THIAGO HENRIQUE SILVA ARAÚJO

Conjectura de Wilf Para Semigrupos Numéricos Generalizados

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2023

THIAGO HENRIQUE SILVA ARAÚJO

Conjectura de Wilf Para Semigrupos Numéricos Generalizados

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Álgebra.

Orientador(a): Prof. Dr. Guilherme Chaud Tizziotti.

UBERLÂNDIA - MG
2023

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

A663 2023

Araújo, Thiago Henrique Silva, 1999-
Conjectura de Wilf Para Semigrupos Numéricos Generalizados [recurso eletrônico] / Thiago Henrique Silva Araújo. - 2023.

Orientador: Guilherme Chaud Tizziotti.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2023.31
Inclui bibliografia.

1. Matemática. I. Tizziotti, Guilherme Chaud,1980-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 160 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3239-4209/4154 - www.posgrad.famat.ufu.br - pgmat@famat.ufu.br

ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Matemática				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, 107, sigla do PPGMAT				
Data:	24 de fevereiro de 2023	Hora de início:	15:00	Hora de encerramento:	17:00
Matrícula do Discente:	12112MAT014				
Nome do Discente:	Thiago Henrique Silva Araújo				
Título do Trabalho:	A conjectura de Wilf para semigrupos numéricos generalizados				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Geometria Algébrica				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Semigrupos de Weierstrass em pontos e aplicações				

Reuniu-se na Sala 1F-119 (Sala Multiuso da Faculdade de Matemática), Campus Santa Mônica, da Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática, assim composta: Professores Doutores: Wanderson Tenório - ICET/UFMT; Alonso Sepúlveda Castellanos - FAMAT/UFU e Guilherme Chaud Tizziotti - FAMAT/UFU, orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Guilherme Chaud Tizziotti, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

Documento assinado eletronicamente por **Alonso Sepulveda Castellanos**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 24/02/2023, às 16:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Guilherme Chaud Tizziotti**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 24/02/2023, às 16:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Wanderson Tenório**, **Usuário Externo**, em 24/02/2023, às 16:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4249324** e o código CRC **BF1212EC**.

Referência: Processo nº 23117.008930/2023-02 SEI nº 4249324

Dedicatória

Dedico esse trabalho a minha mãe, Eliézer Josefina da Silva.

Agradecimentos

Agradeço à minha mãe Eliézer por todo seu amor e atenção e por ser responsável pela pessoa que sou hoje, nunca serei capaz de retribuir tudo que fez e faz por mim.

Aos meus irmãos Larissa e João Henrique por sempre me apoiarem e me incentivarem a cada passo que escolho dar.

Agradeço à Ana Júlia que esteve comigo durante esses dois anos, pela atenção e cuidados, pela compreensão à minha ausência e por me apoiar e ajudar a tomar as mais difíceis decisões. Eu te amo muito, muito obrigado por tudo que fez por mim.

Agradeço aos meus amigos e familiares que sempre estão ao meu lado, em especial, Arthur, Cristiano, Gabriel, Guilherme, Lucas e Vitor.

Aos meus colegas que compartilhando a mesma caminhada nos tornamos grandes amigos dentro e fora do mundo acadêmico, Leonardo e Lucas.

Ao Prof. Dr. Guilherme Chaud Tizziotti pela orientação durante toda minha carreira acadêmica.

Por fim, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

ARAÚJO, T. H. S. *Conjectura de Wilf Para Semigrupos Numéricos Generalizados.* 2023. 33 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Um semigrupo numérico é um submonoide dos inteiros não negativos cujo complementar é finito. Generalizando esse conceito, um semigrupo numérico generalizado é um submonoide de $\mathbb{N}^d$ cujo complementar é finito. No contexto de semigrupos numéricos, o estudo acerca da Conjectura de Wilf trouxe novas formas de pensar a respeito de monoides e ainda é um problema em aberto. Neste trabalho vamos apresentar uma generalização para a Conjectura de Wilf, provando-a para várias famílias de semigrupos numéricos generalizados e mostrar sua relação com a generalização natural proposta por García-García, Marín-Aragón e Vigneron-Tenorio.

Palavras-chave: (Semigrupos Numéricos Generalizados, Conjectura de Wilf, Conjectura de Wilf Generalizada, Conjectura de Wilf Estendida).

ARAÚJO, T. H. S. *Wilf's Conjecture For Generalized Numerical Semigroups* 2023. (# pages) p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

A numerical semigroups is a submonoid of non-negative integers whose complement is finite. Generalizing this concept a generalized numerical semigroup is a submonoid of $\mathbb{N}^d$ whose the complement is finite. In the context of numerical semigroups, the study about Wilf's Conjecture brought new ways of thinking about monoids and remain open problems. In this work we will show a generalization to the Wilf's Conjecture and we proving it to several families of generalized numerical semigroups and show their relationship with the natural generalization proposed by García-García, Marín-Aragón and Vigneron-Tenorio.

Keywords: (Generalized Numerical Semigroups, Wilf's Conjecture, Generalized Wilf's Conjecutre, Extended Wilf Conjecture).

Introdução

Sejam $\mathbb{N}$ o conjunto dos inteiros não-negativos e S um submonoide de $\mathbb{N}$. Considere o conjunto $H(S) = \mathbb{N} \setminus S$. Se $H(S)$ é finito, chamamos S de *semigrupo numérico*, e $H(S)$ é chamado de *conjunto de lacunas* de S e sua cardinalidade é chamada de *gênero* de S, que será denotado por $g(S)$. Todo semigrupo numérico admite um único conjunto minimal de geradores $G(S)$. Isso quer dizer que existe um único conjunto finito $G(S)$ tal que todo elemento de S é uma combinação $\mathbb{N}$-linear de elementos de $G(S)$ e, nenhum subconjunto próprio de $G(S)$ possui tal propriedade. A cardinalidade do conjunto de geradores $G(S)$ é chamada de S-dimensão (ou dimensão de mergulho) e é denotada por $e(S)$. Outros invariantes bem conhecidos para semigrupos numéricos são $F(S) = max\{k|k \in H(S)\}$, chamado de número de Frobenius e $n(S) = |\{s \in S|s < F(S)\}|$. A Conjectura de Wilf para semigrupos numéricos postula que $e(S)n(S) \geq F(S) + 1$. Essa conjectura já foi verificada para uma grande família de semigrupos numéricos, porém ainda permanece sem respostas no caso geral. Para mais detalhes sobre esta conjectura sugerimos a referência [5].

Um monoide $S \subseteq \mathbb{N}^d$ é chamado de *semigrupo numérico generalizado* (usaremos a abreviação GNS - do inglês *generalized numerical semigroup*), se o conjunto das lacunas $H(S) = \mathbb{N}^d \setminus S$ é finito. Ou seja, o conceito de GNS, como o próprio nome diz, é uma generalização do conceito de semigrupo numérico. Semigrupos numéricos generalizados vêm sendo bastante estudados recentemente, principalmente no que diz respeito às generalizações de resultados e conceitos existentes no caso numérico ($d = 1$). Por exemplo, assim como no caso em que $d = 1$, um GNS também possui um único conjunto minimal de geradores $G(S)$. Em [7], Failla, Peterson e Utano, relatam sobre o interesse em se estudar a Conjectura de Wilf para semigrupos numéricos generalizados. Uma primeira extensão dessa conjectura para GNSs foi apresentada por García-García, Marin-Aragón, Vigneron-Tenorio, em [11], para uma certa classe de semigrupos, chamada $\mathcal{C}$-semigrupos, onde S é um $\mathcal{C}$-semigrupo se $S \subset \mathcal{C}$, $\mathcal{C} \subset \mathbb{Q}^p$ é um cone racional e $(\mathcal{C} \setminus S) \cap \mathbb{N}^p$ tem um número finito de elementos. Essa extensão é bastante natural e depende de uma ordem monomial. Em [4], Cisto, DiPasquale, Failla, Flores, Peterson e Utano propõem uma nova generalização de tal conjectura a qual é satisfeita por grandes famílias de GNSs, como irredutíveis e monomiais. Além disso, os autores fazem uma análise da relação entre a proposta por eles apresentada e a proposta dada por García-García, Marin-Aragón e Vigneron-Tenorio. O objetivo deste trabalho é apresentar as conjecturas dadas em [11] e [4], bem como as famílias de semigrupos numéricos generalizados em que elas se verificam.

Para nossa proposta, dividimos este trabalho em quatro capítulos. No primeiro capítulo iremos fazer uma breve introdução sobre semigrupos numéricos e apresentar a conjectura de Wilf para esse tipo de semigrupos. No Capítulo 2 introduziremos os semigrupos numéricos generalizados, apresentando conceitos e resultados que serão utilizados ao longo do trabalho. Neste capítulo apresentaremos a chamada Conjectura de Wilf Generalizada, mostrando para o caso de semigrupos numéricos generalizados irredutíveis e monomiais. No Capítulo 3 apresentaremos a chamada Conjectura de Wilf Estendida, mostraremos sua relação com a conjectura generalizada apresentada no capítulo anterior. Terminamos o trabalho apresentando alguns resultados de testes computacionais feitos em [4].

Thiago Henrique Silva Araújo
Uberlândia-MG, 19 de Janeiro de 2023.

Capítulo 1

A Conjectura de Wilf para Semigrupos Numéricos

Neste primeiro capítulo vamos introduzir alguns conceitos básicos sobre semigrupos numéricos, a fim de enunciar a Conjectura de Wilf e provar que a conjectura é válida em alguns casos. Diferentemente do que faremos para semigrupos numéricos generalizados, vamos assumir conhecido que todo semigrupo numérico S admite um único conjunto minimal de geradores, denotado por $G(S)$, sendo sua cardinalidade chamada S-dimensão (ou dimensão de mergulho) e denotada por $e(S)$.

Definição 1.1. *Seja S um submonoide de $\mathbb{N}$ tal que $H(S) = \mathbb{N} \backslash S$ é finito. Então, S é chamado* ***semigrupo numérico****.*

O menor inteiro positivo que pertence a S é chamado de multiplicidade de S e denotada por $m(S)$. O maior inteiro que não pertença a S é conhecido como o *número de Frobenius* de S, e é denotado por $F(S)$. O elemento $c(S) := F(S) + 1 \in S$ é chamado de *condutor* de S, que é o menor inteiro x tal que $x + n \in S$ para todo $n \in \mathbb{N}$. O conjunto dos elementos $H(S) = \mathbb{N} \setminus S$ é chamado de conjunto das lacunas de S. A cardinalidade desse conjunto é chamada de *gênero* de S, que é denotado por $g(S)$. Os conceitos de número de Frobenius, condutor, conjunto de lacunas e gênero são muito importantes no estudo de semigrupos numéricos.

Exemplo 1.2. *Considere o semigrupo numérico S gerado por $\{5, 7, 11\}$ e portanto $e(S) = 3$. Denotaremos $S = \langle 5, 7, 11 \rangle$. Sabemos que $S = \{0, 5, 7, 10, 11, 12, 14, 15, ...\}$ e portanto $F(S) = 13$, $H(S) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 13\}$ e $g(S) = 8$.*

Exemplo 1.3. *Considere $S = \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Temos que $S = \{0, 2, 3, 4, 5, ...\}$ é um semigrupo numérico. Observe que $S = \langle 2, 3 \rangle$, portanto $e(S) = 2$. Observe que $F(S) = 1$, $H(S) = \{1\}$ e $g(S) = 1$.*

Há uma cota superior para o número de Frobenius $F(S)$ dada em termos do conjunto minimal de geradores $G(S)$. Se $G(S) = \{a_1 < \ldots < a_{e(S)}\}$, então $F(S) \leq a_1 a_{e(S)} - a_1 - a_{e(S)}$, veja [1, Th. B] e [14, p. 390]. Essa igualdade é a melhor possível se $e(S) = 2$, isso é mostrado por Sylvester [9] observando que $F(S) = a_1 a_2 - a_1 - a_2$.

Em [8], Wilf faz um estudo sobre inteiros obtidos através de uma combinação linear de inteiros não-negativos e relativamente primos dentro de um conjunto finito fixado. Por essa razão, dizemos que um semigrupo S satisfaz a questão de Wilf se

$$e(S)n(S) \geq F(S) + 1,$$

onde $n(S)$ é a cardinalidade do conjunto $N(S) = \{s \in S | s < F(S)\}$.

Seja S um semigrupo numérico e seja n um dos seus elementos diferentes de zero. O conjunto de Apéry de n em S é dado por

$$Ap(S,n) := \{s \in S | s - n \notin S\}.$$

Exemplo 1.4. *Considere o semigrupo numérico S do Exemplo 1.2. Então,*
$S = \{0, 5, 7, 10, 11, 12, 14, 15, ...\}$ *e* $Ap(S, 7) = \{0, 5, 10, 11, 15, 16, 20\}$.

Lema 1.5. *Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S \setminus \{0\}$. Então, $Ap(S,n) = \{0 = w(0), w(1), ..., w(n-1)\}$, em que $w(i)$ é o menor elemento de S congruente a i módulo n, para todo $i \in \{0, ..., n-1\}$.*

Demonstração. Como $\mathbb{N} \backslash S$ é finito, para todo $i \in \{1, ..., n-1\}$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $i + k_0 n \in S$. Seja $w(i) = i + kn$ o menor elemento pertencente a S. Observe que $w(i) - n = i + kn - n = i + (k-1)n$ não pertence a S já que $w(i)$ é o menor com essa propriedade, isto é, $w(i) \in Ap(S,n)$. □

Proposição 1.6. *Seja S um semigrupo numérico e n um elemento não nulo de S. Então:*

1. $F(S) = (max\{Ap(S,n)\}) - n$.
2. $g(S) = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{w \in Ap(S,n)} w\right) - \dfrac{n-1}{2}$.

Demonstração. Pela definição de conjunto de Apéry, temos que $(max\{Ap(S,n)\}) - n \notin S$. Se $x > (maxAp(S,n)) - n$, então $x + n > maxAp(S,n)$. Seja $w \in Ap(S,n)$ tal que w e $x+n$ são congruentes módulo n. Como $w < x + n$, isto implica que $x = w + kn$, para algum inteiro positivo k. E, consequentemente, $x - n = w + (k-1)n$ pertence a S, pois caso contrário, x pertenceria ao $Ap(S,n)$ e é congruente a w, e pelo Lema 1.5, w já é esse elemento. Assim, $x - n + n = n \in S$. Logo, temos que qualquer elemento maior que $(maxAp(S,n)) - n$ está em S, isto é $F(S) = (maxAp(S,n)) - n$.

Observe que para todo $w \in Ap(S,n)$, se w é congruente a i módulo n e $i \in \{0, ..., n-1\}$, então existe um inteiro não negativo k_i tal que $w = k_i n + i$. Portanto, usando a notação do Lema 1.5, $Ap(S,n) = \{0, w(1) = k_1 n + 1, w(2) = k_2 n + 2, ..., w(n-1) = k_{n-1} n + n - 1\}$. Um inteiro x congruente a $w(i)$ módulo n pertence a S se, e somente se, $w(i) \leq x$. Logo,

$$\begin{aligned} g(S) &= k_1 + \cdots + k_{n-1} \\ &= \frac{1}{n}((k_1 n + 1) + \cdots + (k_{n-1} n + n - 1)) - \frac{n-1}{2} \\ &= \frac{1}{n}(\sum_{w \in Ap(S,n)} w) - \frac{n-1}{2}. \end{aligned}$$

□

Se S é um semigrupo numérico minimamente gerado por $\langle a, b\rangle$, então $Ap(S,a) = \{s \in S | s - a \notin S\} = \{ax_1 + bx_2 | x_1, x_2 \in \mathbb{N}, ax_1 + bx_2 - a \notin S\} = \{ax_1 + bx_2 | x_1, x_2 \in \mathbb{N}, a(x_1 - 1) + bx_2 \notin S\}$. Observe que se $x_1 \geq 1$, todo elemento $a(x_1 - 1) + bx_2 \in S$. Assim precisamos que $x_1 = 0$, logo $Ap(S,a) = \{bx_2 | x_2 \in \mathbb{N}, bx_2 - a \notin S\}$, isto é,

$$Ap(S,a) = \{0, b, 2b, ..., (a-1)b\}$$

e pela Proposição 1.6 conseguimos o seguinte resultado.

Proposição 1.7. *Sejam a e b números inteiros positivos com $mdc(a,b) = 1$. Então,*

1. $F(\langle a, b\rangle) = ab - a - b$.
2. $g(\langle a, b\rangle) = \dfrac{ab - a - b + 1}{2}$.

Observe que para um semigrupo numérico com S-dimensão igual a 2, $g(S) = \dfrac{F(S)+1}{2}$ (e portanto $F(S)$ é sempre ímpar). Esse não é o caso para S-dimensões maiores, embora essa propriedade caracterize uma classe muito interessante de semigrupos numéricos.

Sabemos que se S é um semigrupo numérico e $s \in S$, então $F(S) - s$ não pertence a S. A partir disso, obtemos que a igualdade acima é uma desigualdade no caso geral.

