



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL



THIAGO CÉSAR MARTINS

**CONTROLE DE VIBRAÇÕES POR SISTEMA DE ATRITO SECO VARIÁVEL
APLICADO EM CABOS DE PONTES ESTAIADAS**

Uberlândia, 2023

THIAGO CÉSAR MARTINS

CONTROLE DE VIBRAÇÕES POR SISTEMA DE ATRITO SECO VARIÁVEL
APLICADO EM CABOS DE PONTES ESTAIADAS

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Estruturas e Construção Civil

Orientador: Prof. Dr. Gregório Sandro Vieira

Coorientadora: Prof.^a Dra. Lauren Karoline de Sousa Gonçalves

Uberlândia, 2023

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

M386
2023

Martins, Thiago César, 1994-
Controle de vibrações por sistema de atrito seco
variável aplicado em cabos de pontes estaiadas [recurso
eletrônico] / Thiago César Martins. - 2023.

Orientador: Gregório Sandro Vieira.
Coorientadora: Lauren Karoline de Sousa Gonçalves.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
Uberlândia, Pós-graduação em Engenharia Civil.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2023.130>
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Engenharia civil. I. Vieira, Gregório Sandro, 1981-,
(Orient.). II. Gonçalves, Lauren Karoline de Sousa, 1988-
, (Coorient.). III. Universidade Federal de Uberlândia.
Pós-graduação em Engenharia Civil. IV. Título.

CDU: 624

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Civil				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, 288, PPGEC				
Data:	28 de fevereiro de 2023	Hora de início:	17:00 h	Hora de encerramento:	19:07 h
Matrícula do Discente:	12112ECV021				
Nome do Discente:	Thiago César Martins				
Título do Trabalho:	Controle de vibrações por sistema de atrito seco variável aplicado em cabos de pontes estaiadas				
Área de concentração:	Construção Civil, Estruturas e Geotecnia				
Linha de pesquisa:	Estruturas				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Estudo do comportamento de elementos estruturais em aço e mistos aço-concreto				

Reuniu-se, em sessão pública por webconferência, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, assim composta pelos Professores Doutores: Renata Machado Soares - UFG, Antonio Marcos Gonçalves de Lima - UFU e Gregório Sandro Vieira orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Gregório Sandro Vieira, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Gregorio Sandro Vieira, Professor(a) do Magistério Superior**, em 28/02/2023, às 19:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Renata Machado Soares, Usuário Externo**, em 01/03/2023, às 08:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Marcos Gonçalves de Lima, Professor(a) do Magistério Superior**, em 01/03/2023, às 14:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4240581** e o código CRC **5517B03E**.

*Dedico este trabalho a Deus,
à minha família e namorada,
Maria Eduarda.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por todo o bem concedido e por todas as orações ouvidas.

À minha família e namorada, pelo apoio e motivação constantes.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Gregório Sandro Vieira, pelas oportunidades e contribuições.

À Prof.^a Dra. Lauren Karoline de Sousa Gonçalves pela coorientação e incansável dedicação, que foi fundamental para a execução deste trabalho.

A toda equipe do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC) da Universidade Federal de Uberlândia, como também ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PPGEM) por todas as contribuições realizadas.

RESUMO

O presente trabalho estuda o mecanismo do atrito seco com variações para o controle de vibrações em cabos de pontes estaiadas. Para isto, o método dos elementos finitos foi utilizado para implementar o modelo do cabo e sua verificação pela teoria das cordas vibrantes. Na análise modal foram consideradas as cinco primeiras frequências naturais e a resposta em frequência do cabo foi analisada para a vibração livre e com o amortecimento proporcional obtido pelo método de Rayleigh. O método de Newmark com aceleração média constante foi utilizado para a integração numérica do sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares e, quando necessária, foi utilizada a modificação pelo método de Newton-Raphson. Foram analisadas variações lineares, quadráticas e cúbicas do atrito seco em função do deslocamento, onde as características de cada uma e suas influências nas respostas foram detalhadas. Também foi realizada a análise do uso de dois amortecedores, observando a influência das transferências de energia mecânica para os modos superiores de vibração na sua eficiência. Através dos resultados numéricos pôde-se ilustrar a eficiência da variação linear da força de atrito em função do deslocamento e a importância de considerar as diferenças entre o amortecimento por atrito seco e seu amortecimento viscoso equivalente.

Palavras-chave: Atrito seco – Vibrações – Amortecimento – Ponte estaiada – Estais

ABSTRACT

The present work proposes to study the dry friction mechanism to control vibrations in cable-stayed bridge cables. For this purpose, the finite element method was used to implement the cable model and its accuracy was obtained by applying the so-called vibrating string theory. In the modal analysis, the first five natural frequencies of the system under study were considered and the frequency response of the cable was analyzed for free vibration and with the proportional damping obtained by the Rayleigh method. Newmark's method with average acceleration was used for numerical integration of the nonlinear ordinary differential system and, when necessary, modified by Newton-Raphson's method. Linear, quadratic and cubic variations of dry friction as a function of displacement were analyzed, where the characteristics of each one and their influence on the responses were detailed. The use of two dampers was also analyzed, observing the influence of mechanical energy transfers to higher vibration modes on their efficiency. Through the numerical results it was possible to illustrate the linear variation efficiency of the friction force as a displacement function and the importance of considering the differences between damping by dry friction and its equivalent viscous damping.

Keywords: Dry friction – Vibrations – Damping – Cable-stayed damper – Stay cables

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Arranjo dos cabos: a) Sistema de leque; b) Sistema de harpa; c) Sistema intermediário	12
Figura 2 - Pontes estaiadas: a) projetada por Verantius em 1617; b) projetada por Löscher em 1784	17
Figura 3 – Relação proporcional entre amplitudes de vibração e fenômenos de instabilidade.	19
Figura 4 - Desprendimento de vórtices	20
Figura 5 – Resposta do cabo para diferentes frequências.....	23
Figura 6 - Galope de esteira.....	24
Figura 7 - Componentes de força de sustentação e arrasto.....	26
Figura 8 – Danos em componentes não estruturais do cabo.....	27
Figura 9 – Tubo guia fraturado perto da ancoragem do cabo.....	27
Figura 10 – Modos de controle (PED é a sigla para <i>Passive Energy Dissipation</i>).	28
Figura 11 - Exemplo de amortecedores passivos a) viscoelástico; b) viscoso e c) de massa sintonizada.....	30
Figura 12 – Combinação de dois amortecedores passivos.	30
Figura 13 – Amortecedores magneto-reológicos instalados na Dongting Lake Bridge (Japão).	32
Figura 14 – Exemplo de amortecedor com fluido MR.....	32
Figura 15 – Pilha com camadas de materiais piezoelétricos.	33
Figura 16 – Modelo de controle ativo de vibrações.	34
Figura 17 - Cabos com sistemas aerodinâmicos.....	35
Figura 18 – Interligações transversais dos cabos.	36
Figura 19 - Primeiro modo assimétrico de vibração.....	36
Figura 20 - Amortecimento para modos diferentes.	37
Figura 21 - Variação da constante de amortecimento (c).....	38
Figura 22 – Curva de amortecimento modal.	38
Figura 23 - Diferença entre os modos simétricos e antissimétricos (W_0 é o deslocamento da curvatura inicial do cabo e W é o deslocamento adicional).	43
Figura 24 - Progressão das frequências dos modos simétricos em função da curvatura (ω_{si} , com i variando de 1 a 3, é a frequência de ressonância).	44

Figura 25 - Formação dos nós de vibração: a) baixa influência nos deslocamentos; b) alta influência nos deslocamentos e c) nós formados (as ordenadas y representam os deslocamentos).	45
Figura 26 – Curva universal analítica a) modo antissimétrico e b) modo simétrico (a legenda representa os valores de λ_2).	47
Figura 27 – a) Rigidez do amortecedor e b) rigidez da base com efeito de curvatura.	48
Figura 28 - Irregularidades entre superfícies de contato.	51
Figura 29 – Representação das irregularidades do atrito seco em deslizamento contínuo.....	52
Figura 30 – Variação linear da força de atrito (μ é o coeficiente de atrito e $F\cos\omega t$ é a força de excitação harmônica).	53
Figura 31 – Diferença entre atrito seco: a) linearmente variável e b) constante.	53
Figura 32 – Relação entre o coeficiente de atrito e o tempo de contato estacionário	54
Figura 33 – Relação entre a área real de contato e o tempo de carregamento.....	55
Figura 34 – Relação entre coeficiente de atrito e distância de deslizamento.	56
Figura 35 – Variação do atrito cinético com a velocidade (μ_k é o coeficiente de atrito cinético e μ_s é o estático).	57
Figura 36 – Modelos de: a) Coulomb e b) Benson e Hallquist.	58
Figura 37 – Modelo de cerdas (onde z é a deformação pré-deslizamento).	59
Figura 38 - Representação do fenômeno atrito-aderência (<i>stick-slip</i>).	60
Figura 39 – Amortecedor por atrito seco para cabos de pontes estaiadas.	63
Figura 40 – Amortecedor por atrito seco VSL.	64
Figura 41 – a) Resultados na posição central do cabo, b) valor da força de atrito em função do tempo e c) deslocamentos na posição do amortecedor.	66
Figura 42 – Modelo genérico de amortecedor para implementação.	69
Figura 43 – Localização do cabo escolhido (unidade em metros).	71
Figura 44 – Diminuição da rigidez em função da curvatura.	72
Figura 45 - Elemento de barra com quatro graus de liberdade.....	72
Figura 46 - Representação do <i>stick-slip</i> com área de influência.	78
Figura 47 – Resultante de forças estáticas na posição do amortecedor.	79
Figura 48 – Variações do atrito seco em função do deslocamento.	81
Figura 49 – Interferência entre dois amortecedores.	82
Figura 50 – Forma da força de excitação para vários modos de vibração.....	84
Figura 51 – Fluxograma do método de Newmark com adaptações por Newton-Raphson.	91
Figura 52 - Otimização pela proporção áurea	93

Figura 53 - Análise da convergência da malha.....	94
Figura 54 - Análise modal.	96
Figura 55 - Função resposta em frequência de $ Y/F $ no grau de liberdade número 100.	97
Figura 56 - Arranjo esquemático de um amortecedor simples.	98
Figura 57 – Amortecimento por atrito seco constante com parcelas residuais.	99
Figura 58 – Comparação da amplitude com e sem amortecimento externo.....	100
Figura 59 – Variação das tangentes em função do passo de integração.....	101
Figura 60 - Otimização da força de atrito seco constante.....	102
Figura 61 – Comparação entre as posições do amortecedor.	103
Figura 62 – Fase velocidade-deslocamento.....	103
Figura 63 – Evolução temporal do deslocamento em função do comprimento (5%L).	104
Figura 64 – Velocidade em função do tempo.....	105
Figura 65 - FRF medida no meio do cabo (GDL 100) com amortecedor em 5%L.....	105
Figura 66 – Conjunto de dados do segundo modo de vibrar (5%L).....	106
Figura 67 – Conjunto de dados do terceiro modo de vibrar (5%L).....	106
Figura 68 – Conjunto de dados do quarto modo de vibrar (5%L).....	107
Figura 69 – Conjunto de dados do quinto modo de vibrar (5%L).....	107
Figura 70 – Comparação com e sem atrito estático no meio do cabo (GDL 100).	109
Figura 71 – Comparação com e sem atrito estático na posição do amortecedor (GDL 10). ..	109
Figura 72 – Otimização da posição e taxa de variação linear.	110
Figura 73 – Comparação entre as posições do amortecedor com variação linear.	111
Figura 74 – Fase velocidade-deslocamento (linear).....	112
Figura 75 – FRF no meio do cabo (amortecedor em 5%L).....	112
Figura 76 – Evolução temporal do deslocamento em função do comprimento (linear).....	113
Figura 77 – Relação de eficiência-deslocamento.	114
Figura 78 – Otimização das variações a) quadráticas e b) cúbicas da força de atrito.	115
Figura 79 – Evolução temporal do deslocamento em função do comprimento a) quadrática e b) cúbica.....	116
Figura 80 – Comparação das fases no meio do cabo a) quadrática e b) cúbica.	116
Figura 81 – Comparação entre os valores ótimos a) quadrática e b) cúbica.	118
Figura 82 – FRF no meio do cabo (GDL 100) das variações a) quadrática e b) cúbica (amortecedor em 5%L).....	119
Figura 83 – Relação de eficiência-deslocamento.	120
Figura 84 – Representação esquemática do uso de dois amortecedores.	121

Figura 85 – Deslocamentos do cabo com um e dois amortecedores (GDL 100).	122
Figura 86 – FRF no meio do cabo (GDL 100).	123
Figura 87 – Deslocamento em função do comprimento com a) dois amortecedores e b) um amortecedor.	123
Figura 88 – FRF sem transferência de energia mecânica (atrito viscoso) medida no meio do cabo (GDL 100).	124

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Faixa de velocidades críticas.	21
Tabela 2 - Exemplos de amplitudes de vibração de cabos de pontes estaiadas.	22
Tabela 3 – Propriedades do cabo.	71
Tabela 4 - Comparação dos resultados da teoria das cordas vibrantes com MEF.	95
Tabela 5 – Erro em diversos números de elementos.	95
Tabela 6 – Dados do atrito seco constante.	102
Tabela 7 – Dados do atrito seco com variação linear.	110
Tabela 8 – Dados das variações quadráticas e cúbicas.	117

LISTA DE SÍMBOLOS

abs	- Abscissa
a_0, a_1	- Coeficientes de Rayleigh
a_{ij}	- Componente dos autovetores de deslocamentos modais
A	- Área da seção transversal
A_r	- Área real de contato
A_v	- Coeficiente de ajuste de intensidade de excitação
b_i	- Deslocamento generalizado dos graus de liberdade
c_{eq}	- Constante de amortecimento equivalente
c_d	- Constante de decaimento exponencial
$c_{opt,i}$	- Constante de amortecimento ótimo
$c_{opt,v}$	- Constante ótima de amortecimento viscoso
c_p	- Constante de proximidade entre os cabos
c_{prop}	- Velocidade de propagação da onda
$C; c$	- Constante de amortecimento
C_a	- Coeficiente de arrasto
C_s	- Coeficiente de sustentação
$[C]$	- Matriz de amortecimento
$[C_{int}]$	- Matriz de amortecimento interno
d	- Parcela de redução do intervalo de otimização
D	- Diâmetro do cabo
E	- Módulo de elasticidade
E_{eq}	- Módulo de elasticidade equivalente
f_n	- Frequência natural
$f()$	- Função
$f()'$	- Derivada da função
F_{at}	- Força de atrito
$F_{at,t+1}$	- Força de atrito no passo incremental de tempo subsequente
$F_{at,amp}$	- Força de atrito em função da amplitude da vibração
$F_{at,sa}$	- Força de atrito para amortecimento semiativo

$F; F_{exc}$	- Força de excitação
$\{F_{exc}\}$	- Vetor força de excitação
$F_{exc,t+1}$	- Força de excitação no passo incremental de tempo subsequente
F_s	- Força de atrito estática
F_k	- Força de atrito dinâmica
g	- Aceleração da gravidade
$G(i)$	- Coeficiente de redução do fator de amortecimento
i	- Número do modo de vibração
i_m	- Unidade do número complexo imaginário
I	- Inércia em relação ao eixo neutro de flexão
k_i	- Relação entre frequências naturais
k_c	- Parâmetro de controle relacionado ao número de graus de liberdade
$K; k$	- Rigidez
\hat{K}	- Pseudorigidez
$[K]$	- Matriz de rigidez global
$[K_e]$	- Matriz de rigidez elementar
$[K_\sigma]$	- Matriz de rigidez geométrica
$[K_{el}]$	- Matriz de rigidez elástica
l	- Comprimento de onda
L	- Comprimento do cabo
L_h	- Projeção horizontal do cabo
L_{el}	- Comprimento do elemento
L_e	- Comprimento virtual do cabo
m	- Massa por unidade de comprimento
m/s	- Metros por segundo
$[m_e]$	- Matriz de massa elementar
$[M]$	- Matriz de massa global
n	- Potência de variação
n_f	- Número da frequência natural
n_G	- Número de graus de liberdade
N	- Força normal

ord	- Ordenada
p	- Dureza de penetração
\hat{p}_{t+1}	- Força pseudoestática
q_i	- Coeficientes do método de Newmark
ref	- Número do último pico de amplitude para avaliação do fator de amortecimento
$sgn()$	- Função sinal
S_c	- Número de Scruton
S_t	- Número de Struhal
t	- Tempo
t_{off}	- Tempo de retirada da força
t_μ	- Taxa de variação do coeficiente de atrito
t_N	- Taxa de variação da força normal
t_{var}	- Taxa de variação da força de atrito
T	- Força de tração
T_r	- Transposta
$u_i; v_i$	- Coordenadas do elemento
u	- Quociente de x_c/L
v	- Velocidade de deslizamento
V	- Velocidade média do vento
V_{min}	- Velocidade mínima do vento
$x; y$	- Coordenadas locais
x	- Variável de posição no cabo
x_p	- Posição do amortecedor
$x_{INICIAL}$	- Valor inicial no intervalo de otimização
x_{FINAL}	- Valor final no intervalo de otimização
$x_1; x_2$	- Parâmetros para otimização
$X; Y$	- Coordenadas globais
Y	- Amplitude de deslocamento
Y_{max}	- Amplitude máxima de deslocamento
Y_{np}	- Amplitude máxima em um determinado período
y	- Posição

y_{t+1}	- Posição no passo incremental de tempo subsequente
\dot{y}	- Velocidade
\dot{y}_m	- Velocidade média
\dot{y}_{lim}	- Velocidade limite para o atrito dependente
\dot{y}_{t+1}	- Velocidade no passo incremental de tempo subsequente
\ddot{y}	- Aceleração
\ddot{y}_m	- Aceleração média
\ddot{y}_{t+1}	- Aceleração no passo incremental de tempo subsequente
Y	- Amplitude da oscilação
z	- Deformação pré-deslizamento
z_0	- Variável conhecida no método de Newton-Raphson
z_x	- Variável desconhecida no método de Newton-Raphson
α_v	- Ângulo de inclinação da incidência do vento
$\beta; \gamma$	- Coeficientes da fórmula geral do método de Newmark
$\gamma_{m,i}$	- Coeficiente de variação modal
δ	- Delta de Dirac
δ_{ij}	- Delta de Kronecker
Δt	- Passo incremental de tempo
Δy	- Deslocamento
ΔW	- Energia dissipada por ciclo pela força de atrito
ΔW_{vis}	- Energia dissipada por ciclo pelo amortecimento viscoso
λ	- Parâmetro de curvatura do cabo
$[\Lambda]$	- Matriz de autovalores
μ	- Coeficiente de atrito genérico
μ_k	- Coeficiente de atrito cinético
μ_s	- Coeficiente de atrito estático
η	- Relação adimensionalizada de parâmetros
ξ	- Fator de amortecimento
ξ_i	- Fator de amortecimento para um modo específico de vibração
ξ_{flex}	- Parâmetro de rigidez à flexão
ρ	- Densidade do ar

θ	- Ângulo de inclinação do cabo
φ	- Proporção áurea
ϕ_{0i}	- Coordenada generalizada
$[\Phi]$	- Matriz de autovetores
ψ	- Variável adimensionalizada em função do tempo e da frequência
ω	- Frequência angular
$\omega_n; \omega_s$	- Frequência angular natural
ω_{01}	- Primeira frequência angular natural
$[\]$	- Matriz
$\{ \}$	- Vetor

SUMÁRIO

1	Introdução	11
1.1	Motivação e justificativas.....	13
1.2	Objetivos	14
1.3	Organização da dissertação	15
2	Pontes estaiadas	15
2.1	Fontes de vibração.....	18
2.1.1	Vibração induzida por desprendimento de vórtices.....	19
2.1.2	Vibração pela associação de vento e chuva	21
2.1.3	Galope de esteira.....	24
2.1.4	Galope seco inclinado	25
2.1.5	Galope por acumulação de gelo	26
3	Controle de vibrações nos cabos	26
3.1	Medidas mecânicas para amortecimento.....	28
3.1.1	Amortecedores passivos	29
3.1.2	Amortecedores semiativos	31
3.1.3	Amortecedores ativos	34
3.2	Medidas aerodinâmicas	35
3.3	Modificação estrutural.....	35
4	Amortecedor externo fixado no tabuleiro.....	37
5	Atrito Seco.....	49
5.1	Considerações acerca do coeficiente de atrito.....	54
5.1.1	Aderência-deslizamento (Stick-Slip).....	57
5.2	Energia de dissipação	60
5.2.1	Valor máximo da força de atrito para a equivalência	61
6	Atrito seco aplicado em cabos de pontes estaiadas	62
7	Metodologia.....	67

7.1	Considerações e delimitações do modelo.....	67
7.2	Modelo de Elementos Finitos de um cabo	70
7.2.1	Módulo de elasticidade ajustado	71
7.2.2	Matriz de massa elementar	73
7.2.3	Matriz de rigidez elementar	73
7.2.4	Análise modal	74
7.2.5	Matriz de amortecimento (Rayleigh).....	75
7.2.6	Teoria das cordas vibrantes.....	76
7.3	Atrito seco	77
7.3.1	Considerações acerca do atrito seco nas regiões de transição	78
7.3.2	Variação do atrito seco	79
7.3.3	Uso de dois amortecedores	81
7.4	Equação do movimento com inclusão da força de atrito seco variável	82
7.5	Procedimentos numéricos	84
7.5.1	Método de Newmark	85
7.5.2	Método de Newton-Raphson	90
7.5.3	Otimização pelo segmento áureo	92
8	Resultados.....	93
8.1	Organização sequencial.....	93
8.2	Análise da convergência da malha	94
8.3	Verificação do modelo em elementos finitos	95
8.4	Análise modal.....	95
8.5	Função de resposta em frequência	96
8.6	Variação dos parâmetros força de atrito e posição do amortecedor.....	97
8.6.1	Atrito seco constante.....	98
8.6.2	Efeito da força de atrito estática.....	108
8.6.3	Atrito seco com progressão linear	110

8.6.4	Atrito seco com progressões quadrática e cúbica	114
8.7	Análise do uso de dois amortecedores	121
9	Conclusões.....	125
10	Sugestões para próximos estudos	126
	Referências.....	127

1 Introdução

Pontes são estruturas que tem por objetivo transpor cursos hídricos permitindo a ligação da malha rodoviária, sendo essenciais para o desenvolvimento econômico e social do país. Estas estruturas são construídas para resistir aos esforços solicitantes com o menor custo possível acrescida da necessidade de sobrepor grandes vãos.

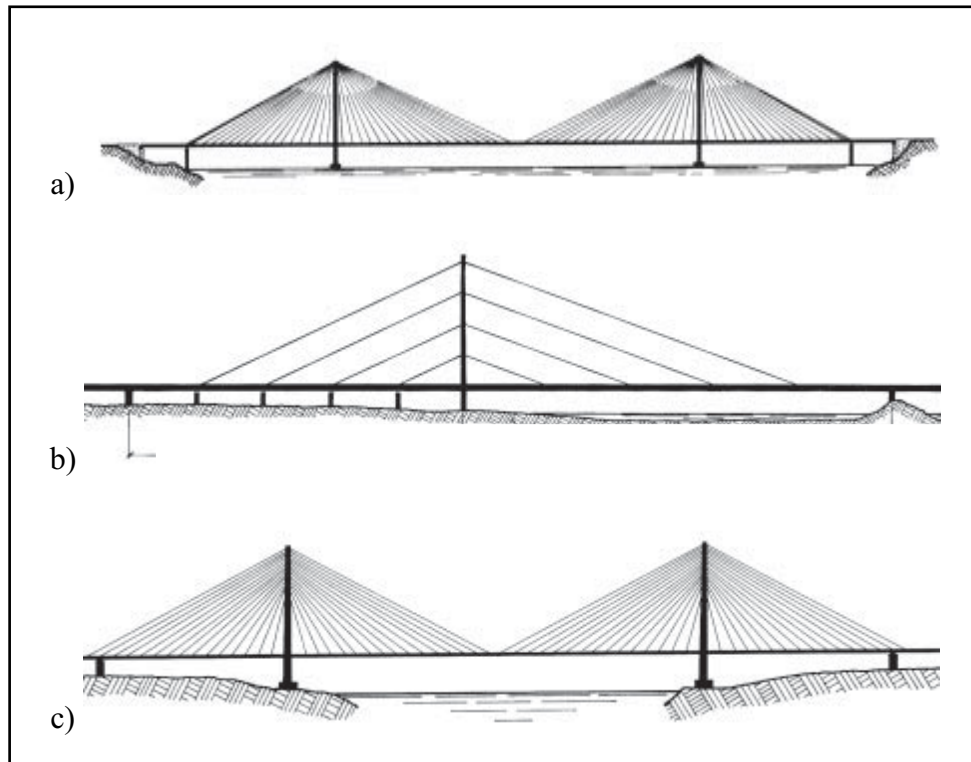
Para vãos entre torres acima de 1000 metros as pontes estaiadas são economicamente mais viáveis (CHEN; DUAN, 1999) e ainda não têm um limite estabelecido de vão máximo a ser vencido. Devido à limitação econômica de pontes suspensas para vãos muito grandes, as pontes estaiadas são objeto de interesse de engenheiros projetistas em todo o mundo (SVENSSON, 2012).

No Brasil, a primeira ponte estaiada inaugurada foi a Ponte Estação Engenheiro Jamil Sabino (DE ALMEIDA; RODRIGUES, 2022), em 2000, que contou com consultoria estrangeira para sua produção. Porém, a inserção do país no patamar internacional se deu com a construção da Ponte Octavio Frias de Oliveira, em 2008, sendo a primeira ponte estaiada existente que suporta dois tabuleiros curvos independentes em uma mesma torre (MAZARIM, 2011).

Quando comparadas com as pontes suspensas, as estaiadas têm velocidade crítica do vento maior para o início das vibrações e frequências naturais mais altas, vantagens que promoveram largamente sua adesão, já que sua implantação é, geralmente, realizada em áreas abertas. Atualmente, o número de pontes estaiadas utilizadas para grandes vãos ultrapassa 1000 unidades (SVENSSON, 2012).

As pontes estaiadas são compostas por tabuleiros suspensos por cabos que são apoiados em torres e, em geral, ancorados em pilares. Os materiais empregados em sua construção variam conforme a distância do vão a ser vencida, seguindo sempre parâmetros econômicos (SVENSSON, 2012). As configurações mais comuns para o arranjo dos cabos consistem em três sistemas, denominados leque, harpa e intermediário (Figura 1).

Figura 1 - Arranjo dos cabos: a) Sistema de leque; b) Sistema de harpa; c) Sistema intermediário



Fonte: Svensson (2012)

Os cabos utilizados em pontes estaiadas devem receber particular atenção, tendo em vista sua importância estrutural e sua suscetibilidade às vibrações. Estes elementos estruturais são expostos a carregamentos de diversos tipos em toda sua extensão, sendo solicitados dinamicamente e estaticamente, podendo sofrer danos nos seus componentes de proteção e de ligação com o tabuleiro. As vibrações, que são movimentos oscilatórios repetitivos, podem diminuir consideravelmente a vida útil da estrutura através de micro deformações plásticas seguidas de trincas e, por fim, ruptura final do elemento estrutural.

Diversas técnicas são empregadas para atenuar as vibrações nas estruturas, sendo classificadas em três grupos, a saber: (a) controle passivo, sendo obtido sem o aporte de energia externa ao sistema, como por exemplo o procedimento de rigidificação (RIBEIRO; DE LIMA, 2021), o uso de absorvedores dinâmicos de vibração (DEN HARTOG, 1985) e a aplicação de amortecimento capaz de absorver a energia vibratória do sistema e dissipá-la sob a forma de calor (NASHIF; JONES; HENDERSON, 1985; GONÇALVES *et. al*, 2018); (b) controle ativo, que requer a introdução de alguma forma de energia no sistema, onde geralmente empregam atuadores capazes de desenvolver forças de controle que irão se contrapor às forças causadoras

das vibrações (OGATA, 2010); (c) controle semiativo, que busca reduzir a vibração através de alterações controladas dos parâmetros físicos do sistema (massa, rigidez e amortecimento), como os materiais inteligentes e os materiais piezoelétricos (BANKS; SMITH; WANG, 1996; BENT; HAGOOD; RODGERS, 1995).

Assim, dentre a multiplicidade de sistemas de amortecimento existentes, o presente texto se dedica ao estudo do amortecimento passivo e semiativo para cabos de pontes estaiadas visando o aproveitamento dos efeitos da não linearidade do atrito seco. O método dos elementos finitos é utilizado para a modelagem do cabo e o método de Newmark para a sua integração numérica. Sua aplicação nos cabos de pontes estaiadas consiste em alocar o amortecedor em um ponto específico da estrutura, tornando o amortecimento de todo o cabo dependente da dissipação de energia que acontece naquele ponto.

1.1 Motivação e justificativas

Pela alta quantidade de amortecedores necessários e sua influência estética no resultado final das pontes estaiadas, os métodos e sistemas de amortecimento para amenizar vibrações em seus cabos são objetos constantes de pesquisas (GAO *et al.*, 2021; LIN *et al.*, 2020; JAVANBAKHT; CHENG; GHRIB, 2020). A otimização dos mecanismos de amortecimento pode resultar em menores interferências arquitetônicas e uma considerável economia no custo de implantação do controle de vibrações.

Além de provocar desconforto aos usuários e prejudicar a estabilidade dinâmica da ponte, as vibrações diminuem consideravelmente a vida útil da estrutura, aumentando a incidência de falha estrutural por fadiga. No controle de vibrações destacam-se três principais mecanismos de amortecimento, sendo eles: amortecimento interno (histerético), estrutural e externo (DE SILVA, 2007). O amortecimento histerético se dá pelo deslizamento entre as camadas internas de um sólido, que acontece devido à deformação diferencial entre elas. Já o amortecimento estrutural, é devido ao atrito entre os elementos estruturais em suas junções, comumente gerado por rotações diferenciais entre eles. Os amortecedores externos são dispositivos acopláveis às estruturas, tendo diversos submecanismos de amortecimento possíveis, como, por exemplo, viscoso, viscoelástico, massa sintonizada (*tuned mass damper*) e atrito seco.

Dentre os mecanismos de amortecimento, destaca-se o mecanismo de atrito seco pela facilidade na sua implementação e pela variação linear da força que o compõe em função do

deslocamento resultar em uma eficiência maior no amortecimento (GURAN; PFEIFFER; POPP, 2001). Esta variação altera o decremento de amplitude clássico conhecido no atrito seco, convertendo-o de linear a aproximadamente logarítmico. Além disso, o atrito seco apresenta a vantagem de não ter sua eficiência condicionada ao modo de vibração do cabo, tendo seu funcionamento independente da frequência da vibração, porém seu desempenho é diretamente afetado pela amplitude de deslocamento (HOANG; FUJINO, 2009).

Os estudos (WEBER; HOGSBERG; KRENK, 2010; WANG; SUN, 2013) analisam a otimização do atrito seco com premissas de projeto oriundas da teoria do amortecimento viscoso, o que pode ser questionado com base nas diferenças de funcionamento entre ambos mecanismos. Portanto, este estudo implica em conhecer o fenômeno do atrito seco aplicado nos cabos de pontes estaiadas com um viés de exploração do mecanismo independente da teoria do amortecimento viscoso, onde são esperados resultados que podem servir de subsídio para novos desenvolvimentos de amortecedores comerciais.

1.2 Objetivos

Diante do que foi exposto anteriormente, o objetivo geral desta dissertação é avaliar o comportamento de cabos de pontes estaiadas considerando o amortecimento com variações do atrito seco em função do deslocamento, sendo essas variações lineares, quadráticas e cúbicas. Com essas aplicações é esperado que se encontre formas mais eficientes de amortecimento para este mecanismo. São os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolver e implementar as técnicas de análise de vibrações, via elementos finitos, considerando primeiramente os cabos com vibração livre e, em seguida, com amortecimento proporcional pelo método de Rayleigh, com conferência de modelo pela teoria analítica;
- Estudar a eficiência do amortecimento alcançado pelo atrito seco constante e suas variações lineares, quadráticas e cúbicas em função do deslocamento;
- Analisar o uso de dois amortecedores por atrito seco fixados próximos às extremidades do cabo e compará-lo com o uso da teoria do amortecimento viscoso equivalente;
- Comparar os fatores de amortecimento máximos obtidos por atrito seco variável com a curva universal de amortecimento modal (KRENK, 2000).

1.3 Organização da dissertação

Depois de ter sido feita a introdução ao assunto das vibrações nos cabos de pontes estaiadas na seção 1, a seção 2 é dedicada ao desenvolvimento histórico dessas pontes, elencando as fontes de vibrações mais comuns na literatura.

