

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**Comportamento Dinâmico de Mancais Segmentados Axiais sob
Regime de Lubrificação Híbrido**

Jefferson Silva Barbosa

Uberlândia

2023

Jefferson Silva Barbosa

**Comportamento Dinâmico de Mancais Segmentados Axiais sob
Regime de Lubrificação Híbrido**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações
Linha de pesquisa: Dinâmica de Máquinas Rotativas

Uberlândia, 27 de fevereiro de 2023.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavallini Jr., Orientador (UFU)

Prof. Dr-Ing. Ilmar Ferreira Santos, Coorientador (DTU)

Prof. Dr. Gregory Bregion Daniel (Unicamp)

Prof. Dr. Rodrigo Nicoletti (EESC-USP)

Prof. Dr. João Marcelo Vedovotto (UFU)

Prof. Dr. Fran Sérgio Lobato (UFU)


UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
 Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
 Telefone: (34) 3239-4282 - www.posmecanicaufu.com.br - secposmec@mecanica.ufu.br


ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Tese de Doutorado Acadêmico, nº 348, PPGEM				
Data:	27/02/2023	Hora de início:	08:00	Hora de encerramento:	11:30
Matrícula do Discente:	11813EMC014				
Nome do Discente:	Jéfferson Silva Barbosa				
Título do Trabalho:	Comportamento Dinâmico de Mancais Segmentados Axiais sob Regime de Lubrificação Híbrido				
Área de concentração:	Mecânica dos Sólidos e Vibrações				
Linha de pesquisa:	Dinâmica de Sistemas Mecânicos				
Projeto de Pesquisa de vinculação:					

Reuniu-se por meio de videoconferência a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Professores Doutores: João Marcelo Vedovotto - FEMEC/UFU; Fran Sérgio Lobato - FEQUI/UFU; Gregory Bregion Daniel - UNICAMP; Rodrigo Nicoletti - USP/São Carlos; Ilmar Ferreira Santos (coorientador) - MEK/DTU; e Aldemir Aparecido Cavallini Junior - FEMEC/UFU, orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Dr. Aldemir Aparecido Cavallini Junior, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Aldemir Aparecido Cavalini Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 27/02/2023, às 11:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo Nicoletti, Usuário Externo**, em 27/02/2023, às 11:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **GREGORY BREGION DANIEL, Usuário Externo**, em 27/02/2023, às 11:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Fran Sergio Lobato, Professor(a) do Magistério Superior**, em 27/02/2023, às 11:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ilmar Ferreira Santos, Usuário Externo**, em 27/02/2023, às 11:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **João Marcelo Vedovotto, Professor(a) do Magistério Superior**, em 27/02/2023, às 12:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4284308** e o código CRC **044DC75B**.

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

B238 2023	<p>Barbosa, Jéfferson Silva, 1991- Comportamento Dinâmico de Mancais Segmentados Axiais sob Regime de Lubrificação Híbrido [recurso eletrônico] / Jéfferson Silva Barbosa. - 2023.</p> <p>Orientador: Aldemir Aparecido Cavalini Júnior. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Engenharia Mecânica. Modo de acesso: Internet. Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.te.2023.84 Inclui bibliografia.</p> <p>1. Engenharia mecânica. I. Cavalini Júnior, Aldemir Aparecido, 1983-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.</p> <p>CDU: 621</p>
--------------	--

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

Agradecimentos

À Deus, que ao longo de toda a minha vida, tem me mostrado que os meus planos pessoais são meros *insights* dentro de algo maravilhoso que Ele sempre proporciona no momento correto por Ele definido.

À minha amada esposa Bárbara Rech, por seu incondicional apoio que se mostra a mais pura forma de amor, companheirismo e fidelidade, a quem eu dedico este trabalho.

Aos meus pais, irmãos e amigos que me apoiam e se fazem presentes em todos os momentos da minha vida. Obrigado por cada oração, conversa e até mesmo favores que são ofertados de todo coração.

Ao meu orientador e amigo Aldemir, por todo o conhecimento compartilhado ao longo destes oito anos (TCC, mestrado, projetos de P&D e doutorado) e por me proporcionar tantas oportunidades. A você, a minha eterna gratidão.

Ao meu orientador Ilmar Santos, que por fins meramente formais foi denominado como “coorientador”, mas que nesta seção eu posso me referir a ele como eu o considero: orientador e grande amigo!

Aos meus amigos do LMEst-UFU por todas as boas discussões que não se limitam aos domínios da Ciência e da Engenharia. Muito além do que se refere ao profissional, eu gostaria de agradecê-los por toda a amizade e parceria ao longo destes anos.

Às empresas Foz do Chapecó, BAESA, ENERCAN, CERAN, CSC Energia e CPFL Energia pelo apoio financeiro concedido durante a realização deste trabalho, através dos seguintes projetos de P&D da ANEEL: “Modelagem Robusta para o Diagnóstico de Defeitos em Unidades Geradoras” (ANEEL 02476-3108/2016), entre 01/2016 a 06/2018, e “Solução Integrada para o Diagnóstico de Defeitos, Análise Dinâmica e Monitoramento Contínuo de Unidades Geradoras Francis” (PD-02949-3007/2021), o qual participei entre 08/2021 a 07/2022.

À Danmarks Tekniske Universitet - DTU, por me acolher com carinho e respeito e me proporcionar tanto aprendizado ao longo do Doutorado Sanduíche. De modo especial, gostaria de agradecer aos meus amigos do Departamento de Engenharia Mecânica - MEK-DTU pelo acolhimento, aprendizado e pela amizade, a qual eu levo para a vida.

À Universidade Federal de Uberlândia, à Faculdade de Engenharia Mecânica e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - PPGEM, por todo o aprendizado e por contribuir de forma decisiva à minha formação profissional. Obrigado a todos os professores e técnicos administrativos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pelo apoio financeiro durante o Doutorado. Além disso, agradeço à CAPES pelo por o suporte financeiro durante o período de Doutorado Sanduíche na DTU.

À Bárbara Rech, com todo o meu amor.

Resumo

Barbosa, J. S. *Comportamento Dinâmico de Mancais Segmentados Axiais sob Regime de Lubrificação Híbrido*. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, Fevereiro 2023.

O presente trabalho tem como objetivo avaliar os efeitos da pressão de injeção de óleo no comportamento dinâmico de um mancal segmentado hidrodinâmico axial sujeito à lubrificação híbrida. Primeiramente, um modelo termohidrodinâmico (THD) é aplicado para determinar a posição de equilíbrio resultante das distribuições de pressão e temperatura para os regimes de lubrificação hidrodinâmico e híbrido. Em seguida, os métodos da perturbação e da redução em frequência são aplicados para determinar os coeficientes de rigidez e amortecimento equivalentes do mancal para diferentes condições operacionais. Os resultados mostram que os coeficientes dinâmicos equivalentes são significativamente dependentes das condições de operação do sistema, tais como o carregamento estático e a velocidade de rotação, e da frequência de perturbação, para ambos os regimes de lubrificação. A quantificação da influência da pressão de injeção nos coeficientes dinâmicos de um mancal hidrodinâmico segmentado axial sob um regime de lubrificação híbrido é a principal contribuição original deste trabalho.

Palavras-chave: Mancal segmentado hidrodinâmico axial. Coeficientes dinâmicos. Lubrificação híbrida. Método de perturbação e redução em frequência.

Abstract

Barbosa, J. S. *Dynamic Behavior of a Tilting-pad Thrust Bearing Operating under a Hybrid Lubrication Regime*. PhD Dissertation - Federal University of Uberlândia, February 2023.

The present contribution aims to evaluate the effects of the oil pressure injection on the dynamic behavior of a hybrid-lubricated tilting-pad thrust bearing. Firstly, a thermohydrodynamic (THD) model is applied to determine the equilibrium position associated with the pressure and temperature distributions resulting from both hydrodynamic and hybrid lubrication regimes. Subsequently, the perturbation and frequency reduction methods are applied to determine the stiffness and damping coefficients of the bearing for various operational conditions. The obtained results show that the dynamic force coefficients are strongly dependent on the operational conditions of the bearing, such as the static load and rotating speed, as well as the perturbation frequency, for both lubrication regimes. The quantification of the injection pressure influence on the force coefficients of hybrid-lubricated thrust bearings is the main original contribution of this work.

Keywords: Tilting-pad thrust bearing. Dynamic force coefficients. Hybrid lubrication. Perturbation and frequency reduction methods.

Sumário

Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xv
Lista de Símbolos	xv
1 Introdução	1
1.1 Objetivos da pesquisa	5
1.2 Produção acadêmica e científica	6
2 Formulação Matemática	8
2.1 Modelo termohidrodinâmico	8
2.1.1 Campo de pressão para o regime de lubrificação híbrido	8
2.1.2 Equação da energia	12
2.1.3 Cálculo da viscosidade em função da temperatura	16
2.1.4 Equilíbrio de forças e momentos atuantes no segmento	16
2.2 Coeficientes dinâmicos	16
2.2.1 Método da pequena perturbação de pressão	17
2.2.2 Método da perturbação numérica	19
2.3 Discretização das Equações Diferenciais Parciais	22
2.3.1 MVF aplicado à equação de Reynolds	22
2.3.2 MVF aplicado à equação da energia	26
2.3.3 MFV aplicado às equações de perturbação	32
2.4 Equação do movimento do sistema rotor-mancal	39
2.4.1 Frequências naturais e modos do sistema	42
2.4.2 Obtenção dos coeficientes dinâmicos equivalentes	42

<i>SUMÁRIO</i>	x
3 Resultados Numéricos	45
3.1 Análise de convergência de malha	47
3.2 Determinação da posição e dos campos de pressão e temperatura . . .	51
3.3 Determinação dos coeficientes dinâmicos equivalentes	53
4 Conclusões e Perspectivas	60
Referências	61
A Resultados obtidos nas análises estática e dinâmica	65

Lista de Figuras

1.1	Mancal combinado utilizado em uma UG do tipo Francis	2
1.2	Mancal hidrodinâmico segmentado axial com lubrificação híbrida	4
2.1	Campos de velocidade para um TPTB sujeito à lubrificação híbrida . . .	9
2.2	Parâmetros geométricos de um TPTB sujeito à lubrificação híbrida . . .	12
2.3	Condições de contorno para o modelo termohidrodinâmico	13
2.4	Discretização via MVF	22
2.5	Procedimento de cálculo dos coeficientes dinâmicos do mancal	38
2.6	Representação de um sistema rotor-mancal axial de dupla ação	39
3.1	Bancada experimental utilizada como referência para as simulações nu- méricas deste trabalho	45
3.2	Seção transversal em corte da bancada experimental utilizada como referência para as simulações numéricas deste trabalho	46
3.3	Segmento do TPTB	46
3.4	Análise de convergência de malha para o regime de lubrificação hidro- dinâmico	48
3.5	Análise de convergência de malha para o regime de lubrificação híbrida	48
3.6	Distribuição dos volumes finitos na região do orifício de injeção	49
3.7	Relação entre as dimensões do orifício de injeção e do segmento . . .	49
3.8	Diferença percentual entre a vazão analítica e numérica para diferentes níveis de refinamento da malha	50
3.9	Análise de convergência de malha para o regime de lubrificação híbrida	51
3.10	Campos de pressão e de temperatura obtidos para os regimes de lubri- ficação hidrodinâmico e híbrido	52

3.11 Coeficientes dinâmicos equivalentes para os regimes de lubrificação hidrodinâmico e híbrido	53
3.12 Coeficientes dinâmicos equivalentes para os regimes de lubrificação hidrodinâmico e híbrido sobre diferentes condições de operações	55
3.13 Influência da frequência de perturbação nos coeficientes dinâmicos equivalentes para os regimes de lubrificação hidrodinâmico e híbrido para $F_z = 20$ kN e $\Omega = 1000$ RPM	57
3.14 Influência da frequência de perturbação nos coeficientes dinâmicos equivalentes para os regimes de lubrificação hidrodinâmico e híbrido para $F_z = 10$ kN e $\Omega = 12000$ RPM	59

Lista de Tabelas

3.1	Parâmetros do mancal segmentado axial analisado.	47
3.2	Perturbações numéricas para o cálculo dos coeficientes dinâmicos . . .	54
3.3	Frequências naturais amortecidas e fatores de amortecimento para $F_z = 20$ kN e $\Omega = 1000$ RPM na faixa de frequências de $1/5\Omega$ a 5Ω	57
3.4	Frequências naturais amortecidas e fatores de amortecimento para $F_z = 10$ kN e $\Omega = 12000$ RPM na faixa de frequências de $1/5\Omega$ a 5Ω	58
A.1	Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação hidrodinâmico, sendo $F_z = 10$ kN e $1000 \leq \Omega \leq 3000$ RPM.	66
A.2	Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação híbrido, sendo $P_{inj} = 20$ bar, $F_z = 10$ kN e $1000 \leq \Omega \leq 3000$ RPM.	66
A.3	Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação híbrido, sendo $P_{inj} = 25$ bar, $F_z = 10$ kN e $1000 \leq \Omega \leq 3000$ RPM.	67
A.4	Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação híbrido, sendo $P_{inj} = 30$ bar, $F_z = 10$ kN e $1000 \leq \Omega \leq 3000$ RPM.	67
A.5	Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação hidrodinâmico, sendo $F_z = 20$ kN e $1000 \leq \Omega \leq 3000$ RPM.	68
A.6	Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação híbrido, sendo $P_{inj} = 36$ bar, $F_z = 20$ kN e $1000 \leq \Omega \leq 3000$ RPM.	68

A.7	Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação híbrido, sendo $P_{inj} = 42$ bar, $F_z = 20$ kN e $1000 \leq \Omega \leq 3000$ RPM.	69
A.8	Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação híbrido, sendo $P_{inj} = 48$ bar, $F_z = 20$ kN e $1000 \leq \Omega \leq 3000$ RPM.	69
A.9	Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação hidrodinâmico, sendo $F_z = 10$ kN e $10000 \leq \Omega \leq 15000$ RPM.	70
A.10	Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação híbrido, sendo $P_{inj} = 20$ bar, $F_z = 10$ kN e $10000 \leq \Omega \leq 15000$ RPM.	70
A.11	Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação híbrido, sendo $P_{inj} = 25$ bar, $F_z = 10$ kN e $10000 \leq \Omega \leq 15000$ RPM.	71
A.12	Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação híbrido, sendo $P_{inj} = 30$ bar, $F_z = 10$ kN e $10000 \leq \Omega \leq 15000$ RPM.	71
A.13	Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação hidrodinâmico, sendo $F_z = 20$ kN e $10000 \leq \Omega \leq 15000$ RPM.	72
A.14	Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação híbrido, sendo $P_{inj} = 36$ bar, $F_z = 20$ kN e $10000 \leq \Omega \leq 15000$ RPM.	72
A.15	Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação híbrido, sendo $P_{inj} = 42$ bar, $F_z = 20$ kN e $10000 \leq \Omega \leq 15000$ RPM.	73
A.16	Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação híbrido, sendo $P_{inj} = 48$ bar, $F_z = 20$ kN e $10000 \leq \Omega \leq 15000$ RPM.	73
A.17	Frequências naturais amortecidas e fatores de amortecimento para $F_z = 10$ kN e $\Omega = 12000$ RPM.	74

A.18 Frequências naturais amortecidas e fatores de amortecimento para $F_z =$
20 kN e $\Omega = 1000$ RPM. 75

Lista de Símbolos

Abreviações

MVF Método dos Volumes Finitos

DTU Danmarks Tekniske Universitet

FEMEC Faculdade de Engenharia Mecânica da UFU

GDL Grau de Liberdade

LME_{st} Laboratório de Mecânica das Estruturas da UFU

PPGEM Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFU

THD Termohidrodinâmico

TPTB Tilting-pad Thrust Bearing (Mancal Hidrodinâmico Segmentado Axial)

UFU Universidade Federal de Uberlândia

UG Unidade Geradora de Energia

Matrizes e vetores do sistema

\mathbf{D}_{global} Matriz global de amortecimento do sistema rotor-mancal

\mathbf{D}_{oil} Matriz de amortecimento do filme de óleo por segmento

\mathbf{F} Vetor de esforços externos aplicados ao sistema rotor-mancal

\mathbf{K}_{global} Matriz global de rigidez do sistema rotor-mancal

\mathbf{K}_{oil} Matriz de rigidez do filme de óleo por segmento

\mathbf{M}_{global} Matriz global de massa do sistema rotor-mancal

Constantes e variáveis

α_{r_0}	α_r na condição de equilíbrio	<i>rad</i>
α_r	Ângulo de rotação do segmento em relação ao eixo <i>r</i>	<i>rad</i>
α_{s_0}	α_s na condição de equilíbrio	<i>rad</i>
α_s	Ângulo de rotação do segmento em relação ao eixo <i>s</i>	<i>rad</i>
μ	Viscosidade dinâmica do fluido	<i>Pa.s</i>
μ_0	Viscosidade de referência	<i>Pa.s</i>
μ_{inj}	Viscosidade do óleo injetado	<i>Pa.s</i>
ω_p	Frequência de oscilação/perturbação	<i>Hz</i>
Ω	Velocidade de rotação do rotor	<i>rpm</i>
ρ	Massa específica	<i>kg/m³</i>
θ_0	Comprimento angular do segmento	<i>rad</i>
θ_h	Posição angular do orifício	<i>rad</i>
θ_{pivot}	Posição angular do pivô	<i>rad</i>
ζ	Fator de amortecimento	<i>[-]</i>
c_p	Calor específico	<i>J/(kg.K)</i>
d_0	Diâmetro do orifício de injeção de óleo	<i>m</i>
$d_{\gamma\gamma}$	Coeficiente de amortecimento do filme de óleo, $\gamma = \alpha_r, \alpha_s, z$	<i>f(γ)</i>
f_d	Frequência natural amortecida	<i>Hz</i>
F_{res}	Força resultante na direção axial	<i>N</i>
F_z	Força axial	<i>N</i>
h	Espessura do filme de óleo	<i>m</i>
h_0	Espessura do filme de óleo na condição de equilíbrio	<i>m</i>

h_r	Profundidade do orifício de injeção de óleo	m
h_{pivot_0}	Espessura do filme de óleo no pivô na condição de equilíbrio	m
h_{pivot}	Espessura do filme de óleo no ponto de pivotamento	m
$I(r, \theta, z)$	Referencial inercial em coordenadas cilíndricas	$[-]$
J_{r_i}	Momento de inércia do i -ésimo segmento em relação ao eixo r	$kg.m^2$
J_{s_i}	Momento de inércia do i -ésimo segmento em relação ao eixo s	$kg.m^2$
k_0	Rigidez do pivô	N/m
k_t	Condutividade térmica	$W/(m.K)$
$k_{\gamma\gamma}$	Coefficiente de rigidez do filme de óleo, $\gamma = \alpha_r, \alpha_s, z$	$f(\gamma)$
k_i	Coefficientes da equação de Vogel, sendo $i = 1, 2$ e 3	$[-]$
m_{pad_i}	Massa do i -ésimo segmento do mancal	kg
M_{rotor}	Massa do rotor	kg
M_r	Momento aplicado ao segmento na direção r	$N.m$
M_s	Momento aplicado ao segmento na direção s	$N.m$
N_θ	Número de volumes finitos na direção θ	$[-]$
N_{pad}	Número de segmentos do mancal	$[-]$
N_r	Número de volumes finitos na direção r	$[-]$
p	Pressão hidrodinâmica	Pa
p_0	Pressão hidrodinâmica na condição de equilíbrio	Pa
P_{inj}	Pressão de injeção de óleo	Pa
r_1	Raio interno do segmento	m
r_2	Raio externo do segmento	m
r_h	Posição radial do orifício	m

LISTA DE SÍMBOLOS

xix

r_{pivot}	Posição radial do pivô	m
T	Temperatura	K
t	Tempo	s
T_0	Temperatura de referência	K
T_{bath}	Temperatura do banho de óleo	K
T_{inj}	Temperatura do óleo no reservatório de injeção	K
t_{pad}	Espessura do segmento	m
v_r, v_θ, v_z	Velocidade do fluido das direções r , θ e z , respectivamente	m/s
V_{inj}	Velocidade de injeção do óleo	m/s

Capítulo 1

Introdução

O desbalanço entre a disponibilidade global de fontes de energia, a demanda e a produção impõe um grande desafio ao setor energético. No que se refere à demanda energética, Chen e Chen (2011) apresentaram uma estimativa do crescimento do consumo energético global no período de 2005 a 2035 a partir de um modelo matemático aplicado aos dados de 112 países referentes ao ano de 2004. De acordo com os resultados obtidos pelos autores, a demanda energética global estimada para o período apresenta taxa de crescimento de 1,4% ao ano.

No que diz respeito à disponibilidade global de fontes de energia, ações efetivas têm sido adotadas por vários países, tais como o “The European Green Deal” acordado pelos países membros da União Europeia, com o objetivo de interromper a utilização de fontes não-renováveis de energia até 2050 (BRODNY; TUTAK, 2020). Entretanto, o relatório *Global Energy Outlook 2022* destaca que ao longo dos anos a meta de conter o aumento das temperaturas médias do planeta não tem sido alcançada, o que reflete na adoção de políticas cada vez mais restritivas quanto à utilização de fontes não-renováveis (RAIMI et al., 2022).

Com relação ao aumento da produção energética, a busca pela redução do custo por quilowatt-hora (kWh) de energia tem impulsionado o desenvolvimento de unidades geradoras de energia (UGs) com maior potência. Em turbinas eólicas, por exemplo, observou-se uma evolução significativa na potência dos aerogeradores, passando de 2 MW em 2009 para máquinas de 6 MW em 2012 (AMANO, 2017). Deste aumento de potência resultou o aumento da massa média dessas UGs, passando de 140 t (para UGs de 2 MW) para 360 t (para UGs de 6 MW). Neste sentido, destaca-se que o

aumento das dimensões físicas das máquinas amplifica os carregamentos estático e dinâmico. Assim, a análise do comportamento dinâmico torna-se fundamental tanto para o projeto quanto para o controle operativo da máquina.

Os elementos mecânicos responsáveis por suportar os carregamentos estáticos e dinâmicos em máquinas rotativas são denominados mancais. Os mancais são classificados de acordo com o princípio físico associado à sua capacidade de sustentação, com a direção dos esforços suportados e de acordo com a sua geometria. Com relação à direção dos esforços, os mancais podem ser classificados como axiais, radiais ou combinados. No que refere à geometria, os mancais são classificados como fixos ou segmentados. Finalmente, os mancais podem ser do tipo magnético, hidrodinâmico, acústico ou de rolamento, a depender do princípio físico associado à sua força de sustentação.

Os mancais do tipo hidrodinâmico segmentado são geralmente utilizados em unidades hidrogeradoras de energia devido à sua capacidade de suportar elevados carregamentos (BARBOSA, 2018). A Figura 1.1 mostra um mancal combinado utilizado em uma unidade hidrogeradora. Na Figura 1.1a destacam-se o bloco de escora (1) e os segmentos do mancal hidrodinâmico radial (2); na Fig. 1.1b destaca-se o segmento do mancal hidrodinâmico axial (3) o qual possui um sistema de injeção de óleo à alta pressão (4).

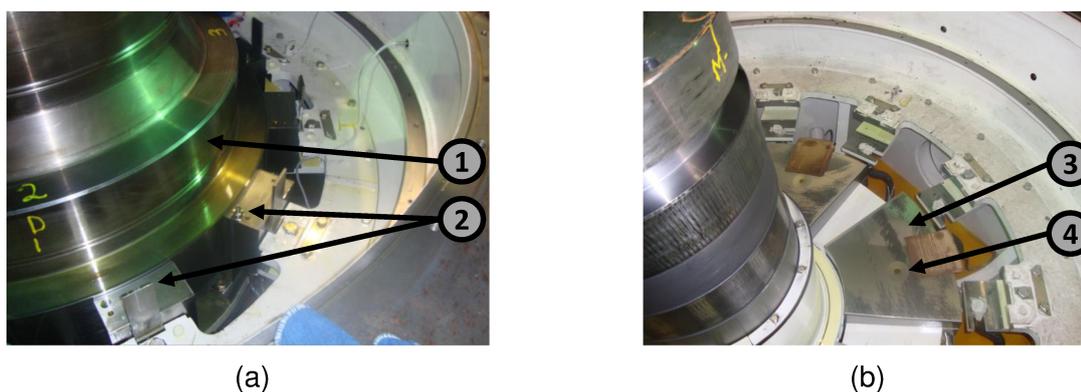


Figura 1.1: Mancal combinado utilizado em uma UG do tipo Francis. (a) Mancal hidrodinâmico segmentado radial; (b) Mancal hidrodinâmico segmentado axial. Fonte: Arquivos pessoais do autor.

O mancal destacado na Fig. 1.1b é denominado mancal hidrodinâmico segmentado axial, cuja sigla originada da língua inglesa, *TPTB - Tilting-pad Thrust Bearing*, será utilizada ao longo desta *Tese*. Os TPTBs são componentes fundamentais de má-

quinas verticais, como por exemplo as unidades hidrogeradoras de energia, e também estão presentes em máquinas horizontais tais como os turbocompressores, sendo responsáveis por suportar carregamentos estáticos e dinâmicos atuantes na direção axial da máquina.

O primeiro registro na literatura sobre o estudo do comportamento dinâmico dos mancais hidrodinâmicos axiais deve-se ao trabalho de Someya e Fukuda (1972), no qual os autores analisaram a vibração axial de propulsores marítimos. Mittwollen, Hegel e Glienicke (1991) investigaram a influência do mancal axial na estabilidade e na primeira velocidade crítica de um rotor. Storteig e White (1999) desenvolveram um modelo computacional para calcular os coeficientes de rigidez e amortecimento de TPTBs com diferentes geometrias. JIANG e YU (1999), por sua vez, apresentaram outra metodologia para determinar os coeficientes dinâmicos de TPTBs, a qual considera todos os graus de liberdade do sistema para o cálculo destes coeficientes.

Com o aumento da velocidade de operação das máquinas rotativas, as análises de estabilidade (ZHAO; CHOY; BRAUN, 2005) e de fenômenos não-lineares (CHANG-JIAN, 2010) se tornaram fundamentais. Adicionalmente, os trabalhos apresentados por Guo et al. (2015) e Wang et al. (2017) destacaram que, quando a magnitude do carregamento estático aumenta, a deformação do pivô influencia nos valores de rigidez e amortecimento calculados experimentalmente, e, portanto, deve ser considerada no modelo teórico. Wang et al. (2018) incluíram a deformação do pivô no modelo teórico para TPTBs, no qual, um modelo termo-elastohidrodinâmico (TEHD) foi proposto para calcular a deformação do mancal devido aos campos de pressão e temperatura do filme de óleo. Para este caso, um excitador hidráulico foi utilizado para aplicar um carregamento dinâmico periódico na direção axial do rotor e as respostas de vibração foram obtidas através da utilização de proxímetros posicionados na direção longitudinal.

O estudo sobre os efeitos da lubrificação híbrida no comportamento dinâmico de TPTBs tem como motivação a ocorrência deste regime de lubrificação durante as manobras de partida e parada de unidades hidrogeradoras verticais. A Figura 1.2 apresenta um TPTB utilizado em uma UG, sendo que no segmento deste mancal apresentado na Fig. 1.2a, destacam-se o orifício de injeção de óleo (1) e a superfície do segmento (2). A Figura 1.2b mostra a unidade hidráulica de alta pressão, na qual o

óleo é pressurizado através de bombas hidráulicas e flui através da tubulação até ser injetado através do orifício de injeção (1) destacado na Fig. 1.2a.

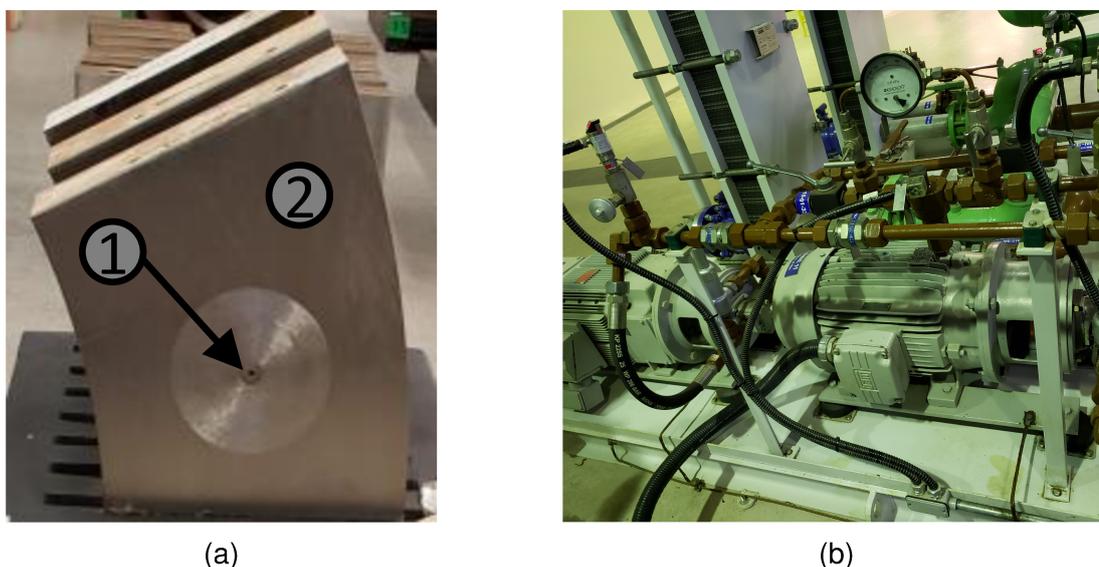


Figura 1.2: Mancal hidrodinâmico segmentado axial com lubrificação híbrida. (a) Segmento do mancal hidrodinâmico segmentado axial; (b) Unidade hidráulica de alta pressão. Fonte: Arquivos pessoais do autor.

Durante a partida de uma UG vertical do tipo Francis, cujo segmento do mancal axial está representado na Fig. 1.2a, o óleo à alta pressão é injetado por meio do orifício de injeção destacado por (1) na Fig. 1.2a, antes do início do movimento de rotação do rotor. A força axial resultante da injeção do óleo à alta pressão é responsável por promover a separação entre as partes inicialmente em contato, isto é, entre o rotor e o mancal axial, evitando o desgaste prematuro dos segmentos do mancal. O fluxo do óleo à alta pressão se mantém até que a UG atinja 80% da velocidade de rotação nominal, sendo que a partir deste valor, o fluxo de óleo à alta pressão é cessado, e o mancal passa a operar apenas sob regime de lubrificação hidrodinâmico.

De fato, durante os procedimentos de partida e parada de uma UG vertical do tipo Francis, o TPTB trabalha sob regime de lubrificação híbrida. A lubrificação híbrida é assim denominada devido à origem do filme de óleo formado neste regime, a qual é composta pelas parcelas hidrodinâmica, na qual campo de pressão resulta do escoamento do fluido na região compreendida entre as superfícies do eixo e do mancal, e hidrostática, na qual a pressão é resultante da injeção direta do fluido à alta pressão através do orifício presente no mancal.

Alguns pesquisadores têm se dedicado ao desenvolvimento de modelos teóricos

e às análises experimentais do sistema rotor-mancal axial operando sob regime de lubrificação híbrido. No que refere às análises estáticas de TPTBs operando sob este regime de lubrificação, importantes avanços foram obtidos por meio dos trabalhos de Heinrichson, Santos e Fuerst (2007), Heinrichson, Fuerst e Santos (2007), Tian, Cao e Huang (2019) e Bouyer, Wodtke e Fillon (2022).

No que se refere aos efeitos da lubrificação híbrida no comportamento dinâmico de mancais hidrodinâmicos axiais, apenas um trabalho sobre este tema foi publicado por Babin et al. (2020). Entretanto, o mancal analisado pelos autores possui geometria fixa, enquanto que o mancal analisado nesta *Tese de doutorado* é um mancal hidrodinâmico segmentado axial. A principal motivação para se analisar o comportamento dinâmico de um TPTB sujeito à lubrificação híbrida deve-se à importância deste regime de lubrificação nos TPTBs presentes nas UGs verticais. Assim, por meio do modelo proposto nesta *Tese de doutorado*, torna-se possível analisar, por exemplo, qual será o comportamento dinâmico de uma UG vertical operando com velocidade de rotação nominal, ao se aplicar a injeção de óleo à alta pressão.

Neste contexto, a presente *Tese de doutorado* tem como objetivo propor uma metodologia para avaliar a influência da pressão de injeção de óleo no comportamento dinâmico de TPTBs sujeitos à lubrificação híbrida. Para isso, este trabalho está organizado em quatro capítulos. O **Capítulo 1** é dedicado à apresentação do tema, destacando a originalidade e as contribuições do trabalho ao estado da arte. O **Capítulo 2** dedica-se à apresentação da formulação matemática que compõe o modelo teórico desenvolvido no trabalho. O **Capítulo 3** é dedicado à apresentação e análise dos obtidos a partir da aplicação do modelo teórico proposto. Por fim, as conclusões e perspectivas desta *Tese de doutorado* são apresentadas no **Capítulo 4**.