Lema 1.8. *Seja S um semigrupo numérico. Então,*

$$g(S) \geq \frac{F(S)+1}{2}.$$

Assim, semigrupos numéricos para os quais a igualdade se mantém são semigrupos numéricos com o menor número de lacunas dentre aqueles que possuem o mesmo elemento de Frobenius.

Seja S um semigrupo numérico. Dizemos que um inteiro x é um *pseudo número de Frobenius* se $x \notin S$ e $x + s \in S$, para todo $s \in S \setminus \{0\}$. Vamos denotar por $PF(S)$ o conjunto dos pseudo números de Frobenius de S, sua cardinalidade será chamada de *tipo* de S e denotada por $t(S)$. Pelas definições, segue que $F(S) = \max\{x | x \in PF(S)\}$.

Sobre o conjunto de inteiros podemos definir a seguinte relação: $a \leq_S b$ se $b - a \in S$. Como S é um semigrupo numérico temos uma relação de ordem, isto é, $\leq_S$ é reflexiva, transitiva e antissimétrica. Pela definição de pseudo número de Frobenius, obtemos que eles são os elementos maximais com respeito a $\leq_S$ de $\mathbb{Z} \setminus S$.

Proposição 1.9. *[[10], Pro.2.19] Seja S um semigrupo numérico. Então,*

1. *$PF(S) = Maximais_{\leq_S}(\mathbb{Z} \setminus S)$,*
2. *$x \in \mathbb{Z} \setminus S$ se, e somente se, $f - x \in S$, para algum $f \in PF(S)$.*

Proposição 1.10. *Seja S um semigrupo numérico e n um elemento diferente de zero de S. Então,*

$$PF(S) = \{w - n | w \in Maximais_{\leq_S} Ap(S, n)\}.$$

Demonstração. Seja $x \in PF(S)$. Observe que $x + n \in Ap(S, n)$, pois $x = (x + n) - n \notin S$ e $x + n \in S$. Seja $w \in Ap(S, n)$ tal que $x + n \leq_S w$. Então, $w - (x + n) = w - n - x \in S$. Dessa forma, temos que $w - n = x + s$, para algum $s \in S$. Como $w - n \notin S$ e $x \in PF(S)$, segue que $s = 0$ e daí $w = x + n$, isto é, $x = w - n$, com $w \in Ap(S, n)$ maximal em relação a $\leq_S$.

Agora, seja $w \in Maximais_{\leq_S} Ap(S, n)$. Então, $w - n \notin S$. Se $w - n$ não for um pseudo número de Frobenius, isto é, $w - n + s \notin S$, para algum elemento s de S, diferente de zero, então $w + s \in Ap(S, n)$, contradizendo a maximalidade de w. □

Exemplo 1.11. *Se S é um semigrupo numérico minimamente gerado por $\langle a, b\rangle$, então*

$$Ap(S, a) = \{0, b, 2b, ..., (a-1)b\}.$$

Isso implica que $Maximais_{\leq_S} Ap(S, a) = \{(a-1)b\}$ e $PF(S) = \{ab - a - b\}$. Portanto, semigrupos numéricos com S-dimensão igual a 2, tem tipo 1.

Como a cardinalidade de $Ap(S, n)$ é n e o zero nunca é um elemento maximal, então tomando $n = m(S)$ e pela proposição anterior conseguimos uma cota superior para o tipo de um semigrupo numérico.

Corolário 1.12. *Seja S um semigrupo numérico. Então,*

$$t(S) \leq m(S) - 1.$$

Seja S um semigrupo numérico. Denotamos o conjunto dos elementos em S que são menores do que o número de Frobenius $F(S)$ por $N(S)$, ou seja,

$$N(S) = \{s \in S | s < F(S)\}.$$

Esse conjunto determina totalmente S. Sua cardinalidade é denotada por $n(S)$. Claramente $g(S) + n(S) = F(S) + 1$. Pela Proposição 1.9, sabemos que se x é um inteiro que não pertence a S, então existe $f \in PF(S)$ tal que $x \leq_S f$. Defina $f_x := min\{f \in PF(S) | f - x \in S\}$. Então, a aplicação

$$H(S) \to PF(S) \times N(S),\, x \mapsto (f_x, f_x - x)$$

é injetora, o que prova o seguinte resultado.

Proposição 1.13. *Seja S um semigrupo numérico. Então,*

$$g(S) \leq t(S)n(S).$$

Observação 1.14. *Essa desigualdade é equivalente a $F(S) + 1 \leq (t(S) + 1)n(S)$. Porém, a **Conjectura de Wilf** diz que: $e(S)n(S) \geq F(S) + 1$. Para algumas famílias de semigrupos numéricos a Conjectura de Wilf é verdadeira, mas para o caso geral ainda permanece sem solução.*

O resultado a seguir nos diz que a conjectura de Wilf é válida em algumas condições especiais.

Teorema 1.15. *A conjectura de Wilf é válida nos seguintes casos:*

1. *Para todo semigrupo numérico de tipo 1.*
2. *Para todo semigrupo numérico de tipo 2.*
3. *Para todo semigrupo numérico S tal que $e(S) = m(S) - 1$.*

Demonstração. 1) Temos que pela Proposição 1.13 e pelo Lema 1.8, com $t(S) = 1$ que $2n(S) \geq 2g(S) \geq F(S) + 1$. Agora como $e(S) \geq 2$, segue que $e(S)n(S) \geq F(S) + 1$.

2) Para $t(S) = 2$, temos pelo Exemplo 1.11 que $e(S) \geq 3$, logo $e(S)n(S) \geq (t(S) + 1)n(S)$, assim o resultado segue da desigualdade equivalente da Observação 1.14.

3) Observe que pelo Corolário 1.12, temos que $t(S) \leq m(S) - 1 = e(S)$. Dessa forma temos dois casos. Se $t(S) \leq e(S) - 1$, então $t(S) + 1 \leq e(S)$ e, segue que, $e(S)n(S) \geq (t(S) + 1)n(S) \geq F(S) + 1$. Agora, se $t(S) = e(S)$ temos a seguinte contradição: pela Proposição 1.10, sabemos que $PF(S) = \{w - n | w \in Maximais_{\leq_S} Ap(S, n)\}$ e os $m(S) - 1$ elementos de $Ap(S, m)$ são todos maximais com relação a $\leq_S$. Agora, como o sistema minimal de geradores de S está contido em $Ap(S, m) \cup \{m\}$, segue que todo elemento desse conjunto deve ser gerador minimal de S, pois caso contrário contradiz a maximalidade dos elementos. Dessa forma $e(S) = m(S)$. Agora, se $t(S) = m(S) - 1$, então $e(S) = m(S)$ que contradiz a hipótese de que $e(S) = m(S) - 1$. $\square$

Veremos a seguir algumas classes de semigrupos numéricos que possuem as propriedades dadas no teorema anterior, e que portanto satisfazem a conjectura de Wilf.

Um semigrupo numérico é dito *irredutível* se não puder ser expresso como uma interseção de dois semigrupos numéricos que o contenham propriamente. Se S é semigrupo numérico irredutível com $F(S)$ ímpar, então S é chamado de *simétrico*. Pelo Exemplo 1.11, vemos que todo semigrupo numérico gerado por dois elementos satisfaz a conjectura de Wilf. Sabemos que todo semigrupo numérico gerados por dois elementos é simétrico, e que S é simétrico se, e somente se, $t(S) = 1$ (veja [10, Cor. 4.11]). Portanto, semigrupos simétricos também satisfazem a conjectura de Wilf.

Proposição 1.16. *Se S é um semigrupo numérico tal que $t(S)+1 \leq e(S)$, então S satisfaz a conjectura de Wilf.*

Demonstração. Usando o fato de que $g(S)+n(S) = F(S)+1$, temos pela Proposição 1.13 que $F(S)+1 \leq (t(S)+1)n(S)$. Agora se S é tal que $t(S)+1 \leq e(S)$, segue que $e(S)n(S) \geq (t(S)+1)n(S) \geq F(S)+1$. Portanto S satisfaz a conjectura de Wilf. □

Corolário 1.17. *Se S é um semigrupo numérico com S-dimensão máxima, então S satisfaz a conjectura de Wilf.*

Demonstração. Se $e(S)$ é máxima, então $e(S) = a_1$, o menor elemento positivo de S, também chamado de multiplicidade de S, denotada por $m(S)$. Sabemos pelo Corolário 1.12 que $t(S) \leq m(S)-1$. Assim, temos que $t(S)+1 \leq e(S)$, e o resultado segue da proposição anterior. □

Um semigrupo numérico S é dito *Arf* se, para todos $x, y, z \in S$, com $x \geq y \geq z$, tem-se que $x+y-z \in S$. Como todo semigrupo Arf possui S-dimensão máxima (veja [10, Sec. 2]), então do corolário anterior temos o seguinte resultado imediato.

Corolário 1.18. *Se S é um semigrupo numérico Arf, então S satisfaz a conjectura de Wilf.*

Definição 1.19. *Seja S um semigrupo numérico. Um **ideal relativo** I de S é o subconjunto de $\mathbb{Z}$ tal que $I+S \subset I$ e $s+I = \{s+i | i \in S\} \subset S$, para algum $s \in S$. Um **ideal** de S é um ideal relativo de S que está contido em S.*

Teorema 1.20. *Se S é um semigrupo numérico tal que $e(S) \leq 3$, então $t(S)+1 \leq e(S)$.*

Demonstração. Suponhamos sem perda de generalidade que $S \neq \mathbb{N}$. Assim, temos que $e(S)$ é 2 ou 3. Para o caso em que $e(S) = 2$, como dito anteriormente, todo semigrupo numérico gerados por dois elementos é simétrico, e que S é simétrico se, e somente se, $t(S) = 1$ portanto vale a igualdade.

Agora resta mostrar para o caso em que $e(S) = 3$, isto é, se $e(S) = 3$, teremos $t(S) \geq 2$. Para isso, considere o conjunto $S_i := \{x \in S | x \geq s_i\}$, onde $s_0 := 0$ e s_i é o i-ésimo elemento de S para $1 \leq i \leq n(S)$. Tome o ideal relativo $S(i) := \{m \in \mathbb{N} | m + S_i \subseteq S_i\}$ para $0 \leq i \leq n(S)$. Chamamos **tipo de sequência** de S, denotado por $t_i(S)$, a cardinalidade do conjunto $S(i) \setminus S(i-1)$. Observe que $t(S) = t_1(S) = |S(1) \setminus S|$. Suponha $N \in S(1) \setminus S$. Assim, basta mostrar que existem no máximo duas possibilidades para N. Seja S tal que $S = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$. Pela definição de $S(1)$, como devemos ter $N + S_1 \subset S_1$, mas $N \notin S$, N pode ser expresso como $N = y_{ij}a_j + y_{ik}a_k - a_i$, com $y_{ij}, y_{ik} \in \mathbb{N}$ para $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$. Seja L_i o menor inteiro positivo tal que $L_i a_i \in \langle a_j, a_k \rangle$ para $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$. Portanto podemos escrever $L_i a_i = x_{ij}a_j + x_{ik}a_k$ como $x_{ij}, x_{ik} \in \mathbb{N}$ maiores que zero e unicamente determinados ([14], Teorema 8). Provemos que $y_{ij} \leq L_j - 1$. Suponha por contradição que $y_{ij} = L_j + d_j$ com $d_j \geq 0$. Então

$$\begin{aligned} N = (L_j + d_j)a_j + y_{ik}a_k - a_i &= (x_{ji}a_i + x_{jk}a_k) + d_j a_j + y_{ik}a_k - a_i \\ &= (x_{ji} - 1)a_i + (x_{jk} + y_{ik})a_k + d_j a_j \in S \end{aligned}$$

já que $x_{ji} \geq 0$. Contradição pois $N \notin S$. Agora vamos mostrar que as representações de N na forma $N = y_{ij}a_j + y_{ik}a_k - a_i$ com $y_{ij}, y_{ik} \in \mathbb{N}$ são únicas. Suponha que $N = y_{ij}a_j + y_{ik}a_k - a_i = z_{ij}a_j + z_{ik}a_k - a_i$ com $y_{ij}, y_{ik}, z_{ij}, z_{ik} \in \mathbb{N}$. Se $y_{ij} = z_{ij}$ está feito. Caso contrário suponha sem perda de generalidade que $y_{ij} > z_{ij}$, Então, $(y_{ij} - z_{ij})a_j + y_{ik}a_k = z_{ik}a_k$. Assim, $z_{ik} \geq L_k$ que contradiz com o fato de que $z_{ik} \leq L_k - 1$. Portanto N tem representações únicas

$$N = y_{31}a_1 + y_{32}a_2 - a_3 = y_{21}a_1 + y_{23}a_3 - a_2 = y_{12}a_2 + y_{13}a_3 - a_1$$

Agora mostremos que $y_{31} \neq y_{21}$ Se $y_{31} = y_{21}$, então $(y_{32}+1)a_2 = (y_23+1)a_3$. Isso implica que $y_{23}+1 = ma_3$ para algum $m \geq 1$ já que $mdc(a_2, a_3) = 1$. Em particular, $y_{32}+1 \geq a_3$. Pela prova de ([14], Teorema 8]), $a_3 > L_2$. Portanto $y_{32}+1 > L_2$, contradizendo o fato que $y_{32} \leq L_2 - 1$. Portanto ou $y_{31} \leq y_{21}$ ou $y_{21} \leq y_{31}$. Vamos considerar primeiramente o caso em que $y_{31} \leq y_{21}$. Portanto, $(y_{32}+1)a_2 = (y_{21} - y_{31}a_1 + (y_{32}+1)a_3$ e logo $y_{32} \geq L_2$. Segue que $y_{32} = L_2 - 1$, assim temos

$$N = y_{31}a_1 + (L_2 - 1)a_2 - a_3 = y_{12}a_2 + y_{13}a_3 - a_1$$

Isso implica que $(L_2 - 1 - y_{12})a_2 + (y_{31}+1)a_1 = (y_{13}+1)a_3$. Portanto $y_{13}+1 \geq L_3$ que faz com que $y_{13} = L_3 - 1$. Agora temos $y_{21}a_1 + y_{23}a_3 - a_2 = N = y_{12}a_2 + (L_3 - 1)a_3 - a_1$. Com isso, $(y_{21}+1)a_1 = (y_{12}+1)a_2 + (L_3 - 1 - y_{23})a_3$. Como anteriormente, isso faz com que $y_{21} = L_1 - 1$. Desde de que $y_{32} = L_2 - 1$,

$$\begin{aligned} N = y_{31}a_1 + (L_2 - 1)a_2 - a_3 &= y_{31}a_1 + (x_{21}a_1 + x_{23}a_3) - a_2 - a_3 \\ &= (y_{31} + x_{21})a_1 + (x_{23} - 1)a_3 - a_2. \end{aligned}$$

Pela unicidade das representações de N, $L_1 - 1 = y_{31} + x_{21}$ e $x_{23} - 1 = y_{23}$ com $x_{23} > 0$. De maneira similar podemos mostrar que $y_{31} = x_{31} - 1$. Agora podemos escrever

$$\begin{aligned} N &= (L_1 - 1)a_1 + y_{23}a_3 - a_2 = (y_{31} + x_{21})a_1 + (x_{23} - 1)a_3 - a_2 \\ &= (x_{21}a_1 + x_{23}a_3) + y_{31}a_1 - a_3 - a_2 = (L_2 - 1)a_2 + y_{31}a_1 - a_3 \\ &= (L_2 - 1)a_2 + (x_{31} - 1)a_1 - a_3 \end{aligned}$$

Resta o caso em que $y_{21} < y_{31}$. Trocando os índices na prova acima, podemos ver que

$$N = (L_3 - 1)a_3 + (x_{21} - 1)a_1 - a_2.$$

Isto mostra que temos duas possibilidades para N, $(L_2 - 1)a_2 + (x_{31} - 1)a_1 - a_3$ e $(L_3 - 1)a_3 + (x_{21} - 1)a_1 - a_2$. Portanto $t(S) = |S(1) \setminus S| \leq 2$. □

Do teorema anterior e da Proposição 1.16 segue o seguinte resultado.

Corolário 1.21. *Se S é um semigrupo numérico tal que $e(S) \leq 3$, então S satisfaz a conjectura de Wilf.*

Exemplo 1.22. *Sejam S_1 e S_2 os semigrupos numéricos dos Exemplos, 1.2 e 1.3 respectivamente. Temos que $e(S_1) = 3$ e $e(S_2) = 2$, portanto pelo corolário acima segue que ambos satisfazem a conjectura de Wilf.*

Para mais detalhes sobre a teoria de semigrupos numéricos, veja [10]. E para mais resultados envolvendo a conjectura de Wilf para semigrupos numéricos, veja [5], [6] e [13].

Capítulo 2

A conjectura de Wilf para Semigrupos Numéricos Generalizados

Nesse capítulo vamos apresentar várias definições importantes para o estudo dos semigrupos numéricos generalizados. Utilizando essas definições vamos mostrar que todo semigrupo numérico generalizado admite um único conjunto minimal de geradores, como feito em [3]. A seguir apresentaremos a Conjectura de Wilf Generalizada e a mostraremos para algumas famílias de semigrupos numéricos generalizados, como feito em [4].

