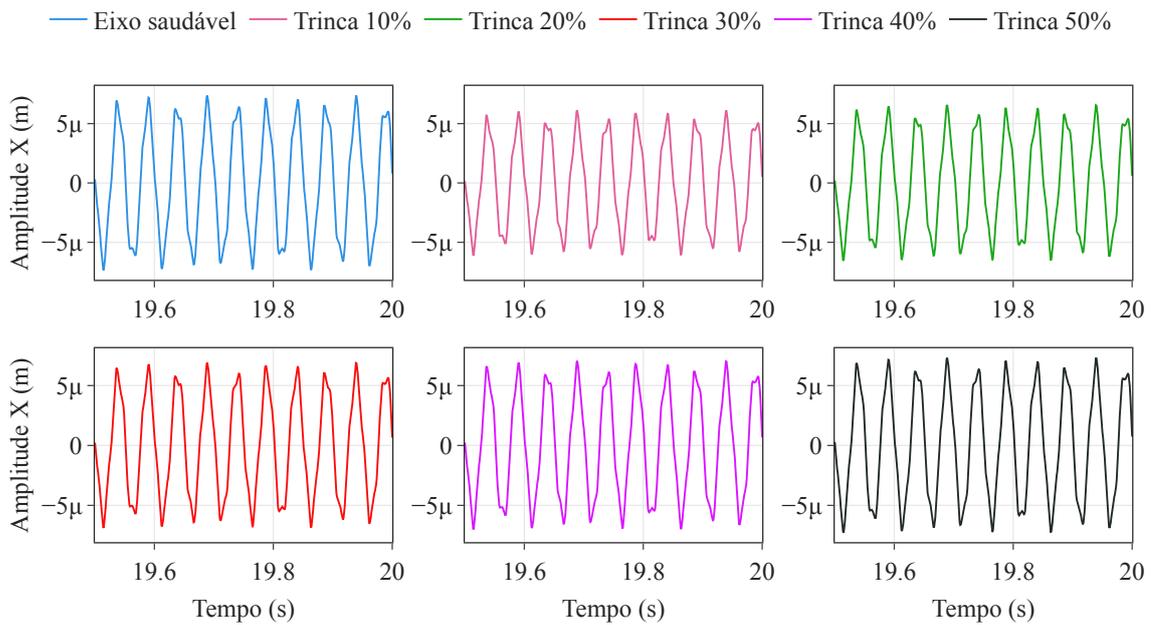


Figura 7.27: Resposta temporal para o nó  $S_{7X}$

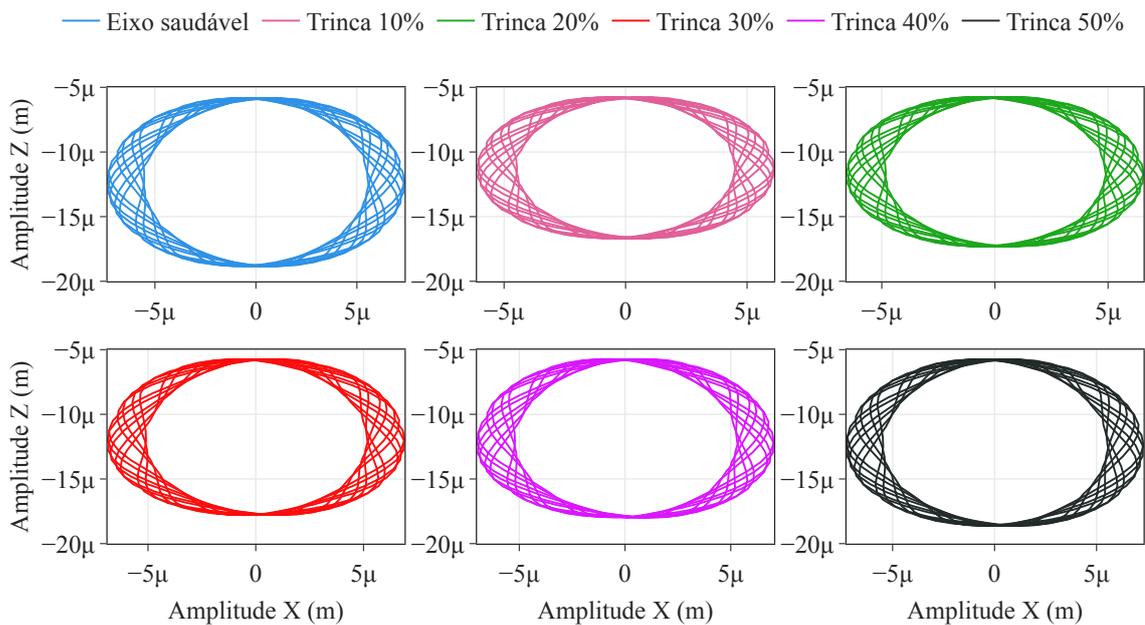


Figura 7.28: Órbitas para o nó  $S_7$

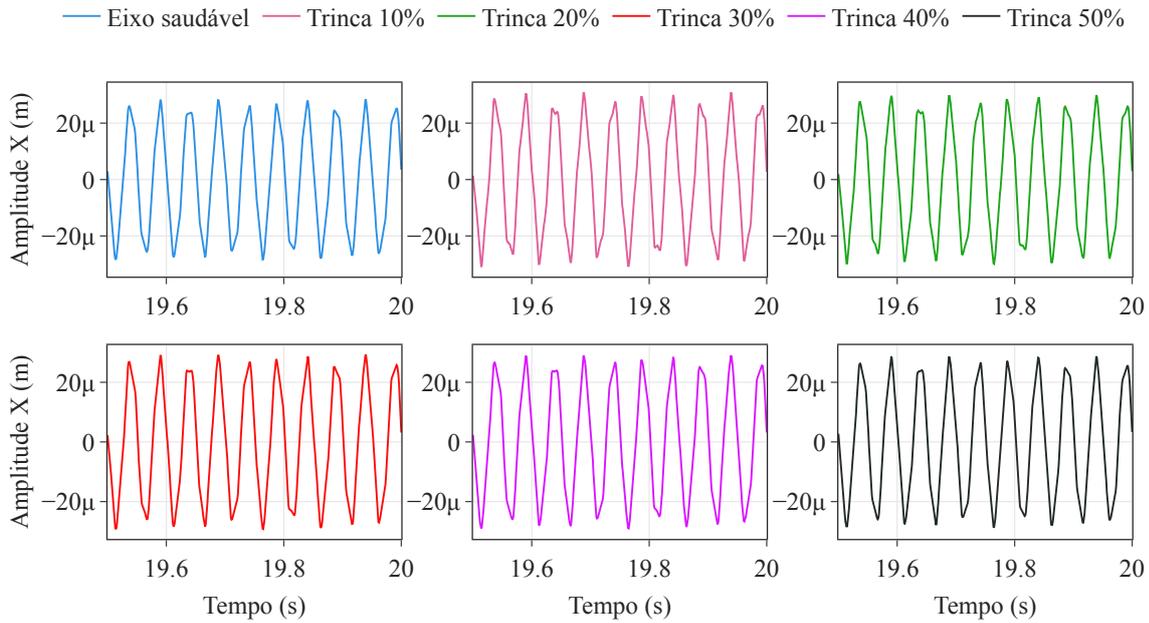


Figura 7.29: Resposta temporal para o nó  $S_{27X}$

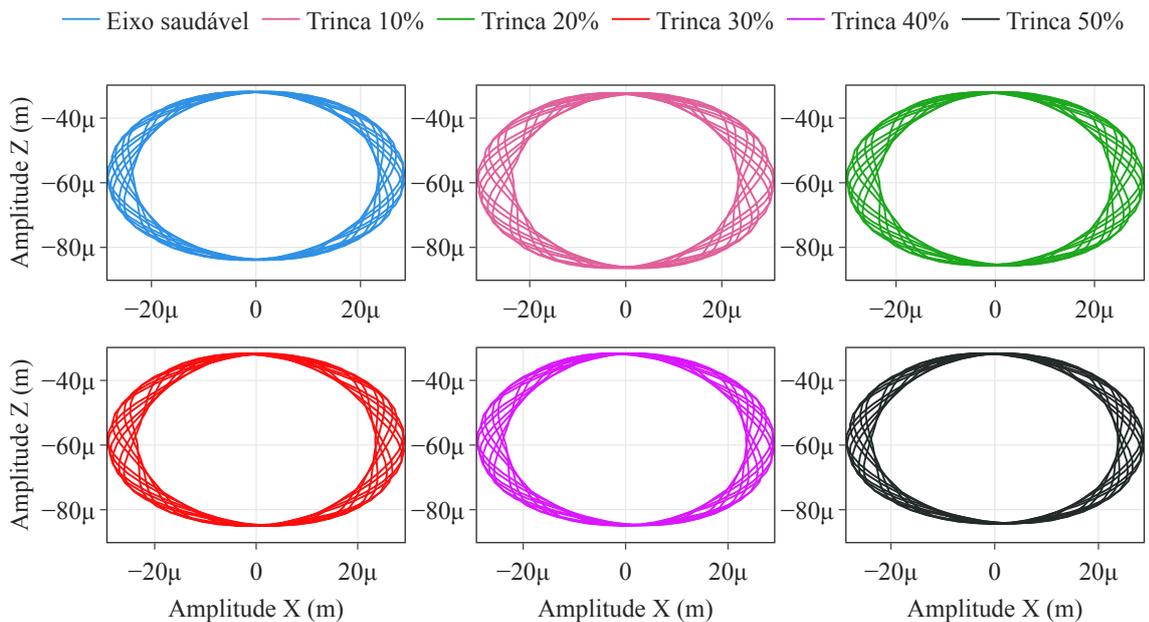


Figura 7.30: Órbitas para o nó  $S_{27}$

As DFTs das respostas de vibração mostradas nas Figs. 7.31 e 7.32, também mostraram-se essencialmente semelhantes comparadas aos modelos apresentados anteriormente, com o aparecimento dos múltiplos da velocidade de rotação e as frequências referentes às combinações de ressonância, mostrada pela Tab. 7.1.

A ocorrência destas frequências adicionais são justificadas pela influência da presença da trinca no sistema.