1.1 Objetivos da pesquisa

O objetivo desta *Tese de doutorado* é avaliar a influência da lubrificação híbrida no comportamento dinâmico de um mancal hidrodinâmico segmentado axial. No que se refere à *Originalidade* deste trabalho destacam-se os seguintes pontos:

1. Análise do efeito da pressão de injeção de óleo em um mancal hidrodinâmico segmentado axial sujeito à lubrificação híbrida nos coeficientes dinâmicos do

mancal;

2. Análise do efeito da pressão de injeção de óleo em um mancal hidrodinâmico segmentado axial sujeito à lubrificação híbrida nas frequências naturais e no fator de amortecimento do sistema rotor-mancal axial;
3. Aplicação de uma metodologia de redução síncrona para calcular os coeficientes dinâmicos equivalentes do mancal.

1.2 Produção acadêmica e científica

Durante o desenvolvimento desta *Tese de doutorado*, alguns trabalhos foram apresentados e posteriormente publicados em anais de congressos, a saber:

1. Barbosa, J. S., Sicchieri, L. C., Cavalini Jr., A. A., Steffen Jr., V.. Analysis of thermohydrodynamic models for the bearings of a Francis Hydropower Unit. In: 25th International Congress of Mechanical Engineering, 2019, Uberlândia. Proceedings of the 25th International Congress of Mechanical Engineering, 2019;
2. Dourado, A. P., Barbosa, J. S., Morais, T. S., Cavalini Jr., A. A., Steffen Jr., V.. Uncertainty Analysis of a Francis Hydropower Unit. In: ASME 2018 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, 2018, Quebec City. Volume 8: 30th Conference on Mechanical Vibration and Noise, 2018.

Além disso, três capítulos de livros foram publicados durante o desenvolvimento desta *Tese de doutorado*, a saber:

1. Dourado, A. D., Barbosa, J. S., Sicchieri, L. C., Cavalini Jr., A. A., Steffen Jr., V.. Kriging Surrogate Model Dedicated to a Tilting-Pad Journal Bearing. *Mechanisms and Machine Science*. 1ed.: Springer International Publishing, 2019, v., p. 347-358;
2. Barbosa, J. S., Sicchieri, L. C., Cavalini Jr., A. A., Steffen Jr., V.. Analysis of Thermohydrodynamic Models Dedicated to the Bearings of a Francis Hydropower Unit. *Dynamic of Mechanical Systems: A Perspective from the LMEST-UFU*. 1ed. Uberlândia: Navegando Publicações, 2019, v., p. 147-162;

3. Sicchieri, L. C., Barbosa, J. S., Cavalini Jr., A. A., Steffen Jr., V.. Kriging Surrogate Models Dedicated to the Cylindrical Journal Bearing of a Francis Hydropower Unit. *Dynamic of Mechanical Systems: A Perspective from the LMEST-UFU*. 1ed. Uberlândia: Navegando Publicações, 2019, v., p. 225-240.

Artigos em periódicos indexados:

1. [Submetido] Barbosa, J. S., Santos, I. F., Cavalini Jr., A. A., Steffen Jr., V. (2022). Dynamic Behavior of a Tilting-pad Thrust Bearing Operating under a Hybrid Lubrication Regime. *ASME - Journal of Tribology*;
2. Barbosa, J. S., Sicchieri, L. C., Dourado, A. D. P., Cavalini Jr., A. A., Steffen Jr., V. (2021). Kriging Approach Dedicated to Represent Hydrodynamic Bearings. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 143 (6).

Capítulo 2

Formulação Matemática

O presente capítulo dedica-se à apresentação da formulação matemática que compõe o modelo teórico desta *Tese de doutorado*. O modelo termohidrodinâmico (THD) apresentado na **seção 2.1**, baseia-se na determinação dos campos de pressão e temperatura do filme de óleo para calcular a posição de equilíbrio de um TPTB sujeito à lubrificação híbrida. A partir da posição de equilíbrio calculada através do modelo THD, os coeficientes de rigidez e amortecimento do filme de óleo são determinados utilizando o procedimento descrito na **seção 2.2**. A **seção 2.3** apresenta o procedimento de discretização das equações diferenciais parciais obtidas utilizando o *Método dos Volumes Finitos* (MVF). Finalmente, na **seção 2.4** é apresentada a equação do movimento para o sistema rotor-mancal axial, a partir da qual, torna-se possível determinar as frequências naturais do sistema e calcular os coeficientes dinâmicos equivalentes.

2.1 Modelo termohidrodinâmico

2.1.1 Campo de pressão para o regime de lubrificação híbrido

O campo de pressão no filme de óleo pode ser obtido através da solução da equação de Reynolds, a qual é obtida por meio da aplicação das equações de Navier-Stokes e da equação da continuidade simplificadas devido às características do escoamento. Para o sistema de referência cilíndrico $I(r, \theta, z)$, as equações de Navier-Stokes simplificadas para o modelo proposto podem ser escritas de acordo com as Eqs. (2.1)-(2.3), como se segue:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \quad (2.3)$$

nas quais p é a pressão atuante no elemento de fluido, μ é a viscosidade do fluido, e v_r , v_θ e v_z são os campos de velocidade do fluido das direções r , θ e z , respectivamente.

A Figura 2.1 apresenta os campos de velocidade do fluido em um TPTB, onde h é a espessura do filme de óleo, Ω é a velocidade de rotação do rotor, d_0 é o diâmetro do orifício para a injeção do óleo e V_{inj} é o módulo da velocidade de injeção de óleo.

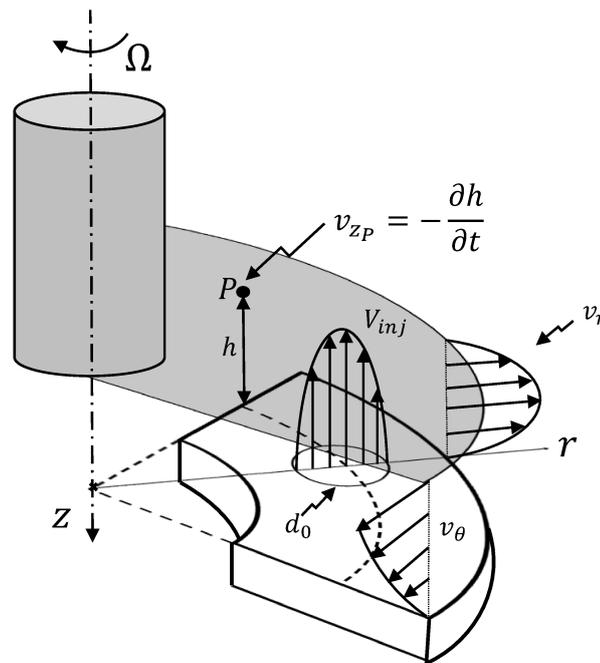


Figura 2.1: Campos de velocidade para um TPTB sujeito à lubrificação híbrida.

Das características do escoamento descritas na Fig. 2.1, descreve-se as condições de contorno, como mostra a Eq. (2.4).

$$\left. \begin{aligned} v_z(-h) &= v_{zP} = -\frac{\partial h}{\partial t} \\ v_z(0) &= -V_{inj}(r, \theta) \\ v_\theta(-h) &= \Omega r \\ v_\theta(0) &= 0 \\ v_r(-h) &= 0 \\ v_r(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

A equação que descreve o módulo da velocidade de injeção, $V_{inj}(r, \theta)$ é obtida seguindo a metodologia apresentada por Nicoletti (1999), e é dada por:

$$V_{inj}(r, \theta) = \frac{1}{4\mu_{inj}h_h} (P_{inj} - p) \left[\frac{d_0^2}{4} - (r_h \cos \theta_h - r \cos \theta)^2 - (r_h \sin \theta_h - r \sin \theta)^2 \right] \quad (2.5)$$

na qual P_{inj} é a pressão de injeção do óleo e r_h e θ_h são as posições radial e angular do orifício, respectivamente. Considera-se também que μ_{inj} é a viscosidade do óleo injetado, cujo valor depende da temperatura do óleo no reservatório de injeção, T_{inj} . De modo a tratar adequadamente a velocidade de injeção na Eq. (2.11), a Eq. (2.5) deve ser reescrita, como mostra as Eqs. (2.6)-(2.8).

$$V_{inj}(r, \theta) = \sigma_1 (P_{inj} - p) \quad (2.6)$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_0}{4\mu_{inj}h_h} \left[\frac{d_0^2}{4} - (r_h \cos \theta_h - r \cos \theta)^2 - (r_h \sin \theta_h - r \sin \theta)^2 \right] \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \sigma_0 = 1 & \Rightarrow (r_h \cos \theta_h - r \cos \theta)^2 + (r_h \sin \theta_h - r \sin \theta)^2 \leq \frac{d_0^2}{4} \\ \sigma_0 = 0 & \Rightarrow (r_h \cos \theta_h - r \cos \theta)^2 + (r_h \sin \theta_h - r \sin \theta)^2 > \frac{d_0^2}{4} \end{cases} \quad (2.8)$$

As condições de contorno descritas na Eq. (2.4) são utilizadas para solucionar as equações apresentadas nas Eqs. (2.1)-(2.3), determinando assim os campos de

velocidade, como mostra a Eq. (2.9).

$$v_z(z) = \frac{z}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} - V_{inj} \right) - V_{inj} \quad (2.9a)$$

$$v_\theta(z) = (z^2 + zh) \left(\frac{1}{2\mu r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) - z \left(\frac{\Omega r}{h} \right) \quad (2.9b)$$

$$v_r(z) = (z^2 + zh) \left(\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (2.9c)$$

A Equação (2.9) apresenta a equação da continuidade em coordenadas escrita em um sistema de coordenadas cilíndricas para um escoamento incompressível.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z) = 0 \quad (2.10)$$

Os campos de velocidades descritos pela Eq. (2.9) são inseridos à Eq. (2.10), e, integrando a equação obtida no intervalo $-h_h \leq z \leq 0$, obtém-se:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{rh^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = \frac{\Omega}{2} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{\partial h}{\partial t} - V_{inj} \quad (2.11)$$

Substituindo a Eq. (2.6) na Eq. (2.11), obtém-se a equação de Reynolds modificada para o regime de lubrificação híbrido, como mostra a Eq. (2.12).

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{rh^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = \frac{\Omega}{2} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{\partial h}{\partial t} - \sigma_1 (P_{inj} - p) \quad (2.12)$$

A Figura 2.2 apresenta os principais parâmetros geométricos referentes a um TPTB sujeito à lubrificação híbrida, onde r_1 e r_2 são os raios interno e externo do segmento, respectivamente, θ_0 é o comprimento angular do segmento, r_{pivot} e θ_{pivot} são as posições radial e angular do pivô, α_r e α_s são os ângulos de rotação do segmento em relação aos eixos r e s , respectivamente, h_{pivot} é a espessura do filme de óleo no ponto de pivotamento, d_0 e h_h são o diâmetro e a profundidade do orifício de injeção de óleo, respectivamente, e Ω é a velocidade de rotação do rotor.

A equação que representa a espessura do filme óleo, $h(r, \theta, t)$, é dada por:

$$h(r, \theta, t) = h_{pivot}(t) + \alpha_s(t) [r_{pivot} - r \cos(\theta - \theta_{pivot})] + \alpha_r(t) [r \sin(\theta - \theta_{pivot})] \quad (2.13)$$

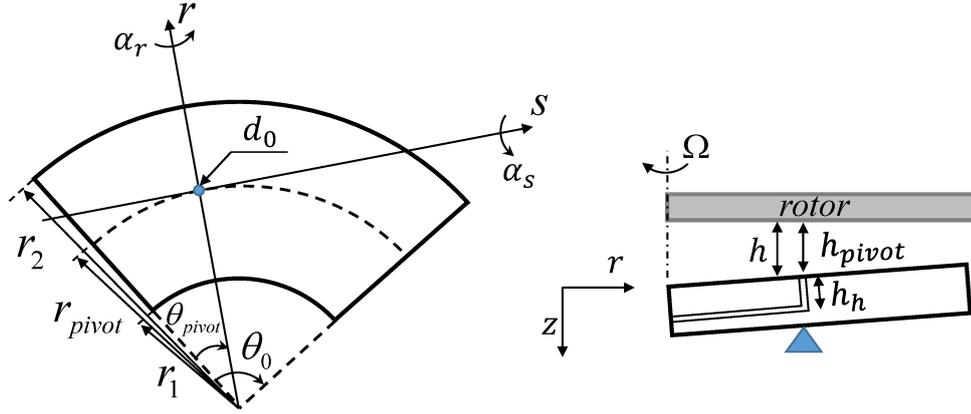


Figura 2.2: Parâmetros geométricos de um TPTB sujeito à lubrificação híbrida. Adaptado de: Barbosa et al. (2021).

Com o objetivo de facilitar o processo de discretização e evitar instabilidades numéricas durante o processo de solução computacional, a equação de Reynolds é tratada na sua forma adimensional, como mostra a Eq. (2.14)

$$\frac{1}{\bar{r}^2 \bar{\theta}_0^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \left[\frac{\bar{h}^3}{12 \bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right] + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[\frac{\bar{r} \bar{h}^3}{12 \bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right] = \frac{1}{2 \bar{\theta}_0} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\theta}} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} - \bar{\sigma}_1 (\bar{p} - \bar{P}_{inj}) \quad (2.14)$$

na qual,

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{r}{r_1}, \bar{\theta} = \frac{\theta}{\theta_0}, \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}, \bar{p} = \frac{p h_{pivot}^2}{r_1^2 \Omega \mu_0}, \bar{\theta}_{pivot} = \frac{\theta_{pivot}}{\theta_0}, \bar{r}_{pivot} = \frac{r_{pivot}}{r_1}, \bar{t} = \Omega t \\ \bar{\alpha}_r &= \alpha_r \frac{r_1}{h_{pivot}}, \bar{\alpha}_s = \alpha_s \frac{r_1}{h_{pivot}}, \bar{r}_h = \frac{r_h}{r_1}, \bar{\theta}_h = \frac{\theta_h}{\theta_0}, \bar{P}_{inj} = \frac{P_{inj} h_{pivot}^2}{r_1^2 \Omega \mu_0}, \bar{\mu}_{inj} = \frac{\mu_{inj}}{\mu_0} \\ \bar{h} &= \frac{h}{h_{pivot}} = 1 + \bar{\alpha}_s [\bar{r}_{pivot} - \bar{r} \cos(\theta_0 (\bar{\theta} - \bar{\theta}_{pivot}))] + \bar{\alpha}_r [\bar{r} \sin(\theta_0 (\bar{\theta} - \bar{\theta}_{pivot}))], \\ \bar{\sigma}_1 &= \frac{\sigma_0}{4 \bar{\mu}_{inj}} \left(\frac{r_1^4}{h_h h_{pivot}^3} \right) [\bar{r}_h^2 + \bar{r}^2 - 2 \bar{r} \bar{r}_h \cos(\theta_0 (\bar{\theta} - \bar{\theta}_h))] - \frac{\sigma_0}{16 \bar{\mu}_{inj}} \left(\frac{r_1^2 d_0^2}{h_h h_{pivot}^3} \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

sendo μ_0 a viscosidade de referência e σ_0 como apresentado em Eq. (2.8).

2.1.2 Equação da energia

A Eq. (2.16) apresenta a equação da energia escrita no sistema de referência cilíndrico de coordenadas:

$$\rho c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] = k_t \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] - p \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \mu \Phi \quad (2.16)$$

onde,

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 \quad (2.17)$$

onde ρ , c_p e k_t são a massa específica, o calor específico, e a condutividade térmica do fluido, respectivamente.

O campo de temperatura do filme de óleo é calculado a partir da solução da Eq. (2.16) e Eq. (2.17), considerando a variação da temperatura nas direções r e θ , ou seja, $T = T(r, \theta)$. As condições de contorno utilizadas para calcular o campo de temperatura, são apresentadas na Fig. 2.3.

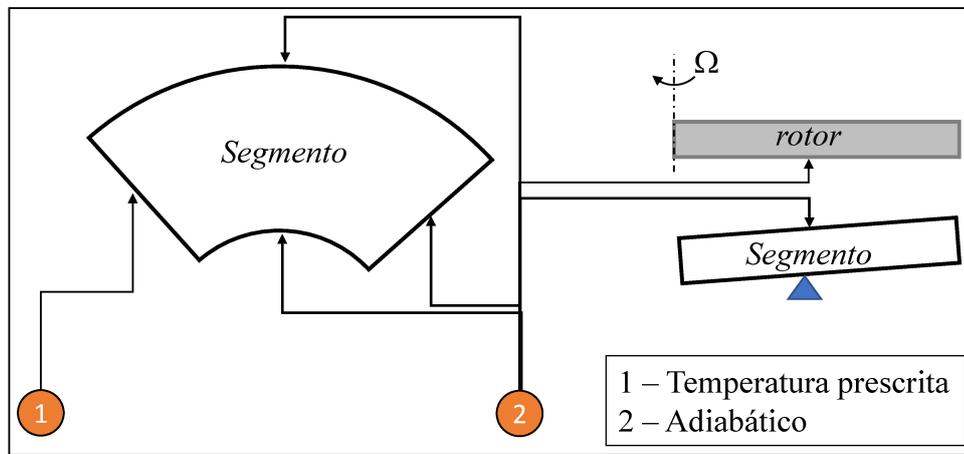


Figura 2.3: Condições de contorno para o modelo termohidrodinâmico.

A condição de contorno de temperatura prescrita representada por “1” na Fig. 2.3 é utilizada considerando que a temperatura no bordo de entrada da cada segmento é igual a temperatura do banho de óleo, T_{bath} , ao qual o mancal está imerso. Esta hipótese é utilizada neste trabalho devido à distância entre dois segmentos consecutivos ser suficiente elevada, o que impede que parte do óleo quente oriunda de um segmento seja carregada para o segmento subsequente.

Seguindo a mesma metodologia aplicada para obter as equações de Reynolds, deve-se integrar a equação da energia ao longo da espessura do filme para se obter a equação bidimensional.

$$\int_{-h}^0 v_r(z) dz = \int_{-h}^0 (z^2 + zh) \left(\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) dz = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (2.18)$$

$$\int_{-h}^0 v_\theta(z) dz = \int_{-h}^0 \left[(z^2 + zh) \left(\frac{1}{2\mu r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) - z \left(\frac{\Omega r}{h} \right) \right] dz = -\frac{h^3}{12\mu r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{h\Omega r}{2} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-h}^0 v_z \frac{\partial T}{\partial z} dz &= [v_z T]_{-h}^0 - \int_{-h}^0 T \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dz = \\
 &- V_{inj} T_{inj} - \left(-\frac{\partial h}{\partial t} T \right) - \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \int_{-h}^0 T dz = \\
 &- V_{inj} T_{inj} + \frac{\partial h}{\partial t} T - \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} - V_{inj} \right) T h = \\
 &V_{inj} (T - T_{inj})
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\int_{-h}^0 \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 dz = \frac{h^3}{12\mu^2} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 \tag{2.21}$$

$$\int_{-h}^0 \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)^2 dz = \frac{h^3}{12\mu^2 r^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\Omega^2 r^2}{h} \tag{2.22}$$

$$\int_{-h}^0 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 dz = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} - V_{inj} \right)^2 \tag{2.23}$$

$$\int_{-h}^0 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dz = \left(\frac{\partial h}{\partial t} - V_{inj} \right) \tag{2.24}$$

Para melhor condução algébrica da formulação, separa-se a Eq. (2.16) nos termos A , B , C e D , como indicado na Eq. (2.25).

$$\underbrace{\rho c_p \left[v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right]}_A = \underbrace{k_t \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]}_B \underbrace{- p \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)}_C + \underbrace{\mu \Phi}_D \tag{2.25}$$

Termo A:

$$-\rho c_p \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) - \rho c_p \frac{h^3}{12\mu r^2} \frac{\partial p}{\partial \theta} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \rho c_p \frac{h\Omega}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \rho c_p V_{inj} (T - T_{inj}) \tag{2.26}$$

Termo B:

$$\frac{k_t h}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{k_t h}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + k_t \left(\frac{T_{inj} - T}{h_h} \right) \sigma_1 \tag{2.27}$$

Termo C:

$$-p \left(\frac{\partial h}{\partial t} - V_{inj} \right) \tag{2.28}$$

Termo D:

$$\frac{2\mu}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} - V_{inj} \right)^2 + \frac{h^3}{12\mu r^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\mu \Omega^2 r^2}{h} + \frac{h^3}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 \tag{2.29}$$

Assim como na equação de Reynolds, a equação da energia é tratada neste modelo na sua forma adimensionalizada. Para isto, além das relações apresentadas na

Eq. (2.15), utiliza-se:

$$\bar{T} = \frac{T}{T_0}, \bar{T}_{inj} = \frac{T_{inj}}{T_0}, \bar{h}_h = \frac{h_h}{h_{pivot}} \quad (2.30)$$

A adimensionalização de cada um dos termos da Eq. (2.25) é apresentada separadamente para melhor condução do processo algébrico. Assim, para cada um dos termos A , B , C e D , segue:

Adimensionalização do termo A :

$$-\rho c_p \Omega h_{pivot} T_0 \left[\frac{\bar{h}^3}{12\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{\bar{h}^3}{12\theta_0^2 \bar{\mu} \bar{r}^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\theta}} \right) - \frac{\bar{h}}{2\theta_0} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\theta}} \right) - \bar{V}_{inj} (\bar{T} - \bar{T}_{inj}) \right] \quad (2.31)$$

Adimensionalização do termo B :

$$\frac{k_t h_{pivot} T_0}{r_1^2} \left[\frac{\bar{h}}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{\bar{h}}{\theta_0^2 \bar{r}^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] + \frac{k_t T_0}{h_{pivot}} \left[\left(\frac{\bar{T}_{inj} - \bar{T}}{\bar{h}_h} \right) \sigma_1 \right] \quad (2.32)$$

Adimensionalização do termo C :

$$-\frac{\mu_0 \Omega^2 r_1^2}{h_{pivot}} \bar{p} \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} - \bar{V}_{inj} \right) \quad (2.33)$$

Adimensionalização do termo D :

$$h_{pivot} \mu_0 \Omega^2 \frac{2\bar{\mu}}{\bar{h}} \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} - \bar{V}_{inj} \right)^2 + \frac{\mu_0 \Omega^2 r_1^2}{h_{pivot}} \left[\frac{\bar{h}^3}{12\theta_0^2 \bar{\mu} \bar{r}^2} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right)^2 + \frac{\bar{\mu} \bar{r}^2}{\bar{h}} + \frac{\bar{h}^3}{12\bar{\mu}} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right)^2 \right] \quad (2.34)$$

Assim, agrupando as equações obtidas para cada um dos termos, obtém-se a Eq. (2.35), a qual apresenta a energia na forma adimensional.

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{h}^3}{12\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right) + \left[\frac{\bar{h}^3}{12\theta_0^2 \bar{\mu} \bar{r}^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} - \frac{\bar{h}}{2\theta_0} \right] \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\theta}} \right) - \left[\bar{V}_{inj} + \frac{k_t}{\rho c_p \Omega h_{pivot}^2 \bar{l}_f} \sigma_1 \right] \bar{T} + \\ & + \frac{k_t}{\rho c_p \Omega r_1^2} \left[\frac{\bar{h}}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right) \right] + \frac{k_t}{\rho c_p \Omega r_1^2} \left[\frac{\bar{h}}{\theta_0^2 \bar{r}^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] = - \left[\bar{V}_{inj} + \frac{k_t}{\rho c_p \Omega h_{pivot}^2 \bar{l}_f} \sigma_1 \right] \bar{T}_{inj} + \\ & + \frac{\Omega \mu_0 r_1^2}{\rho c_p h_{pivot}^2 T_0} \left[\left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} - \bar{V}_{inj} \right) \bar{p} - \frac{\bar{h}^3}{12\theta_0^2 \bar{\mu} \bar{r}^2} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right)^2 - \frac{\bar{\mu} \bar{r}^2}{\bar{h}} - \frac{\bar{h}^3}{12\bar{\mu}} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{\mu_0 \Omega}{\rho c_p T_0} \left[-\frac{2\bar{\mu}}{\bar{h}} \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} - \bar{V}_{inj} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.35)$$

2.1.3 Cálculo da viscosidade em função da temperatura

O modelo THD proposto neste trabalho leva em conta os efeitos térmicos do escoamento do óleo no interior do mancal no campo de pressão resultante. Neste sentido, considera-se que a viscosidade do óleo varia com a temperatura do mesmo, sendo esta relação matemática descrita pela equação de Vogel (SEETON, 2006),

$$\mu = k_1 e^{\frac{k_2}{T - k_3}} \quad (2.36)$$

onde T é o campo de temperatura do filme de óleo, e k_1 , k_2 , k_3 são os coeficientes da equação de Vogel calculados a partir dos dados contidos no *datasheet* do óleo.

2.1.4 Equilíbrio de forças e momentos atuantes no segmento

A força hidrodinâmica e o momento resultante no segmento são calculados a partir da integração do campo de pressão hidrodinâmica sobre a área do segmento. Para determinar a posição de equilíbrio do mancal é preciso encontrar os valores de h_{pivot} , α_s e α_r tais que a Eq. (2.37a), Eq. (2.37b) e Eq. (2.37c) sejam satisfeitas.

$$0 = F_{res} = F_z / N_{pad} - \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{\theta_0} pr d\theta dr \quad (2.37a)$$

$$0 = M_r = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{\theta_0} pr^2 \sin(\theta - \theta_{pivot}) d\theta dr \quad (2.37b)$$

$$0 = M_s = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{\theta_0} pr [r_{pivot} - r \cos(\theta - \theta_{pivot})] d\theta dr \quad (2.37c)$$

sendo F_{res} a força resultante no rotor, F_z o carregamento axial aplicado, M_r e M_s os momentos atuantes no segmento nas direções r e s , respectivamente e N_{pad} o número de segmentos que compõe o mancal.

2.2 Coeficientes dinâmicos

As condições de equilíbrio de força e momentos mostradas pelas Eqs. (2.37a)-(2.37c) são satisfeitas à partir da determinação dos parâmetros h_{pivot_0} , α_{r_0} e α_{s_0} que são a espessura do filme de óleo no ponto de pivotamento, o ângulo de rotação do

segmento em torno da reta r e o ângulo de rotação do segmento em torno da reta s , respectivamente. Duas diferentes abordagens são aplicadas para determinar os coeficientes dinâmicos de um TPTB: pequena perturbação de pressão, baseados nos trabalhos de Lund (1964), Lund e Thomsen (1978), Springer (1978) e Springer (1979) e o método da perturbação numérica do filme de óleo em torno da posição de equilíbrio do mancal, baseado na abordagem apresentada por Allaire, Parsell e Barrett (1981).

2.2.1 Método da pequena perturbação de pressão

A espessura do filme de óleo para a condição de equilíbrio é dada pela Eq. (2.38).

$$h_0 = h_{pivot_0} + \alpha_{s_0} [r_{pivot} - r \cos(\theta - \theta_{pivot})] + \alpha_{r_0} [r \sin(\theta - \theta_{pivot})] \quad (2.38)$$

Considerando pequenas oscilações harmônicas em torno da posição de equilíbrio, a espessura do filme de óleo h pode ser escrita como mostra a Eq. (2.39).

$$h = h_0 + \Delta h e^{i\omega_p t} \quad (2.39)$$

onde ω_p é a frequência de oscilação e Δh é dado por:

$$\Delta h = h_\gamma \Delta \gamma, \gamma = h_{pivot}, \alpha_s, \alpha_r \quad (2.40)$$

sendo,

$$h_\gamma = \frac{\partial h}{\partial \gamma} \quad (2.41)$$

Valendo-se da hipótese de pequenas oscilações harmônicas em torno da posição de equilíbrio do segmento, o campo de pressão pode ser escrito como mostra a Eq. (2.42).

$$p = p_0 + \Delta p e^{i\omega_p t} \quad (2.42)$$

onde p_0 é o campo de pressão na condição de equilíbrio e,

$$\Delta p = p_\gamma \Delta \gamma, \gamma = h_{pivot}, \alpha_s, \alpha_r \quad (2.43)$$

na qual,

$$p_\gamma = \frac{\partial p}{\partial \gamma} \quad (2.44)$$

Substituindo as relações apresentadas nas Eq. (2.39), Eq. (2.40), Eq. (2.42) e Eq. (2.43) na equação de Reynolds (Eq. (2.12)), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r (h_0 + h_\gamma \Delta \gamma e^{i\omega_p t})^3}{12\mu} \frac{\partial (p_0 + p_\gamma \Delta \gamma e^{i\omega_p t})}{\partial r} \right] + \\ & + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{(h_0 + h_\gamma \Delta \gamma e^{i\omega_p t})^3}{12\mu} \frac{\partial (p_0 + p_\gamma \Delta \gamma e^{i\omega_p t})}{\partial \theta} \right] = \\ & \frac{\Omega}{2} \frac{\partial (h_0 + h_\gamma \Delta \gamma e^{i\omega_p t})}{\partial \theta} + \frac{\partial (h_0 + h_\gamma \Delta \gamma e^{i\omega_p t})}{\partial t} - \sigma_1 [P_{inj} - (p_0 + p_\gamma \Delta \gamma e^{i\omega_p t})] \end{aligned} \quad (2.45)$$

Desenvolvendo a Eq. (2.45) e considerando a aproximação $(\Delta h_\gamma)^2 \approx 0$, obtém-se:

$$\frac{1}{12r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r h_0^3}{\mu} \frac{\partial p_\gamma}{\partial r} + \frac{3r h_0^2 h_\gamma}{\mu} \frac{\partial p_0}{\partial r} \right] + \frac{1}{12r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{h_0^3}{\mu} \frac{\partial p_\gamma}{\partial \theta} + \frac{3h_0^2 h_\gamma}{\mu} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \right] = \frac{\Omega}{2} \frac{\partial h_\gamma}{\partial \theta} + h_\gamma i\omega_p + \sigma_1 p_\gamma \quad (2.46)$$

Seguindo a estratégia de adimensionalização das equações adotada, a Eq. (2.46) é adimensionalizada para $\gamma = h_{pivot}$, $\gamma = \alpha_r$ e $\gamma = \alpha_s$. Assim, três equações são obtidas, como mostra as Eqs. (2.47)-(2.49)

$$\frac{1}{12\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[\frac{\bar{r} \bar{h}_0^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}_{hpi}}{\partial \bar{r}} + \frac{3\bar{r} \bar{h}_0^2}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{r}} \right] + \frac{1}{12\theta_0^2 \bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \left[\frac{\bar{h}_0^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}_{hpi}}{\partial \bar{\theta}} + \frac{3\bar{h}_0^2}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{\theta}} \right] = i\bar{\omega}_p \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[\frac{\bar{r} \bar{h}_0^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}_{\alpha_r}}{\partial \bar{r}} \right] + \frac{1}{12\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[\frac{3\bar{r} \bar{h}_0^2 \bar{h}_{\alpha_r}}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{r}} \right] + \frac{1}{12\theta_0^2 \bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \left[\frac{\bar{h}_0^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}_{\alpha_r}}{\partial \bar{\theta}} \right] + \\ & + \frac{1}{12\theta_0^2 \bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \left[\frac{3\bar{h}_0^2 \bar{h}_{\alpha_r}}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{\theta}} \right] = \frac{1}{2\theta_0} \frac{\partial \bar{h}_{\alpha_r}}{\partial \bar{\theta}} + i\bar{h}_{\alpha_r} \bar{\omega}_p \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[\frac{\bar{r} \bar{h}_0^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}_{\alpha_s}}{\partial \bar{r}} \right] + \frac{1}{12\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[\frac{3\bar{r} \bar{h}_0^2 \bar{h}_{\alpha_s}}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{r}} \right] + \frac{1}{12\theta_0^2 \bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \left[\frac{\bar{h}_0^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}_{\alpha_s}}{\partial \bar{\theta}} \right] + \\ & + \frac{1}{12\theta_0^2 \bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \left[\frac{3\bar{h}_0^2 \bar{h}_{\alpha_s}}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{\theta}} \right] = \frac{1}{2\theta_0} \frac{\partial \bar{h}_{\alpha_s}}{\partial \bar{\theta}} + i\bar{h}_{\alpha_s} \bar{\omega}_p \end{aligned} \quad (2.49)$$

na qual, além dos parâmetros da Eq. (2.15), aplica-se:

$$\begin{aligned} \bar{h}_0 &= \frac{h_0}{h_{pivot}}, \bar{p}_{hpi} = \frac{p_{hpi} h_{pivot}^3}{\mu_0 r_1^2 \Omega}, \bar{h}_{\alpha_r} = \frac{h_{\alpha_r}}{r_1}, \bar{h}_{\alpha_s} = \frac{h_{\alpha_s}}{r_1}, \\ \bar{p}_{\alpha_r} &= \frac{p_{\alpha_r} h_{pivot}^3}{\mu_0 r_1^2 \Omega}, \bar{p}_{\alpha_s} = \frac{p_{\alpha_s} h_{pivot}^3}{\mu_0 r_1^2 \Omega}, \bar{\omega}_p = \frac{\omega_p}{\Omega} \end{aligned} \quad (2.50)$$

