ANDRÉ LUIS MARTINS TOMAZ DA SILVA

A propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2023

ANDRÉ LUIS MARTINS TOMAZ DA SILVA

A propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientadora: Profa. Dra. Elisa Regina dos Santos.

UBERLÂNDIA - MG
2023

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

S586
2023

Silva, André Luis Martins Tomaz da, 1997-
A propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás [recurso eletrônico] / André Luis Martins Tomaz da Silva. - 2023.

Orientadora: Elisa Regina dos Santos.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2023.110
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Matemática. I. Santos, Elisa Regina dos ,1984-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 160 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3239-4209/4154 - www.posgrad.famat.ufu.br - pgmat@famat.ufu.br

ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

<table>
<tr><td>Programa de Pós-Graduação em:</td><td colspan="5">Matemática</td></tr>
<tr><td>Defesa de:</td><td colspan="5">Dissertação de Mestrado Acadêmico, 108, PPGMAT</td></tr>
<tr><td>Data:</td><td>27 de fevereiro de 2023</td><td>Hora de início:</td><td>14:00</td><td>Hora de encerramento:</td><td>16:30</td></tr>
<tr><td>Matrícula do Discente:</td><td colspan="5">12112MAT001</td></tr>
<tr><td>Nome do Discente:</td><td colspan="5">André Luis Martins Tomaz da Silva</td></tr>
<tr><td>Título do Trabalho:</td><td colspan="5">A Propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás</td></tr>
<tr><td>Área de concentração:</td><td colspan="5">Matemática</td></tr>
<tr><td>Linha de pesquisa:</td><td colspan="5">Análise Funcional e Equações diferenciais</td></tr>
<tr><td>Projeto de Pesquisa de vinculação:</td><td colspan="5">Equação de Daugavet para Polinômios</td></tr>
</table>

Reuniu-se em web conferência pela plataforma Mconf-RNP, em conformidade com a PORTARIA N^o 36, DE 19 DE MARÇO DE 2020 da COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR - CAPES, pela Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática, assim composta: Professores(as) Doutores(as): Thiago Grando - CEDETEG/UNICENTRO; Ariosvaldo Marques Jatobá - FAMAT/UFU e Elisa Regina dos Santos - FAMAT/UFU, orientadora do candidato.

Iniciando os trabalhos a presidente da mesa, Dr(a). Elisa Regina dos Santos, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir a senhora presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o candidato:

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

Documento assinado eletronicamente por **Thiago Grando**, **Usuário Externo**, em 27/02/2023, às 16:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Elisa Regina dos Santos**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 27/02/2023, às 16:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Ariosvaldo Marques Jatoba**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 27/02/2023, às 16:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4249466** e o código CRC **A66ABC0D**.

Dedicatória

Dedico a minha família e amigos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha família pelo apoio. Em especial, agradeço aos meus pais por sempre me incentivarem e apoiarem em relação aos meus estudos durante toda a minha vida.

À minha orientadora, a Professora Doutora Elisa Regina dos Santos por todo o apoio e ensinamentos.

Agradeço ao Professor Doutor Thiago Grando por suas contribuições a este trabalho no estudo da propriedade AHSP.

Agradeço à Capes pelo apoio financeiro.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia que contribuíram com a minha formação acadêmica.

SILVA, A. L. M. T. *A propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás*. 2023. 116 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Este trabalho tem por objetivo estudar o Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores entre espaços de Banach. Mostraremos que o conjunto dos operadores lineares de X em Y que atingem a norma na esfera unitária é denso em $\mathcal{L}(X,Y)$ quando Y tem a propriedade β qualquer que seja o espaço de Banach X. Veremos que o par (ℓ_1, Y) tem a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores se, e somente se, o espaço de Banach Y tem a propriedade $AHSP$. Além disso, se Y for uniformemente convexo, veremos que o par (ℓ_∞^n, Y) satisfaz a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores. Por fim, mostraremos que se X é um espaço uniformemente convexo, o par (X, Y) tem a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores para qualquer espaço de Banach Y.

Palavras-chave: Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás, operadores lineares que atingem a norma, propriedade β, propriedade AHSP.

SILVA, A. L. M. T. *The Bishop-Phelps-Bollobás property.* 2023. 116 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

This work aims to study the Bishop-Phelps-Bollobás Theorem for operators between Banach spaces. We will show that the set of norm-attaining operators from X to Y is norm dense in $\mathcal{L}(X, Y)$ when Y has property β for any Banach space X. We will see that the pair (ℓ_1, Y) has the Bishop-Phelps-Bollobás property for operators if and only if the Banach space Y has the property $AHSP$. Besides that, if Y is a uniformly convex space, we will see that the pair (ℓ_∞^n, Y) satisfies the Bishop-Phelps-Bollobás property for operators. Furthermore, we will show that if X is a uniformly convex space, the pair (X, Y) has the Bishop-Phelps-Bollobás property for operators for any Banach space Y.

Keywords: Bishop-Phelps-Bollobás theorem, norm-attaining linear operators, property β, property AHSP.

Lista de Figuras

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^+$	conjunto dos números reais não negativos
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$Re\ z$	parte real do número complexo z
$Im\ z$	parte imaginária do número complexo z
$X,\ Y$	espaço topológico, espaço normado ou espaço de Banach
τ	topologia
$\overline{A}$	fecho do subconjunto A
$int(A)$	interior do subconjunto A
∂A	fronteira do subconjunto A
$d(\cdot, \cdot)$	métrica
$dist(A, B)$	distância entre os subconjuntos A e B
$B(x, r)$	bola aberta com centro x e raio r
$B[x, r]$	bola fechada com centro x e raio r
$S(x, r)$	esfera com centro x e raio r
B_X	bola unitária fechada de X
S_X	esfera unitária de X
$\|\cdot\|,\ \|\cdot\|_X$	norma do espaço vetorial X
$(X, \|\cdot\|)$	espaço vetorial normado
X^*	espaço dual de X
$\mathcal{L}(X, Y)$	conjunto dos operadores lineares contínuos de X em Y
$T,\ S,\ V$	operador linear
T^t	operador adjunto de T
$V(T)$	imagem numérica do operador linear limitado T
$LV(T)$	imagem numérica inferior do operador linear limitado T
$\widehat{x}$	imagem de $x \in X$ pelo mergulho canônico de X em X^{**}
$(x_n)_{n=1}^{\infty}$	sequência
x_n ou $x(n)$	n-ésima coordenada da sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$
$(\Omega, \leq)$	conjunto dirigido
$(x_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$	rede
ℓ_p	espaço das sequências p-somáveis
ℓ_∞	espaço das sequências limitadas
c_0	espaço das sequências que convergem para 0
ℓ_∞^n	espaço $\mathbb{K}^n$ com a norma do supremo
$conv(S)$	envoltório convexo do subconjunto S
$\overline{conv}(S)$	envoltório convexo fechado do subconjunto S
$\text{Ext}(C)$	conjunto dos pontos extremos de C
$C(K)$	espaço das funções contínuas de K em $\mathbb{K}$
$supp\ f$	suporte da função f

$\mathrm{NA}(R)$	$\{x \in S_X : \|R(x)\| = 1\}$ para $R \in \mathcal{L}(X,Y)$

Sumário

Introdução

No ano de 1961, Bishop e Phelps [2] escreveram um artigo mostrando que todo espaço de Banach X sobre $\mathbb{K}$ é subreflexivo, ou seja, o conjunto dos funcionais lineares que atingem sua norma na esfera unitária de X é denso em X^*, mais precisamente o resultado pode ser enunciado da seguinte forma: Seja X um espaço de Banach. Então, para todos f em X^* e $\epsilon > 0$, existem $g \in X^*$ e $x \in S_X$ tais que $|g(x)| = \|g\|$ e $\|f - g\| < \epsilon$. Esse resultado é conhecido como Teorema de Bishop-Phelps.

O Teorema de Bishop-Phelps foi melhorado por Bollobás em seu artigo [3], onde também foi mostrado que o fecho da imagem numérica de um operador linear limitado coincide com o fecho da imagem numérica do seu operador adjunto. O resultado foi melhorado para garantir que se $f \in S_{X^*}$ e $x \in B_X$ são tais que $f(x)$ fica próximo de $\|f\|$ então existem $g \in S_{X^*}$ próximo de f e $y \in S_X$ próximo de x tais que g atinge sua norma em y, esse resultado é conhecido como Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás.

Bishop e Phelps no mesmo artigo se questionaram sobre uma generalização de seu resultado para operadores lineares contínuos entre espaços de Banach. A generalização proposta é dada da seguinte forma: Sejam X e Y são espaços de Banach e $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço de Banach de todos os operadores lineares contínuos de X em Y, com a norma usual. Para quais espaços X e Y o conjunto $\{T \in \mathcal{L}(X, Y) \colon \|T(x)\| = \|T\| \text{ para algum } x \in B_X\}$ é denso em $\mathcal{L}(X, Y)$?

Acosta, Aron, García e Maestre [1] ao buscarem uma resposta para a questão proposta por Bishop e Phelps introduziram a seguinte definição:

Sejam X e Y espaços de Banach reais ou complexos. Dizemos que o par (X, Y) satisfaz a propriedade Bishop-Phelps-Bollobás para operadores (ou que o Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás vale para todos os operadores lineares contínuos de X em Y) se dado $\epsilon > 0$, existem $\eta(\epsilon) > 0$ e $\beta(\epsilon) > 0$ com $\lim_{t \to 0} \beta(t) = 0$ tais que para todo $T \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$, se $x_0 \in S_X$ é tal que

$$\|Tx_0\| > 1 - \eta(\epsilon),$$

então existem um ponto $u_0 \in S_X$ e um operador $S \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ satisfazendo as seguintes condições:

$$\|Su_0\| = 1, \quad \|u_0 - x_0\| < \beta(\epsilon) \quad e \quad \|S - T\| < \epsilon.$$

Em 1963, Lindenstrauss [11] publicou um artigo em que mostrava a existência de um espaço de Banach X tal que o conjunto dos operadores lineares $T \in \mathcal{L}(X, X)$ que atingem a norma em S_X não é denso em $\mathcal{L}(X, X)$. Como o Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores entre espaços de Banach não vale em geral para quaisquer espaços de Banach, então ao estudar este tema dois tipos de questões são geralmente consideradas:

(1) Para quais espaços de Banach X temos que o par (X, Y), para qualquer espaço de Banach Y, tem a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores?

(2) Para quais espaços de Banach Y temos que o par (X, Y), para qualquer espaço de Banach X, tem a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores?

Muitos trabalhos buscaram respostas para essas perguntas, dentre eles destacamos [1], [10] e [11].

Uma possível resposta para a segunda pergunta são os espaços de Banach com a propriedade β, que foi definida por Lindestrauss em [11].

A propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores de ℓ_1 em Y foi estudada por Acosta, Aron, García e Maestre [1]. O resultado obtido por eles foi o seguinte: o par (ℓ_1, Y) tem essa propriedade se, e somente se, o espaço de Banach Y tem a propriedade $AHSP$. Assim, se tomarmos um espaço de Banach Y que não tenha a propriedade AHSP, teremos que o par (ℓ_1, Y) não tem a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores, ou seja, o espaço ℓ_1 não é uma resposta para a primeira pergunta. Além disso, os mesmos autores mostraram que para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo espaço uniformemente convexo Y, o par (l_∞^n, Y) tem a propriedade Bishop-Phelps-Bollobás para os operadores.

Uma outra possível resposta para a primeira pergunta foi dada por Kim e Lee [10] em seu artigo. O resultado mostrado por eles foi que, para um espaço X uniformemente convexo, o par (X, Y) tem a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores para qualquer espaço Banach Y.

Levando em consideração a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores de X em Y, com X um espaço uniformemente convexo, podemos nos questionar se existem funções $\eta(\epsilon)$ e $\beta(\epsilon)$ que implicam na convexidade uniforme de X. É possível mostrar que isso é verdade para um espaço de Banach real bidimensional.

Ainda em [11], Lindenstrauss mostrou que o subconjunto dos operadores $T\colon X \to Y$ entre espaços de Banach X e Y tais que os seus segundos adjuntos atingem suas normas é denso em $\mathcal{L}(X^{**}, Y^{**})$. Isso nós faz levantar a seguinte pergunta:

Existe uma função $\gamma : \mathbb{R}^+ \to (0,1)$, com $\lim\limits_{t\to 0} \gamma(t) = 0$, tal que para todos $T \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ e $x_0 \in S_X$ com $\|Tx_0\| > 1 - \gamma(\epsilon)$, existem $S \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ e $x_0^{**} \in S_{X^{**}}$ satisfazendo

$$\|S^{tt} x_0^{**}\| = 1, \quad \|S - T\| < \epsilon, \quad \|x_0^{**} - x_0\| < \epsilon?$$

Veremos que essa pergunta em geral tem resposta negativa.

André Luis Martins Tomaz da Silva
Uberlândia-MG, 27 de fevereiro de 2023.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tem por objetivo abordar alguns dos conceitos e resultados necessários para a compreensão dos demais capítulos.

1.1 Espaços topológicos

Nesta seção, apresentaremos as definições de espaço topológico, aberto, fechado, vizinhança, espaço de Hausdorff, espaço normal e o Lema de Uryshon. Esta seção utilizou como base o livro [12].

Definição 1.1. *Uma **topologia** no conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X que satisfaz as seguintes condições:*

(a) $X \in \tau$, $\emptyset \in \tau$.

(b) Se $A_i \in \tau$ *para todo* $i \in I$, *então* $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

(c) Se $A_j \in \tau$ *para todo* $j = 1, \ldots, n$, *então* $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$.

Os elemento de τ são chamados de **conjuntos abertos** e o par (X, τ) é chamado de **espaço topológico**.

Definição 1.2. *Um subconjunto F de um espaço topológico X é **fechado** se $F^c = X - F$ é aberto.*

Definição 1.3. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e Y um subconjunto de X. A coleção*

$$\tau_Y = \{A \cap Y \colon A \in \tau\}$$

*é uma topologia em Y, chamada de **topologia de subespaço** ou **topologia em Y induzida pela topologia de X**.*

Definição 1.4. *Para um subconjunto A de um espaço topológico X, dizemos que o subconjunto*

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subset X \colon F \text{ é fechado e } A \subset F\}$$

*é o **fecho** de A em X.*

Definição 1.5. *Para um subconjunto A de um espaço topológico X, dizemos que o subconjunto*

$$int(A) = \bigcup\{B \subset X \colon B \text{ é aberto e } B \subset A\}$$

*é o **interior** de A em X.*

Definição 1.6. *Seja x um elemento do espaço topológico X. Dizemos que um subconjunto U de X é uma **vizinhança** de x se $x \in int(U)$, isto é, se existe um aberto A tal que $x \in A \subset U$.*

Definição 1.7. *Seja x um elemento do espaço topológico X. Dizemos que uma coleção $\mathcal{B}_x$ de vizinhanças de x é uma **base de vizinhanças** de x se para toda vizinhança U de x existe uma vizinhança $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subset U$.*

Definição 1.8. *Seja A um subconjunto de um espaço topológico X. A **fronteira** do subconjunto A é definida por*

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}.$$

O interior de um subconjunto A de um espaço topológico X pode ser definido usando a fronteira do subconjunto A por

$$int(A) = A - \partial A.$$

Definição 1.9. *Um **conjunto dirigido** é um par $(\Omega, \leq)$ em que Ω é um conjunto e $\leq$ é uma relação, chamada **direção**, em Ω que satisfaz:*

(a) $\lambda \leq \lambda$ para todo $\lambda \in \Omega$;

(b) se $\lambda_1 \leq \lambda_2$ e $\lambda_2 \leq \lambda_3$ então $\lambda_1 \leq \lambda_3$;

(c) para todos $\lambda_1, \lambda_2 \in \Omega$ existe $\lambda_3 \in \Omega$ tal que $\lambda_1 \leq \lambda_3$ e $\lambda_2 \leq \lambda_3$.

Definição 1.10. *Sejam X um espaço topológico e $(\Omega, \leq)$ um conjunto dirigido. Uma função $f : \Omega \to X$ é chamada de **rede** em X.*

Chamando $f(\lambda) = x_\lambda$ para todo $\lambda \in \Omega$, podemos denotar a rede f por $(x_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$.

Definição 1.11. *Sejam $(\Omega, \leq)$ um conjunto dirigido e $(x_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ uma rede no espaço topológico X. Dizemos que a rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ **converge** para $x \in X$ se para toda vizinhança U de x existe $\lambda_0 \in \Omega$ tal que $x_\lambda \in U$ para todo $\lambda_0 \leq \lambda$. Neste caso dizemos que x é o **limite** da rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ e escrevemos*

$$x = \lim_{\lambda\in\Omega} x_\lambda = \lim_{\lambda} x_\lambda \text{ ou } x_\lambda \to x.$$

Observação 1.12. *Se $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x, então $x_\lambda \to x$ se, e somente se, para toda $U \in \mathcal{B}_x$ existe $\lambda_0 \in \Omega$ tal que $x_\lambda \in U$ para todo $\lambda_0 \leq \lambda$.*

Definição 1.13. *(a) Uma **ordem parcial** num conjunto P é uma relação $\geq$ em P que satisfaz:*

(i) $x \geq x$, para todo $x \in P$ (reflexiva);

(ii) se $x \geq y$ e $y \geq x$, então $x = y$ (antissimétrica);

(iii) se $x \geq y$ e $y \geq z$, então $x \geq z$ (transitiva).

*Neste caso dizemos que $(P, \geq)$ é **parcialmente ordenado**.*

*(b) Seja Q um subconjunto de $(P, \geq)$. Dizemos que $p \in P$ é uma **cota superior** de Q se $p \geq q$ para todo $q \in Q$.*

*(c) Dizemos que $m \in P$ é um **elemento maximal** de P se vale a implicação:*

$$p \in P \text{ e } p \geq m \Rightarrow m = p.$$

*(d) Um subconjunto Q de P é dito **totalmente ordenado** se para todos $p, q \in Q$ tem-se $p \geq q$ ou $q \geq p$.*

Lema 1.14 (Lema de Zorn)**.** *Todo conjunto parcialmente ordenado, não vazio, no qual todo subconjunto totalmente ordenado tem cota superior, tem elemento maximal.*

Definição 1.15. *Seja $f\colon X \to Y$ uma função entre espaços topológicos. Dizemos que f é **contínua no ponto** $a \in X$ se para todo aberto V de Y contendo $f(a)$ existe um aberto U de X contendo a tal que $f(U) \subset V$.*

*Dizemos que f é **contínua** se for contínua em todos os pontos de X.*

Definição 1.16. *Um espaço topológico X é dito um **espaço de Hausdorff** se pontos distintos admitem vizinhanças disjuntas, isto é, para todos $x, y \in X$ com $x \neq y$, existem vizinhanças U de x e V de y tais que $U \cap V = \emptyset$.*

Definição 1.17. *Um espaço topológico X é **normal** se fechados disjuntos em X podem ser separados por abertos disjuntos, isto é, se para todos fechados disjuntos F e G em X, existem abertos disjuntos A e B em X tais que $F \subset A$ e $G \subset B$.*

Teorema 1.18 (Lema de Urysohn)**.** *Um espaço topológico X é normal se, e somente se, para todos fechados e disjuntos F e G em X, existe uma função contínua $f\colon X \to [0,1]$ tal que*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ para todo } x \in F, \\ 1 & , \text{ para todo } x \in G. \end{cases}$$

Demonstração. Veja [12], páginas 207 até 210. □

1.2 Espaços métricos

Esta seção tem por objetivo apresentar definições e resultados que serão úteis para entender o Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás, uma vez que esse é enunciado para espaços de Banach que são espaços métricos com a métrica induzida pela norma. A seção foi baseada no livro [5] e [13].

Definição 1.19. *Um **espaço métrico** é um par ordenado (M, d) formado por um conjunto M e uma função $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$, chamada **métrica**, satisfazendo as seguintes condições para quaisquer x, y, z em M:*

(a) $d(x, y) \geq 0$,

(b) $d(x, x) = 0$,

(c) $d(x, y) = 0$ *implica* $x = y$,

(d) $d(x, y) = d(y, x)$,

(e) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Se E e F são subconjuntos de M, a **distância entre E e F** é definida por

$$dist(E, F) = \inf\{d(x, y) : x \in E \text{ e } y \in F\}.$$

Definição 1.20. *Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência no espaço métrico (M, d).*

*(a) A sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ **converge** para $x \in M$ se*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

Neste caso escrevemos $x = \lim\limits_{n} x_n = lim_{n\to\infty}x_n$ ou $x_n \to x$.

*(b) A sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é dita **convergente** se existe $x \in M$ tal que $x_n \to x$. Caso contrário é dita **divergente**.*

*(c) A sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma **sequência de Cauchy** se*

$$\lim_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0.$$

É imediato que toda sequência convergente é de Cauchy.

*(d) O espaço métrico (M, d) é um **espaço métrico completo** se toda sequência de Cauchy em M convergir para um elemento de M.*

Definição 1.21. *Seja (M, d) um espaço métrico.*

*(a) Dados $a \in M$ e $r > 0$, o conjunto $B(a, r) = \{x \in M : d(x, a) < r\}$ é chamado de **bola aberta com centro** a **e raio** r.*

*(b) Dados $a \in M$ e $r > 0$, o conjunto $B[a, r] = \{x \in M : d(x, a) \leq r\}$ é chamado de **bola fechada com centro** a **e raio** r.*

*(c) Dados $a \in M$ e $r > 0$, o conjunto $S(a, r) = \{x \in M : d(x, a) = r\}$ é chamado de **esfera com centro** a **e raio** r.*

*(d) Um subconjunto $A \subset M$ é **aberto** se para cada $x \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset A$.*

*(c) Um subconjunto $F \subset M$ é **fechado** se seu complementar $F^c :\, = M - F$ é aberto.*

Os conjuntos abertos de um espaço métrico M formam uma topologia em M, chamada de **topologia em M induzida pela métrica**.

Observação 1.22. *Segue do fato de que em um espaço métrico as bolas abertas de centro em x formam uma base de vizinhanças de x que uma rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ converge para x se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\lambda_0 \in \Omega$ tal que*

$$d(x_\lambda, x) < \epsilon,$$

para todo $\lambda_0 \leq \lambda$.

Definição 1.23. *Seja (M, d) um espaço métrico. Dizemos que uma rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Omega} \subset M$ é de **Cauchy** se para todo $\epsilon > 0$ existe $\lambda_0 \in \Omega$ tal que para todo $\lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0$ temos que*

$$d(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}) < \epsilon.$$

Observação 1.24. *Em um espaço métrico (M, d) uma rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ convergente é uma rede de Cauchy. De fato, seja $x_\lambda \to x$ e seja $\epsilon > 0$, então existe $\lambda_0 \in \Omega$ tal que*

$$d(x_\lambda, x) < \frac{\epsilon}{2},$$

para todo $\lambda_0 \leq \lambda$. Logo,

$$\begin{aligned} d(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}) &\leq d(x_{\lambda_1}, x) + d(x, x_{\lambda_2}) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

para todo $\lambda_0 \leq \lambda_1, \lambda_2$. O que mostra que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ é uma rede de Cauchy.

O seguinte resultado juntamente com sua demonstração foram baseados em [13].

Proposição 1.25. *Seja (M, d) um espaço métrico completo e seja $(x_\lambda)_{\lambda\in\Omega} \subset M$ uma rede de Cauchy. Então, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Omega} \subset M$ converge.*

Demonstração. Seja $\lambda_1 \in \Omega$ tal que $d(x_\lambda, x_{\lambda'}) < 1$ para todo $\lambda, \lambda' \geq \lambda_1$. Seja $\lambda_2 \in \Omega$ tal que $\lambda_2 \geq \lambda_1$ e $d(x_\lambda, x_{\lambda'}) < \frac{1}{2}$ para todo $\lambda, \lambda' \geq \lambda_2$. Continuando este processo temos $\lambda_n \in \Omega$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_n \geq \lambda_{n-1}$ e $d(x_\lambda, x_{\lambda'}) < \frac{1}{n}$ para todo $\lambda, \lambda' \geq \lambda_n$.

A sequência $(x_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. De fato, segue da propriedade arquimediana da reta que para cada $\epsilon > 0$ existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_\epsilon} < \epsilon$, então para todo $n, m \geq n_\epsilon$, temos que

$$d(x_{\lambda_n}, x_{\lambda_m}) < \frac{1}{n_\epsilon} < \epsilon.$$

Como (M, d) é completo, então $(x_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge para algum $x \in M$. Mostraremos que a rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ também converge para x. Seja $\epsilon > 0$. Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ temos que

$$d(x_{\lambda_n}, x) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Escolhendo um n_0 maior se necessário, podemos assumir que $\frac{1}{n_0} \leq \frac{\epsilon}{2}$. Daí, para todo $\lambda \geq \lambda_{n_0}$ temos que

$$\begin{aligned} d(x_\lambda, x) &\leq d(x_\lambda, x_{\lambda_{n_0}}) + d(x_{\lambda_{n_0}}, x) \\ &< \frac{1}{n_0} + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

o que mostra que a rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ converge para x. $\square$

Definição 1.26. *Sejam (M, d) um espaço métrico e $A \subset M$.*

*(a) O **interior** de A é o conjunto $int(A) = \bigcup\{B \subset M : B$ é aberto e $B \subset A\}$.*

*(b) O **fecho** de A é o conjunto $\overline{A} = \bigcap\{F \subset M : F$ é fechado e $A \subset F\}$.*

*(c) Diz-se que A é **denso** em M se $\overline{A} = M$.*

Proposição 1.27. *Sejam (M, d) um espaço métrico, $x \in M$, $r > 0$ e $A, B \subset M$. Então*

(a) $B(x, r)$ e $int(A)$ são conjuntos abertos e $B[x, r]$, $S(x, r)$, $\overline{A}$ são conjuntos fechados.

(b) A é aberto se, e somente se, $A = int(A)$.

(c) A é fechado se, e somente se, $A = \overline{A}$.

(d) Se $A \subset B$, então $\overline{A} \subset \overline{B}$.

(e) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(f) $x \in \overline{A}$ se, e somente se, existe uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em A tal que $x_n \to x$.

(g) A é denso em M se, e somente se, para todos $x \in M$ e $\epsilon > 0$, tem-se $A \cap B(x, \epsilon) \neq \emptyset$.

Quando não houver necessidade de explicitar a métrica, escrevemos apenas M para denotar o espaço métrico (M, d).

Definição 1.28. *Sejam M e N espaços métricos. Dizemos que a função $f: M \to N$ é* ***contínua no ponto*** *$a \in M$ se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $x \in M$ com $d_M(x, a) < \delta$ então $d_N(f(x), f(a)) < \epsilon$, ou seja, $f(B_M(a, \delta)) \subset B_N(f(a), \epsilon)$.*

Dizemos que f é ***contínua*** *se f for contínua em todos os pontos de M.*

Definição 1.29. *Um subconjunto K de um espaço métrico M é* ***compacto*** *se para toda coleção de abertos $(A_i)_{i \in I}$ tais que $K \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, existem $n \in \mathbb{N}$ e $i_1, \ldots, i_n \in I$ tais que $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_{i_k}$.*

Proposição 1.30. *Sejam M, N espaços métricos e $K \subset M$.*

(a) Se M é compacto e K é fechado, então K é compacto.

(b) Se K é compacto, então K é fechado.

(c) K é compacto se, e somente se, toda sequência em K admite subsequência convergente em K.

(d) Se $f: M \to N$ é contínua e K é compacto em M, então $f(K)$ é compacto em N.

(e) $A \subset K$ é compacto em K se, e somente se, A é compacto em M.

(f) Se $A \subset K$, A é fechado em M e K é compacto, então A é compacto em M.

1.3 Espaços normados

Esta seção tem por objetivo trazer conceitos e resultados para espaços normados que serão úteis ao longo do texto. Tal seção utilizou como base o livro [5].

Definição 1.31. *Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Uma função*

$$\| \cdot \|: X \to \mathbb{R}$$

é uma ***norma*** *se as seguintes propriedades estiverem satisfeitas:*

(N1) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in X$ e $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$,

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ para todo escalar α e todo $x \in X$,

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para quaisquer $x, y \in X$.

O par $(X, \|\cdot\|)$ é chamado de **espaço vetorial normado**, ou simplesmente **espaço normado**. Um espaço normado é um espaço métrico com a métrica dada por

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Nesse caso dizemos que a métrica d é induzida pela norma $\|\cdot\|$. Assim, toda a teoria de espaços métricos vale para espaços normados. Em particular, uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço normado X **converge** para o vetor $x \in X$ se

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Dizemos que x é o **limite** da sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e escrevemos $x = \lim\limits_{n} x_n$ ou $x_n \to x$.

Definição 1.32. *Um espaço normado X é chamado **espaço de Banach** quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.*

Proposição 1.33. *Sejam X um espaço de Banach e Y um subespaço vetorial de X. Então Y é um espaço de Banach, com a norma induzida de X, se, e somente se, Y é fechado em X.*

Demonstração. Veja [5], página 2. □

Seguem abaixo alguns exemplos de espaços de Banach.

Exemplo 1.34. *O espaço $\mathbb{K}^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ é um espaço de Banach com as seguintes normas*

$$\begin{aligned} &\|(a_1, \ldots, a_n)\|_1 = |a_1| + \cdots + |a_n|, \\ &\|(a_1, \ldots, a_n)\|_2 = (|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}, \ \ e \\ &\|(a_1, \ldots, a_n)\|_\infty = \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.35. *Seja Ω um conjunto não vazio. Uma função $f : \Omega \to \mathbb{K}$ é **limitada** se sua imagem for um subconjunto limitado de $\mathbb{K}$, ou seja, se existe $M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in \Omega$. O conjunto $B(\Omega)$ de todas as funções limitadas $f : \Omega \to \mathbb{K}$, que é um espaço vetorial com as operações usuais de funções, é um espaço de Banach com a norma*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Exemplo 1.36. *Seja K um espaço de Hausdorff compacto. O conjunto $C(K)$ de todas as funções contínuas $f : K \to \mathbb{K}$, que é um espaço vetorial com as operações usuais de funções, é um espaço de Banach, pois é um subconjunto fechado de $B(K)$.*

Exemplo 1.37. *Para cada número real $1 \leq p < \infty$, definimos*

$$\ell_p = \left\{ (a_j)_{j=1}^{\infty} : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty \right\}.$$

O espaço ℓ_p com as operações usuais de sequências é um espaço de Banach para a norma $\|\cdot\|_p$ dada por

$$\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Exemplo 1.38. *Para $p = \infty$, definimos ℓ_∞ como o espaço das sequências limitadas de escalares, ou seja:*

$$\ell_\infty = \left\{ (a_j)_{j=1}^\infty : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j| < \infty \right\}.$$

Temos que ℓ_∞ é um espaço de Banach com as operações usuais de sequências e com a norma $\|\cdot\|_\infty$ dada por

$$\|(a_j)_{j=1}^\infty\|_\infty = \sup\{|a_j| : j \in \mathbb{N}\}.$$

Exemplo 1.39. *O espaço c_0 das sequências de escalares que convergem para zero, ou seja,*

$$c_0 = \{(a_k)_{k=1}^\infty : a_k \in \mathbb{K} \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \text{ e } a_k \to 0\}$$

é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências. Como c_0 é um subespaço fechado em ℓ_∞, então c_0 é um espaço de Banach.

Teorema 1.40. *Todo espaço normado de dimensão finita é um espaço de Banach. Consequentemente, todo subespaço de dimensão finita de um espaço normado X é fechado em X.*

Demonstração. Veja [5], página 5. □

Proposição 1.41. *Se X é um espaço vetorial normado de dimensão finita, então os compactos em X são precisamente os conjuntos limitados e fechados.*

Demonstração. Veja [5], página 13. □

Definição 1.42. *Seja X um espaço normado. O subconjunto $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ é dito a **bola unitária fechada** em X. O subconjunto $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ é chamado de **esfera unitária** em X.*

Corolário 1.43. *A bola unitária fechada em um espaço normado de dimensão finita é compacta.*

Teorema 1.44. *Um espaço normado X tem dimensão finita se, e somente se, a bola unitária fechada de X é compacta.*

Demonstração. Veja [5], páginas 14 e 15. □

Definição 1.45. *Sejam X um espaço vetorial e seja $S \subset X$. O conjunto*

$$conv(S) \colon \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \colon n \in \mathbb{N},\ x_i \in S,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

*é convexo e é chamado de **envoltório convexo** de S. O envoltório convexo de S é o menor conjunto convexo contendo S. O fecho do envoltório convexo de $S \subset X$ é chamado de **envoltório convexo fechado** de S e é denotado por $\overline{conv}(S)$.*

Definição 1.46. *Sejam X um espaço vetorial e $A \subset X$ um subconjunto convexo. Um subconjunto não vazio $F \subset A$ é chamado de **face** de A se F é convexo e vale a implicação*

$$x_0, x_1 \in A,\ 0 < \lambda < 1,\ (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 \in F \Longrightarrow x_0, x_1 \in F.$$

Se X é um espaço normado e $F \subset S_X$ é uma face de B_X, diremos que F é uma face de S_X.

Definição 1.47. *Sejam X e Y espaços normados. Uma função $T\colon X \to Y$ é dita um* ***operador linear contínuo*** *se é linear, isto é,*

(i) $T(x+y) = T(x) + T(y), \forall x, y \in X,$

(ii) $T(\alpha x) = \alpha T(x), \forall \alpha \in \mathbb{K}$ *e* $x \in X,$

e também contínua, isto é, para todos $x_0 \in X$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X,\ \|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow \|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon.$$

Denotaremos por $\mathcal{L}(X, Y)$ o conjunto de todos os operadores lineares contínuos de X em Y. Com as operações usuais de funções temos que $\mathcal{L}(X, Y)$ é um espaço vetorial. Quando $Y = \mathbb{K}$, escrevemos X^* no lugar de $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$, chamamos tal espaço de **dual topológico** de X ou **dual** de X e dizemos que os elementos são **funcionais lineares contínuos**.

Definição 1.48. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Dizemos que eles são* ***topologicamente isomorfos*** *ou* ***isomorfos*** *se existe um operador linear contínuo bijetor $T\colon X \to Y$ cujo inverso $T^{-1}\colon Y \to X$ é contínuo. Tal operador T é chamado* ***isomorfismo topológico****.*

Definição 1.49. *Sejam X e Y espaços normados. Uma função $f\colon X \to Y$, não necessariamente linear, tal que $\|f(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in X$ é chamada* ***isometria****. Um operador linear $T\colon X \to Y$ que é uma isometria é chamado de* ***isometria linear****. Um isomorfismo que também é uma isometria é chamado de* ***isomorfismo isométrico****.*

Definição 1.50. *Uma função $f : M \to N$ entre espaços métricos é*

- ***lipschitziana*** *se existe uma constante $L > 0$ tal que*

  $$d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y)$$

  para todos $x, y \in M$;

- ***uniformemente contínua*** *se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

  $$d(f(x), f(y)) < \epsilon$$

  sempre que $x, y \in M$ e $d(x, y) < \delta$.

Observação 1.51. *Sabe-se que para funções entre espaços métricos, as implicações*

$$\textit{lipschitziana} \Rightarrow \textit{uniformemente contínua} \Rightarrow \textit{contínua} \Rightarrow \textit{contínua em um ponto}$$

são verdadeiras e que, em geral, todas as implicações inversas são falsas.

Teorema 1.52. *Sejam X e Y espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $T\colon X \to Y$ linear. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) T é lipschitziana.

(b) T é uniformemente contínua.

(c) T é contínua.

(d) T é contínua em algum ponto de X.

(e) T é contínua na origem.

(f) $\sup\{\|T(x)\| : x \in X \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty$.

(g) *Existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\|T(x)\| \leq C\|x\|$$

para todo $x \in X$.

Demonstração. Veja [5], páginas 25 e 26. □

Corolário 1.53. *Seja* $T : X \to Y$ *um operador linear bijetor entre espaços normados. Então* T *é um isomorfismo se, e somente, se existem constantes* $C_1,\ C_2 > 0$ *tais que*

$$C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$$

para todo $x \in X$.

Proposição 1.54. *Sejam* X *e* Y *espaços normados.*

(a) *A expressão*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in X \text{ e } \|x\| \leq 1\}$$

define uma norma no espaço $\mathcal{L}(X, Y)$.

(b) $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ *para todos* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *e* $x \in X$.

(c) *Se* Y *for um espaço de Banach, então* $\mathcal{L}(X, Y)$ *também é um espaço de Banach.*

Demonstração. Veja [5], páginas 26 e 27.

□

A seguinte expressão alternativa para $\|T\|$ será especialmente útil:

$$\|T\| = \inf\{C : \|T(x)\| \leq C\|x\| \text{ para todo } x \in X\}.$$

No caso de funcionais lineares, a norma de operadores se transforma em

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : x \in X \text{ e } \|x\| \leq 1\},$$

para todo espaço normado X e todo funcional $\varphi \in X^*$.

Corolário 1.55. *O dual* X^* *de qualquer espaço normado* X *é um espaço de Banach.*

Teorema 1.56 (Teorema da Aplicação Aberta)**.** *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach e* $T \colon X \to Y$ *linear, contínuo e sobrejetor. Então* T *é uma aplicação aberta. Em particular, todo operador linear contínuo e bijetor entre espaços de Banach é um isomorfismo.*

Demonstração. Veja [5], páginas 33 e 34. □

Teorema 1.57 (Teorema de Hahn-Banach)**.** *Sejam* X *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *e* $p \colon X \to \mathbb{R}$ *uma função que satisfaz*

(1) $p(ax) = |a|p(x)$ *para todo* $a \in \mathbb{K}$ *e todo* $x \in X$, *e*

(2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ *para quaisquer* $x, y \in X$.