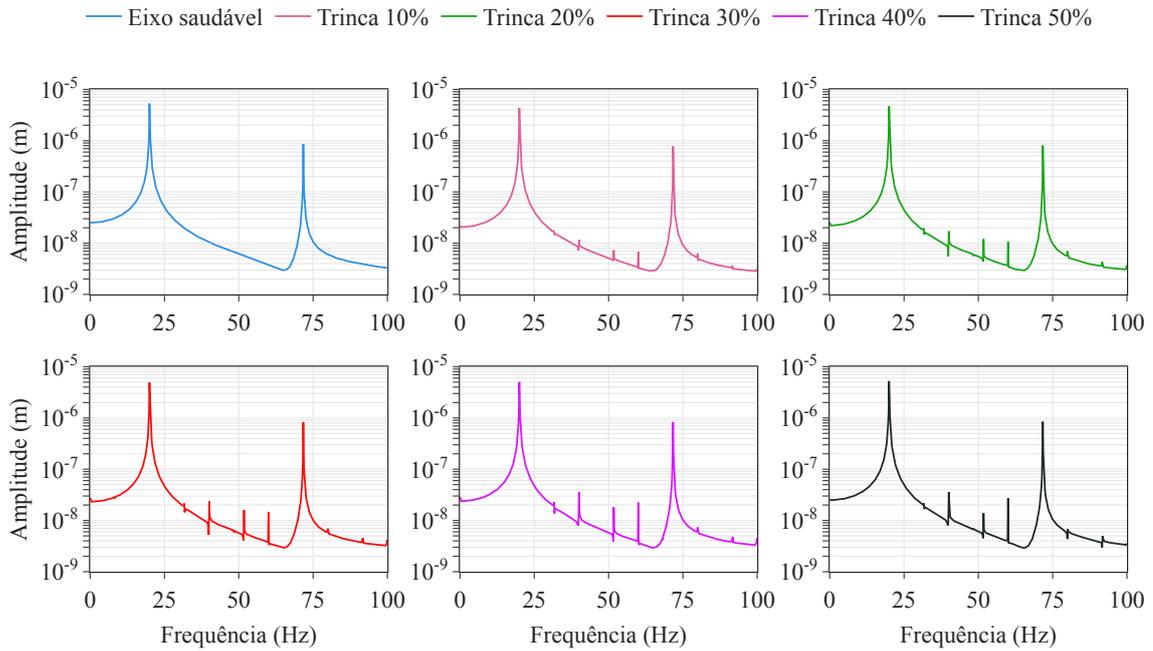


Figura 7.31: DFTs obtidas para o nó  $S_{7X}$

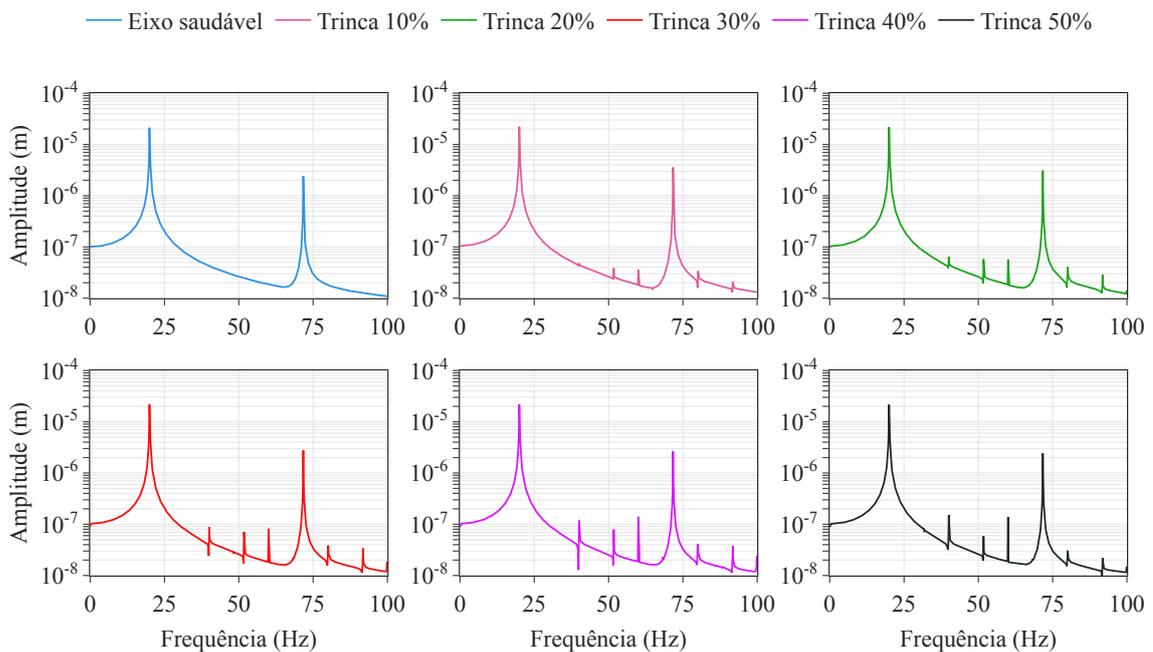


Figura 7.32: DFTs obtidas para o nó  $S_{27X}$

A Figura 7.33 apresenta os modos de vibração do eixo, que foram reconstruídos usando a amplitude máxima de vibração na combinação de ressonância  $|\Omega - \omega_{\Omega}| = 31,725$  Hz, segundo o modelo Flex.

Através da Fig. 7.33 é possível observar a diminuição das amplitudes de vibração para trinças com profundidades superiores a 40%, o que está em concordância com modelos anteriores.

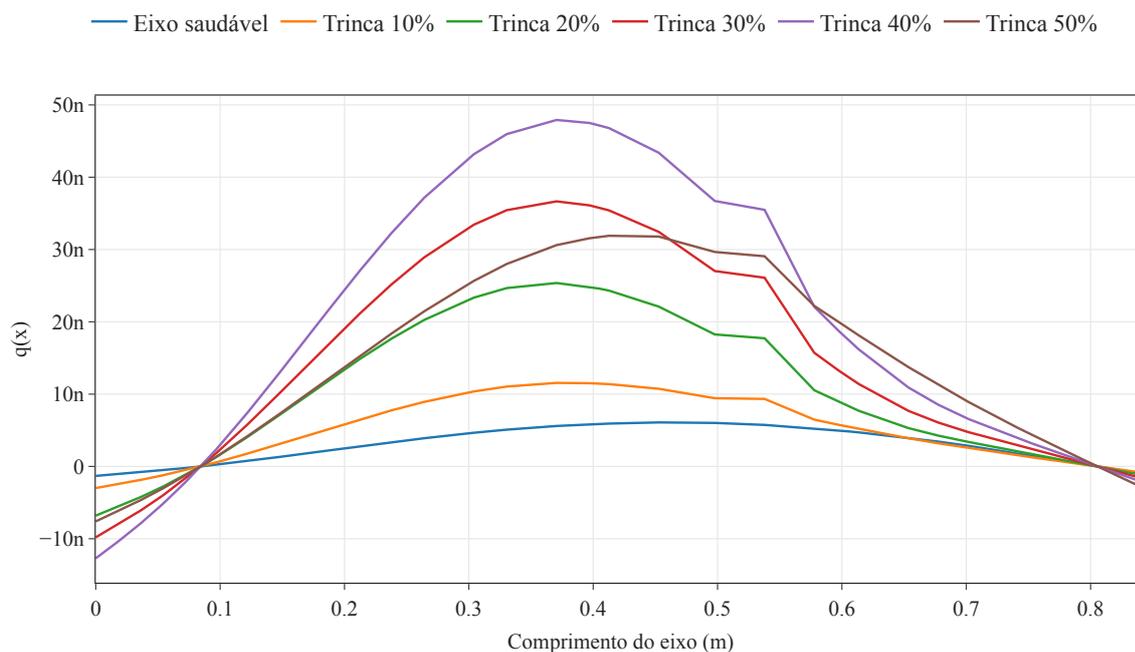
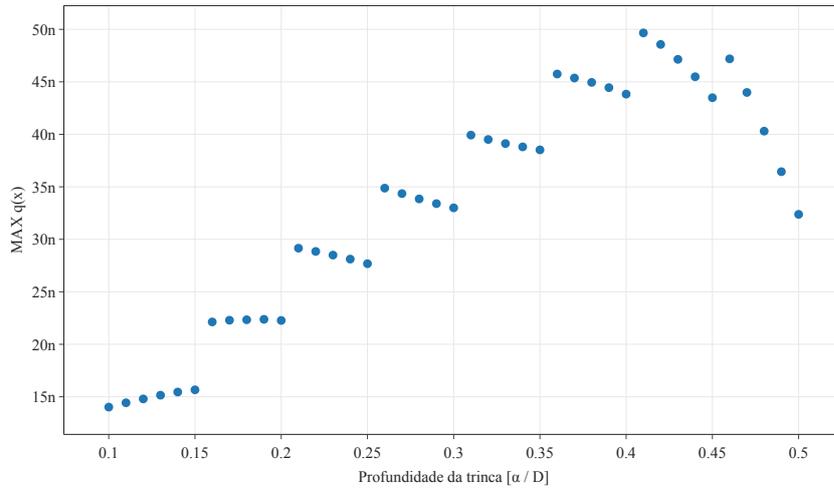


Figura 7.33: Modos de vibrar do eixo utilizando frequência de excitação externa  $\Omega_{ext} = 71,725$  Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância  $|\Omega - \omega_{\Omega}| = 31,725$  Hz.

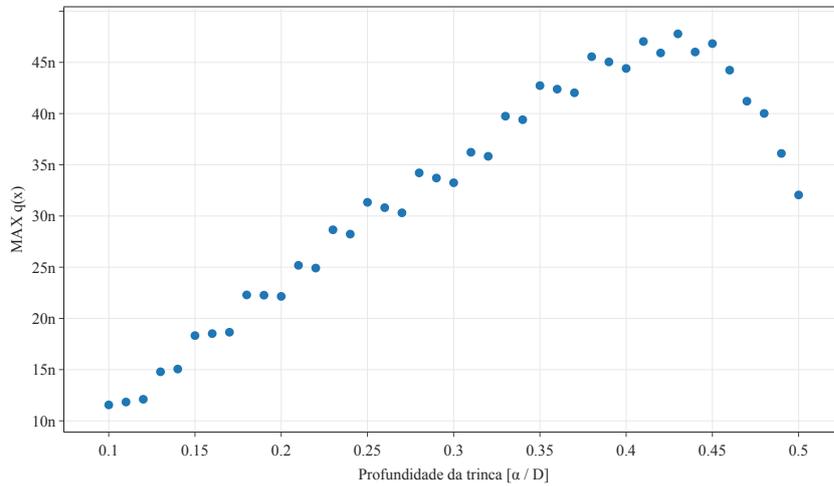
Essa característica é explicada pela curva apresentada na Figura 7.34, que mostra a curva determinada a partir das máximas amplitudes do modo de vibrar reconstruído nas mesmas condições que a Fig. 7.33, em função da profundidade da trinca. Ressalta-se que a discretização da seção transversal é um parâmetro importante neste modelo e, como é possível ver nas curvas, a estabilização da resposta é alcançada com o aumento da resolução na subdivisão da seção transversal.

A Figura 7.35 apresenta um mapa de calor que representa a segunda derivada do modo de vibrar obtido pelo modelo Flex. Observa-se que há uma região mais específica com coloração mais avermelhada, indicando que a amplitude correspondente à curva da segunda derivada é superior às demais. Essa região sugere a existência da trinca, que foi inserida próxima à esta localização. Sendo assim, pode-se considerar que este modelo é eficaz na representação deste defeito, e que a técnica proposta é promissora quanto ao seu objeto de identificação e localização de trincas ao longo de eixos rotativos.