A partir da solução Eq. (2.46) é possível determinar a variação do campo de pressão em função da perturbação do filme do óleo. Assim, as variações de força e momento em função da variação do campo de pressão, e obviamente, das oscilações do filme de óleo, podem ser calculadas de acordo com as Eqs. (2.51a)-(2.51c).

$$\int_{r_1}^{r_2} \int_0^{\theta_0} p_\gamma r d\theta dr = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{\theta_0} \frac{\partial p}{\partial \gamma} r d\theta dr = \frac{\partial}{\partial \gamma} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{\theta_0} p r d\theta dr = \frac{\partial F_z}{\partial \gamma} \quad (2.51a)$$

$$\int_{r_1}^{r_2} \int_0^{\theta_0} p_\gamma r^2 \sin(\theta - \theta_{pivot}) d\theta dr = \frac{\partial M_r}{\partial \gamma} \quad (2.51b)$$

$$\int_{r_1}^{r_2} \int_0^{\theta_0} p_\gamma r [r_{pivot} - r \cos(\theta - \theta_{pivot})] d\theta dr = \frac{\partial M_s}{\partial \gamma} \quad (2.51c)$$

Os coeficientes dinâmicos para o mancal podem ser determinados como mostra a Eq. (2.52).

$$\begin{Bmatrix} k_{z\gamma} \\ k_{\alpha_r\gamma} \\ k_{\alpha_s\gamma} \end{Bmatrix} = -\text{Re} \left(\begin{Bmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial M_r}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial M_s}{\partial \gamma} \end{Bmatrix} \right), \begin{Bmatrix} d_{z\gamma} \\ d_{\alpha_r\gamma} \\ d_{\alpha_s\gamma} \end{Bmatrix} = -\frac{1}{\omega_p} \text{Im} \left(\begin{Bmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial M_r}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial M_s}{\partial \gamma} \end{Bmatrix} \right) \quad (2.52)$$

Assim, \mathbf{K}_{oil} e \mathbf{D}_{oil} são as matrizes de rigidez e amortecimento do filme de óleo, respectivamente, resumidas na Eq. (2.53).

$$\mathbf{K}_{oil} = \begin{bmatrix} k_{zz} & k_{z\alpha_r} & k_{z\alpha_s} \\ k_{\alpha_r z} & k_{\alpha_r\alpha_r} & k_{\alpha_r\alpha_s} \\ k_{\alpha_s z} & k_{\alpha_s\alpha_r} & k_{\alpha_s\alpha_s} \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{oil} = \begin{bmatrix} d_{zz} & d_{z\alpha_r} & d_{z\alpha_s} \\ d_{\alpha_r z} & d_{\alpha_r\alpha_r} & d_{\alpha_r\alpha_s} \\ d_{\alpha_s z} & d_{\alpha_s\alpha_r} & d_{\alpha_s\alpha_s} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

2.2.2 Método da perturbação numérica

A determinação dos coeficientes dinâmicos por meio do método da perturbação numérica baseia-se no cálculo das forças e momentos resultantes no TPTB a partir de perturbações numéricas aplicadas em cada um dos parâmetros de equilíbrio. A Equação (2.54) apresenta os valores das espessuras do filme do óleo obtidos a partir da aplicação de uma perturbação numérica Δh_{pivot} :

$$h_{pivot_1} = h_{pivot_0} + \Delta h_{pivot}, h_{pivot_2} = h_{pivot_0} - \Delta h_{pivot} \quad (2.54)$$

Deste modo, a partir dos valores h_{pivot_1} e h_{pivot_2} calcula-se F_{z_1} , M_{r_1} e M_{s_1} e F_{z_2} , M_{r_2} e M_{s_2} , respectivamente. Assim, determina-se os valores de k_{zz} , $k_{\alpha_r z}$ e $k_{\alpha_s z}$, de acordo com as Eqs. (2.55)-(2.57).

$$k_{zz} = -\frac{F_{z_2} \Big|_{\Delta h_{pivot}} - F_{z_1} \Big|_{\Delta h_{pivot}}}{2\Delta h_{pivot}} \quad (2.55)$$

$$k_{\alpha_r z} = -\frac{M_{r_2} \Big|_{\Delta h_{pivot}} - M_{r_1} \Big|_{\Delta h_{pivot}}}{2\Delta h_{pivot}} \quad (2.56)$$

$$k_{\alpha_s z} = -\frac{M_{s_2} \Big|_{\Delta h_{pivot}} - M_{s_1} \Big|_{\Delta h_{pivot}}}{2\Delta h_{pivot}} \quad (2.57)$$

Aplicando o mesmo procedimento para α_r e α_s , obtém-se:

$$\alpha_{r_1} = \alpha_{r_0} + \Delta\alpha_r, \alpha_{r_2} = \alpha_{r_0} - \Delta\alpha_r \quad (2.58)$$

$$\alpha_{s_1} = \alpha_{s_0} + \Delta\alpha_s, \alpha_{s_2} = \alpha_{s_0} - \Delta\alpha_s \quad (2.59)$$

$$k_{z\alpha_r} = -\frac{F_{z_2} \Big|_{\Delta\alpha_r} - F_{z_1} \Big|_{\Delta\alpha_r}}{2\Delta\alpha_r} \quad (2.60)$$

$$k_{\alpha_r\alpha_r} = -\frac{M_{r_2} \Big|_{\Delta\alpha_r} - M_{r_1} \Big|_{\Delta\alpha_r}}{2\Delta\alpha_r} \quad (2.61)$$

$$k_{\alpha_s\alpha_r} = -\frac{M_{s_2} \Big|_{\Delta\alpha_r} - M_{s_1} \Big|_{\Delta\alpha_r}}{2\Delta\alpha_r} \quad (2.62)$$

$$k_{z\alpha_s} = -\frac{F_{z_2} \Big|_{\Delta\alpha_s} - F_{z_1} \Big|_{\Delta\alpha_s}}{2\Delta\alpha_s} \quad (2.63)$$

$$k_{\alpha_r\alpha_s} = -\frac{M_{r_2} \Big|_{\Delta\alpha_s} - M_{r_1} \Big|_{\Delta\alpha_s}}{2\Delta\alpha_s} \quad (2.64)$$

$$k_{\alpha_s\alpha_s} = -\frac{M_{s_2} \Big|_{\Delta\alpha_s} - M_{s_1} \Big|_{\Delta\alpha_s}}{2\Delta\alpha_s} \quad (2.65)$$

Na condição de equilíbrio estático representado pelas Eqs. (2.37a)-(2.37c), a espessura do filme de óleo h não varia com tempo. Entretanto, considerando pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio, a variação temporal da espessura do

filme de óleo, é escrita como mostra a Eq. (2.66):

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \dot{h} = \dot{h}_{pivot}(t) + \dot{\alpha}_s(t) [r_{pivot} - r \cos(\theta - \theta_{pivot})] + \dot{\alpha}_r(t) [r \sin(\theta - \theta_{pivot})] \quad (2.66)$$

Assim, para determinar os coeficientes de amortecimento de um TPTB, aplica-se o mesmo procedimento o qual foi utilizado nas Eqs (2.54)-(2.65) para calcular os coeficientes de rigidez de um TPTB, como mostra as Eqs. (2.67)-(2.75).

$$d_{zz} = - \frac{F_{z2} \Big|_{\Delta \dot{h}_{pivot}} - F_{z1} \Big|_{\Delta \dot{h}_{pivot}}}{2\Delta \dot{h}_{pivot}} \quad (2.67)$$

$$d_{\alpha_r z} = - \frac{M_{r2} \Big|_{\Delta \dot{h}_{pivot}} - M_{r1} \Big|_{\Delta \dot{h}_{pivot}}}{2\Delta \dot{h}_{pivot}} \quad (2.68)$$

$$d_{\alpha_s z} = - \frac{M_{s2} \Big|_{\Delta \dot{h}_{pivot}} - M_{s1} \Big|_{\Delta \dot{h}_{pivot}}}{2\Delta \dot{h}_{pivot}} \quad (2.69)$$

$$d_{z\alpha_r} = - \frac{F_{z2} \Big|_{\Delta \dot{\alpha}_r} - F_{z1} \Big|_{\Delta \dot{\alpha}_r}}{2\Delta \dot{\alpha}_r} \quad (2.70)$$

$$d_{\alpha_r \alpha_r} = - \frac{M_{r2} \Big|_{\Delta \dot{\alpha}_r} - M_{r1} \Big|_{\Delta \dot{\alpha}_r}}{2\Delta \dot{\alpha}_r} \quad (2.71)$$

$$d_{\alpha_s \alpha_r} = - \frac{M_{s2} \Big|_{\Delta \dot{\alpha}_r} - M_{s1} \Big|_{\Delta \dot{\alpha}_r}}{2\Delta \dot{\alpha}_r} \quad (2.72)$$

$$d_{z\alpha_s} = - \frac{F_{z2} \Big|_{\Delta \dot{\alpha}_s} - F_{z1} \Big|_{\Delta \dot{\alpha}_s}}{2\Delta \dot{\alpha}_s} \quad (2.73)$$

$$d_{\alpha_r \alpha_s} = - \frac{M_{r2} \Big|_{\Delta \dot{\alpha}_s} - M_{r1} \Big|_{\Delta \dot{\alpha}_s}}{2\Delta \dot{\alpha}_s} \quad (2.74)$$

$$d_{\alpha_s \alpha_s} = - \frac{M_{s2} \Big|_{\Delta \dot{\alpha}_s} - M_{s1} \Big|_{\Delta \dot{\alpha}_s}}{2\Delta \dot{\alpha}_s} \quad (2.75)$$

2.3 Discretização das Equações Diferencias Parciais

O Método dos Volumes Finitos (MVF) é utilizado neste trabalho para solucionar numericamente as equações diferenciais parciais que compõem o modelo teórico desta tese, a saber: a equação de Reynolds, Eq. (2.14), a equação da energia, Eq. (2.35) e as equações advindas do método das pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio, Eq. (2.47), Eq. (2.48) e Eq. (2.49).

O objetivo de aplicação do MVF é obter um sistema de equações algébricas cuja a solução aproxima-se da solução das equações diferenciais correspondentes. Para este fim, o domínio físico do problema é dividido em pequenos volumes, como mostra a Fig. 2.4, na qual, o volume analisado é denominado P e os volumes ao norte, sul, leste e oeste são denominados N , S , E e W , respectivamente. Destaca-se também na Fig. 2.4 as faces norte, sul, leste e oeste do volume P , as quais são identificadas por n , s , e e w , respectivamente.

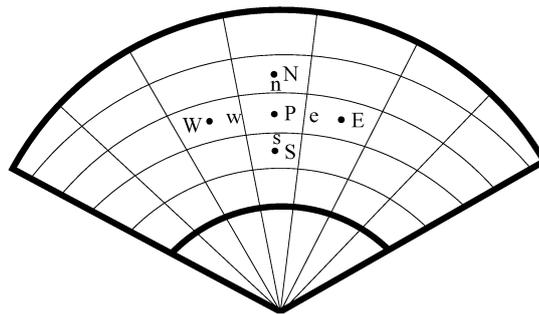


Figura 2.4: Discretização via MVF.

As equações algébricas resultantes da aplicação do MVF às equações Eq. (2.14), Eq. (2.35), Eq. (2.47), Eq. (2.48) e Eq. (2.49) bem como o procedimento detalhado para a obtenção destas equações será apresentado nas subseções seguintes.

2.3.1 MVF aplicado à equação de Reynolds

Os termos da equação de Reynolds modificada, apresentada na sua forma adimensional pela Eq. 2.14, apresentam-se identificados pelos termos A , B , C e D , como mostra a Eq. 2.76:

$$\underbrace{\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{\bar{r} \bar{h}^3}{12 \bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right)}_A + \underbrace{\frac{1}{\bar{r}^2 \theta_0^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\bar{h}^3}{12 \bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right)}_B = \underbrace{\frac{1}{2 \theta_0} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta}}_C + \underbrace{\frac{\partial \bar{h}}{\partial t}}_D - \underbrace{\bar{\sigma}_1 (\bar{p} - \bar{P}_{inj})}_E \quad (2.76)$$

Deste modo, aplicando o MVF em cada uns dos termos da Eq. 2.76, obtém-se:

Termo A:

$$\int_w^e \int_s^n \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{\bar{r} \bar{h}^3}{12 \bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right) \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} \quad (2.77a)$$

$$\frac{1}{12} \left[\frac{\bar{r}_n}{\bar{\mu}_n} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right)_n \int_{\bar{\theta}_w}^{\bar{\theta}_e} \bar{h}_n^3 d\bar{\theta} - \frac{\bar{r}_s}{\bar{\mu}_s} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right)_s \int_{\bar{\theta}_w}^{\bar{\theta}_e} \bar{h}_s^3 d\bar{\theta} \right] \quad (2.77b)$$

Termo B:

$$\int_w^e \int_s^n \frac{1}{\bar{r}^2 \theta_0^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \left(\frac{\bar{h}^3}{12 \bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right) \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} \quad (2.78a)$$

$$\frac{1}{12 \theta_0^2} \left[\frac{1}{\bar{\mu}_e} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right)_e \int_{\bar{r}_s}^{\bar{r}_n} \frac{1}{\bar{r}} \bar{h}_e^3 d\bar{r} - \frac{1}{\bar{\mu}_w} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right)_w \int_{\bar{r}_s}^{\bar{r}_n} \frac{1}{\bar{r}} \bar{h}_w^3 d\bar{r} \right] \quad (2.78b)$$

Termo C:

$$\int_w^e \int_s^n \frac{1}{2\theta_0} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\theta}} \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} \quad (2.79a)$$

$$\frac{1}{2\theta_0} \left[\int_s^n \bar{r} \bar{h}_e d\bar{r} - \int_s^n \bar{r} \bar{h}_w d\bar{r} \right] \quad (2.79b)$$

Termo D:

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} = \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} \right)_P \bar{r} \Delta \bar{r} \Delta \bar{\theta} \quad (2.80)$$

Termo E:

$$\int_w^e \int_s^n -(\bar{\sigma}_1 \bar{p} - \bar{\sigma}_1 \bar{P}_{inj}) \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} = \bar{\sigma}_1 \bar{r} \Delta \bar{r} \Delta \bar{\theta} \bar{P}_{inj} - \bar{\sigma}_1 \bar{r} \Delta \bar{r} \Delta \bar{\theta} \bar{P}_P \quad (2.81)$$

As derivadas de pressão na face são expressas usando a técnica de diferenças à montante, também conhecida como *forward*, como mostra a Eq. (2.82):

$$\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right)_n = \frac{\bar{P}_N - \bar{P}_P}{\Delta \bar{r}}, \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right)_s = \frac{\bar{P}_P - \bar{P}_S}{\Delta \bar{r}}, \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right)_e = \frac{\bar{P}_E - \bar{P}_P}{\Delta \bar{\theta}}, \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right)_w = \frac{\bar{P}_P - \bar{P}_W}{\Delta \bar{\theta}} \quad (2.82)$$

Assim, a Eq. (2.83), a qual é uma equação algébrica, é obtida por meio a aplicação do

MVF à Eq. (2.76):

$$C_P \bar{P}_P + C_E \bar{P}_E + C_W \bar{P}_W + C_S \bar{P}_S + C_N \bar{P}_N = B_P \quad (2.83)$$

na qual,

$$C_N = \frac{\bar{r}_n}{12\bar{\mu}_n \Delta \bar{r}} \int_{\bar{\theta}_w}^{\bar{\theta}_e} \bar{h}_n^3 d\bar{\theta} \quad (2.84a)$$

$$C_S = \frac{\bar{r}_s}{12\bar{\mu}_s \Delta \bar{r}} \int_{\bar{\theta}_w}^{\bar{\theta}_e} \bar{h}_s^3 d\bar{\theta} \quad (2.84b)$$

$$C_E = \frac{1}{12\theta_0^2 \bar{\mu}_e \Delta \bar{\theta}} \int_{\bar{r}_s}^{\bar{r}_n} \frac{1}{\bar{r}} \bar{h}_e^3 d\bar{r} \quad (2.84c)$$

$$C_W = \frac{1}{12\theta_0^2 \bar{\mu}_w \Delta \bar{\theta}} \int_{\bar{r}_s}^{\bar{r}_n} \frac{1}{\bar{r}} \bar{h}_w^3 d\bar{r} \quad (2.84d)$$

$$C_P = -(C_N + C_S + C_E + C_W) + \bar{\sigma}_1 \bar{r} \Delta \bar{r} \Delta \bar{\theta} \quad (2.84e)$$

$$B_P = \frac{1}{2\theta_0} \left[\int_s^n \bar{r} \bar{h}_e d\bar{r} - \int_s^n \bar{r} \bar{h}_w d\bar{r} \right] + \bar{\sigma}_1 \bar{r} \Delta \bar{r} \Delta \bar{\theta} \bar{P}_{in,j} \quad (2.84f)$$

As integrais presentes na Eq. (2.84) podem ser resolvidas por meio do método do trapézio, como mostram as Eqs. (2.85)-(2.90):

$$\int_{\bar{\theta}_w}^{\bar{\theta}_e} \bar{h}_n^3 d\bar{\theta} = \frac{\Delta \bar{\theta}}{2} [\bar{h}^3(\bar{r}_n, \bar{\theta}_e) + \bar{h}^3(\bar{r}_n, \bar{\theta}_w)] \quad (2.85)$$

$$\int_{\bar{\theta}_w}^{\bar{\theta}_e} \bar{h}_s^3 d\bar{\theta} = \frac{\Delta \bar{\theta}}{2} [\bar{h}^3(\bar{r}_s, \bar{\theta}_e) + \bar{h}^3(\bar{r}_s, \bar{\theta}_w)] \quad (2.86)$$

$$\int_{\bar{r}_s}^{\bar{r}_n} \frac{1}{\bar{r}} \bar{h}_e^3 d\bar{r} = \frac{\Delta \bar{r}}{2} \left[\frac{\bar{h}^3(\bar{r}_n, \bar{\theta}_e)}{\bar{r}_n} + \frac{\bar{h}^3(\bar{r}_s, \bar{\theta}_e)}{\bar{r}_s} \right] \quad (2.87)$$

$$\int_{\bar{r}_s}^{\bar{r}_n} \frac{1}{\bar{r}} \bar{h}_w^3 d\bar{r} = \frac{\Delta \bar{r}}{2} \left[\frac{\bar{h}^3(\bar{r}_n, \bar{\theta}_w)}{\bar{r}_n} + \frac{\bar{h}^3(\bar{r}_s, \bar{\theta}_w)}{\bar{r}_s} \right] \quad (2.88)$$

$$\int_s^n \bar{r} \bar{h}_e d\bar{r} = \frac{\Delta \bar{r}}{2} [\bar{r}_n \bar{h}(\bar{r}_n, \bar{\theta}_e) + \bar{r}_s \bar{h}(\bar{r}_s, \bar{\theta}_e)] \quad (2.89)$$

$$\int_s^n \bar{r} \bar{h}_w d\bar{r} = \frac{\Delta \bar{r}}{2} [\bar{r}_n \bar{h}(\bar{r}_n, \bar{\theta}_w) + \bar{r}_s \bar{h}(\bar{r}_s, \bar{\theta}_w)] \quad (2.90)$$

Assim, os coeficientes da Eq. (2.83) tornam-se:

$$C_N = \frac{\bar{r}_n}{24\bar{\mu}_n} \frac{\Delta\bar{\theta}}{\Delta\bar{r}} [\bar{h}^3(\bar{r}_n, \bar{\theta}_e) + \bar{h}^3(\bar{r}_n, \bar{\theta}_w)] \quad (2.91a)$$

$$C_S = \frac{\bar{r}_s}{24\bar{\mu}_s} \frac{\Delta\bar{\theta}}{\Delta\bar{r}} [\bar{h}^3(\bar{r}_s, \bar{\theta}_e) + \bar{h}^3(\bar{r}_s, \bar{\theta}_w)] \quad (2.91b)$$

$$C_E = \frac{1}{24\theta_0^2\bar{\mu}_e} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta\bar{\theta}} \left[\frac{\bar{h}^3(\bar{r}_n, \bar{\theta}_e)}{\bar{r}_n} + \frac{\bar{h}^3(\bar{r}_s, \bar{\theta}_e)}{\bar{r}_s} \right] \quad (2.91c)$$

$$C_W = \frac{1}{24\theta_0^2\bar{\mu}_w} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta\bar{\theta}} \left[\frac{\bar{h}^3(\bar{r}_n, \bar{\theta}_w)}{\bar{r}_n} + \frac{\bar{h}^3(\bar{r}_s, \bar{\theta}_w)}{\bar{r}_s} \right] \quad (2.91d)$$

$$C_P = -(C_N + C_S + C_E + C_W) + \bar{\sigma}_1 \bar{r} \Delta\bar{r} \Delta\bar{\theta} \quad (2.91e)$$

$$B_P = \frac{\Delta\bar{r}}{4\theta_0} [\bar{r}_n \bar{h}(\bar{r}_n, \bar{\theta}_e) + \bar{r}_s \bar{h}(\bar{r}_s, \bar{\theta}_e) - \bar{r}_n \bar{h}(\bar{r}_n, \bar{\theta}_w) - \bar{r}_s \bar{h}(\bar{r}_s, \bar{\theta}_w)] + \bar{\sigma}_1 \bar{r} \Delta\bar{r} \Delta\bar{\theta} \bar{P}_{inj} \quad (2.91f)$$

A Equação (2.92) é válida para cada um dos volumes de controle que compõem a malha discretizada mostrada na Fig. 2.4.

$$C_P \bar{P}_{i,j} + C_E \bar{P}_{i,j+1} + C_W \bar{P}_{i,j-1} + C_S \bar{P}_{i-1,j} + C_N \bar{P}_{i+1,j} = B_{P_{i,j}} \quad (2.92)$$

sendo $1 \leq i \leq N_r$ e $1 \leq j \leq N_\theta$, onde N_θ e N_r são os números de volumes nas direções circunferencial e radial, respectivamente. Aplicando a técnica de vetorização, a Eq. (2.92) pode ser escrita sobre a forma:

$$\{\bar{P}\}_{(k,1)} = [C]_{(k,k)}^{-1} \{B_P\}_{(k,1)} \quad (2.93)$$

onde $k = 1, \dots, N_\theta \cdot N_r$. Para a solução da Eq. (2.93) utiliza-se como condição de contorno a hipótese de pressão manométrica nula nas bordas do segmento.

2.3.2 MVF aplicado à equação da energia

Os termos da equação da energia, apresentada na sua forma adimensional pela Eq. 2.35, apresentam-se identificados pelos termos de A a K, como mostra a Eq. 2.94:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\frac{\bar{h}^3}{12\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right)}_A + \underbrace{\left[\frac{\bar{h}^3}{12\theta_0^2 \bar{\mu} \bar{r}^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} - \frac{\bar{h}}{2\theta_0} \right] \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\theta}} \right)}_B - \underbrace{\left[\bar{V}_{inj} + \frac{k_t}{\rho c_p \Omega h_{pivot}^2 \bar{l}_f} \sigma_1 \right]}_C \bar{T} + \\
 & + \frac{k_t}{\rho c_p \Omega r_1^2} \underbrace{\left[\frac{\bar{h}}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right) \right]}_D + \frac{k_t}{\rho c_p \Omega r_1^2} \underbrace{\left[\frac{\bar{h}}{\theta_0^2 \bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{\theta}^2} \right]}_E = - \underbrace{\left[\bar{V}_{inj} + \frac{k_t}{\rho c_p \Omega h_{pivot}^2 \bar{l}_f} \sigma_1 \right]}_F \bar{T}_{inj} + \\
 & + \frac{\Omega \mu_0 r_1^2}{\rho c_p h_{pivot}^2 T_0} \left[\underbrace{\left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} - \bar{V}_{inj} \right) \bar{p}}_G - \underbrace{\frac{\bar{h}^3}{12\theta_0^2 \bar{\mu} \bar{r}^2} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right)^2}_H - \underbrace{\frac{\bar{\mu} \bar{r}^2}{\bar{h}}}_I - \underbrace{\frac{\bar{h}^3}{12\bar{\mu}} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right)^2}_J \right] + \\
 & + \frac{\mu_0 \Omega}{\rho c_p T_0} \left[\underbrace{- \frac{2\bar{\mu}}{\bar{h}} \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} - \bar{V}_{inj} \right)^2}_K \right]
 \end{aligned} \tag{2.94}$$

Termo A:

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\bar{h}^3}{12\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right) \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} \tag{2.95}$$

Aplicando a técnica de integração por partes, têm-se:

$$\int_w^e \left[\frac{\bar{r} \bar{h}^3}{12\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \bar{T} \right]_s^n d\bar{\theta} - \frac{\Delta \bar{r}}{2} \int_w^e \bar{T}_n \left[\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{\bar{r} \bar{h}^3}{12\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right) \right]_n d\bar{\theta} - \frac{\Delta \bar{r}}{2} \int_w^e \bar{T}_s \left[\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{\bar{r} \bar{h}^3}{12\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right) \right]_s d\bar{\theta} \tag{2.96}$$

Analisando separadamente cada um dos termos da Eq. (2.96):

$$\int_w^e \left[\frac{\bar{r} \bar{h}^3}{12\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \bar{T} \right]_s^n d\bar{\theta} = \frac{\Delta \bar{\theta}}{12} \left[\frac{\bar{r}_n \bar{h}_n^3}{\bar{\mu}_n} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right)_n \bar{T}_n - \frac{\bar{r}_s \bar{h}_s^3}{\bar{\mu}_s} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right)_s \bar{T}_s \right] \tag{2.97}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Delta \bar{\theta}}{24} \bar{T}_n \left[\frac{\bar{r}_N \bar{h}_N^3}{\bar{\mu}_N} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right)_N \right] + \frac{\Delta \bar{\theta}}{24} \bar{T}_n \left[\frac{\bar{r}_P \bar{h}_P^3}{\bar{\mu}_P} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right)_P \right] + \\
 & - \frac{\Delta \bar{\theta}}{24} \bar{T}_s \left[\frac{\bar{r}_P \bar{h}_P^3}{\bar{\mu}_P} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right)_P \right] - \frac{\Delta \bar{\theta}}{24} \bar{T}_s \left[\frac{\bar{r}_S \bar{h}_S^3}{\bar{\mu}_S} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right)_S \right]
 \end{aligned} \tag{2.98}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{\bar{r} \bar{h}^3}{12 \bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right) \right]_n = \frac{1}{12 \Delta \bar{r}} \left[\frac{\bar{r}_N \bar{h}_N^3}{\bar{\mu}_N} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right)_N - \frac{\bar{r}_P \bar{h}_P^3}{\bar{\mu}_P} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right)_P \right] \quad (2.99a)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{\bar{r} \bar{h}^3}{12 \bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right) \right]_s = \frac{1}{12 \Delta \bar{r}} \left[\frac{\bar{r}_P \bar{h}_P^3}{\bar{\mu}_P} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right)_P - \frac{\bar{r}_S \bar{h}_S^3}{\bar{\mu}_S} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right)_S \right] \quad (2.99b)$$

Assim, substituindo as relações obtidas em Eq. (2.98) e Eq. (2.99) na Eq. (2.96), obtém-se:

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\bar{h}^3}{12 \bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right) \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} = (\bar{T}_n - \bar{T}_s) \frac{\Delta \bar{\theta}}{12} \left[\frac{\bar{r}_P \bar{h}_P^3}{\bar{\mu}_P} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right)_P \right] \quad (2.100)$$

A mesma metodologia é utilizada para realizar a manipulação algébrica do termo *B*.

Termo *B*:

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\bar{h}^3}{12 \theta_0^2 \bar{\mu} \bar{r}^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\theta}} \right) \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} - \int_s^n \int_w^e \frac{\bar{h}}{2 \theta_0} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\theta}} \right) \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\theta_0^2} \int_s^n \frac{1}{\bar{r}} \left[\frac{\bar{h}^3}{12 \bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \bar{T} \right]_w^e d\bar{r} - \frac{1}{\theta_0^2} \int_s^n \frac{1}{\bar{r}} \int_w^e \bar{T} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \left(\frac{\bar{h}^3}{12 \bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right) d\bar{\theta} d\bar{r} + \\ & - \frac{1}{2 \theta_0} \int_s^n \bar{r} [\bar{h} \bar{T}]_w^e d\bar{r} + \frac{1}{2 \theta_0} \int_s^n \bar{r} \int_w^e \bar{T} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\theta}} d\bar{\theta} d\bar{r} \end{aligned} \quad (2.102)$$

Analisando separadamente o primeiro termo da Eq. (2.102), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta_0^2} \int_s^n \frac{1}{\bar{r}} \left[\frac{\bar{h}^3}{12 \bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \bar{T} \right]_w^e d\bar{r} &= \frac{1}{\theta_0^2} \int_s^n \frac{1}{\bar{r}} \left[\frac{\bar{h}_e^3}{12 \bar{\mu}_e} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right)_e \bar{T}_e - \frac{\bar{h}_w^3}{12 \bar{\mu}_w} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right)_w \bar{T}_w \right] d\bar{r} = \\ & \frac{1}{24 \theta_0^2} \left[\frac{\bar{h}_E^3}{\bar{\mu}_E} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right)_E + \frac{\bar{h}_P^3}{\bar{\mu}_P} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right)_P \right] \bar{T}_e \int_s^n \frac{1}{\bar{r}} d\bar{r} + \\ & - \frac{1}{24 \theta_0^2} \left[\frac{\bar{h}_P^3}{\bar{\mu}_P} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right)_P + \frac{\bar{h}_W^3}{\bar{\mu}_W} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right)_W \right] \bar{T}_w \int_s^n \frac{1}{\bar{r}} d\bar{r} \end{aligned} \quad (2.103)$$

Analisando separadamente o segundo termo da Eq. (2.102), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\theta_0^2} \int_s^n \frac{1}{\bar{r}} \int_w^e \bar{T} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \left(\frac{\bar{h}^3}{12\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right) d\bar{\theta} d\bar{r} = \\
 & \frac{\Delta \bar{\theta}}{2\theta_0^2} \int_s^n \frac{1}{\bar{r}} \bar{T}_e \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \left(\frac{\bar{h}^3}{12\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right) \right]_e d\bar{r} + \frac{\Delta \bar{\theta}}{2\theta_0^2} \int_s^n \frac{1}{\bar{r}} \bar{T}_w \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \left(\frac{\bar{h}^3}{12\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right) \right]_w d\bar{r} = \\
 & \frac{1}{24\theta_0^2} \left[\frac{\bar{h}_E^3}{\bar{\mu}_E} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right)_E - \frac{\bar{h}_P^3}{\bar{\mu}_P} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right)_P \right] \bar{T}_e \int_s^n \frac{1}{\bar{r}} d\bar{r} + \\
 & \frac{1}{24\theta_0^2} \left[\frac{\bar{h}_P^3}{\bar{\mu}_P} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right)_P - \frac{\bar{h}_W^3}{\bar{\mu}_W} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right)_W \right] \bar{T}_w \int_s^n \frac{1}{\bar{r}} d\bar{r}
 \end{aligned} \quad (2.104)$$

A integral presente na Eq. (2.103) e Eq. (2.104) pode ser simplificada com boa aproximação da seguinte forma:

$$\int_s^n \frac{1}{\bar{r}} d\bar{r} \approx \frac{\Delta \bar{r}}{\bar{r}} \quad (2.105)$$

Desta forma, substituindo a Eq. (2.105) nas Eqs. (2.103)-(2.104), obtém-se que:

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\bar{h}^3}{12\theta_0^2 \bar{\mu} \bar{r}^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\theta}} \right) \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} = (\bar{T}_e - \bar{T}_w) \frac{\Delta \bar{r}}{12\theta_0^2} \left[\frac{\bar{h}_P^3}{\bar{r}_P \bar{\mu}_P} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right)_P \right] \quad (2.106)$$

Utilizando o mesmo procedimento para o terceiro e quarto termos da Eq. (2.102), obtém-se que:

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\bar{h}}{2\theta_0} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\theta}} \right) \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} = (\bar{T}_e - \bar{T}_w) \frac{\Delta \bar{r}}{2\theta_0} \bar{h}_P \bar{r}_P \quad (2.107)$$

Assim, utilizando-se das relações obtidas na Eq. (2.106) e Eq. (2.107), a equação final para o termo B torna-se:

$$\begin{aligned}
 & \int_s^n \int_w^e \frac{\bar{h}^3}{12\theta_0^2 \bar{\mu} \bar{r}^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\theta}} \right) \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} - \int_s^n \int_w^e \frac{\bar{h}}{2\theta_0} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\theta}} \right) \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} = \\
 & (\bar{T}_e - \bar{T}_w) \frac{\Delta \bar{r}}{12\theta_0^2} \left[\frac{\bar{h}_P^3}{\bar{r}_P \bar{\mu}_P} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right)_P \right] - (\bar{T}_e - \bar{T}_w) \frac{\Delta \bar{r}}{2\theta_0} \bar{h}_P \bar{r}_P
 \end{aligned} \quad (2.108)$$