Se $Y \subseteq X$ é um subespaço vetorial e $\varphi\colon Y \to \mathbb{K}$ é um funcional linear tal que $|\varphi(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in Y$, então existe um funcional linear $\widehat{\varphi}\colon X \to \mathbb{K}$ que estende φ a X e que satisfaz $|\widehat{\varphi}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

Demonstração. Veja [5], páginas 45 e 46. □

Corolário 1.58 (Teorema de Hahn-Banach)**.** *Seja Y um subespaço de um espaço normado X sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e seja $\varphi\colon Y \to \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo $\widehat{\varphi}\colon X \to \mathbb{K}$ cuja restrição a Y coincide com φ e $\|\widehat{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

Demonstração. Veja [5], página 47. □

Corolário 1.59. *Seja X um espaço normado. Para todo $x_0 \in X$ não nulo, existe um funcional linear $\varphi \in X^*$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|$.*

Demonstração. Veja [5], página 47. □

Corolário 1.60. *Sejam X um espaço normado, $X \neq \emptyset$, e $x \in X$. Então*

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| \colon \varphi \in X^* \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\}$$

e o supremo é atingido.

Demonstração. Veja [5] página 47. □

Durante o texto quando nos referirmos ao Teorema de Hahn-Banach estaremos usando o Corolário 1.58. Em vez de nos referir a cada corolário do Teorema de Hahn-Banach simplesmente diremos que o resultado é uma consequência do Teorema de Hahn-Banach.

Lema 1.61. *Seja C um subconjunto convexo, aberto, próprio e não vazio do espaço normado X e seja $x_0 \in X \setminus C$. Então, existe um funcional linear $\varphi \in X^*$ tal que $\varphi(x) < \varphi(x_0)$ para todo $x \in C$.*

Demonstração. Veja [5], página 55. □

Proposição 1.62. *Sejam C um subconjunto convexo com interior não vazio do espaço normado X e $x_0 \in \partial C \cap C$. Então existe $g \in X^*$ com $\|g\| = 1$ tal que*

$$\sup\{g(x) : x \in C\} = g(x_0).$$

Demonstração. Note que $int(C)$ é um subconjunto convexo, aberto, próprio e não vazio do espaço normado X e $x_0 \in \partial C \subset X \setminus int(C)$. Assim, pelo Lema 1.61, existe um funcional linear $\phi \in X^*$ tal que

$$\phi(x) < \phi(x_0) \text{ para todo } x \in int(C). \tag{1.1}$$

Como ϕ é contínua, então

$$\phi(x) \leq \phi(x_0) \text{ para todo } x \in C.$$

De fato, para todo $x \in int(C)$ temos que o resultado é válido, resta mostrar que é válido para $x \in C \cap \overline{C}$. Seja $x \in C \cap \overline{C}$. Então existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset int(C)$ que converge para x. Logo, da continuidade de ϕ temos que

$$\phi(x_n) \leq \phi(x_0) \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \Rightarrow \phi(x) \leq \phi(x_0).$$

Portanto,

$$\phi(x) \leq \phi(x_0) \text{ para todo } x \in C.$$

Daí,

$$\sup\{\phi(x) : x \in C\} \leq \phi(x_0).$$

Agora, já que $x_0 \in C$, temos que

$$\phi(x_0) \leq \sup\{\phi(x) : x \in C\} \leq \phi(x_0)$$

ou seja,

$$\sup\{\phi(x) : x \in C\} = \phi(x_0).$$

Segue de (1.1) que ϕ não é o funcional nulo. Defina $g = \dfrac{\phi}{\|\phi\|}$. Então $g \in X^*$ com $\|g\| = 1$ e

$$\begin{aligned}
\sup\{g(x) : x \in C\} &= \sup\left\{\frac{\phi(x)}{\|\phi\|} : x \in C\right\} \\
&= \frac{1}{\|\phi\|}\sup\{\phi(x) : x \in C\} \\
&= \frac{1}{\|\phi\|}\phi(x_0) = g(x_0).
\end{aligned}$$

□

Definição 1.63. *Seja X um espaço normado. O espaço vetorial dos operadores lineares contínuos de X^* em $\mathbb{K}$ é chamado de **bidual** de X. Denotaremos $\mathcal{L}(X^*, \mathbb{K})$ por X^{**}.*

Proposição 1.64. *Para todo espaço normado X, o operador linear $J_X : X \to X^{**}$ dado por*

$$J_X(x)(\varphi) = \varphi(x)$$

*para todos $x \in X$ e $\varphi \in X^*$ é uma isometria linear, chamado de **mergulho canônico** de X em X^{**}. Denotaremos $J_X(x)$ por $\widehat{x}$ quando for conveniente.*

Demonstração. Veja [5], página 68. □

Definição 1.65. *A **topologia fraca-estrela** no dual X^* do espaço normado X, denotada por $\sigma(X^*, X)$, é a topologia em X^* gerada pelas funções pertencentes ao conjunto $J_X(X) = \{J_X(x) : x \in X\}$, isto é, pelas funções $\varphi \in X^* \mapsto J_X(x)(\varphi) = \varphi(x) \in \mathbb{K}$, onde $x \in X$.*

Quando uma sequência $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ em X^* converge para $\varphi \in X^*$ na topologia fraca-estrela escrevemos $\varphi_n \stackrel{\omega^*}{\to} \varphi$

Teorema 1.66 (Teorema de Goldstine)**.** *Sejam X um espaço de Banach e $J_X : X \to X^{**}$ o mergulho canônico. Então $J_X(B_X)$ é denso em $B_{X^{**}}$ na topologia fraca-estrela.*

Demonstração. Veja [5], páginas 117 e 118. □

Proposição 1.67. *Sejam X um espaço vetorial e $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ funcionais lineares em X tais que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} ker(\varphi_i) \subset \varphi$. Então existem escalares $a_1, \ldots, a_n$ tais que $\varphi = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i$.*

Demonstração. Veja [5], página 113. □

Definição 1.68. *Sejam X, Y espaços vetoriais normados e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ um operador linear contínuo. Definimos o operador $T^t \colon Y^* \to X^*$ por*

$$T^t(\varphi)(x) = \varphi(T(x)) \text{ para todos } x \in X \text{ e } \varphi \in Y^*.$$

*O operador T^t é chamado **adjunto** de T.*

Proposição 1.69. *Seja $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Então $T^t \in L(Y^*, X^*)$ e $\|T^t\| = \|T\|$. Mais ainda, se T é um isomorfismo (isométrico), então T^t também é um isomorfismo (isométrico).*

Demonstração. Veja [5], páginas 70 e 71. □

Proposição 1.70. *Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(X, X)$ com $\|T\| < 1$. Então, $(I - T)$ tem inversa contínua.*

Demonstração. Veja [5], página 136. □

Definição 1.71. *Um operador linear $T \colon X \to Y$ entre espaços normados é dito **compacto** se $\overline{T(B_X)}$ é compacto em Y.*

Proposição 1.72. *(a) Todo operador compacto é contínuo.*

(b) Todo operador linear contínuo de posto finito é compacto.

Demonstração. Veja [5], página 137. □

1.4 Espaços uniformemente convexos e estritamente convexos

Esta seção tem por objetivo apresentar caracterização de espaços uniformemente convexos e estritamente convexos, assim como resultados sobre esses espaços que serão utilizados no Capítulo 3. Tal seção foi baseada principalmente no livro [8].

Definição 1.73. *Um espaço de Banach X é dito **uniformemente convexo** se para cada $\epsilon > 0$ houver $0 < \delta < 1$ tal que*

$$\text{para todos } u, v \in B_X \text{ tais que } \frac{\|u + v\|}{2} > 1 - \delta, \text{ temos } \|u - v\| < \epsilon.$$

*Nesse caso, o **módulo de convexidade** é dado por*

$$\delta(\epsilon) \colon = \inf \left\{ 1 - \frac{\|u + v\|}{2} : u, v \in B_X, \ \|u - v\| \geq \epsilon \right\}.$$

Proposição 1.74. *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach. São equivalentes:*

(1) X é uniformemente convexo.

(2) Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ são sequências em X, satisfazendo $\lim\limits_{n\to\infty} (2\|x_n\|^2 + 2\|y_n\|^2 - \|x_n + y_n\|^2) = 0$, com $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ limitada, então $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$.

(3) Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ são sequências em B_X e $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$, então $\|x_n - y_n\| \to 0$.

Demonstração. Veja [8], página 432. □

Definição 1.75. *Seja X um espaço vetorial e C um subconjunto convexo não vazio de X. Dizemos que um ponto $x_0 \in C$ é um* **ponto extremo** *de C se para todos $\lambda \in (0,1)$ e $x_1, x_2 \in C$ tais que*

$$x_0 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \in C,$$

temos $x_0 = x_1 = x_2$.

Denotaremos por $\mathrm{Ext}(C)$ o conjunto de todos os pontos extremos do subconjunto convexo C.

Definição 1.76. *Um espaço de Banach X é dito* **estritamente convexa** *se $\mathrm{Ext}(B_X) = S_X$.*

Proposição 1.77. *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach. São equivalentes:*

(1) X é estritamente convexa.

(2) Se $x, y \in S_X$ satisfazem $\|x+y\| = 2$, então $x = y$.

(3) Se $x, y \in X$ satisfazem $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+y\|^2 = 0$, então $x = y$.

(4) Se $x, y \neq 0$ satisfaz $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, então $x = \lambda y$ para algum $\lambda > 0$.

Demonstração. Veja [8], página 335. □

Proposição 1.78. *Seja X um espaço de Banach de dimensão finita. Então X é uniformemente convexo se, e somente se, X é estritamente convexa.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Seja X um espaço estritamente convexa de dimensão finita. Sabemos que B_X é compacto em X.

Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ sequências em B_X tais que $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$. Suponha que não vale $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 0$. Então existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ temos que

$$\|x_n - y_n\| > \epsilon,$$

para algum $n > n_0$. Para $n_0 = 1$ existe $n_1 > 1$ tal que

$$\|x_{n_1} - y_{n_1}\| > \epsilon,$$

e para $n_0 = n_{k-1}$ existe $n_k > n_{k-1}$ tal que

$$\|x_{n_k} - y_{n_k}\| > \epsilon.$$

Sabemos que $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_{n_k} + y_{n_k}\| = 2$. Passando para uma subsequência se necessário segue da compacidade de B_X que existem $x, y \in B_X$ tais que $x_{n_k} \to x$ e $y_{n_k} \to y$. Logo,

$$\|x+y\| = \left\| \lim_{k\to\infty} x_{n_k} + \lim_{k\to\infty} y_{n_k} \right\| = 2.$$

Como X é estritamente convexa, então $x = y$. Daí, temos que

$$\begin{aligned} 0 = \|x - y\| &= \left\| \lim_{k\to\infty} x_{n_k} - \lim_{k\to\infty} y_{n_k} \right\| \\ &= \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - y_{n_k}\| \geq \epsilon, \end{aligned}$$

o que é uma contradição que mostra que $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 0$. Portanto, segue da Proposição 1.74 que X é uniformemente convexo.

($\Rightarrow$) Sejam $x, y \in S_X$ satisfazendo $\|x+y\| = 2$. Existem sequências $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}$ em B_X tais que $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Daí, temos que

$$\begin{aligned} 2 &= \|x+y\| \\ &= \left\| \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n \right\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\|. \end{aligned}$$

Como X é uniformemente convexo, então $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0.$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Portanto, $x = y$. Então, pela Proposição 1.77 temos que X é estritamente convexa. $\square$

Observação 1.79. *O fato de um espaço uniformemente convexo ser estritamente convexa na Proposição 1.78 é válido independente da dimensão do espaço X.*

Proposição 1.80. *Seja X um espaço de Banach isomorfo a um espaço de Banach uniformemente convexo (respectivamente, estritamente convexa). Então existe uma norma $|||\cdot|||$ em X que é uniformemente convexa (respectivamente, estritamente convexa) e $|||x||| \leq \|x\|$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. Seja $f\colon X \to Y$ um isomorfismo, onde Y é um espaço de Banach uniformemente convexo (respectivamente, estritamente convexa). Sem perda de generalidade podemos supor $\|f\| = 1$, pois se $\|f\| \neq 1$ definimos $g = \dfrac{f}{\|f\|}$ e g será um isomorfismo. De fato, temos que g é um operador linear bijetor e existem $b > a > 0$ tais que

$$a\|x\| \leq \|f(x)\| \leq b\|x\|,$$

para todo $x \in X$. Então, para todo $x \in X$ temos que

$$\frac{a}{\|f\|}\|x\| \leq \frac{\|f(x)\|}{\|f\|} \leq \frac{b}{\|f\|}\|x\|,$$

ou seja,

$$\frac{a}{\|f\|}\|x\| \leq \|g(x)\| \leq \frac{b}{\|f\|}\|x\|,$$

o que mostra que g é um isomorfismo.

Seja $|||\cdot|||\colon X \to \mathbb{R}$ dada por

$$|||x||| = \|f(x)\|_Y,$$

onde $\|\cdot\|_Y$ denota a norma em Y. Mostremos que $|||\cdot|||$ é uma norma em X. Sejam $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então

$$|||x||| = \|f(x)\|_Y \geq 0,$$

e,

$$|||x||| = 0 \iff \|f(x)\|_y = 0 \iff f(x) = 0 \iff x = 0,$$

pois f é um isomorfismo. Também temos que

$$\begin{aligned} |||\alpha x||| &= \|f(\alpha x)\|_Y \\ &= |\alpha|\|f(x)\|_Y \\ &= |\alpha| \ |||x|||. \end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned} |||x+y||| &= \|f(x+y)\|_Y \\ &\leq \|f(x)\|_Y + \|f(y)\|_Y \\ &= |||x||| + |||y|||, \end{aligned}$$

o que completa a prova de que $||| \cdot |||$ é uma norma em X.

Segue da definição de $||| \cdot |||$ que

$$\begin{aligned} |||x||| &= \|f(x)\| \\ &\leq \|f\|\|x\| = \|x\|, \end{aligned} \tag{1.2}$$

para todo $x \in X$.

Agora, mostremos que $(X, ||| \cdot |||)$ é estritamente convexa quando Y é estritamente convexa. Suponha que $(X, ||| \cdot |||)$ não seja estritamente convexa, então existem um ponto $x \in S_{(X,|||\cdot|||)}$ e $\lambda \in (0, 1)$ tais que

$$x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2,$$

onde $x_1, x_2 \in B_X$ com $x_1 \neq x$ e $x_2 \neq x$. Daí, temos que

$$1 = |||x||| = \|f(x)\|_y,$$

ou seja, $f(x) \in S_Y$. Sabemos que

$$f(x) = (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

Como $f(x_1), f(x_2) \in B_Y$ com $f(x_1) \neq f(x_2)$, pois f é um isomorfismo, então $f(x)$ não é um ponto extremo, mas isso é uma contradição já que todos os pontos de S_Y são pontos extremos. Essa contradição mostra que $(X, ||| \cdot |||)$ é estritamente convexa.

Resta, mostrar que $(X, |||\cdot|||)$ é uniformemente convexo quando Y é uniformemente convexo. Suponha que $(X, ||| \cdot |||)$ não seja uniformemente convexo, então existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $0 < \delta < 1$ existem $x, y \in B_X$ tais que

$$\frac{|||x+y|||}{2} > 1 - \delta \text{ e } |||x-y||| \geq \epsilon.$$

Logo, $f(x), f(y) \in B_Y$ são tais que

$$\frac{\|f(x) + f(y)\|_Y}{2} > 1 - \delta \text{ e } \|f(x) - f(y)\| \geq \epsilon,$$

o que é uma contradição, pois Y é uniformemente convexo. □

Proposição 1.81. *Seja $X_{\mathbb{R}}$ o espaço normado X sobre $\mathbb{R}$. Então a aplicação $f \mapsto Re\ f$ é uma isometria linear sobre $\mathbb{R}$ de X^* em $X^*_{\mathbb{R}}$.*

Demonstração. Veja [4], página 3. □

Capítulo 2

Teoremas de Bishop-Phelps-Bollobás

Neste capítulo, nosso principal objetivo é discutir sobre o Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás. Na primeira seção, estabeleceremos os conceitos necessários para a compreensão de tal teorema e do Teorema de Bishop-Phelps. Na segunda seção, daremos uma versão quantitativa do Teorema de Bishop-Phelps que foi proposta por Bollobás e que é conhecida como Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás. Os resultados apresentados neste capítulo foram obtidos por Bishop e Phelps [2] e por Bollobás [3].

2.1 Teorema de Bishop-Phelps

Começaremos definindo abaixo o conceito de espaço subreflexivo e posteriormente mostraremos que todo espaço de Banach é um espaço subreflexivo, tal resultado é conhecido como Teorema de Bishop-Phelps.

Definição 2.1. *Sejam X e Y espaços normados. Dizemos que um operador linear $f\colon X \to Y$* ***atinge sua norma na esfera unitária*** *S_X* ***de*** *X se existe $x \in S_X$ tal que $\|f(x)\|_Y = \|f\|$.*

Definição 2.2. *Um espaço normado X é* ***subreflexivo*** *se o conjunto dos funcionais lineares que atingem sua norma na esfera unitária S_X de X é denso em X^* com relação a norma, ou seja, para cada f em X^* e cada $\epsilon > 0$ existem $g \in X^*$ e $x \in S_X$ tais que $|g(x)| = \|g\|$ e $\|f - g\| < \epsilon$.*

Antes de demonstrarmos o principal resultado desta seção, mostraremos o Lema 2.3 que será fundamental para demonstrar o Teorema de Bishop-Phelps. O seguinte resultado foi publicado em 1960 por Phelps [15].

Lema 2.3. *Sejam X um espaço normado e $\epsilon > 0$. Se $f, g \in X^*$, $\|f\| = \|g\| = 1$, são tais que $|g(x)| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$ para todo ponto do conjunto $\{x \in B_X : f(x) = 0\}$ então $\|f - g\| \leq \epsilon$ ou $\|f + g\| \leq \epsilon$.*

Demonstração. Como $g|_{f^{-1}(0)}$ (restrição de g ao subespaço vetorial $f^{-1}(0)$) é um funcional linear, segue do Teorema 1.58 (Teorema de Hahn-Banach) que existe $h \in X^*$ tal que $h(x) = g(x)$ para todo $x \in f^{-1}(0)$ e $\|h\| = \|g|_{f^{-1}(0)}\|$. Daí,

$$\begin{aligned}\|h\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \{|g|_{f^{-1}(0)}(x)|\} \\ &= \sup\{|g(x)|\colon x \in B_X \cap f^{-1}(0)\}.\end{aligned}$$

Então por hipótese temos que $\|h\| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$. Além disso, como $g - h$ se anula em $f^{-1}(0)$, segue do Lema 1.67 que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $g - h = \alpha f$. Portanto, $\|g - \alpha f\| = \|h\| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$.

Sem perda de generalidade podemos assumir que $\alpha \geq 0$. Mostremos que $\|f - g\| \leq \epsilon$ (caso contrário a mesma prova aplicada para $(-\alpha)f$ mostraria que $\|f + g\| \leq \epsilon$).

Caso $\alpha \geq 1$, então $0 < \alpha^{-1} \leq 1$. Logo,

$$\begin{aligned} \|g - f\| &= \|g + \alpha^{-1}g - \alpha^{-1}g - \alpha^{-1}\alpha f\| \\ &= \|(1 - \alpha^{-1})g + \alpha^{-1}(g - \alpha f)\| \\ &\leq (1 - \alpha^{-1})\|g\| + \alpha^{-1}\|g - \alpha f\| \\ &\leq (1 - \alpha^{-1}) + \|g - \alpha f\|, \end{aligned} \tag{2.1}$$

pois $\|g\| = 1$. Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \alpha = \alpha\|f\| &= \|\alpha f\| \\ &= \|\alpha f + g - g\| \\ &\leq \|g\| + \|\alpha f - g\| \\ &\leq \|g\| + \|g - \alpha f\| \\ &= 1 + \|g - \alpha f\|. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \alpha - 1 &\leq \|g - \alpha f\| \\ \implies \alpha^{-1}\alpha - \alpha^{-1} &\leq \alpha^{-1}\|g - \alpha f\| \\ \implies 1 - \alpha^{-1} &\leq \alpha^{-1}\|g - \alpha f\| \\ &\leq \|g - \alpha f\|. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Segue das inequações (2.1) e (2.2) que

$$\begin{aligned} \|g - f\| &\leq 1 - \alpha^{-1} + \|g - \alpha f\| \\ &\leq 2\|g - \alpha f\| \\ &\leq 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Agora nos resta mostrar o caso em que $0 \leq \alpha < 1$. Neste caso, temos que

$$\begin{aligned} \|g - f\| &= \|g - \alpha f + \alpha f - f\| \\ &\leq \|g - \alpha f\| + \|(1 - \alpha)f\| \\ &\overset{(*)}{=} \|g - \alpha f\| + (1 - \alpha)\|f\| \\ &= \|g - \alpha f\| + 1 - \alpha \\ &\overset{(**)}{=} \|g - \alpha f\| + \|g\| - \|\alpha f\| \\ &\overset{(***)}{\leq} 2\|g - \alpha f\| \\ &\leq 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Em $(*)$ utilizamos que $0 \leq \alpha < 1$, em $(**)$ que $\|f\| = \|g\| = 1$, e em $(***)$ foi utilizado o seguinte fato: dados x, y em um espaço normado X, tem-se $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. □

Também precisaremos de mais alguns resultados auxiliares.

Lema 2.4. *Sejam X um espaço normado, $\epsilon > 0$ e $f, g \in X^*$ tais que $\|f\| = \|g\| = 1$. Então $|g(x)| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$ para todo $x \in A' = \{x \in B_X \colon f(x) = 0)\}$ se, e somente se $|g(x)| \leq 1$ para todo $x \in A = \{x \in X : f(x) = 0$ e $\|x\| \leq 2\epsilon^{-1}\}$.*

Demonstração. Sejam $\epsilon > 0$ e $f, g \in X^*$ tais que $\|f\| = \|g\| = 1$. Para cada $x \in A'$, o elemento $y = 2\epsilon^{-1}x$ satisfaz

$$\begin{aligned} f(y) &= 2\epsilon^{-1}f(x) = 0, \\ \|y\| &= 2\epsilon^{-1}\|x\| \leq 2\epsilon^{-1} \end{aligned}$$

e

$$|g(y)| = 2\epsilon^{-1}|g(x)| \leq 2\epsilon^{-1} \cdot \frac{\epsilon}{2} = 1.$$

Reciprocamente, para cada $x \in A$, o elemento $y = \dfrac{x}{2\epsilon^{-1}}$ satisfaz

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{1}{2\epsilon^{-1}}f(x) = 0, \\ \|y\| &= \frac{\|x\|}{2\epsilon^{-1}} \leq \frac{2\epsilon^{-1}}{2\epsilon^{-1}} = 1 \end{aligned}$$

e

$$|g(y)| = \frac{1}{2\epsilon^{-1}}|g(x)| \leq \frac{1}{2\epsilon^{-1}} = \frac{\epsilon}{2}.$$

□

Corolário 2.5. *Seja X um espaço normado e $\epsilon > 0$. Se $f, g \in X^*$, $\|f\| = \|g\| = 1$, são tais que $|g(x)| \leq 1$ para todo ponto do conjunto $\{x \in X : f(x) = 0 \text{ e } \|x\| \leq 2\epsilon^{-1}\}$ então $\|f - g\| \leq \epsilon$ ou $\|f + g\| \leq \epsilon$.*

Demonstração. Segue diretamente dos Lemas 2.3 e 2.4. □

Proposição 2.6. *Sejam X um espaço de Banach e $\epsilon > 0$. Se para todo $f \in S_{X^*}$, existem $g \in X^*$ e $x \in S_X$ tais que $|g(x)| = \|g\|$ e $\|f - g\| < \epsilon$. Então, X é subreflexivo.*

Demonstração. Dado $h \in X^*$ não nulo, temos que $\phi = \dfrac{h}{\|h\|}$ tem norma igual a um e portanto existem $\psi \in X^*$ e $x \in S_X$ tais que $|\psi(x)| = \|\psi\|$ e $\|\psi - \phi\| < \dfrac{\epsilon}{\|h\|}$. Logo,

$$\begin{aligned} \|\|h\|\psi - h\| &= \|h\|\|\psi - \phi\| \\ &< \|h\|\frac{\epsilon}{\|h\|} = \epsilon \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |\|h\|\psi(x)| &= \|h\||\psi(x)| \\ &= \|h\|\|\psi\|. \end{aligned}$$

Daí, tomando $\widetilde{g} = \|h\|\psi \in X^*$, temos que $|\widetilde{g}(x)| = \|\widetilde{g}\|$ e $\|\widetilde{g} - h\| < \epsilon$. Isso prova que X é subreflexivo. □

Partiremos agora para a demonstração do Teorema de Bishop-Phelps.

Teorema 2.7 (Teorema de Bishop-Phelps)**.** *Seja X um espaço de Banach. Então X é subreflexivo.*

Demonstração. Mostraremos o resultado para o caso real, pois o caso complexo é uma consequência do caso real.

De fato, suponha que o teorema é valido no caso real e seja X um espaço de Banach complexo. Dado $h \in X^*$, podemos escrever

$$h(x) = Re\ h(x) + i\ Im\ h(x).$$

Note que $Re\ h, Im\ h \in X_{\mathbb{R}}^*$, onde $X_{\mathbb{R}}$ denota X como espaço vetorial real. Além disso, temos que

$$\begin{aligned} i\,(Re\ h(x) + i\ Im\ h(x)) &= ih(x) = h(ix) \\ &= Re\ h(ix) + i\ Im\ h(ix), \end{aligned}$$

para todo $x \in X$. Daí, $Im\ h(x) = -Re\ h(ix)$, para todo $x \in X$.

Dado $\epsilon > 0$, podemos usar a versão real do Teorema de Bishop-Phelps para o funcional linear $Re\ h$. Assim, existem $g_1 \in X_{\mathbb{R}}^*$ e $x_1 \in S_X = S_{X_{\mathbb{R}}}$ tais que

$$\|g_1\| = |g_1(x_1)| \text{ e } \|Re\ h - g_1\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Considere $g_2 \colon X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ e $g \colon X \to \mathbb{C}$ dados por

$$g_2(x) = -g_1(ix)$$

e

$$g(x) = g_1(x) + ig_2(x).$$

As funções g_2 e g estão bem definidas, pois $X_{\mathbb{R}}$ e X são os mesmos como conjunto. A linearidade de g_2 e g seguem de linearidade de g_1. De fato, sejam $x, y \in X_{\mathbb{R}}$, $z, w \in X$, $(a + ib) \in \mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned} g_2(x+y) &= -g_1(i(x+y)) \\ &= -g_1(ix+iy) \\ &= -g_1(ix) - g_1(iy) = g_2(x) + g_2(y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g_2(\lambda x) &= -g_1(i(\lambda x)) \\ &= -g_1(\lambda(ix)) \\ &= \lambda(-g_1(ix)) \\ &= \lambda g_2(x). \end{aligned}$$

Também temos que

$$\begin{aligned} g(z+w) &= g_1(z+w) + ig_2(z+w) \\ &= g_1(z) + g_1(w) + ig_2(z) + ig_2(w) \\ &= g(z) + g(w) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
g((a+ib)z) &= g_1((a+ib)z) + ig_2((a+ib)z) \\
&= g_1((a+ib)z) - ig_1((ia-b)z) \\
&= ag_1(z) + bg_1(iz) - iag_1(iz) + ibg_1(z) \\
&= ag_1(z) - bg_2(z) + iag_2(z) + ibg_1(z) \\
&= ag_1(z) + i^2 bg_2(z) + iag_2(z) + ibg_1(z) \\
&= (a+ib)g_1(z) + (a+ib)ig_2(z) \\
&= (a+ib)(g_1(z) + ig_2(z)) \\
&= (a+ib)g(z).
\end{aligned}$$

Mostremos agora que g_2 e g são contínuas. Como g_1 é um funcional linear contínuo, então

$$|g_1(x)| \leq \|g_1\|\|x\| \tag{2.3}$$

para todo x em $X_{\mathbb{R}}$. Logo,

$$|g_2(x)| = |-g_1(ix)| \leq \|g_1\||i|\|x\| = \|g_1\|\|x\| \tag{2.4}$$

para todo $x \in X_{\mathbb{R}}$. De (2.3) e (2.4) temos que

$$\begin{aligned}
|g(x)| &= |g_1(x) + ig_2(x)| \\
&\leq |g_1(x)| + |i||g_2(x)| \\
&= 2\|g_1\|\|x\|
\end{aligned} \tag{2.5}$$

para todo $x \in X$.

Segue da linearidade de g_2 e g, e das inequações (2.4) e (2.5) que $g_2 \in X_{\mathbb{R}}^*$ e $g \in X^*$. Então, pela Proposição 1.81,

$$\|g\| = \|Re\ g\| = \|g_1\|.$$

Como $|g_1(x_1)| = \|g_1\|$, temos que

$$|g(x_1)| \leq \|g\| = \|g_1\| = |g_1(x_1)| \leq |g(x_1)|.$$

Logo, $|g(x_1)| = \|g\|$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\|Im\ h - g_2\| &= \sup\{|(Im\ h - g_2)(x)| \colon \|x\| = 1\} \\
&= \sup\{|(-Re\ h + g_1)(ix)| \colon \|x\| = 1\} \\
&= \sup\{|(Re\ h - g_1)(y)| \colon \|y\| = 1\} \\
&= \|Re\ h - g_1\| < \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\|h - g\| &= \|Re\ h + i\ Im\ h - g_1 - ig_2\| \\
&\leq \|Re\ h - g_1\| + \|Im\ h - g_2\| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Mostremos então o teorema para o caso real. Sejam $f \in X^*$ e $\epsilon > 0$. Pela Proposição 2.6 podemos considerar $\|f\| = 1$.

Pelo Corolário 2.5, basta encontrar $g \in X^*$ tal que $|g(x)| \leq 1$ para todo x no conjunto $A = \{x \in X : f(x) = 0 \text{ e } \|x\| \leq 2\epsilon^{-1}\}$, e para o qual existe $x \in S_X$ tal que $g(x) = \|g\| = 1$.

Seja C o envoltório convexo da união dos conjuntos A e B_X , e suponha que exista $x_0 \in B_X \cap \partial C$. Então $x_0 \in C \cap \partial C$. Como $B(0,1) \subset B_X \subset C$ é um aberto, então $int(C) \neq \emptyset$. Assim, o conjunto C e o ponto x_0 satisfazem as hipóteses da Proposição 1.62. Logo, existe $g \in X^*$ com $\|g\| = 1$ tal que

$$\sup\{g(x) : x \in C\} = g(x_0).$$

Além disso, como B_X está contida em C e contém x_0, temos que

$$\begin{aligned} g(x_0) &\leq \sup\{g(x) : x \in B_X\} \\ &\leq \sup\{g(x) : x \in C\} = g(x_0). \end{aligned}$$

Portanto,

$$g(x_0) = \sup\{g(x) : x \in C\} = \sup\{g(x) : x \in B_X\} = \sup\{|g(x)| : x \in B_X\} = \|g\| = 1.$$

Já que $A = -A$ e $A \subset C$, segue que

$$|g(y)| \leq \sup\{|g(x)| \colon x \in A\} \leq \sup\{g(x) \colon x \in A\} = 1,$$

para todo $y \in A$.

Como $x_0 \in B_X$, temos $\|x_0\| \leq 1$. Mostremos que $\|x_0\| = 1$. Suponha que $\|x_0\| < 1$. Então x_0 pertence à bola aberta centrada na origem e de raio um, que é um conjunto aberto contido em C, logo, temos $x_0 \in B(0,1) \subseteq int(C)$. Portanto, $x_0 \notin \partial C$, uma vez que x_0 é ponto interior de C e $int(C) = C - \partial C$. Contradição essa que prova que $\|x_0\| = 1$. Isso mostra que $g \in X^*$ é tal que $|g(x)| \leq 1$ para todo $x \in A$ e que $x_0 \in S_X$ é tal que $g(x_0) = \|g\| = 1$, o que prova o teorema.

Resta mostrar que $B_X \cap \partial C \neq \emptyset$. Seja $z \in B_X$ tal que $f(z) > 0$ e seja $K = \dfrac{1 + \frac{2}{\epsilon}}{f(z)}$. A existência de $z \in B_X$ tal que $f(z) > 0$ é garantida do fato de que $\|f\| = 1$, então existe $w \in B_X$ tal que $f(w) \neq 0$. Caso $f(w) > 0$, basta tomar $z = w$. Caso contrário, ou seja, $f(w) < 0$, basta tomar $z = -w$ para termos $f(z) = -f(w) > 0$.

Defina uma ordem parcial no conjunto $Z = \{x \in B_X : f(x) \geq f(z)\}$ da seguinte maneira: $x \geq y$ se

$$f(x) \geq f(y) \text{ e} \tag{2.6}$$

$$\|x - y\| \leq K[f(x) - f(y)]. \tag{2.7}$$

Primeiramente, mostraremos que $(Z, \geq)$ é uma ordem parcial no conjunto Z. Sejam $x, y, w \in Z$. Então:

(a) $x \geq x$. De fato, temos que

$$\begin{gathered} f(x) \geq f(x) \text{ e} \\ 0 = \|x - x\| \leq K[f(x) - f(x)] = 0. \end{gathered}$$

(b) Se $x \geq y$ e $y \geq x$, temos que

$$f(x) \geq f(y) \geq f(x),$$

o que mostra que $f(x) = f(y)$. Então

$$\|x - y\| \leq K[f(x) - f(y)] = 0,$$

o que implica que $\|x - y\| = 0$, o que ocorre se, e somente se, $x - y = 0$. Logo $x = y$.

(c) Se $x \geq y$ e $y \geq w$ então

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(y) \text{ e} \\ f(y) &\geq f(w), \\ \|x-y\| &\leq K[f(x)-f(y)] \text{ e} \\ \|y-w\| &\leq K[f(y)-f(w)]. \end{aligned}$$

Logo,

$$f(x) \geq f(w)$$

e

$$\begin{aligned} \|x-w\| &\leq \|x-y\| + \|y-w\| \\ &\leq K[f(x)-f(y)] + K[f(y)-f(w)] \\ &= K[f(x)-f(y)+f(y)-f(w)] \\ &= K[f(x)-f(w)]. \end{aligned}$$

Portanto, temos que $x \geq w$.

Logo, a relação $\geq$ definida é uma ordem parcial no conjunto Z.

Seja W um subconjunto totalmente ordenado de Z. Segue de (2.6) que a rede de números reais $\{f(x) : x \in W\}$ é limitada e monótona e, portanto, converge para seu supremo.

De acordo com a inequação (2.7) W é uma rede de Cauchy. De fato, dado $\epsilon_0 > 0$, mostremos que existe $z_0 \in W$ tal que

$$\|x-y\| < \epsilon_0,$$

para todos $x, y \geq z_0$. Como $f(W) := \{f(x)\colon x \in W\}$ é convergente, então é de Cauchy. Portanto existe $f(z_0) \in f(W)$ tal que

$$|f(x)-f(y)| < \frac{\epsilon_0}{K}$$

para todos $f(x), f(y) \geq f(z_0)$. Como W é totalmente ordenado, então sem perda de generalidade podemos supor que $x \geq y$. Logo,

$$\|x-y\| \leq K[f(x)-f(y)] < K \cdot \frac{\epsilon_0}{K} = \epsilon_0$$

para todo $x, y \geq z_0$.

Como X é completo e B_X é um fechado em X, então B_X é completo, logo, segue da Proposição 1.25 que W converge para um ponto y em B_X. Segue da continuidade da f e da norma que y é uma cota superior de W. De fato, denote a rede W como $(x)_{x\in W}$. Sabemos que $\lim\limits_{x\in W} x = y$. Então

$$f(y) = f\left(\lim_{x\in W} x\right) = \lim_{x\in W} f(x) = \sup f(W) \geq f(w) \tag{2.8}$$

para todo $w \in W$. Além disso, para todo $w \in W$,

$$\begin{aligned}
\|y - w\| &= \left\| \lim_{x \in W} (x - w) \right\| \\
&= \lim_{x \in W} \|x - w\| \\
&\overset{(*)}{\leq} \lim_{x \in W} K|f(x) - f(w)| \\
&= K \left| \lim_{x \in W} f(x) - f(w) \right| \\
&= K|f(y) - f(w)| \\
&\overset{(**)}{=} K[f(y) - f(w)],
\end{aligned}$$

onde $(*)$ segue do fato de que $x \leq w$ ou $w \leq x$ já que W é totalmente ordenado e $(**)$ segue de (2.8). Logo, $y \geq x$ para todo $x \in W$, ou seja, y é cota superior de W.

Portanto, segue do Lema 1.14 (Lema de Zorn) que existe um elemento maximal x_0 de Z. Então $x_0 \in B_X \subset C$. Resta mostrar que $x_0 \in \partial C$.