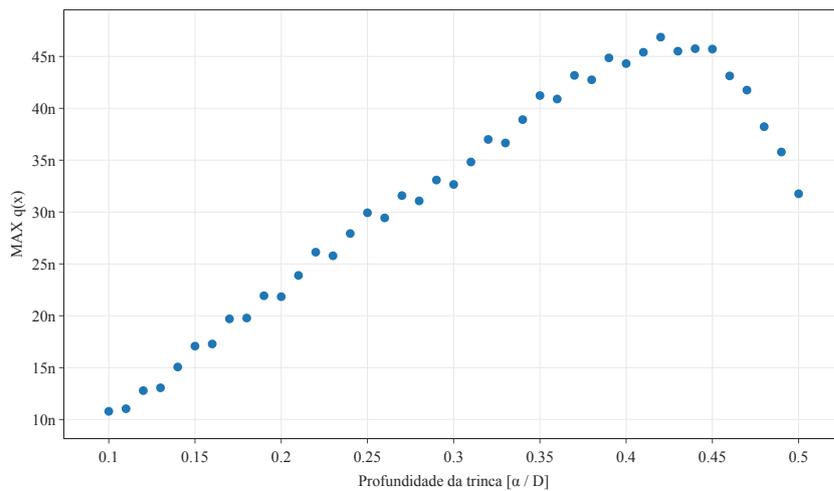
Foi também estimado o erro na determinação da posição da trinca para diferentes condições de frequência de excitação e frequência utilizada na reconstrução do modo de vibrar. O resultado é apresentado na Fig. 7.36, que indica a existência de valores de erro elevados em algumas condições específicas. No entanto, é possível utilizar diferentes combinações com uma precisão relativamente eficaz para localizar a trinca ao longo do eixo.



(a) 10 elementos



(b) 20 elementos



(c) 30 elementos

Figura 7.34: Máxima amplitude dos modos em função da profundidade de trinca considerando  $\Omega_{ext} = 71,725$  Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância  $|\Omega - \omega_{\Omega}| = 31,725$  Hz.

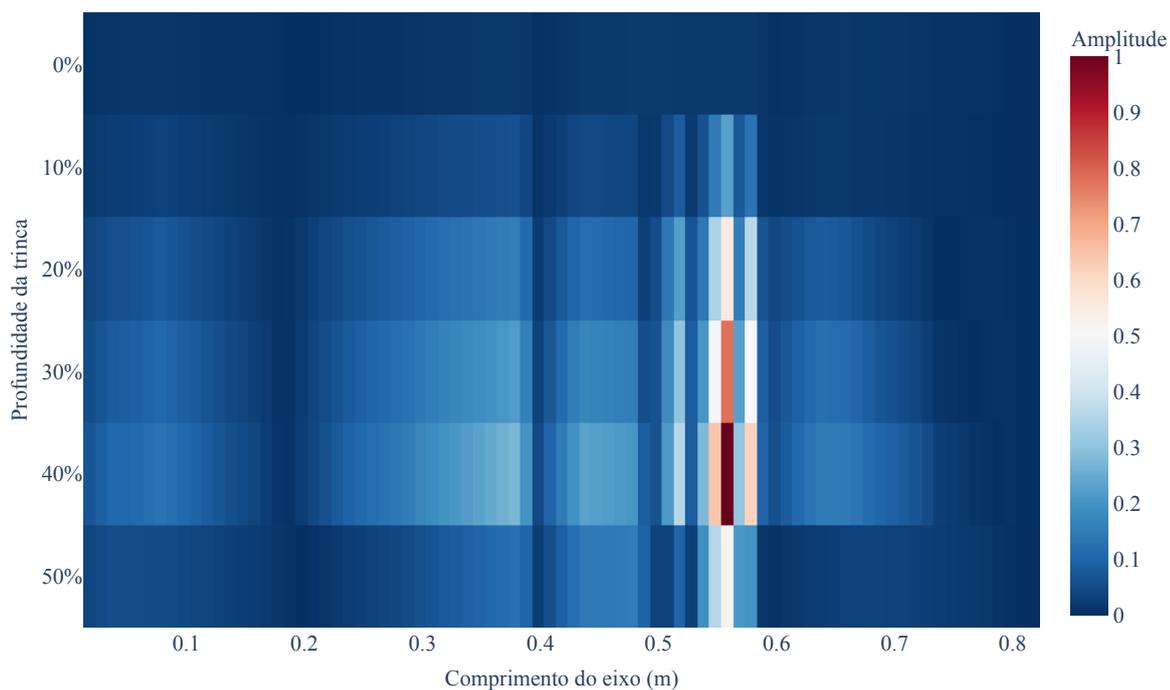


Figura 7.35: Mapa de calor referente à segunda derivada do modo de vibrar utilizando frequência de excitação  $\Omega_{ext} = 71,725$  Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância  $|\Omega - \omega_{\Omega}| = 31,725$  Hz.

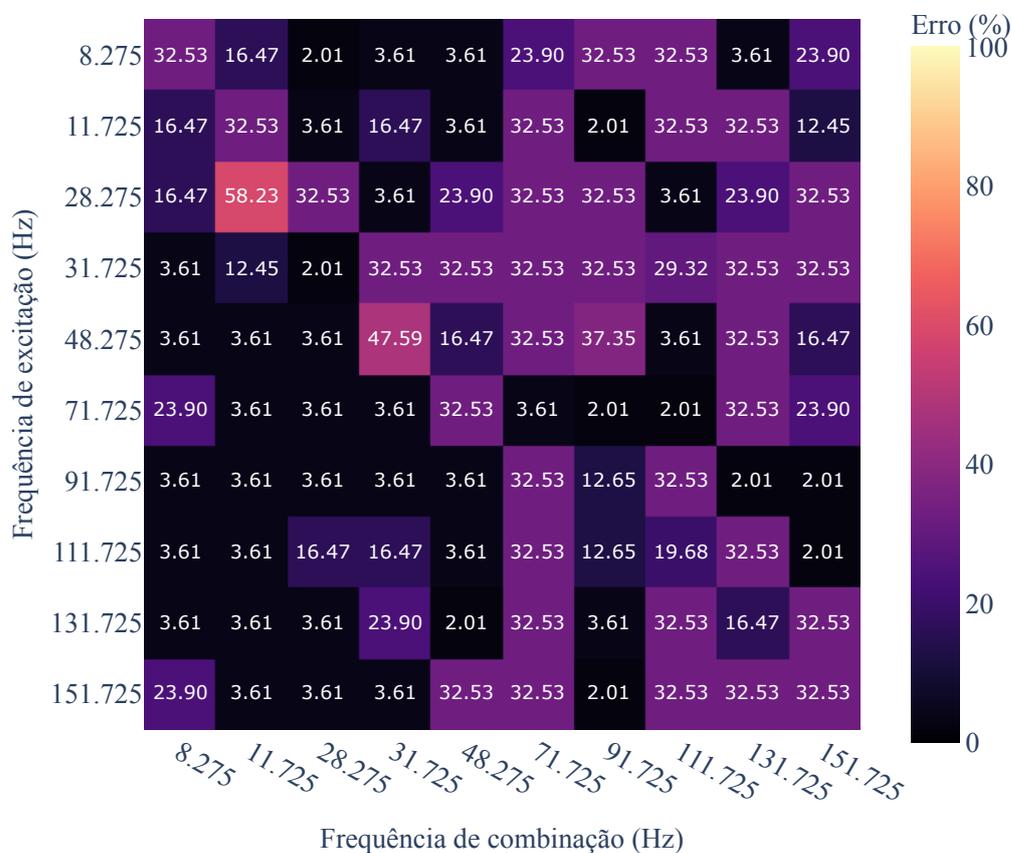


Figura 7.36: Percentuais de erro sobre a acurácia da localização da trinca - trinca com 50% de profundidade.

## CAPÍTULO VIII

### RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Os resultados experimentais deste trabalho foram obtidos com base nas configurações adotadas dos testes numéricos apresentados.

A bancada experimental e o esquema utilizado para obtenção dos resultados são mostrados na Fig. 8.1.

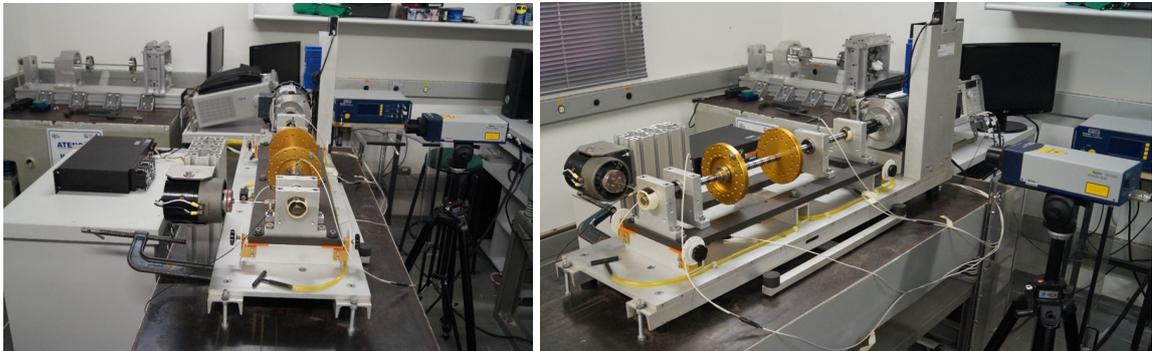


Figura 8.1: Bancada experimental e equipamentos utilizados.

Utilizou-se a bancada comercial para simulação de falhas denominada *Machinery Fault & Rotor Dynamics Simulator*(MFS-RDS) da *SpectraQuest*<sup>®</sup>. Esta é uma ferramenta inovadora para estudar o comportamento dinâmico de rotores suportados por mancais lubrificados a óleo, bem como outras falhas comuns de máquinas, como balanceamento e estudo de ressonância.

Neste trabalho, no entanto, os mancais de suporte ao eixo horizontal é um mancal de rolamento com carreira dupla de esferas mostrado pela Fig. 8.2. Os parâmetros dos mancais foram determinados pelo processo de otimização descrito no Capítulo VI, no qual é apresentada a Tab. 6.1 com os valores determinados através do ajuste do modelo.

As respostas de vibração do eixo rotativo foram medidas usando um sensor a laser *OFV*-



Figura 8.2: Rolamento com camada dupla de esferas.

*505/503 Vibrometer Sensor Head* da *Polytec* juntamente com o *OFV-5000 Modular Vibrometer* - Fig. 8.3, cuja resolução chega à ordem de 0,1 pm.



Figura 8.3: Conjunto *OFV-505/503 Vibrometer Sensor Head* e *OFV-5000 Modular Vibrometer*.

As posições ao longo do eixo onde as medições foram realizadas são correspondentes a alguns nós do modelo FE do rotor (Fig. 6.2). Foram medidas ao todo 22 posições. A Fig. 8.4, mostra com detelhe as marcações no eixo para garantir o correto posicionamento do laser.