Termo C:

$$\int_s^n \int_w^e \left[\bar{V}_{inj} + \frac{k_t}{\rho c_p \Omega h_{pivot}^2 \bar{l}_f} \sigma_1 \right] \bar{T} \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} = \bar{r} \Delta \bar{r} \Delta \bar{\theta} \left[\bar{V}_{inj} + \frac{k_t}{\rho c_p \Omega h_{pivot}^2 \bar{l}_f} \sigma_1 \right] \bar{T}_P \quad (2.109)$$

Termo D:

$$\int_s^n \int_w^e \left[\frac{\bar{h}}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right) \right] \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} = \bar{h}_P \Delta \bar{\theta} \left[\bar{r}_n \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right)_n - \bar{r}_s \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right)_s \right] \quad (2.110)$$

Termo E:

$$\int_s^n \int_w^e \left[\frac{\bar{h}}{\theta_0^2 \bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{\theta}^2} \right] \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} = \frac{\Delta \bar{r} \bar{h}_P}{\theta_0^2 \bar{r}_P} \left[\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\theta}} \right)_e - \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\theta}} \right)_w \right] \quad (2.111)$$

Termo F:

$$\int_s^n \int_w^e \left[\bar{V}_{inj} + \frac{k_t}{\rho c_p \Omega h_{pivot}^2 \bar{l}_f} \sigma_1 \right] \bar{T}_{inj} \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} = \bar{r} \Delta \bar{r} \Delta \bar{\theta} \left[\bar{V}_{inj} + \frac{k_t}{\rho c_p \Omega h_{pivot}^2 \bar{l}_f} \sigma_1 \right] \bar{T}_{inj} \quad (2.112)$$

Termo G:

$$\int_s^n \int_w^e \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} - \bar{V}_{inj} \right) \bar{p} \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} = \bar{r} \Delta \bar{r} \Delta \bar{\theta} \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} - \bar{V}_{inj} \right) \bar{P}_P \quad (2.113)$$

Termo H:

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\bar{h}^3}{12 \theta_0^2 \bar{\mu} \bar{r}^2} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right)^2 \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} = \frac{\Delta \bar{r} \Delta \bar{\theta}}{12 \theta_0^2} \left(\frac{\bar{h}_P^3}{\bar{\mu}_P \bar{r}_P} \right) \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right)_P^2 \quad (2.114)$$

Termo I:

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\bar{\mu} \bar{r}^2}{\bar{h}} \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} = \frac{\bar{\mu}_P \bar{r}_P^3}{\bar{h}_P} \Delta \bar{r} \Delta \bar{\theta} \quad (2.115)$$

Termo J:

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\bar{h}^3}{12 \bar{\mu}} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right)^2 \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} = \frac{\Delta \bar{r} \Delta \bar{\theta}}{12} \left(\frac{\bar{r}_P \bar{h}_P^3}{\bar{\mu}_P} \right) \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right)_P^2 \quad (2.116)$$

Termo K:

$$\int_s^n \int_w^e \frac{2 \bar{\mu}}{\bar{h}} \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} - \bar{V}_{inj} \right)^2 \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} = 2 \Delta \bar{r} \Delta \bar{\theta} \left(\frac{\bar{r}_P \bar{\mu}_P}{\bar{h}_P} \right) \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} - \bar{V}_{inj} \right)_P^2 \quad (2.117)$$

Para solucionar os problemas de convergência numérica provenientes da discretização dos termos advectivos utiliza-se um método de interpolação *Upwind* para os termos advectivos na direção circunferencial (W-E) e o *Método das diferenças centra-*

das para os demais termos. Assim, obtém-se:

$$\bar{T}_e = \bar{T}_P, \bar{T}_w = \bar{T}_W \quad (2.118a)$$

$$\bar{T}_n = \frac{\bar{T}_N + \bar{T}_P}{2}, \bar{T}_s = \frac{\bar{T}_S + \bar{T}_P}{2} \quad (2.118b)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\theta}}\right)_e = \frac{\bar{T}_E - \bar{T}_P}{\Delta \bar{\theta}}, \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\theta}}\right)_w = \frac{\bar{T}_P - \bar{T}_W}{\Delta \bar{\theta}} \quad (2.118c)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\theta}}\right)_s = \frac{\bar{T}_P - \bar{T}_S}{\Delta \bar{r}}, \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}}\right)_n = \frac{\bar{T}_N - \bar{T}_P}{\Delta \bar{r}} \quad (2.118d)$$

Assim, utilizando as relações expressas na Eq. (2.118) nos termos de A a K , quando aplicáveis, a Eq. (2.94) pode ser escrita como:

$$C_P \bar{T}_P + C_E \bar{T}_E + C_W \bar{T}_W + C_N \bar{T}_N + C_S \bar{T}_S = B_P \quad (2.119)$$

onde,

$$C_S = C_{S1} + C_{S2} \quad (2.120)$$

$$C_N = C_{N1} + C_{N2} \quad (2.121)$$

$$C_W = C_{W1} + C_{W2} \quad (2.122)$$

$$C_P = C_{P1} + C_{P2} + C_{P3} + C_{P4} + C_{P5} \quad (2.123)$$

$$B_P = B_{P1} + \frac{\Omega \mu_0 r_1^2}{\rho c_p h_{pivot}^2 T_0} (B_{P2} + B_{P3} + B_{P4} + B_{P5}) + \frac{\mu_0 \Omega}{\rho c_p T_0} (B_{P6}) \quad (2.124)$$

sendo,

$$C_{N1} = \frac{\Delta \bar{\theta}}{24} \left[\frac{\bar{r}_P \bar{h}_P^3}{\bar{\mu}_P} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right)_P \right] \quad (2.125)$$

$$C_{S1} = -\frac{\Delta \bar{\theta}}{24} \left[\frac{\bar{r}_P \bar{h}_P^3}{\bar{\mu}_P} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right)_P \right] \quad (2.126)$$

$$C_{N2} = \frac{k_t}{\rho c_p \Omega r_1^2} \frac{\bar{r}_n \bar{h}_P \Delta \bar{\theta}}{\Delta \bar{r}} \quad (2.127)$$

$$C_{S2} = \frac{k_t}{\rho c_p \Omega r_1^2} \frac{\bar{r}_s \bar{h}_P \Delta \bar{\theta}}{\Delta \bar{r}} \quad (2.128)$$

$$C_{W1} = -\frac{\Delta \bar{r}}{12 \theta_0^2} \left[\frac{\bar{h}_P^3}{\bar{r}_P \bar{\mu}_P} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right)_P \right] + \frac{\Delta \bar{r}}{2 \theta_0} \bar{h}_P \bar{r}_P \quad (2.129)$$

$$C_{E1} = 0 \quad (2.130)$$

$$C_{E2} = \frac{k_t}{\rho c_p \Omega r_1^2} \frac{\Delta \bar{r}}{\theta_0^2 \Delta \bar{\theta}} \frac{\bar{h}_P}{\bar{r}_P} \quad (2.131)$$

$$C_{W2} = C_{E2} \quad (2.132)$$

$$C_{P1} = -(C_{N1} + C_{S1}) \quad (2.133)$$

$$C_{P2} = -(C_{E1} + C_{W1}) \quad (2.134)$$

$$C_{P3} = -\bar{r} \Delta \bar{r} \Delta \bar{\theta} \left[\bar{V}_{inj} + \frac{k_t}{\rho c_p \Omega h_{pivot}^2 \bar{l}_f} \sigma_1 \right] \quad (2.135)$$

$$C_{P4} = -(C_{N2} + C_{S2}) \quad (2.136)$$

$$C_{P5} = -(C_{E2} + C_{W2}) \quad (2.137)$$

$$B_{P1} = -\bar{r} \Delta \bar{r} \Delta \bar{\theta} \left[\bar{V}_{inj} + \frac{k_t}{\rho c_p \Omega h_{pivot}^2 \bar{l}_f} \sigma_1 \right] \bar{T}_{inj} \quad (2.138)$$

$$B_{P2} = \bar{r} \Delta \bar{r} \Delta \bar{\theta} \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} - \bar{V}_{inj} \right) \bar{P}_P \quad (2.139)$$

$$B_{P3} = -\frac{\Delta \bar{r} \Delta \bar{\theta}}{12 \theta_0^2} \left(\frac{\bar{h}_P^3}{\bar{\mu}_P \bar{r}_P} \right) \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right)_P^2 \quad (2.140)$$

$$B_{P4} = -\frac{\bar{\mu}_P \bar{r}_P^3}{\bar{h}_P} \Delta \bar{r} \Delta \bar{\theta} \quad (2.141)$$

$$B_{P5} = -\frac{\Delta \bar{r} \Delta \bar{\theta}}{12} \left(\frac{\bar{r}_P \bar{h}_P^3}{\bar{\mu}_P} \right) \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right)_P^2 \quad (2.142)$$

$$B_{P6} = -2 \Delta \bar{r} \Delta \bar{\theta} \left(\frac{\bar{r}_P \bar{\mu}_P}{\bar{h}_P} \right) \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} - \bar{V}_{inj} \right)_P^2 \quad (2.143)$$

A Equação (2.119) é válida para cada um dos volumes de controle que compõem a malha discretizada mostrada na Fig. 2.4.

$$C_P \bar{T}_{i,j} + C_E \bar{T}_{i,j+1} + C_W \bar{T}_{i,j-1} + C_S \bar{T}_{i-1,j} + C_N \bar{T}_{i+1,j} = B_{P_{i,j}} \quad (2.144)$$

sendo $1 \leq i \leq N_r$ e $1 \leq j \leq N_\theta$, onde N_θ e N_r são os números de volumes nas direções circunferencial e radial, respectivamente. Aplicando a técnica de vetorização, a Eq. (2.144) pode ser escrita sobre a forma:

$$\{\bar{T}\}_{(k,1)} = [C]_{(k,k)}^{-1} \{B_P\}_{(k,1)} \quad (2.145)$$

onde $k = 1, \dots, N_\theta \cdot N_r$. Para a solução da Eq. (2.145) utiliza-se como condição de contorno a hipótese adiabática para as bordas do segmento.

2.3.3 MFV aplicado às equações de perturbação

Para resolver as Eqs. (2.47)-(2.49) utiliza-se novamente o MVF. A Equação (2.146) apresenta a equação genérica para qualquer valor de γ .

$$\frac{1}{12r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{rh_0^3}{\mu} \frac{\partial p_\gamma}{\partial r} + \frac{3rh_0^2 h_\gamma}{\mu} \frac{\partial p_0}{\partial r} \right] + \frac{1}{12r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{h_0^3}{\mu} \frac{\partial p_\gamma}{\partial \theta} + \frac{3h_0^2 h_\gamma}{\mu} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \right] = \frac{\Omega}{2} \frac{\partial h_\gamma}{\partial \theta} + h_\gamma i\omega_p + \sigma_1 p_\gamma \quad (2.146)$$

Deste modo, para $\gamma = h_{pivot}$ e aplicando as técnicas de adimensionalização, tem-se:

$$\underbrace{\frac{1}{12\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[\frac{\bar{r}\bar{h}_0^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}_{hpi}}{\partial \bar{r}} + \frac{3\bar{r}\bar{h}_0^2}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{r}} \right]}_A + \underbrace{\frac{1}{12\theta_0^2 \bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \left[\frac{\bar{h}_0^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}_{hpi}}{\partial \bar{\theta}} + \frac{3\bar{h}_0^2}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{\theta}} \right]}_B = \underbrace{i\bar{\omega}_p}_C \quad (2.147)$$

onde,

$$\bar{p}_{hpi} = \frac{p_{hpi} h_{pivot}^3}{\mu_0 r_1^2 \Omega} \quad (2.148)$$

Aplicando o MFV na Eq. (2.147), obtém-se:

Termo A:

$$\begin{aligned} & \int_w^e \int_s^n \frac{1}{12\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[\frac{\bar{r}\bar{h}_0^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}_{hpi}}{\partial \bar{r}} + \frac{3\bar{r}\bar{h}_0^2}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{r}} \right] \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} = \\ & \frac{1}{12} \left[\frac{\bar{r}_n}{\bar{\mu}_n} \left(\frac{\partial \bar{p}_{hpi}}{\partial \bar{r}} \right)_n \int_{\bar{\theta}_w}^{\bar{\theta}_e} \bar{h}_{0n}^3 d\bar{\theta} - \frac{\bar{r}_s}{\bar{\mu}_s} \left(\frac{\partial \bar{p}_{hpi}}{\partial \bar{r}} \right)_s \int_{\bar{\theta}_w}^{\bar{\theta}_e} \bar{h}_{0s}^3 d\bar{\theta} \right] + \\ & + \frac{1}{4} \left[\frac{\bar{r}_n}{\bar{\mu}_n} \left(\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{r}} \right)_n \int_{\bar{\theta}_w}^{\bar{\theta}_e} \bar{h}_{0n}^2 d\bar{\theta} - \frac{\bar{r}_s}{\bar{\mu}_s} \left(\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{r}} \right)_s \int_{\bar{\theta}_w}^{\bar{\theta}_e} \bar{h}_{0s}^2 d\bar{\theta} \right] = \\ & \frac{\Delta \bar{\theta}}{24} \left\{ \frac{\bar{r}_n}{\bar{\mu}_n} \left(\frac{\partial \bar{p}_{hpi}}{\partial \bar{r}} \right)_n [\bar{h}_0^3(\bar{r}_n, \bar{\theta}_e) + \bar{h}_0^3(\bar{r}_n, \bar{\theta}_w)] - \frac{\bar{r}_s}{\bar{\mu}_s} \left(\frac{\partial \bar{p}_{hpi}}{\partial \bar{r}} \right)_s [\bar{h}_0^3(\bar{r}_s, \bar{\theta}_e) + \bar{h}_0^3(\bar{r}_s, \bar{\theta}_w)] \right\} + \\ & + \frac{\Delta \bar{\theta}}{8} \left\{ \frac{\bar{r}_n}{\bar{\mu}_n} \left(\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{r}} \right)_n [\bar{h}_0^2(\bar{r}_n, \bar{\theta}_e) + \bar{h}_0^2(\bar{r}_n, \bar{\theta}_w)] - \frac{\bar{r}_s}{\bar{\mu}_s} \left(\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{r}} \right)_s [\bar{h}_0^2(\bar{r}_s, \bar{\theta}_e) + \bar{h}_0^2(\bar{r}_s, \bar{\theta}_w)] \right\} \end{aligned} \quad (2.149)$$

Termo B:

$$\begin{aligned}
 & \int_w^e \int_s^w \frac{1}{12\theta_0^2 \bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \left[\frac{\bar{h}_0^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}_{hpi}}{\partial \bar{\theta}} + \frac{3\bar{h}_0^2}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{\theta}} \right] \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} = \\
 & \frac{1}{12\theta_0^2} \left[\frac{1}{\bar{\mu}_e} \left(\frac{\partial \bar{p}_{hpi}}{\partial \bar{\theta}} \right)_e \int_{\bar{r}_s}^{\bar{r}_n} \frac{1}{\bar{r}} \bar{h}_{0e}^3 d\bar{r} - \frac{1}{\bar{\mu}_w} \left(\frac{\partial \bar{p}_{hpi}}{\partial \bar{\theta}} \right)_w \int_{\bar{r}_s}^{\bar{r}_n} \frac{1}{\bar{r}} \bar{h}_{0w}^3 d\bar{r} \right] + \\
 & + \frac{1}{4\theta_0^2} \left[\frac{1}{\bar{\mu}_e} \left(\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{\theta}} \right)_e \int_{\bar{r}_s}^{\bar{r}_n} \frac{1}{\bar{r}} \bar{h}_{0e}^2 d\bar{r} - \frac{1}{\bar{\mu}_w} \left(\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{\theta}} \right)_w \int_{\bar{r}_s}^{\bar{r}_n} \frac{1}{\bar{r}} \bar{h}_{0w}^2 d\bar{r} \right] = \\
 & \frac{\Delta \bar{r}}{24\theta_0^2} \left\{ \frac{1}{\bar{\mu}_e} \left(\frac{\partial \bar{p}_{hpi}}{\partial \bar{\theta}} \right)_e \left[\frac{\bar{h}_0^3(\bar{r}_n, \bar{\theta}_e)}{\bar{r}_n} + \frac{\bar{h}_0^3(\bar{r}_s, \bar{\theta}_e)}{\bar{r}_s} \right] - \frac{1}{\bar{\mu}_w} \left(\frac{\partial \bar{p}_{hpi}}{\partial \bar{\theta}} \right)_w \left[\frac{\bar{h}_0^3(\bar{r}_n, \bar{\theta}_w)}{\bar{r}_n} + \frac{\bar{h}_0^3(\bar{r}_s, \bar{\theta}_w)}{\bar{r}_s} \right] \right\} + \\
 & + \frac{\Delta \bar{r}}{8\theta_0^2} \left\{ \frac{1}{\bar{\mu}_e} \left(\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{\theta}} \right)_e \left[\frac{\bar{h}_0^2(\bar{r}_n, \bar{\theta}_e)}{\bar{r}_n} + \frac{\bar{h}_0^2(\bar{r}_s, \bar{\theta}_e)}{\bar{r}_s} \right] - \frac{1}{\bar{\mu}_w} \left(\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{\theta}} \right)_w \left[\frac{\bar{h}_0^2(\bar{r}_n, \bar{\theta}_w)}{\bar{r}_n} + \frac{\bar{h}_0^2(\bar{r}_s, \bar{\theta}_w)}{\bar{r}_s} \right] \right\} \\
 & \hspace{15em} (2.150)
 \end{aligned}$$

Termo C:

$$\int_w^e \int_s^w i\bar{\omega}_p \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} = i\bar{\omega}_p \bar{r} \Delta \bar{r} \Delta \bar{\theta} \quad (2.151)$$

Aplicando novamente o método de diferenças à montante e organizando os termos das equações, obtém-se:

$$C_N = \frac{\bar{r}_n}{24\bar{\mu}_n} \frac{\Delta \bar{\theta}}{\Delta \bar{r}} \left[\bar{h}_0^3(\bar{r}_n, \bar{\theta}_e) + \bar{h}_0^3(\bar{r}_n, \bar{\theta}_w) \right] \quad (2.152a)$$

$$C_S = \frac{\bar{r}_s}{24\bar{\mu}_s} \frac{\Delta \bar{\theta}}{\Delta \bar{r}} \left[\bar{h}_0^3(\bar{r}_s, \bar{\theta}_e) + \bar{h}_0^3(\bar{r}_s, \bar{\theta}_w) \right] \quad (2.152b)$$

$$C_E = \frac{1}{24\theta_0^2 \bar{\mu}_e} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta \bar{\theta}} \left[\frac{\bar{h}_0^3(\bar{r}_n, \bar{\theta}_e)}{\bar{r}_n} + \frac{\bar{h}_0^3(\bar{r}_s, \bar{\theta}_e)}{\bar{r}_s} \right] \quad (2.152c)$$

$$C_W = \frac{1}{24\theta_0^2 \bar{\mu}_w} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta \bar{\theta}} \left[\frac{\bar{h}_0^3(\bar{r}_n, \bar{\theta}_w)}{\bar{r}_n} + \frac{\bar{h}_0^3(\bar{r}_s, \bar{\theta}_w)}{\bar{r}_s} \right] \quad (2.152d)$$

$$C_P = -(C_N + C_S + C_E + C_W) \quad (2.152e)$$

$$B_{hpi} = -B_{hpi1} - B_{hpi2} + B_{hpi3} \quad (2.152f)$$

onde,

$$\begin{aligned}
 B_{hpi1} &= \frac{\bar{r}_n \Delta \bar{\theta}}{8 \bar{\mu}_n} \left(\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{r}} \right)_n [\bar{h}_0^2(\bar{r}_n, \bar{\theta}_e) + \bar{h}_0^2(\bar{r}_n, \bar{\theta}_w)] + \\
 &- \frac{\bar{r}_s \Delta \bar{\theta}}{8 \bar{\mu}_s} \left(\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{r}} \right)_s [\bar{h}_0^2(\bar{r}_s, \bar{\theta}_e) + \bar{h}_0^2(\bar{r}_s, \bar{\theta}_w)]
 \end{aligned} \tag{2.153}$$

$$\begin{aligned}
 B_{hpi2} &= \frac{\Delta \bar{r}}{8 \theta_0^2 \bar{\mu}_e} \left(\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{\theta}} \right)_e \left[\frac{\bar{h}_0^2(\bar{r}_n, \bar{\theta}_e)}{\bar{r}_n} + \frac{\bar{h}_0^2(\bar{r}_s, \bar{\theta}_e)}{\bar{r}_s} \right] + \\
 &- \frac{\Delta \bar{r}}{8 \theta_0^2 \bar{\mu}_w} \left(\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{\theta}} \right)_w \left[\frac{\bar{h}_0^2(\bar{r}_n, \bar{\theta}_w)}{\bar{r}_n} + \frac{\bar{h}_0^2(\bar{r}_s, \bar{\theta}_w)}{\bar{r}_s} \right]
 \end{aligned} \tag{2.154}$$

$$B_{hpi3} = i \bar{\omega}_p \bar{r} \Delta \bar{r} \Delta \bar{\theta} \tag{2.155}$$

Assim, a Eq. (2.147) torna-se:

$$C_P \bar{P}_{hpiP} + C_E \bar{P}_{hpiE} + C_W \bar{P}_{hpiW} + C_S \bar{P}_{hpiS} + C_N \bar{P}_{hpiN} = B_{hpiP} \tag{2.156}$$

Para $\gamma = \alpha_s$ e $\gamma = \alpha_r$ a metodologia é semelhante. Portanto, adota-se $h_\gamma = h_\alpha$ e $p_\gamma = p_\alpha$ para ambos. Substituindo essas relações na Eq. (2.146) e aplicando as técnicas de adimensionalização, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 &\underbrace{\frac{1}{12 \bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[\frac{\bar{r} \bar{h}_0^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}_\alpha}{\partial \bar{r}} \right]}_A + \underbrace{\frac{1}{12 \bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[\frac{3 \bar{r} \bar{h}_0^2 \bar{h}_\alpha}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{r}} \right]}_B + \underbrace{\frac{1}{12 \theta_0^2 \bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \left[\frac{\bar{h}_0^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}_\alpha}{\partial \bar{\theta}} \right]}_C + \\
 &\quad + \underbrace{\frac{1}{12 \theta_0^2 \bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \left[\frac{3 \bar{h}_0^2 \bar{h}_\alpha}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{\theta}} \right]}_D = \underbrace{\frac{1}{2 \theta_0} \frac{\partial \bar{h}_\alpha}{\partial \bar{\theta}}}_E + \underbrace{i \bar{h}_\alpha \bar{\omega}_p}_F
 \end{aligned} \tag{2.157}$$

na qual,

$$\bar{h}_\alpha = \frac{h_\alpha}{r_1}, \bar{p}_\alpha = \frac{p_\alpha h_{pivot}^3}{\mu_0 r_1^3 \Omega} \tag{2.158}$$

Aplicando o MVF em cada um dos termos da Eq. (2.157), obtém-se:

Termo A:

$$\begin{aligned}
 & \int_w^e \int_s^n \frac{1}{12\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[\frac{\bar{r}\bar{h}_0^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}_\alpha}{\partial \bar{r}} \right] \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} = \\
 & \frac{1}{12} \left[\frac{\bar{r}_n}{\bar{\mu}_n} \left(\frac{\partial \bar{p}_\alpha}{\partial \bar{r}} \right)_n \int_{\bar{\theta}_w}^{\bar{\theta}_e} \bar{h}_{0n}^3 d\bar{\theta} - \frac{\bar{r}_s}{\bar{\mu}_s} \left(\frac{\partial \bar{p}_\alpha}{\partial \bar{r}} \right)_s \int_{\bar{\theta}_w}^{\bar{\theta}_e} \bar{h}_{0s}^3 d\bar{\theta} \right] = \\
 & \frac{\Delta \bar{\theta}}{24} \left\{ \frac{\bar{r}_n}{\bar{\mu}_n} \left(\frac{\partial \bar{p}_\alpha}{\partial \bar{r}} \right)_n [\bar{h}_0^3(\bar{r}_n, \bar{\theta}_e) + \bar{h}_0^3(\bar{r}_n, \bar{\theta}_w)] - \frac{\bar{r}_s}{\bar{\mu}_s} \left(\frac{\partial \bar{p}_\alpha}{\partial \bar{r}} \right)_s [\bar{h}_0^3(\bar{r}_s, \bar{\theta}_e) + \bar{h}_0^3(\bar{r}_s, \bar{\theta}_w)] \right\}
 \end{aligned} \tag{2.159}$$

Termo B:

$$\begin{aligned}
 & \int_w^e \int_s^n \frac{1}{12\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[\frac{3\bar{r}\bar{h}_0^2\bar{h}_\alpha}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{r}} \right] \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} = \\
 & \frac{1}{4} \left[\frac{\bar{r}_n}{\bar{\mu}_n} \left(\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{r}} \right)_n \int_{\bar{\theta}_w}^{\bar{\theta}_e} (\bar{h}_\alpha)_n \bar{h}_{0n}^2 d\bar{\theta} \right] - \frac{1}{4} \left[\frac{\bar{r}_s}{\bar{\mu}_s} \left(\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{r}} \right)_s \int_{\bar{\theta}_w}^{\bar{\theta}_e} (\bar{h}_\alpha)_s \bar{h}_{0s}^2 d\bar{\theta} \right] = \\
 & \frac{\Delta \bar{\theta}}{8} \left\{ \frac{\bar{r}_n}{\bar{\mu}_n} \left(\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{r}} \right)_n [\bar{h}_\alpha(\bar{r}_n, \bar{\theta}_e) \bar{h}_0^2(\bar{r}_n, \bar{\theta}_e) + \bar{h}_\alpha(\bar{r}_n, \bar{\theta}_w) \bar{h}_0^2(\bar{r}_n, \bar{\theta}_w)] \right\} + \\
 & - \frac{\Delta \bar{\theta}}{8} \left\{ \frac{\bar{r}_s}{\bar{\mu}_s} \left(\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{r}} \right)_s [\bar{h}_\alpha(\bar{r}_s, \bar{\theta}_e) \bar{h}_0^2(\bar{r}_s, \bar{\theta}_e) + \bar{h}_\alpha(\bar{r}_s, \bar{\theta}_w) \bar{h}_0^2(\bar{r}_s, \bar{\theta}_w)] \right\}
 \end{aligned} \tag{2.160}$$

Termo C:

$$\begin{aligned}
 & \int_w^e \int_s^n \frac{1}{12\theta_0^2\bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \left[\frac{\bar{h}_0^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}_\alpha}{\partial \bar{\theta}} \right] \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} = \\
 & \frac{1}{12\theta_0^2} \left[\frac{1}{\bar{\mu}_e} \left(\frac{\partial \bar{p}_\alpha}{\partial \bar{\theta}} \right)_e \int_{\bar{r}_s}^{\bar{r}_n} \frac{\bar{h}_{0e}^3}{\bar{r}} d\bar{r} - \frac{1}{\bar{\mu}_w} \left(\frac{\partial \bar{p}_\alpha}{\partial \bar{\theta}} \right)_w \int_{\bar{r}_s}^{\bar{r}_n} \frac{\bar{h}_{0w}^3}{\bar{r}} d\bar{r} \right] = \\
 & \frac{\Delta \bar{r}}{24\theta_0^2} \left\{ \frac{1}{\bar{\mu}_e} \left(\frac{\partial \bar{p}_\alpha}{\partial \bar{\theta}} \right)_e \left[\frac{\bar{h}_0^3(\bar{r}_n, \bar{\theta}_e)}{\bar{r}_n} + \frac{\bar{h}_0^3(\bar{r}_s, \bar{\theta}_e)}{\bar{r}_s} \right] - \frac{1}{\bar{\mu}_w} \left(\frac{\partial \bar{p}_\alpha}{\partial \bar{\theta}} \right)_w \left[\frac{\bar{h}_0^3(\bar{r}_n, \bar{\theta}_w)}{\bar{r}_n} + \frac{\bar{h}_0^3(\bar{r}_s, \bar{\theta}_w)}{\bar{r}_s} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{2.161}$$

Termo *D*:

$$\begin{aligned}
 & \int_w^e \int_s^n \frac{1}{12\theta_0^2 \bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \left[\frac{3\bar{h}_0^2 \bar{h}_\alpha}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{\theta}} \right] \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} = \\
 & \frac{1}{4\theta_0^2} \left[\frac{1}{\bar{\mu}_e} \left(\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{\theta}} \right)_e \int_{\bar{r}_s}^{\bar{r}_n} \frac{\bar{h}_{0e}^2 (\bar{h}_\alpha)_e}{\bar{r}} d\bar{r} \right] - \frac{1}{4\theta_0^2} \left[\frac{1}{\bar{\mu}_w} \left(\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{\theta}} \right)_w \int_{\bar{r}_s}^{\bar{r}_n} \frac{\bar{h}_{0w}^3 (\bar{h}_\alpha)_w}{\bar{r}} d\bar{r} \right] = \\
 & \frac{\Delta \bar{r}}{8\theta_0^2} \left\{ \frac{1}{\bar{\mu}_e} \left(\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{\theta}} \right)_e \left[\frac{\bar{h}_0^2 (\bar{r}_n, \bar{\theta}_e) \bar{h}_\alpha (\bar{r}_n, \bar{\theta}_e)}{\bar{r}_n} + \frac{\bar{h}_0^2 (\bar{r}_s, \bar{\theta}_e) \bar{h}_\alpha (\bar{r}_s, \bar{\theta}_e)}{\bar{r}_s} \right] \right\} + \\
 & - \frac{\Delta \bar{r}}{8\theta_0^2} \left\{ \frac{1}{\bar{\mu}_w} \left(\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{\theta}} \right)_w \left[\frac{\bar{h}_0^2 (\bar{r}_n, \bar{\theta}_w) \bar{h}_\alpha (\bar{r}_n, \bar{\theta}_w)}{\bar{r}_n} + \frac{\bar{h}_0^2 (\bar{r}_s, \bar{\theta}_w) \bar{h}_\alpha (\bar{r}_s, \bar{\theta}_w)}{\bar{r}_s} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{2.162}$$

Termo *E*:

$$\begin{aligned}
 & \int_w^e \int_s^n \frac{1}{2\theta_0} \frac{\partial \bar{h}_\alpha}{\partial \bar{\theta}} \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} \\
 & \frac{1}{2\theta_0} \left[\int_{\bar{r}_s}^{\bar{r}_n} \bar{r} (\bar{h}_\alpha)_e d\bar{r} - \int_{\bar{r}_s}^{\bar{r}_n} \bar{r} (\bar{h}_\alpha)_w d\bar{r} \right] \\
 & \frac{\Delta \bar{r}}{4\theta_0} [\bar{r}_n \bar{h}_\alpha (\bar{r}_n, \bar{\theta}_e) + \bar{r}_s \bar{h}_\alpha (\bar{r}_s, \bar{\theta}_e) - \bar{r}_n \bar{h}_\alpha (\bar{r}_n, \bar{\theta}_w) - \bar{r}_s \bar{h}_\alpha (\bar{r}_s, \bar{\theta}_w)]
 \end{aligned} \tag{2.163}$$

Termo *F*:

$$\begin{aligned}
 & \int_w^e \int_s^n i \bar{h}_\alpha \bar{\omega}_p \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} \\
 & \frac{i \bar{\omega}_p \Delta \bar{r} \Delta \bar{\theta}}{4} [\bar{r}_n \bar{h}_\alpha (\bar{r}_n, \bar{\theta}_e) + \bar{r}_n \bar{h}_\alpha (\bar{r}_n, \bar{\theta}_w) + \bar{r}_s \bar{h}_\alpha (\bar{r}_s, \bar{\theta}_e) + \bar{r}_s \bar{h}_\alpha (\bar{r}_s, \bar{\theta}_w)]
 \end{aligned} \tag{2.164}$$

A Eq. (2.157) pode ser escrita de acordo a Eq. (2.165):

$$C_P \bar{P}_{\alpha P} + C_E \bar{P}_{\alpha E} + C_W \bar{P}_{\alpha W} + C_S \bar{P}_{\alpha S} + C_N \bar{P}_{\alpha N} = B_{\alpha P} \tag{2.165}$$

na qual,

$$C_N = \frac{\bar{r}_n}{24\bar{\mu}_n} \frac{\Delta\bar{\theta}}{\Delta\bar{r}} [\bar{h}_0^3(\bar{r}_n, \bar{\theta}_e) + \bar{h}_0^3(\bar{r}_n, \bar{\theta}_w)] \quad (2.166a)$$

$$C_S = \frac{\bar{r}_s}{24\bar{\mu}_s} \frac{\Delta\bar{\theta}}{\Delta\bar{r}} [\bar{h}_0^3(\bar{r}_s, \bar{\theta}_e) + \bar{h}_0^3(\bar{r}_s, \bar{\theta}_w)] \quad (2.166b)$$

$$C_E = \frac{1}{24\theta_0^2\bar{\mu}_e} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta\bar{\theta}} \left[\frac{\bar{h}_0^3(\bar{r}_n, \bar{\theta}_e)}{\bar{r}_n} + \frac{\bar{h}_0^3(\bar{r}_s, \bar{\theta}_e)}{\bar{r}_s} \right] \quad (2.166c)$$

$$C_W = \frac{1}{24\theta_0^2\bar{\mu}_w} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta\bar{\theta}} \left[\frac{\bar{h}_0^3(\bar{r}_n, \bar{\theta}_w)}{\bar{r}_n} + \frac{\bar{h}_0^3(\bar{r}_s, \bar{\theta}_w)}{\bar{r}_s} \right] \quad (2.166d)$$

$$C_P = -(C_N + C_S + C_E + C_W) \quad (2.166e)$$

$$B_{\alpha P} = -B_{\alpha 1} - B_{\alpha 2} + B_{\alpha 3} + B_{\alpha 4} \quad (2.166f)$$

sendo,

$$B_{\alpha 1} = \frac{\Delta\bar{\theta}}{8} \left\{ \frac{\bar{r}_n}{\bar{\mu}_n} \left(\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{r}} \right)_n [\bar{h}_\alpha(\bar{r}_n, \bar{\theta}_e) \bar{h}_0^2(\bar{r}_n, \bar{\theta}_e) + \bar{h}_\alpha(\bar{r}_n, \bar{\theta}_w) \bar{h}_0^2(\bar{r}_n, \bar{\theta}_w)] \right\} +$$

$$- \frac{\Delta\bar{\theta}}{8} \left\{ \frac{\bar{r}_s}{\bar{\mu}_s} \left(\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{r}} \right)_s [\bar{h}_\alpha(\bar{r}_s, \bar{\theta}_e) \bar{h}_0^2(\bar{r}_s, \bar{\theta}_e) + \bar{h}_\alpha(\bar{r}_s, \bar{\theta}_w) \bar{h}_0^2(\bar{r}_s, \bar{\theta}_w)] \right\} \quad (2.167a)$$

$$B_{\alpha 2} = \frac{\Delta\bar{r}}{8\theta_0^2} \left\{ \frac{1}{\bar{\mu}_e} \left(\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{\theta}} \right)_e \left[\frac{\bar{h}_0^2(\bar{r}_n, \bar{\theta}_e) \bar{h}_\alpha(\bar{r}_n, \bar{\theta}_e)}{\bar{r}_n} + \frac{\bar{h}_0^2(\bar{r}_s, \bar{\theta}_e) \bar{h}_\alpha(\bar{r}_s, \bar{\theta}_e)}{\bar{r}_s} \right] \right\} +$$

$$- \frac{\Delta\bar{r}}{8\theta_0^2} \left\{ \frac{1}{\bar{\mu}_w} \left(\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{\theta}} \right)_w \left[\frac{\bar{h}_0^2(\bar{r}_n, \bar{\theta}_w) \bar{h}_\alpha(\bar{r}_n, \bar{\theta}_w)}{\bar{r}_n} + \frac{\bar{h}_0^2(\bar{r}_s, \bar{\theta}_w) \bar{h}_\alpha(\bar{r}_s, \bar{\theta}_w)}{\bar{r}_s} \right] \right\} \quad (2.167b)$$

$$B_{\alpha 3} = \frac{\Delta\bar{r}}{4\theta_0} [\bar{r}_n \bar{h}_\alpha(\bar{r}_n, \bar{\theta}_e) + \bar{r}_s \bar{h}_\alpha(\bar{r}_s, \bar{\theta}_e) - \bar{r}_n \bar{h}_\alpha(\bar{r}_n, \bar{\theta}_w) - \bar{r}_s \bar{h}_\alpha(\bar{r}_s, \bar{\theta}_w)] \quad (2.167c)$$

$$B_{\alpha 4} = \frac{i\bar{\omega}_p \Delta\bar{r} \Delta\bar{\theta}}{4} [\bar{r}_n \bar{h}_\alpha(\bar{r}_n, \bar{\theta}_e) + \bar{r}_n \bar{h}_\alpha(\bar{r}_n, \bar{\theta}_w) + \bar{r}_s \bar{h}_\alpha(\bar{r}_s, \bar{\theta}_e) + \bar{r}_s \bar{h}_\alpha(\bar{r}_s, \bar{\theta}_w)] \quad (2.167d)$$

A Figura 2.5 apresenta o fluxograma de cálculo dos coeficientes dinâmicos do mancal.