2.1 Geradores de um Semigrupo Numérico Generalizado

O objetivo dessa seção é construir um fato mencionado anteriormente, que todo semigrupo numérico generalizado admite um único conjunto minimal de geradores, além de dar condições para verificar se um determinado conjunto gera um semigrupo numérico generalizado, sendo esse resultado bastante útil para implementação de algoritmos. Durante essa construção, vamos dar algumas definições básicas essenciais para o estudo de semigrupos numéricos generalizados.

Definição 2.1. *Seja S um submonoide de $\mathbb{N}^d$, onde d é um inteiro positivo. Se $H(S) = \mathbb{N}^d \setminus S$ é finito, S é chamado de semigrupo numérico generalizado.*

Durante esse trabalho vamos nos referir a um semigrupo numérico generalizado por GNS, uma sigla derivada do termo em inglês *generalized numerical semigroups*. O conjunto $H(S)$ é chamado de conjunto das lacunas de S e claro, um elemento de $H(S)$ é chamado de **lacuna** de S e sua cardinalidade é chamada de **gênero** de S e denotada por $g(S)$, como no caso de semigrupo numérico $(d = 1)$.

Sejam $x, y \in \mathbb{N}^d$ com $x = (x^{(1)}, ..., x^{(d)})$ e $y = (y^{(1)}, ..., y^{(d)})$. Temos uma ordem parcial natural $\leq$ sobre $\mathbb{N}^d$ dada por: $x \leq y \iff x^{(i)} \leq y^{(i)}$, para todo $i = 1, ..., d$.

Para um GNS S, vamos denotar $S^* = S \setminus \{0\}$ e $S^* + S^* = \{a + b\ ;\ a, b \in S^*\}$.

Lema 2.2. *Seja S um submonoide de $\mathbb{N}^d$. Então $S^* \setminus (S^* + S^*)$ é um sistema de geradores para S. Além disso, qualquer sistema de geradores de S contém $S^* \setminus (S^* + S^*)$.*

Demonstração. Seja $s \in S^*$. Se $s \notin S^* \setminus (S^* + S^*)$, então existem $x, y \in S^*$ tal que $s = x + y$. Observe que segundo a ordem parcial natural, $x < s$ e $y < s$. Repetindo esse processo para x e y e após um número finito de passos (devida à ordem parcial), temos que $s = s_1 + ... + s_n$ onde $s_i \in S^* \setminus (S^* + S^*)$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Portanto, $S^* \setminus (S^* + S^*)$ é um sistema gerador de S.

Agora, seja A um conjunto de geradores para S. Seja $x \in S^* \setminus (S^* + S^*)$. Existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{N}$ e $a_1, ..., a_n \in A$ tal que $x = \lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n$. Como $x \notin S^* + S^*$, temos que ter $x = a_i$ para algum $i \in \{1, ..., n\}$. Logo, $S^* \setminus (S^* + S^*) \subset A$. $\square$

Lema 2.3. *Seja S um GNS de gênero g com $H(S) = \{h_1, ..., h_{g-1}, h\}$ e h um elemento maximal em $H(S)$ com respeito a ordem parcial natural em $\mathbb{N}^d$. Então, $S' = S \cup \{h\}$ é um GNS com $H(S') = \{h_1, ..., h_{g-1}\}$ e gênero $g - 1$.*

Demonstração. Seja $S' = S \cup \{h\}$. Veja que S' é um GNS já que $S \subseteq S'$ e portanto $0 \in S \cup \{h\}$. Agora como h é maximal temos que $h + x \in S$ para todo $x \in \mathbb{N}^d \setminus \{0\}$ e, em particular $H(S) \supsetneq H(S')$, portanto $H(S)$ é finito. Vamos provar que S' tem gênero $g - 1$. Suponha que existe $h_j \in H(S)$ com $j \in \{1, ..., g-1\}$ tal que $h_j \in S'$. Então $h_j = \sum_k u_k g_k + \lambda h$ com $g_k \in S$ e $u_k \in \mathbb{N}$. Se $\lambda = 0$, então $h_j \in S$, contradição com $h_j \in H(S)$. Se $\lambda \neq 0$ então $h_j \geq h$, que contradiz a maximalidade de h em $H(S)$. Portanto $h_j \notin S'$ para $j \in \{1, ..., g-1\}$, que implica que $H(S') = \{h_1, ..., h_{g-1}\}$. Em particular, $S' = S \cup \{h\}$. □

Proposição 2.4. *Todo GNS admite um sistema finito de geradores.*

Demonstração. Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$. Se $g = 0$, então $S = \mathbb{N}^d$ que é gerado pelos vetores canônica $\{e_1, ..., e_d\}$, logo tem um sistema finito de geradores. Suponha por indução que todo GNS de gênero até g possui um sistema finito de geradores. Seja $S \subsetneq \mathbb{N}^d$ um GNS de gênero $g+1$ e seja h um elemento maximal em $H(S)$ com respeito a ordem parcial natural em $\mathbb{N}^d$. Pelo Lema 2.3, temos que $S' = S \cup \{h\}$ é um GNS em $\mathbb{N}^d$ com gênero g, que, pela hipótese de indução é finitamente gerado. Seja $G(S')$ o conjunto dos geradores de S'. Veja que $h \in G(S')$ pois h não pertence a S, portanto $G(S') \subset S \cup \{h\}$. Vamos denotar $G(S') = \{g_1, ..., g_s, h\}$ com $g_i \in S$ para todo $i \in \{1, ..., s\}$. Seja $\beta = \{g_1, ..., g_s, h + g_1, ..., h + g_s, 2h, 3h\}$. Pela maximalidade de h em $H(S)$ temos que $\beta \subset S$. Observe que o semigrupo gerado por β tem como lacunas $H(S') \cup \{h\}$, que é exatamente $H(S)$, portanto β é um sistema finito que gera S. □

Corolário 2.5. *Todo GNS admite um único sistema minimal finito de geradores.*

Demonstração. Pelo Lema 2.2, temos que um GNS admite um único conjunto minimal de geradores, $S^* \setminus (S^* + S^*)$, que está contido em qualquer sistema de geradores. Pela Proposição 2.4 temos que um GNS admite um sistema finito de geradores, como $S^* \setminus (S^* + S^*)$ está contido nesse sistema, segue que é finito. □

Como através do corolário temos que um GNS admite um único sistema minimal finito de geradores, vamos denotar os elementos desse sistema por $G(S)$ e sua cardinalidade por $e(S)$.

A seguir, reunimos algumas definições de conjuntos e invariantes relacionados a um GNS S que serão utilizadas na sequência do trabalho. Observamos que $\leq$ denota a ordem parcial natural definida em $\mathbb{N}^d$.

Definição 2.6. *Dado S um GNS e $h \in H(S)$, definimos:*

1. *$G(S)$ é o conjunto minimal de geradores de S, $e(S) = |G(S)|$.*
2. *$H(S) = \mathbb{N}^d \setminus S$ é o conjunto das lacunas, S tem gênero $g(S) = |H(S)|$.*
3. *$H(h) = \{x \in H(S) | x \leq h\}$.*
4. *$C(h) = \{x \in \mathbb{N}^d | x \leq h\}$.*
5. *$C(S) = \{x \in \mathbb{N}^d | x \leq t$ para algum $t \in H(S)\}$, $c(S) = |C(S)|$.*
6. *$N(h) = \{x \in S | x \leq h\}$.*
7. *$N(S) = \{x \in S | x \leq t$ para algum $t \in H(S)\}$, $n(S) = |N(S)|$.*

Exemplo 2.7. *Seja* $S = \mathbb{N}^3 \setminus \{(1,0,0),(1,1,0),(2,0,0),(2,1,0),(5,0,0)\}$ *e* $h = (2,1,0) \in H(S)$*:*

1. *Utilizando um software podemos ver que* S *é gerado por* $G(S) = \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,1),(1,2,0),(5,1,0)\}$ *e com isso* $e(S) = 9$*.*

2. *É claro que as lacunas de* S *são* $\{(1,0,0),(1,1,0),(2,0,0),(2,1,0),(5,0,0)\}$ *e portanto* S *tem gênero* $g(S) = 5$*.*

3. $H(h) = \{(1,0,0),(1,1,0),\ (2,0,0),(2,1,0)\}$*.*

4. $C(h) = \{(0,0,0),(1,0,0),(2,0,0),(1,1,0),(0,1,0),(2,1,0)\}$*.*

5. $C(S) = \{(0,0,0),(1,0,0),(2,0,0),(1,1,0),(0,1,0),(2,1,0),(3,0,0),(4,0,0),(5,0,0)\}$*, logo* $c(S) = 9$*.*

6. $N(h) = \{(0,0,0),\ (0,1,0)\}$*.*

7. $N(S) = \{(0,0,0),(0,1,0),(3,0,0),(4,0,0)\}$*, portanto* $n(S) = 4$*.*

Lema 2.8. *Seja* $S \subseteq \mathbb{N}^d$ *um monoide. Então* S *é um GNS se, e somente se, existe* $t \in \mathbb{N}^d$ *tal que, para todo elemento* $s \notin C(t)$*, tem-se* $s \in S$*.*

Demonstração. Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um GNS com $H(S) = \{h_1, ..., h_g\}$ seu conjunto de lacunas. Seja $t^{(i)} \in \mathbb{N}$ o maior número que aparece na i-ésima coordenada dos elementos em $H(S)$, para $i \in \{1, ..., d\}$. Seja $t = (t^{(1)}, ..., t^{(d)}) \in \mathbb{N}^d$. Assim, se $s \notin C(t)$, isto é, $s > t$, temos que $s \geq t \geq h_i$, para qualquer $i = 1, ..., d$. Seja $s \in S$. Escolha $t \in \mathbb{N}^d$ tal que para todo $s \notin C(t)$, $s \in S$. Se $h \in \mathbb{N}^d \setminus S$ então $h \in C(t)$, logo $(\mathbb{N}^d \setminus S) \subset C(t)$ e como $C(t)$ é finito, segue que S é um GNS. □

Teorema 2.9. *Seja* $d \geq 2$ *e tome* $S = \langle A \rangle$ *o monoide gerado pelo conjunto* $A \subseteq \mathbb{N}^d$*. Então* S *é um GNS se, e somente se, o conjunto* A *satisfaz as condições:*

1. *para cada* $j = 1, 2, ..., d$ *existem* $a_1^{(j)}e_j, a_2^{(j)}e_j, \cdots, a_{r_j}^{(j)}e_j \in A, r_j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*, tais que* $mdc(a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, \cdots, a_{r_j}^{(j)}) = 1$*.*

2. *para cada* i, k*,* $1 \leq i < k \leq d$ *existe* $x_{ik}, x_{ki} \in A$ *tais que* $x_{ik} = e_i + n_i^{(k)}e_k$ *e* $x_{ki} = e_k + n_k^{(i)}e_i$ *com* $n_i^{(k)}, n_k^{(i)} \in \mathbb{N}$*.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Se A não satisfaz a primeira condição para algum j, então existem infinitos elementos ae_j, $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, que não pertencem a S. Se A não satisfaz a segunda condição para algum $i \neq j$, então temos que existem infinitos elementos $e_i + ne_k$ com $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ não pertencentes a S.

$\Leftarrow$) Para todo $j = 1, ..., d$, seja S_j o semigrupo numérico gerado por $\{a_1^{(j)}, ..., a_{r_j}^{(j)}\}$. Denotemos por $F^{(j)}$ o número de Frobenius de S_j. É claro que $(F^{(j)} + n)e_j \in S$ para todo $n \geq 1$. Tome $v = (v^{(1)}, ..., v^{(d)}) \in \mathbb{N}^d$ definido por

$$v^{(j)} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{d} F^{(i)} n_i^{(j)} + F^{(j)}$$

para qualquer $j = 1, ..., d$. Provemos que $x \in S$, para todo $x \notin C(v)$, implicando portanto, pelo Lema 2.8 que S é um GNS.

Seja $x = (x^{(1)}, ..., x^{(d)}) \in \mathbb{N}^d$ tal que $x^{(j)} > v^{(j)}$, para algum $j \in \{1, ..., d\}$. Seja $m_j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $x^{(j)} = v^{(j)} + m_j$. Se $k_1, ..., k_r \in \{1, ..., d\} \setminus \{j\}$ são tais que $x^{(k_i)} \leq F^{(k_i)}$, para todo

$i \in \{1, ..., r\}$, então $x^{(k_i)} n_{k_i}^{(j)} \leq F^{(k_i)} n_{k_i}^{(j)}$, para todo $i = 1, ..., r$. Então, para todo $i = 1, ..., r$ existe $p_i \in \mathbb{N}$ tal que $F^{(k_i)} n_{k_i}^{(j)} = x^{(k_i)} n_{k_i}^{(j)} + p_i$. Agora sejam $h_1, ..., h_s \in \{1, ..., d\} \setminus \{j\}$ as coordenadas de x tais que $x^{(h_i)} > F^{(h_i)}$, para todo $i \in \{1, ..., s\}$, assim $x^{(h_i)} e_{h_i} \in S$, para todo $i = 1, ..., s$. Vamos considerar as seguintes igualdades:

$$
\begin{aligned}
x &= \sum_{i=1}^{d} x^{(i)} e_i = \sum_{i=1}^{r} x^{(k_i)} e_{k_i} + \sum_{i=1}^{s} x^{(h_i)} e_{h_i} + x^{(j)} e_j \\
&= \sum_{i=1}^{r} x^{(k_i)} e_{k_i} + \sum_{i=1}^{s} x^{(h_i)} e_{k_i} + (\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{d} F^{(i)} n_i^{(j)} + F^{(j)} + m_j) e_j \\
&= \sum_{i=1}^{r} (x^{(k_i)} e_{k_i} + F^{(k_i)} n_{k_i}^{(j)} e_j) + \sum_{i=1}^{s} x^{(h_i)} e_{h_i} + (\sum_{i=1}^{s} F^{(h_i)} n_{h_i}^{(j)} + F^{(j)} + m_j) e_j \\
&= \sum_{i=1}^{r} (x^{(k_i)} e_{k_i} + (x^{(k_i)} n_{k_i}^{(j)} + p_i) e_j) + \sum_{i=1}^{s} x^{(h_i)} e_{h_i} + (\sum_{i=1}^{s} F^{(h_i)} n_{h_i}^{(j)} + F^{(j)} + m_j) e_j \\
&= \sum_{i=1}^{r} x^{(k_i)} (e_{k_i} + n_{k_i}^{(j)} e_j) + \sum_{i=1}^{s} x^{(h_i)} e_{h_i} + (\sum_{i=1}^{s} F^{(h_i)} n_{h_i}^{(j)} + \sum_{i=1}^{r} p_i + F^{(j)} + m_j) e_j.
\end{aligned}
$$

Portanto, x é a soma de elementos em S, logo S é um GNS. □

Exemplo 2.10. *Usando o teorema anterior podemos verificar que o conjunto* $A_1 = \{(0,3), (0,4), (1,1), (1,2)\}$ *não gera um GNS pois, para* $j = 1$, *não existe um elemento da forma* ae_1, *como exigido na primeira condição.*

Agora o conjunto $A_2 = \{(0,3), (0,4), (1,0), (1,1), (1,2)\}$ *gera um GNS pois satisfaz as condições do teorema:*

1. $(1,0) \in A$ *e* $(0,3), (0,4) \in A$ *com* $mdc(3,4) = 1$, *portanto satisfaz a primeira condição.*

2. *Veja que* $(1,0) + 1(0,1) = (1,1) \in A_2$, *logo satisfaz a segunda condição.*

2.2 Conjectura de Wilf Generalizada

Nessa seção vamos apresentar mais algumas definições básicas para o estudo de semigrupos numéricos generalizados e introduzir a generalização da conjectura de Wilf, que é o foco principal deste trabalho.

A seguir apresentaremos uma generalização para a Conjectura de Wilf no cenário de semigrupos numéricos generalizados. Tal generalização foi proposta por Cisto, DiPasquale, Failla, Flores, Peterson e Utano, em [4].

Conjectura 2.11. ***Conjectura de Wilf Generalizada:*** *Se* $S \subset \mathbb{N}^d$ *é um GNS, então*

$$e(S)n(S) \geq d\, c(S).$$

Observe que no caso em que $d = 1$, a Conjectura de Wilf Generalizada coincide com a Conjectura de Wilf para semigrupos numéricos, como desejado.

A seguir vamos introduzir dois conjuntos essenciais para o estudo de GNSs e utilizar dessas definições para construir ferramentas para mostrar a conjectura para determinadas famílias. Esses resultados são encontrados em [2].