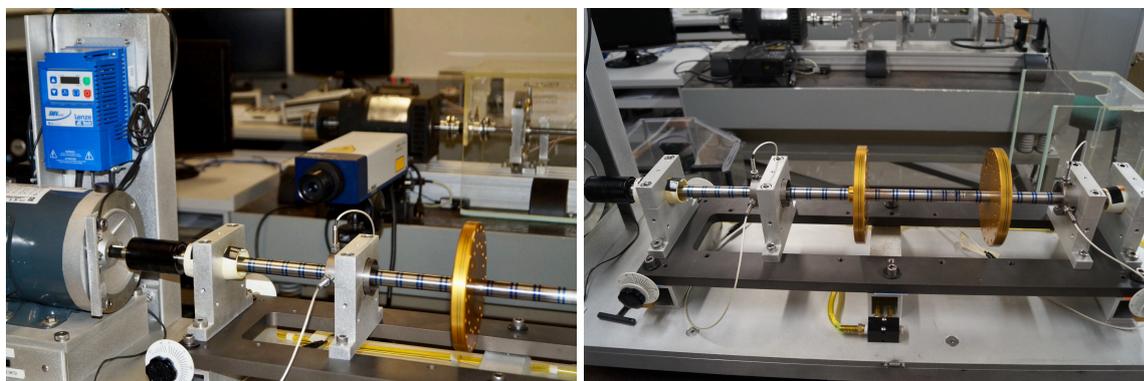


Figura 8.4: Medição da vibração ao longo do eixo pelo laser.

A excitação externa foi aplicada usando um excitador eletrodinâmico Labworks® modelo ET-126 acoplado ao longo da direção horizontal no mancal  $B_2$  (ver Fig. 8.5).

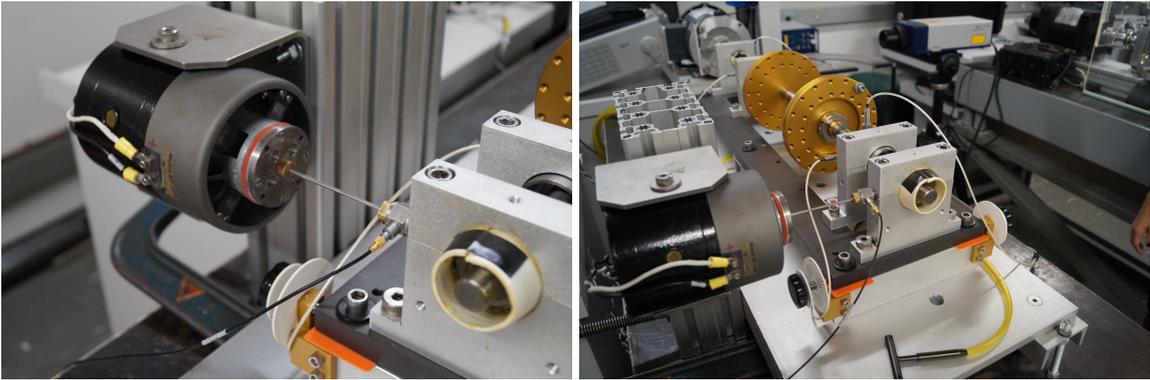


Figura 8.5: Excitador eletrodinâmico Labworks® modelo ET-126 acoplado ao mancal.

A metodologia de identificação de trincas foi testada experimentalmente com a frequência de excitação externa  $\Omega_{ext} = 71,725$  Hz. Nesse caso, uma trinca *breathing* com 50% foi inserida na posição correspondente ao elemento 21 do modelo FE do rotor (Fig. 6.1), assim como mostrado numericamente na seção anterior.

O corte do eixo para representação da trinca foi realizado por eletroerosão, para garantir uma superfície de entalhe com alta qualidade, praticamente sem distorções ou alterações microestruturais. Mais detalhes da trinca são visualizados na Fig. 8.6.

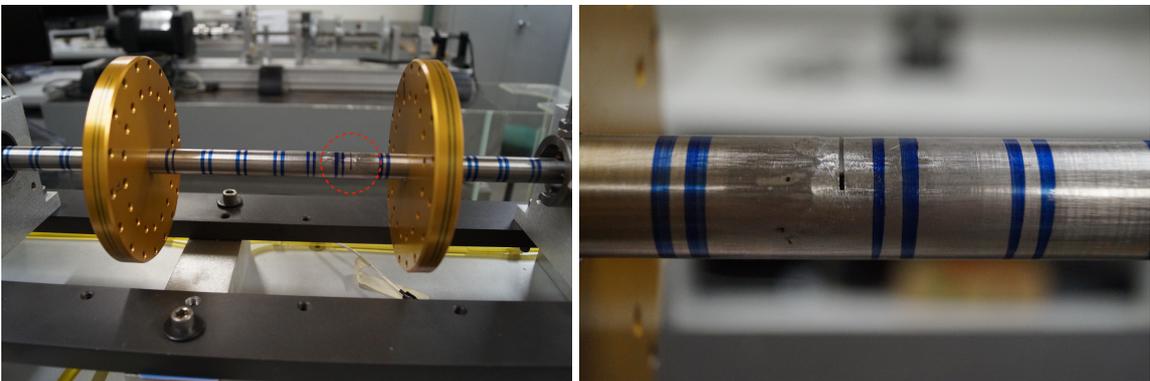
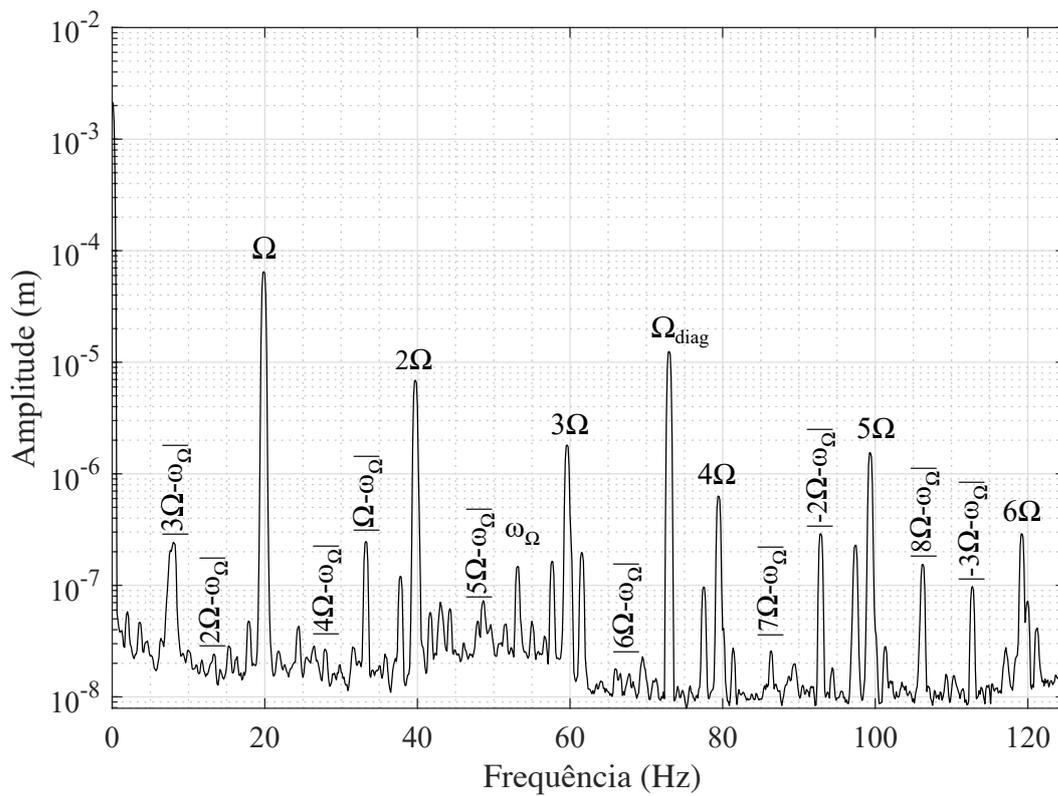
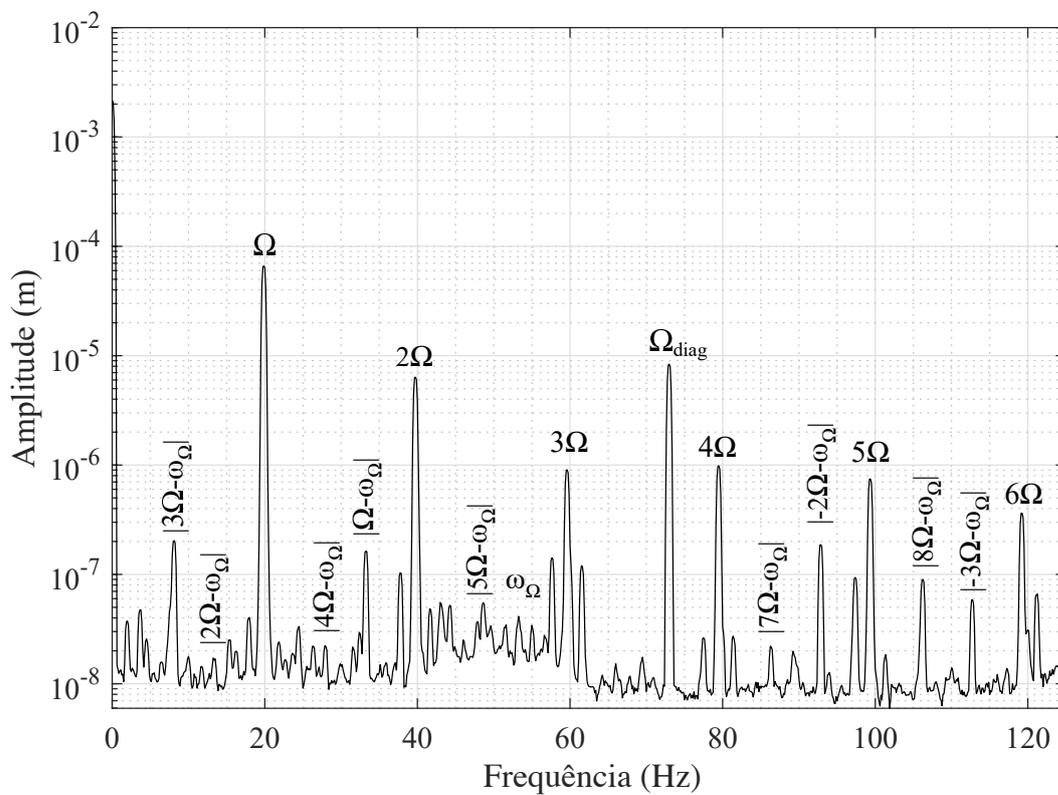


Figura 8.6: Detalhes da trinca no eixo.

A Figura 8.7 mostra as DFTs das respostas de vibração do eixo obtidas pelas medições nas posições  $S_{7X}$  e  $S_{27X}$ . As demais posições, com menos detalhes, são apresentadas pelas Figs. 8.8 e 8.9.