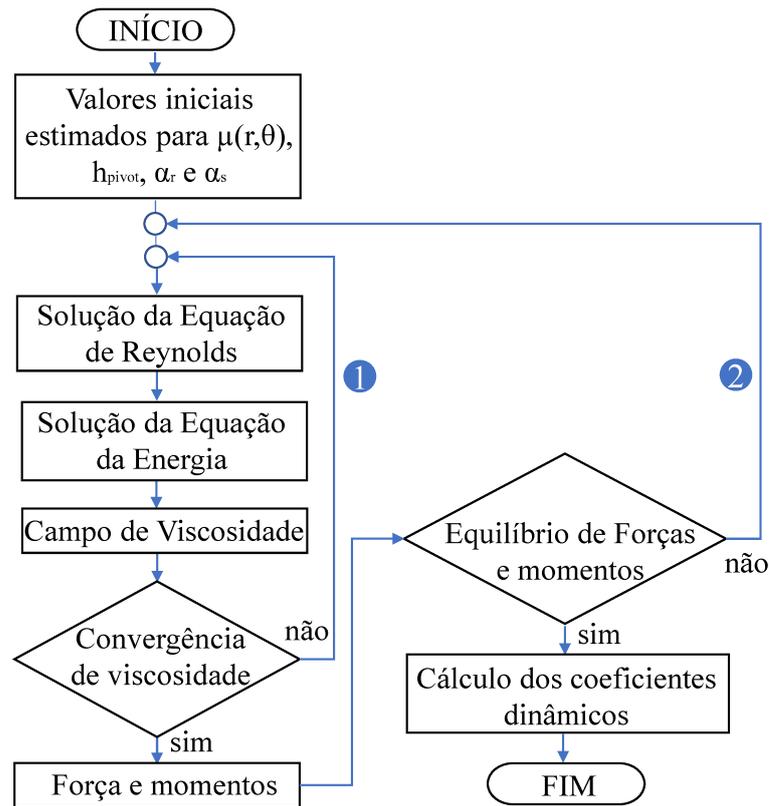


Figura 2.5: Procedimento de cálculo dos coeficientes dinâmicos do mancal.

As características geométricas do mancal e as condições de operação, isto é, a velocidade de rotação Ω , a carga estática axial F_z e a temperatura do banho de óleo T_{bath} são parâmetros fixos de entrada. O campo inicial de viscosidade $\mu(r, \theta)$ e os valores iniciais dos parâmetros de equilíbrio do mancal (h_{pivot} , α_s e α_r) são os parâmetros calculados pelo procedimento apresentado na Fig. 2.5. O campo de viscosidade é atualizado pelo processo iterativo representado por “1”, até que a diferença entre duas iterações consecutivas seja menor que uma tolerância tol_μ , como mostra a Eq. (2.168).

$$\max \left(\frac{\mu_{new} - \mu_{old}}{\mu_{old}} \right) \leq tol_\mu \quad (2.168)$$

Os valores referentes à posição de equilíbrio do mancal são calculados por meio de uma função de otimização do software MatLab® denominada *fminsearch* e atualizados no processo destacado por “2”, até que o valor do resíduo seja menor que a tolerância definida na função, tol_{MF} , como mostra a Eq. (2.169).

$$\left\| \begin{bmatrix} M_r & M_s & F_{res} \end{bmatrix} \right\| \leq tol_{MF} \quad (2.169)$$

2.4 Equação do movimento do sistema rotor-mancal

A Figura 2.6 representa um sistema rotativo no qual um rotor de massa M_{rotor} é suportado por um mancal hidrodinâmico segmentado axial de dupla ação. Nesta configuração, a qual é geralmente utilizada máquinas rotativas horizontais, dois mancais considerados idênticos são colocados em ambos os lados do rotor de modo a suportar os esforços axiais horizontais em ambos os sentidos. É importante notar que, na configuração representada pela Fig. 2.6 o pivô de cada um dos segmentos é considerado flexível, cuja a rigidez é dada por k_0 .

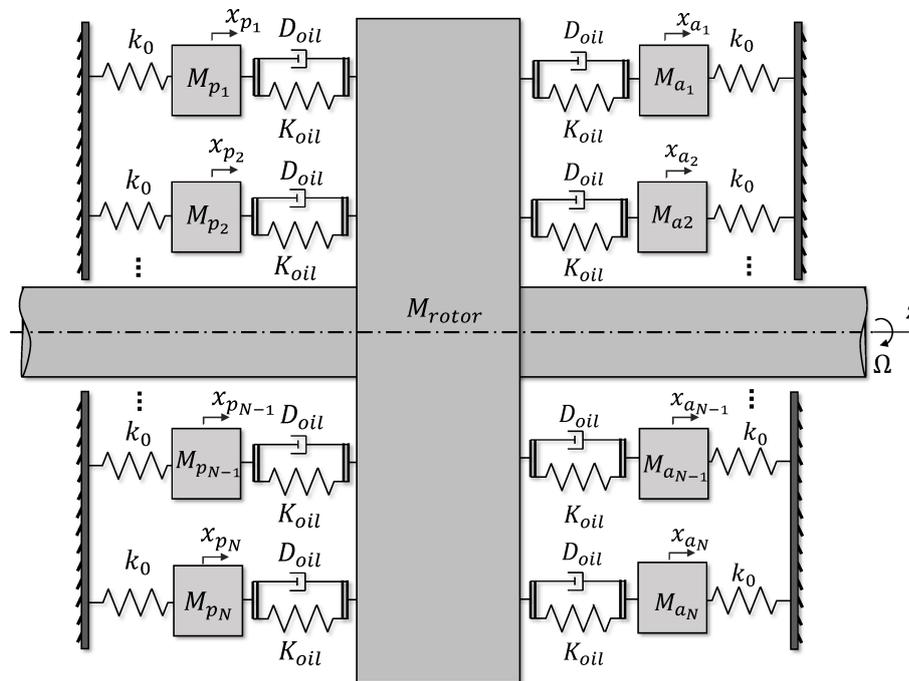


Figura 2.6: Representação de um sistema rotor-mancal axial de dupla ação.

A equação do movimento referente ao sistema dinâmico representado na Fig. 2.6 é apresentada pela Eq. (2.170):

$$\mathbf{M}_{(global)} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_{(global)} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_{(global)} \mathbf{q} = \mathbf{F}(t) \quad (2.170)$$

na qual, \mathbf{q} é o vetor que contém os deslocamentos associados aos graus de liberdade (GDL) do sistema, sendo \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$ e $\ddot{\mathbf{q}}$ definidos como mostra as Eqs. (2.171)-(2.173):

$$\ddot{\mathbf{q}} = \left\{ \ddot{z} \quad \ddot{x}_{1p} \quad \ddot{x}_{2p} \quad \dots \quad \ddot{x}_{Np} \quad \ddot{x}_{1a} \quad \dots \quad \ddot{x}_{Na} \right\}^T \quad (2.171)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \left\{ \dot{z} \quad \dot{\mathbf{x}}_{1p} \quad \dot{\mathbf{x}}_{2p} \quad \dots \quad \dot{\mathbf{x}}_{Np} \quad \dot{\mathbf{x}}_{1a} \quad \dots \quad \dot{\mathbf{x}}_{Na} \right\}^T \quad (2.172)$$

$$\mathbf{q} = \left\{ z \quad \mathbf{x}_{1p} \quad \mathbf{x}_{2p} \quad \dots \quad \mathbf{x}_{Np} \quad \mathbf{x}_{1a} \quad \dots \quad \mathbf{x}_{Na} \right\}^T \quad (2.173)$$

sendo o vetor x_i composto pelas translações w_i e rotações α_{r_i} e α_{s_i} de cada segmento, como mostra a Eq. (2.174).

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{ip} &= \left\{ w_{ip} \quad \alpha_{r_{ip}} \quad \alpha_{s_{ip}} \right\}, \dot{\mathbf{x}}_{ip} = \left\{ \dot{w}_{ip} \quad \dot{\alpha}_{r_{ip}} \quad \dot{\alpha}_{s_{ip}} \right\}, \ddot{\mathbf{x}}_{ip} = \left\{ \ddot{w}_{ip} \quad \ddot{\alpha}_{r_{ip}} \quad \ddot{\alpha}_{s_{ip}} \right\}, \\ \mathbf{x}_{ia} &= \left\{ w_{ia} \quad \alpha_{r_{ia}} \quad \alpha_{s_{ia}} \right\}, \dot{\mathbf{x}}_{ia} = \left\{ \dot{w}_{ia} \quad \dot{\alpha}_{r_{ia}} \quad \dot{\alpha}_{s_{ia}} \right\}, \ddot{\mathbf{x}}_{ia} = \left\{ \ddot{w}_{ia} \quad \ddot{\alpha}_{r_{ia}} \quad \ddot{\alpha}_{s_{ia}} \right\} \end{aligned} \quad (2.174)$$

O carregamento externo $\mathbf{F}(t)$ contém as forças e momentos aplicados ao sistema, como mostra a Eq. (2.175)

$$\mathbf{F}(t) = \left\{ F_z \quad \mathbf{P}_{1p} \quad \mathbf{P}_{2p} \quad \dots \quad \mathbf{P}_{Np} \quad \mathbf{P}_{1a} \quad \dots \quad \mathbf{P}_{Na} \right\}^T \quad (2.175)$$

sendo o vetor \mathbf{P}_i é composto pela força W_i e os momentos M_{r_i} e M_{s_i} aplicados em cada segmento do mancal, como mostra a Eq. (2.176).

$$\mathbf{P}_{ip} = \left\{ W_{ip} \quad M_{r_{ip}} \quad M_{s_{ip}} \right\}, \mathbf{P}_{ia} = \left\{ W_{ia} \quad M_{r_{ia}} \quad M_{s_{ia}} \right\} \quad (2.176)$$

As matrizes globais de massa, rigidez e amortecimento do sistema, $\mathbf{M}_{(global)}$, $\mathbf{K}_{(global)}$ e $\mathbf{D}_{(global)}$, respectivamente, são obtidas como mostra as Eqs. (2.177)-(2.181).

$$\mathbf{M}_{(global)} = \begin{bmatrix} M_{rotor} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \mathbf{M}_{1p} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{M}_{2p} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ & & & & \mathbf{M}_{Np} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ & & & & & \mathbf{M}_{1a} & \dots & \mathbf{0} \\ & & & & & & \ddots & \vdots \\ SIM. & & & & & & & \mathbf{M}_{Na} \end{bmatrix} \quad (2.177)$$

$$\mathbf{M}_{ip} = \begin{bmatrix} m_{pad_i p} & 0 & 0 \\ 0 & J_{r_i p} & 0 \\ 0 & 0 & J_{s_i p} \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{ia} = \begin{bmatrix} m_{pad_i a} & 0 & 0 \\ 0 & J_{r_i a} & 0 \\ 0 & 0 & J_{s_i a} \end{bmatrix} \quad (2.178)$$

$$\mathbf{K}_{(global)} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{2N} k_{zzi} & \mathbf{K}_h & \mathbf{K}_h & \dots & \mathbf{K}_h & \mathbf{K}_h & \dots & \mathbf{K}_h \\ \mathbf{K}_v & \mathbf{K} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_v & \mathbf{0} & \mathbf{K} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{K} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{K} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (2.179)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_0 + k_{zz} & k_{z\alpha_r} & k_{z\alpha_s} \\ -k_{\alpha_r z} & k_{\alpha_r \alpha_r} & k_{\alpha_r \alpha_s} \\ -k_{\alpha_s z} & k_{\alpha_s \alpha_r} & k_{\alpha_s \alpha_s} \end{bmatrix}, \mathbf{K}_v = \begin{Bmatrix} -k_{zz} \\ k_{\alpha_r z} \\ k_{\alpha_s z} \end{Bmatrix}, \mathbf{K}_h = \begin{Bmatrix} -k_{zz} \\ -k_{z\alpha_r} \\ -k_{z\alpha_s} \end{Bmatrix}^T \quad (2.180)$$

$$\mathbf{D}_{(global)} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{2N} d_{zzi} & \mathbf{D}_h & \mathbf{D}_h & \dots & \mathbf{D}_h & \mathbf{D}_h & \dots & \mathbf{D}_h \\ \mathbf{D}_v & \mathbf{D} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_v & \mathbf{0} & \mathbf{D} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{D} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{D} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{D}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (2.181)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{zz} & d_{z\alpha_r} & d_{z\alpha_s} \\ -d_{\alpha_r z} & d_{\alpha_r \alpha_r} & d_{\alpha_r \alpha_s} \\ -d_{\alpha_s z} & d_{\alpha_s \alpha_r} & d_{\alpha_s \alpha_s} \end{bmatrix}, \mathbf{D}_v = \begin{Bmatrix} -d_{zz} \\ d_{\alpha_r z} \\ d_{\alpha_s z} \end{Bmatrix}, \mathbf{D}_h = \begin{Bmatrix} -d_{zz} \\ -d_{z\alpha_r} \\ -d_{z\alpha_s} \end{Bmatrix}^T \quad (2.182)$$

sendo m_{pad_i} a massa do segmento e J_{r_i} e J_{s_i} os momentos de inércia referentes aos eixos r e s , respectivamente, os quais estão destacados na Fig. 2.2.

2.4.1 Frequências naturais e modos do sistema

As frequências naturais e os modos de vibrar do sistema podem ser determinados por meio da solução homogênea da Eq. (2.170). Para tanto, a formulação de espaço de estado deve ser aplicada à Eq. 2.170, como mostra a Eq. (2.183).

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} & \mathbf{q} \end{Bmatrix}^T, \dot{\mathbf{y}} = \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} & \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix}^T \quad (2.183)$$

A Equação (2.184) apresenta a equação do movimento do sistema escrita utilizando a formulação de espaço de estado.

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (2.184)$$

onde,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{(global)} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{(global)} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{(global)} & \mathbf{K}_{(global)} \\ -\mathbf{M}_{(global)} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.185)$$

A solução da Eq. (2.184) é obtida da resolução do problema de autovalor associado, como mostra a Eq. (2.186).

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}e^{\lambda t}, \dot{\mathbf{y}} = \lambda\mathbf{U}e^{\lambda t} \quad (2.186)$$

onde, \mathbf{U} e λ estão associados aos modos e frequências naturais do sistema.

Os autovalores e autovetores apresentados Eq. (2.186), podem ser calculados utilizando uma função do software MatLab® denominada *eig*, a qual deve ser aplicada de acordo com a Eq. (2.187).

$$[\mathbf{U}, \lambda] = \text{eig}(-\mathbf{B}, \mathbf{A}) \quad (2.187)$$

2.4.2 Obtenção dos coeficientes dinâmicos equivalentes

Conforme apresentado na Eq. (2.175), esforços externos podem ser aplicados em cada um dos GDL do sistema rotor-mancal mostrado na Fig. 2.6. Considere um carregamento externo atuante no sistema, o qual é composto por uma força axial harmônica aplicada ao GDL do rotor. A resposta dinâmica do sistema à aplicação deste carga-

mento é composta por descolamentos harmônicos observados em todos os GDL do sistema, como mostra a Eq. (2.188).

$$\mathbf{F}(t) = \left\{ |F_z| e^{j\omega_p t} \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right\}^T, \mathbf{q} = |\mathbf{q}| e^{j\omega_p t} \quad (2.188)$$

Assim, a equação do movimento pode ser escrita como mostra a Eq. (2.189).

$$\left[-\omega_p^2 \mathbf{M}_{(global)} + j\omega_p \mathbf{D}_{(global)} + \mathbf{K}_{(global)} \right] \{|\mathbf{q}|\} = \{|\mathbf{F}|\} \quad (2.189)$$

A Equação (2.189) pode ser reescrita como mostra a Eq. (2.190).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{11} \\ \mathbf{q}_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{11} + \omega_p^2 M_{rotor} \mathbf{q}_{11} \\ \mathbf{0}_{21} \end{Bmatrix} \quad (2.190)$$

onde,

$$[\mathbf{H}_{11}]_{1x1} = j\omega_p \mathbf{D}_{global}(1, 1) + \mathbf{K}_{global}(1, 1) \quad (2.191)$$

$$[\mathbf{H}_{12}]_{1xn-1} = -\omega_p^2 \mathbf{M}_{global}(1, 2:n) + j\omega_p \mathbf{D}_{global}(1, 2:n) + \mathbf{K}_{global}(1, 2:n) \quad (2.192)$$

$$[\mathbf{H}_{21}]_{n-1x1} = -\omega_p^2 \mathbf{M}_{global}(2:n, 1) + j\omega_p \mathbf{D}_{global}(2:n, 1) + \mathbf{K}_{global}(2:n, 1) \quad (2.193)$$

$$[\mathbf{H}_{22}]_{n-1xn-1} = -\omega_p^2 \mathbf{M}_{global}(2:n, 2:n) + j\omega_p \mathbf{D}_{global}(2:n, 2:n) + \mathbf{K}_{global}(2:n, 2:n) \quad (2.194)$$

A Equação (2.190) pode ser escrita sob a forma de um sistema linear, como mostra a Eq. (2.195), o qual pode ser escalonado e reescrito como mostra a Eq. (2.196):

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{11} \mathbf{q}_{11} + \mathbf{H}_{12} \mathbf{q}_{21} = \mathbf{F}_{11} + \omega_p^2 M_{rotor} \mathbf{q}_{11} \\ \mathbf{H}_{21} \mathbf{q}_{11} + \mathbf{H}_{22} \mathbf{q}_{21} = \mathbf{0}_{21} \end{cases} \quad (2.195)$$

$$(\mathbf{H}_{11} - \mathbf{H}_{12} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{H}_{21}) \mathbf{q}_{11} = \mathbf{F}_{11} + \omega_p^2 M_{rotor} \mathbf{q}_{11} \quad (2.196)$$

onde,

$$\mathbf{S} = (\mathbf{H}_{11} - \mathbf{H}_{12} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{H}_{21}) \quad (2.197)$$

é definida como a impedância mecânica do sistema, a qual contém os coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento, K_{eq} e D_{eq} , respectivamente, calculados de

acordo com as Eqs. (2.198) e (2.199).

$$K_{eq} = \text{Re}(\mathbf{S}) \quad (2.198)$$

$$D_{eq} = \frac{1}{\omega_p} \text{Im}(\mathbf{S}) \quad (2.199)$$

Capítulo 3

Resultados Numéricos

A metodologia apresentada neste trabalho é aplicada a um mancal hidrodinâmico segmentado axial de dupla-ação com seis sapatas, conforme o modelo físico mostrado na Fig. (2.6) apresentado na **Capítulo 2** deste trabalho. Este mancal encontra-se presente em uma bancada experimental a qual foi utilizada por Wang et al. (2018), cuja a configuração assemelha-se a um compressor centrífugo industrial. A Figura 3.1 apresenta a bancada experimental, destacando os principais componentes que a compõe, a saber: 1 - motor; 2 - caixa de engrenagens; 3 - compressor centrífugo; 4 - mancal hidrodinâmico segmentado radial; 5 - mancal combinado (TPJB + TPTB); 6 - tubulação de óleo do circuito hidráulico; 7 - tubulação para a circulação do gás; 8 - tubulação para o suprimento de óleo.



Figura 3.1: Bancada experimental utilizada como referência para as simulações numéricas deste trabalho. Fonte: Wang et al. (2018).

Na Figura 3.2 é possível visualizar a seção transversal da bancada destacando os seguintes componentes: 1 - disco do compressor; 2 - disco para balanceamento; 3 - cavidade para alimentação de óleo à alta pressão; 4 - TPTB principal; 5 - TPJB; 6 - Tubulação para injeção de óleo à alta pressão na câmara; 7 - pivô do segmento ; 8 - Colar de escora; 9 - eixo.

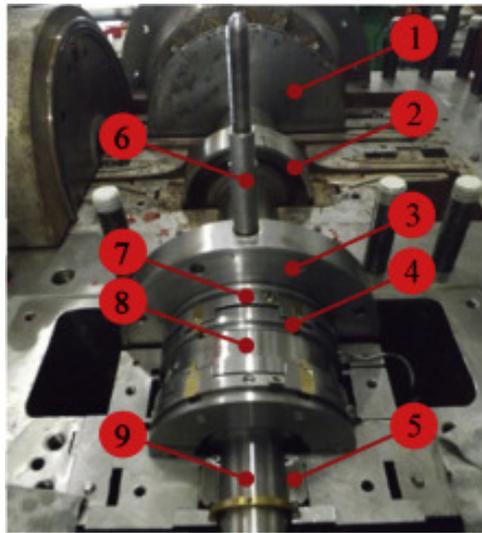
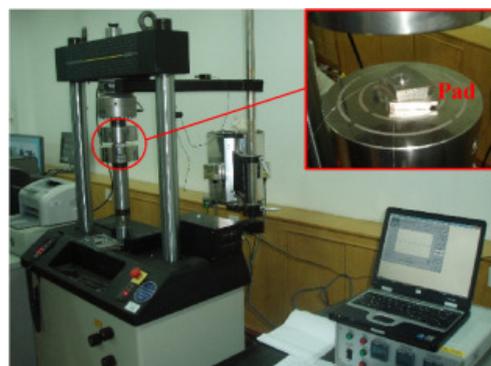


Figura 3.2: Seção transversal em corte da bancada experimental utilizada como referência para as simulações numéricas deste trabalho. Fonte: Wang et al. (2018).

A Figura. 3.3a apresenta as superfícies inferior e superior do segmento do TPTB, cujo pivô é do tipo esférico. A Figura 3.3b apresenta a configuração do ensaio de compressão realizado para determinar a rigidez do pivô. Os parâmetros do TPTB são apresentados na Tab. 3.1.



(a)



(b)

Figura 3.3: Segmento do TPTB. (a) Vista superior e inferior; (b) Ensaio para determinar a rigidez do pivô. Fonte: Wang et al. (2018)

Tabela 3.1: Parâmetros do mancal segmentado axial analisado.

Parâmetro	Valor
Raio interno (r_1)	38,50 mm
Raio externo (r_2)	75,00 mm
Número de segmentos (N_{pad})	6
Comprimento angular (θ_0)	55,6°
Espessura do segmento (t_{pad})	17,00 mm
Raio do pivô (r_{pivot})	58,21 mm
Posição angular do pivô (θ_{pivot})	27,8°
Massa do segmento (m_{pad})	0,268 kg
Momento de inércia do segmento em relação ao eixo r (J_r)	$9,804 \times 10^{-5}$ kg.m ²
Momento de inércia do segmento em relação ao eixo s (J_s)	$5,354 \times 10^{-5}$ kg.m ²
Rigidez do pivô (k_0)	$1,4 \times 10^9$ N/m
Tipo de óleo	ISO VG 32
Condutividade térmica do óleo (k_t)	0,15 W/(m.°C)
Calor específico do óleo (c_p)	1850 J/(kg.°C)
Massa específica do óleo (ρ)	850 kg/m ³
Temperatura do banho de óleo (T_{bath})	30 °C
Massa do rotor (M_{rotor})	59,17 kg
Diâmetro do orifício de injeção (d_0)	5,00 mm
Profundidade do duto de injeção (h_h)	17,00 mm

3.1 Análise de convergência de malha

Uma análise de convergência de malha foi realizada para determinar o refinamento mínimo, isto é, o número mínimo de volumes finitos que deve ser utilizado para a solução numérica das equações. Nesta análise, 18 parâmetros de saídas do modelo (9 coeficientes de rigidez e 9 coeficientes de amortecimento) foram calculados considerando diferentes graus de refinamento da malha, sendo $N = N_r = N_\theta = 20$ a mais grosseira e $N = N_r = N_\theta = 110$ a mais refinada.

Para determinar o número mínimo de volumes satisfatório, avalia-se a diferença percentual entre os valores calculados utilizando a malha mais refinada e aqueles calculados utilizando malhas mais grosseiras. O objetivo nesta abordagem é determinar qual o número mínimo de volumes na malha para o qual a maior diferença percentual observada seja inferior a 1%, em relação a malha mais refinada.

A Figura 3.4 mostra análise de convergência de malha realizada para um mancal operando sobre o regime de lubrificação hidrodinâmico, isto é, sem injeção de óleo à alta pressão, sob um carregamento estático axial de $F_z = 20$ kN e velocidade de rotação de $\Omega = 3000$ RPM. Analisando a Fig. 3.4 nota-se para $N = N_r = N_\theta = 60$ a

maior diferença percentual calculada é aproximadamente 1%.

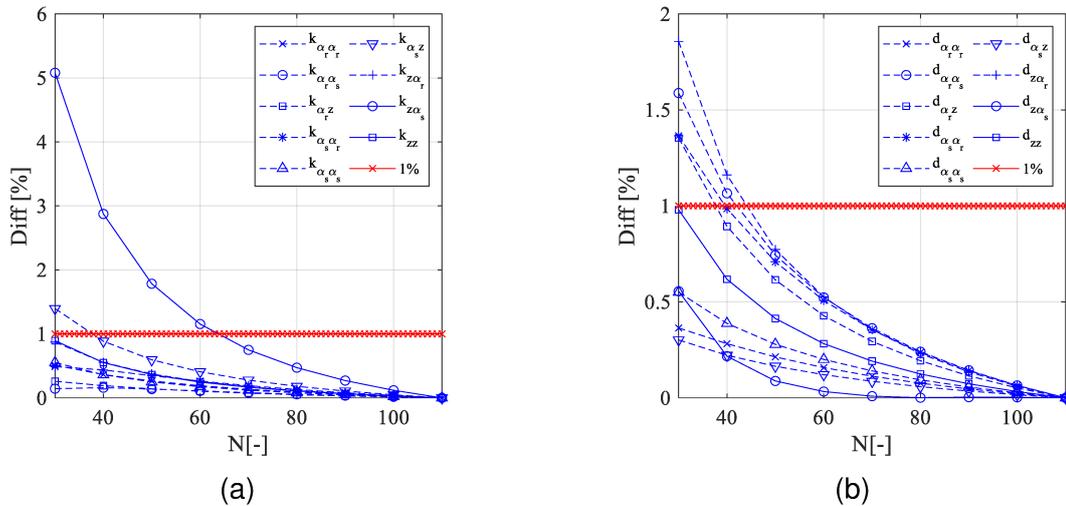


Figura 3.4: Análise de convergência de malha para o regime de lubrificação hidrodinâmica. (a) Diferença percentual - coeficientes de rigidez; (b) Diferença percentual - coeficientes de amortecimento.

A Figura 3.5 apresenta análise de convergência de malha realizada para um mancal operando sobre o regime de lubrificação híbrido. Nesta análise, a pressão de injeção é $P_{inj} = 50$ bar, o carregamento estático axial é $F_z = 20$ kN e a velocidade de rotação é $\Omega = 3000$ RPM. Analisando a Fig. 3.5 nota-se que não há convergência na malha, sendo que as diferenças percentuais oscilam para diferentes graus de refinamento da malha.

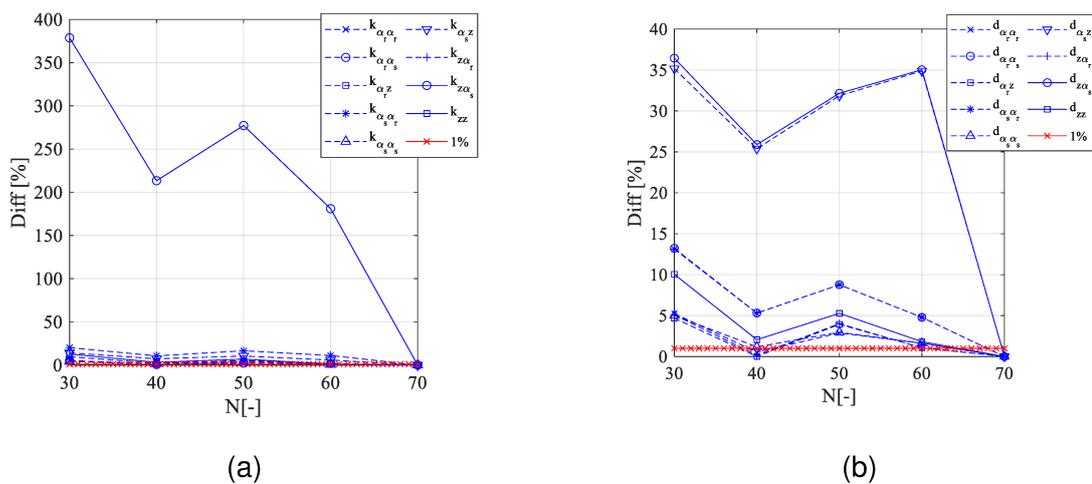


Figura 3.5: Análise de convergência de malha para o regime de lubrificação híbrida. (a) Diferença percentual - coeficientes de rigidez; (b) Diferença percentual - coeficientes de amortecimento.