Suponha que $x_0 \notin \partial C$, então x_0 é um ponto interior de C. Logo, existe $\alpha > 0$ tal que $x_0 + \alpha z \in C$. De fato, suponha que não existe $\alpha > 0$ tal que $x_0 + \alpha z \in C$, ou seja, $x_0 + \alpha z \notin C$ para todo $\alpha > 0$. Então, para todo $r > 0$, tomando $\alpha = \dfrac{r}{2}$, temos que

$$x_0 + \alpha z \in B(x_0, r). \tag{2.9}$$

Logo, para todo $r > 0$, temos que $B(x_0, r)$ intercepta C (pois $x_0 \in C$) e seu complementar. Daí, $x_0 \in \partial C$, o que é uma contradição, pois supomos que $x_0 \notin \partial C$. Portanto, existe $\alpha > 0$ tal que $x_0 + \alpha z \in C$.

Mostremos que existem y em B_X, x em A e λ em $[0, 1]$ tais que $x_0 + \alpha z = \lambda y + (1 - \lambda)x$. Segue da definição de C que existem $x, y \in C$ e $\lambda \in [0, 1]$ tais que $x_0 + \alpha z = \lambda y + (1 - \lambda)x$. Caso $x_0 + \alpha z \in B_X \setminus A$, basta tomarmos $y = x_0 + \alpha z$, $\lambda = 1$ e x um ponto qualquer em A. Já no caso de $x_0 + \alpha z \in A \setminus B_X$, basta tomarmos $x = x_0 + \alpha z$, $\lambda = 0$ e y um ponto qualquer em B_X. Por fim, considere o caso em que $x_0 + \alpha z \in C \setminus (B_X \cup A)$. Suponha que existam $x, y \in A$ e $\lambda \in [0, 1]$ tais que $x_0 + \alpha z = \lambda y + (1 - \lambda)x$. Então

$$\begin{aligned}
f(x_0 + \alpha z) &= f(\lambda y + (1 - \lambda)x) \\
&= \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(x) = 0,
\end{aligned}$$

ou seja, $x_0 + \alpha z \in A$. O que contradiz o fato de $x_0 + \alpha z \in C \setminus (B_X \cup A)$. Suponha que existam $x, y \in B_X$ e $\lambda \in [0, 1]$ tais que $x_0 + \alpha z = \lambda y + (1 - \lambda)x$. Então

$$\begin{aligned}
\|x_0 + \alpha z\| &= \|\lambda y + (1 - \lambda)x\| \\
&\leq \lambda\|y\| + (1 - \lambda)\|x\| \\
&\leq \lambda + (1 - \lambda) = 1,
\end{aligned}$$

ou seja, $x_0 + \alpha z \in B_X$. O que contradiz o fato de $x_0 + \alpha z \in C \setminus (B_x \cup A)$. Logo, existem $y \in B_X$, $x \in A$ e $\lambda \in [0, 1]$ tais que $x_0 + \alpha z = \lambda y + (1 - \lambda)x$. Então, temos que

$$\begin{aligned}
f(z) &\leq f(x_0) \\
&< f(x_0) + \alpha f(z) \\
&= f(x_0 + \alpha z) \\
&= f(\lambda y + (1 - \lambda)x) \\
&= \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(x) \\
&= \lambda f(y) \leq f(y),
\end{aligned}$$

o que mostra que $y \in Z$ e $y \neq x_0$, pois $f(z) > 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} y - x_0 &= y - \lambda y - (1-\lambda)x + \alpha z \\ &= (1-\lambda)y - (1-\lambda)x + \alpha z \\ &= (1-\lambda)(y-x) + \alpha z. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|y - x_0\| &= \|(1-\lambda)(y-x) + \alpha z\| \\ &\leq (1-\lambda)\|y-x\| + \alpha\|z\| \\ &\leq (1-\lambda)(\|y\| + \|x\|) + \alpha \\ &\leq (1-\lambda)(1+2\epsilon^{-1}) + \alpha \\ &< (1-\lambda)(1+2\epsilon^{-1}) + \alpha(1+2\epsilon^{-1}) \\ &= (1-\lambda+\alpha)(1+2\epsilon^{-1}). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} f(y - x_0) &= f((1-\lambda)(y-x) + \alpha z) \\ &= (1-\lambda)f(y) - (1-\lambda)f(x) + \alpha f(z) \\ &= (1-\lambda)f(y) + \alpha f(z) \\ &\geq (1-\lambda)f(z) + \alpha f(z) \\ &= (1-\lambda+\alpha)f(z). \end{aligned}$$

Então

$$(1-\lambda+\alpha) \leq \frac{f(y-x_0)}{f(z)}. \tag{2.11}$$

Segue das inequações (2.10) e (2.11) que

$$\begin{aligned} \|y - x_0\| &< (1-\lambda+\alpha)(1+2\epsilon^{-1}) \\ &\leq \frac{f(y-x_0)}{f(z)}(1+2\epsilon^{-1}) \\ &= \frac{(1+2\epsilon^{-1})}{f(z)}[f(y) - f(x_0)] \\ &= K[f(y) - f(x_0)]. \end{aligned}$$

Isso mostra que $y > x_0$, o que é uma contradição, pois x_0 é o elemento maximal de Z. Portanto, $x_0 \in \partial C$. □

2.2 Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás

O Teorema de Bishop-Phelps, demonstrado na seção anterior, afirma que todo espaço de Banach X é subreflexivo, ou seja, o conjuntos dos funcionais lineares que atingem sua norma na esfera unitária de X é denso em X^*.

A seguir, apresentaremos uma versão do Teorema de Bishop-Phelps, que ficou conhecida como Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás. Ao final desta seção iremos aplicá-lo a um problema sobre imagem numérica de um operador.

Teorema 2.8 (Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás)**.** *Sejam $x \in S_X$ e $f \in S_{X^*}$ tais que $|f(x) - 1| \leq \epsilon^2/2$ com $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Então existem $y \in S_X$ e $g \in S_{X^*}$ tais que $g(y) = 1$, $\|f - g\| \leq \epsilon$ e $\|x - y\| < \epsilon + \epsilon^2$.*

Demonstração. Sejam $0 < \epsilon < \dfrac{1}{2}$, $x \in S_X$ e $f \in S_{X^*}$ tais que $|f(x) - 1| \leq \epsilon^2/2$. De acordo com o Teorema 2.7 (Teorema de Bishop-Phelps), existe $g \in S_{X^*}$ que atinge sua norma em algum ponto $x_0 \in S_X$,

$$\|f - g\| \leq \epsilon \text{ e } \|x_0 - x\| \leq \frac{2+\epsilon}{\epsilon f(x)} f(x_0 - x).$$

Temos que $0 \leq f(x_0 - x) \leq 1 - f(x)$. De fato, como

$$0 \leq \|x_0 - x\| \leq \frac{2+\epsilon}{\epsilon f(x)} f(x_0 - x),$$

então

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\epsilon f(z)}{2+\epsilon}\|x_0 - x\| \\ &\leq f(x_0 - x) \\ &= f(x_0) - f(x) \\ &\leq |f(x_0)| - f(x) \\ &\leq \ \|f\|\|x_0\| - f(x) \\ &= 1 - f(x). \end{aligned}$$

Podemos escrever $f(x)$ da seguinte forma

$$f(x) = 1 - |f(x) - 1|,$$

pois $|f(x) - 1| = |1 - f(x)| = 1 - f(x)$. Daí, tomando $y = x_0$, sabemos que $y \in S_X$ e $g \in S_{X^*}$ são tais que $g(y) = 1$,

$$\|f - g\| \leq \epsilon$$

e

$$\begin{aligned} \|x - y\| &\leq \frac{2+\epsilon}{\epsilon f(x)} f(y - x) \\ &\leq \frac{2+\epsilon}{\epsilon(1 - |f(x) - 1|)}(1 - f(x)) \\ &\leq \frac{2+\epsilon}{\epsilon(1 - \frac{\epsilon^2}{2})}\frac{\epsilon^2}{2} \\ &= \frac{2+\epsilon}{\frac{\epsilon(2-\epsilon^2)}{2}}\frac{\epsilon^2}{2} \\ &= (2+\epsilon)\left(\frac{2}{\epsilon(2-\epsilon^2)}\right)\frac{\epsilon^2}{2} \\ &= \left(\frac{2}{\epsilon(2-\epsilon^2)} + \frac{\epsilon}{\epsilon(2-\epsilon^2)}\right)\epsilon^2 \\ &= \frac{2\epsilon}{2-\epsilon^2} + \frac{\epsilon^2}{2-\epsilon^2}. \end{aligned}$$

Vejamos que $\dfrac{2\epsilon}{2-\epsilon^2} + \dfrac{\epsilon^2}{2-\epsilon^2} < \epsilon + \epsilon^2$. Com efeito,

$$\begin{array}{rrl} & \dfrac{2\epsilon}{2-\epsilon^2} + \dfrac{\epsilon^2}{2-\epsilon^2} & < \epsilon + \epsilon^2 \\ \Longleftrightarrow & 2\epsilon + \epsilon^2 & < (\epsilon + \epsilon^2)(2-\epsilon^2) \\ \Longleftrightarrow & 2\epsilon + \epsilon^2 & < 2\epsilon + 2\epsilon^2 - \epsilon^3 - \epsilon^4 \\ \Longleftrightarrow & 0 & < \epsilon^2 - \epsilon^3 - \epsilon^4 \\ \Longleftrightarrow & \epsilon^3 + \epsilon^4 & < \epsilon^2. \end{array}$$

Como $0 < \epsilon < \dfrac{1}{2}$, temos

$$\epsilon^3 + \epsilon^4 < \frac{1}{2}\epsilon^2 + \frac{1}{4}\epsilon^2 = \frac{3}{4}\epsilon^2 < \epsilon^2,$$

então

$$\frac{2\epsilon}{2-\epsilon^2} + \frac{\epsilon^2}{2-\epsilon^2} < \epsilon + \epsilon^2.$$

Assim, o teorema fica provado. $\square$

Corolário 2.9. *Seja $0 < \epsilon < \dfrac{1}{2}$. Então, existem um espaço de Banach X, um ponto $x \in S_X$ e um funcional $f \in S_{X^*}$ tais que $f(x) = 1 - \left(\dfrac{\epsilon^2}{2}\right)$ e se $y \in S_X$ e $g \in S_{X^*}$ com $g(y) = 1$ então $\|f - g\| \geq \epsilon$ ou $\|x - y\| \geq \epsilon$.*

Demonstração. Considere $\mathbb{R}^2$ com a norma $\|(a,b)\| = \max\{|a + (1-\epsilon)b|, |b|\}$. Denotemos $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$. Temos que

$$\{(a,b) : -1 \leq a + (1-\epsilon)b \leq 1,\ -1 \leq b \leq 1\}$$

é uma bola unitária fechada de X. A seguir podemos ver a figura de tal bola.

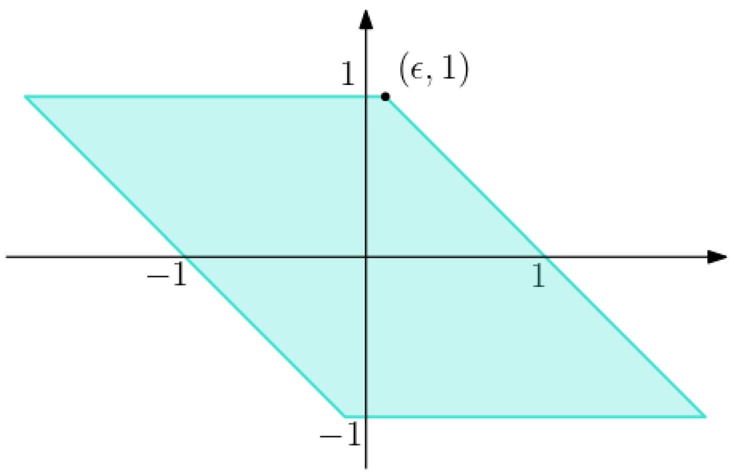

Figura 2.1: Bola unitária fechada de X.
Fonte: Acervo do autor.

Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(a,b) = \frac{\epsilon}{2}a + \left(1 - \left(\frac{\epsilon^2}{2}\right)\right) b$. Então

$$
\begin{aligned}
|f(a,b)| &= \left|\frac{\epsilon}{2}a + \left(1 - \left(\frac{\epsilon^2}{2}\right)\right) b\right| \\
&= \left|\frac{\epsilon}{2}a + b - \frac{\epsilon^2}{2}b + \frac{\epsilon}{2}b - \frac{\epsilon}{2}b\right| \\
&= \left|\frac{\epsilon}{2}\left(a + (1-\epsilon)b\right) + \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) b\right| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}|a + (1-\epsilon)b| + \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)|b| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) = 1
\end{aligned}
$$

para todo $(a,b) \in B_X$. Logo,

$$\|f\| \leq 1.$$

Tomando $x_0 = (\epsilon, 1)$, temos

$$\|(\epsilon,1)\| = \max\{|\epsilon + (1-\epsilon)|, |1|\} = 1$$

e

$$f(x_0) = \frac{\epsilon}{2}\epsilon + \left(1 - \left(\frac{\epsilon^2}{2}\right)\right) = 1.$$

Portanto, $\|f\| = 1$. Além disso, considerando $x = (0,1) \in S_X$,

$$f(x) = 1 - \frac{\epsilon^2}{2}.$$

Mostraremos que se $g \in S_{X^*}$ com $\|f - g\| < \epsilon$ então g atinge sua norma em um ponto que está a uma distância maior ou igual a ϵ do ponto x.

Como g é linear, podemos escrever

$$g(a,b) = \alpha(a + (1-\epsilon)b) + \beta b$$

para algum $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. Por hipótese temos que $\|f - g\| < \epsilon$, então $|f(a,b) - g(a,b)| < \epsilon$ para todo $(a,b) \in B_X$. Daí,

$$\epsilon > |f(1,0) - g(1,0)| = \left|\frac{\epsilon}{2} - \alpha\right|.$$

Então,

$$-\epsilon < \frac{\epsilon}{2} - \alpha < \epsilon,$$

que implica

$$-\frac{3\epsilon}{2} < -\alpha < \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo,

$$-\frac{\epsilon}{2} < \alpha < \frac{3\epsilon}{2}. \tag{2.12}$$

Por outro lado, como

$$\begin{aligned}\|(-1+\epsilon,1)\| &= \max\{|(-1+\epsilon)+1-\epsilon|,|1|\}\\ &= \max\{0,1\} = 1,\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}\epsilon > |f(-1+\epsilon,1)-g(-1+\epsilon,1)| &= \left|\frac{\epsilon}{2}(-1+\epsilon)+\left(1-\left(\frac{\epsilon^2}{2}\right)\right)-(\alpha(-1+\epsilon+(1-\epsilon))+\beta)\right|\\ &= \left|-\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon^2}{2}+1-\frac{\epsilon^2}{2}-\beta\right|\\ &= \left|1-\frac{\epsilon}{2}-\beta\right|,\end{aligned}$$

ou seja,

$$-\epsilon < 1-\frac{\epsilon}{2}-\beta < \epsilon.$$

Daí,

$$-\frac{\epsilon}{2}-1 < -\beta < -1+\frac{3\epsilon}{2}.$$

Portanto,

$$1-\frac{3\epsilon}{2} < \beta < 1+\frac{\epsilon}{2} \tag{2.13}$$

Dessa forma, α tende a 0 e β tende a 1, quando ϵ tende a 0. Para facilitar a análise, vamos determinar os pontos de máximo das funções $g \in S_{X^*}$ que satisfazem as inequações (2.12) e (2.13).

Temos que $\nabla g = (\alpha, \alpha(1-\epsilon)+\beta)$ e sabemos que ∇g aponta para a direção de maior crescimento da função. Observe que a segunda coordenada de ∇g é positiva, pois

$$\alpha > -\frac{\epsilon}{2} \text{ e } \beta > 1-\frac{3\epsilon}{2}$$

implicam

$$\begin{aligned}\alpha(1-\epsilon)+\beta &> -\frac{\epsilon}{2}(1-\epsilon)+1-\frac{3\epsilon}{2}\\ &> -\frac{\epsilon}{2}+1-\frac{3\epsilon}{2}\\ &= 1-2\epsilon > 0.\end{aligned}$$

Além disso, a primeira coordenada de ∇g está próxima de zero. Note ainda que, se $v = (\epsilon-1, 1)$ então

$$\nabla g \cdot v = \alpha(\epsilon-1)+\alpha(1-\epsilon)+\beta = \beta \neq 0,$$

ou seja, ∇g não é ortogonal ao segmento de $(2-\epsilon,-1)$ a $(\epsilon,1)$. Dessa forma, todo $g \in S_{X^*}$ que satisfaz (2.12) e (2.13) deve atingir o máximo em um dos pontos do segmento de $(-2+\epsilon,1)$ a $(\epsilon,1)$, dependendo dos valores de α e β.

Vejamos que se $\nabla g = (0,\beta)$, ou seja, $\alpha = 0$, então $\|f-g\| \geq \epsilon$. Se $\alpha = 0$, então

$$g(a,b) = \beta b.$$

Já que $\beta > 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\|g\| &= \sup\{|g(a,b)| \colon (a,b) \in B_X\} \\
&= \sup\{|\beta b| \colon (a,b) \in B_X\} \\
&= \sup\{\beta|b| \colon (a,b) \in B_X\} \\
&= \beta \sup\{|b| \colon (a,b) \in B_X\} \\
&= \beta.
\end{aligned}$$

Como $\|g\| = 1$, segue que $\beta = 1$. Daí,

$$g(a,b) = b.$$

Então,

$$\begin{aligned}
f(2-\epsilon,-1) - g(2-\epsilon,-1) &= \frac{\epsilon}{2}(2-\epsilon) - \left(1 - \frac{\epsilon^2}{2}\right) - (-1) \\
&= \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} - 1 + \frac{\epsilon^2}{2} + 1 \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Já que $(2-\epsilon,-1) \in B_X$, temos

$$\|f-g\| \geq |(f-g)(2-\epsilon,-1)| = \epsilon.$$

Assim, embora g satisfaça (2.12) e (2.13), g não satisfaz $\|f-g\| < \epsilon$, e por essa razão não temos interesse em tal g.

Considerando apenas as funções $g \in S_{X^*}$ tais que valem (2.12) e (2.13) e ainda $\alpha \neq 0$, temos que para $\alpha > 0$, g atinge o máximo em $(\epsilon,1)$, e para $\alpha < 0$, g atinge o máximo em $(-2+\epsilon,1)$. Note que

(i) se $x = (0,1)$ e $y = (\epsilon,1)$ então

$$\|x-y\| = \|(-\epsilon,0)\| = \max\{|-\epsilon|,0\} = \epsilon.$$

(ii) se $x = (0,1)$ e $y = (-2+\epsilon,1)$ então

$$\|x-y\| = \|(2-\epsilon,0)\| = \max\{|2-\epsilon|,0\} = 2-\epsilon.$$

Portanto, em ambos os casos, g atinge o máximo em um ponto de distância maior ou igual a ϵ de x.

Como as funções $g \in S_{X^*}$ tais que $\|f-g\| < \epsilon$ estão incluídas entre as funções que satisfazem (2.12) e (2.13), o resultado fica provado. $\square$

Agora, apresentaremos definições e resultados para posteriormente mostrar como consequência do teorema anterior que $\overline{V(T)} = \overline{V(T^t)}$ para todo operador linear limitado T em um espaço de Banach.

Definição 2.10. *Seja X um espaço de Banach. Definimos o subconjunto $\Pi(X)$ de $X \times X^*$ por*

$$\Pi(X) = \{(x, f) \in S_X \times S_{X^*} \colon f(x) = 1\}.$$

Definição 2.11. *Sejam espaço de Banach X e $T \colon X \to X$ um operador linear limitado. A* ***imagem numérica*** *de T é definida por*

$$V(T) = \{f(Tx) \colon (x, f) \in \Pi(X)\}.$$

Definição 2.12. *Sejam espaço de Banach X e $T \colon X^* \to X^*$ um operador linear limitado. A* ***imagem numérica inferior*** *de T é definida por*

$$LV(T) = \{(Tf)(x) \colon (x, f) \in \Pi(X)\}.$$

Mostremos que $V(T) \subset V(T^t)$. Veremos no Exemplo 2.15 que essa inclusão é estrita em geral.

Teorema 2.13. *Sejam X um espaço de Banach e $T \colon X^* \to X^*$ um operador linear limitado. Então*

$$LV(T) \subset V(T).$$

Demonstração. Seja $(x, f) \in \Pi(X)$. Lembremos que $\widehat{x}$ denota a imagem de x mergulho canônico de X em X^{**}. Então $(f, \widehat{x}) \in \Pi(X^*)$, pois $f \in S_{X^*}$, $\widehat{x} \in S_{X^{**}}$ e $\widehat{x}(f) = f(x) = 1$. Logo,

$$(Tf)(x) = \widehat{x}(Tf) \in V(T).$$

Portanto, $LV(T) \subset V(T)$.

□

Corolário 2.14. *Sejam espaço de Banach X e $T \colon X \to X$ um operador linear limitado. Então*

$$V(T) \subset V(T^t).$$

Demonstração. Como T é um operador linear limitado, temos que $T^t \colon X^* \to X^*$ é um operador linear limitado. Logo, segue do Teorema 2.13 que

$$LV(T^t) \subset V(T^t).$$

Mostremos que $LV(T^t) = V(T)$. Seja $\mu \in V(T)$. Então $\mu = f(T(x))$, onde $(x, f) \in \Pi(X)$. Como T^t é o adjunto de T, temos

$$\mu = f(T(x)) = T^t(f)(x) \in LV(T^t),$$

o que mostra que $V(T) \subset LV(T^t)$. Agora, seja $\lambda \in LV(T^t)$. Então $\lambda = T^t(f)(x)$, onde $(x, f) \in \Pi(X)$. Daí,

$$\lambda = T^t(f)(x) = f(T(x)) \in V(T),$$

o que prova que $LV(T^t) \subset V(T)$.

Portanto,

$$V(T) = LV(T^t) \subset V(T^t).$$

□

Exemplo 2.15. *Seja $X = c_0$ e defina $T\colon X \to X$ por*

$$(Tx)(n) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k-1} x(n+k) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots,\ x \in X).$$

Mostremos que T está bem definida. Seja $x = (x_n)_n^{\infty} \in c_0$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x(n)| < \epsilon,$$

para todo $n \geq n_0$. Assim, se $n \geq n_0$ então

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k-1} x(n+k) \right| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k-1} \left| x(n+k) \right| \\ &< \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k-1} \cdot \epsilon \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \epsilon = \epsilon. \end{aligned}$$

Logo, $Tx \in c_0$.

Vejamos que $V(T) \neq V(T^t)$. De fato, temos que

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \sup_n \left| \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k-1} x(n+k) \right| \\ &= \sup_n \left| \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} 2^{-k-1} x(n+k) \right| \\ &= \sup_n \lim_{m \to \infty} \left| \sum_{k=0}^{m} 2^{-k-1} x(n+k) \right| \\ &\leq \sup_n \lim_{m \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{m} 2^{-k-1} |x(n+k)| \right) \\ &< \lim_{m \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{m} 2^{-k-1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k-1} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \end{aligned}$$

para $\|x\| = 1$, e então $1 \notin V(T)$. Com as identificações usuais, temos que $X^* = \ell_1$, $X^{**} = \ell_\infty$ e

$$(T^t f)(n) = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-n-1} f(k) \quad (n = l, 2, 3, \ldots,\ f \in X^*).$$

Sejam $f \in X^*, \varphi \in X^{**}$ definidos por

$$f(n) = \delta_n^1 \ \text{ e } \ \varphi(n) = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

onde

$$\delta_n^1 = \begin{cases} 1 & , \ n = 1 \\ 0 & , \ n \neq 1. \end{cases}$$

Então, temos que $(f, \varphi) \in \Pi(X^*)$ *e*

$$\begin{aligned}\varphi(T^t f) &= \sum_{n=1}^{\infty} 1 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-n-1} f(k) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-n-1} \delta_k^1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1 \in V(T^t).\end{aligned}$$

Teorema 2.16. *Sejam espaço de Banach* X *e* $T \colon X \to X$ *um operador linear limitado. Então,* $\overline{V(T)} = \overline{V(T^t)}$.

Demonstração. Se $\mu \in V(T^t)$, então segue da Definição 2.11 que existem $f \in S_{X^*}$ e $\varphi \in S_{X^{**}}$ tais que $\varphi(f) = 1$ e $\varphi(T^t f) = \mu$. Seja $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Pelo Teorema 1.66 (Teorema de Goldstine), o conjunto $\{\widehat{x} : x \in X, \|x\| \leq 1\} \subset B_{X^{**}}$ é denso em $\{\psi : \psi \in B_{X^{**}}, \|\psi\| \leq 1\}$ na topologia fraca-estrela, então podemos escolher $x \in B_X$ tal que

$$|\varphi(f) - \widehat{x}(f)| < \frac{\epsilon^2}{2} \text{ e } |\varphi(T^t f) - \widehat{x}(T^t f)| < \epsilon.$$

De fato, da densidade segue que existe uma rede (x_i) em B_X tal que $\widehat{x}_i \xrightarrow{\omega^*} \varphi$. Dado $\epsilon_0 > 0$, existe $g \in S_{X^*}$ tal que $|\varphi(g)| > 1 - \epsilon_0$. Então

$$\begin{aligned}1 - \epsilon_0 < |\varphi(g)| &= \lim_i |\widehat{x}_i(g)| \\ &= \lim_i |g(x_i)| \\ &= \liminf_i |g(x_i)| \\ &\leq \liminf_i \|g\| \|x_i\| \\ &= \|g\| \liminf_i \|x_i\| \\ &= \liminf_i \|x_i\| \leq 1.\end{aligned}$$

Assim, $\liminf_i \|x_i\| = 1$. Logo, dado $\epsilon_1 > 0$, existe i_0 tal que $\|x_i\| > 1 - \epsilon_1$ para $i \geq i_0$, mas $\|x_i\| \leq 1$. Portanto, $\lim_i \|x_i\| = 1$. Supondo sem perda de generalidade que $x_i \neq 0$ para todo i, definimos a sequência $y_i = \frac{x_i}{\|x_i\|} \in S_X$ para cada i. Então, para todo $g \in X^*$,

$$\begin{aligned}|\widehat{y_i}(g) - \varphi(g)| &= |g(y_i) - g(x_i) + g(x_i) - \varphi(g)| \\ &\leq |g(y_i) - g(x_i)| + |g(x_i) - \varphi(g)| \\ &= \left(\frac{1}{\|x_i\|} - 1\right) |g(x_i)| + |g(x_i) - \varphi(g)| \\ &= \left(\frac{1}{\|x_i\|} - 1\right) |g(x_i)| + |\widehat{x_i}(g) - \varphi(g)| \\ &\to 0.\end{aligned}$$

Logo, $\widehat{y_i} \xrightarrow{\omega^*} \varphi$. Por isso $\widehat{y_i}(f) \to \phi(f)$ e $\widehat{y_i}(T^t f) \to \varphi(T^t f)$. Assim, existem i_1 e i_2 tais que

$$|\widehat{y_{i_1}}(f) - \varphi(f)| < \frac{\epsilon^2}{2}$$

e

$$|\widehat{y_{i_2}}(T^t f) - \varphi(f)| < \epsilon.$$

Tomando $i \geq i_1$ e $i \geq i_2$, temos

$$|\widehat{y_i}(f) - \varphi(f)| < \frac{\epsilon^2}{2}$$

e

$$|\widehat{y_i}(T^t f) - \varphi(f)| < \epsilon,$$

o que completa a prova da afirmação.

Agora, segue do Teorema 2.8 (Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás) que existem $y \in S_X,\ g \in S_{X^*}$ tais $g(y) = 1,\ \|x - y\| < \epsilon + \epsilon^2$ e $\|f - g\| \leq \epsilon$. Consequentemente

$$\begin{aligned} |f(T(x-y))| &\leq \|f\|\|T\|\|x-y\| \\ &< \|T\|(\epsilon + \epsilon^2) \end{aligned} \tag{2.14}$$

e

$$\begin{aligned} |f(Ty) - g(Ty)| &= |(f-g)(Ty)| \\ &\leq \|f-g\|\|T\|\|y\| \\ &\leq \|T\|\epsilon. \end{aligned} \tag{2.15}$$

A escolha de $x \in B_X$ e as desigualdades (2.14) e (2.15) implicam

$$\begin{aligned} |g(Ty) - \mu| &= |g(Ty) - \varphi(T^t f)| \\ &= |g(Ty) - \varphi(T^t f) + \widehat{x}(T^t f) - \widehat{x}(T^t f)| \\ &\leq |g(Ty) - f(Tx)| + |-\varphi(T^t f) + \widehat{x}(T^t f)| \\ &< |g(Ty) - f(Tx)| + \epsilon \\ &= |g(Ty) - f(Tx) + f(Ty) - f(Ty)| + \epsilon \\ &\leq |g(Ty) - f(Ty)| + |f(T(x-y)| + \epsilon \\ &< \|T\|(\epsilon + \epsilon^2) + \|T\|\epsilon + \epsilon \\ &= \|T\|(2\epsilon + \epsilon^2) + \epsilon. \end{aligned}$$

Como $g(Ty) \in V(T)$, então $\mu \in \overline{V(T)}$ e assim $\overline{V(T^t)} = \overline{V(T)}$.

$\square$

Capítulo 3

Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores

Neste capítulo, apresentaremos o Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores. Em 1963 Lindenstrauss [11] mostrou que existem espaços de Banach X e Y tais que o conjunto dos operadores lineares $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ que atingem a norma em S_X não é denso em $\mathcal{L}(X, Y)$ (Veja Exemplo (3.2)). Tendo isso em vista, o objetivo deste capítulo é mostrar alguns casos de espaços de Banach X e Y para os quais o par (X, Y) tem a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores (essa propriedade é enunciada na Definição 3.1).

3.1 Propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores

Vimos no capítulo anterior que o Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás vale para todo espaço de Banach X. Esse fato fez com que Bishop e Phelps [2] em seu artigo se questionassem sobre uma generalização desse teorema para operadores lineares contínuos entre espaços de Banach. A generalização do teorema seria dada da seguinte forma: Para quais espaços de Banach X e Y o conjunto $\{T \in \mathcal{L}(X, Y) \colon \|T(x)\| = \|T\| \text{ para algum } x \in B_X\}$ é denso em $\mathcal{L}(X, Y)$?

Podemos ver no Exemplo 3.2 que o Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores é falso em geral para um par qualquer de espaços de Banach X e Y, ou seja, o conjunto dos operadores de X em Y que atingem a norma nem sempre é denso em relação a norma no espaço $\mathcal{L}(X, Y)$.

Assim, diferente do Teorema 2.8 (Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás) que vale para qualquer espaço de Banach X não podemos esperar uma versão do Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás que seja válida para todos os espaços de Banach X e Y. Levando esse fato em consideração, Acosta, Aron, Garcia e Maestre [1] introduziram a seguinte propriedade.

Definição 3.1. *Sejam X e Y espaços de Banach reais ou complexos. Dizemos que o par (X, Y) satisfaz a* ***propriedade Bishop-Phelps-Bollobás para operadores*** *(BPBp) se dado $\epsilon > 0$, existem $\eta(\epsilon) > 0$ e $\beta(\epsilon) > 0$ com $\lim_{t\to 0} \beta(t) = 0$ tais que para todo $T \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$, se $x_0 \in S_X$ é tal que*

$$\|Tx_0\| > 1 - \eta(\epsilon),$$

então existem um ponto $u_0 \in S_X$ e um operador $S \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ satisfazendo as seguintes condições:

$$\|Su_0\| = 1, \quad \|u_0 - x_0\| < \beta(\epsilon) \quad e \quad \|S - T\| < \epsilon.$$

Exemplo 3.2. *Seja $Y = c_0$ com a norma usual e seja Z um espaço estritamente convexa isomorfo a c_0. Tomando $X = Y \oplus Z$ com $\|(x,y)\| = \max\{\|y\|, \|z\|\}$, segue que o par (X,X) não tem a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores. (Os detalhes podem ser encontrados em Lindenstrauss [11], páginas 147 e 148)*

No estudo do Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores entre espaços de Banach dois tipos de questões são geralmente consideradas:

(1) Para quais espaços de Banach X temos que o par (X,Y) tem a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores para qualquer espaço de Banach Y? Chamaremos um espaço X com tal propriedade de **espaço domínio BPB universal**.

(2) Para quais espaços de Banach Y temos que o par (X,Y) tem a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores para qualquer espaço de Banach X? Chamaremos um espaço Y com tal propriedade de **espaço imagem BPB universal**.

3.2 Operadores com contradomínio satisfazendo a propriedade β de Lindenstrauss

Nesta seção, vamos apresentar uma condição sobre o espaço de Banach Y para que o par (X,Y) tenha a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores para qualquer espaço de Banach Y. Tal condição é uma condição isométrica, chamada propriedade β, introduzida por Lindenstrauss [11].

Definição 3.3. *Um espaço de Banach Y tem* ***propriedade*** *β (de Lindenstrauss) se existem dois conjuntos $\{y_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset S_Y$, $\{y_\alpha^* : \alpha \in \Lambda\} \subset S_{Y^*}$ e $0 \leq \rho < 1$ tais que as seguintes condições são satisfeitas:*

(1) $y_\alpha^*(y_\alpha) = 1$.

(2) $|y_\alpha^*(y_\beta)| \leq \rho$ quando $\alpha \neq \beta$.

(3) $\|y\| = \sup_\alpha\{|y_\alpha^*(y)|\}$, para todo $y \in Y$.

Exemplo 3.4. *Os espaços c_0 e ℓ_∞ satisfazem a propriedade β para os seguintes conjuntos $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\{y_n^* : n \in \mathbb{N}\}$, onde y_n^* é dado por*

$$y_n^*(e_m) = \delta_m^n = \begin{cases} 0 & , \ n \neq m, \\ 1 & , \ n = m. \end{cases}$$

De fato, segue da definição de y_n^* para cada $n \in \mathbb{N}$:

(1) $y_n^*(e_n) = 1$.

(2) $y_n^*(e_m) = 0$ quando $n \neq m$.

(3) Para todo $(y_k)_{k=1}^\infty = y \in c_0$ (ou $y \in \ell_\infty$), temos que

$$\begin{aligned} \|y\| &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n y_n^*(e_n)| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| y_n^*(y_n e_n) + y_n^*\left(\sum_{m\neq n} y_m e_m\right) \right| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| y_n^*\left(\sum_{m=1}^\infty y_m e_m\right) \right| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n^*(y)|. \end{aligned}$$

No livro [4] temos o resultado abaixo que utilizaremos neste capítulo. Essa é uma versão um pouco diferente do Teorema 2.8 (Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás) que mostramos no capítulo anterior.