Nota-se a presença das frequências múltiplas da velocidade de rotação e das frequências de combinação de ressonância assim como mostrado pelos resultados numéricos, isso é uma característica evidente de uma assinatura da trinca no sistema.

(a) DFT obtidas para o nó  $S_{7X}$ .(b) DFT obtidas para o nó  $S_{27X}$ .Figura 8.7: DFTs obtidas utilizando frequência de excitação externa  $\Omega_{ext} = 71,725$  Hz.

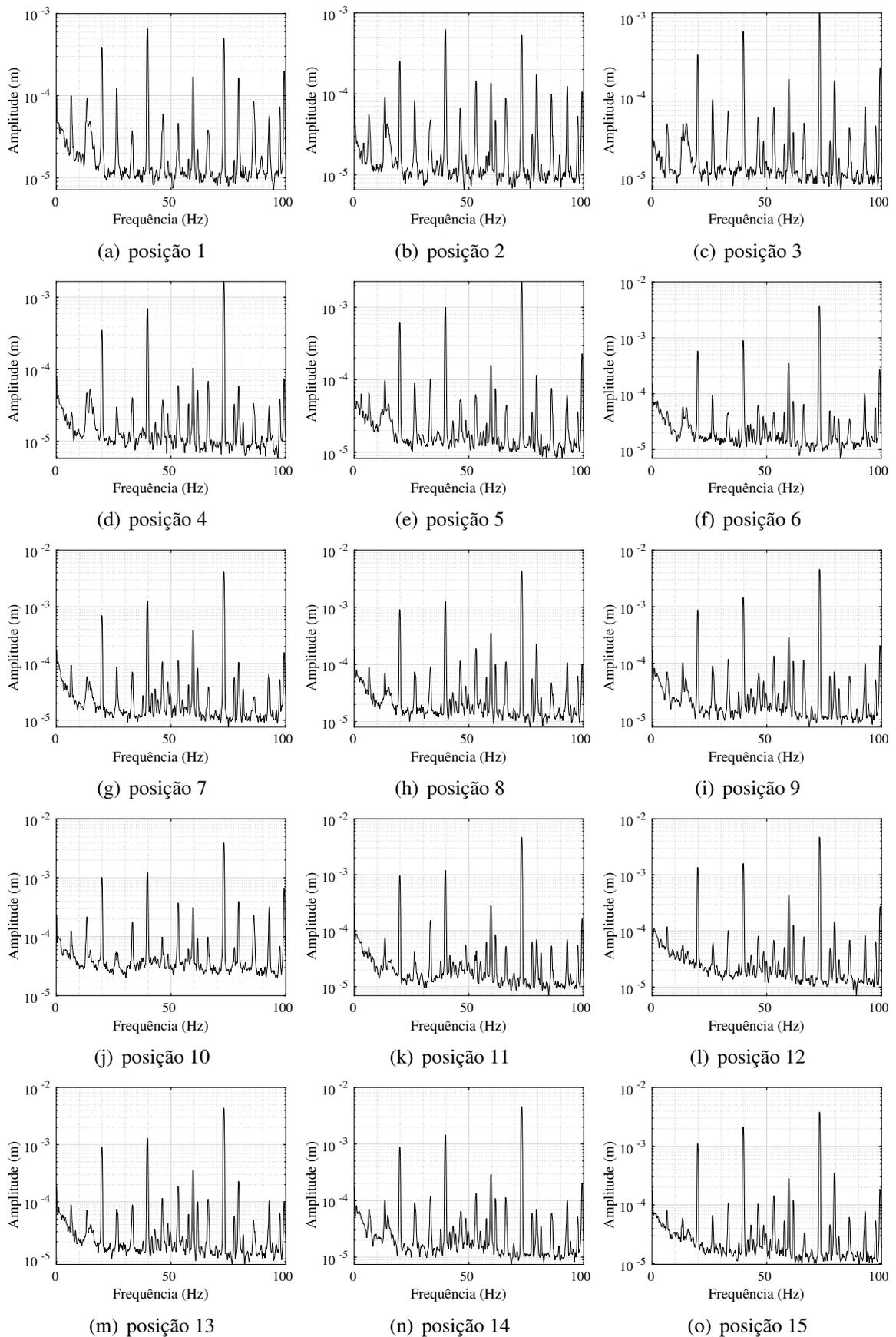


Figura 8.8: DFTs experimentais obtidas utilizando frequência de excitação externa  $\Omega_{ext} = 71,725$  Hz.

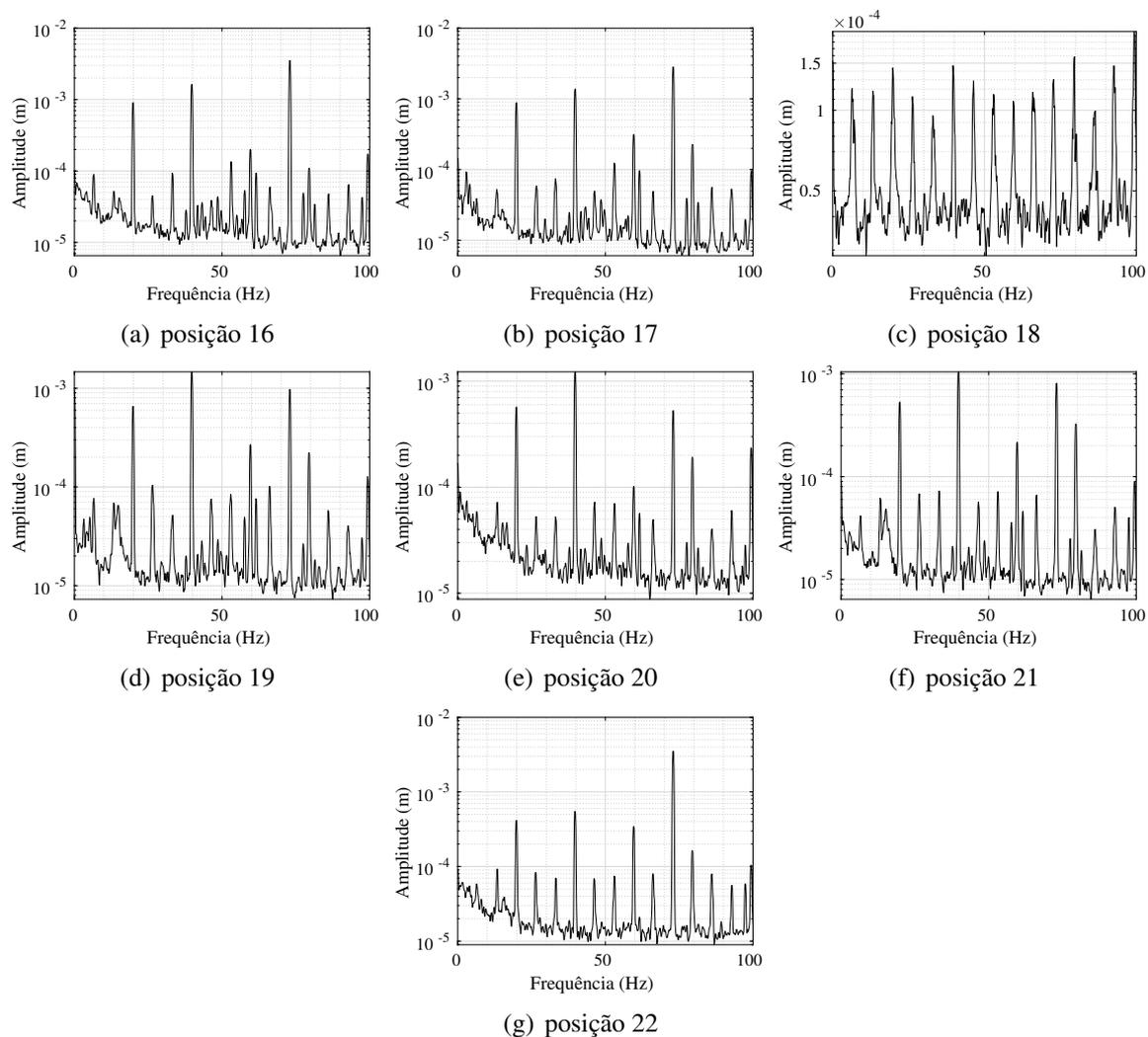


Figura 8.9: DFTs experimentais obtidas utilizando frequência de excitação externa  $\Omega_{ext} = 71,725$  Hz.

A Figura 8.10 apresenta o modo de vibrar do eixo, reconstruído usando a amplitude máxima de vibração na combinação de ressonância  $|\Omega - \omega_{\Omega}| = 31,725$  Hz. Como a quantidade de pontos discretos foi limitada pela abordagem escolhida com a medição individual de cada posição ao longo do eixo, um ajuste de curva foi realizado a fim de observar o formato mais aproximado do modo de vibrar nestas condições.

A Figura 8.11 mostra o mapa de calor que representa a derivada de segunda ordem do modo de vibrar. Neste resultado experimental, a posição correta da trinca é identificada pela amplitude máxima da derivada de segunda ordem (região de coloração mais avermelhada), localizada entre 0,5 m e 0,55 m, que corresponde à aproximadamente a posição real da trinca. Os resultados experimentais são bastante influenciados por diversos fatores que não garantem uma precisão maior da técnica proposta. Um desses fatores é o próprio sistema de medição.

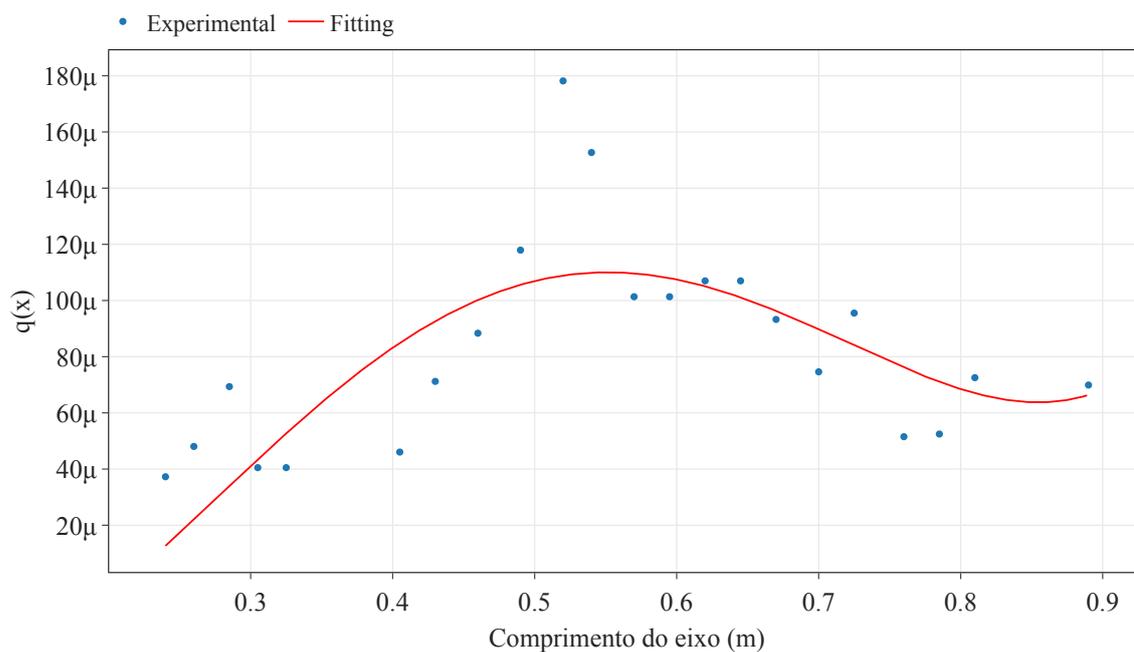


Figura 8.10: Modo de vibrar do eixo utilizando frequência de excitação externa  $\Omega_{ext} = 71,725$  Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância  $|\Omega - \omega_{\Omega}| = 31,725$  Hz.