A não convergência mostrada na Fig. 3.5 se deve à disposição dos volumes na

região do orifício, a qual influencia diretamente tanto o perfil de velocidade de injeção quanto a vazão de óleo injetado. A Figura 3.6 ilustra a disposição dos volumes finitos na região do orifício de injeção, sendo a Fig. 3.6a a distribuição obtida em uma malha mais grosseira e a Fig. 3.6b obtida em uma distribuição mais refinada. Diante dos resultados apresentados na Fig. 3.5 e da distribuição dos volumes finitos no orifício de injeção ilustrada na Fig. 3.6 fica evidente que o procedimento de análise de convergência de malha utilizado para o regime de lubrificação hidrodinâmica não se aplica diretamente ao regime de lubrificação híbrido.

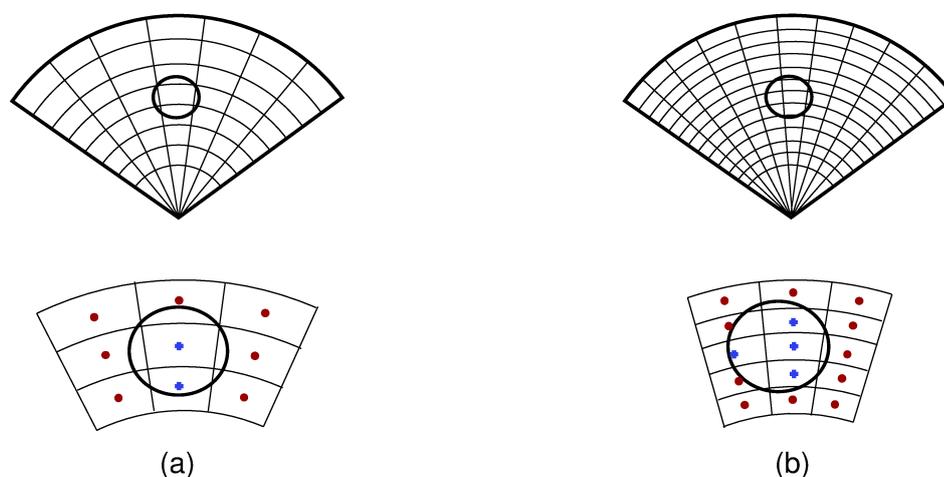


Figura 3.6: Distribuição dos volumes finitos na região do orifício de injeção. (a) Malha grosseira; (b) Malha refinada.

Para que a disposição dos volumes finitos na região do orifício de injeção não sofra alterações significativas em função do grau de refinamento da malha torna-se necessário determinar a relação entre as dimensões do orifício de injeção e as dimensões do segmento.

Da Figura 3.7, d_0 é o diâmetro do orifício de injeção e α é o comprimento angular

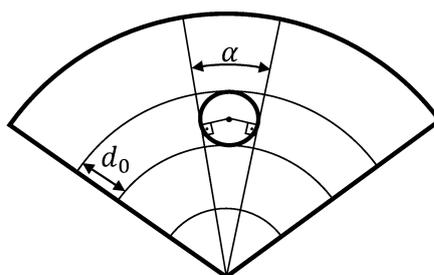


Figura 3.7: Relação entre as dimensões do orifício de injeção e do segmento.

do orifício, o qual é calculado pela Eq. (3.1).

$$\alpha = 2 \arcsin \left(\frac{d_0}{2r_{pivot}} \right) \quad (3.1)$$

Considerando as medidas para os raios interno e externo do segmento, r_1 e r_2 , respectivamente, o comprimento angular do segmento, θ_0 e o diâmetro do orifício, d_0 , obtém-se:

$$\frac{\alpha}{\theta_0} \approx 0.6 \frac{d_0}{r_0 - r_1} \Rightarrow \frac{N_r}{N_\theta} \approx 0.6 \quad (3.2)$$

A Equação (3.2) apresenta a relação entre a quantidade de volumes finitos nas direções r e θ a qual deve ser mantida para que se tenha uma distribuição mais uniformes de volumes na região do orifício de injeção. Outro parâmetro de saída fundamental do modelo a ser avaliado pela análise de convergência de malha é a diferença entre a vazão de óleo injetado no orifício calculada de forma analítica e numérica. A Equação (3.3a) apresenta a expressão matemática para o cálculo da vazão analítica e a Eq. (3.3b) mostra a vazão numérica calculada utilizando a função *trapz* do MatLab ®.

$$Q_a = \int v dA = \frac{P_{inj} - p}{4\mu h_h} \left(\frac{\pi d_0^4}{32} \right) \quad (3.3a)$$

$$Q_n = trapz(trapz(v, r), \theta) \quad (3.3b)$$

A Figura 3.8 apresenta a diferença percentual entre as vazões do óleo injetado calculadas de forma analítica e numérica.

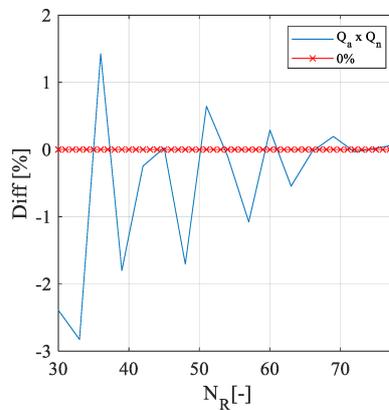


Figura 3.8: Diferença percentual entre a vazão analítica e numérica para diferentes níveis de refinamento da malha.

A Figura 3.9 mostra a análise de convergência para $N_r = 30$ e $N_\theta = 60$ (mais grosseira), $N_r = 42$ e $N_\theta = 70$, $N_r = 54$ e $N_\theta = 90$ e $N_r = 75$ e $N_\theta = 125$ (mais refinada). Diante dos resultados apresentados nas Figs. 3.9 e 3.8 adota-se $N_\theta = 90$ e $N_r = 54$ o número de volumes a ser utilizado na solução numérica das equações.

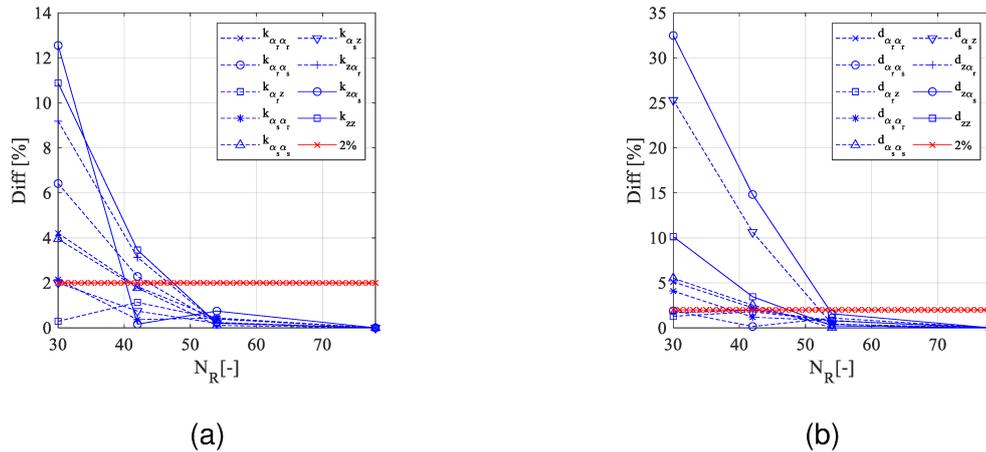


Figura 3.9: Análise de convergência de malha para o regime de lubrificação híbrida. (a) Diferença percentual - coeficientes de rigidez; (b) Diferença percentual - coeficientes de amortecimento.

3.2 Determinação da posição e dos campos de pressão e temperatura

A Figura 3.10 apresenta os campos de pressão e temperatura obtidos para a condição de lubrificação hidrodinâmica e híbrida. No regime de lubrificação híbrida, o óleo é injetado à alta pressão no filme através do orifício de injeção, sendo $P_{inj} = 48$ bar e $T_{inj} = 30$ °C. Em ambos os casos, $\Omega = 3000$ RPM e $F_z = 20$ kN. O critério de parada utilizado para obter a solução do modelo THD foi $tol_{MF} = 10^{-7}$ N/(N.m) para o balanço de forças e momentos e $tol_\mu = 10^{-6}$ Pa.s para a convergência da viscosidade. Os coeficientes k_1 , k_2 e k_3 da equação de Vogel, Eq. (2.36), utilizada para calcular o campo de viscosidade em função da temperatura são respectivamente 0,06246, 868,8 e 170,4. Destaca-se que, as posições de equilíbrio, os coeficientes dinâmicos, as frequências naturais e os fatores de amortecimento para cada uma das condições de operação abordadas nesta seção são apresentados na íntegra no **Apêndice A** deste trabalho.

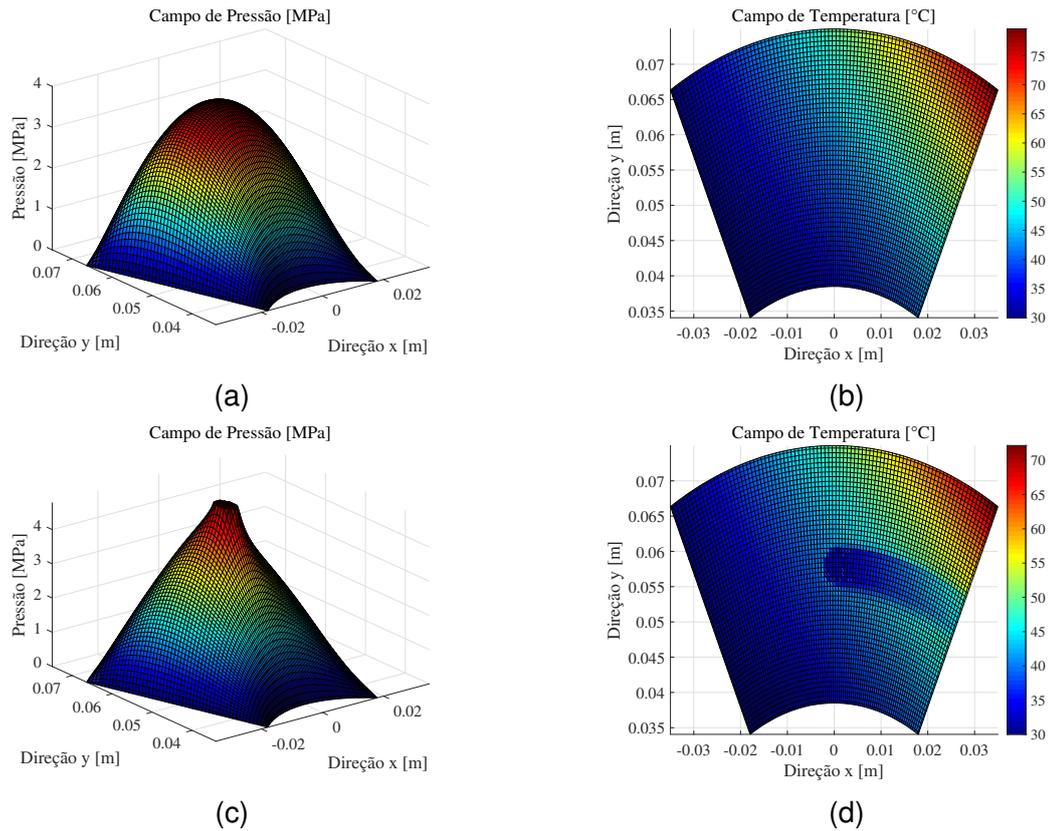


Figura 3.10: Campos de pressão e de temperatura obtidos para os regimes de lubrificação hidrodinâmica e híbrido. (a) Campo de pressão - Lubrificação hidrodinâmica; (b) Campo de temperatura - Lubrificação hidrodinâmica; (c) Campo de pressão - Lubrificação híbrida; (d) Campo de temperatura - Lubrificação híbrida.

Na condição de lubrificação hidrodinâmica, $h_{pivot_0} = 35,28 \mu\text{m}$, $\alpha_{r_0} = -4,36 \times 10^{-4}$ rad e $\alpha_{s_0} = 5,55 \times 10^{-4}$ rad e a pressão máxima, temperatura máxima e a espessura mínima do filme de óleo são $P_{max} = 3,35$ MPa, $T_{max} = 79,57$ °C e $h_{min} = 15,80$ μm , respectivamente. Para a condição de lubrificação híbrida, $h_{pivot_0} = 40,50$, $\alpha_{r_0} = -4,69 \times 10^{-4}$ rad e $\alpha_{s_0} = 6,46 \times 10^{-4}$ rad e a pressão máxima, temperatura máxima e a espessura mínima do filme de óleo são $P_{max} = 4,78$ MPa, $T_{max} = 72,14$ °C e $h_{min} = 19,15$ μm , respectivamente.

Os resultados obtidos mostram que a temperatura máxima do filme de óleo observada na condição de lubrificação híbrida é menor do que aquela calculada para o regime de lubrificação hidrodinâmica. Essa diferença ocorre devido à temperatura do óleo injetado $T_{inj} = 30$ °C, a qual é responsável por reduzir a temperatura do filme de óleo. A redução da temperatura máxima pode também ser explicada pela espessura mínima do filme de óleo a qual é maior para o caso de lubrificação híbrida. Devido à vazão do óleo injetado através do orifício de injeção, a espessura do filme de óleo no

pivô e os ângulos de rotação da sapata, α_{r_0} e α_{s_0} são modificados, com o objetivo de elevar a vazão de saída do óleo que escoa pela sapata. Como a espessura mínima do filme de óleo aumenta neste caso, o gradiente de velocidade associado à equação da energia reduz, e conseqüentemente, a máxima temperatura também reduz.

3.3 Determinação dos coeficientes dinâmicos equivalentes

A Figura 3.11 apresenta os coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento para os regimes de lubrificação hidrodinâmica e híbrida.

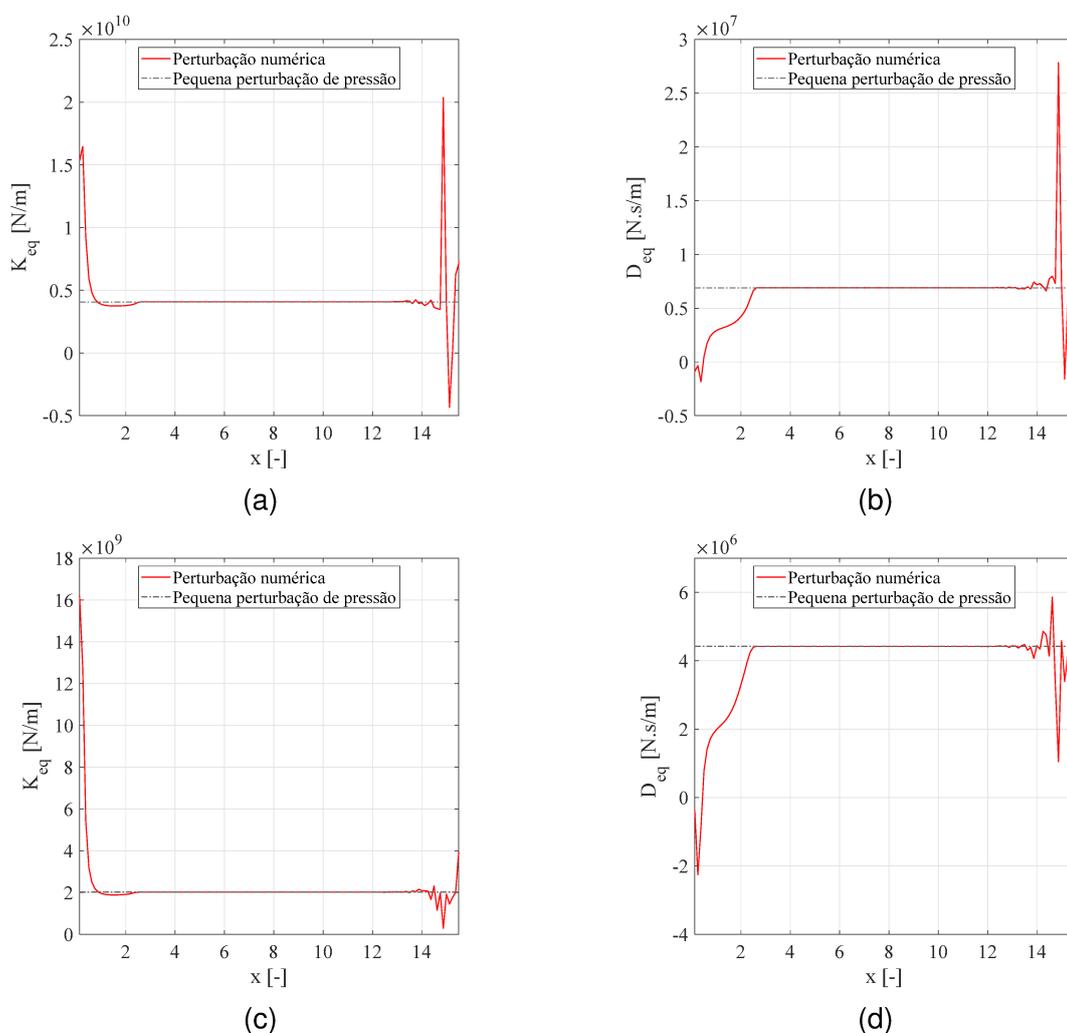


Figura 3.11: Coeficientes dinâmicos equivalentes para os regimes de lubrificação hidrodinâmica e híbrida. (a) Rigidez equivalente - Lubrificação hidrodinâmica; (b) Amortecimento equivalente - Lubrificação hidrodinâmica; (c) Rigidez equivalente - Lubrificação híbrida; (d) Amortecimento equivalente - Lubrificação híbrida.

Conforme apresentado na **seção 2.2**, duas diferentes abordagens são aplicadas para determinar os coeficientes dinâmicos dos TPTB: a pequena perturbação de pressão e o método da perturbação numérica do filme de óleo em torno da posição de equilíbrio do mancal.

Na Figura 3.11 o eixo horizontal representa o tamanho da perturbação aplicada em relação à posição de equilíbrio do mancal. Para fins de melhor visualização dos resultados, optou-se por representar no eixo horizontal uma variável x , de modo que $\Delta\gamma = 10^{-x}\gamma_0$, $\gamma = h_{pivot}, \alpha_r, \alpha_s$. A Tabela 3.2 apresenta os valores das perturbações numéricas de acordo com o parâmetro x .

Tabela 3.2: Perturbações numéricas para o cálculo dos coeficientes dinâmicos.

x	Δh_{pivot}	$\Delta\alpha_r$	$\Delta\alpha_s$	$\Delta\dot{h}_{pivot}$	$\Delta\dot{\alpha}_r$	$\Delta\dot{\alpha}_s$
0	h_{pivot}	α_r	α_s	\dot{h}_{pivot}	$\dot{\alpha}_r$	$\dot{\alpha}_s$
1	$10^{-1} \times h_{pivot}$	$10^{-1} \times \alpha_r$	$10^{-1} \times \alpha_s$	$10^{-1} \times \dot{h}_{pivot}$	$10^{-1} \times \dot{\alpha}_r$	$10^{-1} \times \dot{\alpha}_s$
2	$10^{-2} \times h_{pivot}$	$10^{-2} \times \alpha_r$	$10^{-2} \times \alpha_s$	$10^{-2} \times \dot{h}_{pivot}$	$10^{-2} \times \dot{\alpha}_r$	$10^{-2} \times \dot{\alpha}_s$
3	$10^{-3} \times h_{pivot}$	$10^{-3} \times \alpha_r$	$10^{-3} \times \alpha_s$	$10^{-3} \times \dot{h}_{pivot}$	$10^{-3} \times \dot{\alpha}_r$	$10^{-3} \times \dot{\alpha}_s$
4	$10^{-4} \times h_{pivot}$	$10^{-4} \times \alpha_r$	$10^{-4} \times \alpha_s$	$10^{-4} \times \dot{h}_{pivot}$	$10^{-4} \times \dot{\alpha}_r$	$10^{-4} \times \dot{\alpha}_s$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
10	$10^{-10} \times h_{pivot}$	$10^{-10} \times \alpha_r$	$10^{-10} \times \alpha_s$	$10^{-10} \times \dot{h}_{pivot}$	$10^{-10} \times \dot{\alpha}_r$	$10^{-10} \times \dot{\alpha}_s$
11	$10^{-11} \times h_{pivot}$	$10^{-11} \times \alpha_r$	$10^{-11} \times \alpha_s$	$10^{-11} \times \dot{h}_{pivot}$	$10^{-11} \times \dot{\alpha}_r$	$10^{-11} \times \dot{\alpha}_s$
12	$10^{-12} \times h_{pivot}$	$10^{-12} \times \alpha_r$	$10^{-12} \times \alpha_s$	$10^{-12} \times \dot{h}_{pivot}$	$10^{-12} \times \dot{\alpha}_r$	$10^{-12} \times \dot{\alpha}_s$
13	$10^{-13} \times h_{pivot}$	$10^{-13} \times \alpha_r$	$10^{-13} \times \alpha_s$	$10^{-13} \times \dot{h}_{pivot}$	$10^{-13} \times \dot{\alpha}_r$	$10^{-13} \times \dot{\alpha}_s$
14	$10^{-14} \times h_{pivot}$	$10^{-14} \times \alpha_r$	$10^{-14} \times \alpha_s$	$10^{-14} \times \dot{h}_{pivot}$	$10^{-14} \times \dot{\alpha}_r$	$10^{-14} \times \dot{\alpha}_s$

É importante mencionar que o método da perturbação numérica é fundamentalmente dependente do tamanho da perturbação utilizada na metodologia, enquanto no método da pequena perturbação de pressão não existe relação entre o tamanho da perturbação e os valores dos coeficientes dinâmicos calculados. Portanto, o método que será utilizado para calcular os coeficientes dinâmicos nas análises apresentadas a seguir será o método da pequena perturbação de pressão, sendo que a comparação entre os dois métodos (conforme mostra a Fig. 3.11) tem como objetivo validar numericamente os resultados calculados pelo método utilizado.

A Figura 3.12 apresenta os coeficientes de rigidez e amortecimento para baixas (Fig. 3.12a e Fig. 3.12b) e para altas velocidades de rotação (Fig. 3.12c e Fig. 3.12d).

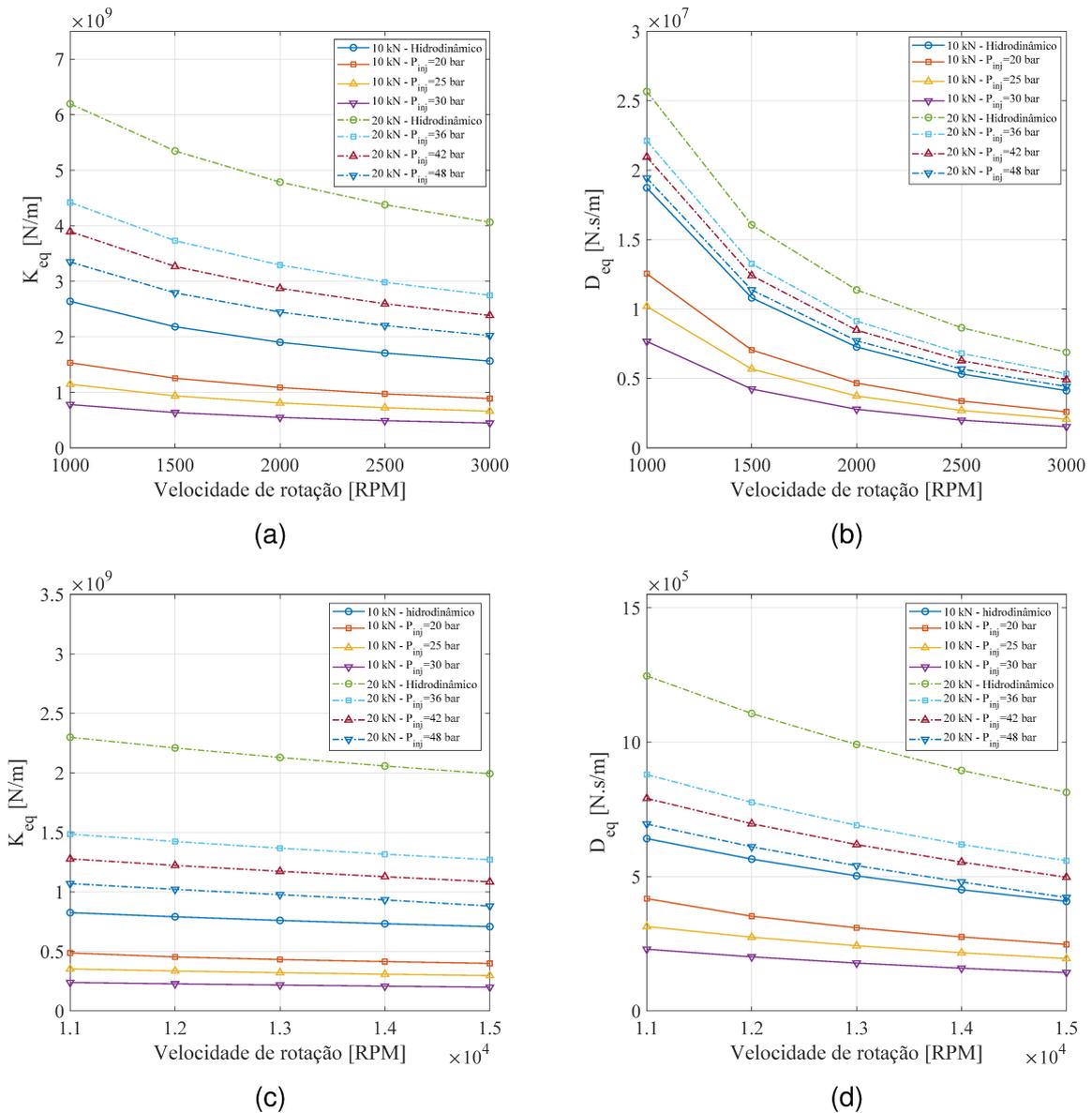


Figura 3.12: Coeficientes dinâmicos equivalentes para os regimes de lubrificação hidrodinâmico e híbrido sobre diferentes condições de operações. (a) Rigidez equivalente - baixa rotação; (b) Amortecimento equivalente - baixa rotação; (c) Rigidez equivalente - alta rotação; (d) Amortecimento equivalente - alta rotação.

Nesta análise, diferentes níveis de carregamento estático, regimes de lubrificação e pressões de injeção de óleo são aplicados ao mancal para avaliar os efeitos destes parâmetros nos coeficientes dinâmicos calculados. Uma perturbação de frequência síncrona é usada nesta simulação, sendo, portanto, $\omega_p = \Omega$. Os resultados mostram que para uma dado carregamento estático, os coeficientes equivalentes de rigidez e

amortecimento decrescem com o aumento da velocidade de rotação do rotor. Para uma dada velocidade de rotação, os coeficientes dinâmicos equivalentes do mancal aumentam sua magnitude conforme o nível de carregamento estático se eleva. Finalmente, para o regime de lubrificação híbrida é possível observar que os coeficientes do mancal reduzem conforme aumenta a magnitude da pressão de injeção. Estes três resultados destacados nesta análise podem ser explicados baseando-se nos efeitos da velocidade de rotação, carregamento estático e pressão de injeção de óleo (para o regime de lubrificação híbrida) na espessura do filme de óleo do mancal. Os coeficientes equivalentes do TPTB reduzem com o aumento da espessura do filme de óleo. Portanto, a redução da magnitude destes coeficientes pode ser observada com o aumento da pressão de injeção de óleo, para o regime de lubrificação híbrida e com o aumento da velocidade de rotação, para ambos os regimes de lubrificação. O efeito oposto é observado quando o nível de carregamento estático aumenta, para ambos os regimes de lubrificação.

Como os coeficientes dinâmicos equivalentes são dependentes da frequência de excitação, torna-se importante avaliar o efeito da frequência de perturbação nos coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento do sistema. Para este fim, os coeficientes equivalentes são calculados para um range de frequências de perturbação e para diferentes condições de operação.

Com o objetivo de compreender como se comportam os coeficientes dinâmicos do sistema ao cruzar uma região de ressonância, as frequências naturais do sistema contidas na faixa de frequências de perturbação analisado devem ser determinadas a partir do procedimento descrito na **seção 2.4.1**. A Tabela 3.3 apresenta as frequências naturais amortecidas f_d e os fatores de amortecimento ζ para um carregamento estático F_z de 20 kN e velocidade de rotação Ω de 1000 RPM (16,67 Hz), em uma faixa de frequências de $1/5\Omega$ (3,33 Hz) a 5Ω (83,33 Hz), onde $f_d = f\sqrt{1 - \zeta^2}$, sendo f a frequência natural.

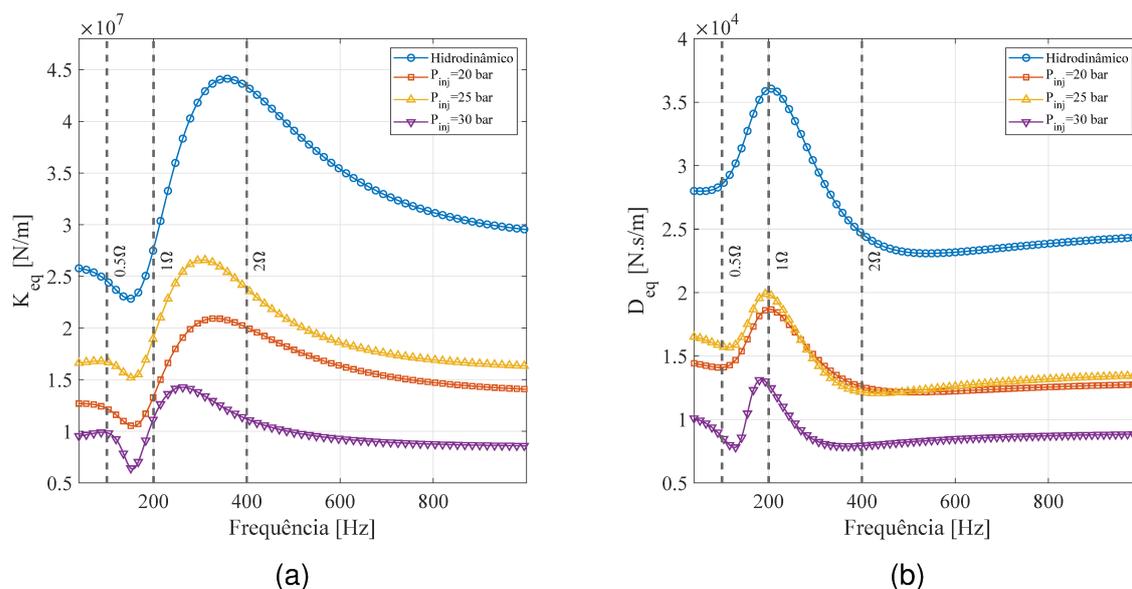


Figura 3.14: Influência da frequência de perturbação nos coeficientes dinâmicos equivalentes para os regimes de lubrificação hidrodinâmico e híbrido para $F_z = 10$ kN e $\Omega = 12000$ RPM. (a) Rigidez equivalente; (b) Amortecimento equivalente.

Os resultados mostram que os coeficientes equivalentes para uma dada condição de operação são influenciados pela frequência de perturbação para ambos os casos avaliados, isto é, tanto para baixas (Fig. 3.13) quanto para altas (Fig. 3.14) velocidades de rotação. É importante notar que em ambas as análises, a frequência de perturbação cruza algumas frequências naturais do sistema. Entretanto, enquanto a variação dos coeficientes em torno das frequências naturais para $F_z = 20$ kN e $\Omega = 1000$ RPM é quase imperceptível, a variação dos coeficientes dinâmicos equivalentes em torno das frequências naturais para $F_z = 10$ kN e $\Omega = 12000$ RPM é mais evidente. Este comportamento pode ser explicado pela magnitude do fator de amortecimento associado àquelas frequências que, no primeiro caso, é elevado (ζ em torno de 0.9, veja a Tab. 3.3), enquanto que, no segundo caso, o fator de amortecimento associado é baixo (em comparação com o primeiro caso), como mostra a Tab. 3.4.

Capítulo 4

Conclusões e Perspectivas

No presente trabalho o comportamento dinâmico de um mancal hidrodinâmico segmentado axial (TPTB) sob regime de lubrificação hidrodinâmico e híbrido foram avaliados. Para este fim, o procedimento matemático para avaliar o comportamento estático e dinâmico no **Capítulo 2**. Contempla-se no referido capítulo o procedimento utilizado para a obtenção das equações de Reynolds e de energia modificadas para um regime de lubrificação híbrido. É também no **Capítulo 2** que são descritos os procedimentos matemáticos para a obtenção dos coeficientes de rigidez e amortecimento do filme de óleo, determinação das frequências naturais do sistema rotor-mancal e cálculo dos coeficientes dinâmicos equivalentes.