Definição 2.12. *Seja S um GNS. Definimos:*

1. $PF(S) = \{h \in H(S) | h + S^* \subset S^*\}$ *é o conjunto dos pseudo-números de Frobenius;*

2. $EH(S) = \{h \in PF(S) | 2h \in S\}$ *é o conjunto das lacunas especiais;*

3. S *é irredutível se não pode ser escrito como interseção de dois GNSs que o contenham propriamente.*

Definição 2.13. *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um GNS. Vamos definir em $\mathbb{Z}^d$ a seguinte relação:*

$$a \leq_S b \text{ se, e somente se, } b - a \in S.$$

Proposição 2.14. *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um GNS. O conjunto $PF(S)$ é o conjunto dos elementos maximais em $H(S)$ com respeito a $\leq_S$.*

Demonstração. Seja x um elemento maximal em $\mathbb{Z}^d \setminus S$ com respeito a $\leq_S$. Se existe $s \in S^*$ tal que $x + s \notin S^*$, então $x \leq_S x + s$ que contradiz a maximalidade de x. Por outro lado, seja $x \in PF(S)$. Se existe $y \in \mathbb{Z}^d \setminus S$ tal que $y - x = s \in S$ então $x + s \notin S$, que é uma contradição. $\square$

Exemplo 2.15. *Seja $S = \mathbb{N}^3 \setminus \{(1,0,0),(1,1,0),(2,0,0),(2,1,0),(5,0,0)\}$, como no Exemplo 2.7. Temos que $PF(S) = \{(1,1,0),(2,1,0),(5,0,0)\} = EH(S)$. Pela proposição anterior, estes são os elementos maximais com respeito a $\leq_S$ em $H(S)$.*

Proposição 2.16. *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um GNS e $x \in H(S)$. Então $S \cup \{x\}$ é um GNS se, e somente se, $x \in EH(S)$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Se $S \cup \{x\}$ é um GNS, então temos que ter $x \in G(S)$. Logo $x + s \in S$, para todo $s \in S^*$. É claro que se $x \in S \cup \{x\}$, $2x \in S$. Logo, $x \in EH(S)$.

$\Leftarrow$) Como $0 \in S$ segue que $0 \in S \cup \{x\}$. Sejam $a, b \in S \cup \{x\}$. Suponhamos que a e b sejam diferentes de x, assim $a + b \in S \subset S \cup \{x\}$. Suponha agora sem perda de generalidade que $a \in S$ e $b = x$. Como $x \in EH(S)$, então $x \in PF(S)$. Logo $a + b \in S \subset S \cup \{x\}$. Agora se $a = b = x$, por hipótese $2x \in S$. Portanto $a + b \in S$, para todos $a, b \in S \cup \{x\}$. Por fim, como $\mathbb{N}^d \setminus S$ é finito, claro que $\mathbb{N}^d \setminus (S \cup \{x\})$ também é finito. Segue portanto que $S \cup \{x\}$ é um GNS. $\square$

Proposição 2.17. *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um GNS. Então S é irredutível se, e somente se, $|EH(S)| = 1$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha por contradição que existam $x, y \in EH(S)$ tais que $x \neq y$. Assim, pela Proposição 2.16, temos que $S \cup \{x\}$ e $S \cup \{y\}$ são GNSs distintos que contém S propriamente. Agora, $(S \cup \{x\}) \cap (S \cup \{y\}) = S$, que contradiz o fato de S ser irredutível.

$\Leftarrow$) Suponha por contradição que existam dois GNSs S_1 e S_2 tais que $S \subsetneq S_1$ e $S \subsetneq S_2$ com $S_1 \cap S_2 = S$. Sejam x, y elementos maximais, com respeito a ordem parcial natural, em $S_1 \setminus S$ e $S_2 \setminus S$, respectivamente. É claro que $x, y \notin S$. Provemos que $x, y \in EH(S)$. Como x é maximal em $S_1 \setminus S$, temos que $2x \notin S_1 \setminus S$, pois $2x > x$. Se $s \in S \setminus \{0\}$, então $x + s > x$, portanto $x + s \notin S_1 \setminus S$. Além disso, $x \in S_1$ e $s \in S \setminus \{0\} \subset S_1 \setminus \{0\}$, portanto $x + s \in S_1$ e logo $x + s \in S$. Concluímos então que $x \in EH(S)$. De maneira análoga temos que $y \in EH(S)$. Como por hipótese $|EH(S)| = 1$, segue que $x = y$ e portanto $x \in S_1 \setminus S$ e $x \in S_2 \setminus S$. Como $S_1 \cap S_2 = S$, temos que $x \in S$, que é uma contradição já que $x \in H(S)$. $\square$

Exemplo 2.18. *Seja $S = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,1),(1,0),(2,0),(2,1),(4,0),(5,1)\}$. Utilizando um software calculados que S possui 18 geradores. $EH(S) = \{(5,1)\}$, pela proposição anterior segue que S é irredutível.*

Proposição 2.19. *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um GNS. Então S é irredutível se, e somente se, existe $f \in H(S)$ tal que, para todo $h \in H(S)$ com $2h \neq f$, temos $f - h \in S$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Pela Proposição 2.17, temos que $EH(S)$ tem apenas um elemento. Seja $EH(S) = \{f\}$. Tome $h \in H(S)$ com $h \neq f$ e suponha que $2h \neq f$. Como $h \notin EH(S)$ temos duas possibilidades:

1. Suponha que exista $s_1 \in S \setminus \{0\}$ tal que $f_1 = h + s_1 \notin S$, em particular $f_1 - h \in S$. Se $f_1 = f$ a afirmação se segue. Se $f_1 \neq f$, então $f_1 \notin EH(S)$. Vamos mostrar que existe $s_2 \in S \setminus \{0\}$ e $f_2 \notin S$, com $f_2 > f_1$ tal que $f_2 = h + s_2$. Caso $f_1 \notin PF(S)$, existe $t \in S \setminus \{0\}$ tal que $f_1 + t \notin S$. Defina $f_2 = f_1 + t = h + (s_1 + t)$, $s_2 = s_1 + t$. Dessa forma, $f_2 > f_1$. Por outro lado, se $f_1 + t \in S$, para todo $t \in S \setminus \{0\}$, vamos considerar $f_2 = 2f_1 \notin S$, teremos $f_2 = h + (h + 2s_1)$ e $s_2 = h + 2s_1 = f_1 + s_1 \in S$. Portanto provamos que existe $s_2 \in S \setminus \{0\}$ e $f_2 \notin S$ com $f_2 > f_1$ tal que $f_2 = h + s_2$. Se $f_2 = f$ as afirmações seguem, ou caso contrário, com o mesmo argumento conseguimos uma sequência de elementos $f_i \notin S$ com $f_i > f_{i-1}$ para todo i e $f_i = h + s_i$ e $s_i \in S \setminus \{0\}$. Como $H(S)$ é um conjunto finito, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_k = f$, com $f_k - h \in S$.

2. Suponha que $h + s \in S$ para todo $s \in S \setminus \{0\}$ e $h \in PF(S)$. Como $h \notin EH(S)$, então $2h \notin S$. Provemos por contradição. Observe que, para cada $i \in \mathbb{N}$, temos que $ih + g \in S$ para cada $g \in S \setminus \{0\}$. Como $H(S)$ é um conjunto finito, existe $k = \max\{i \in \mathbb{N} | ih \notin S\}$. Em particular $kh \in EH(S)$, o que implica que $kh = f$. Como $2h \neq f$ então $k \geq 3$. Considere o elemento $\bar{h} = (k-1)h$, temos que $\bar{h} + s \in S$ para todo $s \in S \setminus \{0\}$ e $2\bar{h} = 2(k-1)h \in S$ desde que $2(k-1) > k$, isto é $\bar{h} \in EH(S)$. Mas isto é uma contradição já que $2\bar{h} \neq f$.

$\Leftarrow$) Por hipótese, f é o maior elemento de $H(S)$ com respeito a $\leq_S$, exceto para o elemento $h \in H(S)$ tal que $2h = f$, se ele existir. Pela Proposição 2.14 os possíveis elementos em $PF(S)$ são f e $h = \dfrac{f}{2}$. Além disso, $EH(S) \subseteq PF(S)$ e $h \notin EH(S)$ e desde que $2h = f \notin S$, devemos ter $EH(S) = \{f\}$. Portanto S é irredutível. □

Lema 2.20. *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um GNS irredutível com $EH(S) = \{f\}$. Então, apenas uma das condições é satisfeita:*

1. *$PF(S) = \{f\}$ se f possui uma coordenada ímpar.*
2. *$PF(S) = \left\{f, \dfrac{f}{2}\right\}$ se todas as coordenada de f são pares.*

Demonstração. Se f tem alguma coordenada ímpar, então não existe $h \in H(S)$ tal que $2h = f$ e pela Proposição 2.19, f é um elemento maximal em $H(S)$ com respeito a $\leq_S$. Portanto, $PF(S) = \{f\}$ pela Proposição 2.14. Se todas as coordenadas de f são pares, então $\dfrac{f}{2} \in \mathbb{N}^d$ e claro que esse elemento está em $H(S)$, já que $f \in H(S)$. Assim, $f - \dfrac{f}{2} = \dfrac{f}{2} \notin S$, então f e $\dfrac{f}{2}$ não são comparáveis com respeito a $\leq_S$. Além disso, pela Proposição 2.19, f é maior que os elementos de $H(S)$ diferente de $\dfrac{f}{2}$ com respeito a $\leq_S$, portanto f é um elemento maximal com respeito a essa ordem, isto é, $f \in PF(S)$. $\dfrac{f}{2}$ também é maximal em $H(S)$ com respeito a $\leq_S$, pois caso contrário, existiria um $h \in H(S)$ tal que $\dfrac{f}{2} \leq_S h \leq_S f$, mas isso é uma contradição com a maximalidade de $\dfrac{f}{2}$. Concluímos portanto que $PF(S) = \{f, \dfrac{f}{2}\}$. □

Observação 2.21. *Observe que se uma das condições do lema anterior for satisfeita, então S é irredutível. De fato, note que em ambos os casos $EH(S) = \{f\}$ e a afirmação segue da Proposição 2.17.*

O teorema a seguir será bastante útil na demonstração de alguns resultados.

Teorema 2.22. *[11, Theorem 7] Seja $S \subset \mathbb{N}^d$ um GNS, $S \neq \{0\}$ e $S \neq \mathbb{N}^d$, então $e(S) \geq 2d$.*

Teorema 2.23. *Seja $S \subset \mathbb{N}^d$ um GNS. São equivalentes:*

1. *$|PF(S)| = 1$.*
2. *$PF(S) = \{f\}$ e f tem pelo menos uma coordenada ímpar.*
3. *Existe $f \in H(S)$ tal que $f - h \in S$ para todo $h \in H(S)$.*

Demonstração. 1) $\Rightarrow$ 2) Segue diretamente pelo Lema 2.20.

2) $\Rightarrow$ 3) Pela Observação 2.21, temos que S é simétrico e portanto, irredutível. Dessa forma, pela Proposição 2.19 segue que existe $f \in H(S)$ tal que $f - h \in S$ para todo $h \in H(S)$.

3) $\Rightarrow$ 1) Pela **??** segue que S é irredutível, e assim, pelo Lema 2.20, $|PF(S)| = 1$. $\square$

Teorema 2.24. *Seja $S \subset \mathbb{N}^d$ um GNS. São equivalentes:*

1. *$PF(S) = \left\{f, \dfrac{f}{2}\right\}$.*
2. *Existe $f \in H(S)$, com todas as coordenadas pares, tal que $f - h \in S$ para todo $h \in H(S) \setminus \left\{\dfrac{f}{2}\right\}$.*

Demonstração. Pela observação 2.21, temos que S é simétrico, portanto pelo Lema 2.20 e pela Proposição 2.19 segue-se o resultado. $\square$

Definição 2.25. *Se S é um GNS e satisfaz o Teorema 2.23, S é chamado de simétrico, se satisfaz o Teorema 2.24 é chamado de pseudo-simétrico. Em ambos os casos $EH(S) = \{f\}$.*

Note que, pelo Lema 2.20, temos que qualquer GNS S irredutível é tanto simétrico ou pseudo-simétrico, assim como no caso de semigrupos numéricos.

Exemplo 2.26. *Seja $S = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,1), (1,0), (2,0), (2,1), (4,0), (5,1)\}$, como no Exemplo 2.18. Sabemos que $EH(S) = \{(5,1)\}$, portanto S é irredutível. Agora, $PF(S) = \{(5,1)\}$, portanto S é um GNS simétrico.*

Exemplo 2.27. *Seja $S = \mathbb{N}^4 \setminus \{(1,0,0,0), (2,0,0,0), (3,0,0,0), (6,0,0,0)\}$. É fácil ver que $EH(S) = \{(6,0,0,0)\}$ portanto S é irredutível. Agora, $PF(S) = \{(3,0,0,0), (6,0,0,0)\}$ portanto S é um GNS pseudo-simétrico.*

Definição 2.28. *Se existe um único elemento maximal f em $H(S)$ com respeito a ordem parcial natural em $\mathbb{N}^d$, dizemos que S é Frobenius com elemento de Frobenius f. Dizemos que (S, f) é GNS Frobenius.*

Proposição 2.29. *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um GNS irredutível com $EH(S) = \{f\}$. Então (S, f) é um GNS Frobenius.*

Demonstração. É suficiente provar que f é o único elemento maximal em $H(S)$ com respeito a ordem parcial natural em $\mathbb{N}^d$. Seja $h \in H(S)$, se $h = \dfrac{f}{2}$ é claro que $h \leq f$. Se $h \neq f$ então pela Proposição 2.19, $f - h \in S \subseteq \mathbb{N}^d$, portanto $h \leq f$. $\square$

Proposição 2.30. *Seja $h \in \mathbb{N}^d$ e tome $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um GNS. Temos as relações:*

1. *$|C(h)| = (h^{(1)} + 1)(h^{(2)} + 1) \cdots (h^{(d)} + 1)$*

2. $|N(h)| + |H(h)| = (h^{(1)} + 1)(h^{(2)} + 1) \cdots (h^{(d)} + 1)$.

Demonstração. Observe que $C(h)$ representa o conjunto dos pontos interiores do hiper retângulo cujos vértices são h, a origem dos eixos e os pontos nos planos coordenados $(h^{(1)}, 0, ..., 0)$, $(0, h^{(2)}, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, h^{(d)})$. Com isso podemos deduzir a primeira afirmação. Agora se observarmos temos que $C(h) = N(h) \cup H(h)$ para todo $h \in \mathbb{N}^d$, além disso, $N(h)$ e $H(h)$ são disjuntos. Assim se segue a segunda afirmação. □

Considere a aplicação

$$\psi_h : N(h) \to H(h) \text{ definida por } \psi_h(s) = h - s.$$

Veja que a aplicação está bem definida: dado $s \in N(h)$ temos que $s \in S$ e $h - s \notin S$ pois caso contrário teríamos que $h - s + s = h \in S$. Observe que ψ_h é injetora pois se $s_1 \neq s_2$, então $h - s_1 \neq h - s_2$. Como consequência temos o seguinte resultado.

Lema 2.31. *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um GNS e seja $h \in H(S)$. Então $|N(h)| \leq |H(h)| \leq |H(S)|$.*

A proposição a seguir caracteriza a conjectura de Wilf para GNS Frobenius, que será definida posteriormente.

Proposição 2.32. *Seja (S, f) um GNS Frobenius em $\mathbb{N}^d$. Então $2g(S) \geq (f^{(1)} + 1)(f^{(2)} + 1) \cdots (f^{(d)} + 1)$.*

Demonstração. Veja que $g(S) = |H(S)| = |H(f)|$ já que S é um GNS Frobenius. Além disso, pelo Lema 2.31 temos que $|H(f)| \geq |N(f)|$, portanto pela Proposição 2.30 segue que $(h^{(1)} + 1)(h^{(2)} + 1) \cdots (h^{(d)} + 1) = |N(f)| + |H(f)| \leq 2|H(S)|$. □

Teorema 2.33. *Seja $S \subsetneq \mathbb{N}^d$ um GNS. Então:*

1. *S é simétrico se, e somente se, existe $f \in H(S)$ com $2|H(S)| = (f^{(1)} + 1)(f^{(2)} + 1) \cdots (f^{(d)} + 1)$.*

2. *S é pseudo-simétrico se, e somente se, existe $f \in H(S)$ com $2|H(S)| - 1 = (f^{(1)} + 1)(f^{(2)} + 1) \cdots (f^{(d)} + 1)$.*

Demonstração. 1. $\Rightarrow$) Suponha que S seja simétrico. Temos que $EH(S) = PF(S) = \{f\}$ e, portanto, pela Proposição 2.29, $H(f) = H(S)$. Sabemos que a aplicação ψ_h é injetora. Vejamos que também vale a sobrejeção: se $h \in H(f)$, como S é simétrico, então $s = f - h \in S$ pela Proposição 2.19, logo $\psi_f(s) = h$, portanto a aplicação é sobrejetora. Dessa forma, pela bijetividade de ψ_h, $|N(f)| = |H(f)| = |H(S)|$ e $2|H(S)| = |N(f)| + |H(f)| = (f^{(1)} + 1)(f^{(2)} + 1) \cdots (f^{(d)} + 1)$, pela Proposição 2.30.

$\Leftarrow$) Seja $f \in H(S)$ tal que $2|H(S)| = (f^{(1)} + 1)(f^{(2)} + 1) \cdots (f^{(d)} + 1)$. Pelo Lema 2.31 e pela Proposição 2.30, segue que $2g = |N(f)| + |H(f)| \leq 2|H(f)| \leq 2g$. Assim segue que $|N(f)| = |H(S)|$, com isso temos que a aplicação ψ_f é bijetiva. Agora vamos provar que, para todo $h \in H(S)$, temos que $f - h \in S$. Como $|N(f)| = |H(S)|$ e ψ_f é sobrejetora, então $|H(f)| = |H(S)|$ e se $h \in H(S)$, existe $s \in S$ tal que $\psi_f(s) = f - s = h$, ou seja $f - h = s \in S$. Pelo Teorema 2.23 segue que S é simétrico.