Na seção 3 são explorados os tipos de controle de vibrações nos cabos e na seção 4 é feita uma revisão bibliográfica mais aprofundada acerca dos amortecedores externos fixados no tabuleiro, sendo o objeto de estudo deste trabalho.

O atrito seco, como mecanismo de amortecimento utilizado, tem sua revisão histórica contida na seção 5 e sua aplicação nos cabos de pontes estaiadas na seção 6.

A metodologia do trabalho é descrita na seção 7, com as considerações e delimitações do modelo de cabo analisado (seção 7.1), sua formulação em elementos finitos (seção 7.2), formulação numérica do atrito seco e suas variações (seções 7.3 e 7.4) e, por fim, os métodos numéricos utilizados para a solução das equações propostas (seção 7.5).

Os resultados das simulações são expostos na seção 8 abrangendo todos os objetivos propostos na seção 1.2, seguidos das conclusões na seção 9 e das sugestões para próximos estudos na seção 10.

2 Pontes estaiadas

O conceito da ponte estaiada está presente nas sociedades desde a antiguidade, onde inventores e pensadores desenvolviam soluções para problemas típicos cotidianos, como no Egito, por exemplo, onde o uso de estais foi utilizado para o enrijecimento e sustentação de navios à vela. Assim como diversas pontes estaiadas rudimentares de bambu e cipó foram feitas ao redor do mundo, demonstrando intuição estrutural acerca do seu desenvolvimento (TROIISKY, 1977).

Mais formalmente, Faustus Verantius propôs, em 1617, uma ponte suspensa com reforço de estais inclinados, os quais eram ancorados em torres laterais (Figura 2a). Apesar das limitações da época, seu modelo tem grandes semelhanças com os utilizados atualmente. Em 1784, na Alemanha, ocorreu a primeira tentativa de execução de ponte estaiada não relacionada às pontes pênséis, a qual foi projetada com elementos de madeira por Löscher (Figura 2b). Ambos, Verantius e Löscher, são considerados precursores no âmbito das pontes estaiadas.

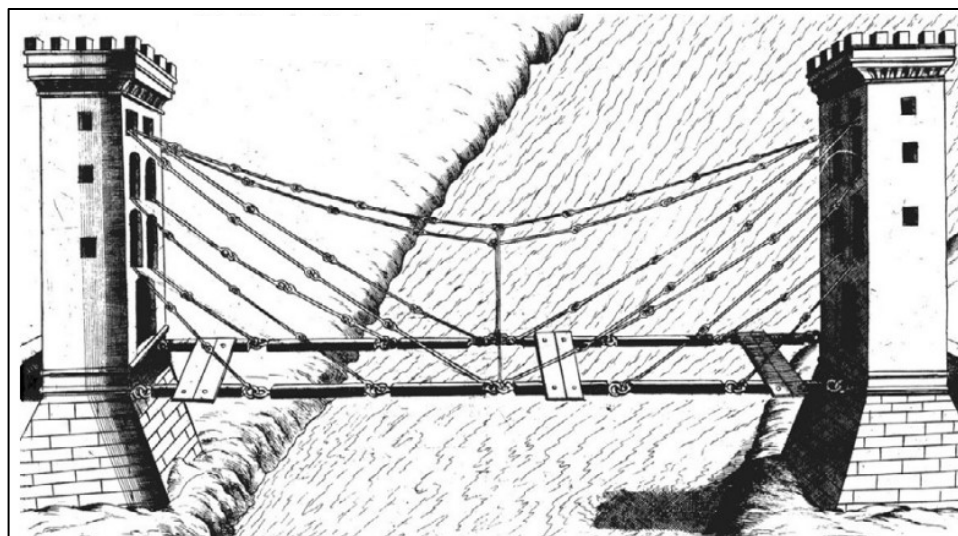
Seguindo o desenvolvimento, no século dezenove, muitas tentativas de projeto de pontes estaiadas foram feitas, porém devido ao comportamento do sistema de estais não ter sido ainda bem compreendido algumas falhas ocorreram, como o colapso da Dryburgh Abbey Bridge em 1818, na Escócia, também o colapso da Saale River Bridge em 1825, na Alemanha (WALTHER, 1999). Estas catástrofes resultaram em uma desconfiança do sistema que consequentemente caiu em desuso, retardando seu desenvolvimento até o engenheiro de pontes Johann August Röbling, na metade do século dezenove, passar a introduzir estais inclinados em pontes pênséis (VIRLOGEUX, 1999); além de auxiliar na suspensão da ponte, os estais inclinados também forneciam maior eficiência em seu enrijecimento quando submetida a carregamentos dinâmicos (TROITSKY, 1977).

Mesmo com o entendimento dos benefícios que as pontes estaiadas tinham sobre a rigidez, a tecnologia disponível na época era insuficiente para seu correto dimensionamento, levando o sistema novamente a estagnação. Somente no século vinte estas estruturas alavancaram seu desenvolvimento. O marco inicial das pontes estaiadas modernas se deu na construção da Strömsund Bridge em 1956, na Suécia.

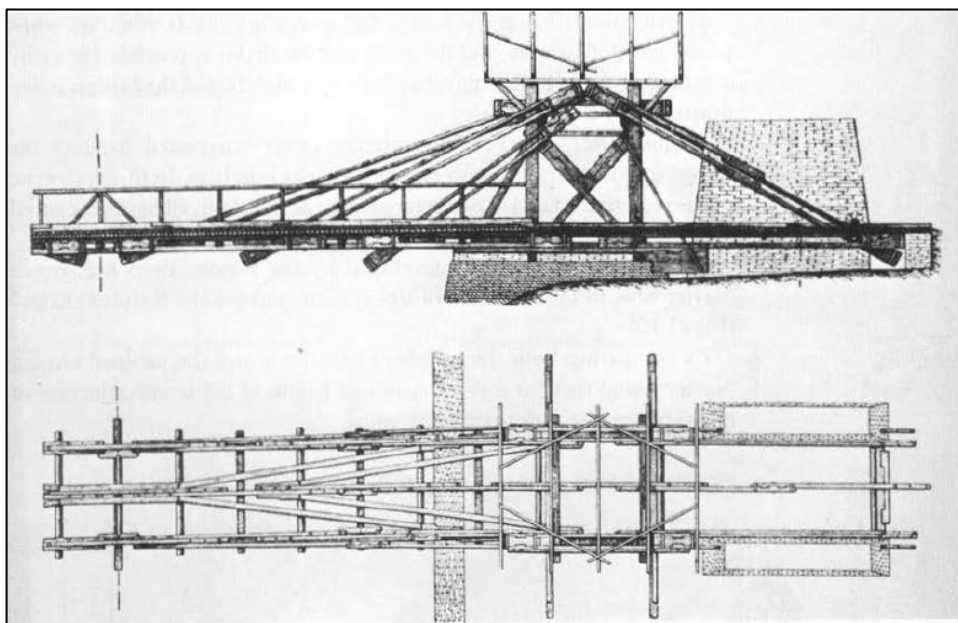
Segundo Troitsky (1977), o uso das pontes estaiadas foi impulsionado por cinco principais fatores, que são: desenvolvimento da análise estrutural de estruturas com elevado grau de hiperestaticidade e sua aplicação em computadores eletrônicos; desenvolvimento de tabuleiros ortotrópicos em aço; experiência prévia de modelos construídos que continham elementos básicos das pontes estaiadas; aplicação de aços de alta resistência; novos métodos de fabricação e construção.

Devido à evolução, as estruturas chegam a suportar vãos acima de 1000 metros, sendo o recorde atual da Russky Bridge (Rússia) com 1104 metros de vão principal, necessitando de cabos cada vez mais longos. Esta característica implica em uma diminuição acentuada da rigidez dos cabos, que passam a estar mais suscetíveis às não linearidades geométricas e, consequentemente, aos prejuízos estruturais causados por elas.

Figura 2 - Pontes estaiadas: a) projetada por Verantius em 1617; b) projetada por Löscher em 1784



a)



b)

Fonte: Troitsky (1977)

2.1 Fontes de vibração

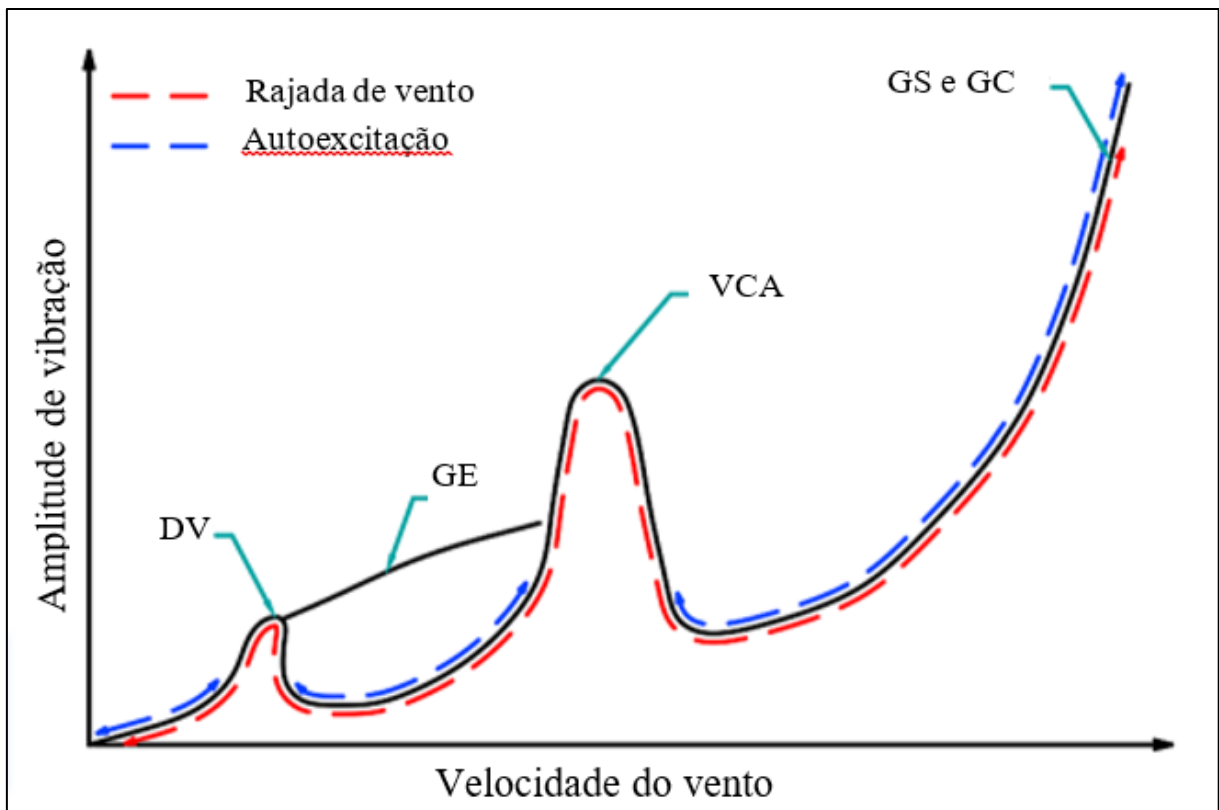
Existem três principais fontes de vibração que influenciam o comportamento dinâmico dos cabos de pontes estaiadas, sendo elas: vibrações induzidas por ventos, cargas móveis e terremotos. Pode-se subdividir as vibrações induzidas por ventos em três principais categorias, sendo vibrações induzidas por desprendimento de vórtices, pela associação de vento e chuva e por galope (JAVANMARDI *et al.*, 2021). De acordo com Post-Tensioning Institute (2007), deslocamentos abaixo de um diâmetro podem ser tomados como critério de projeto para vibrações admissíveis, as quais não provocam demandas excessivas para as ancoragens e sistemas de amortecimento. Segundo Caetano (2007), a faixa de velocidades de interesse para análise se situa entre 5 e 55 m/s (metros por segundo).

A proporção da amplitude alcançada em cada forma de instabilidade pode ser vista em função da velocidade do vento na Figura 3, onde DV representa o desprendimento de vórtices, GE é galope de esteira, VCA é vento e chuva associados, GS é o galope seco e GC é o galope congelado. Cada pico indicado na Figura 3 é uma indicação da proporção do aumento da amplitude de vibração para cada fenômeno de instabilidade.

Apesar de o galope seco e congelado apresentarem um comportamento mais crítico, ou seja, uma amplitude de vibração mais acentuada, são fenômenos menos comuns em casos reais, sendo o vento e chuva associados os mais utilizados como critério de projeto para o controle de vibrações.

A autoexcitação pode ser compreendida como um fenômeno onde a força de excitação é dependente dos parâmetros de movimento do sistema, ou seja, o movimento do sistema produz a força excitadora (RAO, 2009). A rajada de vento pode atuar em diversas velocidades e amplitudes de vibração, porém não representa a periculosidade que os principais fatores de excitação possuem (CARNEIRO, 2009) por não ser considerada um fenômeno de instabilidade aeroelástica, observando que estruturas aerodinamicamente estáveis apresentam movimentações em ventos fortes se forem flexíveis (XU, 2013).

Figura 3 – Relação proporcional entre amplitudes de vibração e fenômenos de instabilidade.



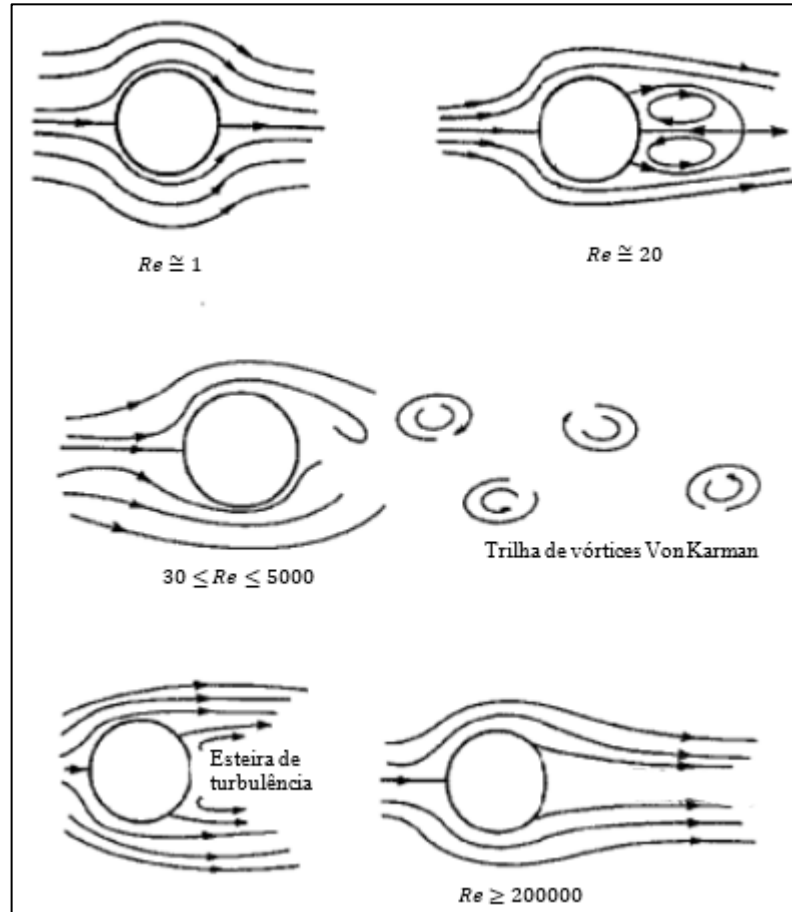
Fonte: Adaptado de Javanmardi *et al.* (2021)

Nos casos de vibrações induzidas por cargas móveis (pedestres, veículos etc.) e terremotos, pode-se considerar que a excitação ocorrente é paramétrica (FUJINO; KIMURA; TANAKA, 2012), ou seja, pelo movimento relativo dos pontos de ancoragem. Para mitigar as vibrações paramétricas, comumente é feita a ligação transversal dos cabos, alterando a frequência natural do conjunto interligado.

2.1.1 Vibração induzida por desprendimento de vórtices

Quando o vento incide na superfície do cabo, há uma distribuição de pressões em seu entorno (Figura 4) e para cada valor da velocidade do vento o número de Reynolds (Re) é alterado, produzindo um comportamento diferente na perturbação do cabo.

Figura 4 - Desprendimento de vórtices



Fonte: Adaptado de Caetano (2007)

Com o número de Reynolds em torno de 20, o escoamento se separa criando dois vórtices simétricos à jusante do cilindro. Os vórtices simétricos são quebrados, tornando-se alternados e cíclicos quando Re assume o valor de 30, estágio conhecido como “trilha de vórtices Von Karman”. Atingindo um valor intermediário, entre 5000 e 200000, nota-se um comportamento turbulento novamente à jusante do cabo até que, por fim, em valores superiores, há redução da turbulência e maior estabilidade é apresentada (CAETANO, 2007).

A velocidade média do vento (V) onde a frequência de excitação do vórtice corresponde à frequência natural do cabo é mostrada na Eq. (1).

$$V = \frac{f_n D}{S_t} \quad (1)$$

onde f_n , D e S_t são a frequência natural, o diâmetro do cabo e o número de Struhal, respectivamente.

2.1.2 Vibração pela associação de vento e chuva

Inicialmente percebida por Hikami, em 1986, a combinação dos efeitos do vento com a chuva pode levar a não linearidades geométricas, ou seja, vibrações não lineares. Além disso, a instabilidade aerodinâmica induzida pelo vento e chuva combinados pode levar ao *flutter* (agitação) subsônico. Durante a construção da Meikonishi Bridge, no Japão, os cabos apresentavam estabilidade quando submetidos à força do vento em condições secas, porém se tornavam instáveis quando esta força era combinada à chuva. A vibração chegou à amplitude de 55 centímetros com a velocidade do vento de 14 m/s (HIKAMI; SHIRAISHI, 1988). Isto demandou grande atenção por parte dos engenheiros de pontes, tendo em vista que a ocorrência das grandes amplitudes se dava com baixas velocidades do vento quando associado à chuva.

Tabela 1 - Faixa de velocidades críticas.

Pesquisador	Faixa de velocidades [m/s]
Hikami e Shiraishi (1988)	9 a 13 7 a 14
Matsumoto <i>et al.</i> (1995)	4 a 15 6 a 17 7 a 10
Flamand (1995)	7 a 12
Bosdogianni e Olivari (1996)	7,5 a 16
Gu <i>et al.</i> (2002)	5 a 18
Wang <i>et al.</i> (2005)	8 a 15
Phelan, Sarkar e Mehta (2006)	6,3 a 14 6,3 a 9,8
Ni <i>et al.</i> (2007)	6 a 14

Fonte: Machado (2008).

Uma importante característica deste fenômeno se dá em não relacionar a velocidade do vento com a frequência de excitação para seus picos de amplitude. Independentemente da frequência que o cabo seja submetido, o pico da amplitude geralmente está entre a faixa de velocidade de 4 a 18 m/s, como segue exposto na Tabela 1 (MACHADO, 2008).

Pela similaridade de características físicas dos cabos, como a relação de massa e rigidez, o pico da amplitude geralmente se dá entre 0,5 e 3,3 hertz, onde há predominância do primeiro modo de vibrar, e, comumente, com um volume de precipitação de 1 a 10 mm/h (GIMSING; GEORGAKIS, 2012). Apesar de este fenômeno não ser profundamente compreendido, acredita-se que esta oscilação aconteça devido a filetes de água que se formam na superfície dos cabos nestas condições de vento e chuva específicas (MATSUMOTO; SHIRAIISHI; SHIRATO, 1992). Acima de 18 m/s os filetes de água não se formam mais a ponto de influenciar criticamente a amplitude das vibrações, o que torna este fenômeno restrito, portanto, a uma faixa específica de velocidade do vento, como também a um volume específico de precipitação pluvial. Gimsing e Georgakis (2012) registraram valores máximos de amplitude nos cabos de algumas pontes estaiadas e suas respectivas causas na Tabela 2, onde se pode notar que o galope molhado (causado pela associação de vento e chuva) teve predominância.

Tabela 2 - Exemplos de amplitudes de vibração de cabos de pontes estaiadas.

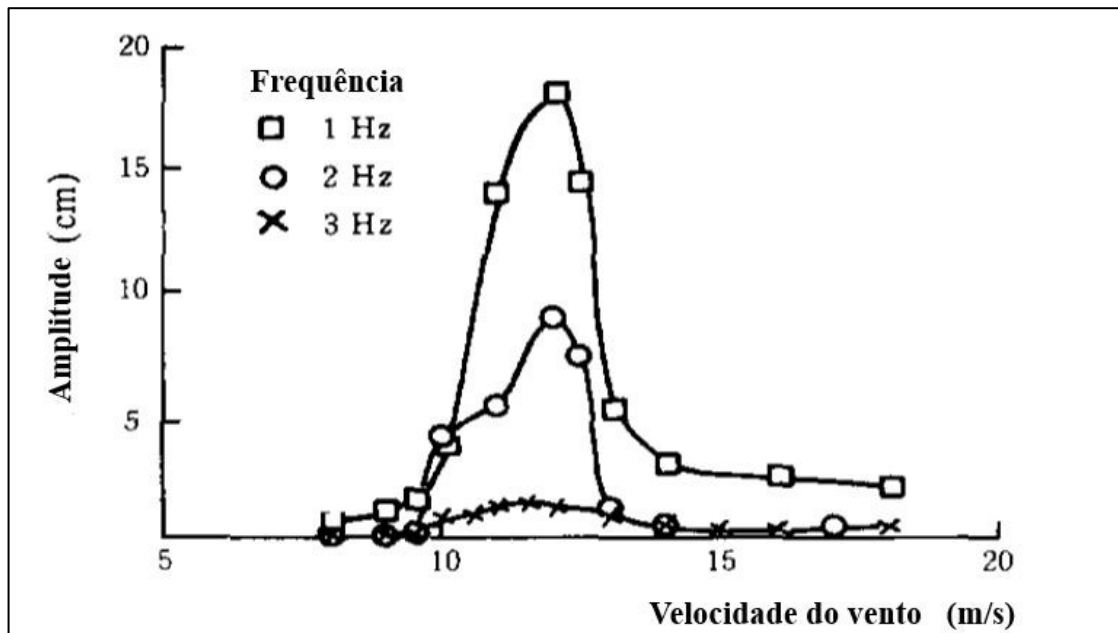
Ponte	Localização	Vão principal (m)	Mecanismo de excitação	Amplitude Máx. (m)
Normandia	França	856	Desprendimento de vórtices	1,0
Oresund	Dinamarca	490	Galope molhado	3,0
Segunda Ponte de Severn	Reino Unido	456	Galope seco/molhado	1,5
Kap Shui Mun	Hong Kong	430	Galope molhado	1,5
Meiko-Nishi	Japão	406	Galope molhado	0,6
Fred Hartman	EUA	381	Galope seco/molhado	2,0
Tenpozan	Japão	350	Galope molhado	1,0
Dongting	China	310	Galope molhado	–
Franjo Tudjman	Croácia	304	Galope molhado	2,0
Erasmus	Países Baixos	284	Galope molhado	0,7
Veterans Memorial	EUA	195	Galope molhado	0,3
Ponte del Mare	Itália	172	–	2,0

Fonte: Gimsing e Georgakis (2012).

Hikami e Shiraishi (1988) também estudaram as frequências e velocidades críticas em um protótipo submetido a um túnel de vento, registrando resultados compatíveis com os já

mencionados, analisando a faixa de 1 a 3 hertz (Figura 5). Os resultados indicam que para uma mesma frequência o pico de amplitude acontece em uma velocidade específica do vento. Apesar de neste caso a velocidade do vento ser o fator crítico de amplitude, ela pode ser amplificada pelas frequências de ressonância. Portanto, percebe-se que a primeira frequência de excitação (1 hertz) se aproxima mais da primeira frequência de ressonância, porém, enfatiza-se que há uma distinção de amplitude considerável entre as faixas de velocidade do vento, mesmo havendo essa proximidade constante da primeira frequência natural.

Figura 5 – Resposta do cabo para diferentes frequências.



Fonte: Hikami e Shiraishi (1988).

Para mitigar as vibrações causadas por associação de vento e chuva, Lankin *et al.* (2000) sugeriram utilizar um número de Scruton (S_c) maior que 10, conforme Eq. (2).

$$S_c = \frac{m\xi}{\rho D^2} \geq 10 \quad (2)$$

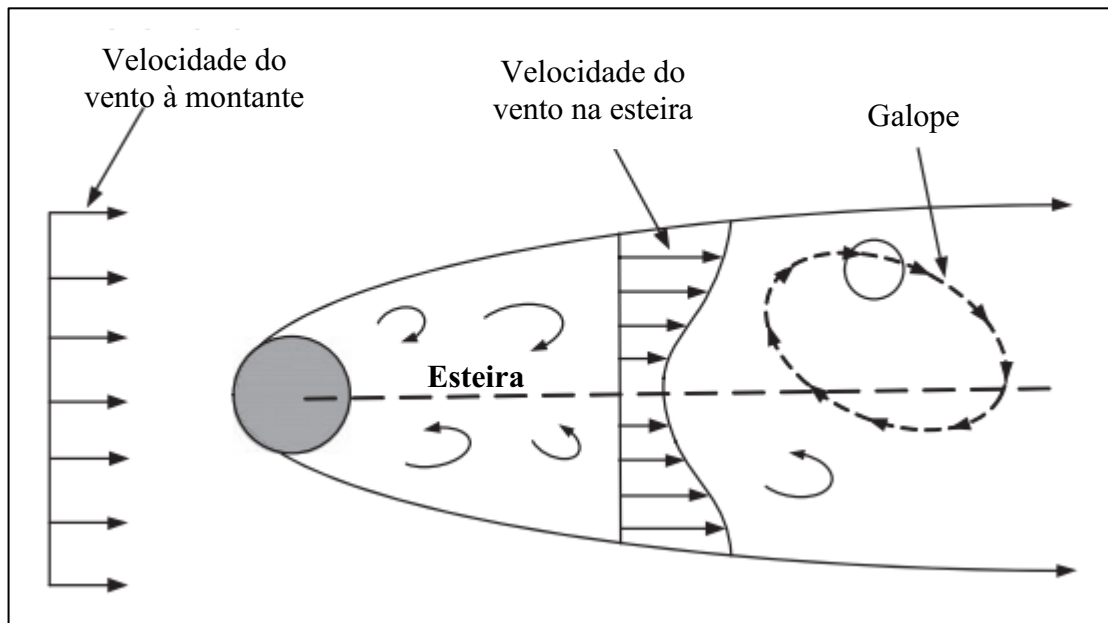
sendo m a massa específica do cabo por unidade de comprimento, ξ o fator de amortecimento e ρ a densidade do ar.

Este fenômeno é considerado, em geral, o fator crítico de projeto para a mitigação das vibrações nos cabos, tomando sempre $S_c \geq 10$ como referência.

2.1.3 Galope de esteira

O galope de esteira se dá pelo posicionamento do cabo em regiões de instabilidade à jusante de outros elementos estruturais, como outros cabos ou as torres da ponte, por exemplo. O desprendimento dos vórtices causado pela variação da força do vento na esteira conduz o cabo alocado naquela região a movimentos elípticos (galope), conforme mostrado na Figura 6.

Figura 6 - Galope de esteira.



Fonte: Adaptado de Xu (2013).

A Eq. (3) é utilizada para encontrar a velocidade mínima do vento (V_{min}) na qual o galope de esteira acontece (IRWIN, 1997).

$$V_{min} = c_p f_n D \sqrt{S_c} \quad (3)$$

onde c_p é uma constante de proximidade entre os cabos, sendo $c_p = 25$ para cabos pouco espaçados (2 a 6 diâmetros do cabo) e $c_p = 80$ para cabos normalmente espaçados, geralmente a 10 diâmetros do cabo ou mais (XU, 2013).

2.1.4 Galope seco inclinado

O galope seco inclinado não ocorre quando o cabo está perpendicularmente posicionado na direção do vento. Porém, quando há uma componente que não é normal ao eixo do cabo, uma instabilidade semelhante ao galope é observada (KUMARASENA *et al.*, 2005). Tal instabilidade pode ser superficialmente compreendida como a mudança no coeficiente de arrasto do cabo com o aumento da velocidade do vento, tornando-a conhecida também como “instabilidade de arrasto” (GIMSING; GEORGAKIS, 2012).

Este fenômeno foi inicialmente percebido em estudos de vibrações por vento e chuva associados (SAITO; MATSUMOTO; KITAZAWA, 1994) e, apesar de nunca ter sido registrado em pontes reais, foi possível observar nos protótipos submetidos aos túneis de vento e se trata de um sério problema de instabilidade caso ocorra na prática (FUJINO; KIMURA; TANAKA, 2012).

O critério de instabilidade para o galope seco inclinado foi proposto por Saito, Matsumoto e Kitazawa (1994) na Eq. (4).

$$\frac{V_{min}}{f_n D} \cong 40 \sqrt{S_c} \quad (4)$$

A sugerida equação é uma particularização da Eq. (3), para um vento incidente com inclinação de 30° a 60° em relação ao eixo do cabo. Este fenômeno se mostrou potencialmente prejudicial para valores baixos de fatores de amortecimento, mais precisamente abaixo de 0,001. Para valores acima de 0,003 nenhuma vibração considerável foi encontrada (XU, 2013), o que representa, para cabos típicos, um número de Scruton aproximadamente igual a 3.

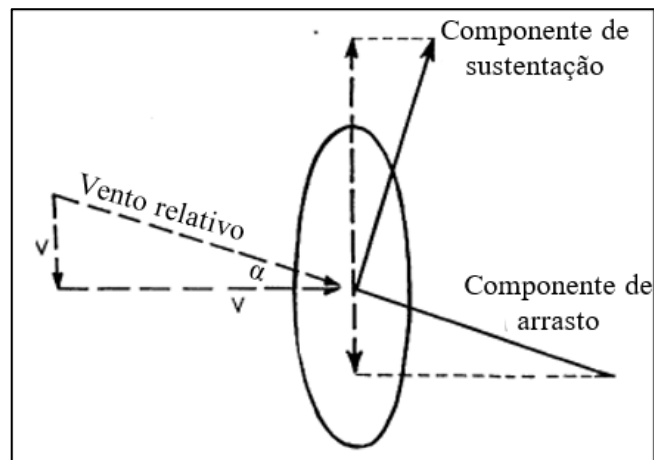
2.1.5 Galope por acumulação de gelo

Quando o gelo se acumula sobre a superfície de um cabo, a geometria da sua seção transversal é alterada, mudando também seu comportamento aerodinâmico (FUJINO; KIMURA; TANAKA, 2012). É mostrado na Eq. (5) o critério de instabilidade para este fenômeno (DEN HARTOG, 1932).

$$\frac{\partial C_s}{\partial \alpha_v} + C_a < 0 \quad (5)$$

sendo C_s e C_a os coeficientes de sustentação e arrasto, respectivamente e α_v o ângulo de inclinação da incidência do vento. Sua atuação é explicitada na Figura 7.

Figura 7 - Componentes de força de sustentação e arrasto



Fonte: Adaptado de Den Hartog (1932)

3 Controle de vibrações nos cabos

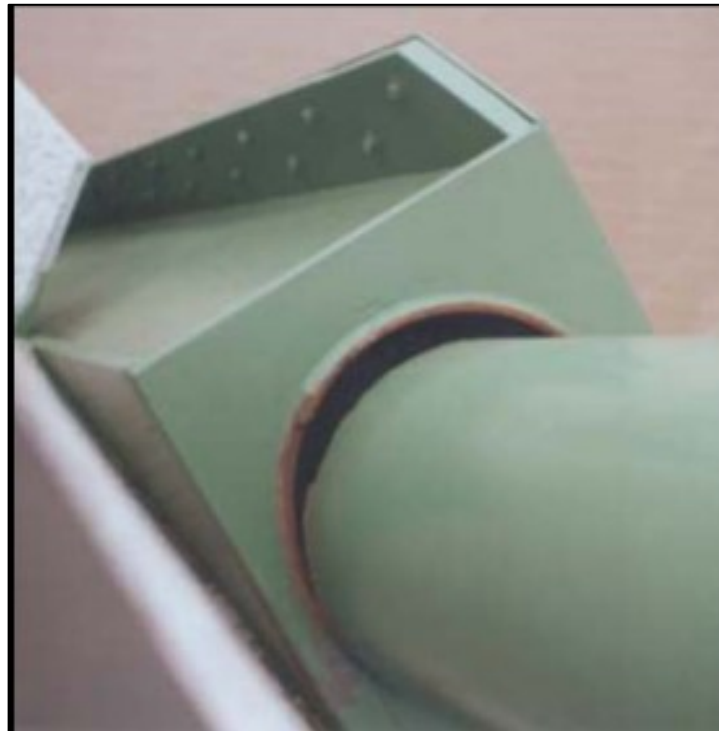
O controle das vibrações busca diminuir as oscilações a ponto de proteger a estrutura contra os danos oriundos das solicitações dinâmicas (Figura 8 e 9), preservando sua vida útil. Segundo Xu (2013), para este objetivo são utilizadas medidas mecânicas, medidas aerodinâmicas e modificação estrutural.