No **Capítulo 3** são apresentados e discutidos os resultados obtidos a partir da aplicação da metodologia proposta neste trabalho para um mancal TBTB de dupla ação. Dos resultados apresentados no **capítulo 3**, pode-se destacar as seguintes conclusões:

1. A temperatura máxima do filme de óleo observada para o regime de lubrificação híbrido é menor do que a máxima temperatura observada para o regime de lubrificação hidrodinâmico, o que pode ser explicado por duas razões: a injeção de óleo frio no filme de óleo e o aumento da espessura do filme de óleo devido a vazão de injeção de óleo;
2. No método da perturbação numérica para o cálculo dos coeficientes dinâmicos o tamanho da perturbação está contido em uma range limitado. Assim, a validade deste método está restrito à um determinado range e, portanto, deve-se

primeiramente verificar se o tamanho da perturbação escolhida é válido;

3. Os coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento diminuem com o aumento da espessura do óleo. Por esta razão, os coeficientes equivalentes calculados para o regime de lubrificação híbrido tem suas amplitudes reduzidas com o aumento da pressão de injeção de óleo. Ademais, a magnitude dos coeficientes equivalentes aumenta com o aumento da carga estática aplicada e reduz com o aumento da velocidade de rotação, para ambos os regimes de lubrificação;
4. Os coeficientes equivalentes são influenciados pela frequência de excitação e, a significância desta influência, está relacionada às frequências naturais e aos coeficientes de amortecimento associados a cada modo de vibrar.

Como trabalhos futuros que podem ser realizados suportados pelas conclusões desta *Tese de doutorado* destaca-se primeiramente a verificação experimental dos resultados teóricos apresentados. Para este fim, foi projetada uma bancada experimental inspirada no modelo rotordinâmico de uma UG vertical do tipo Francis. Para a verificação experimental dos efeitos da lubrificação híbrida no comportamento dinâmico do sistema, foi projetado um sistema hidráulico para a injeção de óleo à alta pressão através dos orifícios de injeção presentes em cada um dos segmentos do TPTB da bancada experimental.

Por fim, é importante destacar que a metodologia apresentada nesta *Tese de doutorado* pode ser utilizada como suporte para o desenvolvimento de técnicas de controle ativo de vibrações axiais.

Referências

ALLAIRE, P.; PARSELL, J.; BARRETT, L. A pad perturbation method for the dynamic coefficients of tilting-pad journal bearings. **Wear**, v. 72, n. 1, p. 29–44, 1981. ISSN 0043-1648. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0043164881902817>>.

AMANO, R. S. Review of Wind Turbine Research in 21st Century. **Journal of Energy Resources Technology**, v. 139, n. 5, 09 2017. ISSN 0195-0738. 050801. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.4037757>>.

BABIN, A.; KORNAEV, A.; RODICHEV, A.; SAVIN, L. Active thrust fluid-film bearings: Theoretical and experimental studies. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 234, n. 2, p. 261–273, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/1350650119862074>>.

BARBOSA, J. S. **Análise de modelos termohidrodinâmicos para mancais de unidades geradoras Francis**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Brasil, 2018. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2018.1146>>.

BARBOSA, J. S.; SICCHIERI, L. C.; DOURADO, A. D. P.; CAVALINI ALDEMIR AP, J.; STEFFEN VALDER, J. Kriging Approach Dedicated to Represent Hydrodynamic Bearings. **Journal of Engineering for Gas Turbines and Power**, v. 143, n. 6, 03 2021. ISSN 0742-4795. 061016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.4049307>>.

BOUYER, J.; WODTKE, M.; FILLON, M. Experimental research on a hydrodynamic thrust bearing with hydrostatic lift pockets: Influence of lubrication modes on bearing performance. **Tribology International**, v. 165, p. 107253, 2022. ISSN 0301-679X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301679X21004011>>.

BRODNY, J.; TUTAK, M. Analyzing similarities between the european union countries in terms of the structure and volume of energy production from renewable energy sources. **Energies**, v. 13, n. 4, 2020. ISSN 1996-1073. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/1996-1073/13/4/913>>.

CHANG-JIAN, C.-W. Nonlinear simulation of rotor dynamics coupled with journal and thrust bearing dynamics under nonlinear suspension. **Tribology transactions**, Taylor & Francis, v. 53, n. 6, p. 897–908, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/10402004.2010.507904>>.

CHEN, Z.; CHEN, G. An overview of energy consumption of the globalized world economy. **Energy Policy**, Elsevier, v. 39, n. 10, p. 5920–5928, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.enpol.2011.06.046>>.

GUO, A.; WANG, X.; JIN, J.; HUA, D. Y.; HUA, Z. Experimental test of static and dynamic characteristics of tilting-pad thrust bearings. **Advances in Mechanical Engineering**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 7, n. 7, p. 1687814015593878, 2015. Disponível em: <<https://journals.sagepub.com/doi/pdf/10.1177/1687814015593878>>.

HEINRICHSON, N.; FUERST, A.; SANTOS, I. F. The Influence of Injection Pockets on the Performance of Tilting-Pad Thrust Bearings—Part II: Comparison Between Theory and Experiment. **Journal of Tribology**, v. 129, n. 4, p. 904–912, 06 2007. ISSN 0742-4787. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.2768610>>.

HEINRICHSON, N.; SANTOS, I. F.; FUERST, A. The Influence of Injection Pockets on the Performance of Tilting-Pad Thrust Bearings—Part I: Theory. **Journal of Tribology**, v. 129, n. 4, p. 895–903, 06 2007. ISSN 0742-4787. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.2768609>>.

JIANG, P.; YU, L. Dynamics of a rotor-bearing system equipped with a hydrodynamic thrust bearing. **Journal of Sound and Vibration**, v. 227, n. 4, p. 833–872, 1999. ISSN 0022-460X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X9992388X>>.

LUND, J.; THOMSEN, K. A calculation method and data for the dynamic coefficients of oil-lubricated journal bearings. **Topics in fluid film bearing and rotor bearing system design and optimization**, ASME New York, n. 1000118, 1978. Disponível em: <https://dyrobes.com/wp-content/uploads/2015/09/A-Calculation-Method_Oil-Lubricated_ASME-1982_linked.pdf>.

LUND, J. W. Spring and damping coefficients for the tilting-pad journal bearing. **ASLE Transactions**, Taylor & Francis, v. 7, n. 4, p. 342–352, 1964. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/05698196408972064>>.

MITTWOLLEN, N.; HEGEL, T.; GLIENICKE, J. Effect of Hydrodynamic Thrust Bearings on Lateral Shaft Vibrations. **Journal of Tribology**, v. 113, n. 4, p. 811–817, 10 1991. ISSN 0742-4787. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.2920697>>.

NICOLETTI, R. **Efeitos Térmicos em Mancais Segmentados Híbridos - Teoria e Experimento**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, 1999. Disponível em: <<https://hdl.handle.net/20.500.12733/1587033>>.

RAIMI, D.; CAMPBELL, E.; NEWELL, R.; PREST, B.; VILLANUEVA, S.; WINGENROTH, J. Global energy outlook 2022: Turning points and tension in the energy transition. **Resources for the Future Report, Washington, DC**, 2022. Disponível em: <https://media.rff.org/documents/Report_22-04_v1.pdf>.

SEETON, C. J. Viscosity-temperature correlation for liquids. **Tribology Letters**, v. 22, p. 131–142, 2006. ISSN 1573-2711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11249-006-9071-2>>.

SOMEYA, T.; FUKUDA, M. Analysis and experimental verification of dynamic characteristics of oil film thrust bearings. **Bulletin of JSME**, The Japan Society of Mechanical Engineers, v. 15, n. 86, p. 1004–1015, 1972. Disponível em: <<https://doi.org/10.1299/jsme1958.15.1004>>.

SPRINGER, H. Zur berechnung hydrodynamischer lager mit hilfe von tschebyscheff-polynomen. **Forschung im Ingenieurwesen A**, Springer, v. 44, n. 4, p. 126–134, 1978. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02560727>>.

SPRINGER, H. Nichtlineare schwingungen schwerer rotoren mit vertikaler welle und kippsegmentradiallagern. **Forschung im Ingenieurwesen A**, Springer, v. 45, n. 4, p. 119–132, 1979. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02560675>>.

STORTEIG, E.; WHITE, M. F. Dynamic characteristics of hydrodynamically lubricated fixed-pad thrust bearings. **Wear**, v. 232, n. 2, p. 250–255, 1999. ISSN 0043-1648. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0043164899001532>>.

TIAN, Z.; CAO, H.; HUANG, Y. Static characteristics of hydrostatic thrust bearing considering the inertia effect on the region of supply hole. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 233, n. 1, p. 188–193, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/1350650118773944>>.

WANG, L.; FU, Y.; PEI, S.; XU, H. Theoretical and experimental study on the axial oil film stiffness of tilting pad thrust bearings. **Tribology Transactions**, Taylor & Francis, v. 60, n. 3, p. 419–427, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/10402004.2016.1176284>>.

WANG, W.; LIU, B.; ZHANG, Y.; SHAO, X.; ALLAIRE, P. E. Theoretical and experimental study on the static and dynamic characteristics of tilting-pad thrust bearing. **Tribology International**, v. 123, p. 26–36, 2018. ISSN 0301-679X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301679X18301002>>.

ZHAO, H.; CHOY, F.; BRAUN, M. Dynamic characteristics and stability analysis of a wavy thrust bearing. **Tribology transactions**, Taylor & Francis, v. 48, n. 1, p. 133–139, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/05698190590903097>>.

Apêndice A

Resultados obtidos nas análises estática e dinâmica

Nesta seção serão apresentados na íntegra as posições de equilíbrio, os coeficientes dinâmicos, as frequências naturais e os fatores de amortecimento para cada uma das condições de operação abordadas no **Capítulo 3**. Deste modo, são apresentadas posições de equilíbrio e os coeficientes dinâmicos do filme de óleo para diferentes condições de operação e regimes de lubrificação (Tabs. A.1-A.17) e as frequências naturais e fatores de amortecimento para diferentes condições de operação e regimes de lubrificação (Tab. A.17 e Tab. A.18).

Tabela A.1: Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação hidrodinâmica, sendo $F_z = 10$ kN e $1000 \leq \Omega \leq 3000$ RPM.

		Ω [RPM]				
		1000	1500	2000	2500	3000
h_{pivot0}	$[\mu m]$	2,94E-05	3,61E-05	4,16E-05	4,66E-05	5,10E-05
α_{r0}	$[rad]$	-3,09E-04	-3,78E-04	-4,37E-04	-4,88E-04	-5,35E-04
α_{s0}	$[rad]$	4,05E-04	4,95E-04	5,72E-04	6,40E-04	7,01E-04
k_{zz}	$[N/m]$	1,75E+08	1,43E+08	1,24E+08	1,11E+08	1,01E+08
$k_{z\alpha_r}$	$[N/rad]$	6,00E+06	4,90E+06	4,24E+06	3,79E+06	3,46E+06
$k_{z\alpha_s}$	$[N/rad]$	6,25E+04	5,10E+04	4,42E+04	3,95E+04	3,61E+04
$k_{\alpha_r z}$	$[N]$	2,88E+05	2,35E+05	2,03E+05	1,82E+05	1,66E+05
$k_{\alpha_r \alpha_r}$	$[N.m/rad]$	4,20E+04	3,43E+04	2,97E+04	2,65E+04	2,42E+04
$k_{\alpha_r \alpha_s}$	$[N.m/rad]$	1,11E+04	9,07E+03	7,85E+03	7,02E+03	6,41E+03
$k_{\alpha_s z}$	$[N]$	-1,14E+05	-9,32E+04	-8,07E+04	-7,22E+04	-6,59E+04
$k_{\alpha_s \alpha_r}$	$[N.m/rad]$	-1,12E+03	-9,14E+02	-7,91E+02	-7,08E+02	-6,46E+02
$k_{\alpha_s \alpha_s}$	$[N.m/rad]$	7,45E+03	6,09E+03	5,27E+03	4,71E+03	4,30E+03
d_{zz}	$[N.s/m]$	1,90E+06	1,04E+06	6,72E+05	4,81E+05	3,66E+05
$d_{z\alpha_r}$	$[N.s/rad]$	5,22E+03	2,84E+03	1,84E+03	1,32E+03	1,00E+03
$d_{z\alpha_s}$	$[N.s/rad]$	8,11E+02	4,42E+02	2,87E+02	2,05E+02	1,56E+02
$d_{\alpha_r z}$	$[N.s]$	5,21E+03	2,84E+03	1,84E+03	1,32E+03	1,00E+03
$d_{\alpha_r \alpha_r}$	$[N.m.s/rad]$	2,34E+02	1,27E+02	8,27E+01	5,92E+01	4,50E+01
$d_{\alpha_r \alpha_s}$	$[N.m.s/rad]$	-3,16E+00	-1,72E+00	-1,12E+00	-7,98E-01	-6,07E-01
$d_{\alpha_s z}$	$[N.s]$	8,21E+02	4,47E+02	2,90E+02	2,08E+02	1,58E+02
$d_{\alpha_s \alpha_r}$	$[N.m.s/rad]$	-3,12E+00	-1,70E+00	-1,10E+00	-7,90E-01	-6,01E-01
$d_{\alpha_s \alpha_s}$	$[N.m.s/rad]$	5,19E+01	2,82E+01	1,83E+01	1,31E+01	9,99E+00

Tabela A.2: Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação híbrido, sendo $P_{inj} = 20$ bar, $F_z = 10$ kN e $1000 \leq \Omega \leq 3000$ RPM.

		Ω [RPM]				
		1000	1500	2000	2500	3000
h_{pivot0}	$[\mu m]$	3,09E-05	3,79E-05	4,37E-05	4,89E-05	5,36E-05
α_{r0}	$[rad]$	-3,17E-04	-3,88E-04	-4,48E-04	-5,01E-04	-5,49E-04
α_{s0}	$[rad]$	4,33E-04	5,30E-04	6,13E-04	6,85E-04	7,50E-04
k_{zz}	$[N/m]$	9,77E+07	7,96E+07	6,89E+07	6,15E+07	5,61E+07
$k_{z\alpha_r}$	$[N/rad]$	3,55E+06	2,90E+06	2,51E+06	2,24E+06	2,04E+06
$k_{z\alpha_s}$	$[N/rad]$	6,07E+04	4,91E+04	4,23E+04	3,76E+04	3,41E+04
$k_{\alpha_r z}$	$[N]$	2,05E+05	1,67E+05	1,45E+05	1,29E+05	1,18E+05
$k_{\alpha_r \alpha_r}$	$[N.m/rad]$	3,63E+04	2,96E+04	2,56E+04	2,29E+04	2,09E+04
$k_{\alpha_r \alpha_s}$	$[N.m/rad]$	9,81E+03	8,00E+03	6,92E+03	6,19E+03	5,65E+03
$k_{\alpha_s z}$	$[N]$	-1,33E+05	-1,09E+05	-9,43E+04	-8,45E+04	-7,72E+04
$k_{\alpha_s \alpha_r}$	$[N.m/rad]$	-1,99E+03	-1,63E+03	-1,42E+03	-1,27E+03	-1,16E+03
$k_{\alpha_s \alpha_s}$	$[N.m/rad]$	6,68E+03	5,45E+03	4,72E+03	4,22E+03	3,85E+03
d_{zz}	$[N.s/m]$	1,10E+06	5,99E+05	3,88E+05	2,78E+05	2,11E+05
$d_{z\alpha_r}$	$[N.s/rad]$	4,36E+03	2,37E+03	1,54E+03	1,10E+03	8,36E+02
$d_{z\alpha_s}$	$[N.s/rad]$	3,90E+02	2,10E+02	1,35E+02	9,64E+01	7,30E+01
$d_{\alpha_r z}$	$[N.s]$	4,36E+03	2,37E+03	1,54E+03	1,10E+03	8,35E+02
$d_{\alpha_r \alpha_r}$	$[N.m.s/rad]$	2,08E+02	1,13E+02	7,34E+01	5,25E+01	4,00E+01
$d_{\alpha_r \alpha_s}$	$[N.m.s/rad]$	-3,40E+00	-1,86E+00	-1,21E+00	-8,66E-01	-6,59E-01
$d_{\alpha_s z}$	$[N.s]$	3,95E+02	2,13E+02	1,37E+02	9,79E+01	7,41E+01
$d_{\alpha_s \alpha_r}$	$[N.m.s/rad]$	-3,37E+00	-1,84E+00	-1,20E+00	-8,59E-01	-6,54E-01
$d_{\alpha_s \alpha_s}$	$[N.m.s/rad]$	4,52E+01	2,46E+01	1,59E+01	1,14E+01	8,67E+00

Tabela A.3: Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação híbrido, sendo $P_{inj} = 25$ bar, $F_z = 10$ kN e $1000 \leq \Omega \leq 3000$ RPM.

		Ω [RPM]				
		1000	1500	2000	2500	3000
h_{pivot0}	[μm]	3,42E-05	4,19E-05	4,83E-05	5,40E-05	5,92E-05
α_{r0}	[rad]	-3,35E-04	-4,11E-04	-4,75E-04	-5,31E-04	-5,81E-04
α_{s0}	[rad]	4,86E-04	5,96E-04	6,89E-04	7,70E-04	8,43E-04
k_{zz}	[N/m]	7,19E+07	5,86E+07	5,07E+07	4,52E+07	4,12E+07
$k_{z\alpha_r}$	[N/rad]	2,72E+06	2,22E+06	1,92E+06	1,72E+06	1,57E+06
$k_{z\alpha_s}$	[N/rad]	4,52E+04	3,63E+04	3,11E+04	2,74E+04	2,47E+04
$k_{\alpha_r z}$	[N]	1,35E+05	1,10E+05	9,53E+04	8,52E+04	7,77E+04
$k_{\alpha_r \alpha_r}$	[N.m/rad]	2,84E+04	2,31E+04	2,00E+04	1,79E+04	1,63E+04
$k_{\alpha_r \alpha_s}$	[N.m/rad]	7,63E+03	6,22E+03	5,39E+03	4,82E+03	4,40E+03
$k_{\alpha_s z}$	[N]	-1,16E+05	-9,48E+04	-8,24E+04	-7,40E+04	-6,78E+04
$k_{\alpha_s \alpha_r}$	[N.m/rad]	-1,79E+03	-1,47E+03	-1,28E+03	-1,15E+03	-1,05E+03
$k_{\alpha_s \alpha_s}$	[N.m/rad]	5,56E+03	4,53E+03	3,92E+03	3,51E+03	3,20E+03
d_{zz}	[N.s/m]	8,48E+05	4,61E+05	2,99E+05	2,14E+05	1,63E+05
$d_{z\alpha_r}$	[N.s/rad]	3,37E+03	1,83E+03	1,19E+03	8,50E+02	6,47E+02
$d_{z\alpha_s}$	[N.s/rad]	2,03E+02	1,08E+02	6,95E+01	4,92E+01	3,71E+01
$d_{\alpha_r z}$	[N.s]	3,37E+03	1,83E+03	1,19E+03	8,50E+02	6,46E+02
$d_{\alpha_r \alpha_r}$	[N.m.s/rad]	1,61E+02	8,74E+01	5,67E+01	4,06E+01	3,09E+01
$d_{\alpha_r \alpha_s}$	[N.m.s/rad]	-2,96E+00	-1,62E+00	-1,05E+00	-7,56E-01	-5,76E-01
$d_{\alpha_s z}$	[N.s]	2,07E+02	1,11E+02	7,11E+01	5,04E+01	3,80E+01
$d_{\alpha_s \alpha_r}$	[N.m.s/rad]	-2,94E+00	-1,61E+00	-1,05E+00	-7,51E-01	-5,72E-01
$d_{\alpha_s \alpha_s}$	[N.m.s/rad]	3,47E+01	1,88E+01	1,22E+01	8,75E+00	6,65E+00

Tabela A.4: Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação híbrido, sendo $P_{inj} = 30$ bar, $F_z = 10$ kN e $1000 \leq \Omega \leq 3000$ RPM.

		Ω [RPM]				
		1000	1500	2000	2500	3000
h_{pivot0}	[μm]	3,87E-05	4,74E-05	5,47E-05	6,11E-05	6,69E-05
α_{r0}	[rad]	-3,59E-04	-4,40E-04	-5,08E-04	-5,67E-04	-6,21E-04
α_{s0}	[rad]	5,64E-04	6,91E-04	7,98E-04	8,91E-04	9,75E-04
k_{zz}	[N/m]	4,85E+07	3,95E+07	3,41E+07	3,04E+07	2,77E+07
$k_{z\alpha_r}$	[N/rad]	1,93E+06	1,58E+06	1,37E+06	1,22E+06	1,11E+06
$k_{z\alpha_s}$	[N/rad]	2,95E+04	2,36E+04	1,99E+04	1,73E+04	1,53E+04
$k_{\alpha_r z}$	[N]	7,43E+04	6,04E+04	5,22E+04	4,67E+04	4,26E+04
$k_{\alpha_r \alpha_r}$	[N.m/rad]	2,08E+04	1,70E+04	1,47E+04	1,32E+04	1,20E+04
$k_{\alpha_r \alpha_s}$	[N.m/rad]	5,54E+03	4,52E+03	3,92E+03	3,51E+03	3,20E+03
$k_{\alpha_s z}$	[N]	-9,65E+04	-7,92E+04	-6,90E+04	-6,21E+04	-5,72E+04
$k_{\alpha_s \alpha_r}$	[N.m/rad]	-1,53E+03	-1,25E+03	-1,09E+03	-9,77E+02	-8,95E+02
$k_{\alpha_s \alpha_s}$	[N.m/rad]	4,46E+03	3,64E+03	3,15E+03	2,82E+03	2,57E+03
d_{zz}	[N.s/m]	6,06E+05	3,30E+05	2,14E+05	1,53E+05	1,16E+05
$d_{z\alpha_r}$	[N.s/rad]	2,39E+03	1,30E+03	8,45E+02	6,05E+02	4,60E+02
$d_{z\alpha_s}$	[N.s/rad]	5,42E+01	2,84E+01	1,79E+01	1,25E+01	9,24E+00
$d_{\alpha_r z}$	[N.s]	2,39E+03	1,30E+03	8,45E+02	6,05E+02	4,60E+02
$d_{\alpha_r \alpha_r}$	[N.m.s/rad]	1,15E+02	6,27E+01	4,08E+01	2,92E+01	2,22E+01
$d_{\alpha_r \alpha_s}$	[N.m.s/rad]	-2,48E+00	-1,35E+00	-8,79E-01	-6,30E-01	-4,80E-01
$d_{\alpha_s z}$	[N.s]	5,77E+01	3,03E+01	1,91E+01	1,34E+01	9,91E+00
$d_{\alpha_s \alpha_r}$	[N.m.s/rad]	-2,46E+00	-1,34E+00	-8,74E-01	-6,26E-01	-4,77E-01
$d_{\alpha_s \alpha_s}$	[N.m.s/rad]	2,47E+01	1,34E+01	8,73E+00	6,25E+00	4,76E+00

Tabela A.5: Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação hidrodinâmica, sendo $F_z = 20$ kN e $1000 \leq \Omega \leq 3000$ RPM.

		Ω [RPM]				
		1000	1500	2000	2500	3000
h_{pivot0}	$[\mu m]$	2,04E-05	2,49E-05	2,88E-05	3,22E-05	3,53E-05
α_{r0}	$[rad]$	-2,52E-04	-3,08E-04	-3,56E-04	-3,98E-04	-4,36E-04
α_{s0}	$[rad]$	3,21E-04	3,93E-04	4,53E-04	5,07E-04	5,55E-04
k_{zz}	$[N/m]$	5,17E+08	4,22E+08	3,65E+08	3,27E+08	2,98E+08
$k_{z\alpha_r}$	$[N/rad]$	1,51E+07	1,24E+07	1,07E+07	9,58E+06	8,74E+06
$k_{z\alpha_s}$	$[N/rad]$	-1,44E+05	-1,17E+05	-1,02E+05	-9,10E+04	-8,31E+04
$k_{\alpha_r z}$	$[N]$	1,04E+06	8,51E+05	7,37E+05	6,59E+05	6,02E+05
$k_{\alpha_r \alpha_r}$	$[N.m/rad]$	1,17E+05	9,56E+04	8,28E+04	7,41E+04	6,76E+04
$k_{\alpha_r \alpha_s}$	$[N.m/rad]$	2,57E+04	2,10E+04	1,82E+04	1,62E+04	1,48E+04
$k_{\alpha_s z}$	$[N]$	-3,96E+05	-3,23E+05	-2,80E+05	-2,50E+05	-2,29E+05
$k_{\alpha_s \alpha_r}$	$[N.m/rad]$	-4,40E+03	-3,60E+03	-3,11E+03	-2,79E+03	-2,54E+03
$k_{\alpha_s \alpha_s}$	$[N.m/rad]$	2,17E+04	1,77E+04	1,53E+04	1,37E+04	1,25E+04
d_{zz}	$[N.s/m]$	4,65E+06	2,53E+06	1,64E+06	1,18E+06	8,95E+05
$d_{z\alpha_r}$	$[N.s/rad]$	1,24E+04	6,77E+03	4,40E+03	3,15E+03	2,40E+03
$d_{z\alpha_s}$	$[N.s/rad]$	1,88E+03	1,02E+03	6,65E+02	4,76E+02	3,62E+02
$d_{\alpha_r z}$	$[N.s]$	1,24E+04	6,77E+03	4,40E+03	3,15E+03	2,39E+03
$d_{\alpha_r \alpha_r}$	$[N.m.s/rad]$	5,78E+02	3,15E+02	2,04E+02	1,46E+02	1,11E+02
$d_{\alpha_r \alpha_s}$	$[N.m.s/rad]$	-1,21E+01	-6,57E+00	-4,27E+00	-3,06E+00	-2,32E+00
$d_{\alpha_s z}$	$[N.s]$	1,91E+03	1,04E+03	6,74E+02	4,82E+02	3,67E+02
$d_{\alpha_s \alpha_r}$	$[N.m.s/rad]$	-1,20E+01	-6,53E+00	-4,24E+00	-3,03E+00	-2,31E+00
$d_{\alpha_s \alpha_s}$	$[N.m.s/rad]$	1,26E+02	6,87E+01	4,46E+01	3,19E+01	2,43E+01

Tabela A.6: Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação híbrido, sendo $P_{inj} = 36$ bar, $F_z = 20$ kN e $1000 \leq \Omega \leq 3000$ RPM.

		Ω [RPM]				
		1000	1500	2000	2500	3000
h_{pivot0}	$[\mu m]$	2,07E-05	2,53E-05	2,93E-05	3,27E-05	3,59E-05
α_{r0}	$[rad]$	-2,52E-04	-3,09E-04	-3,56E-04	-3,99E-04	-4,37E-04
α_{s0}	$[rad]$	3,28E-04	4,02E-04	4,64E-04	5,19E-04	5,69E-04
k_{zz}	$[N/m]$	3,24E+08	2,64E+08	2,29E+08	2,04E+08	1,86E+08
$k_{z\alpha_r}$	$[N/rad]$	1,01E+07	8,20E+06	7,09E+06	6,33E+06	5,77E+06
$k_{z\alpha_s}$	$[N/rad]$	-6,02E+04	-5,06E+04	-4,45E+04	-4,01E+04	-3,68E+04
$k_{\alpha_r z}$	$[N]$	9,10E+05	7,42E+05	6,42E+05	5,73E+05	5,23E+05
$k_{\alpha_r \alpha_r}$	$[N.m/rad]$	1,12E+05	9,10E+04	7,87E+04	7,04E+04	6,42E+04
$k_{\alpha_r \alpha_s}$	$[N.m/rad]$	2,47E+04	2,01E+04	1,74E+04	1,56E+04	1,42E+04
$k_{\alpha_s z}$	$[N]$	-4,65E+05	-3,81E+05	-3,30E+05	-2,96E+05	-2,70E+05
$k_{\alpha_s \alpha_r}$	$[N.m/rad]$	-6,69E+03	-5,50E+03	-4,78E+03	-4,28E+03	-3,92E+03
$k_{\alpha_s \alpha_s}$	$[N.m/rad]$	2,09E+04	1,71E+04	1,48E+04	1,32E+04	1,20E+04
d_{zz}	$[N.s/m]$	2,99E+06	1,62E+06	1,05E+06	7,52E+05	5,71E+05
$d_{z\alpha_r}$	$[N.s/rad]$	1,17E+04	6,33E+03	4,11E+03	2,94E+03	2,23E+03
$d_{z\alpha_s}$	$[N.s/rad]$	1,08E+03	5,76E+02	3,71E+02	2,64E+02	2,00E+02
$d_{\alpha_r z}$	$[N.s]$	1,17E+04	6,33E+03	4,10E+03	2,93E+03	2,23E+03
$d_{\alpha_r \alpha_r}$	$[N.m.s/rad]$	5,65E+02	3,07E+02	1,99E+02	1,42E+02	1,08E+02
$d_{\alpha_r \alpha_s}$	$[N.m.s/rad]$	-1,28E+01	-7,02E+00	-4,57E+00	-3,27E+00	-2,49E+00
$d_{\alpha_s z}$	$[N.s]$	1,09E+03	5,85E+02	3,76E+02	2,68E+02	2,03E+02
$d_{\alpha_s \alpha_r}$	$[N.m.s/rad]$	-1,28E+01	-6,97E+00	-4,54E+00	-3,26E+00	-2,48E+00
$d_{\alpha_s \alpha_s}$	$[N.m.s/rad]$	1,21E+02	6,60E+01	4,28E+01	3,06E+01	2,33E+01

Tabela A.7: Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação híbrido, sendo $P_{inj} = 42$ bar, $F_z = 20$ kN e $1000 \leq \Omega \leq 3000$ RPM.

		Ω [RPM]				
		1000	1500	2000	2500	3000
h_{pivot0}	$[\mu m]$	2,19E-05	2,68E-05	3,10E-05	3,47E-05	3,80E-05
α_{r0}	$[rad]$	-2,60E-04	-3,19E-04	-3,69E-04	-4,12E-04	-4,52E-04
α_{s0}	$[rad]$	3,47E-04	4,26E-04	4,92E-04	5,51E-04	6,04E-04
k_{zz}	$[N/m]$	2,76E+08	2,25E+08	1,94E+08	1,74E+08	1,58E+08
$k_{z\alpha_r}$	$[N/rad]$	8,74E+06	7,12E+06	6,15E+06	5,50E+06	5,01E+06
$k_{z\alpha_s}$	$[N/rad]$	-5,13E+04	-4,34E+04	-3,87E+04	-3,54E+04	-3,28E+04
$k_{\alpha_r z}$	$[N]$	7,53E+05	6,13E+05	5,30E+05	4,73E+05	4,32E+05
$k_{\alpha_r \alpha_r}$	$[N.m/rad]$	9,76E+04	7,96E+04	6,88E+04	6,15E+04	5,61E+04
$k_{\alpha_r \alpha_s}$	$[N.m/rad]$	2,17E+04	1,77E+04	1,53E+04	1,37E+04	1,25E+04
$k_{\alpha_s z}$	$[N]$	-4,26E+05	-3,49E+05	-3,03E+05	-2,72E+05	-2,48E+05
$k_{\alpha_s \alpha_r}$	$[N.m/rad]$	-6,14E+03	-5,04E+03	-4,39E+03	-3,94E+03	-3,61E+03
$k_{\alpha_s \alpha_s}$	$[N.m/rad]$	1,89E+04	1,54E+04	1,33E+04	1,19E+04	1,09E+04
d_{zz}	$[N.s/m]$	2,60E+06	1,41E+06	9,16E+05	6,55E+05	4,97E+05
$d_{z\alpha_r}$	$[N.s/rad]$	1,02E+04	5,56E+03	3,60E+03	2,57E+03	1,96E+03
$d_{z\alpha_s}$	$[N.s/rad]$	8,03E+02	4,28E+02	2,74E+02	1,93E+02	1,46E+02
$d_{\alpha_r z}$	$[N.s]$	1,02E+04	5,55E+03	3,60E+03	2,57E+03	1,95E+03
$d_{\alpha_r \alpha_r}$	$[N.m.s/rad]$	4,92E+02	2,68E+02	1,74E+02	1,24E+02	9,43E+01
$d_{\alpha_r \alpha_s}$	$[N.m.s/rad]$	-1,13E+01	-6,18E+00	-4,03E+00	-2,89E+00	-2,20E+00
$d_{\alpha_s z}$	$[N.s]$	8,17E+02	4,36E+02	2,79E+02	1,97E+02	1,48E+02
$d_{\alpha_s \alpha_r}$	$[N.m.s/rad]$	-1,12E+01	-6,14E+00	-4,00E+00	-2,87E+00	-2,19E+00
$d_{\alpha_s \alpha_s}$	$[N.m.s/rad]$	1,06E+02	5,74E+01	3,72E+01	2,66E+01	2,02E+01

Tabela A.8: Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação híbrido, sendo $P_{inj} = 48$ bar, $F_z = 20$ kN e $1000 \leq \Omega \leq 3000$ RPM.