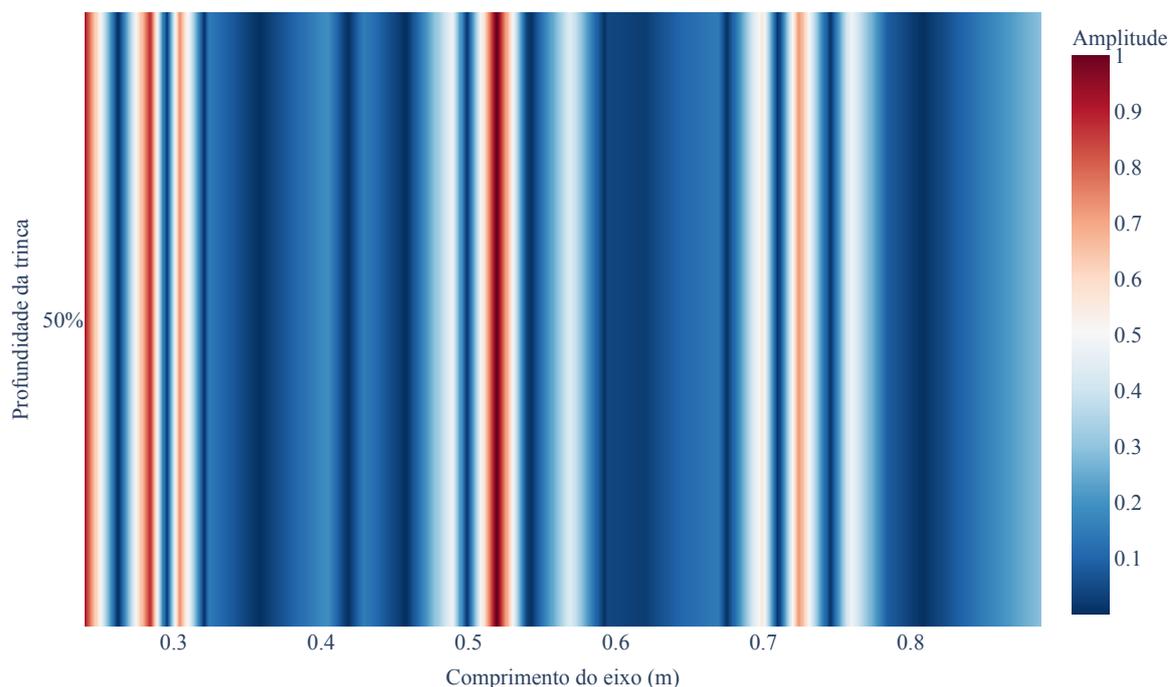


Figura 8.11: Mapa de calor referente à segunda derivada do modo de vibrar utilizando frequência de excitação externa  $\Omega_{ext} = 71,725$  Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância  $|\Omega - \omega_{\Omega}| = 31,725$  Hz.

Outra frequência de excitação externa também foi avaliada para verificar a eficácia da metodologia,  $\Omega_{ext} = 31,725$  Hz. A Figura 8.12 mostra as DFTs das respostas de vibração do eixo obtidas pelas medições nas posições  $S_{7X}$  e  $S_{27X}$ .



Nota-se pela Fig. 8.12, em conformidade com o resultado anterior, o aparecimento dos múltiplos e das combinações de ressonância.

Para a reconstrução do modo de vibrar (Ver Fig. 8.13), foi utilizada a máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância  $|\Omega - \omega_{\Omega}| = 71,725$  Hz.

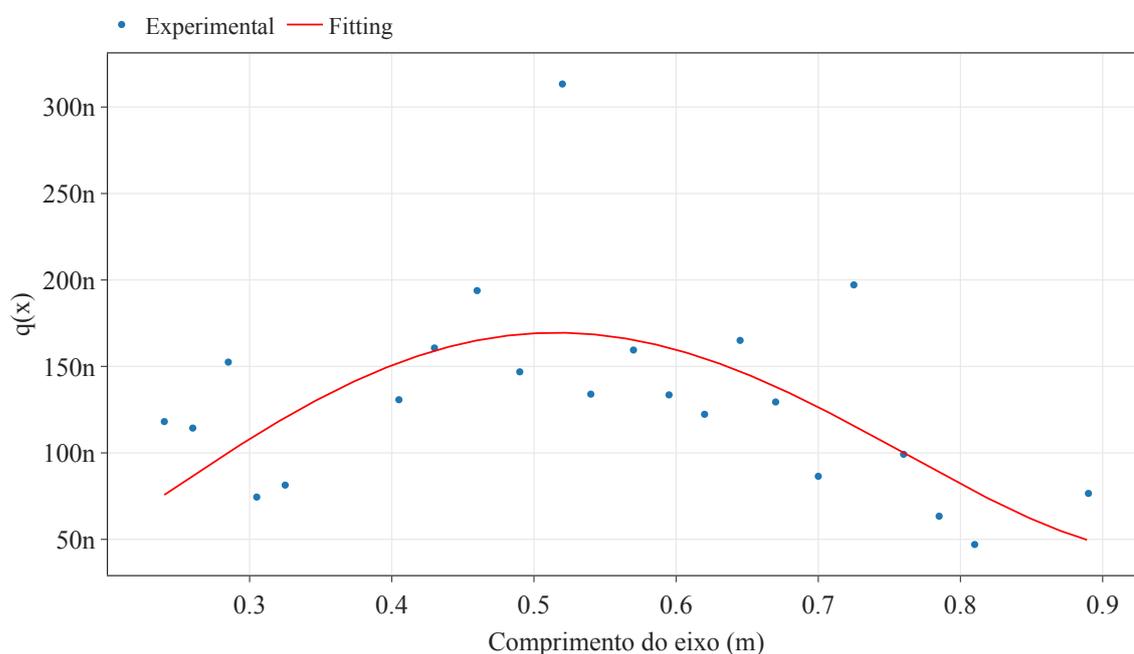


Figura 8.13: Modo de vibrar do eixo utilizando frequência de excitação externa  $\Omega_{ext} = 31,725$  Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância  $|\Omega - \omega_{\Omega}| = 71,725$  Hz.

O mapa de calor que representa a segunda derivada do modo de vibrar é apresentado na Fig. 8.14. A região de coloração mais avermelhada indica a posição da trinca ao longo do eixo. Mais uma vez, os resultados indicam uma boa precisão quando ao uso da metodologia proposta.

De maneira geral, é possível perceber o potencial para a metodologia empregada a nível de detecção de não linearidades como a presença de uma trinca transversal em eixos de máquinas rotativas.

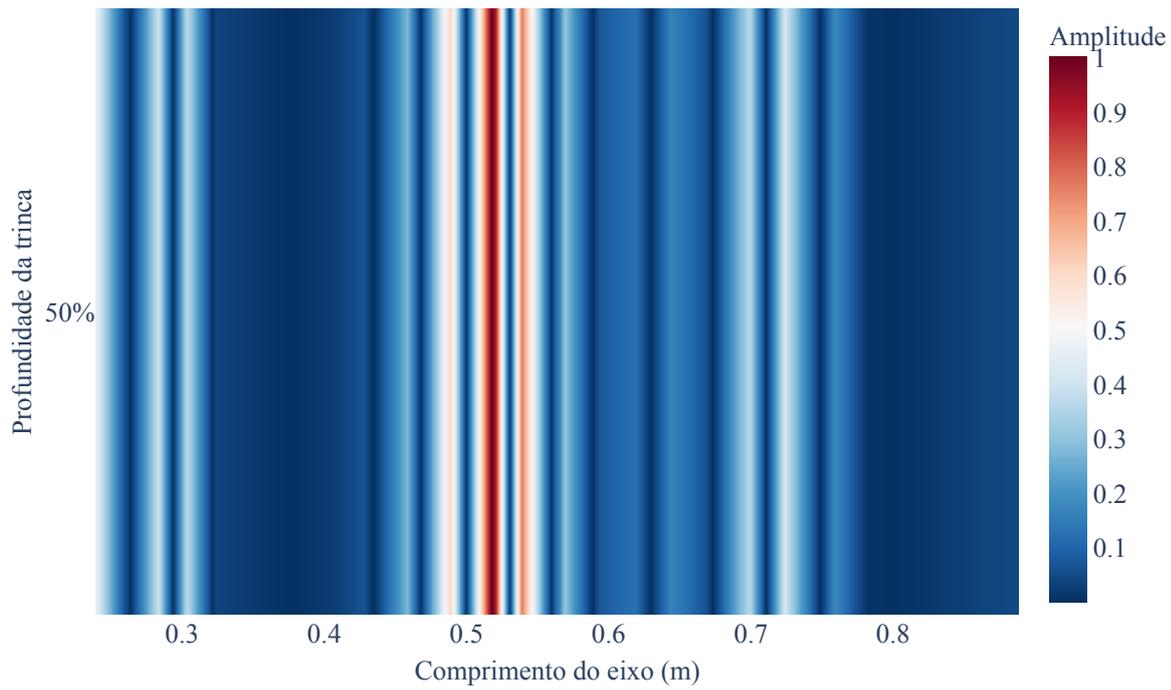


Figura 8.14: Mapa de calor referente à segunda derivada do modo de vibrar utilizando frequência de excitação externa  $\Omega_{ext} = 31,725$  Hz e máxima amplitude de vibração na combinação de ressonância  $|\Omega - \omega_{\Omega}| = 71,725$  Hz.

# CAPÍTULO IX

## CONCLUSÃO

A modelagem de trincas em eixos de máquinas rotativas é crucial para entender o comportamento dos componentes estruturais em condições de operação e prever sua vida útil. É importante que os modelos sejam precisos e considerem todas as variáveis relevantes para a análise. Além disso, a comparação entre diferentes modelos é fundamental para verificar a validade das previsões para determinar o mais adequado em uma situação específica.