Teorema 3.5 (Teorema Bishop-Phelps-Bollobás)**.** *Sejam X um espaço Banach e $0 < \epsilon < 1$. Dados $z \in B_X,\ h \in S_{X^*}$ tais que*

$$|1 - h(z)| < \frac{\epsilon^2}{4},$$

existem $(y, g) \in \Pi(X)$, ou seja, $y \in S_X$, $g \in S_{X^*}$ e $1 = g(y) = |g(y)|$, tais que

$$\|y - z\| < \epsilon, \quad \|g - h\| < \epsilon.$$

Demonstração. Veja [4], páginas 7 a 11. □

Teorema 3.6. *Sejam X e Y espaços de Banach. Se Y satisfaz a propriedade β, então o par (X, Y) tem a propriedade Bishop-Phelps-Bollobás para operadores, ou seja, se $T \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$, $\epsilon > 0$ e $x_0 \in S_X$ satisfazem $\|T(x_0)\| > 1 - \dfrac{\epsilon^2}{4}$, então para cada número real η tal que $\eta > \dfrac{\rho}{1-\rho}\left(\epsilon + \dfrac{\epsilon^2}{4}\right)$, existem $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $z_0 \in S_X$ tais que:*

$$\|Sz_0\| = \|S\|, \quad \|z_0 - x_0\| < \epsilon, \quad \|S - T\| < \eta + \epsilon + \frac{\epsilon^2}{4}.$$

Demonstração. Sejam $\epsilon > 0$, $T \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ e $x_0 \in S_X$ tais que $\|T(x_0)\| > 1 - \dfrac{\epsilon^2}{4}$. Como $T(x) \in Y$ e Y tem propriedade β, então

$$\|T(x_0)\| = \sup_{\alpha \in \Lambda} |y_\alpha^*(T(x_0))| > 1 - \frac{\epsilon^2}{4}.$$

Daí, existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que

$$|y_{\alpha_0}^*(T(x_0))| > 1 - \frac{\epsilon^2}{4}.$$

Mostremos que existem $z_0^* \in S_{X^*}$ e $z_0 \in S_X$ tais que

$$|z_0^*(z_0)| = 1, \quad \|z_0 - x_0\| < \epsilon \ \text{ e } \ \left\| z_0^* - \frac{T^t(y_{\alpha_0}^*)}{\|T^t(y_{\alpha_0}^*)\|} \right\| < \epsilon.$$

O funcional $T^t y_{\alpha_0}^* \in X^*$ tem norma $\|T^t y_{\alpha_0}^*\| \leq 1$ e, consequentemente, $\dfrac{1}{\|T^t y_{\alpha_0}^*\|} \geq 1$. Da seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
\left| \frac{T^t y_{\alpha_0}^*}{\|T^t y_{\alpha_0}^*\|}(x) \right| &= |y_{\alpha_0}^*(T(x))| \cdot \frac{1}{\|T^t y_{\alpha_0}^*\|} \\
&> \left(1 - \frac{\epsilon^2}{4}\right) \cdot \frac{1}{\|T^t y_{\alpha_0}^*\|} \\
&\geq 1 - \frac{\epsilon^2}{4},
\end{aligned}$$

obtemos $\left|1 - \dfrac{T^t y^*_{\alpha_0}(x)}{\|T^t y^*_{\alpha_0}\|}\right| < \dfrac{\epsilon^2}{4}$. Pelo Teorema 3.5 (Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás) existem $z_0^* \in S_{X^*}$ e $z_0 \in S_X$ tais que

$$|z_0^*(z_0)| = 1, \quad \|z_0 - x_0\| < \epsilon \ \text{ e } \ \left\| z_0^* - \frac{T^t(y^*_{\alpha_0})}{\|T^t(y^*_{\alpha_0})\|} \right\| < \epsilon.$$

Para um número real η satisfazendo $\eta > \dfrac{\rho}{1-\rho}\left(\epsilon + \dfrac{\epsilon^2}{4}\right)$, definimos o operador $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ por

$$S(x) = T(x) + \left[(1+\eta)z_0^*(x) - T^t(y^*_{\alpha_0})(x)\right] y_{\alpha_0}.$$

O operador $S \in \mathcal{L}(X,Y)$, pois é composição de operadores lineares e contínuos. Note que $Im(S-T) = [y_{\alpha_0}]$, isto é, $Im(S-T)$ tem dimensão igual a 1. Como a imagem de $S-T$ tem dimensão finita, segue da Proposição 1.72 que $S-T$ é compacto. Além disso, para todo $y^* \in Y^*$, temos que

$$S^t(y^*) = T^t(y^*) + y^*(y_{\alpha_0})\left[(1+\eta)z_0^* - T^t(y^*_{\alpha_0})\right],$$

pois, para todo $x \in X$ vale

$$\begin{aligned} S^t(y^*)(x) &= y^*(S(x)) \\ &= y^*(T(x) + \left[(1+\eta)z_0^*(x) - T^t(y^*_{\alpha_0})(x)\right] y_{\alpha_0}) \\ &= y^*(T(x)) + \left[(1+\eta)z_0^*(x) - T^t(y^*_{\alpha_0})(x)\right] y^*(y_{\alpha_0}) \\ &= T^t(y^*)(x) + \left[(1+\eta)z_0^*(x) - T^t(y^*_{\alpha_0})(x)\right] y^*(y_{\alpha_0}). \end{aligned}$$

Mostremos que $\|S\| = \sup\limits_{\alpha\in\Lambda} \|S^t(y^*_\alpha)\|$ usando o fato do conjunto $\{y^*_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ ser normante em Y:

$$\begin{aligned} \|S\| &= \sup_{\|x\|=1} \|S(x)\| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \left\{ \sup_{\alpha\in\Lambda} |y^*_\alpha(S(x))| \right\} \\ &= \sup_{\alpha\in\Lambda} \left\{ \sup_{\|x\|=1} |S^t(y^*_\alpha)(x)| \right\} \\ &= \sup_{\alpha\in\Lambda} \|S^t(y^*_\alpha)\|. \end{aligned}$$

Vamos estimar a norma de S. Por um lado, temos que

$$\begin{aligned} S^t(y^*_{\alpha_0}) &= T^t(y^*_{\alpha_0}) + y^*_{\alpha_0}(y_{\alpha_0})[(1+\eta)z_0^* - T^t(y^*_{\alpha_0})] \\ &= T^t(y^*_{\alpha_0}) + (1+\eta)z_0^* - T^t(y^*_{\alpha_0}) = (1+\eta)z_0^*, \end{aligned}$$

e assim

$$\|S\| \geq \|S^t(y^*_{\alpha_0})\| = (1+\eta)\|z_0^*\| = 1 + \eta.$$

Por outro lado, para $\alpha \neq \alpha_0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|S^t(y_\alpha^*)\| &= \|T^t(y_\alpha^*) + y_\alpha^*(y_{\alpha_0})\left[(1+\eta)z_0^* - T^t(y_{\alpha_0}^*)\right]\| \\
&\leq \|T^t(y_\alpha^*)\| + |y_\alpha^*(y_{\alpha_0})|\left(\|z_0^* - T^t(y_{\alpha_0}^*)\| + \eta\|z_0^*\|\right) \\
&\leq \|T^t\|\|y_\alpha^*\| + |y_\alpha^*(y_{\alpha_0})|\left(\|z_0^* - T^t(y_{\alpha_0}^*)\| + \eta\|z_0^*\|\right) \\
&\leq 1 + \rho\left(\|z_0^* - T^t(y_{\alpha_0}^*)\| + \eta\|z_0^*\|\right) \\
&< 1 + \rho\left(\epsilon + \frac{\epsilon^2}{4} + \eta\right) \\
&= 1 + \rho\left(\epsilon + \frac{\epsilon^2}{4}\right) + \rho\eta \\
&< 1 + (1-\rho)\eta + \rho\eta = 1 + \eta,
\end{aligned}$$

já que

$$\begin{aligned}
& \eta > \frac{\rho}{1-\rho}\left(\epsilon + \frac{\epsilon^2}{4}\right) \\
\implies & \rho\left(\epsilon + \frac{\epsilon^2}{4}\right) < (1-\rho)\eta.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|S\| &= \|S^t(y_{\alpha_0}^*)\| \\
&= (1+\eta)\|z_0^*\| \\
&= (1+\eta)|z_0^*(z_0)| \\
&= |y_{\alpha_0}^*(Sz_0)| \\
&\leq \|Sz_0\| \leq \|S\|,
\end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}
y_{\alpha_0}^*(Sz_0) &= y_{\alpha_0}^*(T(z_0)) + \left[(1+\eta)z_0^*(z_0) - T^t(y_{\alpha_0}^*)(z_0)\right] y_{\alpha_0}^*(y_{\alpha_0}) \\
&= T^t(y_{\alpha_0}^*)(z_0) + (1+\eta)z_0^*(z_0) - T^t(y_{\alpha_0}^*)(z_0) \\
&= (1+\eta)z_0^*(z_0).
\end{aligned}$$

Então, S atinge sua norma em z_0, e além disso temos que

$$\|z_0 - x_0\| < \epsilon \quad \text{e} \quad \|S - T\| < \eta + \epsilon + \frac{\epsilon^2}{4},$$

já que

$$\begin{aligned}
\|(S-T)(x)\| &= \left\| \left[(1+\eta)z_0^*(x) - T^t(y_{\alpha_0}^*)(x)\right] y_{\alpha_0} \right\| \\
&= \left\| \left[z_0^*(x) + \eta z_0^*(x) - T^t(y_{\alpha_0}^*)(x)\right] y_{\alpha_0} \right\| \\
&= \left\| \left[(z_0^* - T^t(y_{\alpha_0}^*))(x) + \eta z_0^*(x)\right] y_{\alpha_0} \right\| \\
&\leq \|z_0^* - T^t(y_{\alpha_0}^*)\|\|x\|\|y_{\alpha_0}\| + \eta\|z_0^*\|\|x\|\|y_{\alpha_0}\| \\
&= \|z_0^* - T^t(y_{\alpha_0}^*)\|\|x\| + \eta\|x\| \\
&< \left(\epsilon + \frac{\epsilon^2}{4} + \eta\right)\|x\|,
\end{aligned}$$

para $x \neq 0$. $\square$

No teorema abaixo veremos que todo espaço de Banach admite uma norma equivalente para a qual o espaço tem a propriedade β.

Teorema 3.7. *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach. Então para qualquer $K > 3$ existe uma norma $|||\cdot|||$ em X tal que $\|x\| \leq |||x||| \leq K\|x\|$ para todo $x \in X$, e $(X, |||\cdot|||)$ tem a propriedade β.*

Demonstração. Veja [14], páginas 274 e 275. $\square$

O resultado abaixo segue como consequência dos Teoremas 3.6 e 3.7.

Corolário 3.8. *Seja Y um espaço de Banach. Então existe um espaço Z isomorfo a Y tal que o par (X, Z) tem a propriedade Bishop-Phelps-Bollobás para operadores para qualquer espaço de Banach X.*

Demonstração. Seja $(Y, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach. Segue do Teorema 3.7 que para todo $K > 3$ existe norma $|||\cdot|||$ em Y tal que

$$\|y\| \leq |||y||| \leq K\|y\|,$$

para todo $y \in Y$. Logo, para $Z = (Y, |||\cdot|||)$, que tem a propriedade β, e $I\colon Y \to Z$ definido por $I(x) = x$, temos que I é um isomorfismo. Portanto, segue do Teorema 3.6 que o par (X, Z) satisfaz o Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores. $\square$

3.2.1 Operadores em espaços de dimensão finita

Agora, vamos mostrar que se X e Y são espaços de Banach de dimensão finita então o par (X, Y) satisfaz a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores. De forma mais precisa, o seguinte resultado é verdadeiro.

Proposição 3.9. *Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão finita. Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que sempre que $T \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$, existe um operador linear $S \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ tal que as seguintes condições são válidas:*

(1) $\|S - T\| < \epsilon$;

(2) para todo $x \in S_X$ satisfazendo $\|T(x)\| > 1 - \delta$, existe $\tilde{x} \in S_X$ tal que $S(\tilde{x}) = 1$ e $\|x - \tilde{x}\| < \epsilon$.

Demonstração. Suponha que o resultado seja falso, ou seja, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo n, podemos encontrar $T_n \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ tal que para todo $S \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ com $\|T_n - S\| \leq \epsilon_0$, existe $x_{n,S} \in S_X$ satisfazendo $\|T_n(x_{n,S})\| > 1 - \dfrac{1}{n}$ e $dist(x_{n,S}, \mathrm{NA}(S)) \geq \epsilon_0$. Como X e Y tem dimensão finita, então $\mathcal{L}(X, Y)$ tem dimensão finita. Assim, temos que S_X e $S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ são compactos. Logo, podemos assumir que $T_n \to T_0 \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ e $x_n \to x_0 \in S_X$, tomando $x_n := x_{n,T_0}$ e passando para subsequências se necessário. Daí, segue que

$$\begin{aligned} \|T_0(x_0)\| &= \lim_{n\to\infty} \|T_n(x_n)\| \\ &\geq \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1. \end{aligned}$$

O que mostra que $\|T_0(x_0)\| = 1$, pois $T_0 \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ e $x_0 \in S_X$. Assim,

$$\epsilon_0 \leq dist(x_n, \mathrm{NA}(T_0)) \leq \|x_n - x_0\| \to 0,$$

que é uma contradição, pois tomamos $\epsilon_0 > 0$. $\square$

Observação 3.10. *O Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores entre espaços de dimensão finita X e Y é uniforme no seguinte sentido. Dados X, Y e ϵ, existe um δ tal que para qualquer $T\colon X \to Y$ existe $S\colon X \to Y$, satisfazendo as condições da Proposição 3.9, com $\|T - S\| < \epsilon$ e tal que para todo vetor unitário x no qual $|\|T\| - \|T(x)\|| < \delta$, existe um vetor unitário $\widetilde{x}$ com $\|\widetilde{x} - x\| < \epsilon$ no qual S atinge sua norma. Ou seja, podemos tomar o mesmo S para todo x. Por outro lado, diferentemente do Teorema 3.5 (Teorema Bishop-Phelps-Bollobás), a constante δ depende não apenas de ϵ, mas também de X e Y. Isso é verdade, mesmo no caso em que $Y = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

Veremos no Exemplo 3.11 que em geral não é verdade que qualquer $S \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ tal que $\|T - S\| < \epsilon$ irá satisfazer automaticamente a condição (2) da Proposição 3.9.

Exemplo 3.11. *Sejam $\epsilon > 0$, $X = (\mathbb{R}^2, \max)$, $Y = \mathbb{R}$, e $T\colon X \to Y$ e $S\colon X \to Y$ operadores dados por $T(x,y) = \dfrac{-\epsilon x}{1+\epsilon} + \dfrac{y}{1+\epsilon}$ e $S(x,y) = \dfrac{\epsilon x}{1+\epsilon} + \dfrac{y}{1+\epsilon}$, respectivamente.*

Primeiramente mostremos que $\|T\| = \|S\| = 1$. Temos que

$$\begin{aligned} |T(x,y)| &= \left| \frac{-\epsilon x}{1+\epsilon} + \frac{y}{1+\epsilon} \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\|(x,y)\| + \frac{1}{1+\epsilon}\|(x,y)\| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |S(x,y)| &= \left| \frac{\epsilon x}{1+\epsilon} + \frac{y}{1+\epsilon} \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\|(x,y)\| + \frac{1}{1+\epsilon}\|(x,y)\|, \end{aligned}$$

o que mostra que $\|T\| \leq 1$ e $\|S\| \leq 1$. Sabemos que $(-1,1),(1,1) \in S_X$. Além disso,

$$\begin{aligned} T(-1,1) &= \frac{\epsilon}{1+\epsilon} + \frac{1}{1+\epsilon} \\ &= \frac{1+\epsilon}{1+\epsilon} = 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S(1,1) &= \frac{\epsilon}{1+\epsilon} + \frac{1}{1+\epsilon} \\ &= \frac{1+\epsilon}{1+\epsilon} = 1. \end{aligned}$$

Daí, $\|T\| = \|S\| = 1$.

Por um lado, temos que

$$\begin{aligned} |(T-S)(x,y)| &= \left| \frac{-\epsilon x}{1+\epsilon} + \frac{y}{1+\epsilon} - \frac{\epsilon x}{1+\epsilon} - \frac{y}{1+\epsilon} \right| \\ &= \left| \frac{-2\epsilon x}{1+\epsilon} \right| \\ &= \frac{2\epsilon}{1+\epsilon}|x| \\ &\leq \frac{2\epsilon}{1+\epsilon}\|(x,y)\| \\ &< 2\epsilon\|(x,y)\|. \end{aligned}$$

Logo, $\|S - T\| \leq 2\epsilon$.

Por outro lado, temos que as normas de T *e* S *são atingidas em algum ponto extremo de* B_X. *De fato, se* $|x| < 1$ *ou* $|y| < 1$ *então*

$$\begin{aligned} |T(x,y)| &\leq \frac{\epsilon}{1+\epsilon}|x| + \frac{1}{1+\epsilon}|y| \\ &< \frac{\epsilon}{1+\epsilon} + \frac{1}{1+\epsilon} = 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |S(x,y)| &\leq \frac{\epsilon}{1+\epsilon}|x| + \frac{1}{1+\epsilon}|y| \\ &< \frac{\epsilon}{1+\epsilon} + \frac{1}{1+\epsilon} = 1. \end{aligned}$$

Os pontos extremos de B_X *são* $(-1,1), (-1,-1), (1,-1), (1,1)$. *É fácil ver que* $|T(x,y)| = \|T\|$ *nos pontos* $(-1,1)$ *e* $(1,-1)$ *e* $|S(x,y)| = \|S\|$ *nos pontos* $(1,1)$ *e* $(-1,-1)$. *Daí, a distância entre o conjunto de pontos onde* T *atinge a norma e o conjunto de pontos onde* S *atinge sua norma é* 2.

3.3 Operadores com domínio ℓ_1

Nesta seção, estudaremos a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores com relação ao par (ℓ_1, Y). Veremos que o par (ℓ_1, Y) tem essa propriedade se, e somente se, o espaço de Banach Y tem a propriedade $AHSP$ que será definida a seguir. Esta seção teve como base o artigo [1].

3.3.1 Propriedade AHSP

Nosso objetivo será caracterizar os espaços de Banach Y para os quais o par (ℓ_1, Y) satisfaz a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores. Para isso, iremos introduzir a propriedade nomeada AHSP que será usada para obter a caracterização, e apresentaremos espaços que tenham essa propriedade. A definição e os exemplos contidos nesta subseção foram fundamentadas no artigo [1] e as equivalências da propriedade foram baseadas em [1] e [9], sendo que a demonstração das equivalências contaram com a contribuição de Thiago Grando autor de [9].

Definição 3.12. *Seja* $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *tais que* $\alpha_k \geq 0$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$. *Chamamos de* ***série convexa*** *a série dada por* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, *onde* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = 1$.

Definição 3.13. *Um espaço de Banach* X *tem a* ***propriedade AHSP*** *(do inglês "approximate hyperplane series property") se para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $0 < \eta < \epsilon$ *tal que para toda sequência* $(x_k) \subset S_X$ *e toda série convexa* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ *com*

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \right\| > 1 - \eta,$$

existem um subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ *e um subconjunto* $\{z_k : k \in A\} \subset X$ *satisfazendo:*

(1) $\displaystyle\sum_{k \in A} \alpha_k > 1 - \eta$, *e*

(2) *(a)* $\|z_k - x_k\| < \epsilon$ *para todo* $k \in A$,

(b) $x^*(z_k) = 1$ *para um certo* $x^* \in S_{X^*}$ *e para todo* $k \in A$.

Veremos nas Proposições 3.15 e 3.16 que a propriedade AHSP continua válida para cada combinação convexa finita (em vez de séries convexas infinitas) e para sequências $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ de vetores na bola unitária de X (em vez de sequências $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ na esfera).

O Lema 3.14 será utilizado para mostrar que alguns espaços de Banach possuem a propriedade AHSP e também para provar a Proposição 3.16.

Lema 3.14. *Sejam* $\{c_n\}$ *uma sequência de números complexos com* $|c_n| \leq 1$ *para todo* n *e* $\eta > 0$ *tal que para uma série convexa* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ *vale* $Re \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n c_n > 1 - \eta$. *Então, para todo* $0 < r < 1$, *o conjunto* $A = \{i \in \mathbb{N} : Re\ c_i > r\}$ *satisfaz a estimativa*

$$\sum_{i \in A} \alpha_i \geq 1 - \frac{\eta}{1 - r}.$$

Demonstração. Sejam $0 < r < 1$ e A o conjunto $\{i \in \mathbb{N} : Re\ c_i > r\}$. Por hipótese, se $\{c_n\}$ uma sequência de números complexos com $|c_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\eta > 0$ tal que para uma série convexa $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ a seguinte afirmação $Re \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n c_n > 1 - \eta$ é válida, temos que

$$\begin{aligned}
1 - \eta \leq Re \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i c_i &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i Re\ c_i \\
&= \sum_{i \in A} \alpha_i Re\ c_i + \sum_{i \notin A} \alpha_i Re\ c_i \\
&\leq \sum_{i \in A} \alpha_i |c_i| + \sum_{i \notin A} \alpha_i r \\
&\leq \sum_{i \in A} \alpha_i + r \sum_{i \notin A} \alpha_i \\
&= \sum_{i \in A} \alpha_i + r \sum_{i \notin A} \alpha_i + r \sum_{i \in A} \alpha_i - r \sum_{i \in A} \alpha_i \\
&= (1 - r) \sum_{i \in A} \alpha_i + r \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \\
&= (1 - r) \sum_{i \in A} \alpha_i + r.
\end{aligned}$$

Então obtemos

$$\sum_{i \in A} \alpha_i \geq \frac{1 - \eta - r}{1 - r} = 1 - \frac{\eta}{1 - r}.$$

□

Mostremos agora as equivalências da Definição 3.13.

Proposição 3.15. *Um espaço de Banach* X *tem a propriedade AHSP se, e somente se, para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $0 < \eta < \epsilon$ *tal que para cada sequência finita* $(x_k)_{k=1}^{n} \subset S_X$ *e cada combinação* *convexa finita* $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ *com*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \right\| > 1 - \eta,$$

existem um subconjunto $A \subset \{1, \ldots, n\}$ *e um subconjunto* $\{z_k \colon k \in A\} \subset X$ *com as seguintes propriedades:*

(i) $\sum_{k \in A} \alpha_k > 1 - \eta$,

(ii) $\|z_k - x_k\| < \epsilon$ *para todo* $k \in A$,

(iii) $x^*(z_k) = 1$ *para algum* $x^* \in S_{X^*}$ *e todo* $k \in A$.

Demonstração. Se X tem a propriedade AHSP, segue da Definição 3.13 que para todo $\epsilon > 0$ existe $0 < \eta < \epsilon$ tal que para toda série convexa e toda sequência com

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \right\| > 1 - \eta,$$

existem um subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ e um subconjunto $\{z_k \colon k \in A\}$ satisfazendo as condições (1) e (2) da propriedade AHSP, em particular, tal afirmação é válida para cada sequência finita $(x_k)_{k=1}^{n} \subset S_X$ e cada combinação convexa finita $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ com

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \right\| > 1 - \eta.$$

Reciprocamente, vejamos que a condição sobre as combinações convexas finitas garante que X tem a propriedade AHSP.

Seja $\epsilon > 0$. Tome $0 < \eta < \epsilon$ dado pela hipótese. Então existe uma constante $C > 1$ tal que $0 < C\eta < \epsilon$. De fato, como $\epsilon > \eta$, existe $\delta > 0$ tal que $\eta < \delta < \epsilon$. Logo, para $C = \dfrac{\delta}{\eta} > 1$, temos que

$$0 < \eta < C\eta = \frac{\delta}{\eta}\eta = \delta < \epsilon.$$

Sejam $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset S_X$ uma sequência e $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ uma série convexa tais que

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k x_k \right\| > 1 - \eta > 1 - C\eta.$$

Como $\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k x_k \right\| > 1 - \eta$, existe $0 < \epsilon_0 < \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k x_k \right\| - 1 + \eta$. Daí, já que $\lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k x_k \right\|$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k \right\| > 1 - \eta + \epsilon_0,$$

para todo $n \geq n_1$. Além disso, como $\lim_{n\to\infty} \sum_{k>n} \beta_k = 0$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k>n} \beta_k < \min\{(C-1)\eta, \epsilon_0\},$$

para todo $n \geq n_2$. Tomando $N = \max\{n_1, n_2\}$, temos que

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} \beta_k x_k \right\| - \sum_{k>N} \beta_k > 1 - \eta + \epsilon_0 - \epsilon_0 = 1 - \eta$$

e

$$\sum_{k>N} \beta_k < (C-1)\eta.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{N} \beta_k x_k + \left(\sum_{k>N} \beta_k \right) x_{N+1} \right\| &\geq \left\| \sum_{k=1}^{N} \beta_k x_k \right\| - \left\| \left(\sum_{k>N} \beta_k \right) x_{N+1} \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{N} \beta_k x_k \right\| - \left(\sum_{k>N} \beta_k \right) \|x_{N+1}\| \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{N} \beta_k x_k \right\| - \left(\sum_{k>N} \beta_k \right) > 1 - \eta
\end{aligned}$$

Usando a condição para a sequência finita $(x_k)_{k=1}^{N+1} \subset S_X$ e a combinação convexa finita $\sum_{k=1}^{N+1} \alpha_k x_k$, onde $\alpha_k = \beta_k$, para todo $k = 1, \ldots, N$, e $\alpha_{N+1} = \sum_{k>N} \beta_k$, segue que existem $\widetilde{A} \subset \{1, \ldots, N+1\}$ e um conjunto de vetores $\{z_k : k \in \widetilde{A}\} \subset X$ tais que

(i) $\sum_{k \in \widetilde{A}} \alpha_k > 1 - \eta$,

(ii) $\|z_k - x_k\| < \epsilon$ para todo $k \in \widetilde{A}$,

(iii) $x^*(z_k) = 1$ para algum $x^* \in S_{X^*}$ e todo $k \in \widetilde{A}$.

Caso $N + 1 \notin \widetilde{A}$, iremos definir $A := \widetilde{A}$ e assim as condições da Definição 3.13 são satisfeitas considerando os mesmos elementos das condições (i), (ii) e (iii) obtidas anteriormente.

Por outro lado, se $N + 1 \in \widetilde{A}$, tome $A := \widetilde{A} \setminus \{N+1\}$. Neste caso, as condições (ii) e (iii) obtidas para a sequência finita $(x_k)_{k=1}^{N+1} \subset S_X$ e a combinação convexa finita $\sum_{k=1}^{N+1} \alpha_k x_k$ ainda continuam válidas tomando os mesmos conjuntos e o mesmo operador linear $x^* \in S_{X^*}$. Para completar a prova resta-nos mostrar a condição (i). Temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in A} \beta_k = \sum_{k \in A} \alpha_k &= \sum_{k \in \tilde{A}} \alpha_k - \alpha_{N+1} \\
&= \sum_{k \in \tilde{A}} \alpha_k - \sum_{k>N} \beta_k \\
&> 1 - \eta - (C-1)\eta = 1 - C\eta.
\end{aligned}$$

Isso completa a demostração de que X tem a propriedade AHSP tomando $C\eta$ no lugar de η. $\square$

Proposição 3.16. *Um espaço de Banach X tem a propriedade AHSP se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\gamma(\epsilon) > 0$ e $\eta(\epsilon) > 0$ com $\lim_{\epsilon \to 0^+} \gamma(\epsilon) = 0$, tal que para toda sequência $(y_k)_{k=1}^{\infty} \subset B_X$ e toda série convexa $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ com*

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k \right\| > 1 - \eta(\epsilon)$$

existem um subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ e um subconjunto $\{z_k \colon k \in A\} \subset X$ com as seguintes propriedades:

(i) $\sum_{k \in A} \alpha_k > 1 - \gamma(\epsilon)$,

(ii) $\|z_k - y_k\| < \epsilon$ *para todo* $k \in A$,

(iii) $x^*(z_k) = 1$ *para algum* $x^* \in S_{X^*}$ *e todo* $k \in A$.

Demonstração. A volta é imediata, uma vez que as sequências $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset S_X$ que satisfazem as condições da hipótese estão contidas em B_X e portanto satisfazem a Definição 3.13.

Suponha que X tem a AHSP. Para cada $\epsilon \in (0, 1)$, considere $\eta(\epsilon)$ satisfazendo a Definição 3.13 da propriedade AHSP. Defina

$$\eta'(\epsilon) \colon = \frac{\eta(\frac{\epsilon}{2})\epsilon^2}{8},$$

para todo $\epsilon \in (0, 1)$. Sejam $(y_k)_{k=1}^{\infty} \subset B_X$ uma sequência e uma série convexa $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ tais que

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k \right\| > 1 - \eta'(\epsilon). \tag{3.1}$$

A desigualdade anterior implica que o vetor $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k \neq 0$. Então, como consequência do Teorema 1.58 (Teorema de Hahn-Banach), existe um funcional linear $y_0^* \in S_{X^*}$ tal que

$$y_0^* \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k \right) = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k \right\|. \tag{3.2}$$

Segue de (3.1) e (3.2) que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k Re(y_0^*(y_k)) &= Re \left(y_0^* \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k \right) \right) \\ &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k \right\| > 1 - \eta'(\epsilon). \end{aligned}$$

Defina o conjunto $B := \{k \in \mathbb{N} \colon Re(y_0^*(y_k)) > 1 - \frac{\epsilon}{2}\}$. Mostremos que B é não vazio. De fato, suponha que $Re(y_0^*(y_k)) \leq 1 - \frac{\epsilon}{2}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Multiplicando os membros dessa desigualdade por $\alpha_k > 0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
& \alpha_k Re(y_0^*(y_k)) \leq \alpha_k \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right), \ \forall k \in \mathbb{N} \\
\implies & \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k Re(y_0^*(y_k)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \\
\implies & 1 - \eta'(\epsilon) < 1 - \frac{\epsilon}{2} \\
\implies & \eta'(\epsilon) > \frac{\epsilon}{2} \\
\implies & \frac{\eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\epsilon^2}{8} > \frac{\epsilon}{2} \\
\implies & \eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\epsilon > 4.
\end{aligned}
$$

A última desigualdade é falsa, pois como condição da Definição 3.13 de AHSP temos que $0 < \eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right) < \frac{\epsilon}{2}$, então $0 < \eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\epsilon < \frac{\epsilon^2}{2} < 1$. Por isso, B é não vazio.

Aplicando o Lema 3.14 para $c_k = (y_0^*(y_k))$, $r = 1 - \frac{\epsilon}{2}$ e $A = B$, obtemos a estimativa

$$
\begin{aligned}
\sum_{k \in B} \alpha_k &> 1 - \frac{\eta'(\epsilon)}{1 - \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)} \\
&= 1 - \frac{2\eta'(\epsilon)}{\epsilon} \\
&= 1 - \frac{\frac{2\eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\epsilon^2}{8}}{\epsilon} \\
&= 1 - \frac{\eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\epsilon}{4}.
\end{aligned}
$$

Daí, temos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{k \in B} \alpha_k &> \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k - \frac{\eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\epsilon}{4} \\
&= \sum_{k \in B} \alpha_k + \sum_{k \notin B} \alpha_k - \frac{\eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\epsilon}{4},
\end{aligned}
$$

o que implica

$$
\sum_{k \notin B} \alpha_k < \frac{\eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\epsilon}{4}.
$$

Seja $\Gamma = \{k \in \mathbb{N} \colon y_k = 0\}$. Então $\Gamma \subset B^c$. Defina

$$
y_k' = \begin{cases} \dfrac{y_k}{\|y_k\|} & , \ k \in \Gamma^c \\ x & , \ k \in \Gamma, \end{cases}
$$

onde $x \in S_X$ é tal que $y_0^*(x) > 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k' \right\| &= \|y_0^*\| \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_k y_k' \right\| \\
&\geq \left| y_0^* \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k' \right) \right| \\
&\geq Re \left(y_0^* \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k' \right) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k Re(y_0^*(y_k')) \\
&= \sum_{k\in B} \alpha_k Re(y_0^*(y_k')) + \sum_{k\notin B,\ k\in\Gamma^c} \alpha_k Re(y_0^*(y_k')) + \sum_{k\notin B,\ k\in\Gamma} \alpha_k Re(y_0^*(y_k')) \\
&= \sum_{k\in B} \alpha_k Re \left(y_0^* \left(\frac{y_k}{\|y_k\|} \right) \right) + \sum_{k\notin B,\ k\in\Gamma^c} \alpha_k Re \left(y_0^* \left(\frac{y_k}{\|y_k\|} \right) \right) + \sum_{k\notin B,\ k\in\Gamma} \alpha_k Re(y_0^*(x)) \\
&= \sum_{k\in B} \frac{\alpha_k}{\|y_k\|} Re\left(y_0^*\left(y_k\right)\right) + \sum_{k\notin B,\ k\in\Gamma^c} \frac{\alpha_k}{\|y_k\|} Re\left(y_0^*\left(y_k\right)\right) + \sum_{k\notin B,\ k\in\Gamma} \alpha_k Re(y_0^*(x)) \\
&\geq \sum_{k\in B} \alpha_k Re\left(y_0^*\left(y_k\right)\right) + \sum_{k\notin B,\ k\in\Gamma^c} \alpha_k Re\left(y_0^*\left(y_k\right)\right) + \sum_{k\notin B,\ k\in\Gamma} \alpha_k Re(y_0^*(x)) \\
&\geq \sum_{k\in B} \alpha_k Re\left(y_0^*\left(y_k\right)\right) + \sum_{k\notin B,\ k\in\Gamma^c} \alpha_k Re\left(y_0^*\left(y_k\right)\right) + \sum_{k\notin B,\ k\in\Gamma} \alpha_k Re(y_0^*(y_k)) \\
&= \sum_{k\in B} \alpha_k Re\left(y_0^*\left(y_k\right)\right) + \sum_{k\notin B} \alpha_k Re\left(y_0^*\left(y_k\right)\right) \\
&\geq \sum_{k\in B} \alpha_k Re\left(y_0^*\left(y_k\right)\right) + \sum_{k\notin B} \alpha_k (-1) \\
&= \sum_{k\in B} \alpha_k Re\left(y_0^*\left(y_k\right)\right) - \sum_{k\notin B} \alpha_k \\
&= \sum_{k\in B} \alpha_k Re\left(y_0^*\left(y_k\right)\right) + \sum_{k\notin B} \alpha_k Re(y_0^*(y_k)) - \sum_{k\notin B} \alpha_k Re(y_0^*(y_k)) - \sum_{k\notin B} \alpha_k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k Re\left(y_0^*\left(y_k\right)\right) - \sum_{k\notin B} \alpha_k Re(y_0^*(y_k)) - \sum_{k\notin B} \alpha_k \\
&\geq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k Re\left(y_0^*\left(y_k\right)\right) - \sum_{k\notin B} \alpha_k |y_0^*(y_k)| - \sum_{k\notin B} \alpha_k \\
&\geq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k Re\left(y_0^*\left(y_k\right)\right) - \sum_{k\notin B} \alpha_k - \sum_{k\notin B} \alpha_k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k Re\left(y_0^*\left(y_k\right)\right) - 2\sum_{k\notin B} \alpha_k \\
&> 1 - \eta'(\epsilon) - 2\frac{\eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\epsilon}{4} \\
&= 1 - \frac{\eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\epsilon^2}{8} - \frac{\eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - \frac{\eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\epsilon^2 + 4\eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\epsilon}{8} \\
&= 1 - \frac{\eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\epsilon(\epsilon+4)}{8} \\
&> 1 - \eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right),
\end{aligned}
$$

pois

$$
\begin{aligned}
& \epsilon\frac{(\epsilon+4)}{8} < \epsilon < 1 \\
\implies & -\eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\epsilon\frac{(\epsilon+4)}{8} > -\eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\epsilon > -\eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Como X tem a propriedade AHSP, existem um subconjunto $C \subset \mathbb{N}$ e um subconjunto $\{z_k : k \in C\} \subset X$ satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\displaystyle\sum_{k\in C} \alpha_k > 1 - \eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$,
2. $\|z_k - y'_k\| < \dfrac{\epsilon}{2}$ para todo $k \in C$,
3. $x^*(z_k) = 1$ para algum $x^* \in S_{X^*}$ e todo $k \in C$.

Defina o conjunto $A := B \cap C$. Mostremos que o conjunto A é não vazio. Suponha que A é vazio, então para todo $n \in C$ temos $n \notin B$, logo

$$
\sum_{n\in C} \alpha_n \leq \sum_{n\notin B} \alpha_n < \frac{\eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\epsilon}{4}.
$$

Daí,

$$
1 - \eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right) < \frac{\eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\epsilon}{4},
$$

que implica

$$
\begin{aligned}
1 &< \frac{\eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\epsilon}{4} + \eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \\
&= \frac{\eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)(\epsilon+4)}{4} \\
&< 2\eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \\
&< 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}
$$

Mas isso é uma contradição, pois $\epsilon < 1$. Portanto, o conjunto A é não vazio.

Vejamos que $\displaystyle\sum_{k\in A} \alpha_k > 1 - \gamma(\epsilon)$, onde $\gamma(\epsilon) := \eta\left(\dfrac{\epsilon}{2}\right) + \dfrac{\eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\epsilon}{4}$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\in A} \alpha_k &= \sum_{k\in B\cap C} \alpha_k \\
&\geq \sum_{k\in C} \alpha_k - \sum_{k\notin B} \alpha_k \\
&> 1 - \eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right) - \frac{\eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\epsilon}{4} \\
&= 1 - \gamma(\epsilon)
\end{aligned}
$$

e

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\gamma(\epsilon)=\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)+\frac{\eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\epsilon}{4}\right)=0.$$

Além disso, $\|z_k-y_k\|<\epsilon$ para todo $k\in A$, pois se $k\in A$ então

$$\begin{aligned}\|z_k-y_k\|&=\|z_k-y_k'+y_k'-y_k\|\\&\leq\|z_k-y_k'\|+\|y_k'-y_k\|\\&=\|z_k-y_k'\|+\left\|\frac{y_k}{\|y_k\|}-y_k\right\|\\&=\|z_k-y_k'\|+\left\|\frac{y_k-y_k\|y_k\|}{\|y_k\|}\right\|\\&=\|z_k-y_k'\|+\left\|\frac{(1-\|y_k\|)y_k}{\|y_k\|}\right\|\\&<\frac{\epsilon}{2}+|1-\|y_k\||\frac{\|y_k\|}{\|y_k\|}\\&=\frac{\epsilon}{2}+|1-\|y_k\||\\&<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon,\end{aligned}$$

uma vez que $\|y_k\|\geq|y_0^*(y_k)|\geq Re(y_0^*(y_k))>1-\dfrac{\epsilon}{2}$ para todo $k\in A$. Por fim, note que $x^*(z_k)=1$, para todo $k\in A$, pois $A\subset C$. □

O resultado a seguir será utilizado para mostrar que os espaços de dimensão finita possuem a propriedade AHSP.