Figura 8 – Danos em componentes não estruturais do cabo.



Fonte: Caetano *et al.* (2008).

Figura 9 – Tubo guia fraturado perto da ancoragem do cabo.

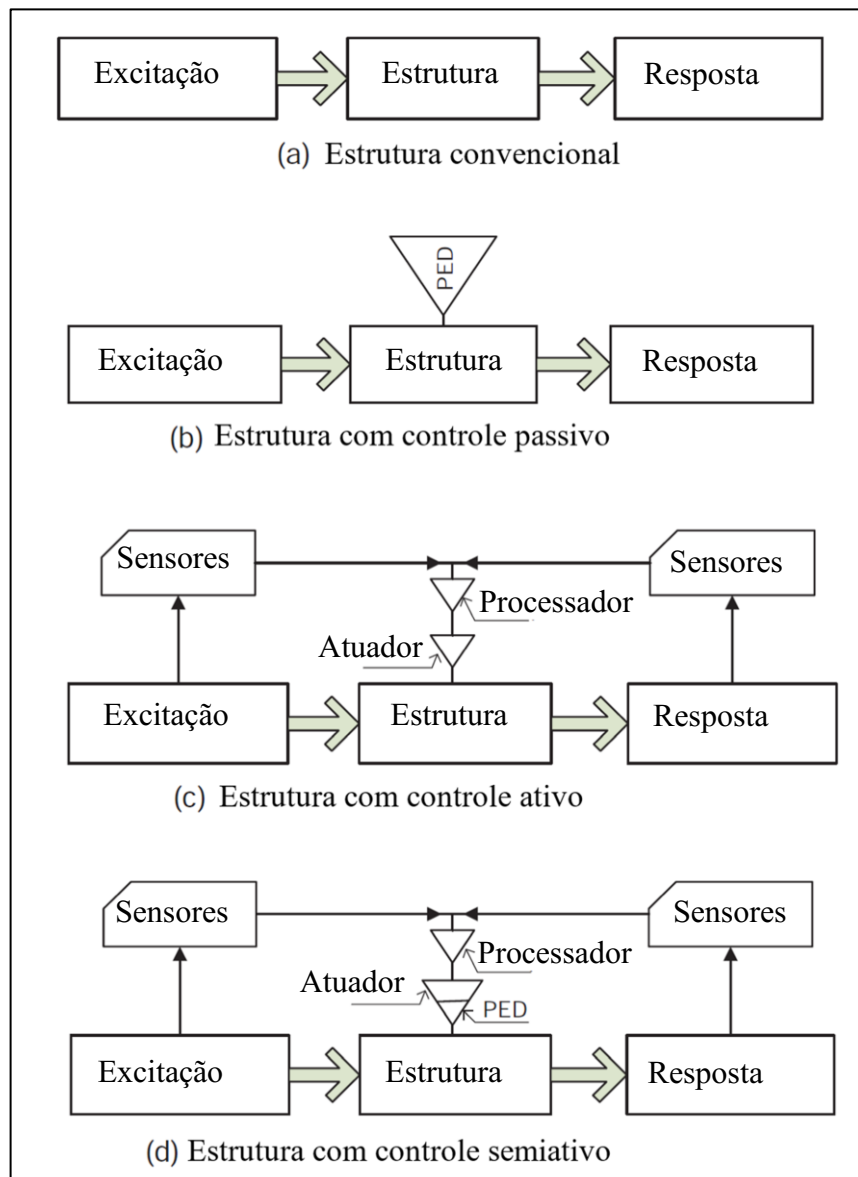


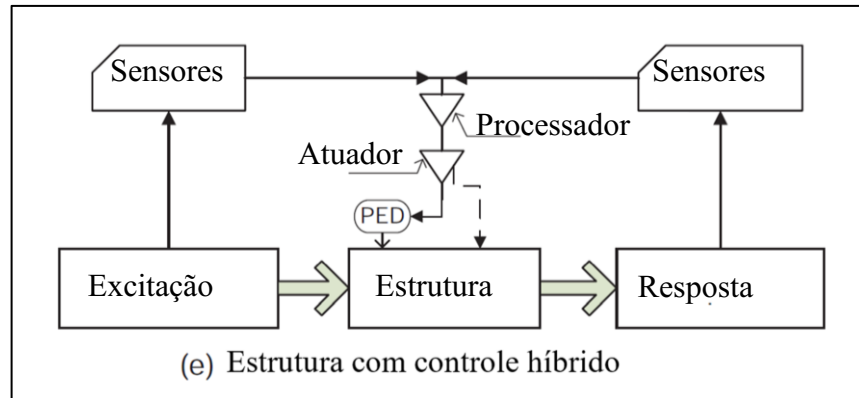
Fonte: Witthoft, Kesner e Poston (2008).

3.1 Medidas mecânicas para amortecimento

As medidas mecânicas se subdividem em controle passivo e ativo, com uma medida intermediária denominada controle semiativo (Figura 10). Ademais, para uma melhor eficiência no amortecimento estes controles podem ser aplicados simultaneamente, método conhecido como controle híbrido. Como exemplo, tem-se um sistema ativo associado a um passivo para eventuais faltas de abastecimento energético.

Figura 10 – Modos de controle (PED é a sigla para *Passive Energy Dissipation*).





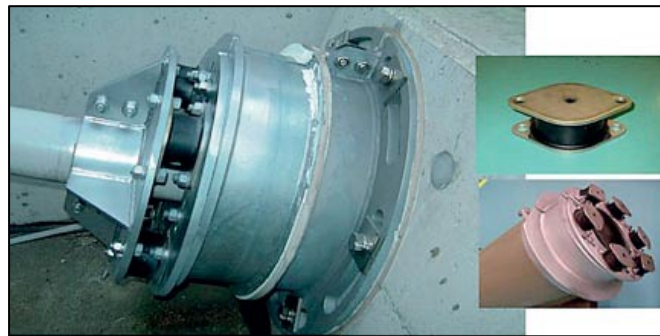
Fonte: Adaptado de Xu (2013).

3.1.1 Amortecedores passivos

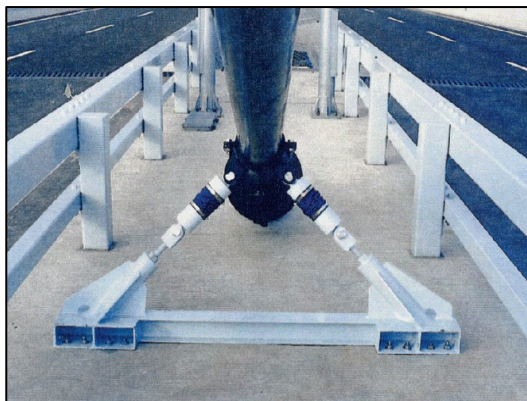
Os amortecedores passivos viscoelásticos (Figura 11a), viscosos (Figura 11b), metálicos, por atrito seco, por massa sintonizada (Figura 11c), entre outros, são inerentemente estáveis e não necessitam de fonte externa de energia para funcionar, podendo se manter em atividade mesmo em situações adversas, como tempestades, terremotos etc. Quando o controle envolve o atrito, seja seco, viscoso ou interno (viscoelástico), parte da energia mecânica de movimento se converte em calor, reduzindo a amplitude de vibração (FLECK, 2002). Apesar dos benefícios, esse tipo de amortecedor tem maior eficiência em uma faixa restrita de solicitações, já que não altera suas características conforme o carregamento.

Na Figura 12 é mostrado um modelo esquemático proposto por Takano *et al.* (1997) de dois tipos de amortecedores passivos, sendo um de borracha (viscoelástico) e outro por atrito viscoso no controle de vibrações utilizado nos cabos da ponte Tsurumi Tsubasa (Japão).

Figura 11 - Exemplo de amortecedores passivos a) viscoelástico; b) viscoso e c) de massa sintonizada.



(a)



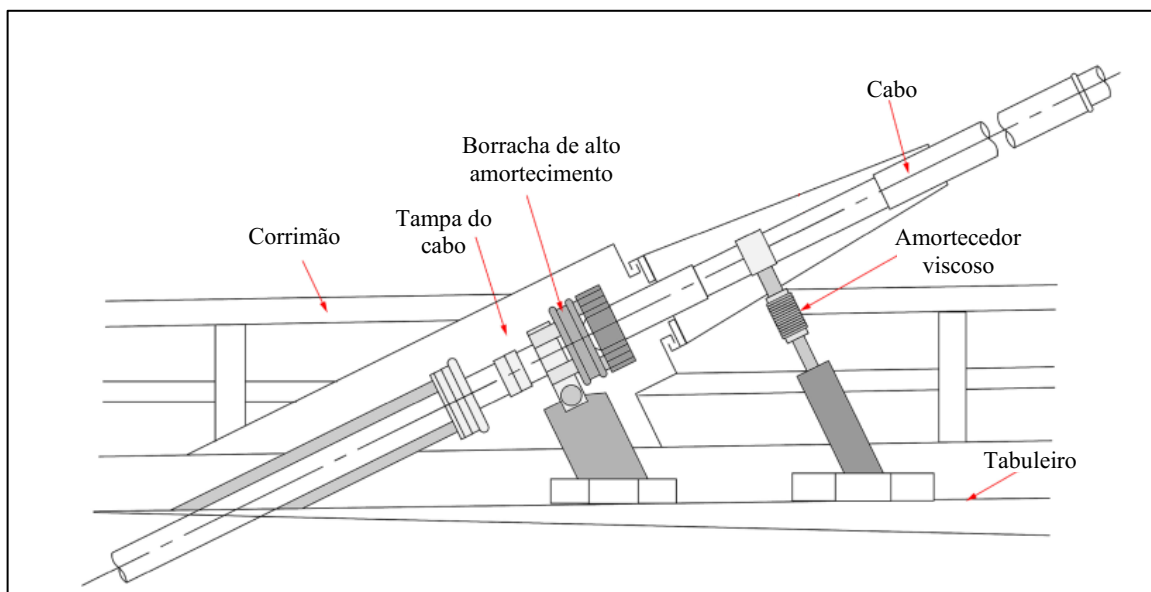
(b)



(c)

Fonte: a) Svensson (2012); b) Fujino, Kimura e Tanaka (2012) e c) Gimsing e Georgakis (2012).

Figura 12 – Combinação de dois amortecedores passivos.



Fonte: Adaptado de Takano *et al.* (1997, apud Javanmardi *et al.* 2021).

No caso dos amortecedores externos que precisam ser fixados na estrutura da ponte e no cabo (como na Figura 12) há uma limitação acerca da sua posição de instalação, tendo em vista que precisa ser próxima do tabuleiro (ou da torre, no caso de dois amortecedores). Geralmente são instalados entre 1% e 2% do comprimento do cabo (CAETANO, 2007), mas dependendo da inclinação e do comprimento do cabo pode-se encontrar posições mais avançadas em direção ao seu centro longitudinal.

3.1.2 Amortecedores semiativos

Como os amortecedores passivos possuem uma faixa de eficiência restrita a algumas intensidades de carregamentos, foram desenvolvidos métodos de ajuste de características do amortecedor em função do comportamento do cabo (controle semiativo) com o objetivo de ampliar a região de desempenho dos amortecedores.

O controle semiativo tem pontos positivos do controle ativo e do passivo, demandando pouca energia para seu funcionamento e oferecendo adaptação às variações dinâmicas solicitantes. Sua aplicação nos cabos de pontes estaiadas pode alcançar uma performance semelhante à dos dispositivos ativos, porém com menos desvantagens (JOHNSON *et al.*, 2007).

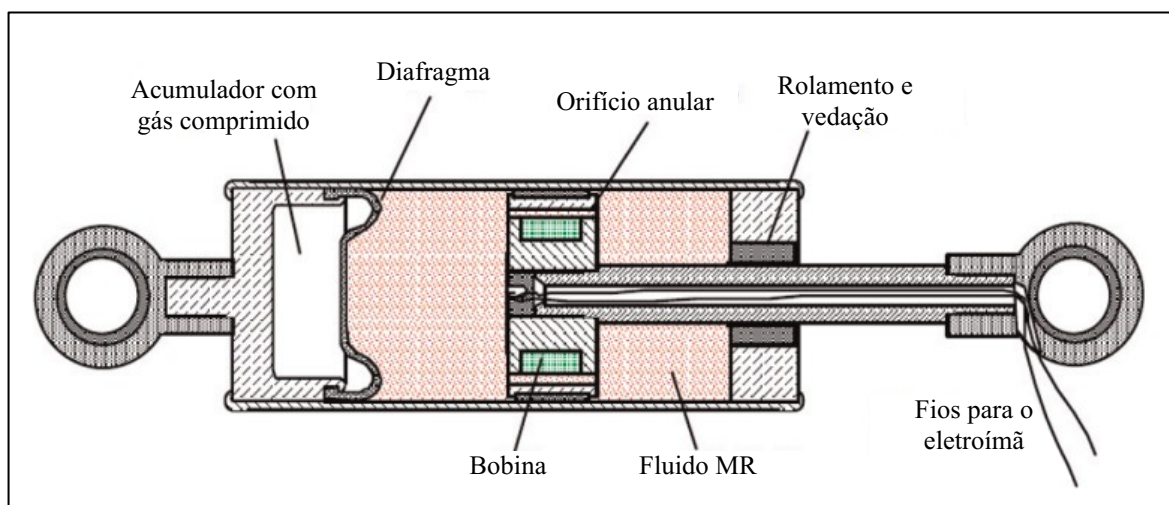
Destacam-se os materiais piezoelétricos e magneto-reológicos (Figura 13) para a otimização das características do amortecedor. Um fluido magneto-reológico (MR) geralmente é composto por partículas ferromagnéticas ou paramagnéticas macias dispersas em um fluido de transporte (CHOI; HAN, 2012). As partículas são distribuídas aleatoriamente no fluido quando não há um campo magnético atuando sobre elas. Entretanto, quando é aplicado um campo magnético externo os fluidos MR têm seu estado líquido de fluxo livre alterado para um estado semissólido com movimento de fluido restrito em respostas rápidas (ZHU; JING; CHENG, 2012), o que é útil na otimização de amortecedores. Diversos estudos mostram que a aplicação deste mecanismo no amortecimento de cabos alcança significantes melhorias na mitigação das vibrações (DUAN; NI; KO, 2006; LI *et al.*, 2007; CAI; WU; ARAUJO, 2007; HUANG; SUN; JIANG, 2012).

Figura 13 – Amortecedores magneto-reológicos instalados na Dongting Lake Bridge (Japão).



Fonte: Spencer e Nagarajaiah (2003).

Figura 14 – Exemplo de amortecedor com fluido MR.

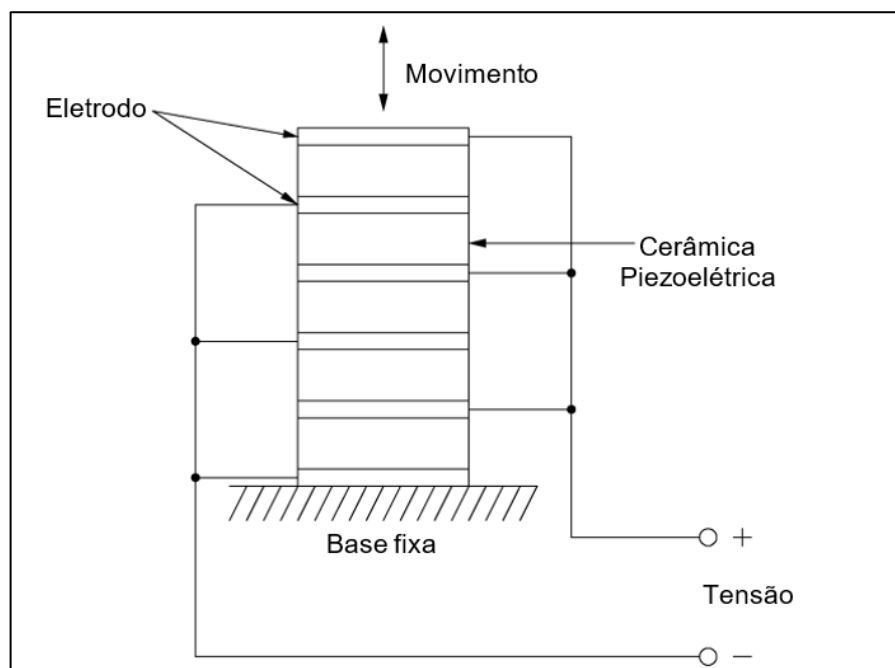


Fonte: Adaptado de Jolly, Bender e Carlson (1998, apud ZHU; JING; CHENG, 2012).

Na Figura 14, o fluido MR tem sua viscosidade alterada pelo campo magnético gerado pela bobina, alterando o amortecimento viscoso gerado. O acumulador com gás comprimido tem a função de acomodar a variação de volume do fluido MR, evitar cavitações e manter o amortecedor em seu comprimento estendido quando nenhuma força é aplicada (REICHERT, 1997).

Por outro lado, os materiais piezoelétricos têm a capacidade de converter energia mecânica em energia elétrica, processo conhecido como “efeito piezoelétrico” (CURIE; CURIE, 1880). Nesse aspecto, pode-se utilizá-los como sensores na identificação das deformações e deslocamentos da estrutura, transmitindo sinais elétricos aos processadores e atuadores de controle. Também é possível a conversão de energia elétrica em energia mecânica, sendo este fenômeno denominado “efeito piezoelétrico inverso” (LIPPMANN, 1881), que pode ser aproveitado na atuação do controle de vibrações, aplicando forças sobre a estrutura (controle ativo) ou sobre o próprio amortecedor, alterando suas características de amortecimento. Como os deslocamentos destes materiais são relativamente pequenos, usualmente são utilizadas diversas camadas de materiais piezoelétricos a fim de maximizar seus deslocamentos (Figura 15).

Figura 15 – Pilha com camadas de materiais piezoelétricos.

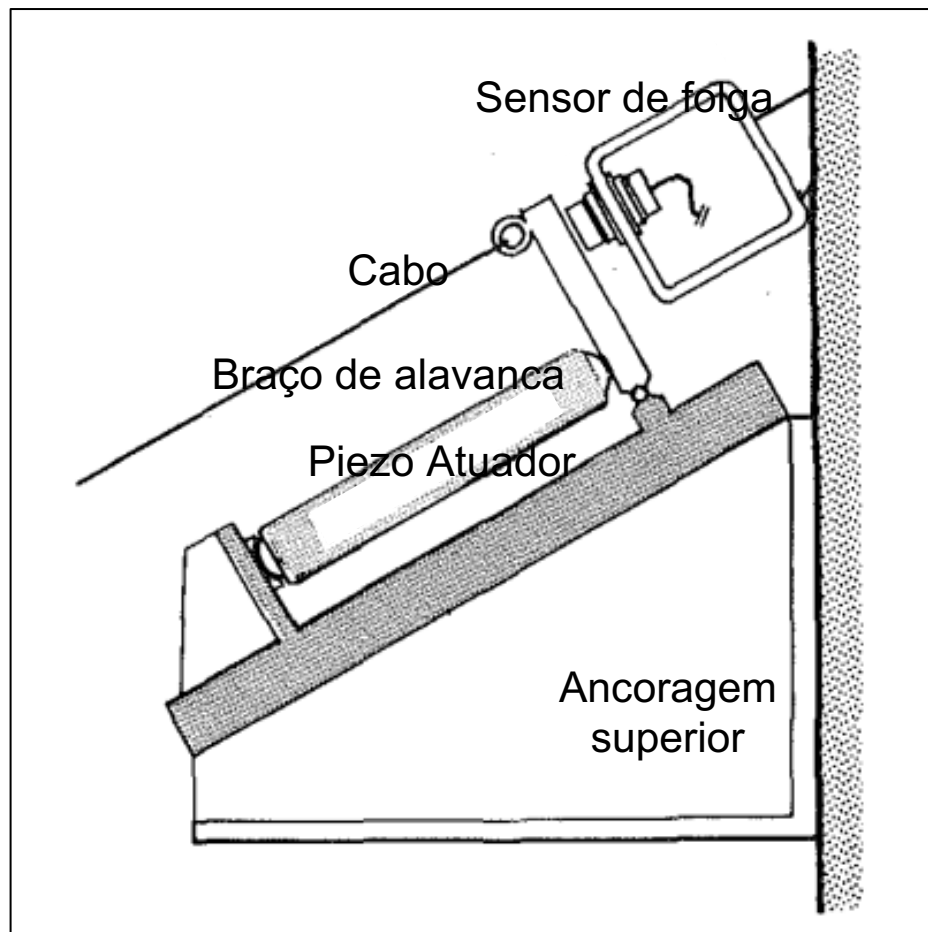


Fonte: Adaptado de Yi e Veillette (2005).

3.1.3 Amortecedores ativos

Os amortecedores ativos necessitam de energia externa para o seu funcionamento e consistem basicamente em sensores, processadores e atuadores que provocam vibrações contra atuantes na estrutura. Os atuadores são posicionados, em geral, em uma das extremidades do cabo acrescentando ou retirando força de tração através de uma folga regulada. Fujino, Warnitchai e Pacheco (1993) propuseram um modelo de controle ativo por atuador piezoelétrico fixado na torre (Figura 16), o qual se mostrou eficiente na diminuição das vibrações. Huang *et al.* (2018) estudaram um modelo semelhante, porém com um atuador magnetostritivo gigante, concluindo que as vibrações podem ser consideravelmente reduzidas com uma baixa força de controle axial gerada.

Figura 16 – Modelo de controle ativo de vibrações.



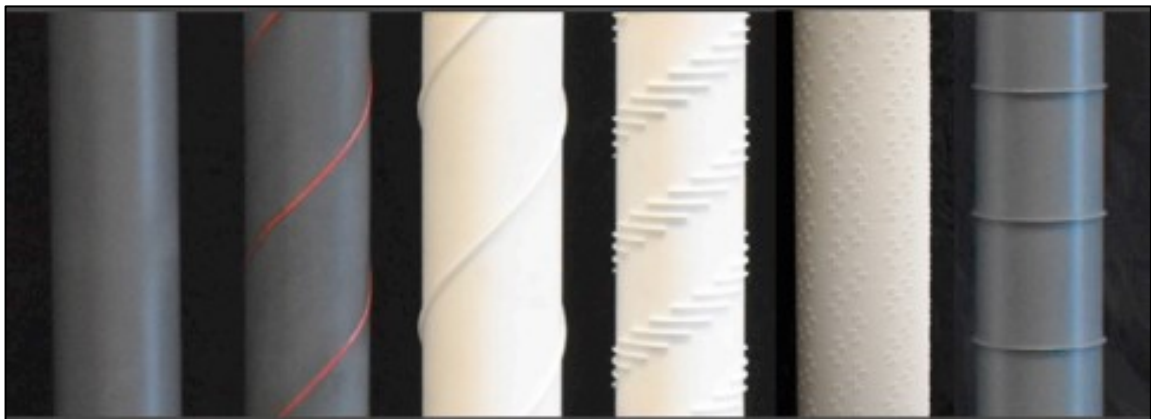
Fonte: Adaptado de Fujino, Warnitchai e Pacheco (1993).

3.2 Medidas aerodinâmicas

O amortecimento através das medidas aerodinâmicas consiste em mudar a rugosidade do material e a geometria que compõe o contorno da seção transversal do cabo (Figura 17) de maneira que as instabilidades sejam amenizadas.

O uso de ranhuras ou protuberâncias helicoidais permite maior estabilidade no escoamento do vento, reduzindo os efeitos dos desprendimentos de vórtices. Por outro lado, algumas saliências são úteis no combate à formação de filetes de água na superfície do cabo e, como o processo de excitação por vento e chuva associados é altamente dependente destes filetes, a amplitude da oscilação passa a ser consideravelmente reduzida.

Figura 17 - Cabos com sistemas aerodinâmicos.

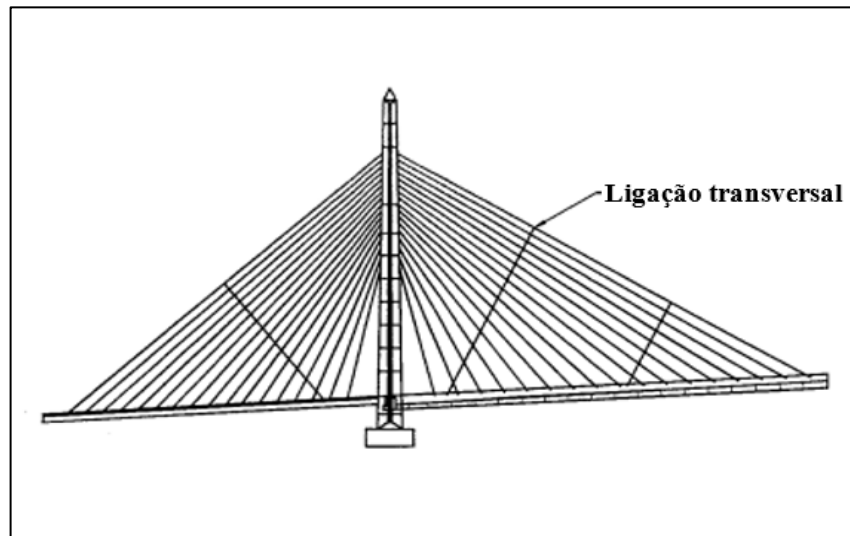


Fonte: Adaptado de Mctavish, D'Auteuil e Raesi (2020).

3.3 Modificação estrutural

A modificação estrutural se resume na mudança das propriedades da estrutura, produzindo características dinâmicas diferentes como a alteração da massa e da rigidez. Nos cabos, este método é comumente utilizado interligando um conjunto de estais (Figura 18), mudando drasticamente seu comportamento que, ao invés se deslocarem de maneira independente, serão solicitados em conjunto.

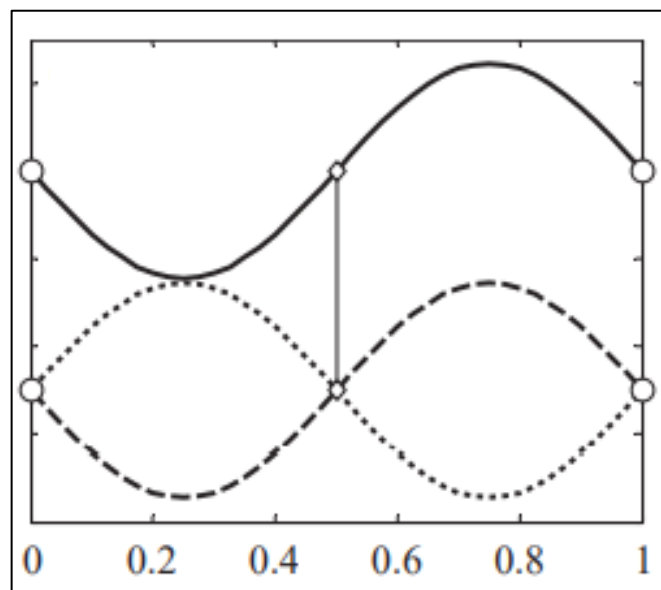
Figura 18 – Interligações transversais dos cabos.



Fonte: Adaptado de Kumarasena et al. (2005).

Entretanto, ainda que os deslocamentos sejam iguais nos pontos de interligação, os cabos podem vibrar em fases diferentes (Figura 19). Esta alteração de rigidez individual para rigidez de conjunto gera novas frequências críticas que precisam ser analisadas a partir de sua implementação.

Figura 19 - Primeiro modo assimétrico de vibração.

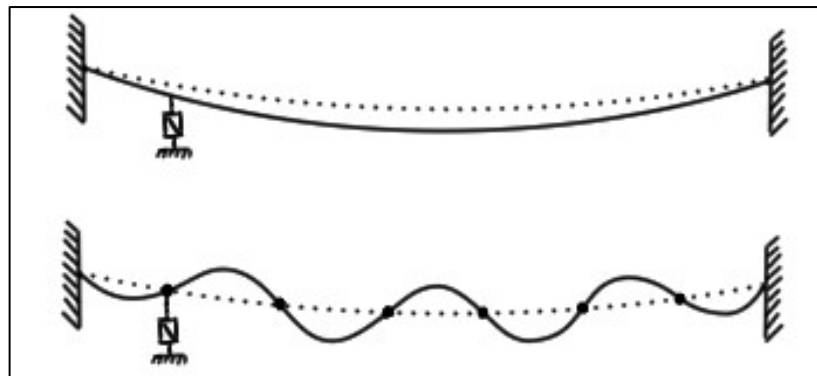


Fonte: Adaptado de Caracoglia e Jones (2005).

4 Amortecedor externo fixado no tabuleiro

Devido aos diversos modos de vibração, os cabos de pontes estaiadas apresentam variações no fator de amortecimento alcançado pelos amortecedores externos fixados no tabuleiro. Isto acontece pois em cada modo de vibrar o amortecedor apresenta diferentes valores das variáveis de estado, como deslocamento, velocidade e aceleração, as quais podem influenciar diretamente no amortecimento, tornando complexa a determinação de um modo crítico de vibração utilizando amortecedores externos. Além disso, a complexidade pode ser potencializada utilizando amortecedores não lineares. Na Figura 20 são exemplificados dois casos em que o amortecimento tem funcionamento diferente devido a posição dos nós de vibração.

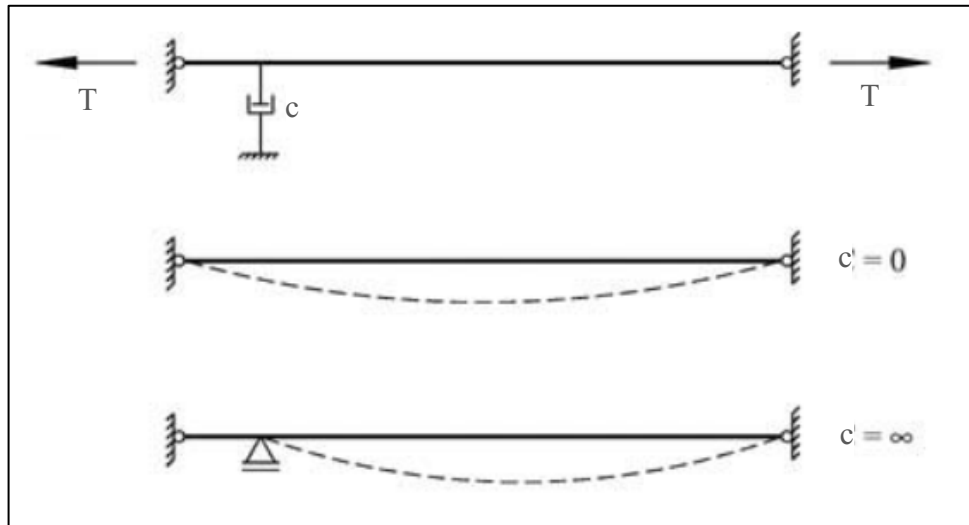
Figura 20 - Amortecimento para modos diferentes.



Fonte: Autor.