Dentro dessa linha, a criação de um modelo numérico da máquina permite que sejam monitoradas suas condições em tempo real, coletando dados sobre sua performance e comparando-os com modelos previamente estabelecidos. Isso permite identificar precocemente possíveis problemas e corrigi-los antes que causem falhas na máquina. Além disso, o modelo numérico pode ser usado para testar diferentes soluções de manutenção e verificar seus efeitos antes de implementá-los na máquina real.

Este trabalho foi dedicado à comparação de três modelos de trinca difundidos na literatura e a utilização deles na demonstração de duas técnicas de SHM: combinação de ressonância e cálculo da derivada de segunda ordem do modo de vibrar.

Até então, a abordagem da derivada de segunda ordem era usada para identificar a posição das trincas em vigas. Resultados satisfatórios eram alcançadas apenas quando o sistema era excitado em uma de suas frequências naturais, o que é inviável para qualquer estrutura, pois operações próximas ou em velocidades críticas devem ser evitadas no contexto de máquinas rotativas.

Nesta abordagem, a frequência utilizada na excitação externa se baseia em combinações de ressonância, o que evita que a resposta de vibração exceda os limites desejáveis e estrutura seja

danificada.

Um conjunto de frequências, denominadas combinações de ressonância, surgem quando diferentes excitações interagem em um sistema no qual uma não-linearidade se faz presente. Logo, o aparecimento das frequências contidas neste conjunto na resposta espectral do sistema já se torna um indicativo de defeitos, como por exemplo trincas em máquinas rotativas. No entanto, sem identificação clara de sua localização.

A posição da trinca no sistema pode ser determinada usando formas modais operacionais (modos de vibração) reconstruídas a partir das respostas de vibração do rotor, também com o auxílio de uma combinação de ressonância.

Um modelo de elementos finitos capaz de representar adequadamente o comportamento dinâmico de uma máquina rotativa foi utilizado levando em conta além dos seus componentes, as características do comportamento *breathing* para trincas transversais.

De acordo com os resultados numéricos, foi possível verificar que a união das técnicas propostas é eficaz na identificação de trincas ao longo de eixos rotativos que operam em condições normais, mesmo em posições onde a distribuição de desbalanceamento pode influenciar os resultados.

Foi simulado uma trinca numa posição do eixo e três modelos foram utilizados para a representação da mesma - Mayes, Gasch e Flex. A trinca inicialmente posicionada no elemento 21 à 0,537 m do início do eixo. Todos os modelos de trinca inseriram no sistema características semelhantes comportamentos semelhantes quanto ao aparecimentos dos múltiplos de vibração na resposta espectral. As órbitas também se mostraram parecidas quanto ao formato e às escalas nas amplitudes de vibração.

Ao aplicar a força de excitação externa calculada a partir de uma frequência de combinação de ressonância, observou-se o uma mudança na característica das órbitas, onde as mesmas adquiriram um formato no estilo malha, proveniente da excitação senoidal adicionada ao sistema.

Na resposta espectral foram visualizados além dos múltiplos da velocidade de rotação, o aparecimento das frequências de combinação de ressonância, confirmando a presença da trinca no sistema.

Em seguida utilizou-se as DFTs de todos os nós, para reconstruir o modo de vibrar a partir da amplitude de uma frequência de combinação presente na resposta espectral, diferente da frequência de excitação. Foi observado que para trincas acima de 40%, as amplitudes de vibração diminuem, sendo evidenciado a característica não linear deste tipo de defeito.

Ao aplicar a metodologia da derivada de segunda ordem do modo de vibrar e transformando o gráfico em um gráfico visual de mapa de calor, a trinca pode ser localizada nas regiões de maior amplitude - coloração mais avermelhada, em aproximadamente 0,5m do início do eixo.

Os resultados experimentais seguiram a mesma abordagem, embora os experimentos tenham sido realizadas apenas com uma trinca com 50% de profundidade, isso porque o corte foi efetuado no eixo antes da montagem da bancada de teste.

Para aplicação da força externa, um excitador eletrodinâmico foi acoplado no mancal, e a coleta dos sinais de vibração foi realizada com o auxílio de um vibrômetro laser. As posições de coleta foram marcadas de forma a representar alguns pontos da discretização numérica. As DFTs experimentais também apresentaram frequências adicionais características da trinca, como demonstrado numericamente.

Além disso, a reconstrução do modo foi realizada e a derivada de segunda ordem aplicada a fim de verificar a localização da trinca no eixo. Pelo mapa de calor gerado com os resultados, observou-se que a região de maior amplitude se encontra próximo à 0,5m, que confirmam a eficácia da técnica, uma vez que a trinca se encontrava à 0,537 m do início do eixo.

Nota-se portanto, uma boa coerência com relação ao uso da metodologia proposta no âmbito de detecção de trincas em máquinas rotativas, sendo abordagens promissoras e eficazes para a identificação precoce de problemas. O que permite planejar ações preventivas a assim reduzir o tempo e o custo de manutenções.

## **9.1 Trabalhos Futuros**

Com o avanço deste estudo, objetiva-se investigar com mais detalhes as frequências mais adequadas dentre o conjunto de frequências de combinação de ressonância para uma detecção mais precisa. Além disso, serão necessárias pesquisas futuras para determinar não apenas a localização, mas também a profundidade da trinca, permitindo monitorar sua evolução ao longo do tempo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AFFONSO, L. O. A. *Machinery failure analysis handbook: sustain your operations and maximize uptime*. [S.l.]: Elsevier, 2013.
- ANDERSON, T. L. *Fracture mechanics: fundamentals and applications*. [S.l.]: CRC press, 2005.
- BACHSCHMID, N.; PENNACCHI, P.; TANZI, E. *Cracked rotors: a survey on static and dynamic behaviour including modelling and diagnosis*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010.
- BACHSCHMID, N. et al. Transverse crack modeling and validation in rotor systems, including thermal effects. *International Journal of Rotating Machinery*, Hindawi, v. 9, n. 2, p. 113–126, 2003.
- BALAGEAS, D.; FRITZEN, C.-P.; GÜEMES, A. *Structural health monitoring*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2010. v. 90.
- BARBOSA, P. C. P. d. F. Análise do comportamento dinâmico de eixos de material composto em máquinas rotativas. Universidade Federal de Uberlândia, 2018.
- BELONSI, M. H. Contribuição aos métodos de redução de modelos de sistemas dinâmicos não lineares estocásticos. Universidade Federal de Uberlândia, 2017.
- BENTLHY, D. E.; WILLIAMS, E. B. Detection of rotor cracks. In: TEXAS A&M UNIVERSITY. TURBOMACHINERY LABORATORIES. *Proceedings of the 15th Turbomachinery Symposium*. [S.l.], 1986.
- BROBERG, K. B. *Cracks and fracture*. [S.l.]: Elsevier, 1999.
- BUCHER, I.; EWINS, D. Modal analysis and testing of rotating structures. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, v. 359, n. 1778, p. 61–96, 2001.
- BURBANO, C. E. R. Diagnóstico de falhas em máquinas rotativas. Universidade Federal de Uberlândia, 2005.
- CASTEJÓN, C. et al. Automatic detection of cracked rotors combining multiresolution analysis and artificial neural networks. *Journal of Vibration and Control*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 21, n. 15, p. 3047–3060, 2015.

- CAVALINI JR, A. A. Detecção e identificação de trincas transversais incipientes em eixos horizontais flexíveis de máquinas rotativas. 235f. *Tese de Doutorado-Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia*, 2013.
- CAVALINI Jr, A. A. et al. Investigation of the favorable conditions to apply the combination resonances approach for crack detection purposes. *Journal of Vibration and Control*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 26, n. 15-16, p. 1345–1355, 2020.
- CAVALINI Jr, A. A. et al. Crack identification for rotating machines based on a nonlinear approach. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 79, p. 72–85, 2016.
- COLLINS, K.; PLAUT, R.; WAUER, J. Detection of cracks in rotating timoshenko shafts using axial impulses. 1991.
- DARPE, A.; GUPTA, K.; CHAWLA, A. Experimental investigations of the response of a cracked rotor to periodic axial excitation. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 260, n. 2, p. 265–286, 2003.
- DARPE, A. K.; GUPTA, K.; CHAWLA, A. Coupled bending, longitudinal and torsional vibrations of a cracked rotor. *Journal of sound and vibration*, Elsevier, v. 269, n. 1-2, p. 33–60, 2004.
- DIMAROGONAS, A. *Dynamic response of cracked rotors*. [S.l.], 1970.
- DIMAROGONAS, A. D. Vibration of cracked structures: a state of the art review. *Engineering fracture mechanics*, Elsevier, v. 55, n. 5, p. 831–857, 1996.
- DIMAROGONAS, A. D.; PAIPETIS, S. A.; CHONDROS, T. G. *Analytical methods in rotor dynamics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1983.
- DONG, G.; CHEN, J.; ZOU, J. Parameter identification of a rotor with an open crack. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Elsevier, v. 23, n. 2, p. 325–333, 2004.
- DUNKERLEY, S. On the whirling and vibration of shafts. *Proceedings of the Royal Society*, v. 185, p. 229, 1895.
- FARRAR, C. R.; WORDEN, K. An introduction to structural health monitoring. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society London, v. 365, n. 1851, p. 303–315, 2007.
- FERREIRA, B. F. Detecção de trincas em eixos rotativos através de medição de vibrações. 2010.
- GASCH, R. Dynamic behaviour of a simple rotor with a cross-sectional crack. In: *Proc. Int. Mech. Eng. Conf.* [S.l.: s.n.], 1976. v. 123.
- GASCH, R. A survey of the dynamic behaviour of a simple rotating shaft with a transverse crack. *Journal of sound and vibration*, Elsevier, v. 160, n. 2, p. 313–332, 1993.
- GRABOWSKI, B. The vibrational behavior of a turbine rotor containing a transverse crack. 1980.