Lema 3.17. *Seja X um espaço normado de dimensão finita. Então para todo $\epsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que para qualquer $x^*\in S_{X^*}$, existe $y^*\in S_{X^*}$ satisfazendo $dist(x,D(y^*))<\epsilon$ para todo $x\in\{x\in S_X: Re\ x^*(x)>1-\delta\}$, onde $D(y^*):=\{y\in B_X: y^*(y)=1\}$.*

Demonstração. Suponha que existe $\epsilon_0>0$ tal que a condição acima não seja satisfeita. Assim, para todo $\delta>0$ existe $x_\delta^*\in S_{X^*}$ tal que para todo $y^*\in S_{X^*}$, $dist(x,D(y^*))\geq\epsilon_0$ para algum $x\in\{y\in S_X: Re\ x_\delta^*(y)>1-\delta\}$. Daí, podemos construir sequências $(r_n)_{n=1}^\infty\to 1$ e $(x_n^*)_{n=1}^\infty\subset S_{X^*}$ tais que para todo $y^*\in S_{X^*}$, $\{x\in S_X: x_n^*(x)>r_n\}\cap\{x\in S_X:\ dist(x,D(y^*))\geq\epsilon_0\}\neq\emptyset$. De fato, tomando $r_n=1-\dfrac{1}{n}$ para cada $n\in\mathbb{N}$, por hipótese temos que existe $x_n^*\in S_{X^*}$ tal que para todo $y^*\in S_{X^*}$ existe $x_n\in\left\{y\in S_X\colon Re\ x_n^*(y)>1-\dfrac{1}{n}\right\}$ tal que $dist(x_n,D(y^*))\geq\epsilon_0$. Pela compacidade da esfera unitária, passando para uma subsequência se necessário, podemos supor $x_n^*\to x^*$ para algum $x^*\in S_{X^*}$. Pela condição anterior, existe uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty\subset S_X$ tal que $r_n<Re\ x_n^*(x_n)\leq 1$ para todo n e tal que para todo $n\in\mathbb{N}$,

$$dist(x_n,D(x^*))\geq\epsilon_0. \tag{3.3}$$

Por argumento análogo ao utilizado anteriormente, podemos assumir que $(x_n)_{n=1}^\infty$ converge para algum $x\in S_X$. Já que $x_n^*(x_n)\to 1$ e ambas sequências são convergentes, temos que $x^*(x)=1$, ou seja, $x\in D(x^*)$. Daí,

$$dist(x_n,D(x^*))\leq\|x_n-x\|\to 0.$$

A desigualdade acima contradiz (3.3). □

Comparando o Lema 3.17 com o Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás em espaços de dimensão finita, vemos que o funcional y^* depende apenas de x^*, enquanto no caso do teorema temos que y e y^* dependem da escolha de x e x^*. O fato de y^* depender apenas de x^* vem de considerarmos o δ dependendo não apenas de ϵ, mas também do espaço X.

O próximo resultado mostra que os espaços de dimensão finita tem a propriedade AHSP.

Proposição 3.18. *Todo espaço normado de dimensão finita tem a propriedade AHSP.*

Demonstração. Seja X um espaço normado de dimensão finita. Então, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ satisfazendo a condição do Lema 3.17. Podemos supor que $\delta < \epsilon < 1$, pois caso as condições do Lema 3.17 sejam satisfeitas para algum $\delta \geq \epsilon$, também serão válidas para qualquer $0 < \delta_0 < \epsilon$. Tomemos uma série convexa $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ e uma sequência $(y_k)_{k=1}^{\infty} \subset B_X$ tais que

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k \right\| > 1 - \delta^2.$$

Como o vetor $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k \neq 0$, então segue do Corolário 1.59 que existe $x^* \in S_X$ tal que

$$x^* \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k \right) = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k \right\|.$$

Note que $|x^*(y_k)| \leq \|x^*\| \|y_k\| \leq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e

$$Re \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x^*(y_k) = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k \right\| > 1 - \delta^2.$$

Daí, pelo Lema 3.14 , o subconjunto

$$G := \{n \in \mathbb{N} : Re\ x^*(y_n) > 1 - \delta\}$$

é tal que $\sum_{k \in G} \alpha_k \geq 1 - \frac{\delta^2}{\delta} = 1 - \delta$. Note que $G \neq \emptyset$, pois se $G = \emptyset$, então para todo $k \in \mathbb{N}$

$$Re\ x^*(y_k) \leq 1 - \delta.$$

Multiplicando por α_k ambos os lados, obtemos

$$Re\ \alpha_k x^*(y_k) \leq \alpha_k (1 - \delta),$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\begin{aligned} Re \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x^*(y_k) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (1 - \delta) \\ &= 1 - \delta < 1 - \delta^2, \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Portanto, segue do Lema 3.17 que existe um elemento $y^* \in S_{X^*}$ e um subconjunto $\{z_k : k \in G\} \subset S_X$ tal que $y^*(z_k) = 1$ para todo $k \in G$ com $\|y_k - z_k\| < \epsilon$, o que completa a prova. $\square$

A seguir vamos mostrar que $C(K)$ satisfaz a propriedade AHSP, para qualquer espaço de Hausdorff compacto K. A Proposição 3.19 será demonstrada no caso complexo, mas é válida no caso real.

Proposição 3.19. *Os espaços reais ou complexos $C(K)$ têm a propriedade AHSP, para qualquer espaço de Hausdorff compacto K.*

Demonstração. Fixe $0 < \epsilon < 1$, e tome uma sequência $(f_k)_{k=1}^{\infty} \subset B_{C(K)}$ e uma série convexa $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ satisfazendo

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k \right\| > 1 - \left(\frac{\epsilon}{4}\right)^4.$$

Como

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k \right\| = \sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k(t) \right| : t \in K \right\} > 1 - \left(\frac{\epsilon}{4}\right)^4,$$

existe $t_0 \in K$ tal que $\left| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k(t_0) \right| > 1 - \left(\frac{\epsilon}{4}\right)^4$. Considere $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| = 1$ tal que

$$1 \geq Re\left(\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k(t_0)\right) = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k(t_0) \right| > 1 - \left(\frac{\epsilon}{4}\right)^4. \tag{3.4}$$

Considere $A := \left\{ k \in \mathbb{N} : Re(\lambda f_k(t_0)) > 1 - \left(\frac{\epsilon}{4}\right)^2 \right\}$. Mostremos que o conjunto A não é vazio. Suponha que A seja vazio. Então

$$Re(\lambda f_k(t_0)) \leq 1 - \left(\frac{\epsilon}{4}\right)^2,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Daí, multiplicando α_k de ambos os lados obtemos

$$\begin{aligned} Re(\lambda \alpha_k f_k(t_0)) &\leq \alpha_k \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{4}\right)^2\right), \forall k \in \mathbb{N} \\ \implies \quad Re\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k(t_0)\right) &\leq \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{4}\right)^2\right) \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = 1 - \left(\frac{\epsilon}{4}\right)^2 < 1 - \left(\frac{\epsilon}{4}\right)^4, \end{aligned}$$

o que é uma contradição com a inequação (3.4).

Agora,

$$\begin{aligned}
1-\left(\frac{\epsilon}{4}\right)^4 &< Re\left(\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k f_k(t_0)\right)\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k Re(\lambda f_k(t_0))\\
&=\sum_{k\in A}\alpha_k Re(\lambda f_k(t_0))+\sum_{k\notin A}\alpha_k Re(\lambda f_k(t_0))\\
&\leq \sum_{k\in A}\alpha_k|\lambda f_k(t_0)|+\left(1-\left(\frac{\epsilon}{4}\right)^2\right)\sum_{k\notin A}\alpha_k\\
&\leq \sum_{k\in A}\alpha_k+\left(1-\left(\frac{\epsilon}{4}\right)^2\right)\sum_{k\notin A}\alpha_k\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k-\left(\frac{\epsilon}{4}\right)^2\sum_{k\notin A}\alpha_k.
\end{aligned}$$

Como $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k=1$, obtemos que

$$1-\left(\frac{\epsilon}{4}\right)^4<1-\left(\frac{\epsilon}{4}\right)^2\sum_{k\notin A}\alpha_k.$$

Daí, temos que

$$\sum_{k\notin A}\alpha_k<\left(\frac{\epsilon}{4}\right)^2,$$

e então,

$$\sum_{k\in A}\alpha_k>1-\left(\frac{\epsilon}{4}\right)^2,$$

o que significa que a condição (i) da Proposição 3.16 é satisfeita.

Seja $\delta=\left(\frac{\epsilon}{4}\right)^2$. Para cada $k\in A$, temos que $[0,1-\delta]$ e $\{|f_k(t_0)|\}$ são conjuntos fechados e disjuntos em $\mathbb{C}$. Assim, $|f_k|^{-1}([0,1-\delta])$ e $\{t_0\}$ são fechados e disjuntos em K, pois $|f_k(\cdot)|$ é contínua. Segue pelo Teorema 1.18 (Lema de Urysohn) que para cada $k\in A$ existe uma função contínua $u_k\colon K\to[0,1]$ tal que

$$u_k(x)=\begin{cases}0 & \text{, se } x\in|f_k|^{-1}([0,1-\delta]),\\ 1 & \text{, se } x=t_0,\end{cases}$$

ou seja, temos uma função $u_k\in C(K)$ tal que

$$supp\ u_k\subset|f_k|^{-1}((1-\delta,1]),\quad u_k(t_0)=1,\quad 0\leq u_k(t)\leq 1,$$

para todo $t\in K$. Para cada $k\in A$, podemos definir g_k em K por

$$g_k(t):=\lambda\left(f_k(t)+u_k(t)\left(-f_k(t)+\frac{f_k(t)}{|f_k(t)|}\right)\right)$$

para $t \in supp\, u_k$ e $g_k(t) = \lambda f_k(t)$ para $t \in K \backslash supp\, u_k$. Como g_k é dada por soma e multiplicação de funções contínuas em K, então g_k é contínua em K, para todo $k \in A$. Além disso, g_k pertence a esfera unitária de $C(K)$ já que f_k pertence a bola unitária fechada e $|g_k(t_0)| = 1$. De fato, para todo $t \in K$ temos que

$$\begin{aligned}
|g_k(t)| &= \left| f_k(t) + u_k(t) \left(-f_k(t) + \frac{f_k(t)}{|f_k(t)|} \right) \right| \\
&\leq |f_k(t)| + \left| u_k(t) \left(\frac{f_k(t)\,(1 - |f_k(t)|)}{|f_k(t)|} \right) \right| \\
&= |f_k(t)| + u_k(t) \frac{|1 - |f_k(t)||}{|f_k(t)|} |f_k(t)| \\
&\leq |f_k(t)| + |1 - |f_k(t)|| \\
&= |f_k(t)| + 1 - |f_k(t)| = 1,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|g_k\| = \sup\{|g(t)| \colon t \in K\} \leq 1.$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
|g_k(t_0)| &= \left| f_k(t_0) + u_k(t_0) \left(\frac{(1 - |f_k(t_0)|) f_k(t_0)}{|f_k(t_0)|} \right) \right| \\
&= \left| f_k(t_0) + \left(\frac{(1 - |f_k(t_0)|) f_k(t_0)}{|f_k(t_0)|} \right) \right| \\
&= \left| \frac{f_k(t_0)|f_k(t_0)| + (1 - |f_k(t_0)|) f_k(t_0)}{|f_k(t_0)|} \right| \\
&= \frac{1}{|f_k(t_0)|} \, |f_k(t_0)| = 1.
\end{aligned}$$

Logo, $g_k \in S_{C(K)}$. Além disso, segue da definição de g_k que $\|g_k - \lambda f_k\| < \delta$ para todo $k \in A$, uma vez que essa função é zero fora do conjunto $supp\ u_k$ e para $t \in supp\ u_k$ temos que

$$\begin{aligned}
|g_k(t) - \lambda f_k(t)| &= \left| \lambda u_k(t) \left(\frac{(1 - |f_k(t)|) f_k(t)}{|f_k(t)|} \right) \right| \\
&= u_k(t) \left| \frac{(1 - |f_k(t)|) f_k(t)}{|f_k(t)|} \right| \\
&\leq \left(\frac{|(1 - |f_k(t)|)|}{|f_k(t)|} \right) |f_k(t)| \\
&= |1 - |f_k(t)|| \\
&= 1 - |f_k(t)| < 1 - (1 - \delta) = \delta,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

para todo $k \in A$. Tomando $a := 2 \left(\frac{\epsilon}{4} \right)^2$, como

$$\delta > | - g_k(t_0) + \lambda f_k(t_0)| \geq Re\ (-g_k(t_0) + \lambda f_k(t_0)) = -Re\ g_k(t_0) + Re\ \lambda f_k(t_0),$$

obtemos

$$Re\ g_k(t_0) > Re\ \lambda f_k(t_0) - \delta > 1 - \left(\frac{\epsilon}{4} \right)^2 - \delta = 1 - 2 \left(\frac{\epsilon}{4} \right)^2 = 1 - a.$$

Já que

$$1 = |g_k(t_0)| = \sqrt{(Re\ g_k(t_0))^2 + (Im\ g_k(t_0))^2},$$

então

$$\begin{aligned}(Im\ g_k(t_0))^2 &= 1 - (Re\ g_k(t_0))^2 \\ &< 1 - (1-a)^2 \\ &= 1 - (1 - 2a + a^2) \\ &= 2a - a^2 \\ &< 2a,\end{aligned}$$

ou seja,

$$|Im\ g_k(t_0)| < \sqrt{2a}.$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned}|g_k(t_0) - 1| &= \sqrt{[Re\ \ (g_k(t_0) - 1)]^2 + [Im\ \ (g_k(t_0) - 1)]^2} \\ &= \sqrt{(Re\ \ (g_k(t_0)) - 1)^2 + (Im\ \ (g_k(t_0)))^2} \\ &< \sqrt{(-a)^2 + (\sqrt{2a})^2} \\ &= \sqrt{a^2 + 2a}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Agora, para cada $k \in A$, definimos $h_k\colon K \to \mathbb{C}$ por $h_k := \overline{g_k(t_0)\lambda} g_k$, de modo que $h_k \in S_{C(K)}$, pois

$$\|h_k\| = \|\overline{g_k(t_0)\lambda} g_k\| = \left|\overline{g_k(t_0)}\ \overline{\lambda}\right| \|g_k\| = 1,$$

para todo $k \in A$. O elemento $x^* = \lambda\delta_{t_0}$, onde $\delta_{t_0}(f) = f(t_0)$ para $f \in C(K)$, é um elemento de $S_{C(K)^*}$ e satisfaz $x^*(h_k) = 1$ para todo $k \in A$. De fato, temos que

$$x^*(h_k) = \lambda\overline{g_k(t_0)}\ \overline{\lambda} g_k(t_0) = |\lambda|^2 |g_k(t_0)|^2 = 1,$$

para todo $k \in K$, e

$$\begin{aligned}|x^*(f)| &= |\lambda f(t_0)| \\ &= |\lambda||f(t_0)| \\ &= |f(t_0)| \leq \|f\|,\end{aligned}$$

o que mostra que $\|x^*\| = 1$. Isso prova o item (iii) da Proposição 3.16.

Resta mostrar o item (ii) da Proposição 3.16. Segue das inequações (3.5) e (3.6) e da escolha de δ que

$$\begin{aligned}
\|h_k - f_k\| &= \|\mu_k\overline{\lambda}g_k - f_k\| \\
&= \|\mu_k|\lambda|^2 g_k - \lambda f_k\| \\
&= \|\mu_k g_k + g_k - g_k - \lambda f_k\| \\
&\leq \|\mu_k g_k - g_k\| + \|g_k - \lambda f_k\| \\
&= \|\,(\mu_k - 1)\,g_k\| + \|g_k - \lambda f_k\| \\
&= |\mu_k - 1| + \|g_k - \lambda f_k\| \\
&= |g_k(t_0) - 1| + \|g_k - \lambda f_k\| \\
&< \sqrt{a^2 + 2a} + \delta \\
&= \sqrt{\frac{\epsilon^4}{4^3} + \frac{\epsilon^2}{4}} + \left(\frac{\epsilon}{4}\right)^2 \\
&= \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4}\left(\frac{\epsilon^2}{4^2} + 1\right)} + \left(\frac{\epsilon}{4}\right)^2 \\
&< \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4} \cdot 2} + \left(\frac{\epsilon}{4}\right)^2 \\
&= \sqrt{2}\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{16} \\
&< \epsilon\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{16}\right) < \epsilon,
\end{aligned}$$

para todo $k \in A$. □

Mostremos agora que todo espaço uniformemente convexo tem a propriedade AHSP.

Proposição 3.20. *Um espaço de Banach uniformemente convexo tem a propriedade AHSP.*

Demonstração. Sejam X um espaço de Banach uniformemente convexo, $\epsilon > 0$ arbitrário e $\delta = \delta(\epsilon)$ o módulo de convexidade de X.

Vamos fixar $0 < \epsilon < 1$ e tomar $r(\epsilon) = 1 - \delta(\epsilon)$, $\eta(\epsilon) = \dfrac{\epsilon(1 - r(\epsilon))}{2}$ e $\gamma(\epsilon) = \dfrac{\epsilon}{2}$. Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset B_X$ uma sequência e $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ uma série convexa tal que

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right\| > 1 - \eta(\epsilon).$$

Segue do Corolário 1.59 que existe um funcional $x^* \in S_{X^*}$ tal que

$$x^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right) = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right\| > 1 - \eta(\epsilon),$$

ou seja,

$$Re\ x^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right) > 1 - \eta(\epsilon).$$

Seja $A = \{n \in \mathbb{N} : Re\ x^*(x_n) > r(\epsilon)\}$. Mostremos que o conjunto A que definimos é não vazio. Suponha que A é vazio, então

$$Re\ x^*(x_n) \leq r(\epsilon),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, multiplicando a desigualdade por α_n temos que

$$Re\ x^*(\alpha_n x_n) \leq \alpha_n r(\epsilon), \forall n \in \mathbb{N}$$

o que implica

$$\begin{aligned} Re\ x^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n r(\epsilon) \\ &= r(\epsilon) \\ &= 1 - \frac{2\eta(\epsilon)}{\epsilon} \\ &< 1 - 2\eta(\epsilon) < 1 - \eta(\epsilon), \end{aligned}$$

contradição essa que mostra que o conjunto A não é vazio. Então, segue do Lema 3.14 que

$$\begin{aligned} \sum_{n \in A} \alpha_n &> 1 - \frac{\eta(\epsilon)}{1 - r(\epsilon)} \\ &= 1 - \frac{\frac{\epsilon(1-r(\epsilon))}{2}}{1 - r(\epsilon)} \\ &= 1 - \frac{\epsilon(1 - r(\epsilon))}{2(1 - r(\epsilon))} \\ &= 1 - \frac{\epsilon}{2} = 1 - \gamma(\epsilon). \end{aligned}$$

Para $n, m \in A$, temos que

$$\begin{aligned} \|x_n + x_m\| &\geq |x^*(x_n + x_m)| \\ &\geq Re(x^*(x_n + x_m)) \\ &= Re\ x^*(x_n) + Re\ x^*(x_m) \\ &> 2r(\epsilon) = 2 - 2\delta(\epsilon), \end{aligned}$$

então

$$\frac{\|x_n + x_m\|}{2} > 1 - \delta(\epsilon),$$

e, como X é uniformemente convexo, obtemos $\|x_n - x_m\| < \epsilon$. Como $A \neq \emptyset$, então podemos escolher $n_0 \in A$. Defina $z_n = x_{n_0}$ para todo $n \in A$. Portanto, temos que

$$\|z_n - x_n\| < \epsilon, \text{ para todo } n \in A, \text{ e } \sum_{n \in A} \alpha_n > 1 - \gamma(\epsilon).$$

Finalmente, segue do Corolário 1.59 que existe um funcional $z^* \in S_X^*$ tal que $z^*(x_{n_0}) = 1$, ou seja, $z^*(z_n) = 1$ para todo $n \in A$.

Portanto, segue da Proposição 3.16 que X tem a propriedade AHSP. $\square$

Mostraremos que todo espaço de Banach estritamente convexa que não é uniformemente convexo não possui a propriedade AHSP.

Proposição 3.21. *Um espaço de Banach estritamente convexa com a propriedade AHSP é uniformemente convexo.*

Demonstração. Seja X um espaço de Banach estritamente convexa. Suponha que X tenha a propriedade AHSP. Segue da Proposição 3.16 que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\gamma(\epsilon) < \frac{1}{2}$, e para pontos $x, y \in B_X$ tais que

$$\left\|\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right\| > 1 - \eta(\epsilon),$$

existem $u, v \in S_X$ e $z^* \in S_{X^*}$ tais que $\|u - x\| < \epsilon$, $\|v - y\| < \epsilon$ e $z^*(x) = z^*(y) = 1$. Daí, temos que

$$\|u + v\| \geq z^*(x + z) = 2.$$

Por outro lado,

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| = 2.$$

Logo, $\|u + v\| = 2$. Como X é estritamente convexa, então segue da Proposição 1.77 que $u = v$. Portanto, pela Proposição 1.74 obtemos que X é uniformemente convexo, pois

$$\begin{aligned}\|x - y\| &\leq \|x - u\| + \|u - y\| \\ &= \|x - u\| + \|v - y\| < 2\epsilon.\end{aligned}$$

□

Exemplo 3.22. *Denote por ℓ_∞^n o espaço vetorial $\mathbb{K}^n$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. O espaço reflexivo*

$$X = \oplus_2 \ell_\infty^n = \left(\{x = (x_i)_{i=1}^\infty : x_i \in \ell_\infty^n \ \forall i \in \mathbb{N}\},\ \|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_i\|_\infty^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

não satisfaz a propriedade AHSP, pois não é uniformemente convexo (para os detalhes desse exemplo veja [7], página 294).

3.3.2 Operadores de ℓ_1 em um espaço com a propriedade AHSP

Nesta subseção, vamos caracterizar os espaços de Banach Y tais que o par (ℓ_1, Y) tem a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores. Para isso, usaremos a propriedade AHSP que foi definida na subseção anterior.

Antes de mostrarmos o Teorema 3.23 vamos definir a função P_A. Seja $A \subset \mathbb{N}$, definimos $P_A \colon \ell_1 \to \ell_1$ por $P_A(x) = \sum_{n \in A} x(n) e_n$, onde $x = (x(n))_{n=1}^\infty \in \ell_1$.

Teorema 3.23. *Seja Y um espaço de Banach. Então, o par (ℓ_1, Y) tem a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores se, e somente se, Y tem a propriedade AHSP.*

Demonstração. Nossa prova será dada para o caso de espaços de Banach complexos. O caso dos espaços de Banach reais é mais simples do que o caso complexo.

Seja Y um espaço de Banach com a propriedade AHSP. Dado $\epsilon > 0$, tome as funções $\gamma(\epsilon)$ e $\eta(\epsilon)$ satisfazendo as condições da Proposição 3.16. Sem perda de generalidade podemos supor que ϵ é suficientemente pequeno para que $0 < \gamma(\epsilon) < 1$.

Dado $T \in S_{\mathcal{L}(\ell_1,Y)}$, existe $x_0 = (x_0(n))_{n=1}^{\infty} \in S_{\ell_1}$ tal que $\|Tx_0\| > 1 - \eta(\epsilon)$. Suponha que $x_0(n) = Re\ x_0(n) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelas suposições sobre T e x_0, podemos aplicar a propriedade AHSP à série convexa $\sum_{n=1}^{\infty} x_0(n)$ e aos elementos $x_n = T(e_n),\ n \in \mathbb{N}$, onde $(e_n)_n$ é a base canônica de ℓ_1. Portanto, existe um subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ e $\{y_n : n \in A\} \subset S_Y$ tais que

$$\sum_{n\in A} x_0(n) > 1 - \gamma(\epsilon), \quad \|y_n - x_n\| < \epsilon, \quad \text{para todo } n \in A, \tag{3.7}$$

e

$$\left\|\sum_{n\in A} x_0(n) y_n\right\| = \sum_{n\in A} x_0(n). \tag{3.8}$$

Como

$$\sum_{n\in A} x_0(n) > 1 - \gamma(\epsilon),$$

temos

$$\sum_{n\notin A} x_0(n) < \gamma(\epsilon). \tag{3.9}$$

Considere o operador linear $S\colon \ell_1 \to Y$ dado por

$$S(e_n) = \begin{cases} y_n & , \text{ se } n \in A, \\ T(e_n) & , \text{ se } n \notin A. \end{cases}$$

Note que S tem norma 1. De fato, para todo $\lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in S_{\ell_1}$ temos que

$$\begin{aligned} \left\|S\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n e_n\right)\right\| &= \left\|S\left(\sum_{n\in A} \lambda_n e_n\right) + S\left(\sum_{n\notin A} \lambda_n e_n\right)\right\| \\ &= \left\|\sum_{n\in A} \lambda_n (S(e_n)) + \sum_{n\notin A} \lambda_n (S(e_n))\right\| \\ &\leq \sum_{n\in A} \|\lambda_n y_n\| + \sum_{n\notin A} \|\lambda_n (T(e_n))\| \\ &\leq \sum_{n\in A} |\lambda_n| + \sum_{n\notin A} |\lambda_n| = 1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|S\| \leq 1.$$

Por outro lado, temos que

$$\|S(e_n)\| = \|y_n\| = 1$$

para todo $n \in A$.
Logo,

$$\|S\| = 1.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\|T-S\| &= \sup_{\|\lambda\|=1} \|(T-S)(\lambda)\| \\
&= \sup_{\|\lambda\|=1} \|(S-T)(\lambda)\| \\
&= \sup_{\|\lambda\|=1} \left\|(S-T)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n\right)\right\| \\
&\leq \sup_{\|\lambda\|=1} \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \, \|(S-T)(e_n)\| \\
&\leq \sup_{\|\lambda\|=1} \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \sup_{n\in\mathbb{N}} \|(S-T)(e_n)\| \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \|(S-T)(e_n)\|.
\end{aligned}$$

Como $e_n \in S_{\ell_1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned}
\|T-S\| &= \sup_{\|\lambda\|=1} \|(S-T)(\lambda)\| \\
&\geq \|(S-T)(e_n)\|
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\|T-S\| \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|(S-T)(e_n)\|.$$

Portanto,

$$\|T-S\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|(S-T)(e_n)\|.$$

Em vista de (3.7) obtemos que

$$\begin{aligned}
\|T-S\| &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \|(S-T)(e_n)\| \\
&= \sup_{n\in A} \|y_n - x_n\| \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Como $\gamma(\epsilon) < 1$, tendo em vista (3.7), então $A \neq \emptyset$. Se $P_A(x_0) = \sum_{n\in A} x_0(n) e_n$, então o elemento $z_0 = \dfrac{P_A(x_0)}{\|P_A(x_0)\|} \in S_{\ell_1}$ é tal que

$$\begin{aligned}
\|x_0 - z_0\| &= \left\| x_0 - \frac{P_A(x_0)}{\|P_A(x_0)\|} + P_A(x_0) - P_A(x_0) \right\| \\
&\leq \|x_0 - P_A(x_0)\| + \left\| \frac{(1 - \|P_A(x_0)\|) P_A(x_0)}{\|P_A(x_0)\|} \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_0(n) e_n - \sum_{n\in A} x_0(n) e_n \right\| + |1 - \|P_A(x_0)\|| \\
&= \sum_{n\notin A} x_0(n) + |1 - \|P_A(x_0)\|| \\
&= \sum_{n\notin A} x_0(n) + \sum_{n=1}^{\infty} x_0(n) - \sum_{n\in A} x_0(n) \\
&= 2 \sum_{n\notin A} x_0(n) \overset{(3.9)}{<} 2\gamma(\epsilon).
\end{aligned}$$

Além disso, usando (3.8), sabemos que

$$\begin{aligned}\|Sz_0\| &= \left\| S\left(\frac{\sum_{n\in A} x_0(n)e_n}{\|P_A(x_0)\|}\right)\right\| \\ &= \frac{\|\sum_{n\in A} x_0(n)S(e_n))\|}{\|P_A(x_0)\|} \\ &= \frac{\|\sum_{n\in A} x_0(n)y_n\|}{\|P_A(x_0)\|} \\ &= \frac{\|\sum_{n\in A} x_0(n)y_n\|}{\sum_{n\in A} x_0(n)} = 1.\end{aligned}$$

Assim, tomando $\beta(\epsilon) = 2\gamma(\epsilon)$, segue da Proposição 3.16 que o par (ℓ_1, Y) tem propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para os operadores.

Caso não tenhamos que $x_0(n) = Re\ x_0(n) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\theta_n \in [0, 2\pi)$ tal que $x_0(n) = |x_0(n)|e^{i\theta_n}$. Defina

$$\begin{aligned} R_n\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto ze^{-i\theta_n}. \end{aligned}$$

Note que R_n é isometria linear para todo n. Agora, considere

$$\begin{aligned} \varphi\colon \ell_1 &\to \ell_1 \\ (x_n)_{n=1}^{\infty} &\mapsto (R_n(x_n))_{n=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

Como os R_n's são isometrias lineares, então φ é isometria linear. Seja $V\colon \ell_1 \to Y$ dado por

$$V = T \circ \varphi^{-1}.$$

Assim $V \in \mathcal{L}(\ell_1, Y)$. Além disso,

$$\|V\| = \|T \circ \varphi^{-1}\| \leq \|T\|\|\varphi^{-1}\| = 1.$$

Dado $\delta > 0$, como $\|T\| = 1$, existe $x \in S_{\ell_1}$ tal que $\|Tx\| > 1 - \delta$. Já que φ é isometria, existe $y \in S_{\ell_1}$ tal que $y = \varphi(x)$. Então

$$\|V(y)\| = \|T(\varphi^{-1}(y))\| = \|T(\varphi^{-1}(\varphi(x)))\| = \|T(x)\| > 1 - \delta.$$

Logo, $\|V\| = 1$. Tome $y_0 = \varphi(x_0) \in S_{\ell_1}$. Note que

$$y_0(n) = R_n(x_0(n)) = x_0(n)e^{-i\theta_n} = |x_0(n)|e^{i\theta_n}e^{-i\theta_n} = |x_0(n)|.$$

Daí, $y_0(n) \in \mathbb{R}^+$, ou seja, $y_0(n) = Re\ x_0(n) \geq 0$. Por outro lado,

$$\|Vy_0\| = \|(T \circ \varphi^{-1})(y_0)\| = \|T(x_0)\| > 1 - \eta(\epsilon).$$

Pelo que já foi provado, existem $w_0 \in S_{\ell_1}$ e $S \in S_{\mathcal{L}(\ell_1, Y)}$ tais que

$$\|V - S\| < \epsilon,\ \|y_0 - w_0\| < \beta(\epsilon),\ \|Sw_0\| = 1.$$

Daí, $S \circ \varphi \in S_{\mathcal{L}(\ell_1, Y)}$ é tal que

$$\|T - S \circ \varphi\| = \|V \circ \varphi - S \circ \varphi\| = \|(V - S) \circ \varphi\| \leq \|V - S\|\|\varphi\| = \|V - S\| < \epsilon,$$

$z_0 = \varphi^{-1}(w_0) \in S_{\ell_1}$ é tal que

$$\|x_0 - z_0\| = \|\varphi(x_0) - \varphi(z_0)\| = \|\varphi(\varphi^{-1}(y_0)) - \varphi(\varphi^{-1}(w_0))\| < \beta(\epsilon),$$

e

$$\|(S \circ \varphi)(z_0)\| = \|S(w_0)\| = 1.$$

Logo, a afirmação fica provada em geral.

Reciprocamente, suponha que Y seja um espaço de Banach complexo tal que o par (ℓ_1, Y) tem a Propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores. Dado $0 < \rho < 1$, podemos escolher s tal que $0 < s < 1$ e $0 < \sqrt{2(1-s)} < \dfrac{\rho}{2}$.

Sejam $\eta(\epsilon)$ e $\beta(\epsilon)$ os números positivos que aparecem na Definição 3.1 da propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores. Escolha $\epsilon = \epsilon(\rho)$ tal que $0 < \epsilon < \dfrac{\rho}{2} < 1$ e $\dfrac{\beta(\epsilon)}{1-s} < \dfrac{\rho}{2}$.

Sejam $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset S_Y$ uma sequência e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ uma série convexa tais que

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n\right\| > 1 - \eta(\epsilon).$$

Tomemos o operador linear limitado $T : \ell_1 \to Y$ dado por $T(e_n) = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos $\|T\| = 1$ e o elemento $x_0 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \in S_{\ell_1}$ satisfaz

$$\|T(x_0)\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n\right\| > 1 - \eta(\epsilon).$$

De fato, de maneira análoga a que mostramos que $\|S\| = 1$ para o operador S do início desta demonstração podemos provar que $\|T\| = 1$ e,

$$\begin{aligned}\|T(x_0)\| &= \left\|T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\right)\right\| \\ &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n T(e_n)\right\| \\ &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n\right\|.\end{aligned}$$

Aplicando a hipótese de que o par (ℓ_1, Y) tem a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores, temos que existem um operador $S \in S_{L(\ell_1, Y)}$ e $u_0 \in S_{\ell_1}$ tais que

$$\|Su_0\| = 1, \quad \|u_0 - x_0\| < \beta(\epsilon), \quad \|S - T\| < \epsilon.$$

Então

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - Re\ u_0(n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_0(n) - \alpha_n| = \|u_0 - x_0\| < \beta(\epsilon), \tag{3.10}$$

o que implica

$$\sum_{n=1}^{\infty} Re\ u_0(n) > \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n - \beta(\epsilon) = 1 - \beta(\epsilon). \tag{3.11}$$

Consideremos o conjunto

$$A := \{n \in \mathbb{N} : Re\ u_0(n) > s|u_0(n)|\}.$$

Mostremos que o conjunto A não é vazio. Suponha que A seja vazio então

$$Re\ u_0(n) \leq s|u_0(n)|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\sum_{n=1}^{\infty} Re\ u_0(n) \leq s \sum_{n=1}^{\infty} |u_0(n)| = s < 1 - \beta(\epsilon),$$

pois

$$\begin{aligned} & \frac{\beta(\epsilon)}{1-s} < \frac{\rho}{2} \\ \Longrightarrow \quad & \beta(\epsilon) < (1-s)\frac{\rho}{2} < 1 - s \\ \Longrightarrow \quad & \qquad s < 1 - \beta(\epsilon). \end{aligned}$$

Contradição essa que mostra que A é não vazio.

Segue de (3.11) que

$$\begin{aligned} 1 - \beta(\epsilon) &< \sum_{n=1}^{\infty} Re\ u_0(n) \\ &= \sum_{n \in A} Re\ u_0(n) + \sum_{n \notin A} Re\ u_0(n) \\ &\leq \sum_{n \in A} Re\ u_0(n) + s \sum_{n \notin A} |u_0(n)| \\ &= \sum_{n \in A} Re\ u_0(n) + s \sum_{n \notin A} |u_0(n)| + s \sum_{n \in A} |u_0(n)| - s \sum_{n \in A} |u_0(n)| \\ &= \sum_{n \in A} Re\ u_0(n) + s \left(\sum_{n \notin A} |u_0(n)| + \sum_{n \in A} |u_0(n)| - \sum_{n \in A} |u_0(n)| \right) \\ &= \sum_{n \in A} Re\ u_0(n) + s \left(1 - \sum_{n \in A} |u_0(n)| \right) \\ &\leq \sum_{n \in A} Re\ u_0(n) + s \left(1 - \sum_{n \in A} Re\ u_0(n) \right). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} & (1-s) \sum_{n \in A} Re\ u_0(n) > 1 - s - \beta(\epsilon) \\ \Longrightarrow \quad & \sum_{n \in A} Re\ u_0(n) > 1 - \frac{\beta(\epsilon)}{1-s}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Usando (3.10) para $n \in A$ e (3.12), obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{n\in A} \alpha_n &\geq \sum_{n\in A} Re\ u_0(n) - \|u_0 - x_0\| \\ &> 1 - \frac{\beta(\epsilon)}{1-s} - \|u_0 - x_0\| \\ &> 1 - \frac{\beta(\epsilon)}{1-s} - \beta(s). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Tomando $\gamma(\rho) := \beta(\epsilon) + \dfrac{\beta(\epsilon)}{1-s}$ temos $\gamma(\rho) < \rho$ e então $\lim_{t\to 0} \gamma(t) = 0$. Agora, se $z \in \mathbb{C}$ satisfaz $|z| = 1$ e $Re\ z > t > 0$, então sabemos que

$$|1-z|^2 = 1 + |z|^2 - 2Re\ z < 2 - 2t = 2(1-t).$$

Assim, para $n \in A$, pela escolha de s, segue que

$$\left|1 - \frac{u_0(n)}{|u_0(n)|}\right|^2 < 2(1-s) < \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 = \frac{\rho^2}{4}. \tag{3.14}$$

Se escrevermos $z_n := S(e_n)$, então

$$\begin{aligned} 1 &= \|S(u_0)\| \\ &= \left\| S\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_0(n) e_n\right)\right\| \\ &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty} u_0(n) S(e_n)\right\| \\ &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty} u_0(n) z_n\right\|, \end{aligned}$$

para todo $n \in A$. Portanto, segue de uma consequência do Teorema 1.58 (Teorema de Hanhn-Banach) que existe $y^* \in S_{Y^*}$ tal que

$$\begin{aligned} & y^*(S(u_0)) = \|S(u_0)\| = 1 \\ \implies & \sum_{n=1}^{\infty} u_0(n) y^*(z_n) = y^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_0(n) z_n\right) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} |u_0(n)|. \end{aligned}$$

Como $u_0(n)y^*(z_n) \leq |u_0(n)|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$u_0(n) y^*(z_n) \leq |u_0(n)| \tag{3.15}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para todo $n \in A$, z_n pertence a S_Y. Também sabemos que para $n \in A$ temos

$$\|z_n - y_n\| = \|S(e_n) - T(e_n)\| < \epsilon < \frac{\rho}{2},$$

e então

$$\begin{aligned} \left\|\frac{u_0(n)}{|u_0(n)|} z_n - y_n\right\| &\leq \left\|\frac{u_0(n)}{|u_0(n)|} z_n - z_n\right\| + \|z_n - y_n\| \\ &\leq \left|\frac{u_0(n)}{|u_0(n)|} - 1\right| + \|z_n - y_n\| \\ &\overset{(3.14)}{<} \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho. \end{aligned}$$

Tendo em vista (3.13), a desigualdade anterior e (3.15), verificamos que

$$\sum_{n\in A}\alpha_n > 1-\gamma(\rho), \quad \left\|\frac{u_0(n)}{|u_0(n)|}z_n - y_n\right\| < \rho \ \text{ e } y^*\left(\frac{u_0(n)}{|u_0(n)|}z_n\right) = 1, \quad \text{para todo } n \in A.$$

Logo, Y tem a propriedade AHSP. □

Observação 3.24. *Segue do Teorema 3.6 que o par (ℓ_1, Y) tem a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores sempre que Y tem propriedade β. Assim, a propriedade β implica AHSP em vista de Teorema 3.23. No entanto, é falso que o Teorema 3.23 possa ser obtido do Teorema 3.6. Por outro lado, tomando $X = \ell_1$ e Y um espaço que não possui a propriedade AHSP, vemos que que o par (ℓ_1, Y) não satisfaz o Propriedade Bishop-Phelps-Bollobás para operadores, ou seja, o espaço ℓ_1 não é um espaço domínio BPB universal.*

3.4 Operadores de ℓ_∞^n em um espaço uniformemente convexo

Nosso objetivo nesta seção é mostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo espaço uniformemente convexo Y, o par (ℓ_∞^n, Y) satisfaz a propriedade Bishop-Phelps-Bollobás para os operadores. Para construir esta seção utilizamos como base o artigo [1].