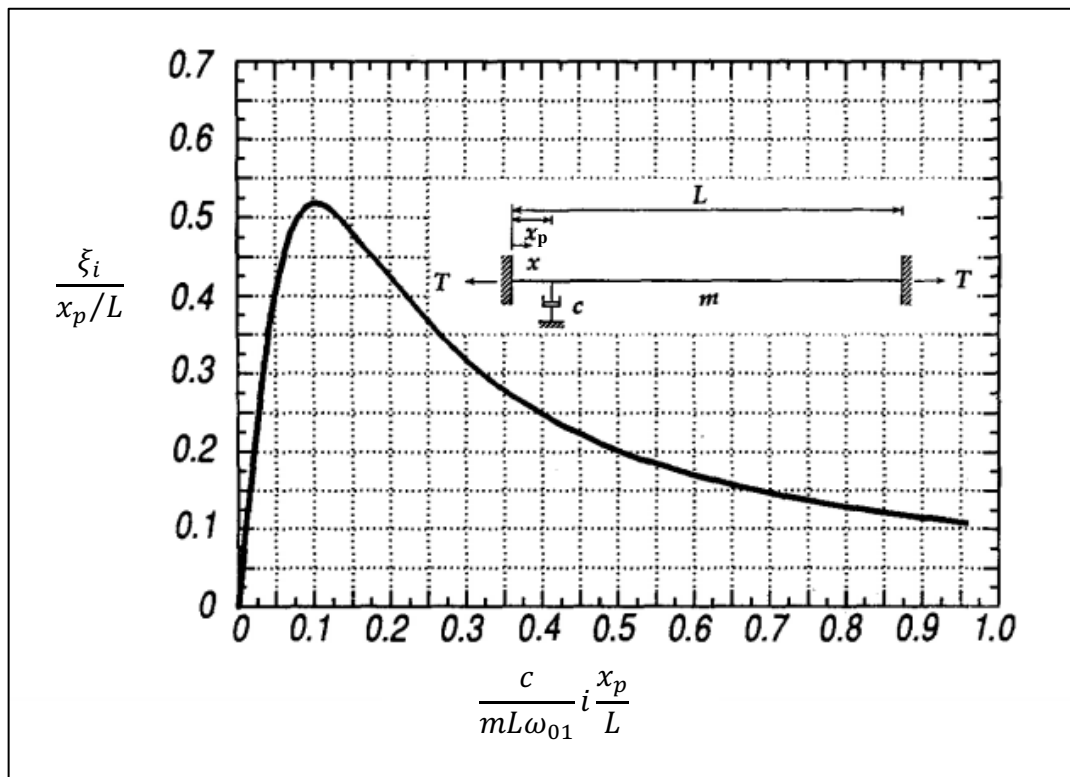
O amortecimento viscoso ótimo foi obtido por Kovacs (1982) utilizando uma interpolação entre o cabo sem amortecimento e com amortecimento rígido, tendendo a se comportar como um apoio fixo. São mostrados o cabo com amortecimento rígido, sem amortecimento (livre) e com amortecimento entre estes dois limites, em sequência ascendente, na Figura 21. O autor concluiu que o amortecimento máximo se dava por $0,5 x_p/L$, onde x_p e L são a posição de instalação do amortecedor e o comprimento do cabo, respectivamente. Na Figura 21, T representa a força de tração aplicada no cabo.

Figura 21 - Variação da constante de amortecimento (c).



Fonte: Adaptado de Caetano (2007).

Figura 22 – Curva de amortecimento modal.



Fonte: Adaptado de Pacheco, Fujino e Sulekh (1993).

Pacheco, Fujino e Sulekh (1993) apresentaram uma curva universal de amortecimento que relaciona o fator de amortecimento viscoso e parâmetros do cabo, do modo de vibrar, do amortecedor e de sua posição (Figura 22). A massa por unidade de comprimento é m , ω_{01} representa a primeira frequência natural e i é o número do modo de vibrar a ser analisado.

O referido estudo partiu da equação do movimento de um cabo tensionado em regime linear com amortecimento viscoso, como exposto na Eq. (6).

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c \frac{\partial y}{\partial t} \delta(x - x_p) \quad (6)$$

onde δ é a função delta de Dirac, usada para a localização do amortecedor em sua formulação geral. O deslocamento (y) quando derivado em relação ao tempo (t) toma a forma de \dot{y} e \ddot{y} (notação de Newton), que representam a velocidade e a aceleração, respectivamente. Quando derivado em relação ao comprimento do cabo (x) é y'' (notação de Lagrange), que representa a curvatura do cabo.

Fazendo a conversão das variáveis dependentes do sistema para variáveis dependentes generalizadas e utilizando o princípio da superposição modal, é obtida a Eq. (7).

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{n_G} b_i(t) \phi_{0i}(x) \quad (7)$$

Sendo y a posição, n_G o número de graus de liberdade, b_i o deslocamento generalizado em cada grau de liberdade (i) e ϕ_{0i} a respectiva coordenada generalizada, com valor expresso na Eq. (8). Cada grau de liberdade representa um modo de vibrar, portanto é utilizada a mesma notação.

$$\phi_{0i}(x) = \text{sen} \frac{\pi i x}{L} \quad (8)$$

onde L é o comprimento do cabo.

A frequência angular natural é dada por:

$$\omega_{0i} = \frac{\pi i}{L} \sqrt{\frac{T}{m}} \quad (9)$$

Antes de aplicar a Eq. (7) na Eq. (6), a fim de desenvolver uma curva generalizada, os autores adimensionalizaram as variáveis:

$$\{b\} = \frac{[b_1(t), b_2(t), \dots, b_{n_G}(t)]^{T_r}}{L} \quad (10)$$

com T_r representando a transposta.

$$\psi = \omega_{01} t \quad (11)$$

$$() ' = \frac{\partial ()}{\partial \psi} \quad (12)$$

Por fim, substituindo as modificações descritas nas Eqs. (7) a (12) na Eq. (6) obteve-se a equação de movimento generalizada (Eq. (13)).

$$[M]\{b''\} + [C]\{b'\} + [K]\{b\} = \{0\} \quad (13)$$

onde $[M]$ é a matriz de massa, $[C]$ é a matriz de amortecimento viscoso e $[K]$ é a matriz de rigidez. Com seus componentes nas coordenadas generalizadas sendo:

$$M_{ij} = \delta_{ij} \quad (14)$$

$$C_{ij} = 2 \left(\frac{c}{mL\omega_{01}} \right) \text{sen} \frac{\pi i x_p}{L} \text{sen} \frac{\pi j x_p}{L} \quad (15)$$

$$K_{ij} = i^2 \delta_{ij} \quad (16)$$

com δ_{ij} sendo, aqui, o delta de Kronecker.

Para calcular os autovalores com um custo computacional aceitável, foi feita a simplificação da parcela C_{ij} para uma matriz diagonal, onde foi possível escrever:

$$\xi_i = \frac{C_{ii}}{2\sqrt{K_{ii}M_{ii}}} \quad (17)$$

Substituindo as Eqs. (14) a (16) na Eq. (17), tem-se:

$$\xi_i = \left(\frac{c}{mL\omega_{01}}\right) \left(\frac{1}{i}\right) \text{sen}^2 \frac{\pi i x_p}{L} \quad (18)$$

Para valores suficientemente pequenos do argumento da função seno, pode-se fazer a simplificação:

$$\xi_i = \pi^2 \left(\frac{c}{mL\omega_{01}}\right) i \left(\frac{x_p}{L}\right)^2 \quad (19)$$

Dentre os parâmetros apresentados, três deles são independentes e adimensionais: i , x_p/L e $c/mL\omega_{01}$. Os autores consideraram estes três parâmetros para a abscissa da Figura 22.

A partir daí, concluiu-se que a constante de amortecimento ótimo ($c_{opt,i}$) e o fator de amortecimento máximo seguem as seguintes equações:

$$c_{opt,i} = \frac{0,10mL\omega_{01}}{ix_p/L} \quad (20)$$

$$\xi_i = 0,52 x_p/L \quad (21)$$

Crémona (1997) observou que para modos simétricos o fator de amortecimento é reduzido em função da curvatura do cabo, representada pelo parâmetro adimensional λ^2 (IRVINE, 1981) na Eq. (22).

$$\lambda^2 = \left(\frac{mgL \cos \theta}{T} \right)^2 \frac{EAL}{TL_e} \quad (22)$$

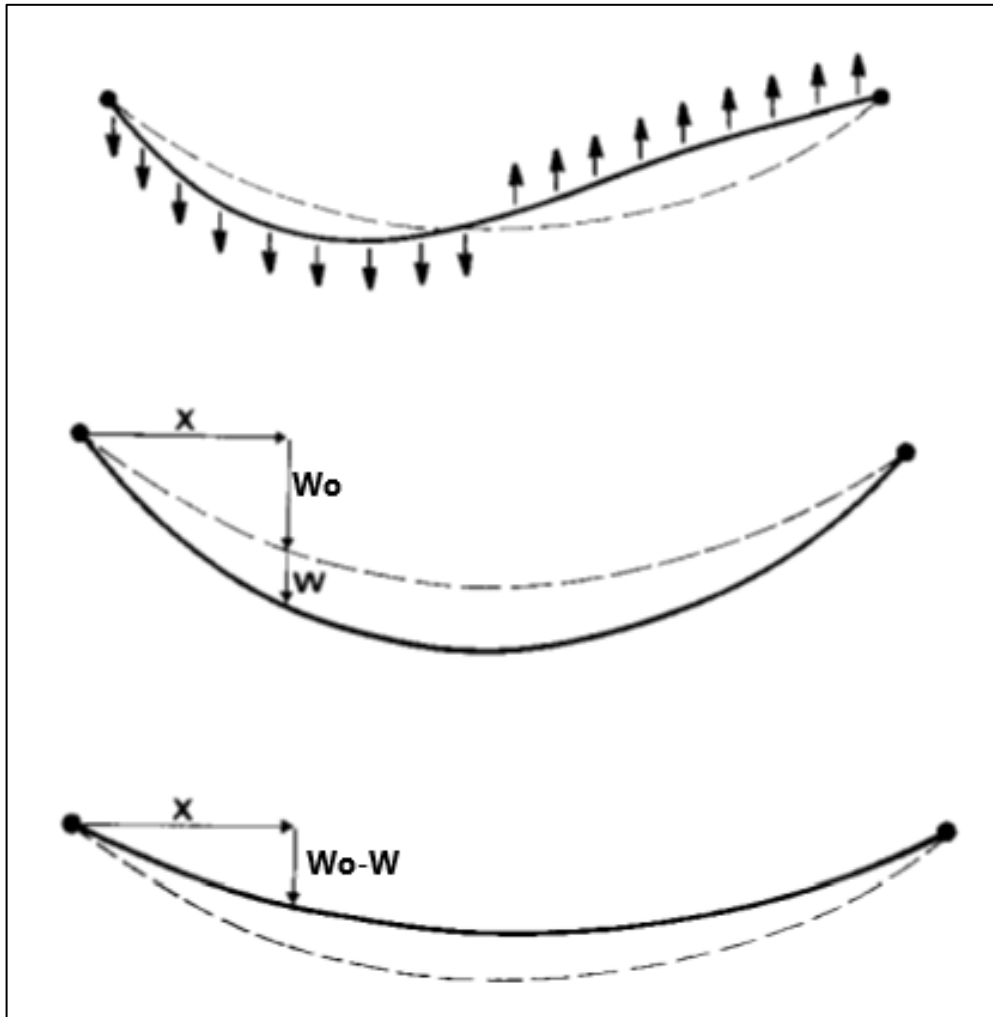
onde g é a aceleração da gravidade, θ é o ângulo de inclinação do cabo, E representa o módulo de elasticidade longitudinal e L_e representa o comprimento virtual do cabo (Caetano, 2007), descrito na Eq. (23).

$$L_e = L \left[1 + \frac{(mgL \cos \theta)}{8T^2} \right] \quad (23)$$

A divergência entre o comportamento simétrico e antissimétrico com a presença da curvatura (λ^2) se dá pela alteração da rigidez do cabo, que deixa de ser um parâmetro concentrado e passa a ser um parâmetro distribuído em função do deslocamento e do comprimento do cabo. Na Figura 23 é mostrado que não há acréscimo de tensão, para análises com curvatura, nos modos antissimétricos porque as parcelas se deslocam em sentidos opostos, gerando uma resultante de acréscimo de tensão nula. Já nos modos simétricos a tensão é acrescida quando os deslocamentos têm a mesma direção da curvatura e é diminuída quando os deslocamentos acontecem em direção oposta. O acréscimo de tensões incide maiormente no primeiro modo de vibrar, pois nos demais modos simétricos são manifestas parcelas atenuantes.

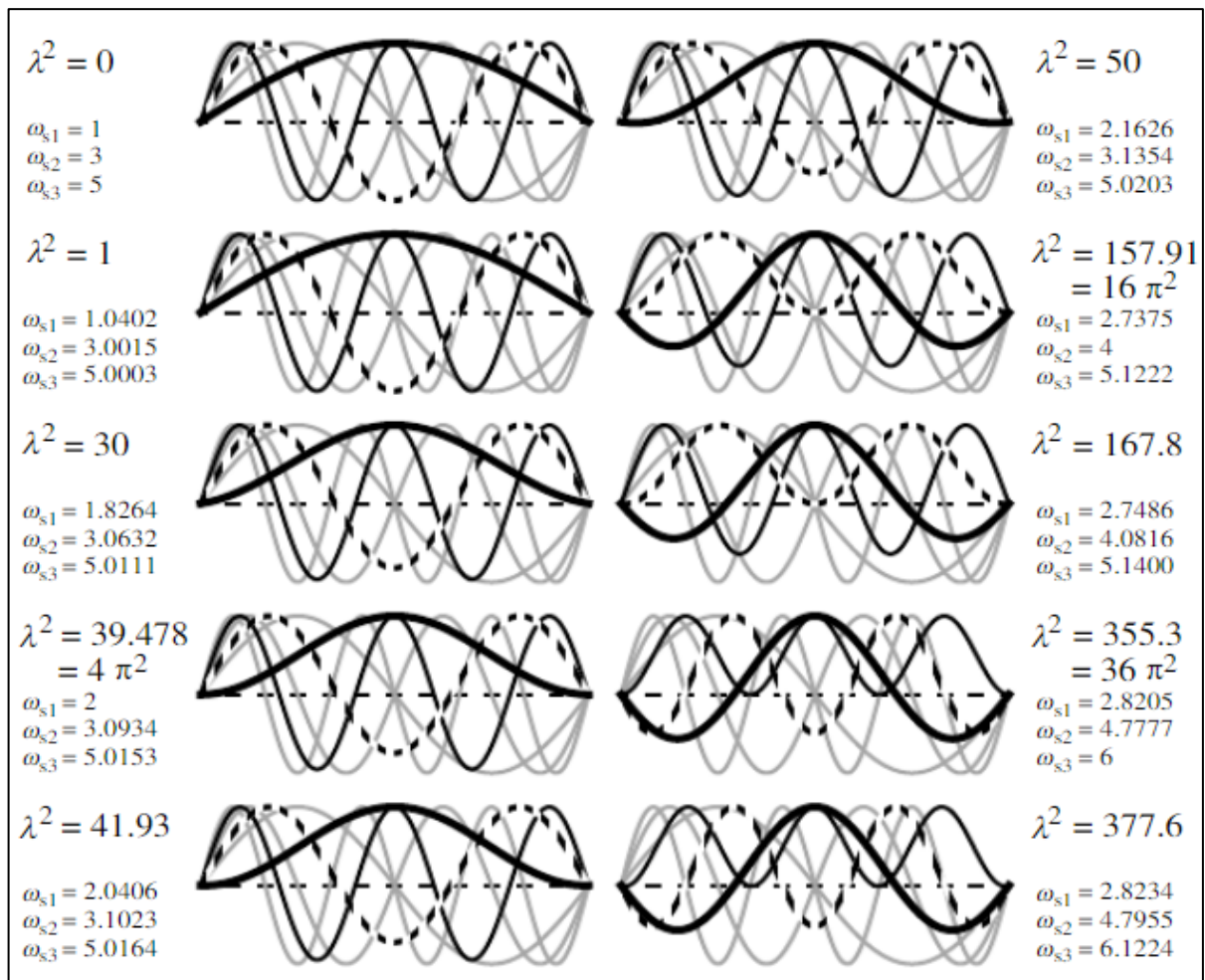
Essa alteração da rigidez provoca mudanças nos modos de vibrar ímpares (simétricos), tendo em vista que as respectivas frequências naturais também se alterarão, a Figura 24 mostra a progressão das frequências de ressonância em função da curvatura do cabo.

Figura 23 - Diferença entre os modos simétricos e antissimétricos (W_0 é o deslocamento da curvatura inicial do cabo e W é o deslocamento adicional).



Fonte: Adaptado de Irvine (1981).

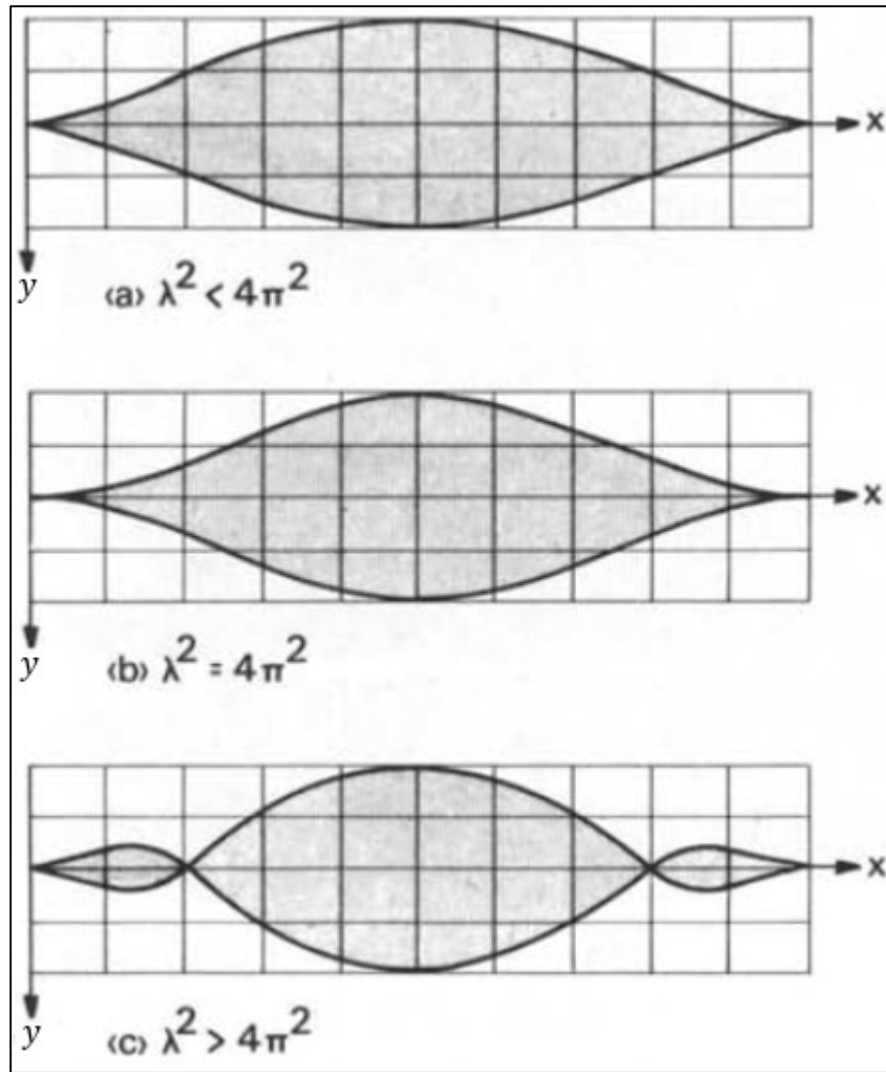
Figura 24 - Progressão das frequências dos modos simétricos em função da curvatura (ω_{si} , com i variando de 1 a 3, é a frequência de ressonância).



Fonte: Johnson, Christenson e Spencer (2001).

Através da Figura 24 é possível perceber que para $\lambda^2 = 4\pi^2$ a primeira frequência natural simétrica é igual a primeira frequência natural antissimétrica (segunda frequência natural), descaracterizando a forma típica do primeiro modo de vibrar com um deslocamento muito pequeno próximo às extremidades do cabo. O mesmo acontecimento é mostrado na Figura 25, onde fica evidente a formação de nós nas extremidades para $\lambda^2 > 4\pi^2$.

Figura 25 - Formação dos nós de vibração: a) baixa influência nos deslocamentos; b) alta influência nos deslocamentos e c) nós formados (as ordenadas y representam os deslocamentos).



Fonte: Adaptado de Irvine (1981).

Assim sendo, foram propostas alterações para as equações da ordenada e da abscissa do gráfico (Figura 22) dado por Pacheco, Fujino e Sulekh (1993) para considerar a redução pela curvatura. Para a abscissa (abs) a expressão passou a ser dada por:

$$abs = \frac{c}{mL\omega_{01}} k_i \frac{x_p}{L} \quad (24)$$

$$k_i = \frac{\omega_n}{\omega_{01}} \quad (25)$$

onde ω_n é a frequência angular natural. Já a ordenada (*ord*) passou a ser:

$$ord = \frac{\xi_i}{x_p/L} G(i) \quad (26)$$

$$G(i) = \begin{cases} \frac{2\gamma_{m,i}}{\left(\frac{\text{sen}\left(\pi\frac{k_i}{2}\right)}{\text{sen}\left(\pi\frac{k_i}{2}\right) - 1}\right)^2} & \text{para } i \text{ ímpar (simétrico)} \\ 1 & \text{para } i \text{ par (antissimétrico)} \end{cases} \quad (27)$$

$$\gamma_{m,i} = \left(\frac{\cos\left(\pi\frac{k_i}{2}\right)}{\cos\left(\pi\frac{k_i}{2}\right) - 1}\right)^2 \int_0^1 \left[1 - \cos(\pi k_i u) - \tan\left(\pi\frac{k_i}{2}\right) \text{sen}(\pi k_i u)\right]^2 du \quad (28)$$

$$u = \frac{x_p}{L} \quad (29)$$

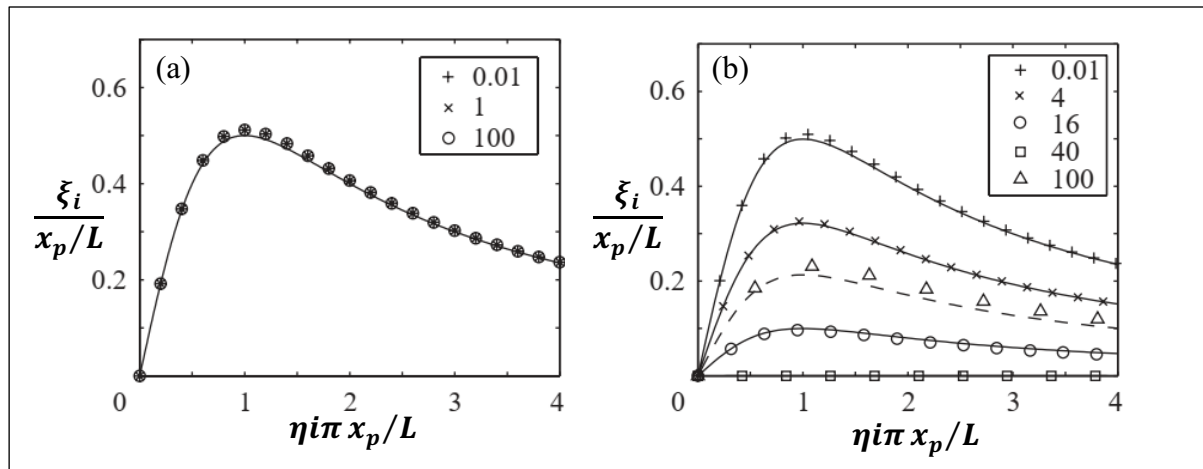
Krenk (2000) estendeu os estudos acerca da curva universal de amortecimento modal e propôs uma formulação geral analítica (Eq. (30)) através da análise modal complexa (KRENK, 2004). Em seguida, Krenk e Nielsen (2002) estudaram os efeitos da curvatura do cabo no amortecimento e concluíram que para os modos assimétricos de vibração a formulação analítica se mantém intacta (como esperado), porém deve-se acrescentar o parâmetro da curvatura do cabo nos modos simétricos (Eq. (32)).

$$\frac{\xi_i}{x_p/L} = \frac{\eta i \pi x_p/L}{1 + (\eta i \pi x_p/L)^2} \text{ para } i \text{ par} \quad (30)$$

$$\eta = \frac{\pi c}{mL\omega_{01}} \quad (31)$$

$$\frac{\xi_i}{x_p/L} = \frac{\eta i \pi x_p/L}{1 + (\eta i \pi x_p/L)^2} \frac{[\tan(0,5i\pi) - 0,5i\pi x_p/L]^2}{\tan^2(0,5i\pi) + (12/\lambda^2)(0,5i\pi)^2} \text{ para } i \text{ ímpar} \quad (32)$$

Figura 26 – Curva universal analítica a) modo antissimétrico e b) modo simétrico (a legenda representa os valores de λ^2).



Fonte: Adaptado de Krenk (2000).

Na Figura 26 são mostradas comparações de resoluções numéricas e analíticas, comprovando a acurácia do desenvolvimento proposto. Nota-se que a razão de amortecimento diminui quando se aumenta a curvatura do cabo em modos simétricos e para o valor de $\lambda^2 = 4\pi^2 \cong 40$ é percebido um amortecimento aproximadamente nulo para uma posição (x_p/L) próxima das extremidades. Entretanto, nos casos práticos, Tabatabai e Mehrabi (2000) constataram a baixa incidência dos efeitos da curvatura nos cabos reais, tendo em vista que a maioria, cerca de 95%, apresenta um fator λ^2 relativamente pequeno.

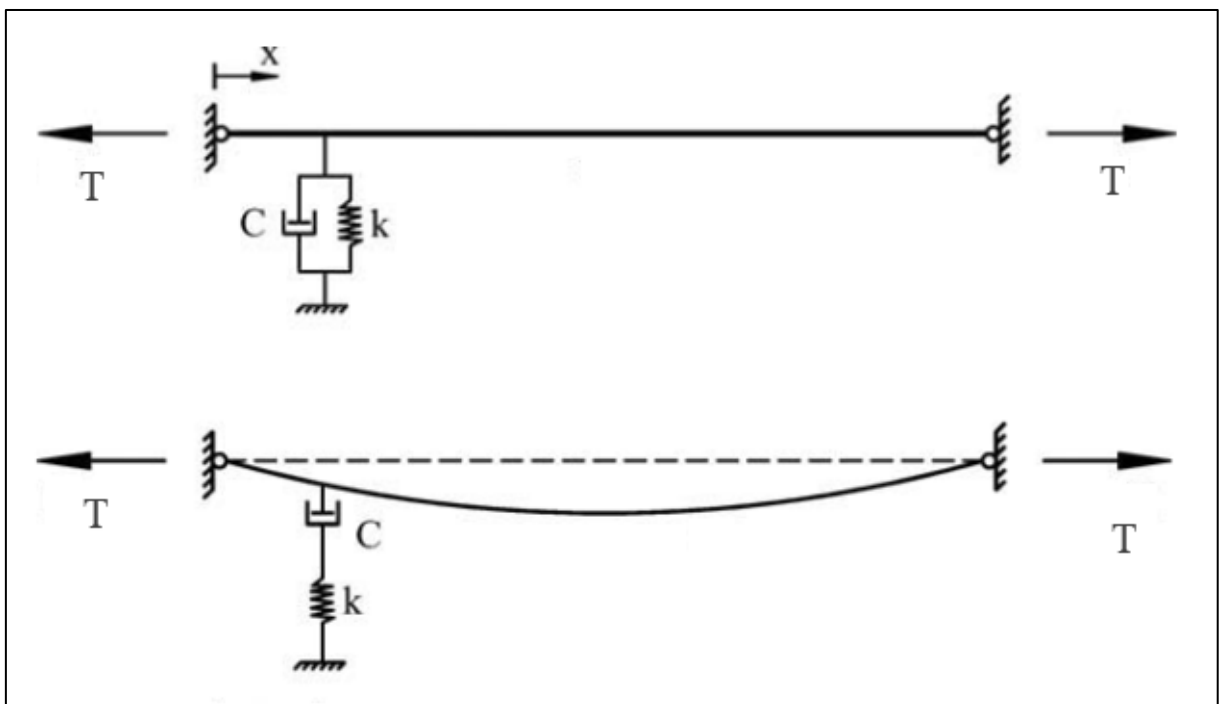
Ademais, Tabatabai e Mehrabi (2000) ainda estudaram os efeitos da rigidez do cabo no amortecimento, indicando um parâmetro de rigidez à flexão (ξ_{flex} , Eq. (33)).

$$\xi_{flex} = L \sqrt{\frac{T}{EI}} \quad (33)$$

onde I é a inércia em relação ao eixo neutro de flexão. O parâmetro ξ_{flex} é inversamente proporcional à rigidez, sendo adequado denominá-lo parâmetro de flexibilidade. Para valores de $\xi_{flex} > 200$ o cabo apresenta um comportamento semelhante ao de uma corda tensionada, possibilitando ignorar a rigidez à flexão.

Nos estudos citados acerca da valoração do amortecimento sempre houve a consideração de um amortecedor que não influencia na rigidez do movimento apoiado em um suporte rígido. No entanto, Fournier e Cheng (2014) constataram que a influência da rigidez do amortecedor e do seu suporte (Figura 27) podem diminuir o valor máximo estimado pelos desenvolvimentos anteriores. A partir daí, concluíram que para maximizar a eficiência dos amortecedores deve-se manter a rigidez do amortecedor pequena e o suporte o mais rígido possível.

Figura 27 – a) Rigidez do amortecedor e b) rigidez da base com efeito de curvatura.



Fonte: Adaptado de Caetano (2007).

Ampliando os estudos para os amortecedores não lineares, nota-se que eles apresentam características diferentes dos lineares, podendo alcançar um aumento da performance de amortecimento. O atrito seco, por exemplo, apresentou maior eficiência no amortecimento geral, indicando que o modo de vibrar não influencia no seu desempenho, porém é dependente da amplitude de deslocamento (HOANG; FUJINO, 2009; MAIN; JONES, 2002). O método da constante de amortecimento viscosa equivalente foi utilizado a fim de facilitar o processamento (KRENK; HOGSBERG, 2005; HOANG; FUJINO, 2009; NGUYEN; VO, 2020), porém essa

linearização teve como consequência resultados muito similares aos atingidos pelos amortecedores lineares.

Observando isto, Chen e Sun (2017) analisaram um cabo em regime permanente de vibração utilizando o método denominado Balanço de Harmônicos. Os autores concluíram que os amortecimentos alcançados pelos amortecedores não lineares ultrapassam os valores ótimos oriundos dos amortecedores lineares.

Por critérios estéticos e pela possível dificuldade em manter o amortecedor mais afastado das extremidades, um amortecedor secundário é implementado com o objetivo de aumentar a eficiência do amortecimento. Hoang e Fujino (2008) estudaram a implementação de dois amortecedores em duas situações distintas, sendo a primeira com ambos próximos a uma mesma extremidade do cabo e a segunda em extremidades opostas. Os autores concluíram que, quando colocados na mesma extremidade, o resultado máximo alcançado é igual ao de um amortecedor individual, não sendo vantajosa sua aplicação. Porém, a utilização em extremidades opostas produz um amortecimento total igual à soma de ambos.

5 Atrito Seco

Os primeiros estudos científicos acerca do comportamento do atrito foram feitos por Leonardo da Vinci (1452-1519), que concluiu que a área de contato não tem influência sobre o atrito, que há proporcionalidade entre a carga normal aplicada a um objeto e o atrito resultante e, por fim, que a razão entre o atrito e a carga aplicada é de 0,25, aproximadamente. Apesar das descobertas, seus estudos não foram publicados e, conseqüentemente, não foram identificados como relevantes à época.

Em 1699, Guillaume Amontons formulou quatro leis a respeito do atrito (POPOVA; POPOV, 2015) semelhantes às conclusões de Leonardo da Vinci. Estas leis são: a resistência gerada pelo atrito aumenta e diminui na proporção da pressão; a resistência causada pelo atrito é a mesma para o ferro, cobre, chumbo e madeira desde que lubrificadas com graxa; esta resistência é aproximadamente igual a um terço da pressão; esta resistência é independente da velocidade e outras condições.

Mais adiante, em 1785, Charles Augustin de Coulomb aprofundou-se na compreensão do atrito, desenvolvendo importantes adições aos conhecimentos já obtidos. Ele considerou a passividade do atrito e da coesão, sendo estas forças adquiridas mediante a solitação e

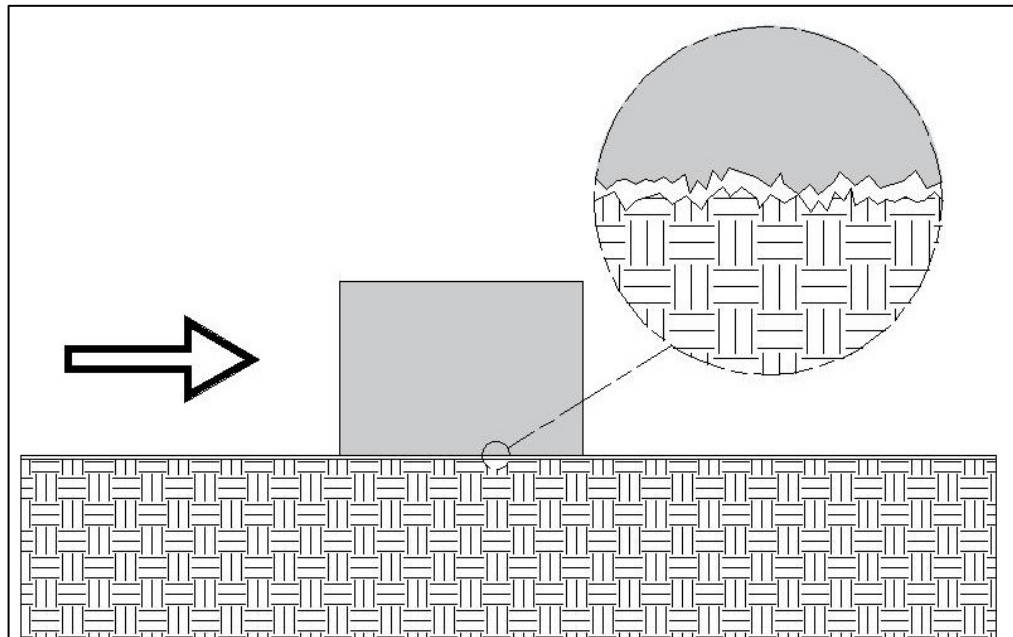
medidas pelos seus limites de resistência; também considerou a proporcionalidade entre o atrito e a força normal, porém com ressalvas para os grandes corpos, que poderiam não seguir exatamente esta propriedade. Seus estudos acerca do atrito envolveram diversos fatores, como: orientação geométrica e condições (grau de aspereza, lubrificações) da superfície de contato dos objetos; materiais constituintes; área de contato entre as superfícies; deformação ou coesão em estado de repouso condicionadas à forma da superfície de contato; temperatura e umidade; força normal; movimento uniforme ou impulsivo; pressão do ar e velocidade relativa (GILLMOR, 1971).