2. $\Rightarrow$) Suponha que S seja pseudo-simétrico, então $PF(S) = \{f, f/2\}$, $EH(S) = \{f\}$ e $H(f) = H(S)$. Além disso, para todo $h \in H(S)$ com $h \neq f/2$, temos que $f - h \in S$, assim pelo mesmo argumento do item anterior, provamos que $|N(f)| = |H(f) \setminus \{f/2\}| = g - 1$. Segue que $(f^{(1)}+1)(f^{(2)}+1) \cdots (f^{(d)}+1) = |N(f)| + |H(f)| = |H(S)| + |H(S)| - 1 = 2g - 1$.

($\Leftarrow$) Seja $f \in H(S)$ tal que $2|H(S)| - 1 = (f^{(1)}+1)(f^{(2)}+1) \cdots (f^{(d)}+1)$, em particular cada coordenada de f é um número par e $2|H(S)| - 1 = |N(f)| + |H(f)| \leq 2|H(f)| \leq 2|H(S)|$.

Portanto $|H(f)| = |H(S)| = g$ já que é impossível ter $2|H(S)| - 1 = 2|H(f)|$, o que implica que $|N(f)| = g - 1$. Além disso temos que $f/2 \in H(S)$ pois $f \in H(S)$, portanto a aplicação $\psi'_f : N(f) \to H(f) \setminus \{f/2\}$, induzida por ψ_f é bijetora. Isso implica que, para todo $h \in H(f) \setminus \{f/2\}$, existe $s \in S$, tal que $f - s = h$, onde $f - s \in S$. De onde temos que S é pseudo-simétrico, pelo Teorema 2.24.

□

Proposição 2.34. *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um GNS simétrico com elemento de Frobenius f. Então $e(S)n(S) \geq d(f^{(1)} + 1)(f^{(2)} + 1) \cdots (f^{(d)} + 1)$.*

Demonstração. Como S é de Frobenius, temos que $|H(f)| = |H(S)|$, $|N(f)| = |N(S)|$ e $|C(f)| = |C(S)|$. Como S é simétrico temos pelo Teorema 2.33 e pela Proposição 2.30 que $2|H(S)| = (f^{(1)} + 1)(f^{(2)} + 1) \cdots (f^{(d)} + 1) = |C(f)| = |C(S)| = |N(S)| + |H(S)|$. Ou seja $n(S) = |N(S)| = |H(S)|$. Pelo Teorema 2.22 temos que $e(S) > 2d$, assim $e(S)n(S) > 2d|H(S)| = d(f^{(1)} + 1)(f^{(2)} + 1) \cdots (f^{(d)} + 1)$. □

Exemplo 2.35. *Seja $S = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,1),(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\}$. Temos que $f = (6,1)$, $|H(S)| = 7$ e $2|H(S)| = 14 = (6+1)(1+1)$, assim segue pelo Teorema 2.33 que S é simétrico. Temos que $G(S) = \{(1,0),(7,1),(0,2),(0,3)\}$, logo $e(S) = 4$. $N(S) = \{(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),(4,0),(5,0),(6,0)\}$, assim, $n(S) = 7$. Dessa forma, $e(S)n(S) \geq 2(f^{(1)} + 1)(f^{(2)} + 1)$*

Exemplo 2.36. *Seja $S = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,1),(1,0),(2,0),(2,1),(4,0),(5,1)\}$ como no Exemplo 2.18. Temos que $f = (5,1)$ e $2g(S) = 12 = (5+1)(1+1)$. Assim segue pelo Teorema 2.33 que S é simétrico. Sabemos que $e(S) = 18$. Pela Proposição 2.34 temos que $18n(S) \geq 2.12$, logo podemos concluir que $n(S)$ é no mínimo 2.*

Exemplo 2.37. *Para $d = 1$ tome S um semigrupo numérico simétrico, logo S satisfaz $e(S)n(S) \geq F(S) + 1$, isto é, satisfaz a conjectura de Wilf.*

Conjectura 2.38. *(A Generalização da Conjectura de Wilf para GNS Frobenius) Seja (S, f) um GNS Frobrenius em $\mathbb{N}^d$. Então $e(S)n(S) \geq d(f^{(1)} + 1) \cdots (f^{(d)} + 1)$.*

Observe que se $S \subseteq \mathbb{N}^d$ é um GNS e $h \in H(S)$, então $|C(h)| = |N(h)| + |H(h)| = (h^{(1)} + 1) \cdots (h^{(d)} + 1)$. A ideia na conjectura anterior é substituir o valor $F(S) + 1$ por $|C(f)|$ no caso de GNS Frobenius (S, f), para o qual existe um único elemento de Frobrenius. Se (S, f) é um GNS Frobenius, então $|C(S)| = |C(f)| = (f^{(1)} + 1) \cdots (f^{(d)} + 1)$.

Lema 2.39. *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um GNS de genêro $g(S)$. Então:*

1. $|C(S)| = |H(S)| + |N(S)|$.
2. $(h^{(1)} + 1) \cdots (h^{(d)} + 1) \leq |C(S)|$ *para todo* $h \in H(S)$.

Demonstração.

1. Observe que $C(S)$ são todos os elementos de $\mathbb{N}^d$ que são menores que t para algum $t \in H(S)$. Agora $N(S)$ é o conjunto desses elementos que estão em S. Logo, segue a igualdade.

2. Veja que $(h^{(1)} + 1) \cdots (h^{(d)} + 1)$ é a quantidade de pontos menores que h, e $|C(S)|$ é quantidade de pontos menores que h, para todo $h \in H(S)$, isto é, a maior possível.

□

Este Lema nos diz que podemos substituir $(h^{(1)} + 1) \cdots (h^{(d)} + 1)$ por $c(S)$ para obter através da Conjectura 2.38 uma conjectura mais geral para semigrupos numéricos generalizados, a Conjectura 2.11.

2.3 Multiplicidade e Espessamento

Nesta seção vamos definir multiplicidade a fim de construir o que chamamos de espessamento, que associa semigrupos numéricos generalizados de diferentes dimensões. Mostraremos que se um GNS satisfaz a Conjectura de Wilf Generalizada, um espessamento dele também satisfaz, sendo assim necessário provar a Conjectura de Wilf Generalizada apenas para um GNS de dimensão menor.

Definição 2.40. *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um semigrupo numérico generalizado. Seja $M(S)^* = \{h \in H(S) | C(h) \cap S = \{0\}\}$. Chamamos os elementos de $M(S)^*$ de lacunas fundamentais de S. Seja $M(S) = M(S)^* \cup \{0\}$. A multiplicidade de S é definida por $m(S) = |M(S)|$.*

Exemplo 2.41. *Seja S o GNS do Exemplo 2.35. Temos que o conjunto das lacunas de S é $H(S) = \{(0,1), (1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1)\}$, assim o conjunto das lacunas fundamentais é dado por $M(S)^* = \{(0,1)\}$, logo $m(S) = 2$.*

Exemplo 2.42. *Seja $S = \langle (1,0), (1,2), (0,3), (0,4), (2,1) \rangle$. O conjunto de lacunas de S é $H(S) = \{(0,1), (0,2), (0,5), (1,1)\}$. Assim o conjunto das lacunas fundamentais é $M(S)^* = \{(0,1), (0,2)\}$, portanto $m(S) = 3$.*

Lema 2.43. *O conjunto $M(S)$ é o menor subconjunto de $\mathbb{N}^d$ que satisfaz: todo $x \in \mathbb{N}^d$ pode ser escrito como $x = m + s$ onde $m \in M(S)$ e $s \in S$.*

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{N}^d$. Seja s um elemento maximal de S em relação a ordem parcial natural tal que $s \leq x$. Observe que $x = s + (x - s)$, provemos que $x - s \in M(S)$. Se $x - s \notin M(S)$, então segue que $C(x - s) \cap S \neq \{0\}$, isto é, existe algum $s' \in S$ diferente de 0, tal que $s' \leq x - s$. Assim $s < s + s' \leq x$, que contradiz a escolha do s. Logo $x - s \in M(S)$ e $x = s + (x - s)$ como gostaríamos. Seja $T \subseteq \mathbb{N}^d$ satisfazendo a propriedade: Todo $x \in \mathbb{N}^d$ pode ser escrito como $x = s + t$, para algum $s \in S$ e $t \in T$. Tome $m \in M(S)$. Então $m = s + t$ para algum $s \in S$, $t \in T$. Desde que o único elemento de S menor que m é 0, temos que $m = 0 + t = t$. Portanto $M(S) \subseteq T$. □

Lema 2.44. *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um GNS. Então $c(S) \leq m(S)n(S)$.*

Demonstração. Seja $\preceq$ uma ordem total qualquer de $\mathbb{N}^d$ que refina a ordem parcial natural. Para $x \in \mathbb{N}^d$, tome $s = max_{\preceq}\{t \in S | t \leq x\}$. Defina a aplicação

$$\psi_{\preceq} : \mathbb{N}^d \to M(S) \times S \text{ definida por } \psi_{\preceq}(x) = (x - s, s)$$

Como feito na proposição anterior, $x - s \in M(S)$. Desde que $\preceq$ é uma ordem total, a decomposição $x = s + (x - s)$ escolhida dessa maneira é única. Agora, restringindo $\psi_{\preceq}$ para o subconjunto $C(S) = \{x \in \mathbb{N}^d | x < t \text{ ,para algum t } \in H(S)\}$, o maior $s \in S$ tal que $s \leq x$ também está em $C(S)$. Isso nos da que a aplicação $\psi_{\preceq} : C(S) \to M(S) \times S \cap C(S)$ é injetora. Agora veja que $c(S) = |C(S)|$, $m(S) = |M(S)|$ e $|S \cap C(S)| = n(S)$, portanto $c(S) \leq m(S)n(S)$. □

Definição 2.45. *Dizemos que um semigrupo numérico generalizado tem multiplicidade mínima se $c(S) = m(S)n(S)$. Nesse caso todo $x \in c(S)$ pode ser escrito de forma única como $x = m+s$, onde $m \in M(S)$ e $s \in S$.*

Exemplo 2.46. *Seja $S = \mathbb{N} \setminus \{(0,1), (1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1)\}$. Sabemos pelos Exemplos 2.35 e 2.41 que $n(S) = 7$ e $m(S) = 2$. Como S é de Frobenius temos que $C(S) = C(f)$, assim $C(S) = C((6,1)) = \{(0,0), (1,0), (2,0), (3,0), (4,0), (5,0), (6,0), (0,1), (1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1)\}$, logo $c(S) = 14$, e portanto, S tem multiplicidade mínima.*

Definição 2.47. *Sejam $e_1, ..., e_{d+1}$ os geradores canônicos de $\mathbb{N}^{d+1}$ e considere o semigrupo numérico generalizado isomorfo a $\mathbb{N}^d$ em $\mathbb{N}^{d+1}$ gerado por $\{e_1, ..., e_{d+1}\} \setminus e_i$, para algum i. Por abuso de notação iremos chamar esse GNS de $\mathbb{N}^d$. Seja $S \subset \mathbb{N}^d$ um GNS. O k-espessamento de S ao longo do eixo i em $\mathbb{N}^{d+1}$ é o GNS $T_k(S, i) \subseteq \mathbb{N}^{d+1}$ definido por*

$$T_k(S, i) = S \cup (e_i + S) \cup \cdots \cup (ke_i + S) \cup ((k+1)e_i + \mathbb{N}^{d+1}).$$

Proposição 2.48. *Suponha que $S \subset \mathbb{N}^d$ é um GNS com sistema minimal de geradores $G(S)$, lacunas fundamentais $M(S)^*$ e multiplicidade $m(S)$. O conjunto minimal de geradores de $T_k(S, i) \subset \mathbb{N}^{d+1}$ é*

$$\{e_i\} \cup G(S) \cup ((k+1)e_i + M(S)^*).$$

Demonstração. Vejamos que todo $x \in T_k(S, i)$ pode ser escrito em termos desses geradores. Se $x \in je_i + S$, para algum $0 \leq j \leq k$, então é claro que x é uma soma de je_i com somas de geradores de S. Agora suponha $x = (k+1)e_i + n$ para algum $n \in \mathbb{N}^{d+1}$. Pelo Lema 2.43 existem $m \in M(S)$ e $s \in S$ tal que $n = m + s$. Portanto x pode ser escrito como uma soma de $(k+1)e_i + m$, e alguns geradores de S. Pela minimalidade temos que e_i e $G(S)$ não podem ser removidos do conjunto de geradores. Se qualquer elemento de $(k+1)e_i + M(S)^*$ é removido do conjunto de geradores, então o Lema 2.43 garante que todos os $(k+1)e_i + \mathbb{N}^{d+1}$ não serão gerados. □

Corolário 2.49. *Seja $S \subset \mathbb{N}^d$ um GNS. Então $e(T_k(S, i)) = e(S) + m(S)$, $n(T_k(S, i)) = (k+1)n(S)$ e $c(T_k(S, i)) = (k+1)c(S)$.*

Exemplo 2.50. *Seja $S = \langle (1, 0), (1, 2), (0, 3), (0, 4), (2, 1) \rangle$, como no Exemplo 2.42. O 3-espessamento de S ao longo do eixo "2" em $\mathbb{N}^3$ é $T_3(S, 2) = S \cup (e_2 + S) \cup (2e_2 + S) \cup (3e_2 + S) \cup (4e_2 + \mathbb{N}^3)$. Pela proposição temos que o conjunto minimal de geradores para $T_3(S, 2)$ é $G(T_3(S, 2)) = \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 2), (0, 0, 3), (0, 0, 4), (2, 0, 1), (0, 4, 1), (0, 4, 2)\}$. Temos que $e(T_3(S, 2)) = 8 = e(S) + m(S)$.*

Proposição 2.51. *Se S satisfaz a Conjectura de Wilf Generalizada, então $T_k(S, i)$ também satisfaz. Além disso, se S tem multiplicidade mínima e satisfaz $dc(S) = n(S)e(S)$, então $(d+1)c(T_k(S, i)) = n(T_k(S, i))e(T_k(S, i))$.*

Demonstração. Pelo Corolário 2.49, temos que $(d+1)c(T_k(S, i)) = dc(T_k(S, i)) + c(T_k(S, i)) = d(k+1)c(S) + (k+1)c(S) = (k+1)(dc(S) + c(S))$ e $n(T_k(S, i))e(T_k(S, i)) = (k+1)n(S)(e(S) + m(S))$. Assim basta mostrar que $dc(S) + c(S) \leq n(S)e(S) + n(S)m(S)$, com igualdade se $dc(S) = n(S)e(S)$ e $c(S) = n(S)m(S)$. Pelo Lema 2.44, temos que $c(S) \leq m(S)n(S)$. Além disso, temos que S satisfaz a conjectura, isso é $dc(S) \leq n(S)e(S)$, assim somando as duas desigualdades temos que $dc(S) + c(S) \leq m(S)n(S) + n(S)e(S)$ como queríamos. □

Observe que com a Proposição 2.51 é suficiente provar a Conjectura de Wilf Generalizada apenas para os GNSs que são da forma $T_k(S, i)$ para um semigrupo numérico generalizado S de dimensão menor.

Vamos definir uma notação para repetição do processo de espessamento:

Definição 2.52. *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um GNS, suponha que $\mathbb{N}^d$ está inserido em $\mathbb{N}^{d+t} = \langle e_1, ..., e_{d+t} \rangle$ ao longo dos eixos $e_{i_1}, ..., e_{i_d}$ e defina $\{e_{j_1}, ..., e_{j_t}\} = \{e_1, ..., e_{d+t}\} \setminus \{e_{i_1}, ..., e_{i_d}\}$. Definimos a sequência iterativa de espessamentos:*

$$\begin{gathered} S_1 = T_{k_1}(S, j_1) \\ S_2 = T_{k_2}(S_1, j_2) \\ \vdots \\ S_t = T_{k_t}(S_{t-1}, j_t) \end{gathered}$$

Vamos denotar S_t por $T_{k_1,...,k_t}(S, j_1, ..., j_t)$. Para o caso em que $k_1 = k_2 = \cdots = k_t = k$ vamos simplificar escrevendo $T_k(S, j_1, ..., j_t)$.

Observe que como o espessamento se trata de uniões finitas, a ordem das iterações não é importante, uma vez que estão definidas as direções $j_1, ..., j_t$, existe um único caminho para o espessamento de S ao longo desses eixos. Aplicando a Proposição 2.51 repetidas vezes temos que se S satisfaz a Conjectura de Wilf Generalizada, S_t também satisfaz.
Seja A um subconjunto de $\mathbb{N}^d$, denotamos por $Span_{\mathbb{R}}(A)$ o $\mathbb{R}$-espaço vetorial de $\mathbb{R}^d$ gerado pelos elementos de A. Um subespaço de $\mathbb{R}^d$ é um **espaço vetorial coordenado** se for gerado por um subconjunto da base canônica.