No resultado a seguir vamos abordar uma propriedade para operadores de c_0 em um espaço Banach uniformemente convexo. Antes de enunciá-lo, para $A \subset \mathbb{N}$ definiremos o operador $P_A\colon c_0 \to c_0$ dado por $P_A(x) = \sum_{n\in A} x(n)e_n$.

Lema 3.25. *Sejam $\epsilon > 0$ e Y um espaço de Banach uniformemente convexo com módulo de convexidade $\delta(\epsilon)$. Se $T \in S_{\mathcal{L}(c_0,Y)}$ e $A \subset \mathbb{N}$ tem a propriedade de que $\|TP_A\| > 1-\delta(\epsilon)$, então temos que $\|T(I-P_A)\| \leq \epsilon$.*

Demonstração. Como Y é uniformemente convexo, para cada $\epsilon > 0$, existe $0 < \delta(\epsilon) < 1$ tal que sempre que u e v estão em B_Y, satisfazendo

$$\frac{\|u+v\|}{2} \geq 1-\delta(\epsilon),$$

segue-se que $\|u-v\| < \epsilon$.

Sejam $T \in S_{\mathcal{L}(c_0,Y)}$ e $A \subset \mathbb{N}$ tais que $\|TP_A\| > 1-\delta(\epsilon)$. Escolha $x_0 \in P_A(c_0) \cap S_{c_0}$ tal que $\|TP_A(x_0)\| > 1-\delta(\epsilon)$. Como

$$\begin{aligned} 1 = \|T\| &\geq \|T(x_0)\| \\ &= \|T(P_Ax_0)\| \\ &= \|T(P_Ax_0) \pm T(P_Az)\| \end{aligned}$$

para todo elemento $z \in B_{c_0}$ tal que $z \notin supp\ P_A$, ou seja, $P_Az = 0$, segue que para qualquer $y \in B_{c_0}$

$$\begin{aligned} \|T(x_0) \pm T(I-P_A)(y)\| &= \|T(x_0) \pm (T(y) - T(P_A(y)))\| \\ &= \left\|T(x_0) \pm T\left(\sum_{n\notin A} y(n)e_n\right)\right\| \leq 1. \end{aligned}$$

Também, temos que

$$\begin{aligned}\|T(x_0+(I-P_A)(y))+T(x_0-(I-P_A)(y))\| &= \|2T(x_0)\| \\ &= \|2TP_A(x_0)\| > 2-2\delta(\epsilon).\end{aligned}$$

Assim, usando que Y é uniformente convexo, obtemos que

$$\|2T(I-P_A)(y)\| = \|T(x_0+(I-P_A)(y)) - T(x_0-(I-P_A)(y))\| < 2\epsilon.$$

Como tomamos $y \in B_{c_0}$ de forma arbitrária, então $\|T(I-P_A)\| \leq \epsilon$. □

O resultado abaixo sera útil para mostrar o Teorema 3.28.

Teorema 3.26 (Teorema de Krein-Milman)**.** *Sejam X um espaço normado e K um subconjunto compacto e convexo de X. Então K é igual ao envoltório convexo fechado de seus pontos extremos, ou seja,*

$$K = \overline{conv}(Ext(K)).$$

Demonstração. Veja [6], páginas 149 e 150. □

Também faremos uso do seguinte lema que apresenta uma relação de dualidade entre ℓ_1^n e ℓ_∞^n.

Lema 3.27. *Os espaços ℓ_1^n e $(\ell_\infty^n)^*$ são isometricamente isomorfos.*

Demonstração. Dado $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \ell_1^n$, definimos $\phi_y \colon \ell_\infty^n \to \mathbb{K}$ por

$$\phi_y(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \eta_j,$$

para cada $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \ell_\infty^n$. Temos que

$$\begin{aligned}|\phi_y(x)| &= \left|\sum_{j=1}^{n} \xi_j\eta_j\right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} |\xi_j\eta_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \sup\{|\xi_j| \colon j=1,\ldots,n\}|\eta_j| \\ &= \sup\{|\xi_j| \colon j=1,\ldots,n\} \sum_{j=1}^{n} |\eta_j| \\ &= \|x\|_\infty \|y\|_1.\end{aligned}$$

Então,

$$\|\phi_y\| \leq \|y\|_1.$$

Como ϕ_y é claramente linear, então $\phi_y \in (\ell_\infty^n)^*$.

Provemos que dado $\phi \in (\ell_\infty^n)^*$, existe $y \in \ell_1^n$ tal que $\phi_y = \phi$ e $\|y\|_1 \leq \|\phi\|$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ com $1 \leq j \leq n$, seja $e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ o j-ésimo vetor canônico de $\mathbb{K}^n$. Tome

$y = (\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)) \in \ell_1^n$. Mostremos que $\phi_y = \phi$ e $\|y\|_1 \leq \|\phi\|$. Dado $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \ell_\infty^n$, temos

$$\phi_y(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \phi(e_j) = \phi\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right) = \phi(x).$$

Isso mostra que $\phi_y = \phi$. Agora, para cada $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq n$, considere

$$\eta_j = \begin{cases} \overline{\phantom{\dfrac{a}{b}}0\phantom{\dfrac{a}{b}}} & , \ \phi(e_j) = 0 \\ \dfrac{\overline{\phi(e_j)}}{|\phi(e_j)|} & , \ \phi(e_j) \neq 0. \end{cases}$$

Então $\eta_j \cdot \phi(e_j) = |\phi(e_j)|$ e $|\eta_j| \leq 1$ para todo j. Daí,

$$\begin{aligned} \|y\|_1 &= \sum_{j=1}^{n} |\phi(e_j)| \\ &= \sum_{j=1}^{n} \eta_j \cdot \phi(e_j) \\ &= \phi\left(\sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j\right) \\ &= \phi(\eta_1, \ldots, \eta_n) \\ &\leq \|\phi\| \|(\eta_1, \ldots, \eta_n)\|_\infty \leq \|\phi\|. \end{aligned}$$

Assim, o operador $T\colon \ell_1^n \to (\ell_\infty^n)^*$ dado por $T(y) = \phi_y$ é linear, sobrejetor e $\|Ty\| = \|y\|_1$ para cada $y \in \ell_1^n$. Logo, T é um isomorfismo isométrico. $\square$

Mostremos que o par (ℓ_∞^n, Y) tem a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores para todo $n \in \mathbb{N}$ e Y espaço de Banach uniformemente convexo.

Teorema 3.28. *Seja Y um espaço de Banach uniformemente convexo com módulo de convexidade $\delta(\epsilon)$. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $0 < \epsilon < 1$, $0 < \epsilon' < \epsilon$ com $\epsilon' + \frac{\epsilon'}{\epsilon^{\frac{1}{3}}} < \delta(\epsilon)$. Para quaisquer $x_0 \in B_{\ell_\infty^n}$ e $T \in S_{\mathcal{L}(\ell_\infty^n, Y)}$ tais que $\|Tx_0\| > 1 - \epsilon'$, existem $z_0 \in B_{\ell_\infty^n}$ e $V \in S_{\mathcal{L}(\ell_\infty^n, Y)}$ tais que*

$$\|Vz_0\| = 1, \quad \|z_0 - x_0\| < \epsilon^{\frac{1}{4}} + \epsilon^{\frac{1}{3}}, \quad \|V - T\| \leq \epsilon + 6n\left(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}}\right) + \left(\epsilon' + \frac{\epsilon'}{\epsilon^{\frac{1}{3}}}\right).$$

Demonstração. Sejam $T \in S_{\mathcal{L}(\ell_\infty^n, Y)}$ e $x_0 \in B_{\ell_\infty^n}$ tais que $\|Tx_0\| > 1 - \epsilon'$. Suponha que $x_0(i) = Re\ x_0(i) \geq 0$ para todo $i \leq n$.

Segue de uma consequência do Teorema 1.58 (Teorema de Hahn-Banach) que existe $y^* \in S_{Y^*}$ tal que

$$y^*T(x_0) = \|T(x_0)\|. \tag{3.16}$$

Assim,

$$y^*T(x_0) = Re(y^*T(x_0)) = Re(T^t y^*)(x_0) > 1 - \epsilon'.$$

Defina

$$\begin{aligned} E &:= \{i \leq n : Re(T^t y^*)(e_i) x_0(i) > (1 - \epsilon^{\frac{1}{3}}) |(T^t y^*)(e_i)|\} \\ &\subset \{i \leq n : Re(T^t y^*)(e_i) > 0,\ x_0(i) > 1 - \epsilon^{\frac{1}{3}}\}. \end{aligned}$$

Mostremos que o conjunto E é não vazio. Suponha que E seja vazio, então

$$Re(T^t y^*)(x_0(i)e_i) \leq \left(1-\epsilon^{\frac{1}{3}}\right)|(T^t y^*)(e_i)|,$$

para todo $i \leq n$. Daí, temos que

$$y^*T(x_0) = \sum_{i=1}^{n} Re(T^t y^*)(x_0(i)e_i) \leq \left(1-\epsilon^{\frac{1}{3}}\right)\sum_{i=1}^{n}|(T^t y^*)(e_i)|. \tag{3.17}$$

Agora, pelo Lema 3.27, sabemos que $(\ell_\infty^n)^*$ é isometricamente isomorfo a ℓ_1^n e que

$$\sum_{i=1}^{n}|(T^t y^*)(e_i)| = \|T^t y^*\|.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|(T^t y^*)(e_i)| &= \|T^t y^*\| \\ &\leq \|T^t\|\|y^*\| \\ &= \|T\|\|y^*\| \leq 1.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Logo, por (3.16), (3.17) e (3.18),

$$\begin{aligned}\|T(x_0)\| &= y^*T(x_0) \\ &\leq \left(1-\epsilon^{\frac{1}{3}}\right)\sum_{i=1}^{n}|\left(T^t y^*\right)(e_i)| \\ &\leq 1-\epsilon^{\frac{1}{3}} \\ &< 1-(\epsilon')^{\frac{1}{3}} \\ &< 1-\epsilon'.\end{aligned}$$

Contradição essa que mostra que E é não vazio.

Se $A := \sum_{i\notin E}|(T^t y^*)(e_i)|$, vamos verificar que $A < \dfrac{\epsilon'}{\epsilon^{\frac{1}{3}}}$. De fato,

$$\begin{aligned}1-\epsilon' < Re(T^t y^*)(x_0) &= Re(T^t y^*)\left(\sum_{i=1}^{n} x_0(i)e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} Re(T^t y^*)(e_i)x_0(i) \\ &\leq \sum_{i\in E}|(T^t y^*)(e_i)x_0(i)| + \sum_{i\notin E} Re\ (T^t y^*)(e_i)x_0(i) \\ &\leq \sum_{i\in E}|(T^t y^*)(e_i)| + (1-\epsilon^{\frac{1}{3}})\sum_{i\notin E}|(T^t y^*)(e_i)| \\ &= \sum_{i\in E}|(T^t y^*)(e_i)| + \sum_{i\notin E}|(T^t y^*)(e_i)| - \sum_{i\notin E}|(T^t y^*)(e_i)| \\ &+ (1-\epsilon^{\frac{1}{3}})\sum_{i\notin E}|(T^t y^*)(e_i)| \\ &= \sum_{i=1}^{n}|(T^t y^*)(e_i)| - A + (1-\epsilon^{\frac{1}{3}})A \\ &\overset{(3.18)}{\leq} 1 - A + (1-\epsilon^{\frac{1}{3}})A = 1-\epsilon^{\frac{1}{3}}A,\end{aligned}$$

então

$$A < \frac{\epsilon'}{\epsilon^{\frac{1}{3}}}.$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned}
1 - \epsilon' < Re(T^t y^*)(x_0) &= Re(T^t y^*)\left(\sum_{i=1}^{n} x_0(i) e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} Re(T^t y^*)(e_i) x_0(i) \\
&\leq \sum_{i \in E} Re(T^t y^*)(e_i) x_0(i) + \sum_{i \notin E} |(T^t y^*)(e_i) x_0(i)| \\
&\leq \sum_{i \in E} Re(T^t y^*)(e_i) + \sum_{i \notin E} |(T^t y^*)(e_i)| \\
&< \sum_{i \in E} Re(T^t y^*)(e_i) + \frac{\epsilon'}{\epsilon^{\frac{1}{3}}},
\end{aligned}$$

donde segue

$$\sum_{i \in E} Re(T^t y^*)(e_i) > 1 - \epsilon' - \frac{\epsilon'}{\epsilon^{\frac{1}{3}}}.$$

Pela escolha de ϵ',

$$\begin{aligned}
\|TP_E\| &\geq \left\| TP_E\left(\sum_{i \in E} e_i\right)\right\| \\
&= \left\| T\left(\sum_{i \in E} e_i\right)\right\| \\
&\geq \left| y^*\left(T\left(\sum_{i \in E} e_i\right)\right)\right| \\
&= \left| (T^t y^*)\left(\sum_{i \in E} e_i\right)\right| \\
&\geq \sum_{i \in E} Re(T^t y^*)(e_i) \\
&> 1 - \left(\epsilon' + \frac{\epsilon'}{\epsilon^{\frac{1}{3}}}\right) \\
&> 1 - \delta(\epsilon). \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Segue do Lema 3.25 que

$$\|T(I - P_E)\| \leq \epsilon. \qquad (3.20)$$

Tomando $e_0 = \sum_{i \in E} e_i$ em $B_{P_E(\ell_\infty^n)}$ e

$$x_0^* = \sum_{i \in E} \frac{1}{|E|} e_i^*$$

em $(\ell_\infty^n)^*$, pela definição de E, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|P_E(x_0) - e_0\| &= \left\| \sum_{i\in E} x_0(i)e(i) - e_0 \right\| \\
&= \left\| \sum_{i\in E} (x_0(i) - 1)e(i) \right\| \\
&= \sup_{i\in E} |x_0(i) - 1| < \epsilon^{\frac{1}{3}}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

e que

$$\begin{aligned}
x_0^*(e_0) &= \sum_{i\in E} \frac{1}{|E|} e_i^* \left(\sum_{i=1}^{n} e_i \right) \\
&= \sum_{i\in E} \frac{1}{|E|} e_i^* (e_i) \\
&= \frac{1}{|E|}|E| = 1.
\end{aligned}$$

Por outro lado, para todo $x \in B_{\ell_\infty^n}$ temos que

$$\begin{aligned}
|x_0^*(x)| &= \left| \sum_{i\in E} \frac{1}{|E|} e_i^* \left(\sum_{i=1}^{\infty} x(i)e_i \right) \right| \\
&= \sum_{i\in E} \frac{1}{|E|} x(i) e_i^* (e_i) \\
&\leq x(n)\frac{1}{|E|}|E| \leq 1,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|x_0^*\| = 1.$$

Defina o operador $S\colon \ell_\infty^n \to Y$ por

$$S(x) = TP_E(x) + 3n(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}})x_0^*(P_E(x))\frac{T(e_0)}{\|T(e_0)\|}$$

para $x \in \ell_\infty^n$. Por ser soma de operadores lineares contínuos, temos que S é um operador linear contínuo.

Seja $\tau = \dfrac{\sqrt{\epsilon}}{2|E|}$. Afirmamos que $\|e - e_0\| < \epsilon^{\frac{1}{4}}$ para todo $e \in \mathrm{Ext}(B_{P_E(\ell_\infty^n)})$ satisfazendo $|x_0^*(e) - 1| < \tau$. De fato, se $|x_0^*(e) - 1| < \tau$, temos que

$$\begin{aligned}
& |x_0^*(e)|E| - |E|| < \tau|E| \\
\implies \quad & \left| \sum_{i\in E} e_i^*(e) - |E| \right| < \tau|E| \\
\implies \quad & \left| \sum_{i\in E} e(i) - |E| \right| < \tau|E| \\
\implies \quad & Re\left(|E| - \sum_{i\in E} e(i) \right) < \tau|E|.
\end{aligned}$$

Agora, como e é um ponto extremo de $B_{P_E(\ell_\infty^n)}$, então

$$|e(i)| = 1,$$

para todo $i \in E$. Com efeito, se existir $i_0 \in E$ tal que

$$|e(i_0)| \neq 1,$$

então existem $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ com $|\alpha| < 1,\ |\beta| < 1$ tais que

$$e(i_0) = (1-t)\alpha + t\beta.$$

Daí, tomando x, y dados por

$$x(i) = \begin{cases} 0 & ,\ i \notin E \\ e(i) & ,\ i \in E \setminus \{i_0\} \\ \alpha & ,\ i = i_0 \end{cases}$$

e

$$y(i) = \begin{cases} 0 & ,\ i \notin E \\ e(i) & ,\ i \in E \setminus \{i_0\} \\ \beta & ,\ i = i_0 \end{cases}$$

temos que $x, y \in B_{P_E(\ell_\infty^n)}$ e

$$\begin{aligned} (1-t)x + ty &= \begin{cases} 0, & i \notin E \\ e(i), & i \in E \setminus \{i_0\} \\ e(i_0), & i = i_0 \end{cases} \\ &= e, \end{aligned}$$

mas isso é uma contradição, pois e é um ponto extremo de $B_{P_E(\ell_\infty^n)}$. Logo,

$$|e(i)| = 1,$$

para todo $i \in E$. Assim, $Re(1 - e(i)) < \tau|E|$ para todos $i \in E$. Caso contrário, existiria $i_0 \in E$ tal que $Re(1 - e(i_0)) \geq \tau|E|$ e, já que

$$Re\ e(i) \leq |e(i)| = 1$$

para todo $i \in E$, temos que

$$1 - Re(e(i)) \geq 0$$

para todo $i \in E$, donde seguiria

$$\begin{aligned} Re\left(|E| - \sum_{i \in E} e(i)\right) &= \sum_{i \in E}(1 - Re\ e(i)) \\ &\geq 1 - Re\ e(i_0) \\ &\geq \tau|E|, \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Logo,

$$\begin{aligned} |e(i) - 1| &= \sqrt{(Im(e(i) - 1))^2 + (Re(e(i) - 1))^2} \\ &= \sqrt{Im^2(e(i)) + (Re(e(i)) - 1)^2} \\ &= \sqrt{Im^2(e(i)) + Re^2(e(i)) - 2Re(e(i)) + 1} \\ &= \sqrt{1 + |e(i)|^2 - 2Re(e(i))} \\ &= \sqrt{2 - 2Re(e(i))} < \sqrt{2\tau|E|} = \sqrt{\sqrt{\epsilon}} = \epsilon^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

para todo $i \in E$, ou seja, $\|e - e_0\| = \max_{i \in E} |e(i) - 1| < \epsilon^{\frac{1}{4}}$, e a afirmação segue.

Por (3.19) obtemos

$$
\begin{aligned}
\|S(e_0)\| &= \left\| TP_E(e_0) + 3n(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}}) x_0^*(P_E(e_0)) \frac{T(e_0)}{\|T(e_0)\|} \right\| \\
&= \left\| T(e_0) + 3n(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}}) x_0^*(e_0) \frac{T(e_0)}{\|T(e_0)\|} \right\| \\
&= \frac{\|T(e_0)\|T(e_0)\| + 3n(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}})T(e_0)\|}{\|T(e_0)\|} \\
&= \frac{\|T(e_0)\|}{\|T(e_0)\|} (\|T(e_0)\| + 3n(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}})) \\
&= \|TP_E(e_0)\| + 3n(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}}) \\
&> 1 - \left(\epsilon' + \frac{\epsilon'}{\epsilon^{\frac{1}{3}}} \right) + 3n(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}}),
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

e também sabemos que

$$
\begin{aligned}
\|S(e)\| &= \left\| TP_E(e) + 3n(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}}) x_0^*(P_E(e)) \frac{T(e_0)}{\|T(e_0)\|} \right\| \\
&\leq \|T(e)\| + (3n(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}}))|x_0^*(e)| \frac{\|T(e_0)\|}{\|T(e_0)\|} \\
&\leq \|T\|\|e\| + (3n(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}}))|x_0^*(e)| \\
&\leq 1 + 3n(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}})(1 - \tau)
\end{aligned}
$$

para todo $e \in \mathrm{Ext}(B_{P_E(\ell_\infty^n)})$ tal que $|x_0^*(e)| \leq 1 - \tau$. Assim, pela escolha de ϵ', para todo $e \in \mathrm{Ext}(B_{P_E(\ell_\infty^n)})$ com $1 - |x_0^*(e)| \geq \tau$, temos que

$$
\begin{aligned}
\|S(e)\| &\leq 1 + 3n(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}})(1 - \tau) \\
&= 1 + 3n(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}}) \left(1 - \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{2|E|} \right) \\
&= 1 + 3n(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}}) - \frac{3n}{2|E|}(\epsilon + \epsilon^{\frac{2}{3}}) \\
&< 1 + 3n(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}}) - \frac{3n}{2|E|} \left(\epsilon' + \frac{\epsilon'}{\epsilon^{\frac{1}{3}}} \right) \\
&< 1 + 3n(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}}) - \frac{n}{|E|} \left(\epsilon' + \frac{\epsilon'}{\epsilon^{\frac{1}{3}}} \right) \\
&\leq 1 + 3n(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}}) - \left(\epsilon' + \frac{\epsilon'}{\epsilon^{\frac{1}{3}}} \right) \\
&< \|S(e_0)\|.
\end{aligned}
$$

Agora, pelo Teorema 3.26 (Teorema de Krein-Milman), se $K = B_{P_E(\ell_\infty^n)}$, então $K = \overline{conv}\,(\mathrm{Ext}(K))$. Tomando

$$
M = \sup \{ \|S(x)\| \colon x \in \mathrm{Ext}(K) \},
$$

temos que se $y \in K$ então existe $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset conv(\mathrm{Ext}(K))$ tal que $y_n \to y$. Como $y_n \in conv(\mathrm{Ext}(K))$, existem $\displaystyle\sum_{j=1}^{k_n} \alpha_{n_j} = 1$ com $0 < \alpha_{n_j} < 1$, e $x_{n_j} \in \mathrm{Ext}(K)$ com $j = 1, \ldots, k_n$, tais que

$$y_n = \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_{n_j} x_{n_j}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\|S(y_n)\| &= \left\| \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_{n_j} S(x_{n_j}) \right\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_{n_j} \|S(x_{n_j})\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_{n_j} M = M.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|S(y)\| = \lim_{n\to\infty} \|S(y_n)\| \leq M.$$

Portanto,

$$\sup\{\|S(y)\| \colon y \in K\} = M.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|S\| &= \|S \circ P_E\| \\
&= \sup\{\|(S \circ P_E)(x)\| \colon x \in B_E\} \\
&= \sup\{\|S(y)\| \colon y = P_E(x),\ x \in B_E\} \\
&= \sup\{\|S(y)\| \colon y \in B_{P_E(\ell_\infty^n)}\} \\
&= M \\
&= \sup\{\|S(y)\| \colon y \in \mathrm{Ext}(B_{P_E(\ell_\infty^n)})\} \\
&= \|S(z)\|
\end{aligned}$$

para algum $z \in \mathrm{Ext}(B_{P_E(\ell_\infty^n)})$, pois $\mathrm{Ext}(B_{P_E(\ell_\infty^n)})$ é limitado e fechado (compacto) e $\|S(\cdot)\|$ é uma função contínua. Já que

$$\|S(e)\| < \|S(e_0)\|$$

para todo $e \in \mathrm{Ext}(B_{P_E(\ell_\infty^n)})$ com $|x_0^*(e)| \leq 1 - \tau$, segue que $|x_0^*(z)| > 1 - \tau$, ou seja,

$$1 - |x_0^*(z)| < \tau.$$

Tomando $\lambda = \dfrac{|x_0^*(z)|}{x_0^*(z)}$, temos que $|\lambda| = 1$, e daí

$$|\lambda z(i)| = |z(i)| = 1,\ \forall i \in E.$$

Donde segue que $\lambda z \in \operatorname{Ext} B_{P_E(\ell_\infty^n)}$. Como $1 - |x_0^*(z)| < \tau$, temos

$$\begin{aligned}|1 - x_0^*(\lambda z)| &= |1 - \lambda x_0^*(z)| \\ &= \left|1 - \frac{|x_0^*(z)|}{x_0^*(z)} x_0^*(z)\right| \\ &= 1 - |x_0^*(z)| < \tau,\end{aligned}$$

uma vez que $|x_0^*(z)| \leq \|x_0^*\| \|z\| \leq 1$. Daí, pela afirmação obtemos

$$\|\lambda z - e_0\| < \epsilon^{\frac{1}{4}}.$$

Já que $\|S(\lambda z)\| = \|\lambda S(z)\| = \|S(z)\| = \|S\|$, segue que S atinge sua norma em λz. Portanto, S também atinge sua norma em $z_0 = \lambda z + (I - P_E)(x_0) \in B_{\ell_\infty^n}$ e por (3.21) temos

$$\begin{aligned}\|z_0 - x_0\| &= \|\lambda z + (I - P_E)(x_0) - x_0\| \\ &= \|\lambda z + x_0 - P_E(x_0) - x_0\| \\ &= \|\lambda z - P_E(x_0)\| \\ &\leq \|\lambda z - e_0\| + \|e_0 - P_E(x_0)\| \\ &< \epsilon^{\frac{1}{4}} + \epsilon^{\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

Segue da definição de S e por (3.22) que

$$\begin{aligned}1 - \left(\epsilon + \frac{\epsilon'}{\epsilon^{\frac{1}{3}}}\right) + 3n(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}}) &\leq \|S\| \\ &\leq 1 + 3n(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}}),\end{aligned}$$

e tomando $V := \dfrac{S}{\|S\|}$ obtemos que

$$\begin{aligned}\|T - V\| &= \|T - S + S - V\| \\ &\leq \|T - S\| + \|S - V\| \\ &= \|T - S + TP_E - TP_E\| + \left\|S - \frac{S}{\|S\|}\right\| \\ &\leq \|T(I - P_E)\| + \|TP_E - S\| + \left\|\frac{(|S| - 1)S}{\|S\|}\right\| \\ &= \|T(I - P_E)\| + \|TP_E - S\| + |\|S\| - 1| \\ &\overset{(3.20)}{\leq} \epsilon + \left\|TP_E - TP_E + 3n(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}}) x_0^* \circ P_E \frac{T(e_0)}{\|T(e_0)\|}\right\| + |\|S\| - 1| \\ &= \epsilon + 3n(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}}) \left\|x_0^* \circ P_E \frac{T(e_0)}{\|T(e_0)\|}\right\| + |\|S\| - 1| \\ &\leq \epsilon + 3n(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}}) \|x_0^*\| \frac{\|T(e_0)\|}{\|T(e_0)\|} + |\|S\| - 1| \\ &\leq \epsilon + 3n(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}}) + \max\left\{\epsilon' + \frac{\epsilon'}{\epsilon^{\frac{1}{3}}}, 3n(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}})\right\} \\ &\leq \epsilon + 3n(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}}) + \left(\epsilon' + \frac{\epsilon'}{\epsilon^{\frac{1}{3}}}\right) + 3n(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}}) \\ &= \epsilon + 6n(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}}) + \left(\epsilon' + \frac{\epsilon'}{\epsilon^{\frac{1}{3}}}\right),\end{aligned}$$

o que completa a prova para o caso em que $x_0(i) = Re\ x_0(i) \geq 0$ para todo $i \leq n$.

Caso não tenhamos que $x_0(i) = Re\ x_0(i) \geq 0$ para todo $i \leq n$, temos que para cada $i \leq n$, existe $\theta_i \in [0, 2\pi)$ tal que $x_0(i) = |x_0(i)|e^{i\theta_i}$. Defina

$$\begin{aligned} R_i \colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto ze^{-i\theta_i}. \end{aligned}$$

Note que R_i é isometria linear para todo $i \leq n$. Agora, considere

$$\begin{aligned} \varphi \colon \ell_\infty^n &\to \ell_\infty^n \\ (x_i)_{i=1}^n &\mapsto (R_i(x_i))_{i=1}^n. \end{aligned}$$

Como os R_n's são isometrias lineares, então φ é isometria linear. Seja $V \colon \ell_\infty^n \to Y$ dado por

$$V = T \circ \varphi^{-1}.$$

Assim $V \in \mathcal{L}(\ell_\infty^n, Y)$. Além disso,

$$\|V\| = \|T \circ \varphi^{-1}\| \leq \|T\|\|\varphi^{-1}\| = 1.$$

Dado $\delta > 0$, como $\|T\| = 1$, existe $x \in S_{\ell_\infty^n}$ tal que $\|Tx\| > 1 - \delta$. Já que φ é isometria, existe $y \in S_{\ell_\infty^n}$ tal que $y = \varphi(x)$. Então

$$\|V(y)\| = \|T(\varphi^{-1}(y))\| = \|T(\varphi^{-1}(\varphi(x)))\| = \|T(x)\| > 1 - \delta.$$

Logo, $\|V\| = 1$. Tome $y_0 = \varphi(x_0) \in S_{\ell_\infty^n}$. Note que

$$y_0(i) = R_i(x_0(i)) = x_0(i)e^{-i\theta_i} = |x_0(i)|e^{i\theta_i}e^{-i\theta_i} = |x_0(i)|.$$

Daí, $y_0(i) \in \mathbb{R}^+$, ou seja, $y_0(i) = Re\ x_0(i) \geq 0$, para todo $i \leq n$. Por outro lado,

$$\|Vx_0\| = \|(T \circ \varphi^{-1})(y_0)\| = \|T(x_0)\| > 1 - \eta(\epsilon)$$

Pelo que já foi provado, existem $w_0 \in S_{\ell_\infty^n}$ e $S \in S_{\mathcal{L}(\ell_\infty^n, Y)}$ tais que

$$\|V - S\| \leq \epsilon + 6n\left(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}}\right) + \left(\epsilon' + \frac{\epsilon'}{\epsilon^{\frac{1}{3}}}\right), \ \|y_0 - w_0\| < \epsilon^{\frac{1}{4}} + \epsilon^{\frac{1}{3}}, \ \|Sw_0\| = 1.$$

Daí, $S \circ \varphi \in S_{\mathcal{L}(\ell_\infty^n, Y)}$ é tal que

$$\begin{aligned} \|T - S \circ \varphi\| &= \|V \circ \varphi - S \circ \varphi\| \\ &= \|(V - S) \circ \varphi\| \\ &\leq \|V - S\|\|\varphi\| \\ &= \|V - S\| \leq \epsilon + 6n\left(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{6}}\right) + \left(\epsilon' + \frac{\epsilon'}{\epsilon^{\frac{1}{3}}}\right), \end{aligned}$$

$z_0 = \varphi^{-1}(w_0) \in S_{\ell_\infty^n}$ é tal que

$$\begin{aligned} \|x_0 - z_0\| &= \|\varphi(x_0) - \varphi(z_0)\| \\ &= \|\varphi(\varphi^{-1}(y_0)) - \varphi(\varphi^{-1}(w_0))\| \\ &< \epsilon^{\frac{1}{4}} + \epsilon^{\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

e

$$\|(S \circ \varphi)(z_0)\| = \|S(w_0)\| = 1,$$

o que completa a prova. $\square$

3.5 Operadores com contradomínio estritamente convexo

Vimos nas seções anteriores que o Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás não é valido para todos espaços de Banach X e Y. No mesmo artigo [11] em que apresentou um exemplo de um espaço X tal que o conjunto de operadores lineares em X que atingem a norma não é denso no espaço $\mathcal{L}(X,X)$, Lindenstrauss provou que o subconjunto dos operadores $T\colon X\to Y$ entre espaços de Banach X e Y tais que os seus segundos adjuntos atingem suas normas é denso em $\mathcal{L}(X^{**},Y^{**})$. Esse fato nos faz levantar a seguinte pergunta:

Existe uma função $\gamma:\mathbb{R}^+\to(0,1)$, com $\lim\limits_{t\to 0}\gamma(t)=0$, tal que para todos $T\in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ e $x_0\in S_X$ com $\|Tx_0\|>1-\gamma(\epsilon)$, existem $S\in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ e $x_0^{**}\in S_{X^{**}}$ satisfazendo

$$\|S^{tt}x_0^{**}\|=1,\quad \|S-T\|<\epsilon,\quad \|x_0^{**}-x_0\|<\epsilon?$$

A resposta para essa pergunta é negativa em geral. Usaremos a ideia de Lindenstrauss para mostrar um resultado sobre espaços estritamente convexos. Esta seção teve como base o artigo [1].

Lema 3.29. *Seja Y um espaço de Banach estritamente convexa.*

(a) Seja $T:\ell_\infty\to Y$ um operador tal que $T(e_n)\neq 0$ para todo n. Se T atinge sua norma em um ponto $z\in B_{\ell_\infty}$, então $|z(n)|=1$, para todo $n\in\mathbb{N}$.

(b) Se $T:c_0\to Y$ é um operador que atinge sua norma, então T é um operador de posto finito.

Demonstração. (a) Suponha que exista um ponto $z\in S_{\ell_\infty}$ no qual T atinge sua norma. Se assumirmos que existe n tal que $|z(n)|<1$, teremos

$$\begin{aligned}|z(n)\pm(1-|z(n)|)| &\leq |z(n)|+|1-|z(n)||\\ &= |z(n)|+1-|z(n)|=1,\end{aligned}$$

então $\|z\pm(1-|z(n)|)e_n\|\leq 1$. Assim,

$$\begin{aligned}2\|T\| &= 2\|T(z)\|\\ &= \|T(2z)\|\\ &= \|T(z+(1-|z(n)|)e_n+z-(1-|z(n)|)e_n)\|\\ &\leq \|T(z+(1-|z(n)|)e_n)\|+\|T(z-(1-|z(n)|)e_n)\|\\ &\leq 2\|T\|,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|T(z)\|=\|T(z\pm(1-|z(n)|)e_n)\|.$$

Como Y é estritamente convexa, obtemos que

$$T(z)=T(z\pm(1-|z(n)|)e_n).$$

Logo, $T(e_n)=0$, o que é uma contradição.

(b) Seja $z\in S_{c_0}$tal que T atinge sua norma em z. Como $z(n)\to 0$, então existe um n_0 com $|z(n)|<1$ para todos $n\geq n_0$. Segue de $c_0\subset\ell_\infty$ e do mesmo argumento utilizado na demostração do item (a), que $T(e_n)=0$ para todos $n\geq n_0$. Logo, T é um operador de posto finito. $\square$

Proposição 3.30. *Seja $T_0 : c_0 \to Y$ um isomorfismo. Suponha que Y^{**} é estritamente convexa e $T \in \mathcal{L}(c_0, Y)$ é tal que*

$$\|T - T_0\| < \inf_n \{\|T_0(e_n)\|\}.$$

Então

$$\{y \in B_{\ell_\infty} : \|T^{tt}(y)\| = \|T\|\} \subset \{y \in B_{\ell_\infty} : |y(n)| = 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Demonstração. Sabemos que

$$\begin{aligned} T_0^{tt}(e_n)(\varphi) &= (e_n \circ T_0^t)(\varphi) \\ &= e_n(T_0^t(\varphi)) \\ &= (T_0^t(\varphi))(e_n) \\ &= \varphi(T_0(e_n)). \end{aligned}$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned} \|T_0^{tt}(e_n)\| &= \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|T_0^{tt}(e_n)(\varphi)\| \\ &= \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|\varphi(T_0(e_n))\| \\ &= \|T_0(e_n)\|. \end{aligned}$$

Suponha que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|T^{tt}(e_n)\| = 0$, então

$$\begin{aligned} \|T - T_0\| &= \|T^{tt} - T_0^{tt}\| \\ &\geq \|(T^{tt} - T_0^{tt})(e_n)\| \\ &= \|T_0^{tt}(e_n)\| \\ &= \|T_0(e_n)\|, \end{aligned}$$

o que é uma contradição, pois $\|T - T_0\| < \inf_n \{\|T_0(e_n)\}$. Logo, $T^{tt}(e_n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, segue do Lema 3.29 que se T^{tt} atinge sua norma em um ponto $z \in B_{\ell_\infty}$, então $|z(n)| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\{y \in B_{\ell_\infty} : \|T^{tt}(y)\| = \|T\|\} \subset \{y \in B_{\ell_\infty} : |y(n)| = 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

□

O exemplo a seguir mostra a existência de um operador que dá uma resposta negativa a pergunta que fizemos.