Dentre os parâmetros analisados, pode-se enfatizar o conhecimento da independência para a maioria dos casos da força de atrito em relação à área de contato aparente, o que já havia sido reportado por Amontons (POPOVA; POPOV, 2015). Esta característica comportamental acontece porque as superfícies de contato são irregulares, apresentando uma área de contato real muito menor do que a área de contato aparente. Assim sendo, quando a força normal é aumentada os micropontos de contato (Figura 28) sofrem deformações, possibilitando uma maior área de contato real, enquanto a área aparente se mantém igual. Esta consideração é válida para o regime das pequenas deformações. Para o cálculo da área real de contato, é proposta a Eq. (34):

$$A_r \geq \frac{N}{p} \quad (34)$$

onde A_r é a área real de contato, N é a força normal e p é a dureza de penetração, que pode ser interpretada como a maior tensão de compressão que uma região pode suportar sem escoamento plástico (RABINOWICZ, 1965).

Figura 28 - Irregularidades entre superfícies de contato.



Fonte: Autor.

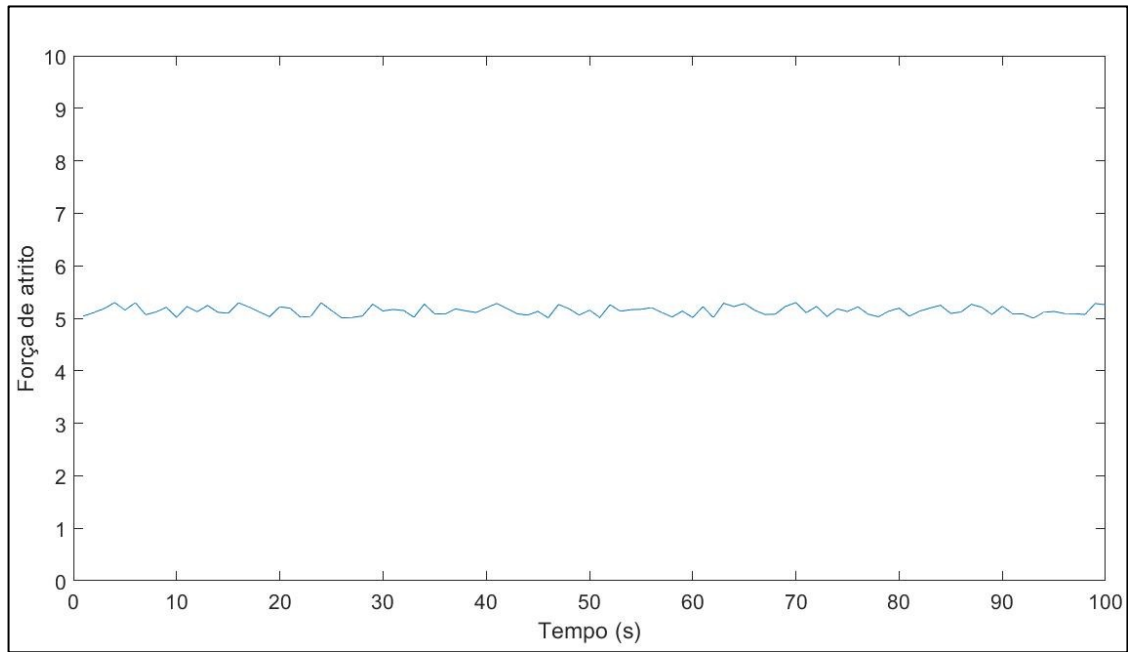
A partir dos conhecimentos históricos citados, pode-se classificar o atrito seco como um fenômeno de oposição ao movimento, que se dá pela aderência entre partes em contato. O movimento diferencial entre ambas as superfícies sofre um decréscimo devido a esta força opositora.

Ressalta-se que a variação de temperatura não produz consideráveis alterações no coeficiente de atrito. Neste campo, dois tipos principais de mudanças de temperatura são observados, sendo por variações externas ou condicionadas à velocidade de deslizamento. A mudança de temperatura devida à velocidade pode ser desprezada, pois geralmente nestes casos de deslizamento o coeficiente de atrito é baixo. Já na alteração da temperatura externa, o coeficiente de atrito apresenta baixa sensibilidade às mudanças, onde somente as resistências dos corpos em atrito são alteradas (RABINOWICZ, 1965).

O atrito seco sempre teve difícil mensuração devido a sua natureza não linear. O desgaste entre as superfícies, a variação da área de contato (em deformações não lineares), a mudança do coeficiente de atrito em função da velocidade, a aderência-deslizamento (*stick-slip*) recorrente em algumas faixas de velocidade específicas, entre outras características, sempre dificultaram as implementações numéricas nestes aspectos. Pode-se dizer, portanto, que a força

de atrito considerada constante tem uma pequena banda de variação devida a estas não linearidades (Figura 29).

Figura 29 – Representação das irregularidades do atrito seco em deslizamento contínuo.

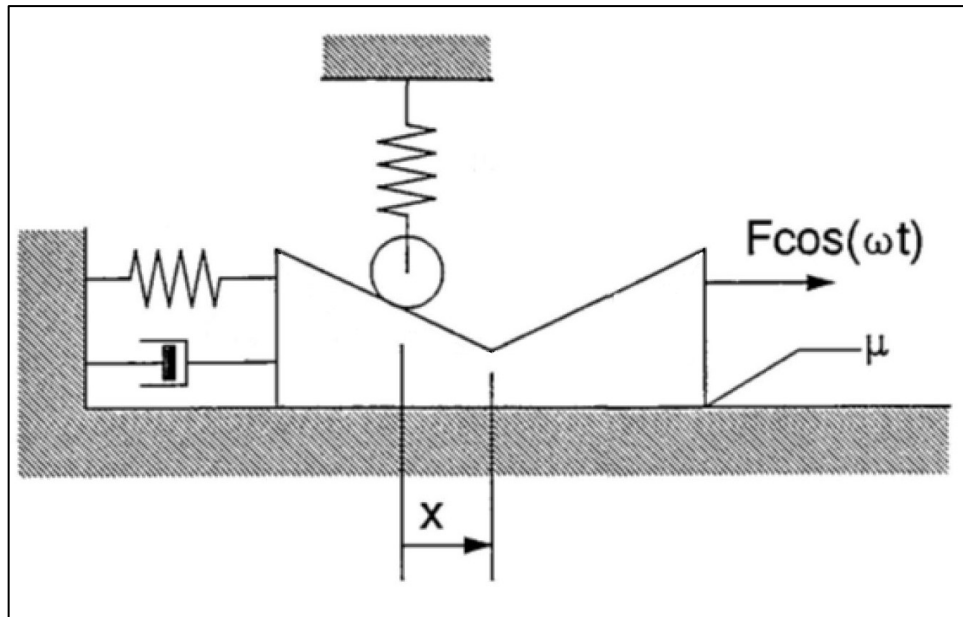


Fonte: Autor.

Na área de conhecimentos dinâmicos, o atrito seco é estudado como causador e amortecedor de vibrações. No seu uso para o amortecimento, o decaimento das amplitudes se mostra linear (RAO, 2009). Alguns pesquisadores (BEUCKE; KELLY, 1985; ANDERSON; FERRI, 1990; MAKRIS; CONSTANTINOU, 1991; WHITEMAN; FERRI, 1995) estudaram o comportamento do atrito seco com a variação linear de sua força normal e perceberam um decaimento aproximadamente logarítmico. Guran, Pfeiffer e Popp (2001) apresentaram um modelo que representaria esta variação, conforme mostrado na Figura 30.

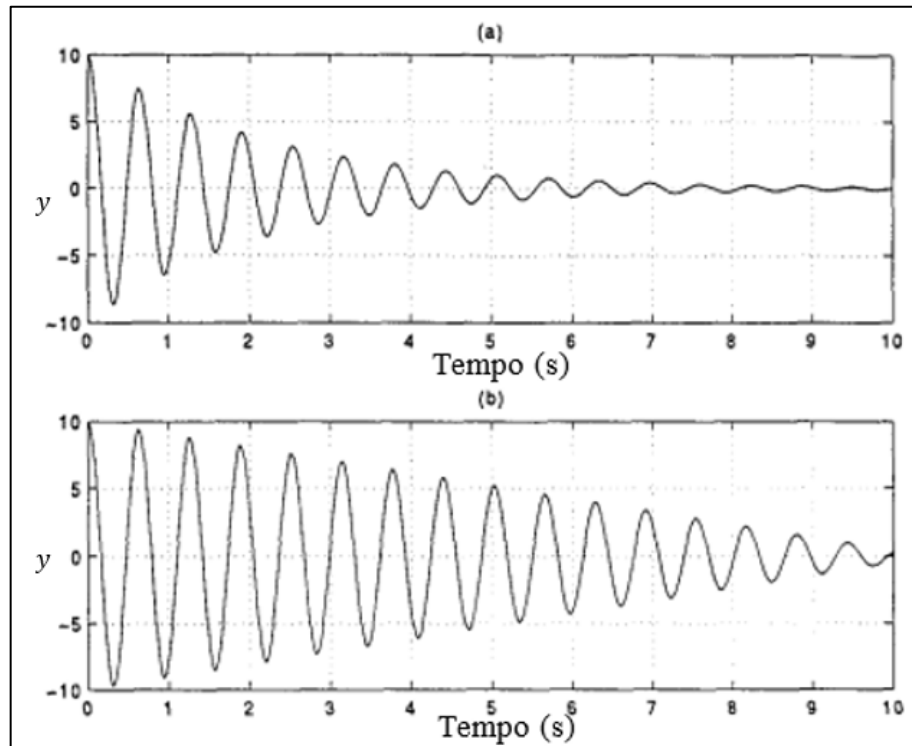
Apesar de ter o atrito variando linearmente com o deslocamento, o modelo proposto apresenta complicações em sua implementação puramente passiva, sendo necessário considerar o acréscimo de uma força restritiva oriunda da decomposição da força atuante no plano inclinado. Contudo, o estudo ainda apresentou resultados favoráveis à aplicação da variação linear do atrito seco, como mostrado na Figura 31.

Figura 30 – Variação linear da força de atrito (μ é o coeficiente de atrito e $F\cos(\omega t)$ é a força de excitação harmônica).



Fonte: Adaptado de Guran, Pfeiffer e Popp (2001)

Figura 31 – Diferença entre atrito seco: a) linearmente variável e b) constante.

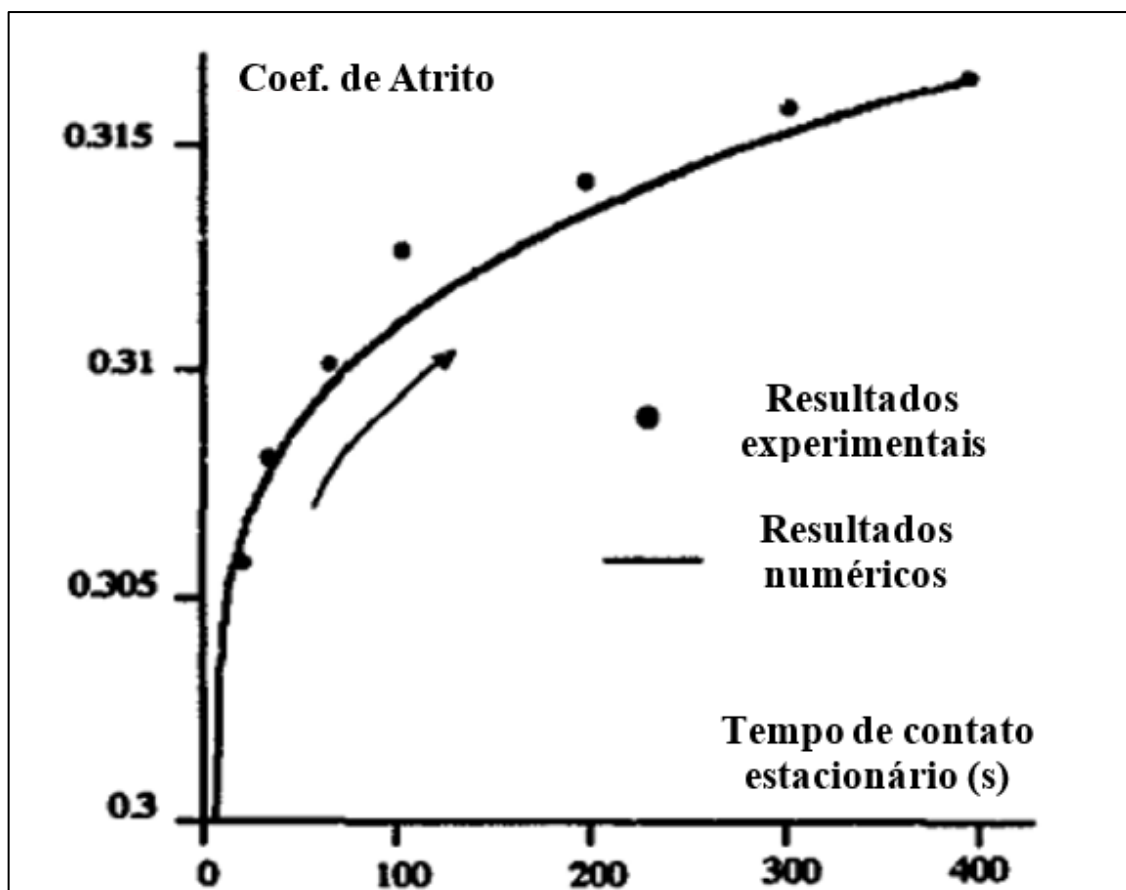


Fonte: Adaptado de Guran, Pfeiffer e Popp (2001)

5.1 Considerações acerca do coeficiente de atrito

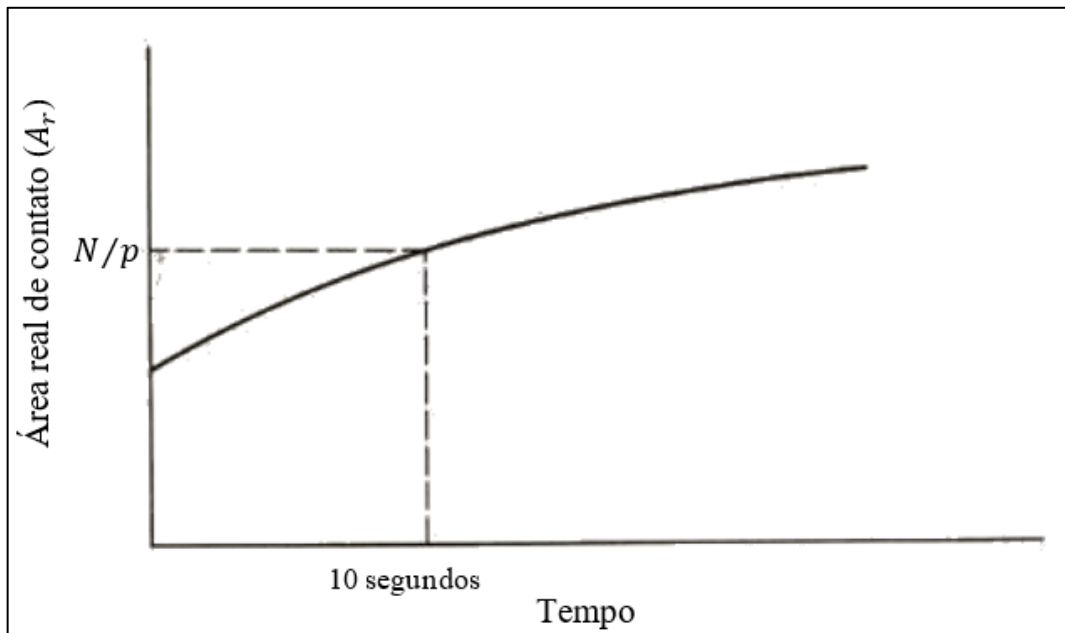
As condições de contato entre duas superfícies podem sofrer significativas variações em função de dois parâmetros: o tempo de contato e a história dos deslizamentos. No primeiro caso, acerca do tempo de contato, Ferrero e Barrau (1997) realizaram estudos numéricos e experimentais onde é possível ver a relação crescente e não linear entre o tempo de contato e o coeficiente de atrito estático (Figura 32). Dentre as possíveis causas deste fenômeno, destaca-se a variação da área real de contato superficial, reportada na Figura 33. A medida da área real quando atingido o tempo de dez segundos é utilizada como um valor padrão adotado em ensaios típicos (RABINOWICZ, 1965).

Figura 32 – Relação entre o coeficiente de atrito e o tempo de contato estacionário



Fonte: Adaptado de Ferrero e Barrau (1997)

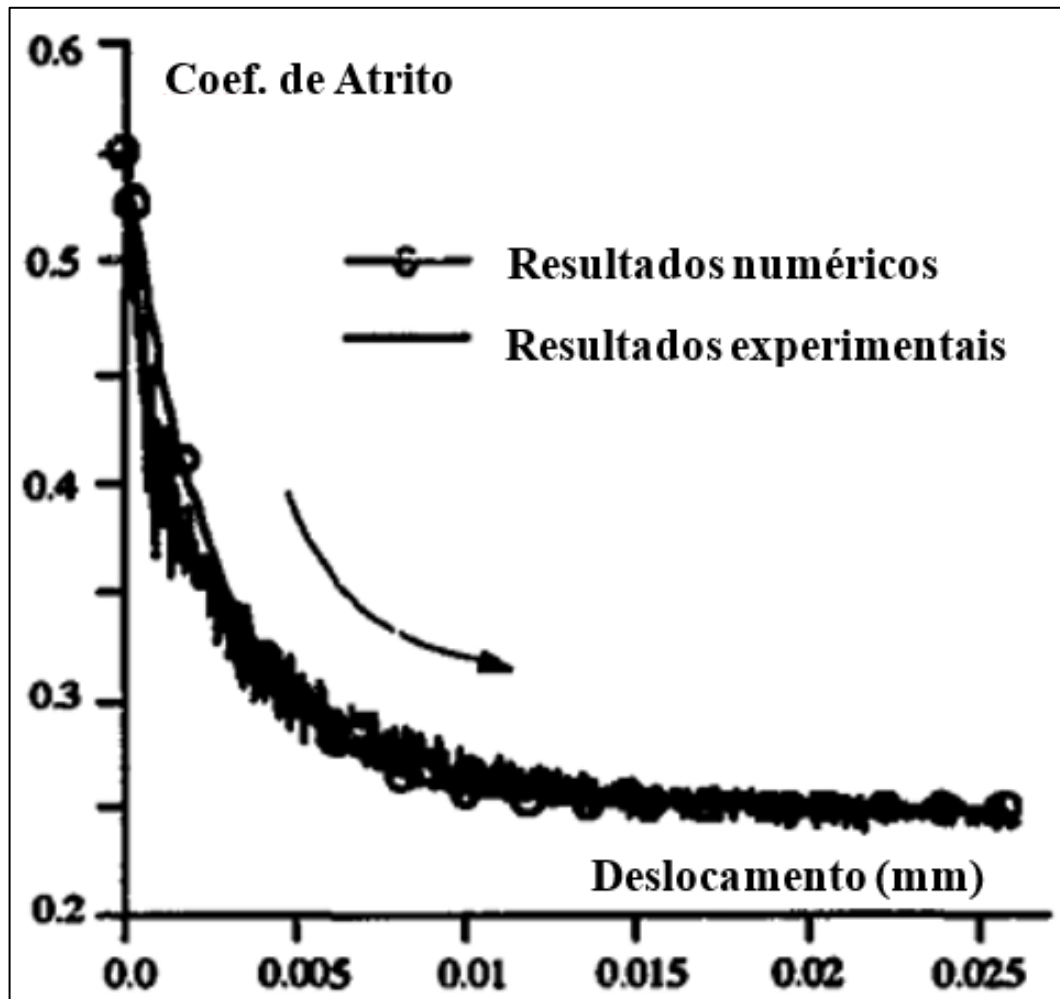
Figura 33 – Relação entre a área real de contato e o tempo de carregamento.



Fonte: Adaptado de Rabinowicz (1965).

Ferrero e Barrau (1997) também apresentaram a influência do histórico de carregamento na valoração do coeficiente de atrito observando sua redução em virtude da rivalidade entre as asperezas de contato (Figura 34), que são rompidas se o deslocamento for suficientemente grande, convertendo a interface de deslizamento de um estado estático para um estado contínuo de micro deslizamento.

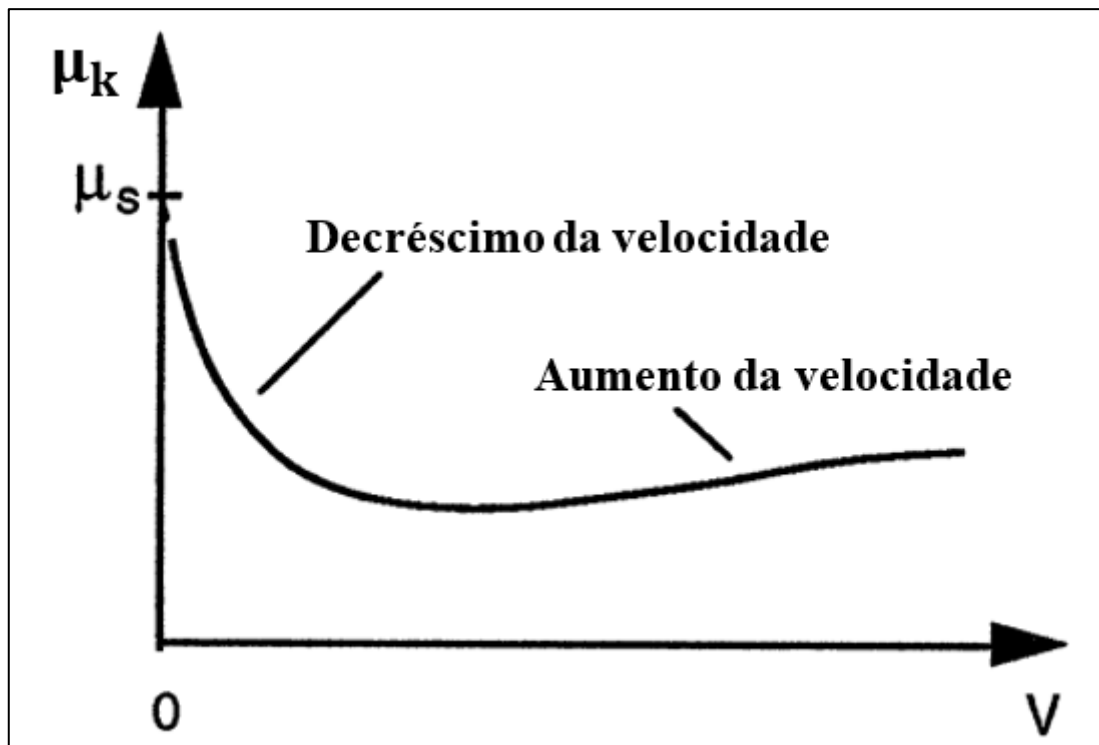
Figura 34 – Relação entre coeficiente de atrito e distância de deslizamento.



Fonte: Adaptado de Ferrero e Barrau (1997).

Além das supracitadas alterações do coeficiente de atrito estático, é importante destacar que no processo dinâmico há variação do coeficiente de atrito cinético em função da velocidade de deslizamento para a maioria dos materiais, contrariando as conclusões iniciais de Amontons, como mostrado na Figura 35.

Figura 35 – Variação do atrito cinético com a velocidade (μ_k é o coeficiente de atrito cinético e μ_s é o estático).



Fonte: Adaptado de Persson e Tosatti (2013).

5.1.1 Aderência-deslizamento (*Stick-Slip*)

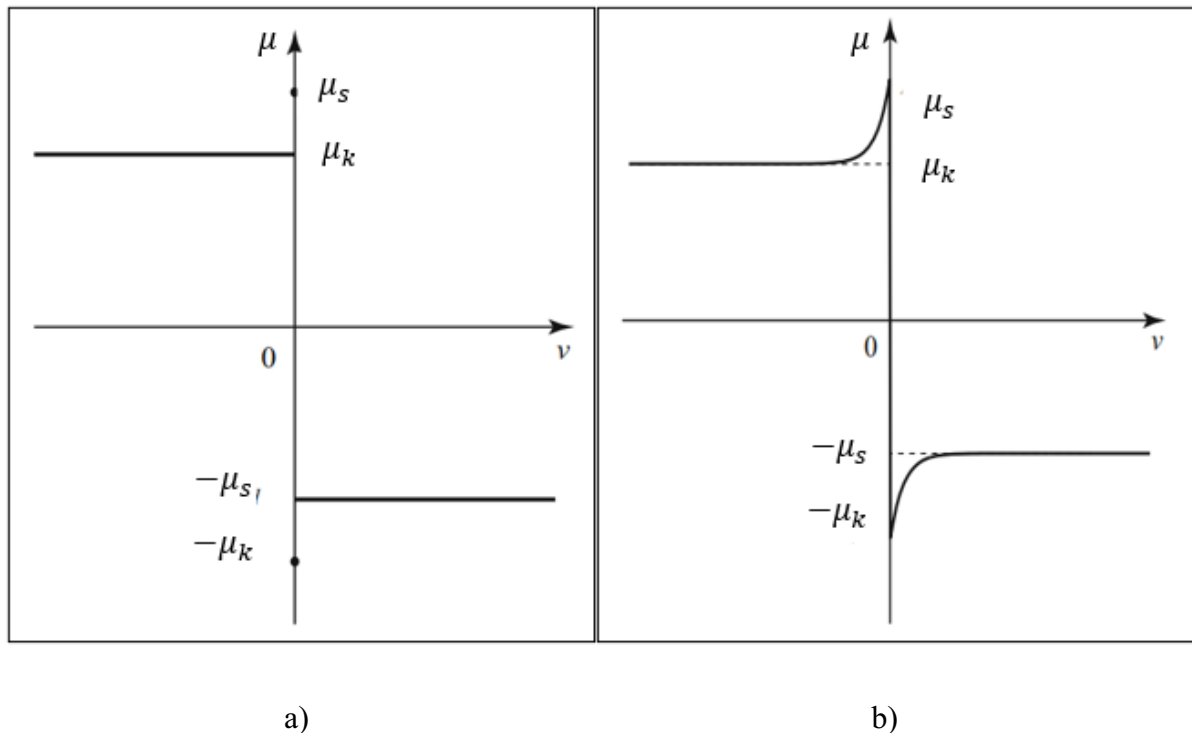
Segundo os estudos feitos inicialmente por Coulomb, a força de atrito possui variação de intensidade entre os estados estático e cinético. Isto se dá porque na fase estática há acomodação das irregularidades entre as superfícies, aumentando sua força resistiva. De outra maneira, no atrito cinético, esta acomodação não acontece, produzindo uma menor força opositora.

A representação clássica de Coulomb trata a transição do atrito estático para cinético de forma descontínua (Figura 36a), porém, como visto anteriormente, o coeficiente de atrito cinético sofre um acréscimo em pequenas velocidades, fenômeno não representado por este modelo. Benson e Hallquist (1990) propuseram um modelo que visa considerar esta transição (Figura 36b) com um decaimento exponencial, Eq. (35).

$$\mu = -\mu_k - (\mu_s - \mu_k)e^{-c_d|v|} \operatorname{sgn}(v) \quad (35)$$

onde c_d é a constante de decaimento exponencial calibrada conforme as características do modelo e observadas experimentalmente, v é a velocidade de deslizamento e $sgn(\cdot)$ é a função sinal.

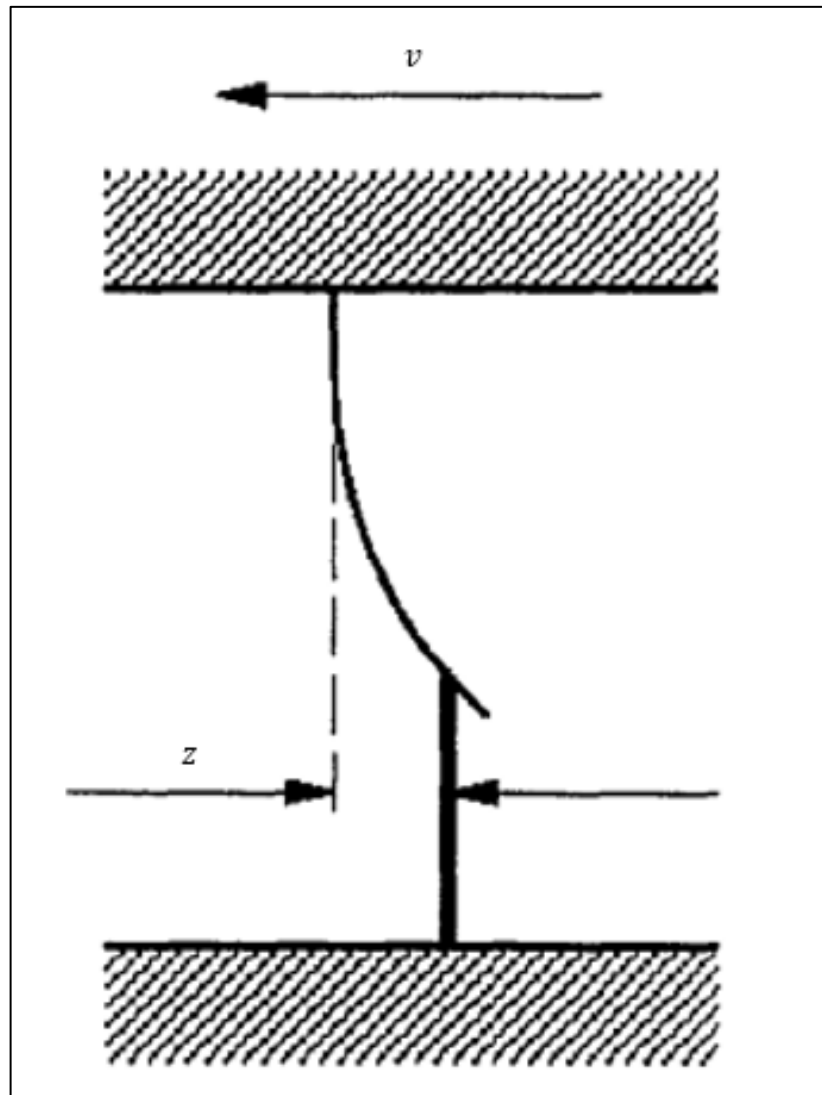
Figura 36 – Modelos de: a) Coulomb e b) Benson e Hallquist.



Fonte: Adaptado de Pennestrì *et al.* (2016).

Além dos modelos citados existem representações mais complexas, que foram desenvolvidas com o objetivo de representar mais fidedignamente o comportamento do atrito seco em seu curso dinâmico. Dahl (1976) propôs um modelo que considera um retardo da força de atrito quando a direção do movimento é alterada, assemelhando-se às cerdas de uma escova que, ao mudar a direção do seu movimento, sofre uma variação de posição condicionada à sua própria deformação (Figura 37). A partir deste modelo, novos estudos foram desenvolvidos para aprimorar seu comportamento, como os de LuGre (nome dado devido às iniciais das cidades onde foi desenvolvido, Lund e Grenoble), que acrescenta a relação da dependência do coeficiente de atrito pela velocidade no modelo de Dahl (PENNESTRÌ *et al.*, 2016).