Vamos considerar as seguintes notações:

- $S_{g,d} = \{S \subseteq \mathbb{N}^d | S$ é um GNS e $g(S) = g\}$.
- $S_{g,d}^{(r)} = \{S \in S_{g,d} | dim(Span_{\mathbb{R}}(H(S))) = r\}$.

Proposição 2.53. *([7],Proposition 5.2) Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um GNS e $H(S)$ seu conjunto de lacunas. Então $Span_{\mathbb{R}}(H(S))$ é um espaço vetorial coordenado.*

Demonstração. Seja S um GNS, provemos por indução sobre o gênero de S. Se $S \in S_{0,d}$ então $H(S) =$
$varnothing$, $Span_{\mathbb{R}}(H(S)) = 0$ é um espaço vetorial coordenado. Agora seja $S \in S_{g,d}$ e suponha que $Span_{\mathbb{R}}(H(S))$ é um espaço vetorial coordenado. Queremos mostrar que se dado $S' \in S_{g+1,d}$, existe $S \in S_{g,d}$, tal que $H(S) \subset H(S')$ e, então $Span_{\mathbb{R}}(H(S'))$ é um espaço vetorial coordenado. Observe $H(S) \subset H(S')$ ocorre se, e somente se, $H(S') = H(S) \cup \{t\}$, para algum $t \in G(S)$. Assim, é suficiente mostrar que $Span_{\mathbb{R}}(H(S) \cup \{t\})$ é um espaço vetorial coordenado para qualquer $t \in G(S)$. Sem perda de generalidade vamos supor que $Span_{\mathbb{R}}(H(S)) = \langle e_1, ..., e_k\rangle$. Precisamos mostrar que qualquer $t \in G(S)$ da forma $t = (w, v)$ onde $w \in \mathbb{N}^k$ e v é zero ou um vetor da base canônica de $\mathbb{N}^{d-k}$. Se $S \subset \mathbb{N}^d$ é um GNS, qualquer elemento de $\{e_1, ..., e_d\}$ que não está em $Span_{\mathbb{R}}(H(S))$ deve estar em $G(S)$. Portanto se $Span_{\mathbb{R}}(H(S)) = \langle e_1, ..., e_k\rangle$ então $\{e_{k+1}, ..., e_d\} \subseteq G(S)$. Suponha $w \in \mathbb{N}^k$, $v \in \mathbb{N}^{d-k}$ e $t = (w, v) \in G(S)$. Então, $(w, v+u) \in S \setminus G(S)$, para qualquer $u \in \mathbb{N}^{d-k} \setminus \{0\}$. Consequentemente se $u \neq 0$ e $v-u \in \mathbb{N}^{d-k}$ temos que $(w, v-u) \in H(S)$. Mas isso é uma contradição com $Span_{\mathbb{R}}(H(S))$, logo $v - u = 0$. Portanto $t = (w, v) \in G(S)$, $v = 0$ ou v é um vetor da base canônica de $\mathbb{N}^{d-k}$ □

Definição 2.54. *Seja $S \in S_{g,d}^{(r)}$.*

1. *Definimos $Eixos(S) = \{k \in \{1, 2, ..., d\} | para\ todo\ h \in H(S), h^{(k)} = 0\}$.*
2. *Definimos $\{i_1, i_2, ..., i_r\} = \{1, ..., d\} \setminus Eixos(S)$, e tome $\bar{e}_j = e_{i_j}$ para $j = 1, ..., r$. Por abuso de notação vamos escrever $\mathbb{N}^r$ como o submonoide de $\mathbb{N}^d$ gerado por $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_r$.*
3. *Defina $\bar{S} = \mathbb{N}^r \cap S$*

Lema 2.55. *O semigrupo $\bar{S}$ é um GNS de $Span_{\mathbb{R}}(H(S)) \cap \mathbb{N}^d \simeq \mathbb{N}^r$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.53 temos que $Span_{\mathbb{R}}(H(S)) \cap \mathbb{N}^d \simeq \mathbb{N}^r$. Agora desde que $\mathbb{N}^d \setminus S$ é finito $\mathbb{N}^r \setminus \bar{S}$ também é. Portanto $\bar{S}$ é um GNS em $\mathbb{N}^r$ □

Lema 2.56. *São equivalentes:*

1. *$S \in S_{g,d}^{(r)}$.*
2. *Existe algum $S' \in S_{g,r}^{(r)}$ tal que $S = T_0(S', Eixos(S))$.*

Demonstração. 1) $\Rightarrow$ 2) Suponha que $Span_{\mathbb{R}}(H(S)) = \langle e_{i_1}, ..., e_{i_r} \rangle$ e $Eixos(S) = \{j_1, ..., j_{d-r}\}$. Então $\bar{S} \in S_{g,r}^{(r)}$ e $S = \bar{S} \cup (e_{j1} + \mathbb{N}^{r+1}) \cup (e_{j2} + \mathbb{N}^{r+2}) \cup \cdots \cup (e_{jd-r} + \mathbb{N}^d) = T_0(\bar{S}, Eixos(S))$

2) $\Rightarrow$ 1) Se $S = T_0(S', Eixos(S))$, para algum $S' \in S_{g,r}^{(r)}$, então $dim(Span_{\mathbb{R}}(H(S))) = dim(Span_{\mathbb{R}}(H(S'))) = r$. Como o 0-espessamento não afeta o gênero, $S \in S_{g,d}^{(r)}$. $\square$

Corolário 2.57. *Seja $S \in S_{g,d}^{(r)}$ e suponha que $\bar{S} \in S_{g,r}^{(r)}$ satisfaz a Conjectura de Wilf Generalizada. Então S satisfaz a Conjectura de Wilf Generalizada. Além disso se $\bar{S}$ tem multiplicidade mínima e satisfaz a conjectura por igualdade, segue que S também.*

Demonstração. Segue do Lema 2.56 e da Proposição 2.51. $\square$

Exemplo 2.58. *Seja $S = \mathbb{N}^4 \setminus \{(1,0,0,0), (2,0,0,0), (3,0,0,0), (6,0,0,0)\}$ como no Exemplo 2.27. Os geradores de S são $\{(0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1), (1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1), (2,1,0,0), (2,0,1,0), (2,0,0,1), (5,0,0,0), (4,0,0,0), (3,1,0,0), (3,0,1,0), (3,0,0,1), (7,0,0,0)\}$. Assim neste caso temos que $Eixos(S) = \{2,3,4\}$ e $i_1 = 1$. Logo, $\bar{S} = \mathbb{N} \setminus \{1,2,3,6\}$ que é o semigrupo numérico gerado por $\{4,5,7\}$, e portanto $e(\bar{S}) = 3$. Pelo Corolário 1.21 temos que $\bar{S}$ satisfaz a Conjectura de Wilf, isto é $\bar{S}$ satisfaz a Conjectura de Wilf Generalizada, já que para $d = 1$ elas coincidem. Com isso temos que pelo Corolário 2.57 S satisfaz a Conjectura de Wilf Generalizada.*

Vamos recordar que no Exemplo 2.27 mostramos que S é pseudo-simétrico. E no exemplo anterior mostramos que ele satisfaz a Conjectura de Wilf Generalizada. Mostraremos na próxima seção que todos GNSs pseudo-simétricos satisfazem a conjectura.

2.4 A Conjectura de Wilf para GNS Irredutíveis

A Proposição 2.34 mostra que um GNS simétrico satisfaz a Conjectura de Wilf Generalizada. Nosso intuito agora é mostrar que os pseudo-simétricos também satisfazem tal conjectura.

Lema 2.59. *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um GNS irredutível tal que $e(S) = 2d$. Então S é simétrico.*

Demonstração. Como $e(S) = 2d$, pelo Teorema 2.9 temos que ter $S = \langle A \rangle$ onde,

$A = \{e_1, ..., e_{i-1}, e_{i+1}, ..., e_d, ae_i, be_i | i \in \{1, ..., d\}, 1 < a < b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, mdc(a,b) = 1\} \cup \{e_i + h^{(j)} e_j | j \in \{1, ..., d\} \setminus \{i\}, h^{(i)} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Observe que $\langle a, b \rangle$ é um semigrupo numérico na i-ésima coordenada. Vamos dividir em dois casos:

1. Se $a = 2$, temos que $H(\langle 2, b \rangle) = \{1, 3, 5, ..., b-2\}$. Assim, segue que $H(S) = \{he_i + \sum_{j \neq i} l_j e_j | h \in H(\langle 2, b \rangle), l_j \in \{0, ..., h^{(j)} - 1\}, j \in \{1, ..., d\} \setminus \{i\}\}$. Logo, S é um GNS Frobenius com $f = (b-2)e_i + \sum_{j \neq i} (h^j - 1)e_j$ e gênero $g(S) = \frac{b-1}{2} \prod_{j \neq i} h^{(j)}$. Com isso, $2g(S) = (b-1) \prod_{j \neq i} h^{(j)}$ e segue pelo Teorema 2.33 que S é simétrico.

2. Se $a > 2$, tome $f = ab - a - b$ o número de Frobenius de $\langle a, b \rangle$, como visto no Exemplo 1.11 e considere $h = fe_i + \sum_{j \neq i} (h^{(i)} - 1)e_j$. Observe que $h \in H(S)$, pois caso contrário teríamos que $h \in \langle A \rangle$ e $h - (e_i + h^{(j)} e_j) \notin \mathbb{N}^d$ para todo $j \in \{1, ..., d\} \setminus \{i\}$. Então, $h = \lambda_1 a e_i + \lambda_2 b e_i + \sum_{j \neq i} \mu_j e_j$ com $\lambda_1, \lambda_2, \mu_j \in \mathbb{N}$. Assim $f = \lambda_1 a + \lambda_2 b = ab - a - b \Rightarrow ab = (\lambda_1 + 1)a + (\lambda_2 + 1)b \Rightarrow 1 = \frac{\lambda_1 + 1}{b} + \frac{\lambda_2 + 1}{a}$, que é um absurdo já que $\lambda_1, \lambda_2, a, b \in \mathbb{N}$ e

$a > 2$. Portanto $h \in H(S)$. Veja que $h + e_i = (f+1)e_i + \sum_{j \neq i}(h^{(i)} - 1)e_j$. Seja $k \neq i$, então $h + e_k = (f-1)e_i + \sum_{j \neq i,k}(h^{(j)} - 1)e_j + e_i + h^{(k)}e^k$. Como $\langle a, b\rangle$ é um semigrupo numérico simétrico, $f - 1 \in \langle a, b\rangle$ e portanto $(f-1)e_i \in S$. Logo $h + e_k \in S$ e h é maximal em $H(S)$. Considere $x = 2e_i + h^{(k)}e_k$ com $k \neq i$, $x \in H(S)$ mas x não é menor que h, logo h não é de Frobenius e portanto S não é irredutível.

□

A prova desse lema mostra algo mais forte, se $S \subseteq \mathbb{N}^d$ é um GNS com $e(S) = 2d$, S é de Frobenius se, e somente se, S é simétrico.

Lema 2.60. *Seja $S \in S^{(r)}_{g,d}$ e $\bar{S} \in S^{(r)}_{g,r}$.*

1. *Se S é simétrico, então $\bar{S}$ é simétrico.*

2. *Se S é pseudo-simétrico, então $\bar{S}$ é pseudo-simétrico.*

Demonstração. Seja $\{1, 2, ..., d\} \setminus Eixos(S) = \{i_1, ..., i_r\}$. Suponha que S é irredutível e tome $f = (f^{(1)}, ..., f^{(d)})$ o elemento de Frobenius de S. Então $\prod_{i=1}^{d}(f^{(i)}+1) = \prod_{k=1}^{r}(f^{(i_k)}+1)$, já que para as j-ésimas coordenadas de f, onde $j \in Eixos(S)$, temos que $f^{(j)} = 0$. Mas, $\bar{f} = (f^{(i_1)}, ..., f^{(i_r)})$ é o elemento de Frobenius de $\bar{S}$. Como $g(S) = g(\bar{S})$, o resultado segue pelo Teorema 2.33, pois se S é irredutível, então $2|H(S)| = 2|H(\bar{S})| = \prod_{k=1}^{r}(f^{(i_k)} + 1)$ para o caso simétrico e $2|H(S)| - 1 = 2|H(\bar{S})| - 1 = \prod_{k=1}^{r}(f^{(i_k)} + 1)$ para o caso pseudo-simétrico. □

Lema 2.61. *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um GNS.*

1. *Se $g(S) < d$, então $S \in S^{(r)}_{g,d}$ para algum $r < d$. Em particular $g(S) \geq r$.*

2. *Se $g(S) = d$ e $S \in S^{(d)}_{g,d}$, então S não é pseudo-simétrico.*

Demonstração. (1) Veja que um espaço vetorial de dimensão r tem exatamente r vetores linearmente independentes, logo $dim(Span_{\mathbb{R}}(H(S)) < d$.
(2) Suponha que (S, f) seja pseudo-simétrico. Então $\frac{f}{2}$ e $f \in H(S)$, logo para S ter d lacunas linearmente independentes é preciso que $H(S)$ tenha pelo menos $d + 1$ elementos. Logo se $g(S) = d$, S não é pseudo-simétrico. □

Teorema 2.62. *Se $S \subseteq \mathbb{N}^d$ é um GNS pseudo-simétrico, então S satisfaz a Conjectura de Wilf Generalizada.*

Demonstração. Seja $g = g(S)$. Seja $f = (f^{(1)}, ..., f^{(d)})$ o elemento de Frobenius de S. Pelo Teorema 2.33, temos que $2g - 1 = (f^{(1)} + 1) \cdots (f^{(d)} + 1) = c(S)$, assim é suficiente mostrar que $e(S)n(S) \geq d(2g - 1)$. Se S é pseudo-simétrico, então pela aplicação

$$\psi_f : N(f) \to H(f)$$
$$\psi_f(s) = f - s$$

temos que $g-1=|H(f)-1|=|N(f)|=n(S)$, já que $\dfrac{f}{2}$ não possui imagem. Pelo Lema 2.59, temos que $e(S)\geq 2d+1$, portanto $e(S)n(S)\geq (2d+1)(g-1)=d(2g-1)+g-d-1=d(2g-1)+g-(d+1)$. Se $g\geq d+1$ o resultado segue. Considere agora $S\in S^{(r)}_{g,d}$, com $r\leq d$. Se $r=d$, temos que $S\in S^{(d)}_{g,d}$ e portanto, pelo lema anterior, S não é pseudo-simétrico, contradição. Agora, se $r<d$, podemos tomar $\bar{S}\in S^{(r)}_{g,r}$. Além disso, pelo Lema 2.60 segue que $\bar{S}$ é pseudo-simétrico. Observe que $g=g(S)=g(\bar{S})\geq r$, pois caso $g<r$, aplicando o lema anterior para $\bar{S}$, temos uma contradição já que a dimensão do espaço gerado por $H(\bar{S})$ é exatamente r. Por um raciocínio análogo, temos que $\bar{S}$ satisfaz a Conjectura de Wilf Generalizada, assim segue pelo Corolário 2.57, que S também satisfaz a Conjectura de Wilf Generalizada. $\square$

Teorema 2.63. *Seja $S\subseteq \mathbb{N}^d$ um GNS irredutível. Então S satisfaz a Conjectura de Wilf Generalizada.*

Demonstração. Segue pela Proposição 2.34 que um GNS simétrico satisfaz a conjectura e pelo Teorema 2.62 que um GNS pseudo-simétrico também a satisfaz. Portanto, um GNS irredutível (que é simétrico ou pseudo-simétrico) satisfaz a Conjectura de Wilf Generalizada. $\square$

2.5 Semigrupos Monomiais

Nessa seção vamos provar que um GNS com $n(S)=1$ satisfaz a Conjectura de Wilf Generalizada. Isso será feito utilizando uma conexão entre GNSs com $n(S)=1$ e ideais monomiais.