		Ω [RPM]				
		1000	1500	2000	2500	3000
h_{pivot0}	$[\mu m]$	2,33E-05	2,86E-05	3,30E-05	3,70E-05	4,05E-05
α_{r0}	$[rad]$	-2,70E-04	-3,31E-04	-3,83E-04	-4,28E-04	-4,69E-04
α_{s0}	$[rad]$	3,72E-04	4,56E-04	5,27E-04	5,89E-04	6,46E-04
k_{zz}	$[N/m]$	2,29E+08	1,87E+08	1,61E+08	1,44E+08	1,31E+08
$k_{z\alpha_r}$	$[N/rad]$	7,43E+06	6,05E+06	5,23E+06	4,68E+06	4,26E+06
$k_{z\alpha_s}$	$[N/rad]$	-4,57E+04	-3,85E+04	-3,43E+04	-3,15E+04	-2,94E+04
$k_{\alpha_r z}$	$[N]$	6,03E+05	4,91E+05	4,24E+05	3,79E+05	3,45E+05
$k_{\alpha_r \alpha_r}$	$[N.m/rad]$	8,39E+04	6,84E+04	5,92E+04	5,29E+04	4,83E+04
$k_{\alpha_r \alpha_s}$	$[N.m/rad]$	1,87E+04	1,52E+04	1,32E+04	1,18E+04	1,07E+04
$k_{\alpha_s z}$	$[N]$	-3,87E+05	-3,17E+05	-2,75E+05	-2,47E+05	-2,26E+05
$k_{\alpha_s \alpha_r}$	$[N.m/rad]$	-5,61E+03	-4,60E+03	-4,00E+03	-3,59E+03	-3,29E+03
$k_{\alpha_s \alpha_s}$	$[N.m/rad]$	1,69E+04	1,38E+04	1,19E+04	1,06E+04	9,71E+03
d_{zz}	$[N.s/m]$	2,22E+06	1,21E+06	7,82E+05	5,59E+05	4,25E+05
$d_{z\alpha_r}$	$[N.s/rad]$	8,77E+03	4,77E+03	3,09E+03	2,21E+03	1,68E+03
$d_{z\alpha_s}$	$[N.s/rad]$	5,36E+02	2,86E+02	1,82E+02	1,28E+02	9,58E+01
$d_{\alpha_r z}$	$[N.s]$	8,77E+03	4,76E+03	3,09E+03	2,21E+03	1,68E+03
$d_{\alpha_r \alpha_r}$	$[N.m.s/rad]$	4,21E+02	2,29E+02	1,49E+02	1,06E+02	8,07E+01
$d_{\alpha_r \alpha_s}$	$[N.m.s/rad]$	-9,94E+00	-5,43E+00	-3,54E+00	-2,54E+00	-1,94E+00
$d_{\alpha_s z}$	$[N.s]$	5,48E+02	2,92E+02	1,86E+02	1,31E+02	9,81E+01
$d_{\alpha_s \alpha_r}$	$[N.m.s/rad]$	-9,88E+00	-5,40E+00	-3,52E+00	-2,52E+00	-1,93E+00
$d_{\alpha_s \alpha_s}$	$[N.m.s/rad]$	9,00E+01	4,89E+01	3,17E+01	2,27E+01	1,72E+01

Tabela A.9: Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação hidrodinâmica, sendo $F_z = 10$ kN e $10000 \leq \Omega \leq 15000$ RPM.

		Ω [RPM]					
		10000	11000	12000	13000	14000	15000
h_{pivot0}	[μm]	9,31E-05	9,76E-05	1,02E-04	1,06E-04	1,10E-04	1,14E-04
α_{r0}	[rad]	-9,77E-04	-1,02E-03	-1,07E-03	-1,11E-03	-1,16E-03	-1,20E-03
α_{s0}	[rad]	1,28E-03	1,34E-03	1,40E-03	1,46E-03	1,51E-03	1,57E-03
k_{zz}	[N/m]	5,54E+07	5,28E+07	5,06E+07	4,86E+07	4,68E+07	4,53E+07
$k_{z\alpha_r}$	[N/rad]	1,90E+06	1,81E+06	1,73E+06	1,66E+06	1,60E+06	1,55E+06
$k_{z\alpha_s}$	[N/rad]	1,98E+04	1,88E+04	1,80E+04	1,73E+04	1,67E+04	1,61E+04
$k_{\alpha_r z}$	[N]	9,10E+04	8,67E+04	8,30E+04	7,98E+04	7,69E+04	7,43E+04
$k_{\alpha_r \alpha_r}$	[N.m/rad]	1,33E+04	1,27E+04	1,21E+04	1,16E+04	1,12E+04	1,08E+04
$k_{\alpha_r \alpha_s}$	[N.m/rad]	3,51E+03	3,35E+03	3,21E+03	3,08E+03	2,97E+03	2,87E+03
$k_{\alpha_s z}$	[N]	-3,61E+04	-3,44E+04	-3,30E+04	-3,17E+04	-3,05E+04	-2,95E+04
$k_{\alpha_s \alpha_r}$	[N.m/rad]	-3,54E+02	-3,37E+02	-3,23E+02	-3,10E+02	-2,99E+02	-2,89E+02
$k_{\alpha_s \alpha_s}$	[N.m/rad]	2,36E+03	2,25E+03	2,15E+03	2,07E+03	1,99E+03	1,92E+03
d_{zz}	[N.s/m]	6,01E+04	5,21E+04	4,57E+04	4,06E+04	3,63E+04	3,27E+04
$d_{z\alpha_r}$	[N.s/rad]	1,65E+02	1,43E+02	1,25E+02	1,11E+02	9,96E+01	8,98E+01
$d_{z\alpha_s}$	[N.s/rad]	2,57E+01	2,22E+01	1,95E+01	1,73E+01	1,55E+01	1,40E+01
$d_{\alpha_r z}$	[N.s]	1,65E+02	1,43E+02	1,25E+02	1,11E+02	9,95E+01	8,97E+01
$d_{\alpha_r \alpha_r}$	[N.m.s/rad]	7,40E+00	6,42E+00	5,63E+00	4,99E+00	4,47E+00	4,03E+00
$d_{\alpha_r \alpha_s}$	[N.m.s/rad]	-9,98E-02	-8,65E-02	-7,59E-02	-6,73E-02	-6,02E-02	-5,43E-02
$d_{\alpha_s z}$	[N.s]	2,60E+01	2,25E+01	1,98E+01	1,75E+01	1,57E+01	1,41E+01
$d_{\alpha_s \alpha_r}$	[N.m.s/rad]	-9,88E-02	-8,56E-02	-7,51E-02	-6,66E-02	-5,96E-02	-5,38E-02
$d_{\alpha_s \alpha_s}$	[N.m.s/rad]	1,64E+00	1,42E+00	1,25E+00	1,11E+00	9,91E-01	8,93E-01

Tabela A.10: Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação híbrido, sendo $P_{inj} = 20$ bar, $F_z = 10$ kN e $10000 \leq \Omega \leq 15000$ RPM.

		Ω [RPM]					
		10000	11000	12000	13000	14000	15000
h_{pivot0}	[μm]	9,77E-05	1,02E-04	1,07E-04	1,11E-04	1,16E-04	1,20E-04
α_{r0}	[rad]	-1,00E-03	-1,05E-03	-1,10E-03	-1,14E-03	-1,18E-03	-1,23E-03
α_{s0}	[rad]	1,37E-03	1,43E-03	1,49E-03	1,56E-03	1,61E-03	1,67E-03
k_{zz}	[N/m]	2,32E+07	3,18E+07	2,91E+07	2,76E+07	2,64E+07	2,54E+07
$k_{z\alpha_r}$	[N/rad]	9,53E+05	1,12E+06	1,04E+06	9,95E+05	9,54E+05	9,19E+05
$k_{z\alpha_s}$	[N/rad]	-3,35E+04	3,70E+04	2,61E+04	2,27E+04	2,08E+04	1,95E+04
$k_{\alpha_r z}$	[N]	5,63E+04	6,42E+04	6,00E+04	5,72E+04	5,49E+04	5,29E+04
$k_{\alpha_r \alpha_r}$	[N.m/rad]	1,13E+04	1,10E+04	1,05E+04	1,00E+04	9,68E+03	9,34E+03
$k_{\alpha_r \alpha_s}$	[N.m/rad]	3,04E+03	2,98E+03	2,84E+03	2,73E+03	2,63E+03	2,54E+03
$k_{\alpha_s z}$	[N]	-7,74E+04	-2,75E+04	-3,25E+04	-3,29E+04	-3,24E+04	-3,17E+04
$k_{\alpha_s \alpha_r}$	[N.m/rad]	-1,40E+03	-3,14E+02	-4,37E+02	-4,55E+02	-4,54E+02	-4,47E+02
$k_{\alpha_s \alpha_s}$	[N.m/rad]	1,85E+03	2,10E+03	1,96E+03	71,87E+03	1,80E+03	1,74E+03
d_{zz}	[N.s/m]	2,88E+04	3,18E+04	2,71E+04	2,38E+04	2,12E+04	1,90E+04
$d_{z\alpha_r}$	[N.s/rad]	1,30E+02	1,20E+02	1,05E+02	9,26E+01	8,27E+01	7,45E+01
$d_{z\alpha_s}$	[N.s/rad]	-1,54E+01	1,98E+01	1,33E+01	1,08E+01	9,31E+00	8,19E+00
$d_{\alpha_r z}$	[N.s]	1,30E+02	1,20E+02	1,05E+02	9,25E+01	8,27E+01	7,44E+01
$d_{\alpha_r \alpha_r}$	[N.m.s/rad]	6,56E+00	5,69E+00	5,00E+00	4,43E+00	3,96E+00	3,57E+00
$d_{\alpha_r \alpha_s}$	[N.m.s/rad]	-1,37E-01	-8,26E-02	-7,68E-02	-6,91E-02	-6,22E-02	-5,63E-02
$d_{\alpha_s z}$	[N.s]	-1,52E+01	2,00E+01	1,35E+01	1,10E+01	9,41E+00	8,29E+00
$d_{\alpha_s \alpha_r}$	[N.m.s/rad]	-1,36E-01	-8,19E-02	-7,62E-02	-6,86E-02	-6,17E-02	-5,58E-02
$d_{\alpha_s \alpha_s}$	[N.m.s/rad]	1,29E+00	1,28E+00	1,10E+00	9,73E-01	8,68E-01	7,82E-01

Tabela A.11: Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação híbrido, sendo $P_{inj} = 25$ bar, $F_z = 10$ kN e $10000 \leq \Omega \leq 15000$ RPM.

		Ω [RPM]					
		10000	11000	12000	13000	14000	15000
h_{pivot0}	[μm]	1,08E-04	1,13E-04	1,18E-04	1,23E-04	1,27E-04	1,32E-04
α_{r0}	[rad]	-1,06E-03	-1,11E-03	-1,16E-03	-1,20E-03	-1,25E-03	-1,29E-03
α_{s0}	[rad]	1,53E-03	1,60E-03	1,67E-03	1,74E-03	1,80E-03	1,86E-03
k_{zz}	[N/m]	2,41E+07	2,24E+07	2,12E+07	2,02E+07	1,94E+07	1,86E+07
$k_{z\alpha_r}$	[N/rad]	8,84E+05	8,35E+05	7,96E+05	7,63E+05	7,34E+05	7,08E+05
$k_{z\alpha_s}$	[N/rad]	2,49E+04	2,03E+04	1,81E+04	1,67E+04	1,57E+04	1,49E+04
$k_{\alpha_r z}$	[N]	4,44E+04	4,18E+04	3,99E+04	3,82E+04	3,68E+04	3,55E+04
$k_{\alpha_r \alpha_r}$	[N.m/rad]	9,01E+03	8,59E+03	8,22E+03	7,90E+03	7,61E+03	7,36E+03
$k_{\alpha_r \alpha_s}$	[N.m/rad]	2,44E+03	2,32E+03	2,22E+03	2,14E+03	2,06E+03	1,99E+03
$k_{\alpha_s z}$	[N]	-2,95E+04	-3,06E+04	-3,02E+04	-2,96E+04	-2,88E+04	-2,80E+04
$k_{\alpha_s \alpha_r}$	[N.m/rad]	-4,51E+02	-4,66E+02	-4,59E+02	-4,47E+02	-4,35E+02	-4,22E+02
$k_{\alpha_s \alpha_s}$	[N.m/rad]	1,81E+03	1,71E+03	1,63E+03	1,56E+03	1,50E+03	1,45E+03
d_{zz}	[N.s/m]	2,76E+04	2,37E+04	2,07E+04	1,83E+04	1,64E+04	1,47E+04
$d_{z\alpha_r}$	[N.s/rad]	1,07E+02	9,28E+01	8,13E+01	7,21E+01	6,45E+01	5,82E+01
$d_{z\alpha_s}$	[N.s/rad]	1,06E+01	8,08E+00	6,70E+00	5,77E+00	5,08E+00	4,53E+00
$d_{\alpha_r z}$	[N.s]	1,07E+02	9,27E+01	8,13E+01	7,21E+01	6,45E+01	5,81E+01
$d_{\alpha_r \alpha_r}$	[N.m.s/rad]	5,10E+00	4,43E+00	3,89E+00	3,45E+00	3,09E+00	2,79E+00
$d_{\alpha_r \alpha_s}$	[N.m.s/rad]	-8,93E-02	-7,85E-02	-6,92E-02	-6,15E-02	-5,51E-02	-4,96E-02
$d_{\alpha_s z}$	[N.s]	1,08E+01	8,20E+00	6,81E+00	5,87E+00	5,16E+00	4,61E+00
$d_{\alpha_s \alpha_r}$	[N.m.s/rad]	-8,86E-02	-7,79E-02	-6,87E-02	-6,11E-02	-5,47E-02	-4,93E-02
$d_{\alpha_s \alpha_s}$	[N.m.s/rad]	1,12E+00	79,66E-01	8,46E-01	7,50E-01	6,71E-01	6,05E-01

Tabela A.12: Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação híbrido, sendo $P_{inj} = 30$ bar, $F_z = 10$ kN e $10000 \leq \Omega \leq 15000$ RPM.

		Ω [RPM]					
		10000	11000	12000	13000	14000	15000
h_{pivot0}	[μm]	1,21E-04	1,27E-04	1,33E-04	1,38E-04	1,43E-04	1,48E-04
α_{r0}	[rad]	-1,13E-03	-1,18E-03	-1,23E-03	-1,28E-03	-1,33E-03	-1,38E-03
α_{s0}	[rad]	1,75E-03	1,84E-03	1,92E-03	1,99E-03	2,06E-03	2,13E-03
k_{zz}	[N/m]	1,59E+07	1,50E+07	1,42E+07	1,35E+07	1,29E+07	1,23E+07
$k_{z\alpha_r}$	[N/rad]	6,27E+05	5,97E+05	5,71E+05	5,48E+05	5,28E+05	5,09E+05
$k_{z\alpha_s}$	[N/rad]	1,45E+04	1,31E+04	1,22E+04	1,15E+04	1,09E+04	1,04E+04
$k_{\alpha_r z}$	[N]	2,47E+04	2,35E+04	2,25E+04	2,17E+04	2,11E+04	2,06E+04
$k_{\alpha_r \alpha_r}$	[N.m/rad]	6,67E+03	6,37E+03	6,10E+03	5,87E+03	5,66E+03	5,47E+03
$k_{\alpha_r \alpha_s}$	[N.m/rad]	1,79E+03	1,71E+03	1,64E+03	1,58E+03	1,52E+03	1,47E+03
$k_{\alpha_s z}$	[N]	-2,76E+04	-2,68E+04	-2,60E+04	-2,53E+04	-2,45E+04	-2,39E+04
$k_{\alpha_s \alpha_r}$	[N.m/rad]	-4,42E+02	-4,26E+02	-4,10E+02	-3,95E+02	-3,82E+02	-3,69E+02
$k_{\alpha_s \alpha_s}$	[N.m/rad]	1,44E+03	1,37E+03	1,31E+03	1,26E+03	1,21E+03	1,17E+03
d_{zz}	[N.s/m]	1,97E+04	1,70E+04	1,49E+04	1,32E+04	1,18E+04	1,06E+04
$d_{z\alpha_r}$	[N.s/rad]	7,68E+01	6,67E+01	5,86E+01	5,20E+01	4,66E+01	4,21E+01
$d_{z\alpha_s}$	[N.s/rad]	3,48E+00	2,90E+00	2,49E+00	2,18E+00	1,94E+00	1,73E+00
$d_{\alpha_r z}$	[N.s]	7,68E+01	6,66E+01	5,85E+01	5,20E+01	4,66E+01	4,21E+01
$d_{\alpha_r \alpha_r}$	[N.m.s/rad]	3,71E+00	3,22E+00	2,83E+00	2,52E+00	2,26E+00	2,04E+00
$d_{\alpha_r \alpha_s}$	[N.m.s/rad]	-7,67E-02	-6,65E-02	-5,84E-02	-5,18E-02	-4,63E-02	-4,16E-02
$d_{\alpha_s z}$	[N.s]	3,59E+00	2,99E+00	2,57E+00	2,25E+00	2,00E+00	1,79E+00
$d_{\alpha_s \alpha_r}$	[N.m.s/rad]	-7,62E-02	-6,61E-02	-5,81E-02	-5,15E-02	-4,60E-02	-4,13E-02
$d_{\alpha_s \alpha_s}$	[N.m.s/rad]	8,02E-01	6,96E-01	6,11E-01	5,43E-01	4,86E-01	4,39E-01

Tabela A.13: Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação hidrodinâmica, sendo $F_z = 20$ kN e $10000 \leq \Omega \leq 15000$ RPM.

		Ω [RPM]					
		10000	11000	12000	13000	14000	15000
h_{pivot0}	[μm]	6,44E-05	6,75E-05	7,06E-05	7,34E-05	7,62E-05	7,89E-05
α_{r0}	[rad]	-7,96E-04	-8,35E-04	-8,72E-04	-9,07E-04	-9,42E-04	-9,75E-04
α_{s0}	[rad]	1,01E-03	1,06E-03	1,11E-03	1,16E-03	1,20E-03	1,24E-03
k_{zz}	[N/m]	1,63E+08	1,56E+08	1,49E+08	1,43E+08	1,38E+08	1,33E+08
$k_{z\alpha_r}$	[N/rad]	4,79E+06	4,57E+06	4,37E+06	4,20E+06	4,05E+06	3,91E+06
$k_{z\alpha_s}$	[N/rad]	-4,55E+04	-4,34E+04	-4,15E+04	-3,99E+04	-3,85E+04	-3,71E+04
$k_{\alpha_r z}$	[N]	3,30E+05	3,14E+05	3,01E+05	2,89E+05	2,79E+05	2,69E+05
$k_{\alpha_r \alpha_r}$	[N.m/rad]	3,70E+04	3,53E+04	3,38E+04	3,25E+04	3,13E+04	3,02E+04
$k_{\alpha_r \alpha_s}$	[N.m/rad]	8,12E+03	7,74E+03	7,41E+03	7,12E+03	6,86E+03	6,63E+03
$k_{\alpha_s z}$	[N]	-1,25E+05	-1,19E+05	-1,14E+05	-1,10E+05	-1,06E+05	-1,02E+05
$k_{\alpha_s \alpha_r}$	[N.m/rad]	-1,39E+03	-1,33E+03	-1,27E+03	-1,22E+03	-1,18E+03	-1,14E+03
$k_{\alpha_s \alpha_s}$	[N.m/rad]	6,86E+03	6,54E+03	6,26E+03	6,02E+03	5,80E+03	5,60E+03
d_{zz}	[N.s/m]	1,47E+05	1,27E+05	1,12E+05	9,92E+04	8,88E+04	8,01E+04
$d_{z\alpha_r}$	[N.s/rad]	3,94E+02	3,41E+02	2,99E+02	2,66E+02	2,38E+02	2,14E+02
$d_{z\alpha_s}$	[N.s/rad]	5,95E+01	5,16E+01	4,53E+01	4,01E+01	3,59E+01	3,24E+01
$d_{\alpha_r z}$	[N.s]	3,93E+02	3,41E+02	2,99E+02	2,65E+02	2,37E+02	2,14E+02
$d_{\alpha_r \alpha_r}$	[N.m.s/rad]	1,83E+01	1,58E+01	1,39E+01	1,23E+01	1,10E+01	9,95E+00
$d_{\alpha_r \alpha_s}$	[N.m.s/rad]	-3,82E-01	-3,31E-01	-2,91E-01	-2,58E-01	-2,31E-01	-2,08E-01
$d_{\alpha_s z}$	[N.s]	6,03E+01	5,22E+01	4,59E+01	4,07E+01	3,64E+01	3,28E+01
$d_{\alpha_s \alpha_r}$	[N.m.s/rad]	-3,79E-01	-3,29E-01	-2,88E-01	-2,56E-01	-2,29E-01	-2,06E-01
$d_{\alpha_s \alpha_s}$	[N.m.s/rad]	3,99E+00	3,46E+00	3,04E+00	2,69E+00	2,41E+00	2,17E+00

Tabela A.14: Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação híbrido, sendo $P_{inj} = 36$ bar, $F_z = 20$ kN e $10000 \leq \Omega \leq 15000$ RPM.

		Ω [RPM]					
		10000	11000	12000	13000	14000	15000
h_{pivot0}	[μm]	6,55E-05	6,87E-05	7,17E-05	7,47E-05	7,75E-05	8,02E-05
α_{r0}	[rad]	-7,98E-04	-8,37E-04	-8,74E-04	-9,10E-04	-9,44E-04	-9,78E-04
α_{s0}	[rad]	1,04E-03	1,09E-03	1,14E-03	1,18E-03	1,23E-03	1,27E-03
k_{zz}	[N/m]	1,01E+08	9,60E+07	9,17E+07	8,79E+07	8,44E+07	8,12E+07
$k_{z\alpha_r}$	[N/rad]	3,13E+06	2,98E+06	2,85E+06	2,73E+06	2,63E+06	2,53E+06
$k_{z\alpha_s}$	[N/rad]	-2,19E+04	-2,14E+04	-2,14E+04	-2,17E+04	-2,24E+04	-2,38E+04
$k_{\alpha_r z}$	[N]	2,84E+05	2,71E+05	2,59E+05	2,48E+05	2,39E+05	2,30E+05
$k_{\alpha_r \alpha_r}$	[N.m/rad]	3,50E+04	3,34E+04	3,20E+04	3,07E+04	2,96E+04	2,85E+04
$k_{\alpha_r \alpha_s}$	[N.m/rad]	7,77E+03	7,42E+03	7,10E+03	6,81E+03	6,56E+03	6,34E+03
$k_{\alpha_s z}$	[N]	-1,49E+05	-1,43E+05	-1,37E+05	-1,33E+05	-1,29E+05	-1,26E+05
$k_{\alpha_s \alpha_r}$	[N.m/rad]	-2,16E+03	-2,07E+03	-1,99E+03	-1,93E+03	-1,88E+03	-1,85E+03
$k_{\alpha_s \alpha_s}$	[N.m/rad]	6,56E+03	6,24E+03	5,97E+03	5,73E+03	5,51E+03	5,31E+03
d_{zz}	[N.s/m]	9,29E+04	8,04E+04	7,04E+04	6,23E+04	5,56E+04	4,99E+04
$d_{z\alpha_r}$	[N.s/rad]	3,64E+02	3,15E+02	2,76E+02	2,45E+02	2,18E+02	1,97E+02
$d_{z\alpha_s}$	[N.s/rad]	3,17E+01	2,71E+01	2,34E+01	2,03E+01	1,76E+01	1,51E+01
$d_{\alpha_r z}$	[N.s]	3,63E+02	3,15E+02	2,76E+02	2,44E+02	2,18E+02	1,97E+02
$d_{\alpha_r \alpha_r}$	[N.m.s/rad]	1,77E+01	1,54E+01	1,35E+01	1,20E+01	1,07E+01	9,65E+00
$d_{\alpha_r \alpha_s}$	[N.m.s/rad]	-4,09E-01	-3,54E-01	-3,11E-01	-2,76E-01	-2,47E-01	-2,24E-01
$d_{\alpha_s z}$	[N.s]	3,22E+01	2,76E+01	2,38E+01	2,07E+01	1,79E+01	1,54E+01
$d_{\alpha_s \alpha_r}$	[N.m.s/rad]	-4,06E-01	-3,52E-01	-3,09E-01	-2,74E-01	-2,46E-01	-2,23E-01
$d_{\alpha_s \alpha_s}$	[N.m.s/rad]	3,80E+00	3,29E+00	2,89E+00	2,56E+00	2,28E+00	2,05E+00

Tabela A.15: Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação híbrido, sendo $P_{inj} = 42$ bar, $F_z = 20$ kN e $10000 \leq \Omega \leq 15000$ RPM.

		Ω [RPM]					
		10000	11000	12000	13000	14000	15000
h_{pivot0}	[μm]	6,94E-05	7,27E-05	7,60E-05	7,91E-05	8,20E-05	8,49E-05
α_{r0}	[rad]	-8,25E-04	-8,66E-04	-9,04E-04	-9,41E-04	-9,76E-04	-1,01E-03
α_{s0}	[rad]	1,10E-03	1,16E-03	1,21E-03	1,26E-03	1,30E-03	1,35E-03
k_{zz}	[N/m]	8,55E+07	8,13E+07	7,75E+07	7,42E+07	7,10E+07	6,79E+07
$k_{z\alpha_r}$	[N/rad]	2,72E+06	2,59E+06	2,47E+06	2,37E+06	2,28E+06	2,19E+06
$k_{z\alpha_s}$	[N/rad]	-2,18E+04	-2,20E+04	-2,25E+04	-2,35E+04	-2,54E+04	-2,88E+04
$k_{\alpha_r z}$	[N]	2,35E+05	2,24E+05	2,14E+05	2,05E+05	1,97E+05	1,90E+05
$k_{\alpha_r \alpha_r}$	[N.m/rad]	3,07E+04	2,92E+04	2,80E+04	2,69E+04	2,59E+04	2,50E+04
$k_{\alpha_r \alpha_s}$	[N.m/rad]	6,83E+03	6,49E+03	6,22E+03	5,97E+03	5,75E+03	5,55E+03
$k_{\alpha_s z}$	[N]	-1,39E+05	-1,33E+05	-1,29E+05	-1,25E+05	-1,22E+05	-1,21E+05
$k_{\alpha_s \alpha_r}$	[N.m/rad]	-2,02E+03	-1,94E+03	-1,87E+03	-1,82E+03	-1,79E+03	-1,78E+03
$k_{\alpha_s \alpha_s}$	[N.m/rad]	5,92E+03	5,63E+03	5,39E+03	5,17E+03	4,96E+03	4,77E+03
d_{zz}	[N.s/m]	8,09E+04	7,00E+04	6,13E+04	5,42E+04	4,83E+04	4,33E+04
$d_{z\alpha_r}$	[N.s/rad]	3,19E+02	2,77E+02	2,43E+02	2,15E+02	1,92E+02	1,73E+02
$d_{z\alpha_s}$	[N.s/rad]	2,21E+01	1,87E+01	1,60E+01	1,35E+01	1,13E+01	8,97E+00
$d_{\alpha_r z}$	[N.s]	3,19E+02	2,76E+02	2,42E+02	2,15E+02	1,92E+02	1,73E+02
$d_{\alpha_r \alpha_r}$	[N.m.s/rad]	1,55E+01	1,34E+01	1,18E+01	1,04E+01	9,34E+00	8,42E+00
$d_{\alpha_r \alpha_s}$	[N.m.s/rad]	-3,64E-01	-3,16E-01	-2,78E-01	-2,47E-01	-2,22E-01	-2,01E-01
$d_{\alpha_s z}$	[N.s]	2,25E+01	1,91E+01	1,63E+01	1,38E+01	1,16E+01	9,21E+00
$d_{\alpha_s \alpha_r}$	[N.m.s/rad]	-3,62E-01	-3,14E-01	-2,76E-01	-2,45E-01	-2,20E-01	-2,00E-01
$d_{\alpha_s \alpha_s}$	[N.m.s/rad]	3,30E+00	2,86E+00	2,51E+00	2,22E+00	1,98E+00	1,78E+00

Tabela A.16: Posição de equilíbrio e coeficientes dinâmicos para o regime de lubrificação híbrido, sendo $P_{inj} = 48$ bar, $F_z = 20$ kN e $10000 \leq \Omega \leq 15000$ RPM.

		Ω [RPM]					
		10000	11000	12000	13000	14000	15000
h_{pivot0}	[μm]	7,39E-05	7,75E-05	8,09E-05	8,42E-05	8,74E-05	9,04E-05
α_{r0}	[rad]	-8,56E-04	-8,98E-04	-9,38E-04	-9,76E-04	-1,01E-03	-1,05E-03
α_{s0}	[rad]	1,18E-03	1,24E-03	1,29E-03	1,34E-03	1,39E-03	1,44E-03
k_{zz}	[N/m]	7,06E+07	6,70E+07	6,37E+07	6,05E+07	5,72E+07	5,28E+07
$k_{z\alpha_r}$	[N/rad]	2,31E+06	2,20E+06	2,10E+06	2,01E+06	1,92E+06	1,82E+06
$k_{z\alpha_s}$	[N/rad]	-2,20E+04	-2,29E+04	-2,45E+04	-2,76E+04	-3,37E+04	-4,90E+04
$k_{\alpha_r z}$	[N]	1,87E+05	1,78E+05	1,70E+05	1,63E+05	1,56E+05	1,48E+05
$k_{\alpha_r \alpha_r}$	[N.m/rad]	2,64E+04	2,51E+04	2,41E+04	2,31E+04	2,23E+04	2,15E+04
$k_{\alpha_r \alpha_s}$	[N.m/rad]	5,87E+03	5,60E+03	5,36E+03	5,15E+03	4,95E+03	4,77E+03
$k_{\alpha_s z}$	[N]	-1,28E+05	-1,24E+05	-1,20E+05	-1,18E+05	-1,19E+05	-1,27E+05
$k_{\alpha_s \alpha_r}$	[N.m/rad]	-1,86E+03	-1,79E+03	-1,74E+03	-1,71E+03	-1,71E+03	-1,81E+03
$k_{\alpha_s \alpha_s}$	[N.m/rad]	5,28E+03	5,03E+03	4,80E+03	4,59E+03	4,39E+03	4,16E+03
d_{zz}	[N.s/m]	6,90E+04	5,97E+04	5,22E+04	4,61E+04	4,09E+04	3,61E+04
$d_{z\alpha_r}$	[N.s/rad]	2,74E+02	2,37E+02	2,08E+02	1,84E+02	1,64E+02	1,47E+02
$d_{z\alpha_s}$	[N.s/rad]	1,36E+01	1,13E+01	9,18E+00	7,11E+00	4,64E+00	4,25E-01
$d_{\alpha_r z}$	[N.s]	2,74E+02	2,37E+02	2,08E+02	1,84E+02	1,64E+02	1,47E+02
$d_{\alpha_r \alpha_r}$	[N.m.s/rad]	1,32E+01	1,15E+01	1,01E+01	8,94E+00	8,00E+00	7,21E+00
$d_{\alpha_r \alpha_s}$	[N.m.s/rad]	-3,22E-01	-2,79E-01	-2,46E-01	-2,19E-01	-1,98E-01	-1,82E-01
$d_{\alpha_s z}$	[N.s]	1,40E+01	1,16E+01	9,47E+00	7,37E+00	4,87E+00	6,32E-01
$d_{\alpha_s \alpha_r}$	[N.m.s/rad]	-3,20E-01	-2,78E-01	-2,44E-01	-2,18E-01	-1,97E-01	-1,81E-01
$d_{\alpha_s \alpha_s}$	[N.m.s/rad]	2,82E+00	2,44E+00	2,14E+00	1,89E+00	1,68E+00	1,50E+00

Tabela A.18: Frequências naturais amortecidas e fatores de amortecimento para $F_z = 20$ kN e $\Omega = 1000$ RPM.

Hidrodinâmico		$P_{inj} = 36$ bar		$P_{inj} = 42$ bar		$P_{inj} = 48$ bar	
f_d [Hz]	ζ	f_d [Hz]	ζ	f_d [Hz]	ζ	f_d [Hz]	ζ
8,60	0,91	8,48	0,92	7,97	0,93	7,21	0,94
8,83	0,95	8,76	0,96	8,74	0,96	8,75	0,96
8,83	0,95	8,76	0,96	8,74	0,96	8,75	0,96
8,83	0,95	8,76	0,96	8,74	0,96	8,75	0,96
8,83	0,95	8,76	0,96	8,74	0,96	8,75	0,96
8,83	0,95	8,76	0,96	8,74	0,96	8,75	0,96
8,83	0,95	8,76	0,96	8,74	0,96	8,75	0,96
8,83	0,95	8,76	0,96	8,74	0,96	8,75	0,96
8,83	0,95	8,76	0,96	8,74	0,96	8,75	0,96
8,83	0,95	8,76	0,96	8,74	0,96	8,75	0,96
8,83	0,95	8,76	0,96	8,74	0,96	8,75	0,96
2611,43	0,01	2611,25	0,01	2611,17	0,01	2611,04	0,02