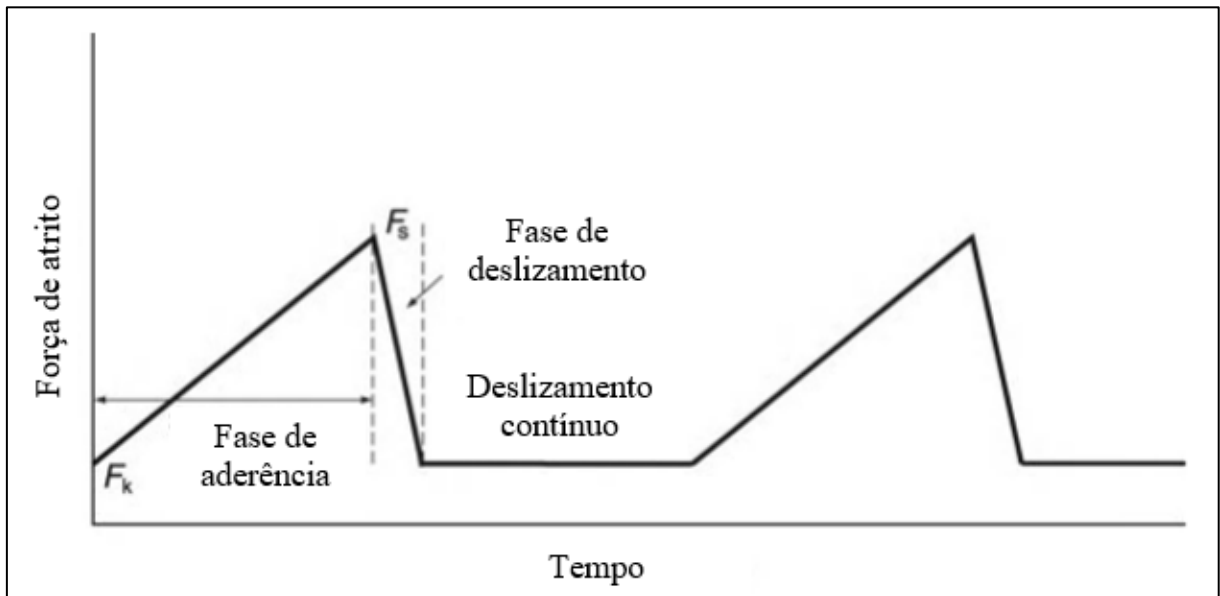
Figura 37 – Modelo de cerdas (onde z é a deformação pré-deslizamento).



Fonte: Chou (2004).

Apesar dos esforços em melhorar os modelos de representação, a acomodação progressiva das irregularidades com o aumento do tempo de contato estacionário e a alteração das superfícies pelo histórico de deslizamento, tornam a mensuração do coeficiente de atrito estático complexa em suas aplicações cotidianas. Contudo, a fim de representar este fenômeno de intensa não linearidade, ainda que de forma suavizada, os modelos acima são amplamente utilizados, resultando em um gráfico da força de atrito em função do tempo em forma de “serrote” (Figura 38), sendo F_s e F_k a força de atrito estática e dinâmica, respectivamente.

Figura 38 - Representação do fenômeno atrito-aderência (*stick-slip*).



Fonte: Adaptado de Bhushan (2013).

Observada a complexidade envolvendo o fenômeno do atrito, ao longo dos anos foram desenvolvidos métodos simplificados para sua implementação computacional. Tan e Rogers (1995) propuseram substituir o atrito por um amortecimento viscoso equivalente em sistemas multigrados de liberdade com excitações não periódicas, enquanto Mostaghel e Davis (1997) apresentaram funções contínuas para a substituição da função sinal descontínua, ambos possuem boa aproximação e facilitam o processo de cálculo (Fleck, 2002), sendo alternativas para a resolução da equação do movimento.

5.2 Energia de dissipação

A energia dissipada pela força de atrito seco constante (ΔW) por ciclo em um movimento harmônico simples se dá pela seguinte equação (RAO, 2009):

$$\Delta W = 4\mu_k NY \quad (36)$$

onde Y é a amplitude do movimento.

Já a energia dissipada devida ao amortecimento viscoso por ciclo (ΔW_{vis}) se dá por:

$$\Delta W_{vis} = \pi c_{eq} \omega Y^2 \quad (37)$$

sendo c_{eq} a constante de amortecimento viscoso equivalente e ω a frequência angular do movimento.

Igualando ΔW_{vis} com ΔW , tem-se:

$$c_{eq} = \frac{4\mu_k N}{\pi \omega Y} \quad (38)$$

5.2.1 Valor máximo da força de atrito para a equivalência

Para que se possa fazer a equivalência entre a força de atrito e uma constante de amortecimento viscoso, o sistema precisa manter um movimento oscilatório aproximadamente harmônico, com isso, o atrito seco constante deve ser limitado para evitar valores imaginários de amplitude. Na Eq. (39) é mostrada a amplitude calculada com amortecimento por atrito seco pela teoria do amortecimento viscoso equivalente (RAO, 2009).

$$Y = \frac{F_{exc}}{k} \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{4\mu_k N}{\pi F_{exc}}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (39)$$

onde F_{exc} é a força de excitação, ω_n é a frequência angular natural e k é a rigidez.

Portanto, pode-se concluir que a força de atrito deve ser:

$$1 - \left(\frac{4\mu_k N}{\pi F_{exc}}\right)^2 > 0 \quad (40)$$

$$\frac{F_{exc} \pi}{4} > \mu_k N \quad (41)$$

Através da Eq. (39) percebe-se que em pontos de ressonância, onde $\omega = \omega_n$, a amplitude Y tende ao infinito. Isto se deve ao fato de que a força de atrito seco é constante em todo o deslizamento, resultando em uma energia de dissipação proporcional à energia de excitação e, como a força de atrito precisa ser inferior à força de excitação (Eq. (41)), o amortecimento será sempre insuficiente.

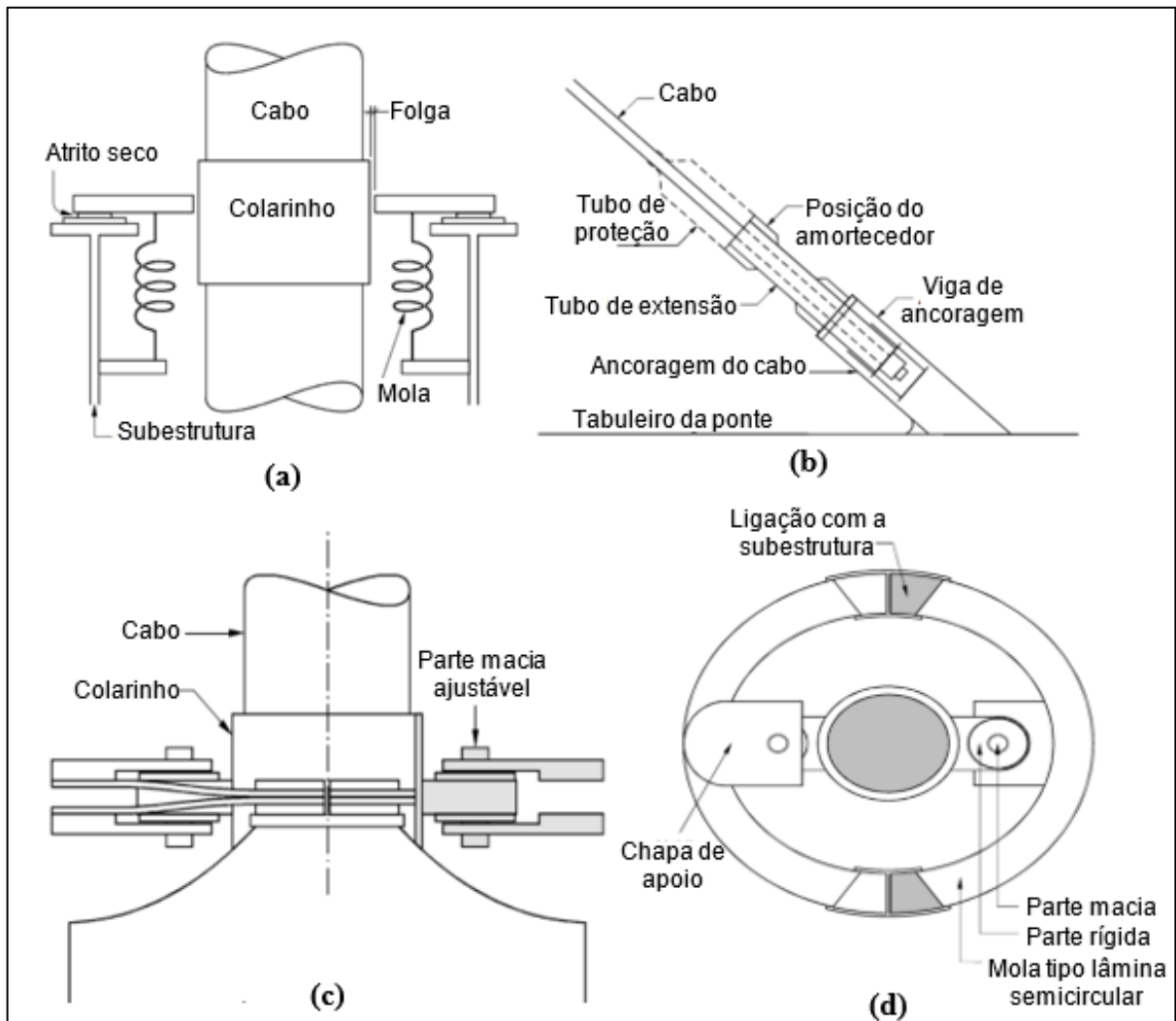
Esta situação não acontece com a força de atrito viscosa, pois sua variação ocorre linearmente com a velocidade sendo, portanto, proporcional ao deslocamento. Logo, sua energia de dissipação é proporcional ao quadrado da amplitude, indicando que a amplitude sempre será finita, pois a excitação será igualada à dissipação quadrática em algum momento (DEN HARTOG, 1985).

6 Atrito seco aplicado em cabos de pontes estaiadas

O modelo mais usual de amortecedor por atrito seco para cabos de pontes estaiadas foi desenvolvido por Imre Kovacs (Figura 39) na década de 1990, tendo sua primeira aplicação na Puente Real Bridge em 1996, na Espanha (CROUCH; DOCK, 2011). Para o controle de vibrações oriundas da associação do vento e da chuva, Kovacs, Strommen e Hjørth-Hansen (1999) apresentaram esse modelo em detalhe para a sua implementação na Sunningesund Bridge, na Suécia.

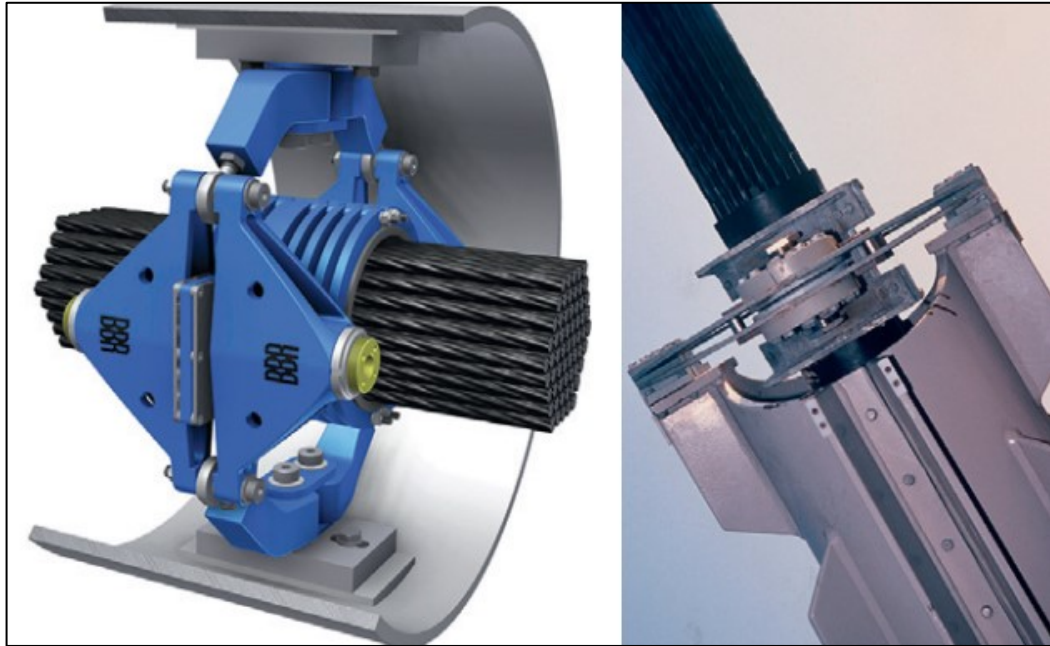
A idealização do modelo é mostrada na Figura 39a, onde o atrito acontece pela movimentação diferencial entre o cabo e uma subestrutura fixa. Já nas Figuras 39b, 39c e 39d, é mostrado um modelo factível, que foi patenteado pela VSL International[®] (Figura 40), onde o atrito ocorre pelo deslizamento entre dois materiais, um macio e outro rígido, com a força normal sendo regulada pela rigidez da mola do tipo lâmina semicircular.

Figura 39 – Amortecedor por atrito seco para cabos de pontes estaiadas.



Fonte: Adaptado de Kovacs, Strommen e Hjorth-Hansen (1999).

Figura 40 – Amortecedor por atrito seco VSL.



Fonte: VSL (2002, apud CAETANO, 2022).

Devido à restrição de desempenho do amortecimento passivo a carregamentos específicos, Weber, Hogsberg e Krenk (2010) propuseram a aplicação da variação da força de atrito proporcional à amplitude máxima (Y_{max}) no amortecimento de cabos de pontes estaiadas, onde lograram êxito na otimização do amortecimento por atrito seco constante.

A partir da aplicação da igualdade entre as energias dissipativas dada na Eq. (42), foi encontrado um valor ótimo para a força de atrito ($F_{at,amp}$) seco que é uma função da amplitude de vibração, Eq. (43).

$$4F_{at,amp}Y_{max} = \pi c_{eq}\omega Y_{max}^2 \quad (42)$$

$$|F_{at,amp}| = \frac{\pi c_{eq}\omega Y_{max}}{4} \quad (43)$$

Segundo Krenk (2000), analiticamente, o amortecimento viscoso ótimo para os cabos é dado por:

$$c_{opt,v} = \frac{T}{x_p \omega} \quad (44)$$

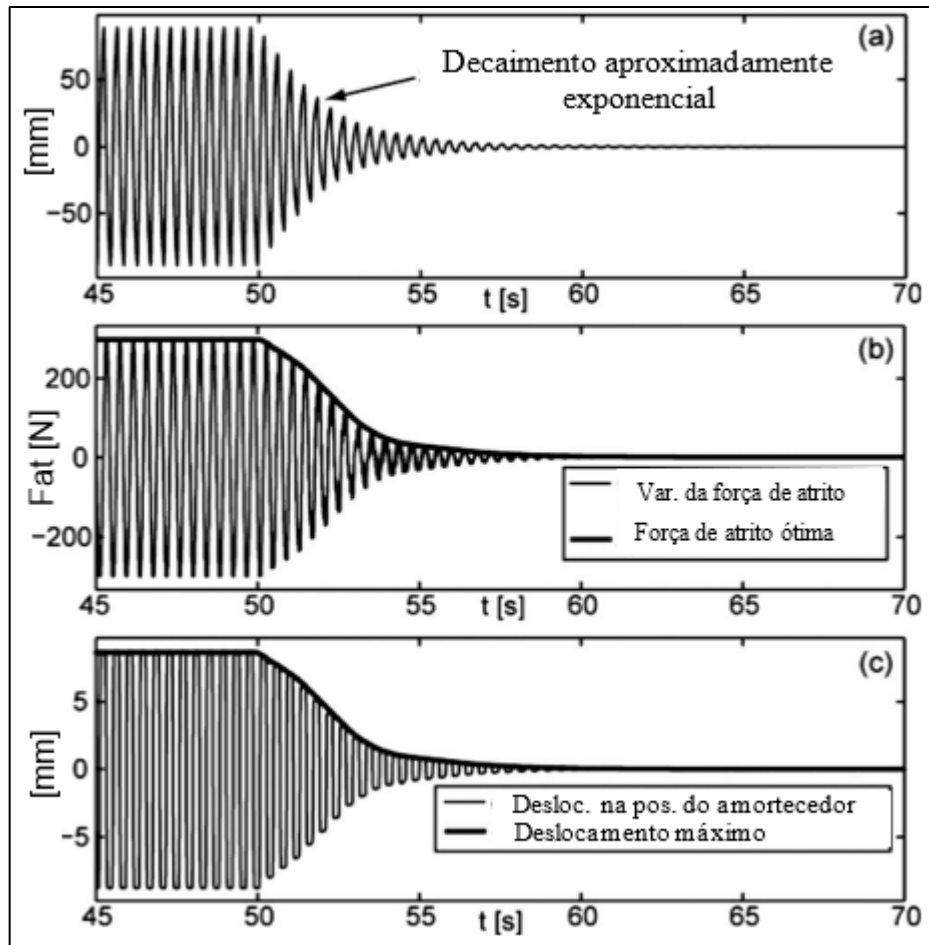
Portanto, a Eq. (43) fica:

$$|F_{at,amp}| = \frac{\pi T Y_{max}}{4x_p} \quad (45)$$

Segundo os autores, para a implementação da variação proposta, a resposta do amortecedor deve ser constantemente monitorada para que os picos (Y_{max}) possam ser constantemente atualizados e, conseqüentemente, a força de atrito ótima. Apesar do valor ótimo obtido pela equivalência ao atrito viscoso, esse valor ficou abaixo do obtido pela otimização, que apresentou uma força de atrito ($F_{at,amp}$) 37,5% maior. Na integração numérica, foi utilizado o método de Runge-Kutta de quarta ordem, com erro de quinta ordem.

Nesta abordagem, por se tratar de um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs) rígido, foi necessário suavizar as descontinuidades apresentadas pela força de atrito, possibilitando o uso da superposição modal e redução de graus de liberdade do modelo. Pode-se observar na Figura 41 que a amplitude apresentou um decaimento aproximadamente logarítmico. O amortecimento obtido por este método foi aproximadamente 10% maior que o amortecimento ótimo viscoso.

Figura 41 – a) Resultados na posição central do cabo, b) valor da força de atrito em função do tempo e c) deslocamentos na posição do amortecedor.



Fonte: Adaptado de Weber, Hogsberg e Krenk (2010).

Em 2013, Wang e Sun propuseram um parâmetro de amortecimento (força de atrito) semiativo ($F_{at,sa}$) dependente da posição do amortecedor e da sua amplitude máxima através da solução encontrada para a equação do movimento pelo método de Galerkin (Eq. (46)).

$$F_{at,sa} = \text{sgn}(\dot{y})k_c \frac{\pi^2 i^2 T Y_{max}}{2L \text{sen}^2\left(\frac{x_p i \pi}{L}\right)} \quad (46)$$

onde k_c é um parâmetro de controle relacionado ao número de graus de liberdade. Esta análise difere da anterior porque não se baseia no amortecimento ótimo viscoso da Eq. (44) para dimensionar a força de atrito ($F_{at,sa}$). Neste caso, o ganho em relação ao amortecimento viscoso ótimo foi de aproximadamente 60%.

Por fim, Nguyen e Vo (2020) estudaram a combinação de dois amortecedores por atrito seco utilizando o coeficiente de amortecimento viscoso equivalente, onde as eficiências dos amortecedores se somaram, indicando a atuação independente de ambos. Esta conclusão já era esperada, tendo em vista que já é conhecida para amortecedores viscosos e utilizando o amortecimento viscoso equivalente os resultados não podem apresentar diferenças. No entanto, a não linearidade do atrito seco pode provocar alterações nos modos de vibrar do cabo, como visto por Weber, Hogsberg e Krenk (2010), podendo gerar interferências mútuas entre ambos amortecedores.

7 Metodologia

Este capítulo é dedicado às formulações numéricas para a modelagem e resolução do problema dinâmico. A seção 7.1 foi escrita a fim de contextualizar as limitações da análise proposta, esclarecendo a excitação considerada, o modelo genérico de amortecedor no qual o mecanismo de amortecimento pode ser aplicado e as considerações utilizadas na simulação.

Em sequência, é feito o estudo da discretização do cabo em elementos finitos e de sua verificação (seção 7.2), com posterior implementação do mecanismo de amortecimento por atrito seco (seções 7.3 e 7.4) e os métodos para a integração numérica e a otimização dos resultados (seção 7.5).

7.1 Considerações e delimitações do modelo

Seguindo os objetivos propostos (seção 1.2), a variação da força de atrito é realizada a fim de se obter um amortecimento satisfatório ($S_c \geq 10$) para um cabo tensionado sem considerar a teoria do amortecimento viscoso equivalente, permitindo que as diferenças produzidas pela não linearidade do atrito seco sejam observadas e seus resultados quantificados. Para a análise do número de Scruton é necessário utilizar o fator de amortecimento (Eq. (47)), devendo ser, neste caso, maior ou igual a 0,33% (Eq. (2)).

$$\xi \cong \frac{1}{ref} \sum_{np=1}^{ref} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{Y_{np}}{Y_{np+1}} \quad (47)$$

onde Y_{np} e Y_{np+1} são picos de amplitude seguidos, ref é o último valor a ser considerado para a avaliação do fator de amortecimento (ξ) e np é o número do pico em análise.

A força de excitação aplicada em função do tempo tem característica senoidal a fim de analisar o comportamento do atrito seco com parâmetros estacionários que representam os modos naturais de vibração. Portanto, a excitação paramétrica (de base e de torre) é desconsiderada, sendo o cabo fixado nas extremidades e estas assumidas como indeslocáveis.

A variação do atrito seco é feita entre dois fatores limitadores de movimento: a amplitude do cabo na posição do amortecedor e a superação da força de excitação pela força de atrito. Quando a força de atrito supera a força de excitação o amortecedor não se desloca, sendo este, o segundo fator limitante de movimento e da variação do atrito seco, conseqüentemente.

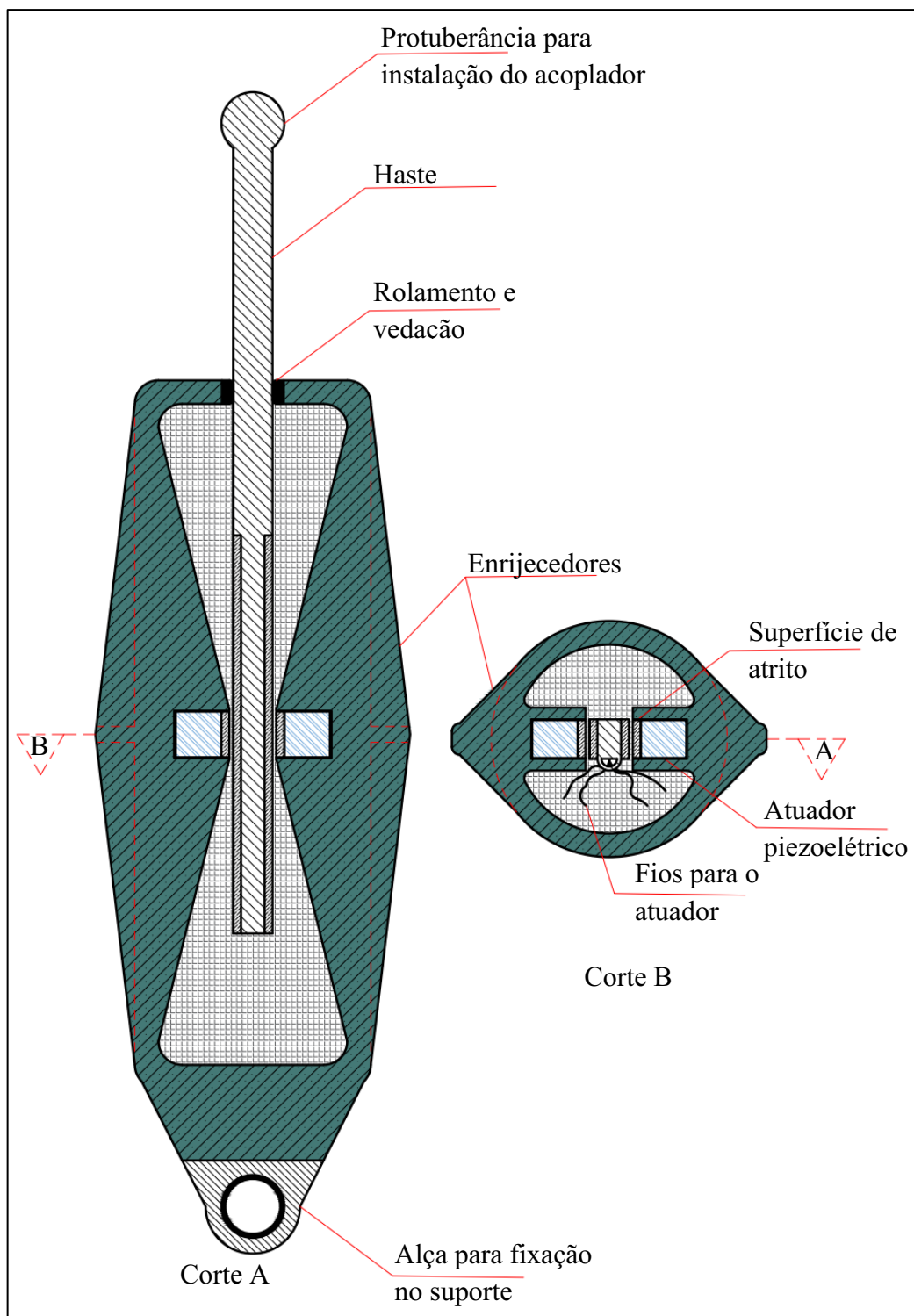
O atrito se dá através do contato entre dois sólidos conforme o modelo (Figura 42) onde um sólido (haste) se movimenta conforme a oscilação do cabo e outro sólido se mantém estático. É considerado que o amortecedor não se deforma com os esforços causados pela vibração, como também não oferece resistência ao movimento.

Propor um novo modelo de amortecedor não é o objetivo deste trabalho, entretanto para diminuir o nível de abstração e tornar factíveis os desenvolvimentos aqui estudados, é exemplificado um modelo de funcionamento semiativo com a variação do atrito seco provocada por um atuador piezoelétrico (Figura 42). Ressalta-se que um modelo puramente passivo pode ser desenvolvido, porém deve haver considerações como o acréscimo de uma parcela resistiva na equação do movimento devido à variação acontecer somente por alterações geométricas neste caso. O desenvolvimento passivo não foi aqui desenvolvido pelo objetivo de estudar isoladamente o comportamento dessas variações para que então, posteriormente, sejam realizados aperfeiçoamentos.

O modelo genérico proposto é provido de uma parte fixa no tabuleiro da ponte e uma haste de deslocamento acoplada ao cabo. Quando a vibração acontece, a superfície de atrito presente na haste desliza em contato com a superfície de atrito fixa no corpo do amortecedor. Os atuadores piezoelétricos recebem a corrente elétrica a partir do processador e do sensor que

capta os deslocamentos do cabo. Os enrijecedores são utilizados para minimizar as interferências da deformação do corpo do amortecedor na geração do atrito.

Figura 42 – Modelo genérico de amortecedor para implementação.



Fonte: Autor.

As otimizações da força de atrito são realizadas exclusivamente para o cabo com as características citadas na Tabela 3, tendo em vista que não se trata de uma formulação geral para encontrar a força de atrito ótima, mas sim, uma análise comportamental do atrito seco em função do deslocamento aplicado a um cabo tensionado. Não obstante, pode-se esperar que as variações de posição mantenham respostas similares para os demais cabos.

Os efeitos de curvatura e rigidez à flexão são desprezados por representarem valores insignificantes neste caso, $\lambda^2 = 0,4249$ e $\xi_{flex} = 326,17$, respectivamente. Somente a correção do módulo de elasticidade é aplicada.

Para o processamento numérico foi utilizado um computador portátil do modelo IdeaPad S145-15API com processador AMD Ryzen 5 3500U e 12 Gigabytes de memória ram.

7.2 Modelo de Elementos Finitos de um cabo

O método dos elementos finitos é utilizado pela facilidade de manipulação dos parâmetros, possibilitando mudar a posição do amortecedor e seu comprimento de influência de maneira simplificada. Este método consiste em discretizar uma estrutura em diversos elementos que são conectados entre si através de nós. Conhecido o comportamento de cada elemento, é possível conhecer o comportamento global da estrutura. Para cada elemento são atribuídos os parâmetros físicos, quantidade de nós e seus graus de liberdade. Como o objetivo é a análise dinâmica, é necessário formular a matriz de massa $[M]$, a matriz de rigidez $[K]$ e a matriz de amortecimento interno $[C_{int}]$ para cada elemento.

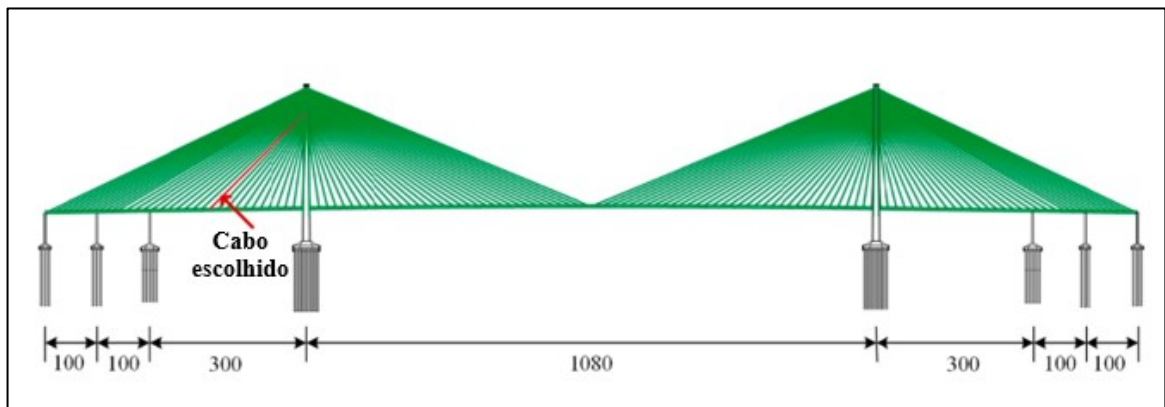
A princípio foram escolhidos os parâmetros físicos do cabo, como sua geometria e as características do seu material (Tabela 3.). Tais parâmetros foram obtidos do estudo de Gao *et al.* (2021) que se refere a um cabo da ponte Sutong Yangtze River Bridge, localizada na China (Figura 43).

Tabela 3 – Propriedades do cabo.

Item	Valor
Comprimento do cabo	253,34 m
Massa por unidade de comprimento	62,09 kg/m
Rigidez à flexão <i>EI</i>	$2,55 \times 10^6 \text{ N.m}^2$
Módulo de Elasticidade	$1,9972 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
Diâmetro	0,127 m
Ângulo de inclinação	43,1°
Parâmetro de curvatura (λ^2)	0,4249
Tração	4227 kN

Fonte: Adaptado de Gao *et al.* (2021).

Figura 43 – Localização do cabo escolhido (unidade em metros).



Fonte: Adaptado de Gao *et al.* (2021).

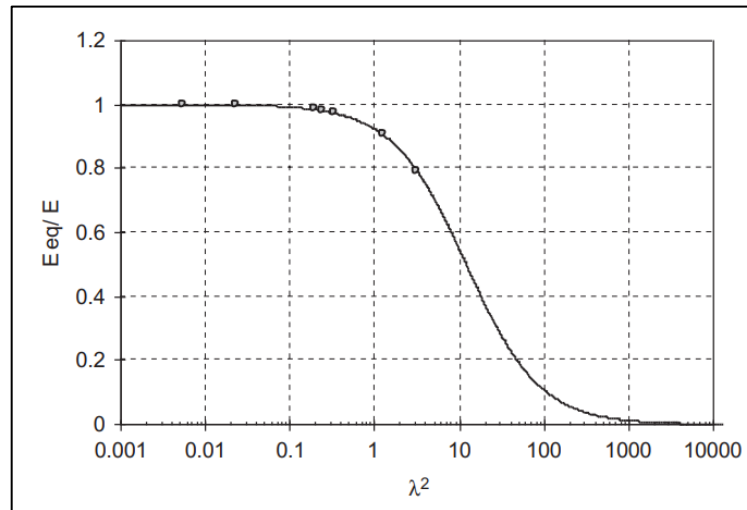
7.2.1 Módulo de elasticidade ajustado

O módulo de elasticidade deve ser ajustado devido à curvatura do cabo, esta adaptação se dá pela seguinte fórmula (CAETANO, 2022):

$$E_{eq} = \frac{E}{1 + \frac{\lambda^2}{12}} \quad (48)$$

onde E_{eq} é o módulo de elasticidade equivalente e E é o módulo de elasticidade original. Na Figura 44 é mostrada a relação E_{eq}/E e λ^2 (Eq. (22)).