Exemplo 3.31. *Sejam Y um espaço de Banach isomorfo a c_0 tal que Y^{**} é estritamente convexa e $T_0 = I$, o operador identidade. Então, dado $T \in \mathcal{L}(c_0, Y)$ tal que $\|T - I\| < \inf_n \|e_n\|_Y$, segue da Proposição 3.30 que para todo $z \in B_{\ell_\infty}$ com $\|T^{tt}(z)\| = \|T\|$ tem-se $|z(n)| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí,*

$$dist(z, B_{c_0}) = 1.$$

De fato,

$$dist(z, B_{c_0}) \leq \|z - 0\| = \|z\| \leq 1.$$

Suponha que $dist(z, B_{c_0}) < 1$ e tome $\epsilon = 1 - dist(z, B_{c_0}) > 0$. Então existe $x \in B_{c_0}$ tal que

$$\|z - x\| \leq 1 - \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$1 - \frac{\epsilon}{2} \geq |z(n) - x(n)| \geq |z(n)| - |x(n)| = 1 - |x(n)|,$$

que implica

$$|x(n)| \geq \frac{\epsilon}{2},$$

o que é uma contradição, pois $x \in c_0$.

3.6 Convexidade uniforme e a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores

Veremos nesta seção que se um espaço X é uniformemente convexo então o par (X, Y) tem a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores para qualquer espaço de Banach Y, ou seja, X é um espaço domínio BPB universal. Esta seção tem como base o artigo [10].

Teorema 3.32. *Sejam $0 < \epsilon < 1$ e $\delta(\epsilon) > 0$ o módulo de convexidade de um espaço de Banach X uniformemente convexo. Então, o par (X, Y) tem a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores para qualquer espaço de Banach Y. Mais precisamente, se $T \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ e $x \in S_X$ satisfazem*

$$\|Tx\| > 1 - \frac{\epsilon}{2^5}\delta\left(\frac{\epsilon}{2}\right),$$

então existem $S \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ e $x_0 \in S_X$ tais que $\|Sx_0\| = 1$, $\|S - T\| < \epsilon$ e $\|x - x_0\| < \epsilon$.

Demonstração. Sejam $T \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ e $x \in S_X$ satisfazendo

$$\|Tx\| > 1 - \frac{\epsilon}{2^5}\delta\left(\frac{\epsilon}{2}\right).$$

Segue como consequência do Teorema 1.58 (Teorema de Hahn-Banach) que existe $f \in S_{Y^*}$ satisfazendo

$$f(Tx) = \|Tx\|,$$

ou seja,

$$Re\ f(Tx) > 1 - \frac{\epsilon}{2^5}\delta\left(\frac{\epsilon}{2}\right).$$

Defina uma sequência $(x_i, f_i, T_i)_{i=1}^{\infty} \subset S_X \times S_{Y^*} \times S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ indutivamente. Primeiro, defina $(x_1, f_1, T_1) = (x, f, T)$. Quando o k-ésimo termo for construído, defina

$$\widetilde{T}_{k+1}x = T_k x + \frac{\epsilon}{2^{k+2}} f_k(T_k x) T_k x_k, \quad T_{k+1} = \frac{\widetilde{T}_{k+1}}{\|\widetilde{T}_{k+1}\|},$$

e escolha $x_{k+1} \in S_X$ e $f_{k+1} \in S_{Y^*}$ satisfazendo

$$\begin{aligned} Re\ f_{k+1}(\widetilde{T}_{k+1}x_{k+1}) &> \|\widetilde{T}_{k+1}\| - \frac{\epsilon}{2^{k+5}}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k+1}}\right) \\ Re\ f_k(\widetilde{T}_k x_{k+1}) &= |f_k(\widetilde{T}_k x_{k+1})|. \end{aligned}$$

Mostremos que podemos escolher $x_{k+1} \in S_X$ e $f_{k+1} \in S_{Y*}$ satisfazendo as condições desejadas.

Como

$$\|\widetilde{T}_{k+1}\| = \sup_{\|x\|=1} \|\widetilde{T}_{k+1}x\|,$$

então existe $\widetilde{x}_{k+1} \in S_X$ tal que

$$\|\widetilde{T}_{k+1}\widetilde{x}_{k+1}\| > \|\widetilde{T}_{k+1}\| - \frac{\epsilon}{2^{k+5}}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k+1}}\right).$$

Se $f_k(\widetilde{T}_k\widetilde{x}_{k+1}) \neq 0$, tome $\lambda = \dfrac{|f_k(\widetilde{T}_k\widetilde{x}_{k+1})|}{f_k(\widetilde{T}_k\widetilde{x}_{k+1})}$, e se $f_k(\widetilde{T}_k\widetilde{x}_{k+1}) = 0$, tome $\lambda = 1$. Defina $x_{k+1} = \lambda\widetilde{x}_{k+1} \in S_X$. Então

$$\|\widetilde{T}_{k+1}x_{k+1}\| > \|\widetilde{T}_{k+1}\| - \frac{\epsilon}{2^{k+5}}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k+1}}\right)$$

e

$$\begin{aligned} Re\ f_k(\widetilde{T}_k x_{k+1}) &= Re\ f_k(\widetilde{T}_k(\lambda\widetilde{x}_{k+1})) \\ &= |f_k(\widetilde{T}_k(\widetilde{x}_{k+1}))| \\ &= |f_k(\widetilde{T}_k(x_{k+1}))|. \end{aligned}$$

Segue de uma consequência do Teorema 1.58 (Teorema de Hahn-Banach) que existe $f_{k+1} \in S_{Y^*}$ tal que

$$f_{k+1}(\widetilde{T}_{k+1}x_{k+1}) = \|\widetilde{T}_{k+1}x_{k+1}\|,$$

ou seja,

$$Re\ f_{k+1}(\widetilde{T}_{k+1}x_{k+1}) > \|\widetilde{T}_{k+1}\| - \frac{\epsilon}{2^{k+5}}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k+1}}\right).$$

Já que

$$\widetilde{T}_{k+1}x = T_k x - \left(-\frac{\epsilon}{2^{k+2}}f_k(T_k x)T_k x_k\right),$$

temos

$$\begin{aligned} \|\widetilde{T}_{k+1}(x)\| &= \left\|T_k x - \left(-\frac{\epsilon}{2^{k+2}}f_k(T_k x)T_k x_k\right)\right\| \\ &\geq \|T_k x\| - \left\|\left(-\frac{\epsilon}{2^{k+2}}f_k(T_k x)T_k x_k\right)\right\| \\ &= \|T_k x\| - \frac{\epsilon}{2^{k+2}}\|f_k(T_k x)T_k x_k\|. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \|f_k(T_k x)T_k x_k\| &\leq \|f_k\|\|T_k x\|\|T_k\|\|x_k\| \\ &= \|T_k x\|. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Assim,

$$-\|f_k(T_kx)T_kx_k\| \geq -\|T_kx\|.$$

Segue de (3.23) que

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{T}_{k+1}(x)\| &\geq \|T_kx\| - \frac{\epsilon}{2^{k+2}}\|f_k(T_kx)T_kx_k\| \\
&\geq \|T_kx\| - \frac{\epsilon}{2^{k+2}}\|T_kx\| \\
&= \|T_kx\| \left(1 - \frac{\epsilon}{2^{k+2}}\right).
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{T}_{k+1}\| &= \sup_{\|x\|=1} \|\widetilde{T}_{k+1}x\| \\
&\geq \sup_{\|x\|=1} \|T_kx\| \left(1 - \frac{\epsilon}{2^{k+2}}\right) \\
&= \|T_k\| \left(1 - \frac{\epsilon}{2^{k+2}}\right) \\
&= 1 - \frac{\epsilon}{2^{k+2}} \\
&> 1 - \frac{1}{2^{k+2}} \\
&> 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

Então,

$$\frac{1}{\left\|\widetilde{T}_{k+1}\right\|} < 2 \Longrightarrow \quad -\frac{1}{\left\|\widetilde{T}_{k+1}\right\|} > -2,$$

que implica

$$-\frac{\epsilon}{2^{k+5}}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k+1}}\right)\frac{1}{\left\|\widetilde{T}_{k+1}\right\|} > -2\frac{\epsilon}{2^{k+5}}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k+1}}\right) = -\frac{\epsilon}{2^{k+4}}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k+1}}\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
Re\ f_{k+1}(T_{k+1}x_{k+1}) &= Re\ f_{k+1}\left(\frac{\widetilde{T}_{k+1}x_{k+1}}{\left\|\widetilde{T}_{k+1}\right\|}\right) \\
&= \frac{Re\ f_{k+1}\left(\widetilde{T}_{k+1}x_{k+1}\right)}{\left\|\widetilde{T}_{k+1}\right\|} \\
&> \frac{\|\widetilde{T}_{k+1}\| - \frac{\epsilon}{2^{k+5}}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k+1}}\right)}{\left\|\widetilde{T}_{k+1}\right\|} \\
&= 1 - \frac{\frac{\epsilon}{2^{k+5}}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k+1}}\right)}{\left\|\widetilde{T}_{k+1}\right\|} \\
&> \|T_{k+1}\| - \frac{\epsilon}{2^{k+4}}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k+1}}\right).
\end{aligned}$$

Além disso, por (3.24) temos

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{T}_{k+1}x\| &= \left\|T_kx + \frac{\epsilon}{2^{k+2}}f_k(T_kx)T_kx_k\right\| \\
&\leq \|T_kx\| + \frac{\epsilon}{2^{k+2}}\|f_k(T_kx)T_kx_k\| \\
&\leq \|T_kx\| + \frac{\epsilon}{2^{k+2}}\|T_kx\| \\
&= \left(1 + \frac{\epsilon}{2^{k+2}}\right)\|T_kx\| \\
&\leq \left(1 + \frac{\epsilon}{2^{k+2}}\right)\|x\|,
\end{aligned}$$

donde segue

$$\|\widetilde{T}_{k+1}\| \leq 1 + \frac{\epsilon}{2^{k+2}}. \tag{3.26}$$

Por (3.25) e (3.26), temos

$$\begin{aligned}
&1 - \frac{\epsilon}{2^{k+2}} \leq \left\|\widetilde{T}_{k+1}\right\| \leq 1 + \frac{\epsilon}{2^{k+2}} \\
\Longrightarrow \quad &\left|1 - \left\|\widetilde{T}_{k+1}\right\|\right| < \frac{\epsilon}{2^{k+2}}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|T_k - T_{k+1}\| &= \left\|T_k - \widetilde{T}_{k+1} + \widetilde{T}_{k+1} - T_{k+1}\right\| \\
&\leq \left\|T_k - \widetilde{T}_{k+1}\right\| + \left\|\widetilde{T}_{k+1} - T_{k+1}\right\| \\
&= \left\|T_k - \left(T_k + \frac{\epsilon}{2^{k+2}}(f_k \circ T_k)T_kx_k\right)\right\| + \left\|\frac{\left(\left\|\widetilde{T}_{k+1}\right\| - 1\right)\widetilde{T}_{k+1}}{\left\|\widetilde{T}_{k+1}\right\|}\right\| \\
&= \frac{\epsilon}{2^{k+2}}\|(f_k \circ T_k)T_kx_k\| + \left|\left\|\widetilde{T}_{k+1}\right\| - 1\right| \\
&< 2\frac{\epsilon}{2^{k+2}} = \frac{\epsilon}{2^{k+1}},
\end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, o que mostra que $(T_k)_{k=1}^{\infty}$ é um sequência de Cauchy. Como $\mathcal{L}(X, Y)$ é um espaço de Banach, então $(T_k)_{k=1}^{\infty}$ converge para algum $T_\infty \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ e

$$\begin{aligned}
\|T - T_\infty\| &= \|T - \lim_{k\to\infty} T_k\| \\
&= \lim_{k\to\infty} \|T - T_k\| \\
&\leq \lim_{k\to\infty} (\|T_1 - T_2\| + \cdots + \|T_{k-1} - T_k\|) \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \|T_{k-1} - T_k\| \\
&< \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \frac{\frac{\epsilon}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Agora, mostremos que a sequência $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy. Para isso precisamos verificar que:

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{T}_k\right\| - \frac{\epsilon}{2^{k+4}}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^k}\right) &< \left|f_k\left(\widetilde{T}_k x_k\right)\right| \\
&= \left|f_k\left(T_{k-1}x_k\right) + \frac{\epsilon}{2^{k+1}} f_{k-1}(T_{k-1}x_k) f_k(T_{k-1}x_{k-1})\right| \\
&\leq |f_k(T_{k-1}x_k)| + \frac{\epsilon}{2^{k+1}}|f_{k-1}(T_{k-1}x_k)|\ |f_k(T_{k-1}x_{k-1})| \\
&\leq |f_k(T_{k-1}x_k)| + \frac{\epsilon}{2^{k+1}}|f_{k-1}(T_{k-1}x_k)| \\
&\leq \|T_{k-1}\| + \frac{\epsilon}{2^{k+1}} Re\ f_{k-1}(T_{k-1}x_k)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{T}_k\right\| &\geq \left|f_{k-1}\left(\widetilde{T}_k x_{k-1}\right)\right| \\
&= \left|f_{k-1}(T_{k-1}x_{k-1}) + \frac{\epsilon}{2^{k+1}} f_{k-1}(T_{k-1}x_{k-1}) f_{k-1}(T_{k-1}x_{k-1})\right| \\
&= \left|\left(1 + \frac{\epsilon}{2^{k+1}} f_{k-1}(T_{k-1}x_{k-1})\right) f_{k-1}(T_{k-1}x_{k-1})\right| \\
&= \left(1 + \frac{\epsilon}{2^{k+1}} Re\ f_{k-1}(T_{k-1}x_{k-1})\right)\ Re\ f_{k-1}(T_{k-1}x_{k-1}) \\
&\geq \|T_{k-1}\| - \frac{\epsilon}{2^{k+2}}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k-1}}\right) + \frac{\epsilon}{2^{k+1}}\left(\|T_{k-1}\| - \frac{\epsilon}{2^{k+2}}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k-1}}\right)\right)^2.
\end{aligned}$$

Daí, temos que

$$\frac{\epsilon}{2^{k+1}} Re\ f_{k-1}(T_{k-1}x_k) > \frac{\epsilon}{2^{k+1}}\left(\|T_{k-1}\| - \frac{\epsilon}{2^{k+2}}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k-1}}\right)\right)^2 - \frac{\epsilon}{2^{k+2}}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k-1}}\right) - \frac{\epsilon}{2^{k+4}}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^k}\right),$$

então,

$$\begin{aligned}
Re\ f_{k-1}(T_{k-1}x_k) &> \frac{\frac{\epsilon}{2^{k+1}}\left(\|T_{k-1}\| - \frac{\epsilon}{2^{k+2}}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k-1}}\right)\right)^2 - \frac{\epsilon}{2^{k+2}}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k-1}}\right) - \frac{\epsilon}{2^{k+4}}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^k}\right)}{\frac{\epsilon}{2^{k+1}}} \\
&= \left(\|T_{k-1}\| - \frac{\epsilon}{2^{k+2}}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k-1}}\right)\right)^2 - \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k-1}}\right) - \frac{1}{2^3}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^k}\right).
\end{aligned}$$

Portanto, segue da monotonicidade do módulo de convexidade que

$$\begin{aligned}
Re\ f_{k-1}(T_{k-1}x_k) &> \left(\|T_{k-1}\| - \frac{\epsilon}{2^{k+2}}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k-1}}\right)\right)^2 - \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k-1}}\right) - \frac{1}{2^3}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^k}\right) \\
&= 1 - \frac{\epsilon}{2^{k+1}}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k-1}}\right) + \left(\frac{\epsilon}{2^{k+2}}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k-1}}\right)\right)^2 - \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k-1}}\right) - \frac{1}{2^3}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^k}\right) \\
&\geq 1 - \frac{\epsilon}{2^{k+1}}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k-1}}\right) - \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k-1}}\right) - \frac{1}{2^3}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^k}\right) \\
&\geq 1 - \frac{\epsilon}{2^{k+1}}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k-1}}\right) - \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k-1}}\right) - \frac{1}{2^3}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k-1}}\right) \\
&= 1 - \delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k-1}}\right)\left(\frac{\epsilon}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}\right) \\
&\leq 1 - \delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k-1}}\right),
\end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}
\frac{\epsilon}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} &< \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} \\
&< \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right\| &\geq Re\ f_{k-1}\left(T_{k-1}\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)\right)\\ &> 1-\frac{\epsilon}{2^{k+3}}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k-1}}\right)-\frac{1}{2}\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k-1}}\right)\\ &\geq 1-\delta\left(\frac{\epsilon}{2^{k-1}}\right).\end{aligned}$$

Segue de X ser uniformemente convexo que

$$\|x_{k-1}-x_k\| < \frac{\epsilon}{2^{k-1}},$$

o que mostra que a sequência $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ é de Cauchy.

Como X é um espaço de Banach e S_X é fechado em X, então a sequência $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ converge para algum $x_\infty \in S_X$ e

$$\begin{aligned}\|x-x_\infty\| &= \|x-\lim_{k\to\infty} x_k\|\\ &= \lim_{k\to\infty}\|x-x_k\|\\ &\leq \lim_{k\to\infty}(\|x_1-x_2\|+\cdots+\|x_{k-1}-x_k\|)\\ &= \sum_{k=2}^{\infty}\|x_{k-1}-x_k\|\\ &< \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\epsilon}{2^{k-1}} = \frac{\frac{\epsilon}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \epsilon.\end{aligned}$$

Segue do fato de que $\lim\limits_{k\to\infty}\|T_k x_k\| = 1$ e que T_k e x_k convergem em norma, que $\|T_\infty x_\infty\| = 1$.

$\square$

Sabemos que o Teorema 3.6 implica que para espaços de Banach X e Y tais que Y tem a propriedade β de Lindenstrauss com $0 \leq \rho < 1$, para dado $\epsilon > 0$, se $T \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ e $x \in S_X$ satisfazem $\|T(x)\| > 1-\dfrac{\epsilon^2}{4}$, então para cada número real η tal que $\eta > \dfrac{\rho}{(1-\rho)(\epsilon+\epsilon^2/4)}$, existem $S \in \mathcal{L}(X,Y),\ z \in S_X$ tais que

$$\|Sz\| = \|S\|,\quad \|z-x\| < \epsilon,\quad \|S-T\| < \eta+\epsilon+\frac{\epsilon^2}{4}.$$

Isso significa que o par (X,Y) tem a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores quando Y tem a propriedade β. Além disso, sabemos da Definição 3.1 da propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores que as funções $\eta(\epsilon)$ e $\beta(\epsilon)$ na definição não dependem do espaço de Banach X. No Teorema 3.32, podemos ver similarmente que as funções $\eta(\epsilon)$ e $\beta(\epsilon)$ não dependem do espaço de chegada Y.

Levando esses fatos em consideração podemos nos questionar se existem funções $\eta(\epsilon)$ e $\beta(\epsilon)$ que implicam na convexidade uniforme de X. Ao decorrer desta seção mostraremos que isso é verdade para um espaço de Banach real bidimensional.

Definição 3.33. *Sejam X um espaço de Banach e C um subconjunto convexo de X. Um ponto $x \in C$ é chamado de* ***ponto fortemente exposto*** *de C se houver $f \in X^*$ tal que*

(i) $f(y) < f(x)$ para $y \neq x$ em C;

(ii) se $f(x_n) \to f(x)$ e $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset C$ então $\|x_n - x\| \to 0$.

Lindenstrauss em seu artigo [11] mostrou o seguinte resultado para um espaço de Banach X tal que o conjunto de operadores que atingem a norma é denso em $\mathcal{L}(X, Y)$ para qualquer espaço de Banach Y:

(a) Se X é isomorfo a um espaço estritamente convexa, então S_X é o envoltório convexo fechado de seus pontos extremos.

(b) Se X é isomorfo a um espaço localmente uniformemente convexo, então S_X é o envoltório convexo fechado de seus pontos fortemente expostos.

No próximo teorema, vamos obter um resultado mais forte para X quando o par (X, Y) tem a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores com as funções $\eta(\epsilon)$ e $\beta(\epsilon)$ não dependendo do contradomínio Y. Antes de demonstrarmos o resultado iremos provar o seguinte lema que será útil para mostrar um dos itens do teorema.

Lema 3.34. *Sejam $a, b, c, d \geq 0$. Então*

$$ab + cd \leq (a^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} (b^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.27}$$

Além disso, se $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ então vale a igualdade em (3.27).

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} & ab + cd \leq (a^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} (b^2 + d^2)^{\frac{1}{2}} \\ \iff & (ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) \\ \iff & a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2 \leq a^2b^2 + a^2d^2 + c^2b^2 + c^2d^2 \\ \iff & 2abcd \leq a^2d^2 + c^2b^2 \\ \iff & a^2d^2 - 2abcd + c^2b^2 \geq 0 \\ \iff & (ad - cb)^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Como $(ad - cb)^2 \geq 0$, então

$$ab + cd \leq (a^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} (b^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Note que

$$\begin{aligned} & ab + cd = (a^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} (b^2 + d^2)^{\frac{1}{2}} \\ \iff & (ad - cb)^2 = 0 \\ \iff & ad - cb = 0 \\ \iff & ad = cb. \end{aligned}$$

Agora, se $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ é zero então $a = b = c = d = 0$ e se $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ é um número $k > 0$ então

$$\begin{aligned} ad = cd & \iff a^2d^2 = c^2b^2 \\ & \iff (k - c^2)d^2 = c^2(k - d^2) \\ & \iff kd^2 - c^2d^2 = kc^2 - c^2d^2 \\ & \iff c = d \\ & \iff a = b. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 3.35. *Seja X um espaço de Banach. Suponha que dado $\epsilon > 0$ existem funções a valores reais positivos $\eta(\epsilon)$ e $\beta(\epsilon)$ que convergem para 0 quando ϵ tende a 0 e satisfazem o seguinte.*

Para cada espaço de Banach Y se $\|Tx\| > 1 - \eta(\epsilon)$ para $T \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ e $x \in S_X$, existem $u \in S_X$ e $S \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ tais que $\|Su\| = 1$, $\|x - u\| < \beta(\epsilon)$ e $\|T - S\| < \epsilon$.

Então:

(i) se X é um espaço de Banach real, então não há face de S_X que contenha um subconjunto não vazio relativamente aberto de S_X;

(ii) se X é isomorfo a um espaço de Banach estritamente convexa, então o conjunto de todos os extremos pontos de B_X é denso em S_X;

(iii) se X é isomorfo a um espaço de Banach uniformemente convexo, então o conjunto de todos os pontos fortemente expostos de B_X é denso em S_X.

Demonstração. Para a prova de (i) é importante comentar que toda face de S_X está contida em uma face da forma $\{x \in S_X \colon x^*(x) = 1\}$ para algum $x^* \in S_X$. Suponha que existe $x^* \in S_{X^*}$ tal que a face $F(x^*) = \{x \in S_X : x^*(x) = 1\}$ contém um subconjunto U relativamente aberto não vazio de S_X. Como U é aberto em S_X, então para todo $x \in U$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B_X(x, \epsilon) \cap S_X \subset U$. Assim, podemos escolher $0 < \epsilon' < 1$ e pontos $x_0, y_0 \in U$ tais que $B_X(y_0, \epsilon') \cap S_X \subset U$, com $\|x_0 - y_0\| < \epsilon'$ e $x_0 \neq y_0$. Seja $p = x_0 - y_0$. Segue de uma consequência do Teorema 1.58 (Teorema de Hahn-Banach) que existe $y^* \in S_{X^*}$ tal que $y^*(p) = \|p\|$. Defina

$$y_n^* = \frac{x^* + \frac{1}{n}y^*}{\|x^* + \frac{1}{n}y^*\|}.$$

Então $(y_n^*)_{n=1}^{\infty}$ converge para x^*. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|y_n^* - x^*\| &= \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{x^* + \frac{1}{n}y^*}{\|x^* + \frac{1}{n}y^*\|} - x^* \right\| \\
&= \left\| \frac{x^* + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}y^*}{\|x^* + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}y^*\|} - x^* \right\| \\
&= \left\| \frac{x^*}{\|x^*\|} - x^* \right\| \\
&= \|x^* - x^*\| = 0.
\end{aligned}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina uma norma $|||\cdot|||_n$ em X por

$$|||x|||_n^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}|y_n^*(x)|^2.$$

Vejamos que $|||\cdot|||_n$ é equivalente a norma de X. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &\leq 2\|x\|^2 + 2|y_n^*(x)|^2 \\
&= 4\left(\frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}|y_n^*(x)|^2\right) \\
&\leq 4\left(\frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y_n^*\|^2\|x\|^2\right) \\
&= 4\left(\frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|x\|^2\right) \\
&= 4\|x\|^2,
\end{aligned}$$

para todo $x \in X$. Então

$$\|x\| \leq 2|||x|||_n \leq 2\|x\|$$

para todo $x \in X$.

Seja $X_n = (X, ||| \cdot |||_n)$. Dado $x \in S_X$, temos que $\dfrac{1}{|||x|||_n} x \in S_{X_n}$. Além disso, se $\alpha > 0$ é tal que $\alpha x \in S_{X_n}$, então $1 = |||\alpha x|||_n = \alpha|||x|||_n$, ou seja, $\alpha = \dfrac{1}{|||x|||_n}$. Assim, para cada $x \in S_X$, existe um único $t_x > 0$ tal que $t_x x \in S_{x_n}$, onde $t_x = \dfrac{1}{|||x|||_n}$. Defina $\phi\colon S_X \to S_{X_n}$ por $\phi(x) = \dfrac{x}{|||x|||_n}$ e $\psi\colon S_{X_n} \to S_X$ por $\psi(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$. Não é difícil ver que ϕ e ψ são contínuas e inversas uma da outra. Dessa forma, temos que ϕ é um homeomorfismo. Tome

$$U'_n = \{t_x x \in S_{X_n} : x \in U,\ t_x > 0\} = \phi(U).$$

Então U'_n é relativamente aberto em S_{X_n}.

Afirmação: Não há nenhum subconjunto convexo relativamente aberto não vazio $\widetilde{U}$ em S_{X_n} que esteja contido em U'_n.

Suponha que existe um conjunto convexo relativamente aberto não vazio $\widetilde{U}$ em S_{X_n} que está contido em U'_n. Escolha $x \in U$ e $t > 0$ tais que $x + tp \in U$ e $t_x x, t_{x+tp}(x + tp) \in \widetilde{U}$. Então, pela suposição

$$\left|\left|\left| \frac{t_x x + t_{x+tp}(x + tp)}{2} \right|\right|\right|_n = 1.$$

Temos que

$$|||t_x x|||_n^2 = \frac{1}{2}||t_x x\|^2 + \frac{1}{2}|y_n^*(t_x x)|^2 = 1,$$
$$|||t_{x+tp}(x + tp)|||_n^2 = \frac{1}{2}||t_{x+tp}(x + tp)\|^2 + \frac{1}{2}|y_n^*(t_{x+tp}(x + tp))|^2 = 1.$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
1 &= \left|\left|\left|\frac{t_x x + t_{x+tp}(x+tp)}{2}\right|\right|\right|_n^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \|t_x x + t_{x+tp}(x+tp)\|^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 |y_n^*(t_x x + t_{x+tp}(x+tp))|^2 \\
&= \frac{1}{8}\|t_x x + t_{x+tp}(x+tp)\|^2 + \frac{1}{8}|y_n^*(t_x x) + y_n^*(t_{x+tp}(x+tp))|^2 \\
&\le \frac{1}{8}\left(\|t_x x\| + \|t_{x+tp}(x+tp)\|\right)^2 + \frac{1}{8}\left(|y_n^*(t_x x)| + |y_n^*(t_{x+tp}(x+tp))|\right)^2 \\
&= \frac{1}{8}\big(\|t_x x\|^2 + 2\|t_x x\|\|t_{x+tp}(x+tp)\| + \|t_{x+tp}(x+tp)\|^2 + |y_n^*(t_x x)|^2 \\
&\quad +2|y_n^*(t_x x)||y_n^*(t_{x+tp}(x+tp))| + |y_n^*(t_{x+tp}(x+tp))|^2\big) \\
&= \frac{1}{8}\big(\big(\|t_x x\|^2 + |y_n^*(t_x x)|^2\big) + \big(\|t_{x+tp}(x+tp)\|^2 + |y_n^*(t_{x+tp}(x+tp))|^2\big) \\
&\quad +2\left(|y_n^*(t_x x)||y_n^*(t_{x+tp}(x+tp))| + \|t_x x\|\|t_{x+tp}(x+tp)\|\right)\big) \\
&= \frac{1}{8}\left(4 + 2\left(|y_n^*(t_x x)||y_n^*(t_{x+tp}(x+tp))| + \|t_x x\|\|t_{x+tp}(x+tp)\|\right)\right) \\
&\overset{(*)}{\le} \frac{1}{8}\left(4 + 2\left(|y_n^*(t_x x)|^2 + \|t_x x\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(|y_n^*(t_{x+tp}(x+tp))|^2 + \|t_{x+tp}(x+tp)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(4 + 4\left(\frac{1}{2}|y_n^*(t_x x)|^2 + \frac{1}{2}\|t_x x\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}|y_n^*(t_{x+tp}(x+tp))|^2 + \frac{1}{2}\|t_{x+tp}(x+tp)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{8}(4+4) = 1,
\end{aligned}
$$

onde em $(*)$ utilizamos o Lema 3.34. Segue do Lema 3.34 que

$$\|t_x x\| = \|t_{x+tp}(x+tp)\|$$

e

$$|y_n^*(t_x x)| = |y_n^*(t_{x+tp}(x+tp))|.$$

Em particular,

$$y_n^*(t_x x) = y_n^*(t_{x+tp}(x+tp)),$$

pois eles têm o mesmo sinal. Como $\|t_x x\| = \|t_{x+tp}(x+tp)\|$, temos que

$$t_x = t_x\|x\| = t_{x+tp}\|x+tp\| = t_{x+tp}.$$

Portanto, temos que

$$
\begin{aligned}
y_n^*(x) &= y_n^*(x+tp) \\
&= y_n^*(x) + t y_n^*(p),
\end{aligned}
$$

o que é uma contradição, pois $t > 0$ e $y_n^*(p) > 0$.

Agora, estamos prontos para provar que não existem funções reais positivas $\eta(\epsilon)$ e $\beta(\epsilon)$ satisfazendo a hipótese do Teorema 3.35.

Caso contrário, escolha ρ de modo que $0 < \rho < \dfrac{\epsilon'}{8}$, e $\beta(\rho) < \dfrac{\epsilon'}{4}$ e $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sqrt{\frac{1 + |y_N^*(y_0)|^2}{2}} > 1 - \eta(\rho).$$

A existência de $N \in \mathbb{N}$ é garantida pelo fato de que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1+|y_n^*(y_0)|^2}{2}} &= \sqrt{\frac{1+|\lim_{n\to\infty}\ y_n^*(y_0)|^2}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1+|x^*(y_0)|^2}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1+|1|^2}{2}} = 1.\end{aligned}$$

Considerando o operador identidade $I : X \to X_N$, temos

$$\begin{aligned}\|I\| &= \sup_{\|x\|=1} \{|||Ix|||_N\} \\ &= \sup_{\|x\|=1} \{|||x|||_N\} \\ &= \sup_{\|x\|=1} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}|y_N^*(x)|} \right\} \\ &= \sup_{\|x\|=1} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}|y_N^*(x)|^2} \right\} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\sup_{\|x\|=1} \{|y_N^*(x)|\} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\|y_N^*\|^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1.\end{aligned}$$

Portanto,

$$|||Iy_0|||_N = |||y_0|||_N = \sqrt{\frac{1}{2}\|y_0\|^2 + \frac{1}{2}|y_N^*(y_0)|^2} = \sqrt{\frac{1+|y_N^*(y_0)|^2}{2}} > 1 - \eta(\rho).$$

Por hipótese, existem $V \in S_{\mathcal{L}(X,X_N)}$ e $y_1 \in B_X\left(y_0, \frac{\epsilon'}{4}\right) \cap S_X \subset U$ tais que $\|V - I\| < \rho < \frac{\epsilon'}{8}$ e $|||Vy_1|||_N = 1$. Mostremos que V é um isomorfismo.

Sejam $x, y \in X$ tais que $x \neq y$. Suponha que $V(x) = V(y)$. Então $V(x-y) = 0$, o que implica que $V\left(\frac{x-y}{\|x-y\|}\right) = 0$. Daí,

$$\rho > \left|\left|\left|(V - I)\left(\frac{x-y}{\|x-y\|}\right)\right|\right|\right|_N = \left|\left|\left|\frac{x-y}{\|x-y\|}\right|\right|\right|_N \geq \frac{1}{2},$$

mas isso é uma contradição. Logo, $V(x) \neq V(y)$. Portanto, V é injetora. Agora, sejam $I' \colon X \to X$ o operador identidade e $V' \colon X \to X$ dado por

$$V'(x) = V(x).$$

Defina $T \colon X \to X$ por $T = I' - V'$. Note que $T \in \mathcal{L}(X, X)$. Além disso, para $x \in S_X$,

$$\begin{aligned}\|Tx\| &\leq 2|||Tx|||_N \\ &= 2|||I'x - V'x|||_N \\ &= 2|||x - Vx|||_N \\ &\leq 2\|I - V\| < 2\rho.\end{aligned}$$

Logo, $\|T\| \leq 2\rho < 1$. Então, segue da Proposição 1.70 que $(I' - T)$ tem inversa. Assim, $V' = I' - T$ tem inversa. Em particular, V' é sobrejetora. Como $V'(X) = V(X)$, segue que V é sobrejetora. Já que V é injetora e contínua, segue do Teorema 1.56 (Teorema da Aplicação Aberta) que V é um isomorfismo.

Vamos mostrar que U'_N contém um subconjunto convexo relativamente aberto não vazio em S_{X_N}, o que contradiz a afirmação.

Temos que Vy_1 é $t_u u$ para algum $u \in U$ e $t_u > 0$. De fato, podemos escrever Vy_1 em S_{X_N} de maneira única na forma $t_u u$ para $u \in S_X$ e $t_u = \dfrac{1}{|||u|||_N} > 0$. Do fato de que $\|x\| \leq 2|||x|||_N \leq 2\|x\|$, segue-se que

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{\|u\|} \\
&\leq \frac{1}{|||u|||_N} \\
&= t_u \\
&= \|t_u u\| \\
&= \|Vy_1\| \\
&\leq \|y_1\| + \|Vy_1 - y_1\| \\
&\leq \|y_1\| + 2|||Vy_1 - y_1|||_n \\
&< 1 + 2\rho < 1 + \frac{\epsilon'}{4},
\end{aligned}
$$

o que implica

$$
\begin{aligned}
\|u - y_1\| &= \|u - t_u u + t_u u - y_1\| \\
&\leq \|(1 - t_u)u\| + \|t_u u - y_1\| \\
&= |1 - t_u|\|u\| + \|(V - I)(y_1)\| \\
&< \frac{\epsilon'}{4} + \rho \\
&< \frac{\epsilon'}{4} + \frac{\epsilon'}{8} \\
&< \frac{\epsilon'}{4} + \frac{\epsilon'}{4} = \frac{\epsilon'}{2}.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\|u - y_0\| &= \|u - y_1 + y_1 - y_0\| \\
&\leq \|u - y_1\| + \|y_1 - y_0\| \\
&< \frac{\epsilon'}{2} + \frac{\epsilon'}{4} \\
&< \frac{\epsilon'}{2} + \frac{\epsilon'}{2} = \epsilon'.
\end{aligned}
$$

Daí, $u \in B_X(y_0, \epsilon') \cap S_X \subset U$ e $Vy_1 = t_u u \in U'_N$.