Definição 2.64. *Seja K um corpo e $R=K[x]$ um anel de polinômios sobre K, com d variáveis $x_1,...,x_d$. Um monômio em R é o produto $x^\alpha = x_1^{\alpha^{(1)}}x_2^{\alpha^{(2)}}\cdots x_d^{\alpha^{(d)}}$, onde $\alpha=(\alpha^{(1)},...,\alpha^{(d)})$. Dizemos que $I\subset K[x]$ é um ideal monomial se I é gerado por monômios. Seja I e J ideias de R. O ideal cociente $(I:J)$ é o conjunto $\{r\in R|rJ\subseteq I\}$.*

Definição 2.65. *Seja $R=K[x_1,...,x_d]$ e suponha que M é um R-módulo graduado. Se M tem dimensão finita como K-espaço vetorial, então dizemos que M é zero-dimensional e definimos $l(M)=dim_K M$. Se I é um ideal homogêneo de R, e R/I é zero-dimensional, vamos simplesmente dizer que I é zero-dimensional.*

Proposição 2.66. *Seja $S\subseteq\mathbb{N}^d$ um conjunto contendo 0 e $S^*=S\setminus\{0\}$. São equivalentes:*

1. *S é um GNS com $n(S)=1$.*

2. *S^* é o conjunto dos vetores dos expoentes dos monômios em um ideal monomial zero-dimensional $I\subset K[x_1,...,x_d]$.*

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) No anel $K[x_1,...,x_d]$ considere o ideal $I=\langle x^\alpha|\alpha\in S^*\rangle$. Tome x^β um monômio tal que $x^\beta\in I$. Observe que $x^\alpha|x^\beta$, para algum $\alpha\in S^*$, isto é, $\alpha\leq\beta$ com respeito a ordem parcial natural. Se $\beta\notin S^*$ temos que $n(S)\geq 2$ já que $\alpha\in N(S)$, portanto $\beta\in S^*$ e com isso segue que S^* é exatamente o conjunto dos vetores expoentes dos monômios no ideal I. Como $\mathbb{N}^d\setminus S^*$ é finito, I é zero-dimensional.
(2) $\Rightarrow$ (1) Seja I um ideal zero-dimensional e $S^*=\{\alpha\in\mathbb{N}^d|x^\alpha\in I\}$. Como I é ideal, se $x^\alpha\in R$ e $x^\beta\in I$, então $x^{\alpha+\beta}\in I$, portanto $\alpha+\beta\in S^*$. Assim, tomando $S=S^*\cup\{0\}$, temos que S é um semigrupo. Se $x^\alpha\notin S$, então x^α não é divisível por nenhum monômio $x^\beta\in I$, portanto o conjunto $\{n\in\mathbb{N}^d|n\leq\alpha\}$ não contém nenhum elemento de S^*. Segue que $n(S)=1$. Além disso, $\mathbb{N}^d\setminus S$ é finito desde que I é zero-dimensional. Assim, S é um GNS. $\square$

Definição 2.67. *Se S é um GNS satisfazendo $n(S)=1$, então chamaremos S de semigrupo monomial e $I=\langle x^\alpha|\alpha\in S^*\rangle$ de ideal correspondente a S.*

Lema 2.68. *Se $S \subseteq \mathbb{N}^d$ é um semigrupo monomial e $I \subset R = K[x_1, ..., x_d]$ é o ideal correspondente a S, então $e(S) = l(I/I^2)$ e $c(S) = l(R/I)$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.2 e Corolário 2.5 temos que o sistema minimal de geradores de S é dado por $S^* \setminus (S^* + S^*)$. Podemos identificar S^* com os monômios em I e, $S^* + S^*$ com os monômios em I^2. Segue que $S^* \setminus (S^* + S^*)$ pode ser identificado com os monômios em I mas que não estão em I^2. Estes formam uma base como K-espaço vetorial para I/I^2. Portanto $e(S) = |S^* \setminus (S^* + S^*)| = l(I/I^2)$. Veja que $C(S) = \{n \in \mathbb{N}^d | n \leq h, \text{ para algum } h \in H(S)\}$, logo $C(S)$ pode ser identificado com os monômios que não estão em I. Eles formam uma base para R/I, portanto $c(S) = l(R/I)$. □

Teorema 2.69. *(A Conjectura de Wilf Generalizada Para Semigrupos Monomiais) Se S é um semigrupo monomial, então $d\,c(S) \leq e(S)$. Equivalentemente, se $I \subset K[x_1, .., x_d]$ é um ideal monomial zero-dimensional, então $d\,l(R/I) \leq l(I/I^2)$.*

Demonstração. Provemos por indução sobre d e $l(R/I) = c(S)$. Se $d = 1$, então $I = \langle x^t \rangle$ e $I^2 = \langle x^{2t} \rangle$, portanto, $dl(R/I) = t = l(I/I^2)$. Suponha agora $d > 1$ e $R = K[x_1, ..., x_d]$. Se $I \subset R$ é um ideal monomial tal que $l(R/I) = 1$, então $I = \langle x_1, ..., x_d \rangle$ e I/I^2 é isomorfo a $Span_K\{x_1, ..., x_d\}$, portanto $l(I/I^2) = d = dl(R/I)$. Agora suponha que I é um ideal monomial em R e a desigualdade é verdadeira para todos os ideias monomiais com o número de variáveis menor que d e dimensão como K-espaço vetorial menor que $l(R/I)$. Por simplicidade vamos escrever $y = x_d$ e definir $\bar{R} = R/\langle y \rangle \simeq K[x_1, ..., x_{d-1}]$ e $\bar{I} = (I + \langle y \rangle)/\langle y \rangle \subset \bar{R}$. Vamos relembrar que uma sequência de A-módulos e A-homomorfismos da forma $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ é dita exata curta se f é injetivo, g é sobrejetivo e $Im(f) = Ker(g)$. Considere a seguinte sequência exata curta:

$$0 \to \frac{R}{(I : y)} \xrightarrow{\cdot y} \frac{R}{I} \to \frac{R}{I + \langle y \rangle} \simeq \frac{\bar{R}}{\bar{I}} \to 0$$

Da sequência temos $l(R/I) = l(R/(I : y)) + l(\bar{R}/\bar{I})$. Veja que $I \subset I : y$ e é sempre própria desde que I é zero-dimensional, isto é, R/I é zero-dimensional se, e somente se, I tem um conjunto de geradores homogêneo $x \in R_n$ $a_1 \notin I$, $a_1 y + a_2 y + \cdots + a_{n+1} y^{n+1} = 0 \in I$. Logo $l(R/(I : y) < l(R/I)$. Pela hipótese de indução temos que $dl(R/(I : y) \leq l((I : y)/(I : y)^2)$. Como $\bar{R}$ envolve uma variável a menos, temos que $(d-1)l(\bar{R}/\bar{I}) \leq l(\bar{I}/\bar{I}^2)$. Portanto

$$dl(R/I) = dl(R/(I : y)) + dl(\bar{R}/\bar{I}) \leq l((I : y)/(I : y^2) + l(\bar{I}/\bar{I}^2) + l(\bar{K}/\bar{I}). \tag{2.1}$$

Basta provar que 2.1 é menor ou igual a $l(I/I^2)$. Usando a identidade $y(I : y) = I \cap \langle y \rangle$ temos a sequência exata:

$$0 \to \frac{(I : y)}{(I^2 : y)} \xrightarrow{\cdot y} \frac{I}{I^2} \to \frac{I}{I^2 + I \cap \langle y \rangle} \simeq \frac{I + \langle y \rangle}{I^2 + \langle y \rangle} \simeq \frac{\bar{I}}{\bar{I}^2} \to 0$$

que nos da $l(I/I^2) = l((I : y)/(I^2 : y) + l(\bar{I}/\bar{I}^2)$. Podemos reescrever 2.1 como

$$l((I : y)/(I : y)^2) + l(\bar{R}/\bar{I}) \leq l((I : y)/(I^2 : y)). \tag{2.2}$$

Observe agora que $(I^2 : y) \subset (I : y)^2$. Pela sequência exata

$$0 \to \frac{(I : y)^2}{(I^2 : y)} \to \frac{(I : y)}{(I^2 : y)} \to \frac{(I : y)}{(I : y)^2} \to 0$$

obtemos que $l((I : y)/(I^2 : y)) - l((I : y)/(I : y)^2) = l((I : y)^2/(I^2 : y))$. Com isso podemos reescrever 2.2 como

$$l\left(\frac{\bar{R}}{\bar{I}}\right) \leq l\left(\frac{(I : y)^2}{(I^2 : y)}\right)$$

que será provado no próximo lema, completando a indução. $\square$

Lema 2.70. *Seja $I \subset R = K[x_1, ..., x_{d-1}, y]$ um ideal monomial zero-dimensional e defina $\bar{R} = R/\langle y\rangle \simeq K[x_1, ..., x_{d-1}]$ e $\bar{I} = (I + \langle y\rangle)/\langle y\rangle \subset \bar{R}$. Então $l\left(\frac{\bar{R}}{\bar{I}}\right) \leq l\left(\frac{(I:y)^2}{(I^2:y)}\right)$.*

Demonstração. Primeiramente provemos que $(I^2 : y) = I(I : y)$. Se m é um monômio em $(I^2 : y)$, então $ym = fg$ para alguns $f, g \in I$. Assim, $y|f$ ou $y|g$. Sem perda de generalidade vamos assumir que $f = yf'$. Então $m = f'g \in I(I : y)$. Agora se $m \in I(I : y))$ então $m = fg$ com $f \in I$ e $g \in (I : y)$, logo $my = f(gy) \in I^2$, ou seja, $m \in (I^2 : y)$. Para a desigualdade, vamos produzir uma aplicação injetiva a partir das bases canônicas de $\bar{R}/\bar{I}$ em $(I : y)^2/(I^2 : y)$. A base canônica para $\bar{R}/\bar{I}$ é formada pelos monômios nas variáveis $x_1, ..., x_{d-1}$ que não estão em I e, a base canônica para $(I : y)^2/I^2 : y$ é o conjunto dos monômios nas variáveis $x_1, ..., x_{d-1}, y$ que estão em $(I : y)^2$ mas não estão em $(I^2 : y)$. Seja m um monômio em $\bar{R}/\bar{I}$, que pode ser visto como um monômio em R sem a variável y. Desde que $l(R/(I^2 : y))$ é finito , temos que $y^k m \in (I^2 : y)$ para todo k suficientemente grande. Seja $t = min\{k|y^k m \in (I^2 : y)\}$, assim $y^{t-1}m \in (I : y)^2$. De fato, se $y^t m \in (I^2 : y) = I(I : y)$, $y^t m = ab$ onde $a \in I$ e $b \in (I : y)$. Suponha que $y \nmid a$, então $y^t|b$ e portanto $b = y^t b'$ e $m = ab' \in I$. Contradição, pois $m \notin I$. Assim, $y|a$ logo $a = ya'$ para algum $a' \in (I : y)$. Concluímos então, que $y^{t-1}m = a'b \in (I : y)^2$. Vamos definir a aplicação $\theta : \bar{R}/\bar{I} \to (I : y)^2/(I^2 : y)$, onde dado $m \in \bar{R}/\bar{I}$, $\theta(m) = y^{t-1}m$, com t sendo o menor inteiro tal que $y^t m \in (I^2 : y)$. Pelo mesmo argumento temos que $\theta(m) \in (I : y)^2$ mas não em $(I^2 : y)$. Como m não possui a variável y e pela escolha de t, temos que θ é injetora, logo

$$l\left(\frac{\bar{R}}{\bar{I}}\right) \leq l\left(\frac{(I:y)^2}{I^2:y}\right).$$

$\square$

Definição 2.71. *Seja I um ideal de M. I é uma interseção completa se, I é gerado por exatamente $codim(I)$ elementos. Onde $codim(I) = dim\left(\frac{I}{M}\right)$.*

Proposição 2.72. *Se $I \subset K[x_1, ..., x_d]$ é um ideal monomial zero-dimensional então $dl(R/I) = l(I/I^2)$ se, e somente se, I é uma interseção completa.*

Demonstração. $\Leftarrow$) Suponha que I é uma interseção completa, isto é, $I = \langle x_1^{a_1}, ..., x_d^{a_d}\rangle$. Os monômios em I/I^2 são aqueles que estão em I mas não estão em I^2, assim temos que apenas um único $x_i^{a_i}|t \in I/I^2$, pois caso contrário teríamos $t = x_i^{a_i}x_j^{a_j}\alpha \in I^2$. Logo os monômios de I/I^2 então em bijeção com o conjunto $X = \{x_i^{a_i}m|m \notin I, 1 \leq i \leq d\}$. Veja que $|X| = dl(R/I)$, o que queríamos provar.

$\Rightarrow$) Provemos por indução sobre d e $l(R/I)$, que se $dl(R/I) = l(I/I^2)$, então I é uma interseção completa. Para $d = 1$ e $l(R/I) = 1$ é claro que $l(R/I) = l(I/I^2)$, então $I = \langle x^t\rangle$. Agora suponha que $d > 1$ e $l(R/I) > 1$. Considere a seguinte sequência exata curta utilizada no Teorema 2.69

$$0 \to \frac{R}{I:y} \xrightarrow{\cdot y} \frac{R}{I} \to \frac{\bar{R}}{\bar{I}} \to 0$$

que nos fornece que $dl(R/I) = dl(R/(I : y)) + d(l(\bar{R}/\bar{I}) \leq l((I : y)/(I : y^2) + l(\bar{I}/\bar{I}^2) + l(\bar{R}/\bar{I}) \leq l(I/I^2)$. Se $dl(R/I) = l(I/I^2)$, então $dl(R/(I : y)^2) + (d-1)l(\bar{R}/\bar{I}) = l((I : y)/(I : y)^2) + l(\bar{I}/\bar{I}^2)$ e logo $dl(R/(I : y)^2) = l((I : y)/(I : y)^2)$ e $(d-1)l(\bar{R}/\bar{I}) = l(\bar{I}/\bar{I}^2)$. Pela hipótese de indução temos que $(I : y)$ e $\bar{Y}$ são interseções completas. Agora provemos que se $(I : y)$ e $\bar{I}$ são interseções completas, então $l(\bar{R}/\bar{I}) < l((I : y)/I^2 : y)$, e portanto $dl(R/I) < l(I/I^2)$, que é um absurdo. Pela prova do lema anterior, é suficiente mostrar que existe $m \in \bar{I}$ tão que $m \in (I : y)^2$

mas não pertence a $I^2 : y$. Desde que $\bar{I}$ e $I : y$ são interseções completas, $I = \bar{I} + yM$, onde $\bar{I} = \left\langle x_1^{a_1}, ..., x_{d-1}^{a_{d-1}} \right\rangle$ e $M = \left\langle x_1^{b_1}, ..., x_{d-1}^{b_{d-1}}, y^b \right\rangle$, com $a_1, ..., a_{d-1}, b_1, ..., b_{d-1}, b$ são todos inteiros positivos, com exceção a $b_i = -\infty$ que convencionaremos $x^{-\infty} = 0$. Temos que $b_i < a_i$, pois caso contrário teríamos que $yx_i^{b_i}$ seria um gerador redundante. Desde que I não é uma interseção completa, $b_i \geq 1$ para algum $1 \leq i \leq d-1$, portanto $x_i^{2b_i} \in (I : y)^2$ mas não pertence a $(I^2 : y)$. Se $x_i^{2b_i} \in \bar{I}$ está feito. Caso contrário $2b_i < a_i$, logo $x_i^{a_i} \in (I : y)^2$ mas não em $(I^2 : y)$. □

Definição 2.73. *Um GNS $S \subset \mathbb{N}^d$ é um GNS ordinário se existe $f \in \mathbb{N}^d$ tal que $S = \{0\} \cup (\mathbb{N}^d \setminus C(f))$.*

Proposição 2.74. *Seja S um GNS. São equivalentes:*

1. *S é ordinário.*

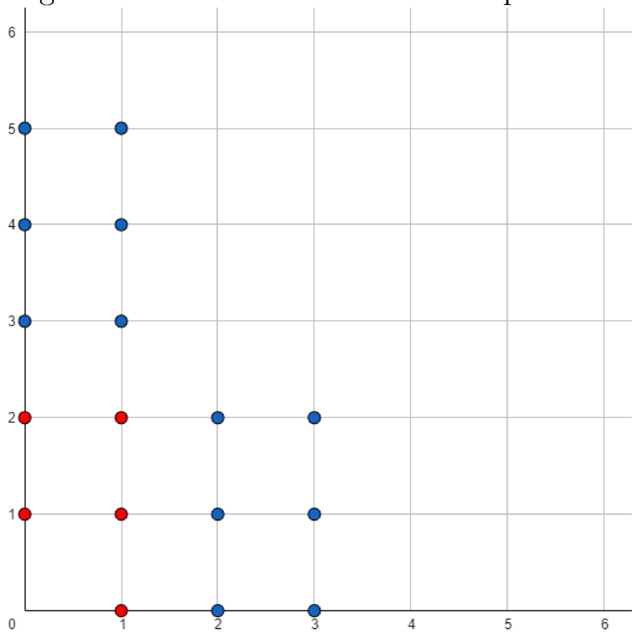
2. *S é um semigrupo monomial com ideal correspondente sendo uma interseção completa.*

3. *S satisfaz $n(S) = 1$ e $dc(S) = e(S)$.*

Demonstração. Se S é ordinário temos que $S = \{0\} \cup (\mathbb{N}^d \setminus C(f)\}$, logo $|N(S)| = |\{x \in S | x \leq h$ para algum $h \in H(S)\}| = 1 = n(S)$.
(1) $\Leftrightarrow$ (2) Segue pela Proposição 2.66 que S é um GNS com $n(S) = 1$, se, e somente se, $I = \langle x^\alpha | \alpha \in S^* \rangle$ é o ideal correspondente a S, e além disso, I é uma interseção completa.
(2) $\Leftrightarrow$ (3) Pela Proposição 2.72, temos que I é uma interseção completa se, e somente se, se I é um ideal monomial zero-dimensional, então $dl(R/I) = l(I/I^2)$, isto é, pelo Lema 2.68, $dc(S) = e(S)$. □

Exemplo 2.75. *Seja $f = (1, 2) \in \mathbb{N}^2$. Veja que $C((1, 2)) = \{(0, 0), (1, 0), (0, 2), (0, 1), (1, 1), (1, 2)\}$. O GNS ordinário $S = \{0\} \cup (\mathbb{N}^d \setminus C((1, 2)))$ corresponde ao ideal monomial que é uma interseção completa $I = \left\langle x^2, y^3 \right\rangle$. Visualmente os geradores se parecem com duas cópias de $C((1, 2))$, são elas $(2, 0) + C((1, 2))$ e $(0, 3) + C((1, 2))$. Veja no gráfico a seguir, os pontos em vermelho são as lacunas de S, que são justamente os elementos de $C((1, 2))$ com exceção de $(0, 0)$. Os pontos em azul são as cópias de $C((1, 2))$ mencionada anteriormente e eles juntamente com os pontos não demarcados pertencem a S.*

Figura 2.1: GNS ordinário do Exemplo 2.75



Capítulo 3

Conjectura de Wilf Estendida

Em [11] é dada outra generalização para a Conjectura de Wilf. Essa generalização envolve uma classe maior de semigrupos afins chamados c-semigrupos. Vamos considerar o trabalho em [11] apenas para GNSs. Seja $\prec$ uma ordem monomial, isto é, uma ordem total, tal que para qualquer monômio u, $1 \prec u$. Além disso, vamos acrescentar a condição de que todo monômio é precedido apenas por um número finito de monômios. O maximal de $H(S)$ com respeito a $\prec$ é o elemento de Frobenius de S, $Fb(S)$. Por conveniência $Fb(\mathbb{N}^d)$ é o vetor $(-1, ..., -1)$ com d coordenadas. Denotamos por $n_\prec(S)$ a cardinalidade do conjunto $\{x \in S | x \prec Fb(S)\}$. O número de Frobenius de S é definido como $n_\prec(S) + g(S)$ e é denotado por $N(Fb(S))$.