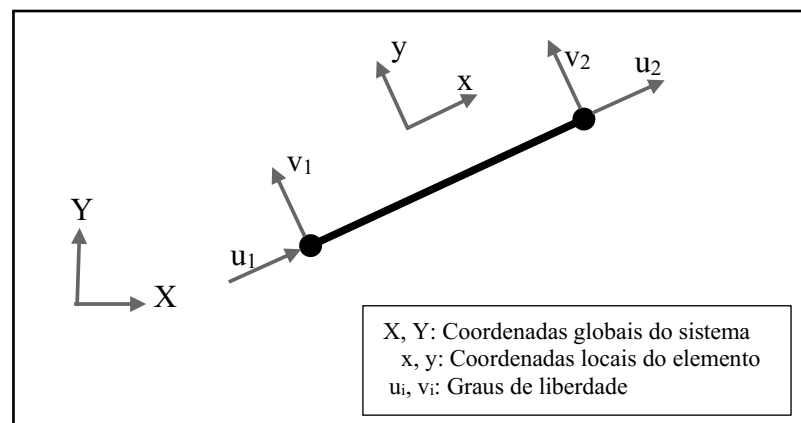
Figura 44 – Diminuição da rigidez em função da curvatura.



Fonte: Caetano (2022).

A partir dos dados supracitados foi iniciada a discretização do cabo para a posterior análise pelo método dos elementos finitos através do ambiente de programação MATLAB[®], onde serão utilizados elementos de barra com quatro graus de liberdade (GDLs). A cinemática da deformação do elemento para os planos é ilustrada na Figura 45, sendo representados por u_i os deslocamentos na direção x e v_i os deslocamentos na direção y .

Figura 45 - Elemento de barra com quatro graus de liberdade.



Fonte: Autor.

7.2.2 Matriz de massa elementar

Para o desenvolvimento da matriz de massa foi utilizado o método *lumped*, que consiste em concentrar a massa nos nós com distribuição igualitária para ambos (RAO, 2017). O tamanho da matriz de massa se dá pelo número de graus de liberdade do elemento; como o elemento escolhido tem 4 graus de liberdade, a matriz tem 4 linhas e 4 colunas, como mostrado na Eq. (49).

$$[m_e] = \frac{mAL_{el}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (49)$$

onde $[m_e]$ é a matriz de massa elementar, m é a massa por unidade de comprimento do elemento, A é a área de sua seção transversal e L_{el} seu comprimento.

7.2.3 Matriz de rigidez elementar

Na formulação da matriz de rigidez elementar é considerada a soma da matriz de rigidez elástica $[K_{el}]$ (Eq. (50)) com a matriz de rigidez geométrica devida à tração $[K_\sigma]$ (Eq. (51)).

$$[K_{el}] = E_{eq}A/L_{el} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$[K_\sigma] = T/L_{el} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (51)$$

Para a obtenção da matriz de rigidez elementar (Eq. (52)), somam-se as Eqs. (50) e (51):

$$[K_e] = 1/L_{el} \begin{bmatrix} E_{eq}A & 0 & -E_{eq}A & 0 \\ 0 & T & 0 & -T \\ -E_{eq}A & 0 & E_{eq}A & 0 \\ 0 & -T & 0 & T \end{bmatrix} \quad (52)$$

7.2.4 Análise modal

Para encontrar os modos de vibração e suas respectivas frequências naturais, foi utilizado o sistema de equações de movimento livre de força externa (solução homogênea), como segue:

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = 0 \quad (53)$$

onde $\{y\}$ e $\{\ddot{y}\}$ são vetores da posição e da aceleração ao longo do cabo em função do tempo, respectivamente. Para a Eq. (53) admite-se uma solução do tipo:

$$\{y(t)\} = \{Y\}e^{(i_m\omega_n t)} \quad (54)$$

$$\{\ddot{y}(t)\} = -\{Y\}\omega_n^2 e^{(i_m\omega_n t)} \quad (55)$$

onde $\{Y\}$ é o vetor das amplitudes da oscilação, t é o tempo e i_m é a unidade imaginária do número complexo. Substituindo (54) e (55) em (53):

$$-[M]\{Y\}\omega_n^2 e^{(i_m\omega_n t)} + [K]\{Y\}e^{(i_m\omega_n t)} = 0 \quad (56)$$

$$([K] - \omega_n^2[M])Y e^{(i_m\omega_n t)} = 0 \quad (57)$$

$$([K] - \omega_n^2[M])Y = 0 \quad (58)$$

Observando a Eq. (58), nota-se que se trata de um problema de autovalor e autovetor. O autovalor resulta em uma matriz diagonal ($[\Lambda]$, Eq. (59)), onde seus valores são equivalentes ao quadrado das frequências angulares naturais do sistema. Já o autovetor resulta em uma matriz quadrada ($[\Phi]$, Eq. (60)) onde cada coluna representa a configuração modal da estrutura. Ambas matrizes possuem ordem igual ao número de graus de liberdade do sistema (n_G):

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \omega_{n_1}^2 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \omega_{n_2}^2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{n_{n_G}}^2 \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n_G} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n_G} \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n_G} \\ a_{n_G1} & a_{n_G2} & a_{n_G3} & a_{nn_G} \end{bmatrix} \quad (60)$$

onde a é a componente dos autovetores de deslocamento modal do cabo.

7.2.5 Matriz de amortecimento (Rayleigh)

O movimento diferencial entre as camadas internas de um sólido produz atrito e, conseqüentemente, um amortecimento histerético. Para a determinação desta matriz de amortecimento interno é utilizado o método de Rayleigh, que considera o amortecimento interno ($[C_{int}]$) proporcional à massa e à rigidez (CHOPRA, 2007):

$$[C_{int}] = a_0[M] + a_1[K] \quad (61)$$

$$\xi = \frac{a_0}{2\omega_n} + \frac{a_1\omega_n}{2} \quad (62)$$

sendo ξ o fator de amortecimento interno, que para os cabos de ponte estaiada é aproximadamente 0,13% (CAETANO, 2007). A matriz de amortecimento necessita de um par de frequências naturais para poder ser calculada, resultando no sistema:

$$\begin{Bmatrix} \xi_i \\ \xi_{i+1} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_n} & \omega_n \\ \frac{1}{\omega_{n+1}} & \omega_{n+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} \quad (63)$$

onde ω_{n+1} é a frequência angular natural subsequente a ω_n . Para $\xi_i = \xi_{i+1}$ ocorre a simplificação:

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \frac{2\xi}{\omega_n + \omega_{n+1}} \begin{Bmatrix} \omega_n \omega_{n+1} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (64)$$

Por fim, aplicando a Eq. (64) na (61) monta-se a matriz clássica de amortecimento proporcional proposta por Rayleigh. O sistema de equações diferenciais ordinárias homogêneas passa a ser representado pela Eq. (65).

$$[M]\{\ddot{y}(t)\} + [C_{int}]\{\dot{y}(t)\} + [K]\{y(t)\} = 0 \quad (65)$$

7.2.6 Teoria das cordas vibrantes

A teoria das cordas vibrantes permite calcular as frequências naturais de uma corda flexível, fixa em suas extremidades e submetida a uma força de tração. Para seu equacionamento, a velocidade de propagação da onda (c_{prop}) é independente da frequência e obtida pela seguinte relação:

$$c_{prop} = \sqrt{\frac{T}{m}} \quad (66)$$

O quociente da velocidade de propagação da onda com o comprimento da onda l é igual a frequência natural da corda para cada n_f modo de vibrar (THOMSON, 1973):

$$l = 2L/n_f \quad (67)$$

$$f_n = \frac{n_f}{2L} \sqrt{\frac{T}{m}} \quad (68)$$

onde f_n é a frequência natural, n_f é o número da frequência natural a ser calculada e L é o comprimento do cabo. Os resultados analíticos das cinco primeiras frequências naturais serão utilizados para a verificação do modelo formulado pelo método dos elementos finitos.

7.3 Atrito seco

A formulação do atrito seco para os estudos deste texto segue a teoria de Coulomb. Nesta teoria tem-se uma força normal aplicada a uma superfície que multiplicada pelo coeficiente de atrito, dado pelas condições dos sólidos em contato, resulta na força de atrito. Observando que a força de atrito tem direção oposta à velocidade de deslocamento, pode-se escrever sua fórmula como segue:

$$F_{at} = -N\mu_k \operatorname{sgn}(\dot{y}) \quad (69)$$

$$\operatorname{sgn}(\dot{y}) = \begin{cases} 1 & \text{para } \dot{y} > 0 \\ 0 & \text{para } \dot{y} = 0 \\ -1 & \text{para } \dot{y} < 0 \end{cases} \quad (70)$$

onde F_{at} é a força de atrito, μ_k é o coeficiente de atrito em deslizamento (cinético), \dot{y} é a velocidade de deslocamento do sólido e $\operatorname{sgn}(\dot{y})$ representa a função sinal da velocidade, descrita na Eq. (70).

Quando a velocidade (\dot{y}) é nula, o coeficiente de atrito tem seu valor alterado para o estado estático, portanto tem-se:

$$|F_{at}| \leq |\mu_s N| \quad (71)$$

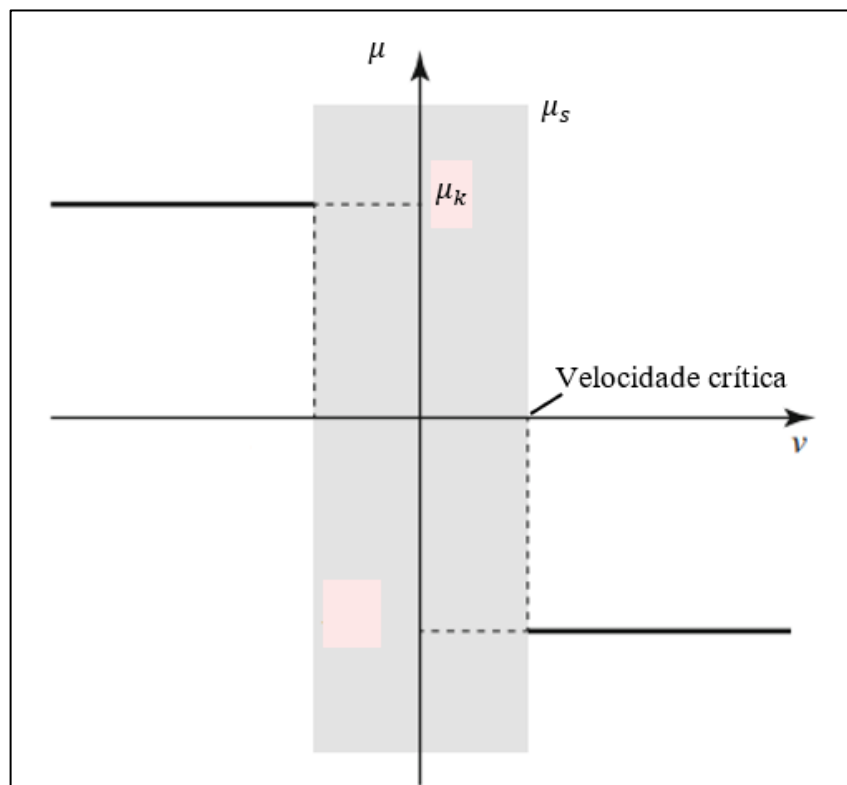
onde μ_s é o coeficiente de atrito estático.

7.3.1 Considerações acerca do atrito seco nas regiões de transição

Mesmo sendo um modelo relativamente simplificado (teoria de Coulomb), numericamente é difícil detectar os valores nulos da velocidade para que se obtenha o valor do atrito seco majorado, ou estático. Para contornar este problema, Karnopp (1985) propôs o modelo exposto na Figura 46 que considera uma área de influência em torno do ponto onde a velocidade é igual a zero, de maneira que as velocidades mínimas avaliadas pela resolução numérica atinjam esta área. É arbitrado o valor de 10^{-6} m/s (metros por segundo) para a velocidade crítica, objetivando a captação pela discretização numérica com uma mínima influência na área de deslizamento, mantendo uma ordem de grandeza abaixo de 1% da velocidade máxima atingida na posição do amortecedor.

Para a análise e exposição de um modelo que contenha diferenças entre o atrito estático e cinético, é utilizada uma majoração de 30% para o valor estático, equivalente a um contato entre duas superfícies metálicas macias (AVALLONE; BAUMEISTER III; SADEGH, 2007).

Figura 46 - Representação do *stick-slip* com área de influência.



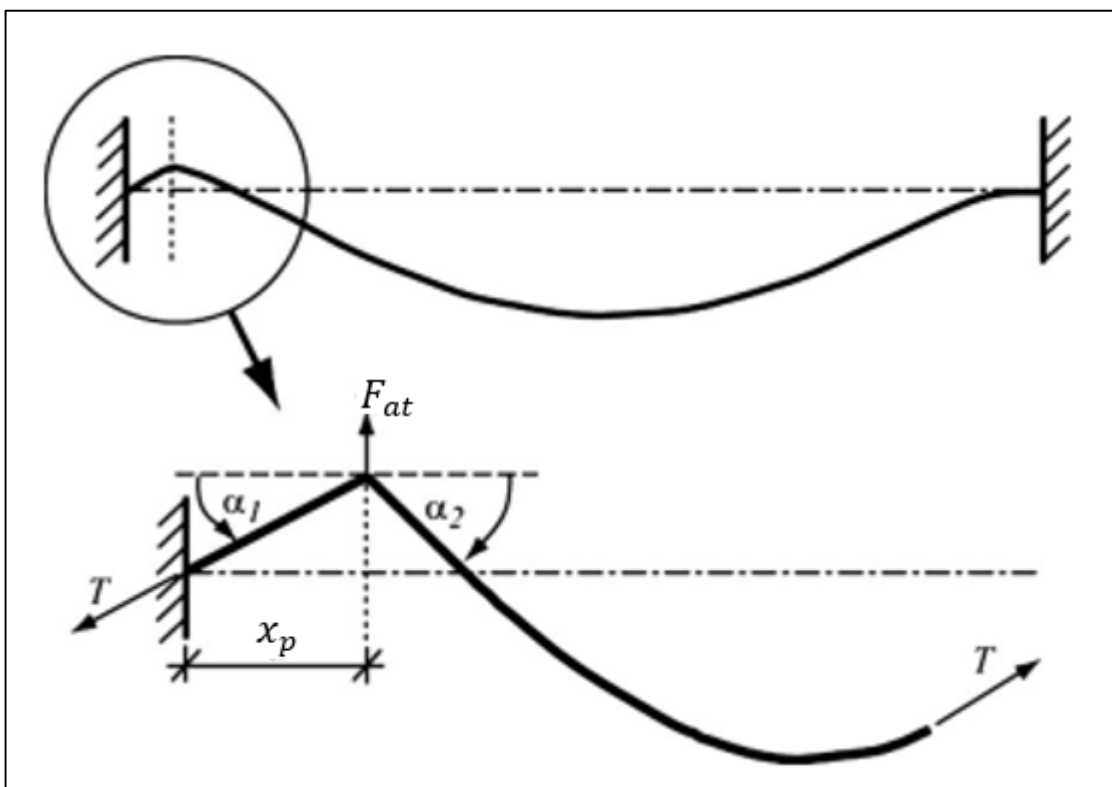
Fonte: Adaptado de Pennestrì *et al.* (2016).

No fim do regime transitório principal o amortecedor por atrito seco é travado em sua posição quando a força de atrito supera a soma das decomposições verticais da força de tração, a partir da Eq. (72).

$$|F_{at}| > |T[\text{sen}(\alpha_1) + \text{sen}(\alpha_2)]| \quad (72)$$

O cabo em equilíbrio estático é mostrado na Figura 47. Os parâmetros α_1 e α_2 representam os ângulos de inclinação do cabo em relação à horizontal e x_p é a posição do amortecedor.

Figura 47 – Resultante de forças estáticas na posição do amortecedor.



Fonte: Weber, Hogsberg e Krenk (2010).

7.3.2 Variação do atrito seco

O amortecimento dado pelo atrito seco passivo e constante tem baixa eficiência para amplitudes de vibração fora da região para qual ele foi projetado, sendo ineficiente para grandes

amplitudes e funcionando como apoio rígido para amplitudes mais baixas. A variação do atrito seco tem o objetivo de promover um amortecimento mais eficiente em função do deslocamento transversal do cabo.

Para isto, é pré-definida e fixada uma taxa de variação para o amortecedor que pode ser obtida através de alterações nos componentes da fórmula do atrito seco dada por Coulomb, mostrada na Eq. (69), podendo-se manipular tanto o coeficiente de atrito μ_k , quanto a força normal N . Assim, alterando a rugosidade do material em função do comprimento da superfície de deslizamento, tem-se:

$$F_{at} = -N(\mu_k t_\mu |y|^n) \operatorname{sgn}(\dot{y}) \quad (73)$$

onde t_μ representa a taxa de variação do coeficiente de atrito em função do comprimento, y representa a posição do sólido em deslizamento e n é a potência de variação.

Por outro lado, variando a força normal em função do comprimento, a configuração da equação se torna:

$$F_{at} = -(N t_N |y|^n) \mu_k \operatorname{sgn}(\dot{y}) \quad (74)$$

onde t_N é a taxa de variação da força normal em função do comprimento.

Independentemente de onde é colocada a variação do amortecimento, pode-se expressá-la utilizando:

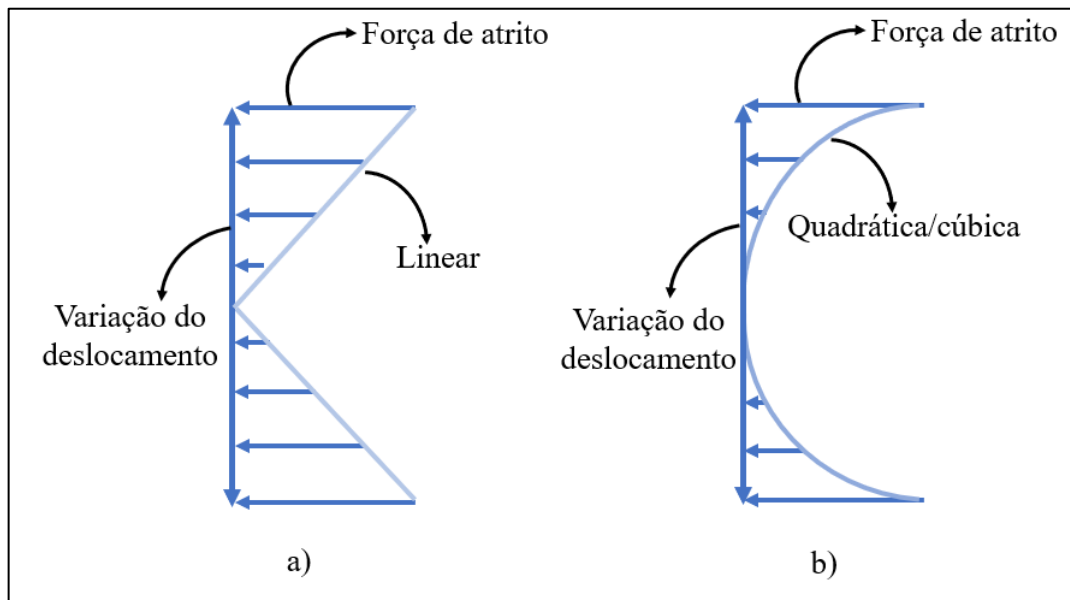
$$F_{at} = -t_{var} y^n \operatorname{sgn}(\dot{y}) \quad (75)$$

sendo t_{var} a taxa de variação da força de atrito. O problema é resolvido com taxas de variação lineares, quadráticas e cúbicas.

As variações em função do deslocamento que seguem a Eq. (75) são propostas a fim de se obter resultados eficientes sem grande interferência de controle, não necessitando de

monitoramento constante de picos, como nos estudos de Weber, Hogsberg e Krenk (2010) e Wang e Sun (2013). O formato dessas variações pode ser visto na Figura 48.

Figura 48 – Variações do atrito seco em função do deslocamento.

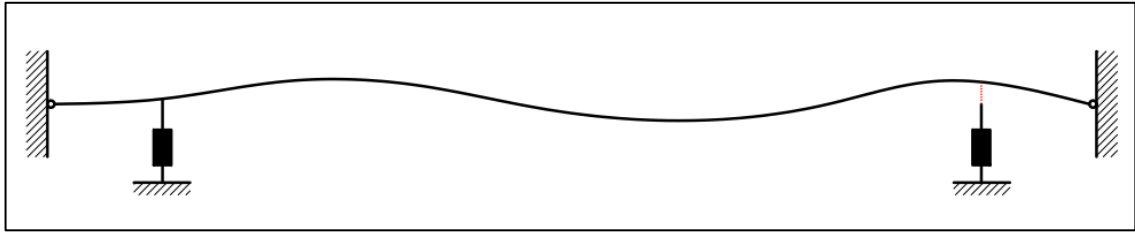


Fonte: Autor.

7.3.3 *Uso de dois amortecedores*

Apesar de já ter sido estudado para o atrito seco, o uso de dois amortecedores pode apresentar um comportamento diferente do atrito viscoso equivalente estudado por Nguyen e Vo (2020) pela transferência de parte da energia mecânica do movimento para modos superiores (Figura 49). Para um deslizamento em movimento aproximadamente harmônico simples é esperado que ambos tenham o mesmo desempenho, porém pode haver interferências mútuas com a força de atrito próxima da sua eficiência máxima.

Figura 49 – Interferência entre dois amortecedores.



Fonte: Autor.

A análise é feita utilizando amortecedores por atrito seco constante em posições opostas e simétricas, comparando seus resultados com os de um amortecedor único de mesma força de atrito.

7.4 Equação do movimento com inclusão da força de atrito seco variável

Com a utilização do método dos elementos finitos, a equação do movimento com a inclusão da força de atrito seco variável pode ser apresentada da seguinte forma:

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C_{int}]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = \{F_{exc}\} + \{x_p\}F_{at}(y_{xp}) \quad (76)$$

onde y , \dot{y} e \ddot{y} são a posição, velocidade e aceleração em função do tempo, respectivamente, x_p é a posição do amortecedor em relação ao engaste do cabo no tabuleiro, y_{xp} é o deslocamento na posição do amortecedor e F_{exc} é a força de excitação, a qual é um parâmetro distribuído no comprimento do cabo e no tempo.

A força de excitação (F_{exc}) é aplicada em uma direção perpendicular ao cabo em todos os seus nós, nos graus de liberdade transversais, com uma duração finita, sendo que no instante em que for retirada haverá o decaimento da amplitude do movimento. O modelo para esta força foi proposto por Weber, Hogsberg e Krenk (2010) e adaptado aqui como:

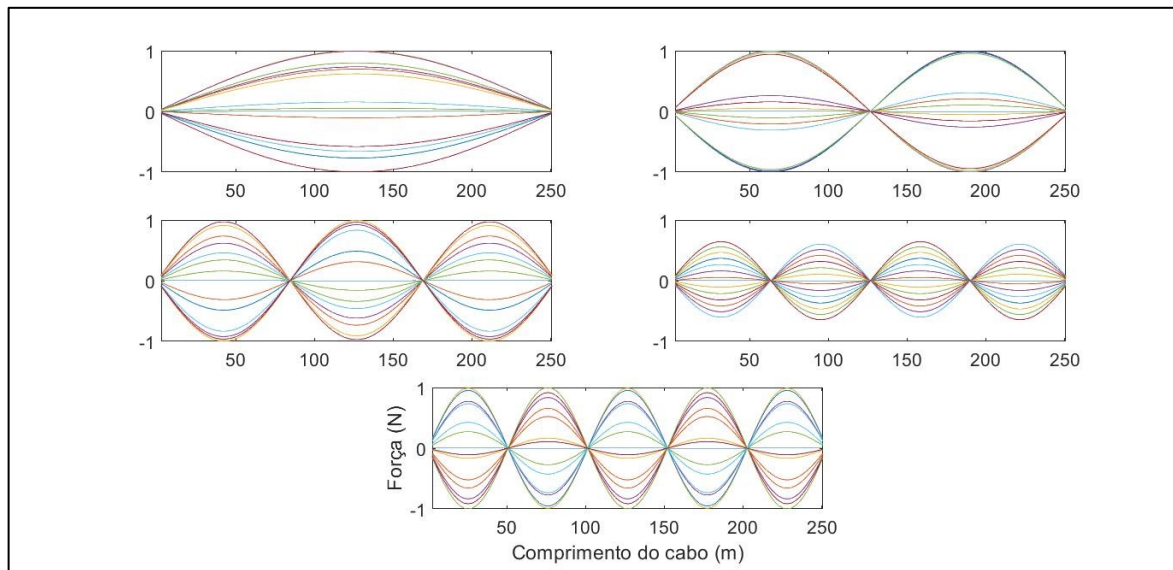
$$F_{exc}(t, x) = \begin{cases} A_v \text{sen}(j\pi x / l) \text{sen}(j\omega t) & \text{para } t < t_{off} \\ 0 & \text{para } t \geq t_{off} \end{cases} \quad (77)$$

sendo t_{off} o tempo de retirada da F_{exc} arbitrado como 10 vezes o período da frequência fundamental. A representação do modo de vibrar é dada pelo coeficiente j , que reproduz o primeiro modo de vibrar quando assume o valor unitário e podendo ser estendido para representar modos superiores. Na Figura 50 são mostrados os formatos das forças de excitação ao longo do comprimento do cabo nos cinco primeiros modos de vibrar em estágios de tempo variados, onde é possível perceber a similaridade com os modos de vibração a serem produzidos. O coeficiente A_v não consta no modelo original, porém aqui é usado para ajustar a amplitude de deslocamento para valores mais próximos da realidade, seguindo as recomendações do Post-Tensioning Institute (2007), mantendo as vibrações próximas de um diâmetro de deslocamento. Para que este ajuste tenha relação com a realidade é utilizada a Eq. (78) para a força do vento aplicada no cabo (CAETANO, 2007).

$$A_v = \frac{\rho V^2 D C_a}{2} \quad (78)$$

onde C_a é o coeficiente de arrasto do cabo, que para situações de vento extremas pode ser considerado 0,7.

Figura 50 – Forma da força de excitação para vários modos de vibração.



Fonte: Autor.

7.5 Procedimentos numéricos

Nos problemas reais de engenharia as soluções analíticas são restritas a situações muito simples, necessitando de simplificações de modelos para poderem ser aplicadas a casos mais complexos. Porém, com o desenvolvimento de microcomputadores, os métodos de resolução aproximada de equações diferenciais ordinárias foram progressivamente popularizados, implicando no desenvolvimento de métodos novos e no aperfeiçoamento dos já existentes.

O método de Newmark foi desenvolvido em 1959 pelo engenheiro Nathan M. Newmark, sua utilização é amplamente utilizada desde então pela sua simplicidade de implementação, estabilidade incondicional (para aceleração constante) e por não introduzir amortecimento numérico aos resultados. Já o método de Newton-Raphson, desenvolvido em 1685, tem extensa utilização na busca de raízes de equações, com funcionamento semelhante à série de Taylor.

Por fim, o método de otimização pelo segmento áureo foi escolhido pela facilidade de aplicação em casos simples de otimização unidimensional com um custo computacional relativamente baixo.

7.5.1 Método de Newmark

Sistemas dinâmicos nos quais o atrito seco está inserido têm como desafio a estabilidade dos processos numéricos devido à aplicação da função sinal definida na Eq. (70), que é a representação matemática da descontinuidade física da força de atrito nas mudanças de direção da velocidade. Com o objetivo de evitar este problema é utilizado o método de Newmark, que apresenta estabilidade incondicional utilizando a média das acelerações em cada passo. Existem diversas variações deste método, porém possuem estabilidade dependente do tamanho do passo incremental de integração (Δt).

A fórmula geral do método de Newmark é definida como (CHOPRA, 2007):

$$y_{t+1} = y_t + \dot{y}_t \Delta t + [\ddot{y}_t(0,5 - \beta) + \ddot{y}_{t+1}\beta] \Delta t^2 \quad (79)$$

$$\dot{y}_{t+1} = \dot{y}_t + \ddot{y}_t(1 - \gamma) \Delta t + \ddot{y}_{t+1}\gamma \Delta t \quad (80)$$

sendo $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$ para a aceleração constante.

A formulação das equações para a posição, velocidade e aceleração são oriundas da física básica, sendo:

$$y_{t+1} = y_t + \Delta y \quad (81)$$

$$\Delta y = \dot{y}_m \Delta t \quad (82)$$

onde \dot{y}_m é a velocidade média e Δy é o deslocamento. Portanto:

$$\dot{y}_m = \frac{\dot{y}_t + \dot{y}_{t+1}}{2} \quad (83)$$

$$\dot{y}_{t+1} = \dot{y}_t + \ddot{y}_m \Delta t \quad (84)$$

sendo \ddot{y}_m a aceleração média. Aplicando a Eq. (84) na (83), tem-se:

$$\dot{y}_m = \dot{y}_t + \frac{\ddot{y}_m \Delta t}{2} \quad (85)$$

Por fim, substituindo a velocidade média definida na Eq. (85) na Eq. (82) e aplicando na Eq. (81), chega-se a expressão da posição no passo $t + 1$ em função da posição, velocidade e aceleração média do passo anterior (Eq. (87)).

$$\Delta y = \dot{y}_m \Delta t = \dot{y}_t \Delta t + \frac{\ddot{y}_m \Delta t^2}{2} \quad (86)$$

$$y_{t+1} = y_t + \dot{y}_t \Delta t + \frac{\ddot{y}_m \Delta t^2}{2} \quad (87)$$

A partir do mesmo raciocínio, pode-se obter a velocidade e a aceleração no passo $t + 1$. Reorganizando a Eq. (85) e substituindo na Eq. (84) a velocidade é obtida (Eq. (89)).

$$\ddot{y}_m \Delta t = 2 \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} - \dot{y}_t \right) \quad (88)$$

$$\dot{y}_{t+1} = \frac{2\Delta y}{\Delta t} - \dot{y}_t \quad (89)$$

Substituindo a aceleração média definida na Eq. (90) na Eq. (88), encontra-se a aceleração (Eq. (91)).

$$\ddot{y}_m = \frac{\ddot{y}_t + \ddot{y}_{t+1}}{2} \quad (90)$$

$$\ddot{y}_{t+1} = \frac{4\Delta y}{\Delta t^2} - \frac{4\dot{y}_t}{\Delta t} - \ddot{y}_t \quad (91)$$

Utilizando a posição definida pela Eq. (81), a velocidade pela Eq. (89) e a aceleração pela Eq. (91), pode-se organizar estas expressões com seus respectivos coeficientes:

$$\dot{y}_{t+1} = q_0 \Delta y - q_1 \dot{y}_t \quad (92)$$

$$\ddot{y}_{t+1} = q_2 \Delta y - q_3 \dot{y}_t - q_4 \ddot{y}_t \quad (93)$$

Os coeficientes q_0 , q_1 , q_2 , q_3 e q_4 representam os valores constantes que acompanham as variáveis, sendo para o caso da aceleração média definidos como segue:

$$q_0 = \frac{2}{\Delta t} \quad (94)$$

$$q_1 = 1 \quad (95)$$

$$q_2 = \frac{4}{\Delta t^2} \quad (96)$$

$$q_3 = \frac{4}{\Delta t} \quad (97)$$

$$q_4 = 1 \quad (98)$$

Substituindo as Eqs. (81), (92) e (93) na equação do movimento definida na Eq. (76) no passo $t + 1$, chega-se à expressão:

$$\begin{aligned} [M](q_2 \{\Delta y\} - q_3 \{\dot{y}_t\} - q_4 \{\ddot{y}_t\}) + [C_{int}](q_0 \{\Delta y\} - q_1 \{\dot{y}_t\}) + [K](\{y_t\} + \Delta y) \\ = \{F_{exc,t+1}\} - \{x_p\} F_{at,t+1} \end{aligned} \quad (99)$$

Isolando a variável $\{\Delta y\}$ e substituindo os coeficientes, tem-se:

$$[\widehat{K}]\{\Delta y\} = \left(\frac{4}{\Delta t^2} [M] + \frac{2}{\Delta t} [C_{int}] + [K] \right) \{\Delta y\} \quad (100)$$

onde o parâmetro \widehat{K} pode ser considerado como uma pseudorrigidez.