Escolha $0 < \delta < \dfrac{\epsilon'}{4}$ para que $B_{X_N}(Vy_1, \delta) \cap S_{X_N} \subset U'_N$, isso é possível pois U'_N é relativamente aberto em S_{X_N}. Temos que

$$
V(B_X(y_1, \delta) \cap S_X) = V(B_X(y_1, \delta) \cap F(x^*)) \subset B_{X_N}(Vy_1, \delta)
$$

e $V(B_X(y_1,\delta)\cap F(x^*))\subset S_{X_N}$. De fato, seja $x\in V(B_X(y_1,\delta)\cap S_X)$. Então existe um único $y\in B_X(y_1,\delta)\cap S_X$ tal que $x=V(y)$. Mostremos que $y\in F(x^*)$. Temos que

$$\|y-y_1\|<\delta.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}\|y_0-y\| &\leq \|y_0-y_1\|+\|y-y_1\|\\ &< \frac{\epsilon'}{4}+\delta\\ &< \frac{\epsilon'}{4}+\frac{\epsilon'}{4}\\ &= \frac{\epsilon'}{2}<\epsilon',\end{aligned}$$

o que mostra que $y\in U$, ou seja, $y\in F(x^*)$. Assim, $V(B_X(y_1,\delta)\cap S_X)\subset V(B_X(y_1,\delta)\cap F(x^*))$. Como $F(x^*)\subset S_X$, então $B_X(y_1,\delta)\cap F(x^*)\subset B_X(y_1,\delta)\cap S_X$. Logo, $V(B_X(y_1,\delta)\cap F(x^*))\subset V(B_X(y_1,\delta)\cap S_X)$. Portanto,

$$V(B_X(y_1,\delta)\cap S_X)=V(B_X(y_1,\delta)\cap F(x^*)).$$

Agora, dado $x\in V(B_X(y_1,\delta)\cap S_X)$, existe um único $y\in B_X(y_1,\delta)\cap S_X$ tal que $x=V(y)$. Daí,

$$\begin{aligned}\|Vy_1-x\| &= \|V(y_1-y)\|\\ &\leq \|V\|\|y_1-y\|\\ &= \|y_1-y\|<\delta.\end{aligned}$$

Resta mostrar que $V(B_X(y_1,\delta)\cap F(x^*))\subset S_{X_N}$. Suponha que existe $x\in V(B_X(y_1,\delta)\cap F(x^*))$ tal que $x\notin S_{X_N}$, então por V ser um isomorfismo existe um único ponto $y\in B_X(y_1,\delta)\cap S_X$ tal que $V(y)=x$. Note que $y\neq y_1$, pois $V(y)=x\notin S_{X_N}$ e $V(y_1)\in S_{X_N}$. Como y e y_1 estão contidos no subconjunto relativamente aberto $B_X(y_1,\delta)\cap S_X$ de $U\subset F(x^*)$, temos que existe um ponto $\widetilde{y}\in B_X(y_1,\delta)\cap F(x^*)$ tal que $y_1\in(y,\widetilde{y})$, ou seja, existe $\alpha\in(0,1)$ tal que $y_1=(1-\alpha)y+\alpha\widetilde{y}$. Daí,

$$\begin{aligned}|||Vy_1|||_N &= |||V((1-\alpha)y+\alpha\widetilde{y})|||_N\\ &\leq (1-\alpha)|||V(y)|||_N+\alpha|||V(\widetilde{y})|||_N\\ &\leq (1-\alpha)|||x|||_N+\alpha\|V\|\|(\widetilde{y})\|\\ &< 1-\alpha+\alpha=1\end{aligned}$$

o que é uma contradição, pois $|||Vy_1|||_N=1$. Logo, $V(B_X(y_1,\delta)\cap F(x^*))\subset S_{X_N}$.

Portanto, $V(B_X(y_1,\delta)\cap S_X)=V(B_X(y_1,\delta)\cap F(x^*))$ é um subconjunto convexo de U'_N, por ser a imagem por um isomorfismo do conjunto $B_X(y_1,\delta)\cap F(x^*)$ que é convexo por ser a interseção dos conjuntos convexos $B_X(y_1,\delta)$ e $F(x^*)$.

Além disso, temos que $V\left(B_X\left(y_1,\frac{\delta}{2}\right)\cap S_X\right)=V\left(B_X\left(y_1,\frac{\delta}{2}\right)\right)\cap S_{X_N}$, o que implica que S_{X_N} contém um subconjunto convexo relativamente aberto contido em U'_N. Vejamos que de fato $V\left(B_X\left(y_1,\frac{\delta}{2}\right)\cap S_X\right)=V\left(B_X\left(y_1,\frac{\delta}{2}\right)\right)\cap S_{X_N}$. Já verificamos que $|||Vx|||_N=1$ para qualquer $x\in B_X\left(y_1,\frac{\delta}{2}\right)\cap S_X$. Ainda se $x\in B_X\left(y_1,\frac{\delta}{2}\right)$ com $\|x\|<1$, então

$$|||Vx|||_N\leq\|V\|\|x\|=\|x\|<1.$$

E se $x' \in B_X\left(y_1, \frac{\delta}{2}\right)$ com $\|x'\| > 1$, podemos escrever $x' = \alpha x$ para $\alpha = \|x'\| > 1$ e $x = \dfrac{x'}{\|x'\|} \in S_X$. Daí, como

$$\|x'\| \leq \|x' - y_1\| + \|y_1\| < 1 + \frac{\delta}{2},$$

segue que

$$\begin{aligned}
\|x - y_1\| &\leq \|x - x'\| + \|x' - y_1\| \\
&= |1 - \|x'\|| + \frac{\delta}{2} \\
&= \|x'\| - 1 + \frac{\delta}{2} \\
&< 1 + \frac{\delta}{2} - 1 + \frac{\delta}{2} = \delta.
\end{aligned}$$

Então $x \in B_X(y_1, \delta) \cap S_X$. Portanto, $|||Vx|||_N = 1$ e obtemos que

$$|||Vx'|||_N = |||V(\alpha x)|||_N = \alpha |||Vx|||_N > 1.$$

Para a prova de (ii), suponha que existem $x_0 \in S_X$ e $\epsilon_0 > 0$ tais que o subconjunto $B_X(x_0, \epsilon_0) \cap S_X$ não contém nenhum ponto extremo de B_X. Segue da Proposição 1.80 que existe uma norma $||| \cdot |||$ em X com o qual o espaço de Banach $(X, ||| \cdot |||)$ é estritamente convexa e podemos supor que $|||x||| \leq \|x\|$ para todo $x \in X$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, defina a norma equivalente $\|x\|_n = (\|x\|^2 + \frac{1}{n}|||x|||^2)^{\frac{1}{2}}$ em X.

Vejamos que de fato as normas $\| \cdot \|$ e $\| \cdot \|_n$ são equivalentes. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\|x\|^2 \leq \|x\|^2 + \frac{1}{n}|||x|||^2 \leq \|x\|^2 + \frac{1}{n}\|x\|^2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\|x\|^2,$$

então

$$\|x\| \leq \|x\|_n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|.$$

Agora, mostremos que $(X, \| \cdot \|_n)$ é estritamente convexa. Sejam $x, y \in X$ satisfazendo

$$2\|x\|_n^2 + 2\|y\|_n^2 - \|x + y\|_n^2 = 0.$$

Por um lado, temos que

$$\begin{aligned}
2|||x|||^2 + 2|||y|||^2 - |||x + y|||^2 &\geq 2|||x|||^2 + 2|||y|||^2 - (|||x||| + |||y|||)^2 \\
&= 2|||x|||^2 + 2|||y|||^2 - |||x|||^2 - 2|||x|||\,|||y||| - |||y|||^2 \\
&= |||x|||^2 + |||y|||^2 - 2|||x|||\,|||y||| \\
&= (|||x||| - |||y|||)^2 \geq 0. \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
&2\|x\|_n^2 + 2\|y\|_n^2 - \|x + y\|_n^2 = 0 \\
\iff\ & 2\left(\|x\|^2 + \frac{1}{n}|||x|||^2\right) + 2\left(\|y\|^2 + \frac{1}{n}|||y|||^2\right) - \|x + y\|^2 - \frac{1}{n}|||x + y|||^2 = 0.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}(2|||x|||^2 + 2|||y|||^2 - |||x+y|||^2) &= -2\|x\|^2 - 2\|y\|^2 + \|x+y\|^2 \\ &\leq -2\|x\|^2 - 2\|y\|^2 + (\|x\| + \|y\|)^2 \\ &= -2\|x\|^2 - 2\|y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\ &= -(\|x\|^2 - 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2) \\ &= -(\|x\| - \|y\|)^2.\end{aligned}$$

Logo,

$$2|||x|||^2 + 2|||y|||^2 - |||x+y|||^2 \leq -n(\|x\| - \|y\|)^2 \leq 0 \tag{3.30}$$

Segue de (3.29) e (3.30) que

$$2|||x|||^2 + 2|||y|||^2 - |||x+y|||^2 = 0.$$

Como $(X, |||\cdot|||)$ é estritamente convexa, temos $x = y$ pela Proposição 1.77. Portanto, $(X, \|\cdot\|_n)$ é estritamente convexa, pela Proposição 1.77.

Escolha $0 < \rho < \dfrac{1}{4}$ satisfazendo $\beta(\rho) < \epsilon_0/2$ e $m \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{1+m}} > 1 - \eta(\rho).$$

A escolha de ρ e a existência $m \in \mathbb{N}$ satisfazendo as condições são garantidas pelo fato de que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n} + 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + 1}} = 1.\end{aligned}$$

Sejam $I : (X, \|\cdot\|) \to (X, \|\cdot\|_m)$ o operador identidade e $T = I/\|I\|$. Se $x \in S_X$ então

$$\|x\| \leq \|Ix\|_m \leq \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|, \tag{3.31}$$

o que mostra que $1 \leq \|I\| \leq (1 + 1/m)^{\frac{1}{2}}$. Assim,

$$\|Tx_0\|_m = \frac{\|x_0\|_m}{\|I\|} \geq \frac{\|x_0\|\sqrt{m}}{\sqrt{m+1}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m+1}} > 1 - \eta(\rho).$$

Portanto, por hipótese existem um operador $S : (X, \|\cdot\|) \to (X, \|\cdot\|_m)$ de norma um e $x_1 \in S_X$ tais que $\|x_0 - x_1\| < \beta(\rho) < \epsilon_0/2$, $\|Sx_1\|_m = 1$ e $\|S - T\| \leq \rho < \dfrac{1}{4}$. Daí, temos que $x_1 \in B_X(x_0, \epsilon_0) \cap S_X$, logo, x_1 não é um ponto extremo de B_X.

Tomemos $p \in X$ com $p \neq 0$ e $t_0 > 0$ tais que $x_1 + tp \in B_X$ para todo t real satisfazendo $|t| < t_0$. De fato, como x_1 não é ponto extremo, existem $\lambda \in (0,1)$ e $x, y \in B_X$ distintos com $x \neq x_1$ e $y \neq x_1$ tais que

$$x_1 = (1-\lambda)x + \lambda y.$$

Caso $x \notin S_X$ ou $y \notin S_X$, teremos

$$\begin{aligned}\|x_1\| &\leq (1-\lambda)\|x\| + \lambda\|y\| \\ &< 1-\lambda+\lambda = 1,\end{aligned}$$

contradição essa que mostra que $x, y \in S_X$. Tomando $t_0 = \min\{\lambda, 1-\lambda\}$ e $p = y - x$, temos que

$$\begin{aligned}\|x_1 + tp\| &= \|x_1 + t(y-x)\| \\ &= \|(1-\lambda)x + \lambda y + ty - tx\| \\ &= \|(1-\lambda-t)x + (\lambda+t)y\| \\ &\leq (1-\lambda-t)\|x\| + (\lambda+t)\|y\| \\ &= 1-\lambda-t+\lambda+t = 1,\end{aligned}$$

para todo t real tal que $|t| < t_0$.

Segue por uma consequência do Teorema de Hahn-Banach que existe $y^* \in S_{(X,\|\cdot\|_m)^*}$ tal que $y^*(Sx_1) = \|Sx_1\|_m = 1$. Então para todo t real satisfazendo $|t| < t_0$,

$$1 = Re\ y^*S(x_1) = \frac{Re\ y^*S(x_1+tp) + Re\ y^*S(x_1-tp)}{2} \leq 1.$$

Portanto, temos que $\|S(x_1+tp)\|_m = \|S(x_1-tp)\|_m = 1$ para todo t real satisfazendo $|t| < t_0$. Já que $\|S(x_1+tp) + S(x_1-tp)\|_m = 2\|S(x_1)\|_m = 2$, segue de $(X, \|\cdot\|_m)$ ser estritamente convexa que $S(x_1+tp) = S(x_1-tp)$, ou seja,

$$\begin{aligned} & S(x_1) + tS(p) = S(x_1) - tS(p) \\ \implies & \quad tS(p) = -tS(p) \\ \implies & \quad S(p) = 0.\end{aligned}$$

Mostraremos que S é invertível. Como $T = \dfrac{I}{\|I\|}$, temos

$$T^{-1} = \|I\|I^{-1}, \tag{3.32}$$

pois

$$\|I\|I^{-1} \circ \frac{I}{\|I\|} = I^{-1} \circ I = Id_X$$

e

$$\frac{I}{\|I\|} \circ \|I\|I^{-1} = I \circ I^{-1} = Id_{X_m},$$

onde Id_X e Id_{X_m} são as identidades em X e X_m, respectivamente. Além disso,

$$\begin{aligned}\|I^{-1}\| &= \sup\{\|I^{-1}(x)\| \colon \|x\|_m \leq 1\} \\ &= \sup\{\|x\| \colon \|x\|_m \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|x\|_m \colon \|x\|_m \leq 1\} = 1. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|I - T^{-1}S\| = \|T^{-1}S - I\| &= \|T^{-1}(S - T)\| \\ &\leq \|T^{-1}\|\|T - S\| \\ &\overset{(3.32)}{=} \|I^{-1}\|\|I\|\|T - S\| \\ &\overset{(3.31)}{\leq} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \rho \\ &< \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &< \frac{1}{4}(4)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} < 1.\end{aligned}$$

Como $(I - T^{-1}S) \in \mathcal{L}(X, X)$ com $\|I - T^{-1}S\| < 1$, então segue da Proposição 1.70 que $I - (I - T^{-1}S) = T^{-1}S$ tem inversa, o que implica que S é invertível. De fato, como T tem inversa, então $S = T \circ (T^{-1}S)$ tem inversa por ser a composta de funções inversíveis.

Como $S(p) = 0$, segue que $p = 0$, e isso é uma contradição, pois tomamos $p \neq 0$.

Resta provar o item (iii). Suponha que existam $x_0 \in S_X$ e $\epsilon_0 > 0$ tais que o subconjunto $B_X(x_0, \epsilon_0) \cap S_X$ não contém nenhum ponto fortemente exposto de B_X. Segue da Proposição 1.80 que existe uma norma $|||\cdot|||$ em X com a qual o espaço de Banach $(X, |||\cdot|||)$ é uniformemente convexo, e $|||x||| \leq \|x\|$ para todo $x \in X$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, defina a norma em X dada por

$$\|x\|_n = \left(\|x\|^2 + \frac{1}{n}|||x|||^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Utilizando os mesmos argumentos do item (ii) mostra-se que $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_n$ são equivalentes.

Mostremos que o espaço de Banach $(X, \|\cdot\|_n)$ é uniformemente convexo. De fato, considere sequências $(x_m)_{m=1}^{\infty}, (y_m)_{m=1}^{\infty}$ em $X_n = (X, \|\cdot\|_n)$ com $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ limitada satisfazendo

$$\lim_{m\to\infty} (2\|x_m\|_n^2 + 2\|y_m\|_n^2 - \|x_m + y_m\|_n^2) = 0.$$

Por um lado, para cada $m \in \mathbb{N}$ temos que

$$2|||x_m|||^2 + 2|||y_m|||^2 - |||x_m + y_m|||^2 \geq 0 \tag{3.34}$$

Por outro lado, dado $\epsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$2\|x_m\|_n^2 + 2\|y_m\|_n^2 - \|x_m + y_m\|_n^2 < \epsilon,\ \forall m \geq m_0,$$

o que implica

$$2\left(\|x_m\|^2 + \frac{1}{n}|||x_m|||^2\right) + 2\left(\|y_m\|^2 + \frac{1}{n}|||y_m|||^2\right) - \|x_m + y_m\|^2 - \frac{1}{n}|||x_m + y_m|||^2 < \epsilon,$$

para todo $m \geq m_0$. Então,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}(2|||x_m|||^2 + 2|||y_m|||^2 - |||x_m + y_m|||^2) &< -2\|x_m\|^2 - 2\|y_m\|^2 + \|x_m + y_m\|^2 + \epsilon \\ &\leq -2\|x_m\|^2 - 2\|y_m\|^2 + (\|x_m\| + \|y_m\|)^2 + \epsilon \\ &= -(\|x_m\| - \|y_m\|)^2 + \epsilon < \epsilon,\end{aligned}$$

para todo $m \geq m_0$. Logo,

$$2|||x_m|||^2 + 2|||y_m|||^2 - |||x_m + y_m|||^2 < n\epsilon, \tag{3.35}$$

para todo $m \geq m_0$. Segue de (3.34) e (3.35) que

$$\lim_{m\to\infty}(2|||x_m|||^2 + 2|||y_m|||^2 - |||x_m + y_m|||^2) = 0.$$

Como $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ é limitada em X_n, então existe $C > 0$ tal que

$$\|x_m\|_n < C, \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Segue de $|||\cdot||| \leq \|\cdot\| \leq \|\cdot\|_n$ que

$$|||x_m||| \leq \|x_m\|_n < C, \ \forall m \in \mathbb{N},$$

ou seja, $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ é limitada em $(X, |||\cdot|||)$. Já que $(X, |||\cdot|||)$ é uniformemente convexo, segue da Proposição 1.74 que

$$\lim_{m\to\infty} |||x_m - y_m||| = 0.$$

Agora, lembremos que

$$\|x\| \leq \|x\|_n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \|x\| \text{ para todo } x \in X$$

e notemos que pela forma como $|||\cdot|||$ foi construída na Proposição 1.80 deve existir $a > 0$ tal que

$$a\|x\| \leq |||x||| \leq \|x\| \text{ para todo } x \in X.$$

Daí, para todo $x \in X$ vale

$$|||x||| \leq \|x\| \leq \|x\|_n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \|x\| \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{a}|||x|||.$$

Como $\lim\limits_{m\to\infty} |||x_m - y_m||| = 0$, segue que

$$\lim_{m\to\infty} \|x_m - y_m\|_n = 0.$$

Portanto, pela Proposição 1.74, $(X, \|\cdot\|_n)$ é uniformemente convexo.

De forma análoga ao que foi mostrado no item anterior podemos garantir a escolha de $0 < \rho < \dfrac{1}{4}$ tal que $\beta(\rho) < \epsilon_0/2$ e $m \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{1+m}} > 1 - \eta(\rho).$$

Seja $I : (X, \|\cdot\|) \to (X, \|\cdot\|_m)$ seja o operador identidade em X e seja $T = I/\|I\|$. Sabemos do item anterior que $1 \leq \|I\| \leq (1 + 1/m)^{\frac{1}{2}}$, e

$$\|Tx_0\|_m = \frac{\|x_0\|_m}{\|I\|} \geq \frac{\|x_0\|\sqrt{m}}{\sqrt{m+1}} > 1 - \eta(\rho).$$

Portanto, por hipótese existem um operador $S : (X, \|\cdot\|) \to (X, \|\cdot\|_m)$ de norma um e $x_1 \in S_X$ tais que $\|x_0 - x_1\| < \beta(\rho) < \epsilon_0/2$, $\|Sx_1\|_m = 1$ e $\|S - T\| \leq \rho < \frac{1}{4}$. Assim, temos que $x_1 \in B_X(x_0, \epsilon_0) \cap S_X$, e portanto x_1 não é um ponto fortemente exposto de B_X.

Sejam $X_m = (X, \|\cdot\|_m)$ e $y^* \in S_{X_m^*}$ tais que $y^*(Sx_1) = 1$. Mostremos que Sx_1 é um ponto fortemente exposto de B_{X_m}. Suponha Sx_1 não seja um ponto fortemente exposto de B_{X_m}, ou seja, para todo $f \in X_m^*$ os itens (i) ou (ii) da Definição 3.33 não são satisfeitos. Em particular, os itens falham para y^*. Caso o item (i) não seja satisfeito, então existe $y \in B_{X_m}$ com $y \neq Sx_1$ tal que $y^*(y) = y^*(Sx_1) = 1$. Daí, temos que

$$\frac{\|y + Sx_1\|_m}{2} \geq \frac{|y^*(y + Sx_1)|}{2} = 1 > 1 - \delta,$$

para todo $0 < \delta < 1$. Tomando $\epsilon < \|y - Sx_1\|$ mostramos que X_m não é uniformemente convexo, o que é uma contradição. Caso (ii) não seja satisfeito, então existe uma sequência $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset B_{X_m}$ tal que

$$y^*(y_n) \to y^*(Sx_1) \text{ e } \|y_n - Sx_1\|_m \nrightarrow 0.$$

Daí, existe ϵ tal que para todo $n_0 \in \mathbb{N}$, existe

$$n \geq n_0 \text{ tal que } \|y_n - Sx_1\|_m > \epsilon. \tag{3.36}$$

Dado $0 < \delta < 1$, seja n_1 tal que $|y^*(y_n) - 1| < 2\delta$ para $n \geq n_1$. Então, para $n \geq n_1$,

$$\begin{aligned} \frac{\|y_n + Sx_1\|_m}{2} &\geq \frac{|y^*(y_n + Sx_1)|}{2} \\ &= \frac{|1 + y^*(y_n)|}{2} \\ &= \frac{|2 + y^*(y_n) - 1|}{2} \\ &\geq \frac{2 - |y^*(y_n) - 1|}{2} \\ &> \frac{2 - 2\delta}{2} = 1 - \delta, \end{aligned}$$

mas por (3.36) é possível tomar $n \geq n_1$ tal que $\|y_n - Sx_1\| > \epsilon$, o que é uma contradição, pois X_m é uniformemente convexo. Logo, Sx_1 é um ponto fortemente exposto de $B_{(X,\|\cdot\|_m)}$ por y^*. Agora, tome $f = y^* \circ S \in X^*$. Então:

(i) $f(x) = y^*(S(x)) < y^*(Sx_1)$ para $x \neq x_1$, pois Sx_1 é fortemente exposto por y^* e S é bijetora;

(ii) se $f(x_n) \to f(x_1)$ com $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset B_X$, temos

$$y^*(Sx_n) \to y^*(Sx_1)$$

e $(Sx_n)_{n=1}^{\infty} \subset B_{X_m}$ então por Sx_1 ser um ponto fortemente exposto por y^* segue que

$$\|Sx_n - Sx_1\| \to 0.$$

Portanto, segue de S ser invertível que

$$x_n \to x_1.$$

Isso mostra que x_1 é um ponto fortemente exposto de B_X, mas isso é uma contradição. □

O lema abaixo será muito útil para mostrar que um espaço de Banach bidimensional X contém uma face de S_X com um subconjunto não vazio relativamente aberto em S_X.

Lema 3.36. *Sejam $a, b, c \in S_X$. Se $c \in (a, b)$ então $[a, b] \subset S_X$.*

Demonstração. Dado $x \in (a, c) \subset B_X$, temos que $c = (1-\alpha)x + \alpha b$ para algum $\alpha \in (0, 1)$ Já que $c \in S_X$, então $x, b \in S_X$, caso contrário teríamos $\|x\| < 1$ ou $\|b\| < 1$, e daí,

$$\begin{aligned} \|c\| = \|(1-\alpha)x + \alpha b\| &\leq (1-\alpha)\|x\| + \alpha\|b\| \\ &< 1 - \alpha + \alpha = 1, \end{aligned} \tag{3.37}$$

o que é uma contradição, pois $c \in S_X$. Já que x é qualquer, tem-se que $[a, c] \subset S_X$. O caso em que $x \in (c, b)$ é análogo. Logo, $[a, b] \subset S_X$. □

Proposição 3.37. *Seja X um espaço de Banach bidimensional. Então todo segmento de reta maximal não trivial em S_X é uma face de S_X.*

Demonstração. Sejam $a, b \in S_X$ com $a \neq b$ tais que $[a, b] \subset S_X$ e não existem $c, d \in S_X$ tais que $[a, b] \subsetneq [c, d] \subset S_X$. Mostremos que $[a, b]$ é uma face de S_X. Note que $[a, b]$ é convexo. Agora, sejam $x, y \in B_X$ com $x \neq y$ e $\alpha \in (0, 1)$ tais que $(1-\alpha)x + \alpha y \in [a, b] \subset S_X$. Daí, segue do mesmo argumento de (3.37) que $x, y \in S_X$. Queremos mostrar que $x, y \in [a, b]$.

Note que se $x \in [a, b]$ então y pertence a reta r determinada por a e b, pois sabemos que $x, y, (1-\alpha)x + \alpha y$ são colineares e $x, (1-\alpha)x + \alpha y \in r$. Nesse caso, devemos ter $y \in [a, b]$. Caso contrário, teríamos duas possibilidades:

(i) $a \in (y, b)$, que implica $[a, b] \subsetneq [y, b] \subset S_X$ pelo lema anterior;

(ii) $b \in (a, y)$, que implica $[a, b] \subsetneq [a, y] \subset S_X$ também pelo lema anterior.

Os itens (i) e (ii) não podem ocorrer, pois o segmento $[a, b]$ é maximal em S_X. Portanto, se $x \in [a, b]$ então $y \in [a, b]$. Analogamente, se $y \in [a, b]$ então $x \in [a, b]$. Suponha que $x \notin [a, b]$ e $y \notin [a, b]$. Se $x, y \in r$, como $(1-\alpha)x + \alpha y \in (a, b)$, temos que $[a, b] \subsetneq [x, y] \subset S_x$, o que é uma contradição. Note que se $x \in r$ então $y \in r$, pois $x, y, (1-\alpha)x + \alpha y$ são colineares e $x, (1-\alpha)x + \alpha y \in r$. Analogamente, se $y \in r$ então $x \in r$. Assim, $x \notin r$ e $y \notin r$. Temos que r divide X em dois semiplanos S_1 e S_2. Como $[x, y] \cap r \neq \emptyset$ e $x, y \notin r$, então x, y pertencem a semiplanos distintos, digamos que $x \in S_1$ e $y \in S_2$.

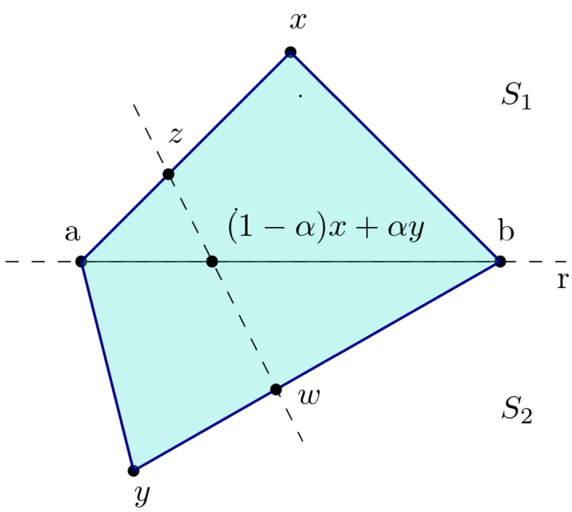

Figura 3.1: Polígono de quatro lados.
Fonte: Acervo do autor.

Nesse caso a, x, b, y formam um polígono que delimita uma região poligonal convexa (pois $[x, y] \cap [a, b] \neq \emptyset$) de quatro lados contida em B_X e toda reta passando por $(1-\alpha)x + \alpha y$ intersepta dois lados opostos do polígono em pontos z e w. Como $(1-\alpha)x + \alpha y \in (z, w)$ e $(1-\alpha)x + \alpha y \in S_X$, por um argumento análogo a (3.37) temos que $z, w \in S_X$. Segue do Lema 3.36 que $[z, w] \subset S_X$. Logo, todos os pontos no interior do polígono e sobre ele estão contidos em S_X. Daí, tomando $\delta > 0$ como a distância de $(1-\alpha)x + \alpha y$ até o polígono, temos que $B((1-\alpha)x + \alpha y, \delta)$ está contido no interior do polígono que está contido em S_X, mas isso é uma contradição uma vez que os pontos da esfera são pontos de fronteira de B_X. Logo, $x, y \in [a, b]$. Portanto, $[a, b]$ é uma face de B_X. $\square$

Proposição 3.38. *Seja X um espaço de Banach bidimensional. Então todo segmento de reta maximal não trivial em S_X contém um subconjunto não vazio relativamente aberto em S_X.*

Demonstração. Seja $[a, b]$ um segmento maximal não trivial em S_X. Suponha que não existe aberto relativo a S_X em $[a, b]$. Sejam $c \in (a, b)$ e $\epsilon = \min\{\|c - a\|, \|c - b\|\} > 0$. Então existe um ponto $d \in B(c, \epsilon) \cap S_X$ tal que $d \notin [a, b]$. Sejam $e \in (a, b)$ com $e \neq c$, $f \in (c, e)$ e $\delta = \min\{dist(f, [c, d]), dist(f, [e, d])\} > 0$. Então por hipótese existe $h \in B(f, \delta) \cap S_X$ tal que $h \notin [a, b]$. Seja r a reta determinada por a e b. Daí, r divide X em dois semiplanos S_1 e S_2. Note que $d \notin r$. Caso contrário, teríamos duas possibilidades:

(i) $a \in (d, b)$, que implica $[a, b] \subsetneq [d, b] \subset S_X$;

(ii) $b \in (a, d)$, que implica $[a, b] \subsetneq [a, d] \subset S_X$.

Mas nenhum dos itens pode ocorrer, pois $[a, b]$ é maximal em S_X. Sem perda de generalidade podemos supor que $d \in S_1$. Dividiremos a demonstração em dois casos:

Caso 1. $h \in S_2$.

Caso 2. $h \in S_1$.

Note que de forma análoga a d, temos que $h \notin r$.

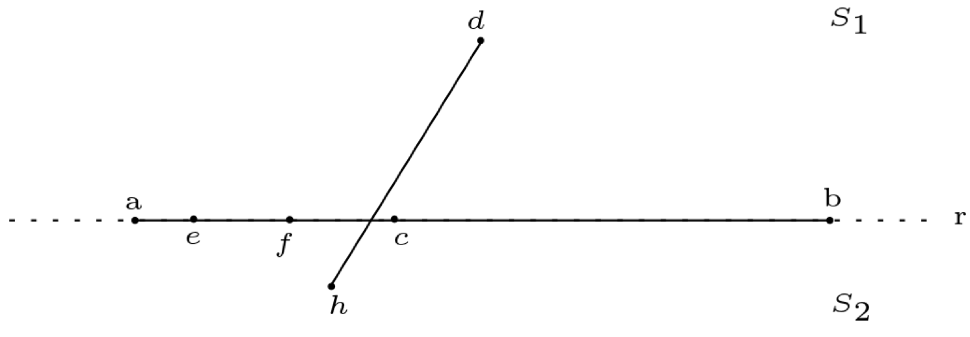

Figura 3.2: Segmento $[d, h]$.
Fonte: Acervo do autor.

No Caso 1 temos que $[a, b] \cap [d, h] \neq \emptyset$, ou seja, existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que $(1-\alpha)d + \alpha h \in [a, b]$, com $d, h \notin [a, b]$, mas isso é uma contradição, pois $[a, b]$ é uma face de B_X.

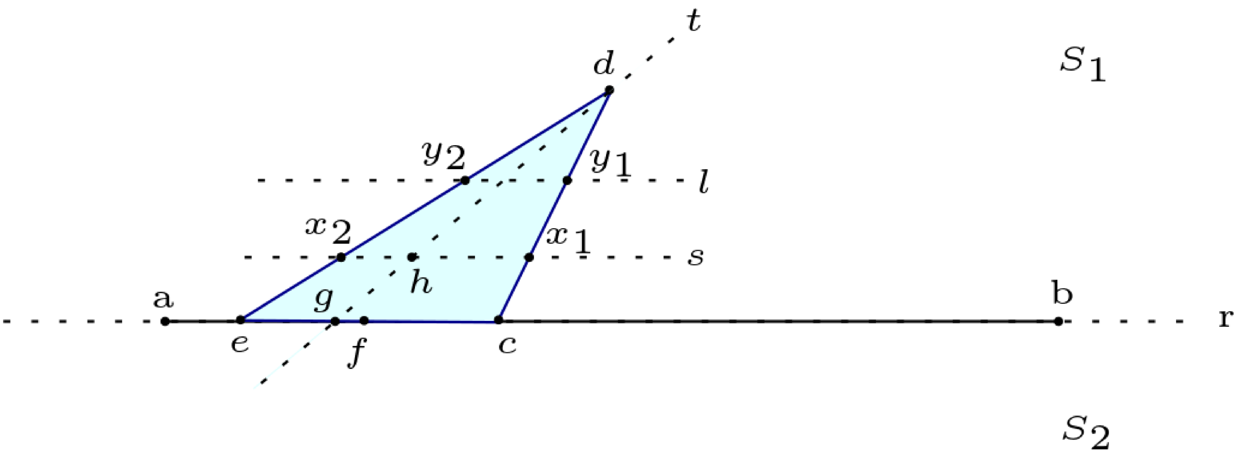

Figura 3.3: Polígono de três lados.
Fonte: Acervo do autor.

No Caso 2, conseguimos construir o triângulo cde com h no interior do triângulo. Mostremos que os segmentos $[c, d]$ e $[d, e]$ estão contidos em S_X. Sejam s a reta paralela a reta r passando por h e t a reta determinada pelos pontos d e h. A reta t corta o segmento $[c, e]$ no ponto g e, como $[c, e] \subset [a, b] \subset S_X$, então $g \in S_X$. Segue do Lema 3.36 que $[d, g] \subset S_X$, pois $h \in (d, g)$ e $d, h, g \in S_X$. A reta s corta os segmentos $[c, d]$ e $[d, e]$ nos pontos x_1 e x_2, respectivamente. Por argumento análogo a (3.37) temos que $x_1, x_2 \in S_X$. Como $x_1 \in (c, d)$ e $x_2 \in (d, e)$ e $c, d, e, x_1, x_2 \in S_X$, então pelo Lema 3.36 temos que os segmentos $[c, d]$ e $[d, e]$ estão contidos em S_X. Agora, mostremos que o interior de cde também está contido em S_X. Seja l uma reta paralela a r cortando os segmentos $[c, d]$ e $[d, e]$ nos pontos y_1 e y_2, respectivamente. Então temos que existe $z \in [y_1, y_2] \cap [d, g]$. Como $z \in (y_1, y_2)$ e $z, y_1, y_2 \in S_X$, então pelo Lema 3.36 temos que o segmento $[y_1, y_2]$ está contido em S_X. Logo, todos os pontos do interior de cde estão contidos em S_X, pois tomamos uma reta l qualquer. Daí, tomando $\delta > 0$ como a distância de h até o triângulo cde, temos que $B(h, \delta)$ está contida no interior do triângulo que está contido em S_X, mas isso é uma contradição uma vez que os pontos da esfera são pontos de fronteira de B_X. Portanto, $[a, b]$ contém um aberto relativo a S_X. □

Vimos nas Proposições 3.37 e 3.38 que em um espaço de Banach bidimensional X todo segmento de reta não trivial maximal em S_X é uma face de S_X com um subconjunto relativamente aberto não vazio em S_X. Portanto, segue do Teorema 3.35 e da Proposição 1.78 o seguinte corolário.

Corolário 3.39. *Se X é um espaço de Banach bidimensional real, a afirmação no Teorema* 3.35 *é equivalente à convexidade uniforme de X.*

Demonstração. Se X é uniformemente convexo então pelo Teorema 3.32 vale a afirmação do Teorema 3.35.

Se X não é uniformenente convexo então X não é estritamente convexa (pois X tem dimensão finita). Daí, existe um ponto $x \in S_X$ que não é ponto extremo, ou seja, existem $\alpha \in (0, 1)$ e pontos $x_1, x_2 \in B_X$ com $x_1 \neq x$ e $x_2 \neq x$ tais que $x = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2$. Por um argumento análogo a (3.37) mostra-se que $x_1, x_2 \in S_X$. Logo, pelo Lema 3.36 temos que $[x_1, x_2] \subset S_X$. Portanto, existe segmento de reta não trivial maximal $[a, b]$ em S_X. De fato, se $[x_1, x_2]$ é um segmento de reta não trivial maximal em S_X, basta tomar $a = x_1$ e $b = x_2$; caso contrário, podemos ampliar $[x_1, x_2]$ de forma a obter um segmento de reta não trivial maximal $[a, b]$. Logo, B_X contém uma face não trivial que contém um subconjunto relativamente aberto em S_X. Segue que não vale a afirmação do Teorema 3.35. □

Referências Bibliográficas

[1] M. D. Acosta, R. M. Aron, D. García, M. Maestre. *The Bishop-Phelps-Bollobás theorem for operators*, J. Funct. Anal. **254** (2008), 2780-2799. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2008.02.014

[2] E. Bishop, R. R. Phelps. *A proof that every Banach space is subreflexive*, Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961), 97-98. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1961-10514-4

[3] B. Bollobás. *An extension to theorem of Bishop and Phelps*, Bull. Lond. Math. Soc. **2** (1970), 181-182. https://doi.org/10.1112/blms/2.2.181

[4] F. F. Bonsall, J. Duncan. Numerical Ranges II, London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge: Cambridge University Press, 1973. https://doi.org/10.1017/CBO9780511662515

[5] G. Botelho, D. Pellegrino, E. Teixeira. Fundamentos de Análise Funcional. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[6] T. Bühler, D. A. Salamon. Functional Analysis. Graduate studies in mathematics. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2018. https://doi.org/10.1090/gsm/191

[7] M. Fabian, P. Habala, P. Hàjek, V. Montesinos, J. Pelant, V. Zizler, Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry. New York: Springer, 2001. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3480-5

[8] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, V. Zizler. Banach Space Theory Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis. New York: Springer, 2011. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7515-7

[9] T. Grando. A propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás. 2016. 50 p. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Paulo-SP.

[10] S. K. Kim, H. J. Lee. *Uniform convexity and Bishop-Phelps-Bollobás property*, Canad. J. Math. **66** (2014), no. 2, 373-386. https://doi.org/10.4153/CJM-2013-009-2

[11] J. Lindenstrauss. *On operators which attain their norm*, Israel J. Math. **1** (1963), 139-148. https://doi.org/10.1007/BF02759700

[12] J. R. Munkres, Topology. 2ª edição, Prentice Hall, Inc., 2000.

[13] B. Nelson. Functional Analysis - Course Materials. Department of Mathematics - Michigan State University, 2020.

[14] J. R. Partington. *Norm attaining operators*, Israel J. Math. **43** (1982), 273-276. https://doi.org/10.1007/BF02761947

[15] R. R. Phelps. *A representation theorem for bounded convex sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), 976-983. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1960-0123172-X