Conjectura 3.1. *(**Conjectura de Wilf Estendida**) Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um GNS. Então $n_\prec(S)e(S) \geq N(Fb(S)) + 1$, para toda ordem monomial $\prec$ tal que todo monômio é precedido somente por um número finito de monômios.*

Nosso objetivo é comparar essa conjectura com a dada anteriormente, que não depende da escolha de uma ordem monomial. Para isso vamos relembrar uma propriedade envolvendo ordens em $\mathbb{N}^d$.

Proposição 3.2. *Toda ordem monomial em $\mathbb{N}^d$ estende a ordem parcial natural.*

Demonstração. Sejam $a, b \in \mathbb{N}^d$ elementos distintos com $a \leq b$, assim existe $c \in \mathbb{N}^d$ tal que $a + c = b$. Agora seja $\prec$ uma ordem monomial em $\mathbb{N}^d$. Suponha que $b \prec a$, então $b \prec a + c = b$, contradição. □

Proposição 3.3. *Se $S \subseteq \mathbb{N}^d$ é um GNS que satisfaz a Conjectura de Wilf Generalizada, então S satisfaz a Conjectura de Wilf Estendida.*

Demonstração. Se $d = 1$, temos que $n_\prec(S) = n(S)$ e assim $F(S) + 1 = n(S) + g(S) = n_\prec(S) + g(S)$, logo as duas inequações são as mesmas. Suponha que $d > 1$ e S satisfaz a Conjecura de Wilf Generalizada. Fixe uma ordem monomial $\prec$ em $\mathbb{N}^d$. Seja $s \in N(S)$, então $s \leq h$ para algum $h \in H(S)$, com respeito a ordem parcial natural. Pela Proposição 3.3, $s \prec h \prec Fb(S)$, portanto $s \in \{x \in S | x \prec Fb(S)\}$, logo $n(S) \leq n_\prec(S)$. Considere a Conjectura de Wilf Generalizada na forma $n(S)(e(S) - d) \geq dg(S)$. Portanto $n_\prec(S)(e(S) - 1) \geq n(S)(e(S) - 1) \geq n(S)(e(S) - d) \geq dg(S) \geq g(S) + 1$. Em particular, $n_\prec(S)e(S) \geq n_\prec(S) + g(S) + 1 = N(Fb(S)) + 1$. □

Em [11] são dadas outras classes de GNSs para os quais a Conjectura de Wilf Estendida é satisfeita. Estudaremos essas classes, agora com respeito a Conjectura de Wilf Generalizada. A primeira delas fornece outro exemplo, além do GNS ordinário no qual vale a igualdade da Conjectura de Wilf Generalizada.

Proposição 3.4. *Seja $h > 1$ um inteiro positivo, $i \in \{1, ..., d\}$, $k \in \{1, ..., d\} \setminus \{i\}$. Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ o GNS gerado por*

$$\{e_1, e_2, ..., e_{i-1}, e_{i+1}, ..., e_d, 2e_i, 3e_i\} \cup \{e_i + he_k\} \cup \{e_i + e_j | j \in \{1, ..., d\} \setminus \{k, i\}\}.$$

Então S satisfaz a Conjectura de Wilf Generalizada.

Demonstração. Veja que $e(S) = 2d$. O conjunto de lacunas de S é $H(S) = \{e_i, e_i + e_k, e_i + 2e_k, ..., e_i + (h-1)e_k\}$, portanto S é um GNS Frobenius com $f = e_i + (h-1)e_k$, logo $e(S) = |C(f)| = 2h$. Agora $\cup_{h \in H(S)} N(h) = \{0, e_k, 2e_k, ..., (h-1)e_k\}$, portanto $n(S) = h$, logo $dc(S) = 2dh = n(S)e(S)$. □

Observe que esse GNS pode ser expressado com um espessamento. Em particular vamos considerar o semigrupo $\langle 2, 3 \rangle$ no eixo i e o GNS $\hat{S} = T_{h-1}(\langle 2, 3 \rangle, k)$. Então $S = T_0(\hat{S}, \{1, ..., d\} \setminus \{i, k\})$, logo S satisfaz a conjetura de Wilf Generalizada pela Proposição 2.51 e pelo fato de que $\langle 2, 3 \rangle$ satisfaz a Conjectura de Wilf.

A segunda classe são os GNSs $S = \mathbb{N}^d \setminus \{e_i, 2e_i, ..., (q-1)e_i\}$ com $i \in \{1, ..., d\}$ e $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nesse caso $S = (\mathbb{N}^d \setminus C(q-1)e_i))$, isto é, S é um GNS ordinário e logo S satisfaz a conjectura pela Proposição 2.74.

Para a terceira classe vamos provar um resultado mais geral.

Proposição 3.5. *Seja Q um semigrupo numérico satisfazendo a Conjectura de Wilf, $j \in \{1, ..., d\}$, e o conjunto $\{q_i \in \mathbb{N} | \{1, ..., d\} \setminus \{j\}\}$. Então $S = \mathbb{N}^d \setminus \{x_1, ..., x_d\} \in \mathbb{N}^d | x_j \notin Q, x_i \leq q_i, i \in \{1, ..., d\} \setminus \{j\}\}$ é um GNS que satisfaz a Conjectura de Wilf Generalizada.*

Demonstração. Considere o semigrupo Q sobre o eixo j. Veja que S é obtido pela sequência de espessamentos $S = T_{q_1, q_2, ..., \hat{q_j}, ..., q_d}(Q, \{1, ..., d\} \setminus \{j\})$. Então, pela Proposição 2.51, S satisfaz a Conjectura de Wilf Generalizada. □

Capítulo 4

Considerações Finais

Testes computacionais vêm sendo aliados na verificação das conjecturas tanto para semigrupos numéricos quanto para semigrupos numéricos generalizados. Maria Brás-Amorós calculou em [12], o número de semigrupos numéricos com gênero g para $g \in \{0, ..., 50\}$, e seus cálculos mostraram um comportamento semelhante ao da sequência de Fibonacci para o número de semigrupos numéricos com gênero g fixo menor ou igual a 50. Além disso o teste foi positivo para a Conjectura de Wilf para todos os semigrupos numéricos. Vamos reproduzir na Tabela 4.1 os resultados obtidos por Maria Brás-Amorós (na tabela n_g representa o número de semigrupos numéricos de gênero g).

A problemática de contagem também se estende para os GNSs, como feito no artigo [7]. O GAP- Groups, Algorithms, and Programming, com implementação do pacote numericalsgps oferece ferramentas para trabalhar com semigrupos numéricos e semigrupos afins. Tais ferramentas permitem calcular todos os semigrupos numéricos generalizados de um determinado gênero e testar a Conjectura de Wilf Generalizada para eles. Usando essa técnica foi verificado em [4] que a conjectura de Wilf Generalizada é satisfeita para todos os GNSs em $\mathbb{N}^2$ até o gênero $g = 13$ e em $\mathbb{N}^3$ até o gênero $g = 10$. Além disso, utilizando o comando **RandomAffineSemigroupWithGenusAndDimension** é possível testar a Conjectura de Wilf Generalizada para GNSs aleatórios de gênero $g = 1$ até $g = 500$. Também em [4] foram obtidas respostas positivas para a Conjectura de Wilf Generalizada para GNSs aleatórios em $\mathbb{N}^d$ com $d = 2$ até $d = 5$. Os autores afirmam que esses testes apresentam resposta positiva para um grande número de GNSs. A tabela 4.2 apresenta os resultados obtidos.

Tabela 4.1: Número de semigrupos numéricos com gênero até 50 (veja [12])

g	n_g	$n_{g-1}+n_{g-2}$	$(n_{g-1}+n_{g-2})/n_g$	n_g/n_{g-1}
2	2	2	1	2
3	4	3	0.75	2
4	7	6	0.857143	1.75
5	12	11	0.916667	1.71429
6	23	19	0.826087	1.91667
7	39	35	0.897436	1.69565
8	67	62	0.925373	1.71795
9	118	106	0.898305	1.76119
10	204	185	0.906863	1.72881
11	343	322	0.938776	1.68137
12	592	547	0.923986	1.72595
13	1001	935	0.934066	1.69088
14	1693	1593	0.940933	1.69131
15	2857	2694	0.942947	1.68754
16	4806	4550	0.946733	1.68218
17	8045	7663	0.952517	1.67395
18	13467	12851	0.954259	1.67396
19	22464	21512	0.957621	1.66808
20	37396	35931	0.960825	1.66471
21	62194	59860	0.962472	1.66312
23	170963	165440	0.967695	1.65588
24	282828	274209	0.969526	1.65432
25	467224	453791	0.971249	1.65197
26	770832	750052	0.973042	1.64981
27	1270267	1238056	0.974642	1.64792
28	2091030	2041099	0.976121	1.64613
29	3437839	3361297	0.977735	1.64409
30	5646773	5528869	0.97912	1.64254
31	9266788	9084612	0.980341	1.64108
32	15195070	14913561	0.981474	1.63973
33	24896206	24461858	0.982554	1.63844
34	40761087	40091276	0.983567	1.63724
35	66687201	65657293	0.984556	1.63605
36	109032500	107448288	0.98547	1.63498
37	178158289	175719701	0.986312	1.63399
38	290939807	287190789	0.987114	1.63304
39	474851445	469098096	0.987884	1.63213
40	774614284	765791252	0.98861	1.63128
41	1262992840	1249465729	0.98929	1.63048
42	2058356522	2037607124	0.989919	1.62975
43	3353191846	3321349362	0.990504	1.62906
44	5460401576	5411548368	0.991053	1.62842
45	8888486816	8813593422	0.991574	1.62781
46	14463633648	14348888392	0.992067	1.62723
47	23527845502	23352120464	0.992531	1.62669
48	38260496374	37991479150	0.992969	1.62618
49	62200036752	61788341876	0.993381	1.6257
50	101090300128	100460533126	0.99377	1.62525

Tabela 4.2: Respostas positivas para a Conjectura de Wilf Generalizada

	Gênero	Teste
$\mathbb{N}^2$	1 a 13	Todos GNSs
	1 a 500	GNSs aleatórios
$\mathbb{N}^3$	1 a 10	Todos os GNSs
	1 a 500	GNSs aleatórios
$\mathbb{N}^4$	1 a 500	GNSs aleatórios
$\mathbb{N}^5$	1 a 500	GNSs aleatórios

Uma pergunta natural que pode surgir é qual o tamanho de $n(S)e(S) - dc(S)$, que a conjectura postula ser não negativa. Responder essa pergunta pode nos dar propriedades adicionais ou indicar onde procurar contra-exemplos.

Proposição 4.1. *Suponha $I \subset R = K[x_1, ..., x_d]$ um ideal monomial zero dimensional, $J = \langle x_1^{a_1}, ..., x_d^{a_d} \rangle$ onde $a_1, ...a_d$ são os menores inteiros tais que $x_i^{a_i} \in I$ e $I^2 = IJ$. Então $l(I/I^2) - dl(R/I) = \prod_i a_i - l(R/I) = l(R/J) - l(R/I)$.*

Demonstração. Considere o conjunto $X = \{x_i^{a_i} \cdot m | m \notin I\}$. Vejamos que $X \subset I \setminus I^2$. Suponha por contradição que $x_i^{a_i} m \in I^2$ onde $m \notin I$. Como $I^2 = IJ$, temos que $x_i^{a_i} m = x_j^{a_j} n$, para algum $1 \leq j \leq d$ e $n \in I$. Como $m \notin I$, então $x_j^{a_j} \nmid m$. Assim a única forma da equação ser satisfeita é se $j = i$ e $m = n$, contradição já que $m \notin I$. Portanto $X \subset I \setminus I^2$. Da mesma maneira temos que $x_i^{a_i} m$,$x_j^{a_j} n$ onde $m, n \in I$ são distintos. Portanto, $|X| = dl(R/I)$. Agora, seja n um monômio tal que $n \notin X$ e $n \in I \setminus I^2$. Então $n = \prod x_i^{b_i}$ onde $0 \leq b_i \leq a_i - 1$. Temos portanto que $(b_1, ..., b_d)$ está em $B = [0, a_1 - 1] \times [0, a_2 - 1] \times ... \times [0, a_d - 1]$. Como $I^2 = IJ$, qualquer monômio que não pertence a I, tem um vetor expoente que também está em B. Portanto o número de monômios que estão em $I \setminus I^2$, mas não estão em X é exatamente $\prod_i a_i - l(R/I)$. □

Exemplo 4.2. *Considere o ideal $I = \langle x^5, x^3y^2, y^5 \rangle \subset R = K[x, y]$ e $J = \langle x^5, y^5 \rangle$. Neste caso temos que $l(R/I) = 19$, $l(R/J) = 25$ e pela proposição acima, $l(I/I^2) = 44$.*

Referências Bibliográficas

[1] A. Brauer and J. E. Shockley, *On a problem of Frobenius*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 211, 215-220, 1962. https://doi.org/10.1515/crll.1962.211.215

[2] C. Cisto, G. Failla, C. Peterson, R. Utano, *Irreducible generalized numerical semigroups and uniqueness of the Frobenius element*, Semigroup Forum, 99, 481-495, 2019. https://doi.org/10.1007/s00233-019-10040-1

[3] C. Cisto, G. Failla, and R. Utano, *On the generators of a generalized numerical semigroup*, Analele Universitatii Ovidius din Constanta, 27(1), 49–59, 2019. https://doi.org/10.2478/auom-2019-0003

[4] C. Cisto, M. DiPasquale, G. Failla, Z. Flores, C. Peterson, and Rosanna Utano. *A generalization of Wilf's conjecture for generalized numerical semigroups*, Semigroup Forum, 101(2), 303-325, 2020. https://doi.org/10.1007/s00233-020-10085-7

[5] Delgado, M. (2020). *Conjecture of Wilf: A Survey.* In: Barucci, V., Chapman, S., D'Anna, M., Fröberg, R. (eds) Numerical Semigroups . Springer INdAM Series, vol 40. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-40822-0_4

[6] D. E. Dobbs, G. L. Matthews, *On a question of Wilf concerning numerical semigroups*, Internation Journal of Communitative Rings, 4, 2003.

[7] G. Failla, C. Peterson, R. Utano, *Algorithms and basic asymptotics for generalized numerical semigroup in* $\mathbb{N}^d$, Semigroup Forum 92(2),460-473, 2016. https://doi.org/10.1007/s00233-015-9690-8

[8] H. S. Wilf, *A circle-of-lights algorithm for the "money-changing problem"*, The American Mathematical Monthly, 85, 562-565, 1978. https://doi.org/10.1080/00029890.1978.11994639

[9] J. J. Sylvester, *Mathematical questions with their solutions*, Educational Times, 41, 1884.

[10] J. Rosales, J. and P. García-Sánchez, *Numerical Semigroups*, Springer, 1a ed., 2009. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0160-6_4

[11] J. I. García-García, D. Marin-Aragón, A. Vigneron-Tenório, *An extension of Wilf's conjecture to affine semigroups*, Semigroup Forum, 96 (2), 396-408, 2018. https://doi.org/10.1007/s00233-017-9906-1

[12] M. Bras-Amorós, *Fibonacci-like behavior of the number of numerical semigroups of a given genus*, Semigroup Forum, 76(2), 379–384, 2008. https://doi.org/10.1007/s00233-007-9014-8

[13] M. Dhayni, *Wilf's conjecture for numerical semigroups*, Palestine Journal of Mathematics, 7(2), 385-396, 2018.

[14] S. M. Johnson, *A linear Diophantine problem*, Canadian Journal of Mathematics, 12, 390-398, 1960. https://doi.org/10.4153/CJM-1960-033-6