- GREEN, I.; CASEY, C. Crack detection in a rotor dynamic system by vibration monitoring—part i: analysis. *J. Eng. Gas Turbines Power*, v. 127, n. 2, p. 425–436, 2005.
- GUO, C.; YAN, J.; YANG, W. Crack detection for a jeffcott rotor with a transverse crack: An experimental investigation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 83, p. 260–271, 2017.
- HAMIDI, L. et al. Modal parameters for cracked rotors: models and comparisons. *Journal of sound and vibration*, Elsevier, v. 175, n. 2, p. 265–278, 1994.
- HASSAN, M.; BRUNI, S.; CARBONI, M. Crack detection in railway axle using horizontal and vertical vibration measurements. IET, 2016.
- HE, Y.; GUO, D.; CHU, F. Using genetic algorithms and finite element methods to detect shaft crack for rotor-bearing system. *Mathematics and computers in simulation*, Elsevier, v. 57, n. 1-2, p. 95–108, 2001.
- HENRY, T. Vibrations in cracked shafts. In: *Proc. Int. Mech. Eng. Conf.* [S.l.: s.n.], 1973. v. 15.
- IMAM, I. et al. Development of an on-line rotor crack detection and monitoring system. 1989.
- IMBERT, J.-F. *Analyse des structures par éléments finis*. [S.l.: s.n.], 1995.
- IRWIN, G. R. *Onset of fast crack propagation in high strength steel and aluminum alloys*. [S.l.], 1956.
- ISHIDA, Y.; INOUE, T. Detection of a rotor crack by a periodic excitation. *Nippon Kikai Gakkai Ronbunshu C Hen(Transactions of*, v. 16, n. 4, p. 895–902, 2004.
- ISHIDA, Y.; YAMAMOTO, T. *Linear And Nonlinear Rotordynamics: a modern treatment with applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013.
- ISMAIL, Z.; RAZAK, H. A.; RAHMAN, A. A. Determination of damage location in rc beams using mode shape derivatives. *Engineering Structures*, Elsevier, v. 28, n. 11, p. 1566–1573, 2006.
- IWATSUBO, T.; ARII, S.; OKS, A. Detection of a transverse crack in a rotor shaft by adding external force. In: MEDICAL ENGINEERING PUBLICATIONS LTD. *INSTITUTION OF MECHANICAL ENGINEERS CONFERENCE PUBLICATIONS*. [S.l.], 1992. v. 6, p. 275–275.
- JEFFCOTT, H. *The lateral vibration of loaded shafts in the neighbourhood of a whirling speed—The effect of want of balance*, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. 1919.
- KULESZA, Z.; SAWICKI, J. T. Auxiliary state variables for rotor crack detection. *Journal of Vibration and Control*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 17, n. 6, p. 857–872, 2011.
- KULESZA, Z.; SAWICKI, J. T. Parametrically induced damping in a cracked rotor. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, American Society of Mechanical Engineers, v. 139, n. 1, p. 012505, 2017.

- LALANNE, M.; FERRARIS, G. *Rotordynamics prediction in engineering*. [S.l.]: Wiley, 1998. v. 2.
- LAVAL, G. d. *Steam Turbine*. U. S. Patent No 522,066. 26 Jun. 1894.
- LEÃO, L. d. S. Detection and control of transverse cracks on rotating machines. Universidade Federal de Uberlândia, 2019.
- LEES, A.; SINHA, J.; FRISWELL, M. Model-based identification of rotating machines. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 23, n. 6, p. 1884–1893, 2009.
- LIONG, R. T. *Application of the cohesive zone model to the analysis of rotors with a transverse crack*. [S.l.]: KIT Scientific Publishing, 2014. v. 16.
- LIONG, R. T.; PROPPE, C. Finite element multibody simulation of a breathing crack in a rotor with a cohesive zone model. *International Scholarly Research Notices*, Hindawi, v. 2013, 2013.
- LU, Z. et al. Localization of breathing cracks in stepped rotors using super-harmonic characteristic deflection shapes based on singular value decomposition in frequency domain. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Wiley Online Library, v. 40, n. 11, p. 1825–1837, 2017.
- MANI, G.; QUINN, D.; KASARDA, M. Active health monitoring in a rotating cracked shaft using active magnetic bearings as force actuators. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 294, n. 3, p. 454–465, 2006.
- MAYES, I.; DAVIES, W. Analysis of the response of a multi-rotor-bearing system containing a transverse crack in a rotor. *Journal of vibration, acoustics, stress, and reliability in design*, American Society of Mechanical Engineers, v. 106, n. 1, p. 139–145, 1984.
- MAYES, L. W.; DAVIES, W. G. R. The vibrational behavior of a rotating shaft system containing a transverse crack. Institution of Mechanical Engineers, 1976.
- MORAIS, T. S. et al. Contribuição ao estudo de máquinas rotativas na presença de não-linearidades. Universidade Federal de Uberlândia, 2010.
- MORENO-GARCÍA, P.; SANTOS, J. V. A. dos; LOPES, H. Relations among position of damage, mode shape and derivative order. In: PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL CONFERENCE ON STRUCTURAL ENGINEERING DYNAMICS - ICEDYN 2017. *International Conference on Structural Engineering Dynamics - ICEDyn*. Ericeria, 2017.
- MOURA Jr, J. d. R. V. Uma contribuição aos sistemas de monitoramento de integridade estrutural aplicada a estruturas aeronáuticas e espaciais. Universidade Federal de Uberlândia, 2008.
- MÜLLER, A. et al. Machine learning classifiers for surface crack detection in fracture experiments. *International Journal of Mechanical Sciences*, Elsevier, v. 209, p. 106698, 2021.
- MUSZYNSKA, A. Stress in rotating and laterally vibrating machinery rotors. In: MECHANICAL ENGINEERING PUBLICATIONS. *IMECHE CONFERENCE TRANSACTIONS*. [S.l.], 1996. v. 6, p. 769–778.

MUSZYNSKA, A. *Rotordynamics*. [S.l.]: CRC press, 2005.

NASCIMENTO, K. B. d. Análise do comportamento dinâmico de um disco de palhetas flexíveis na presença de uma trinca transversal modelada pela abordagem flex. Universidade Federal de Uberlândia, 2022.

NASIRI, S.; KHOSRAVANI, M. R.; WEINBERG, K. Fracture mechanics and mechanical fault detection by artificial intelligence methods: A review. *Engineering Failure Analysis*, Elsevier, v. 81, p. 270–293, 2017.

NELSON, H.; NATARAJ, C. The dynamics of a rotor system with a cracked shaft. 1986.

NEWMARK, N. M. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the engineering mechanics division*, American Society of Civil Engineers, v. 85, n. 3, p. 67–94, 1959.

NICOLETTI, R.; CAVALINI, A. A.; STEFFEN, V. Detection of cracks in rotating shafts by using the combination resonances approach and the approximated entropy algorithm. *Shock and Vibration*, Hindawi, v. 2018, 2018.

OLIVEIRA, M. V. F. d. Controle de rotores flexíveis suportados por mancais magnéticos. Universidade Federal de Uberlândia, 2019.

ONG, Z.; RAHMAN, A.; ISMAIL, Z. Determination of damage severity on rotor shaft due to crack using damage index derived from experimental modal data. *Experimental Techniques*, Springer, v. 38, n. 5, p. 18–30, 2014.

OSTACHOWICZ, W.; KRAWCZUK, M. Coupled torsional and bending vibrations of a rotor with an open crack. *Archive of applied mechanics*, Springer, v. 62, n. 3, p. 191–201, 1992.

PALOMINO, L. V. Técnicas de inteligência artificial aplicadas ao método de monitoramento de integridade estrutural baseado na impedância eletromecânica para monitoramento de danos em estruturas aeronáuticas. Universidade Federal de Uberlândia, 2012.

PANDEY, A.; BISWAS, M.; SAMMAN. Damage detection from changes in curvature mode shapes. *Journal of sound and vibration*, Elsevier, v. 145, n. 2, p. 321–332, 1991.

PAPADOPOULOS, C. A.; DIMAROGONAS, A. D. Coupled longitudinal and bending vibrations of a rotating shaft with an open crack. *Journal of sound and vibration*, Elsevier, v. 117, n. 1, p. 81–93, 1987.

PENNY, J.; FRISWELL, M. I. Simplified modelling of rotor cracks. In: TRANS TECH PUBL. *Key Engineering Materials*. [S.l.], 2003. v. 245, p. 223–232.

RABELO, D. d. S. Monitoramento de integridade estrutural baseado na técnica da impedância eletromecânica incorporando compensação do efeito da variação da temperatura. Universidade Federal de Uberlândia, 2014.

RABELO, D. d. S. Técnicas avançadas de normalização de dados aplicadas ao método de monitoramento de integridade estrutural baseado em impedância eletromecânica. Universidade Federal de Uberlândia, 2017.

- RANKINE, W. M. On the thermal energy of molecular vortices. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, Royal Society of Edinburgh Scotland Foundation, v. 6, p. 590–592, 1869.
- RAO, K. B.; REDDY, D. M. Crack detection methodology in rotor bearing system by dwt based adaptive neuro-fuzzy inference systems. *Applied Acoustics*, Elsevier, v. 192, p. 108728, 2022.
- RATAN, S.; BARUH, H.; RODRIGUEZ, J. On-line identification and location of rotor cracks. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 194, n. 1, p. 67–82, 1996.
- RENDE, B. R. F. Análise numérica e experimental do comportamento dinâmico de um sistema rotor-palhetas. Universidade Federal de Uberlândia, 2020.
- SAAVEDRA, P.; CUITINO, L. Vibration analysis of rotor for crack identification. *Journal of Vibration and Control*, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 8, n. 1, p. 51–67, 2002.
- SABNAVIS, G. et al. Cracked shaft detection and diagnostics: a literature review. *Shock and Vibration Digest*, Washington, DC: The Center, v. 36, n. 4, p. 287, 2004.
- SAMPAIO, D. L.; NICOLETTI, R. Detection of cracks in shafts with the approximated entropy algorithm. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 72, p. 286–302, 2016.
- SAWICKI, J.; FRISWELL, M.; BAAKILINI, G. Title: Rotor crack detection using induced combination resonances. *Proceedings of the 4th European Workshop on Structural Health Monitoring*, 01 2008.
- SAWICKI, J. T. et al. Detecting cracked rotors using auxiliary harmonic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 330, n. 7, p. 1365–1381, 2011.
- SAWICKI, J. T.; KULESZA, Z. Stability of a cracked rotor subjected to parametric excitation. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, American Society of Mechanical Engineers, v. 137, n. 5, p. 052508, 2015.
- SEIBOLD, S.; WEINERT, K. A time domain method for the localization of cracks in rotors. *Journal of sound and vibration*, Elsevier, v. 195, n. 1, p. 57–73, 1996.
- SILVA, I. B. Análise da influência de trincas transversais no comportamento estático e dinâmico de eixos flexíveis. Universidade Federal de Uberlândia, 2018.
- SINOUE, J.-J.; LEES, A. The influence of cracks in rotating shafts. *Journal of sound and vibration*, Elsevier, v. 285, n. 4-5, p. 1015–1037, 2005.
- STORN, R.; PRICE, K. Differential evolution—a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces [r]. *Berkeley: ICSI*, 1995.
- TAO, F.; QI, Q.; NEE, A. *Digital Twin Driven Service*. [S.l.]: Academic Press, 2022.
- TSURUTA, K. M. Monitoramento de integridade estrutural de materiais compostos sujeitos a impactos empregando a técnica da impedância eletromecânica. Universidade Federal de Uberlândia, 2008.

VANCE, J. M.; ZEIDAN, F. Y.; MURPHY, B. G. *Machinery vibration and rotordynamics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2010.

WESTERGAARD, H. M. Bearing pressures and cracks: Bearing pressures through a slightly waved surface or through a nearly flat part of a cylinder, and related problems of cracks. American Society of Mechanical Engineers, 1939.

ZHAO, J.; DESMIDT, H.; YAO, W. Nonlinear dynamics of breathing cracked jeffcott rotor under axial excitation. In: AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS. *Dynamic Systems and Control Conference*. [S.l.], 2014. v. 46186, p. V001T08A003.