O restante da equação, sem a variável Δy é escrito como:

$$\begin{aligned} \{\hat{p}_{t+1}\} = \{F_{exc,t+1}\} - \{x_p\}F_{at,t+1} + \left(\frac{4}{\Delta t} [M] + [C_{int}] \right) \{\dot{y}_t\} + [M]\{\ddot{y}_t\} \\ - [K]\{y_t\} \end{aligned} \quad (101)$$

sendo o parâmetro \hat{p}_{t+1} considerado a força pseudoestática do sistema no passo incremental de tempo $t + 1$.

Portanto, encontra-se o deslocamento da posição inicial para a posição final (Δy), através da Eq. (102):

$$\{\Delta y\} = [\widehat{K}]^{-1}\{\hat{p}_{t+1}\} \quad (102)$$

A partir dos resultados obtidos, a velocidade e a aceleração também podem ser encontradas. Basta, portanto, que se tenha os valores iniciais da velocidade e da posição para que o processo recursivo aconteça. A aceleração inicial pode ser obtida sendo isolada na Eq. (76).

É importante ressaltar que a força de atrito (F_{at}) é dependente do sinal da velocidade no passo $t + 1$, porém é utilizado seu sinal referente ao passo t , já que não se conhece o valor da velocidade em $t + 1$, levando a um erro no momento das inversões da direção da velocidade. Este problema pode ser reduzido com a diminuição do tamanho do incremento de tempo (Δt).

Outra consideração a ser feita é acerca da dificuldade em manter a convergência de resultados em amplitudes pequenas devida à rigidez numérica que a função sinal provoca no sistema de equações, tendo em vista que pequenas alterações no processo numérico geram flutuações irregulares no resultado. Portanto, os resultados apresentados neste trabalho devem ser considerados satisfatórios para o entendimento do comportamento do mecanismo proposto

e sua análise de viabilidade de implantação. Para resultados rigorosamente acurados, sugere-se um estudo de redução de modelo.

7.5.1.1 Adaptação para variação linearmente proporcional ao deslocamento

Quando $F_{at,t+1}$ é substituído por $F_{at,t+1}\{y_t + \Delta y\}$ na Eq. (99), sua participação passa a ser inserida na parcela $[\widehat{K}]$ da Eq. (102). Assim sendo, a Eq. (100) passa a ser:

$$[\widehat{K}]\{\Delta y\} = \left(\frac{4}{\Delta t^2} [M] + \frac{2}{\Delta t} [C_{int}] + [K] + [x_p]F_{at,t+1} \right) \{\Delta y\} \quad (103)$$

como a parcela da força de atrito, que antes era constante, passou a multiplicar o vetor $\{y_t + \Delta y\}$, faz-se necessária a alteração das dimensões do vetor de posicionamento da mesma. Portanto, $\{x_p\}$ se torna uma matriz quadrada com a posição do amortecedor definida em $x_{p,ij}$, com valor unitário na posição determinada $i = j$, aqui representando os índices matriciais.

$$[x_p] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (104)$$

É mostrado na Eq. (104) a matriz posição para o segundo grau de liberdade, ou seja, na posição $i = j = 2$.

7.5.1.2 Adaptação para variações quadráticas e cúbicas

É interessante investigar se há um viés de eficiência no amortecimento com o aumento progressivo na potência de variação da força de atrito em função do deslocamento. Na elevação do grau dessas variações, o uso do método de Newmark precisa ser complementado por outro método numérico que possibilite encontrar os valores do deslocamento. Esta necessidade se dá ao alterar novamente a Eq. (99), que repercute em uma nova parcela na Eq. (102). Manipulando esta última como segue:

$$[x_p]F_{at,t+1}\{y_{t+1}^n\} + [\hat{K}]\{y_{t+1}\} = \{\hat{p}_{t+1}\} \quad (105)$$

com n variando de 2 a 3, neste caso. Tanto na variação que depende linearmente do deslocamento, como nas variações de potências maiores, a parcela \hat{p}_{t+1} sofre alterações, não constando nela a força de atrito (Eq. (106)).

$$\begin{aligned} \{\hat{p}_{t+1}\} = & \{F_{exc,t+1}\} + \left(\frac{4}{\Delta t} [M] + [C_{int}]\right) \{\dot{y}_t\} + [M]\{\ddot{y}_t\} \\ & + \left(\frac{4[M]}{\Delta t^2} + \frac{2[C_{int}]}{\Delta t}\right) \{y_t\} \end{aligned} \quad (106)$$

Deste modo, para encontrar as raízes da Eq. (105) é utilizado o método de Newton-Raphson.

7.5.2 Método de Newton-Raphson

O desenvolvimento deste método segue o mesmo entendimento da série de Taylor, porém com truncamento na primeira derivada. Considerando z_x uma variável qualquer e z_0 um valor conhecido, pode-se escrever:

$$f(z_x) = f(z_0) + f'(z_0)(z_x - z_0) \quad (107)$$

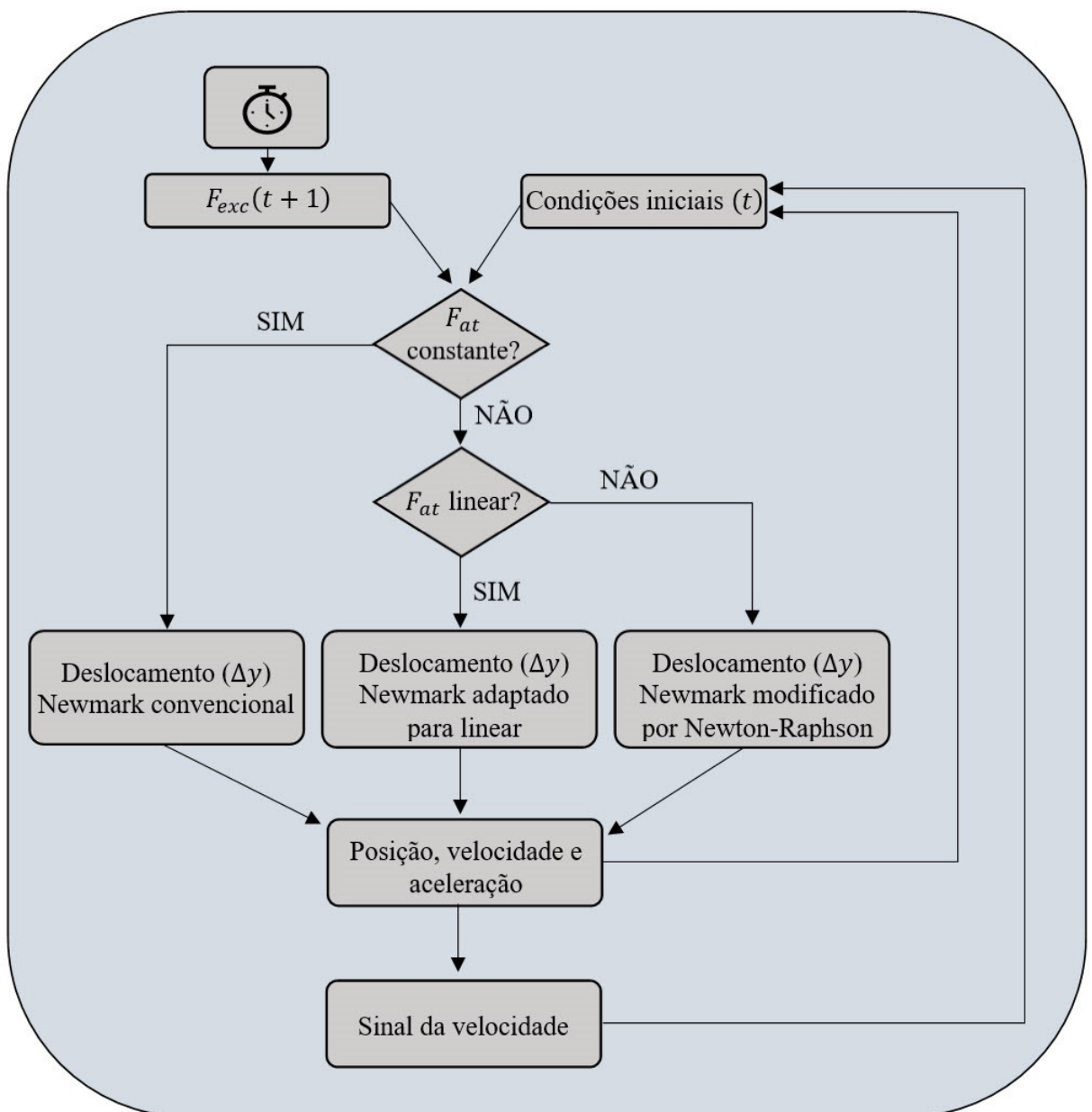
com f e f' representando a função e sua derivada, respectivamente.

Para que seja possível resolver a Eq. (107) é necessário que $f(z_x)$, $f(z_0)$, $f'(z_0)$ e z_0 sejam conhecidos. Reescrevendo-a, tem-se:

$$z_x = \frac{f(z) - f(z_0)}{f'(z_0)} + z_0 \quad (108)$$

A cada iteração a Eq. (108) produz um resultado mais acurado, sendo mantido o processo recursivo em função da tolerância escolhida para o erro. Outro critério de parada pode ser obtido através do número máximo de iterações admitidas, observando a convergência necessária para a confiabilidade dos resultados. O fluxograma do processo recursivo é mostrado na Figura 51.

Figura 51 – Fluxograma do método de Newmark com adaptações por Newton-Raphson.



Fonte: Autor.

7.5.3 Otimização pelo segmento áureo

A proporção áurea, comumente representada pela letra grega φ (*phi*), é a raiz positiva da Eq. (109).

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \quad (109)$$

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1,618034 \quad (110)$$

Apesar de ter utilidade multidisciplinar, ela pode ser aplicada para encontrar o mínimo de uma função unidimensional. Para isso, determina-se um intervalo que contenha o valor mínimo buscado Eq. (111).

$$intervalo = x_{FINAL} - x_{INICIAL} \quad (111)$$

Em seguida, são definidos dois pontos dentro deste intervalo Eqs. (112) e (113).

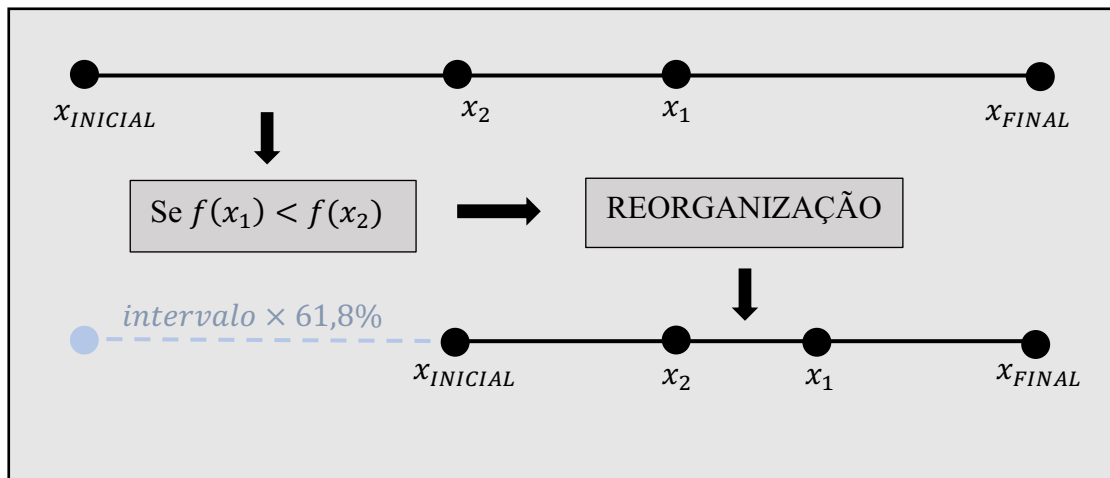
$$x_1 = x_{INICIAL} + d \quad (112)$$

$$x_2 = x_{FINAL} - d \quad (113)$$

$$d = intervalo(\varphi - 1) \quad (114)$$

Com o processo recursivo, calcula-se $f(x_1)$ e $f(x_2)$. Se $f(x_1) < f(x_2)$, então x_2 passa a ser o novo $x_{INICIAL}$. Caso contrário, o x_1 passa a ser o x_{FINAL} . O processo é exemplificado na Figura 52.

Figura 52 - Otimização pela proporção áurea



Fonte: Autor

Pela característica intrínseca ao segmento áureo, há uma redução aproximada de 61,8% do intervalo de a cada iteração (BRASIL; BALTHAZAR; GÓIS, 2015). Para manter o erro arbitrado abaixo de 0,5% são necessárias 12 iterações para cada otimização, resultando em um tamanho final do intervalo de $(61,8\%)^{12} \cong 0,31\%$ do tamanho original, sendo este, o erro máximo considerado neste processo.

8 Resultados

8.1 Organização sequencial

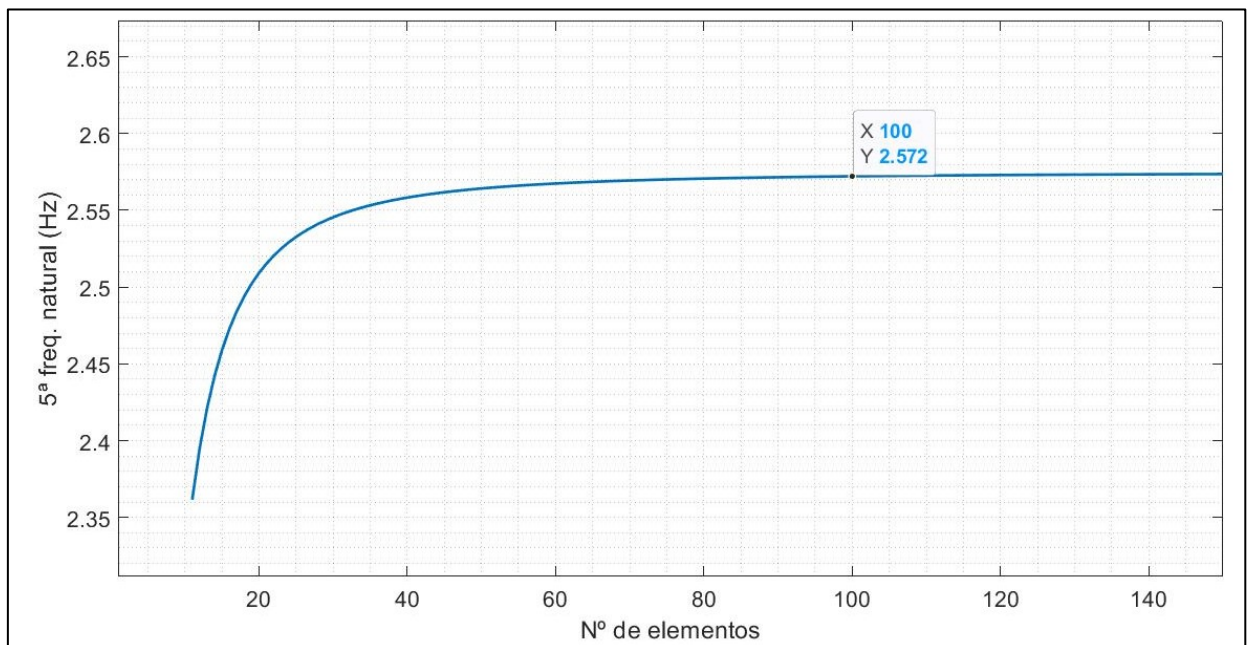
Primeiramente o modelo do cabo foi analisado através da análise da convergência da malha (seção 8.2) e sua verificação com a teoria analítica (seção 8.3). Depois disso, foi realizada a análise modal onde as frequências naturais e os modos de vibração livre foram obtidos (seção 8.4) para que, então, o amortecimento interno (por Rayleigh) pudesse ser contabilizado (seção 8.5).

Na seção 8.6 foi realizada a variação dos parâmetros força de atrito e posição, onde a subseção 8.6.1 foi desenvolvida para balizar os demais estudos e, por fim, foram realizados estudos acerca da interferência do atrito seco no uso de dois amortecedores (seção 8.7).

8.2 Análise da convergência da malha

No presente trabalho, foi realizada a análise da convergência da malha (Figura 53) para o valor da quinta frequência natural, que é a maior frequência aqui estudada. A partir do número de cem elementos, a estrutura apresentou baixa variação na frequência para um aumento considerável de custo computacional. Portanto, esta é a malha adotada para o estudo tendo em vista não somente a convergência, mas também o alto custo computacional na implementação do modelo para malhas superiores à adotada.

Figura 53 - Análise da convergência da malha.



Fonte: Autor.

Na configuração em cem elementos o modelo possui 202 graus de liberdade, sendo 4 restritos, correspondentes aos apoios. Os números dos graus de liberdade do amortecedor em 1%L, 3%L e 5%L são 2, 6 e 10, respectivamente. Além disso, a escolha de cem elementos facilita a variação da posição do amortecedor sem requerer um refinamento de malha local, tendo em vista que essas variações acontecem em unidades percentuais.

8.3 Verificação do modelo em elementos finitos

Os resultados obtidos pelo método analítico da teoria das cordas vibrantes foram comparados aos resultados advindos do método dos elementos finitos (Tabela 4).

Tabela 4 - Comparação dos resultados da teoria das cordas vibrantes com MEF.

	MEF (Hz)	CORDAS VIBRANTES (Hz)	Erro (%)
f_1	0,5149	0,5149	0,004
f_2	1,0297	1,0299	0,016
f_3	1,5443	1,5449	0,037
f_4	2,0585	2,0598	0,065
f_5	2,5721	2,5748	0,102

Fonte: Autor.

Pode-se observar que o erro máximo é visto na terceira casa decimal da quinta frequência natural com uma taxa de erro de aproximadamente 0,1%, significando uma aproximação satisfatória do modelo discretizado com o modelo analítico para as vibrações livres. Esta taxa de erro foi escolhida a fim de reduzir a propagação de erros dos métodos de integração numérica aplicados nas seções 8.6 e 8.7. Na Tabela 5 é mostrado que o erro máximo admitido é encontrado com a discretização a partir de cem elementos.

Tabela 5 – Erro em diversos números de elementos.

Número de elementos	Erro comparado à teoria das cordas vibrantes na 5ª frequência natural (%)
25	1,636
50	0,410
75	0,182
100	0,102
125	0,065
150	0,045

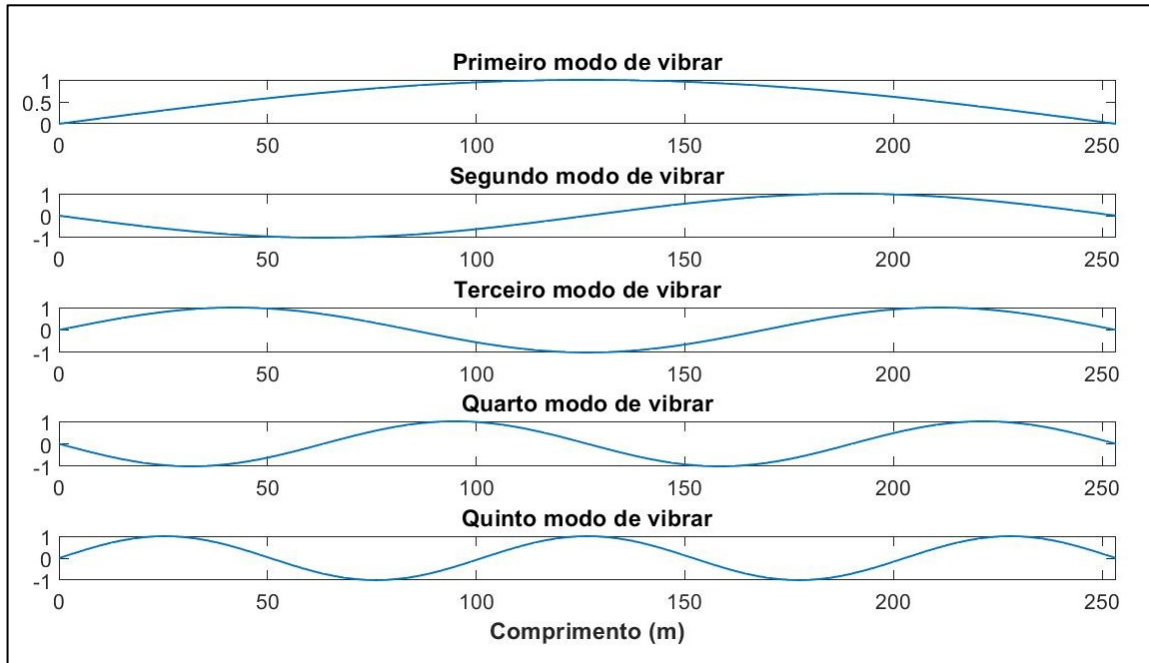
Fonte: Autor.

8.4 Análise modal

Para as cinco primeiras frequências naturais já mencionadas na Tabela 4, foram encontrados seus respectivos modos de vibrar (Figura 54). Nota-se que para os modos ímpares de vibração

(1°, 3° e 5°) a estrutura apresenta uma configuração simétrica de deslocamentos, já nos modos pares (2° e 4°), é observado um comportamento assimétrico de vibração.

Figura 54 - Análise modal.



Fonte: Autor.

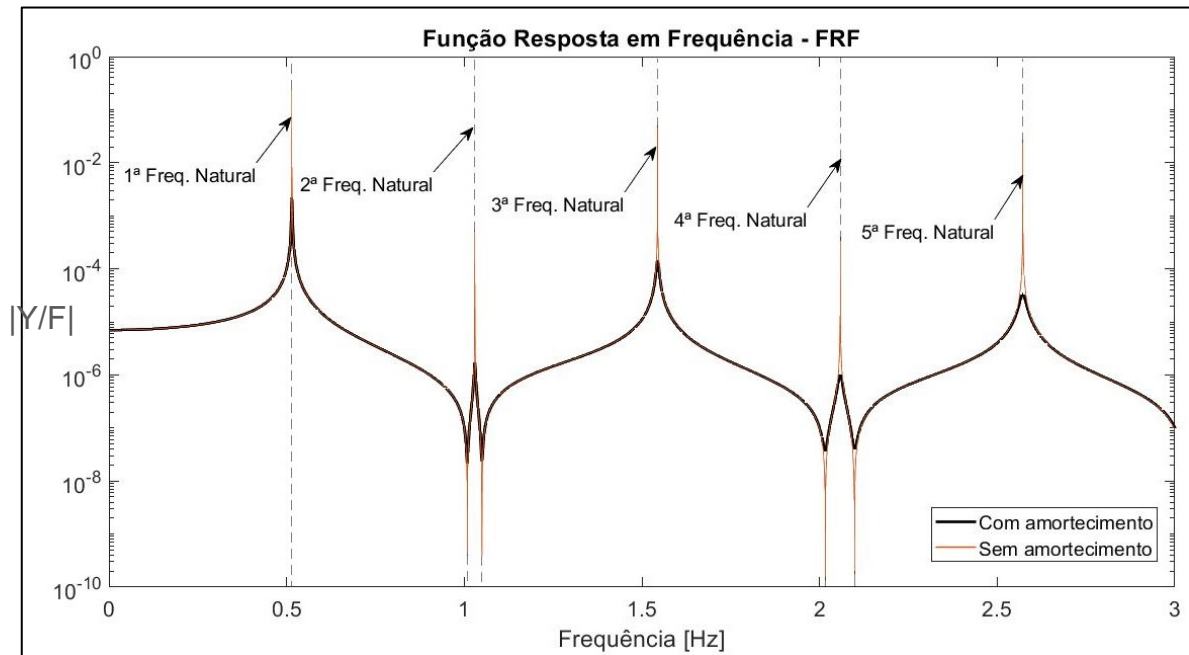
8.5 Função de resposta em frequência

Nesta seção será avaliado o efeito do amortecimento interno do cabo, bem como sua eficiência máxima para as cinco primeiras frequências de ressonância vistas na seção anterior. Os resultados da análise foram obtidos na região central do cabo, no grau de liberdade número 100, o que pode ser notado pela amplitude máxima em modos ímpares e mínima em modos pares, tendo em vista que são antissimétricos, apresentando um nó de vibração na região central do cabo.

Quanto maior for a discretização do domínio da frequência, maior será a resolução obtida na imagem da função. Como as frequências naturais obtidas têm muitas casas decimais, a representação da tendência ao infinito dada por uma assíntota vertical exigiria um custo computacional consideravelmente alto. Observando isto, foi utilizada uma resolução de frequência na ordem da sexta casa decimal, de modo que fique explícita a discrepância entre os valores amortecidos internamente (por Rayleigh) e não amortecidos com um baixo custo

computacional; para representar as assíntotas, foram traçadas linhas verticais tracejadas nas frequências de ressonância e antirressonância da Figura 55. A faixa de frequências analisadas varia de 0 a 3 Hz, onde estão contidas as cinco primeiras frequências naturais.

Figura 55 - Função resposta em frequência de $|Y/F|$ no grau de liberdade número 100.



Fonte: Autor.

Nota-se que as frequências naturais não foram alteradas, como esperado para o método de Rayleigh que obtém a matriz de amortecimento em função das características físicas do cabo, como a rigidez e a massa.

8.6 Variação dos parâmetros força de atrito e posição do amortecedor

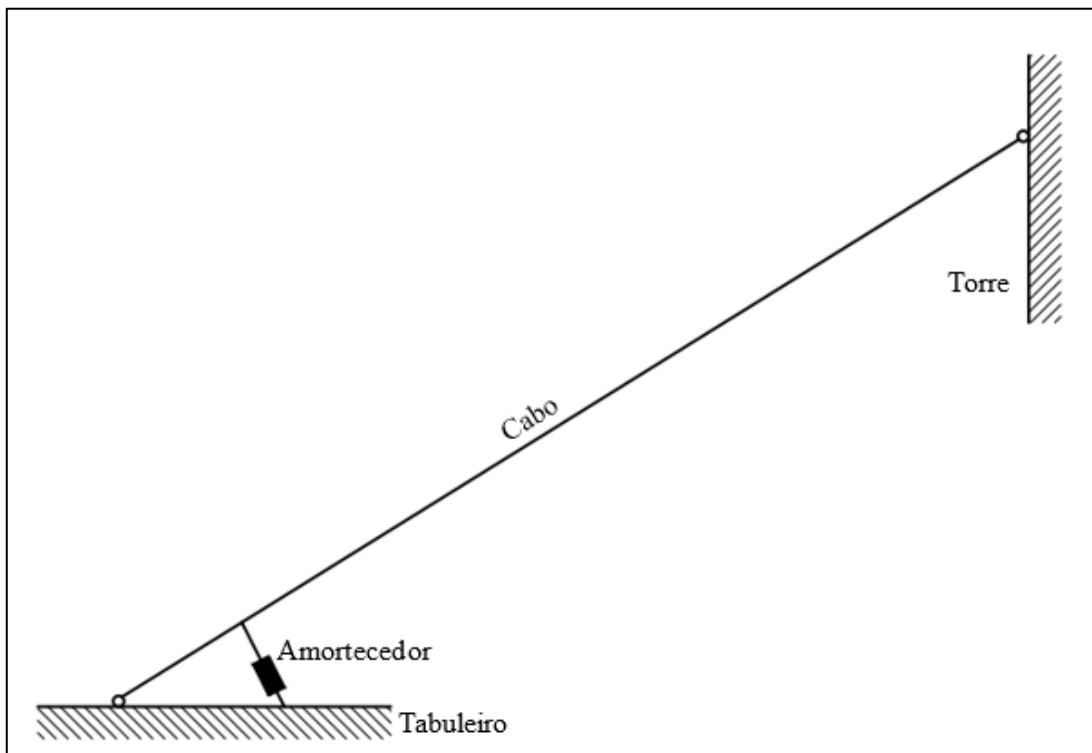
Como anteriormente discutido para o caso do atrito seco, a posição do amortecedor influencia o fator de amortecimento máximo obtido somente pela diferença de amplitudes de deslocamentos.

A fim de expor o comportamento das limitações de amplitude pela posição do amortecedor, foi realizada a simulação do comportamento dinâmico de um modelo de cabo (Figura 56) com um amortecedor em três posições diferentes, variando em 1%, 3% e 5% do comprimento total

do cabo; os valores são dispostos desta maneira a fim de otimizar o custo computacional, que pode ser demasiadamente elevado conforme a participação do atrito seco no sistema de EDOs (equações diferenciais ordinárias) se torna mais relevante.

A excitação utilizada para este estudo está indicada na Eq. (77), onde a velocidade do vento escolhida foi de aproximadamente 14 m/s, tendo em vista que está na faixa de velocidades críticas para o fenômeno de vento e chuva associados, o qual é comumente observado como parâmetro crítico de projeto (seção 2.1.2).

Figura 56 - Arranjo esquemático de um amortecedor simples.



Fonte: Autor.

8.6.1 Atrito seco constante

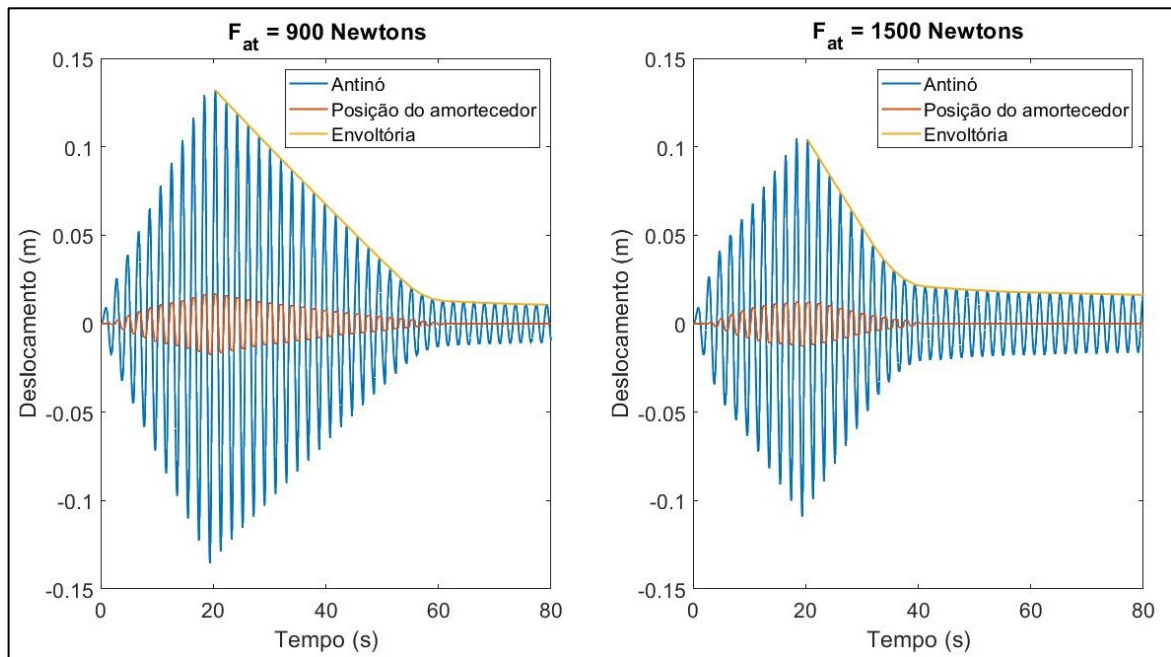
Esta análise tem o objetivo de estabelecer valores de referência para comparação, entretanto, em um contexto geral, a aplicação de um amortecedor por atrito seco constante somente poderia ter sua eficiência comparada de forma justa com suas variações se ele fosse regulado para cada excitação, o que também caracterizaria um sistema de controle semiativo. Os resultados são referentes ao primeiro modo de vibração, apenas ao final desta seção serão mostrados resultados para os modos seguintes (segundo ao quinto modo).

Analisando a Figura 57, nota-se que após um certo tempo os deslocamentos no centro do cabo permanecem quase constantes. Isso acontece porque a força de atrito supera a força resultante do movimento oscilatório na posição do amortecedor, não havendo mais, portanto, energia de dissipação. Os movimentos residuais que não são amortecidos pelo atrito seco têm seu decaimento dependente apenas do amortecimento intrínseco. As forças de atrito (F_{at}) foram arbitradas a fim de mostrar a diferença de comportamento para diferentes intensidades de amortecimento e a posição antinó representa o ponto de deslocamento máximo do cabo.

A amplitude da parcela não amortecida externamente, ou amortecida apenas intrinsecamente, varia de acordo com a força de atrito empregada, pois quanto mais rápido ela superar a resultante de movimento, mais cedo o amortecedor será travado, gerando uma porção residual com maior amplitude. As forças de atrito foram aplicadas em uma posição de 5% do comprimento total do cabo de distância da extremidade, no grau de liberdade (GDL) número 10.

Em todas as análises realizadas para o primeiro modo de vibração, os resultados medidos no centro do cabo (antinó) são obtidos no grau de liberdade transversal de número 100.

Figura 57 – Amortecimento por atrito seco constante com parcelas residuais.

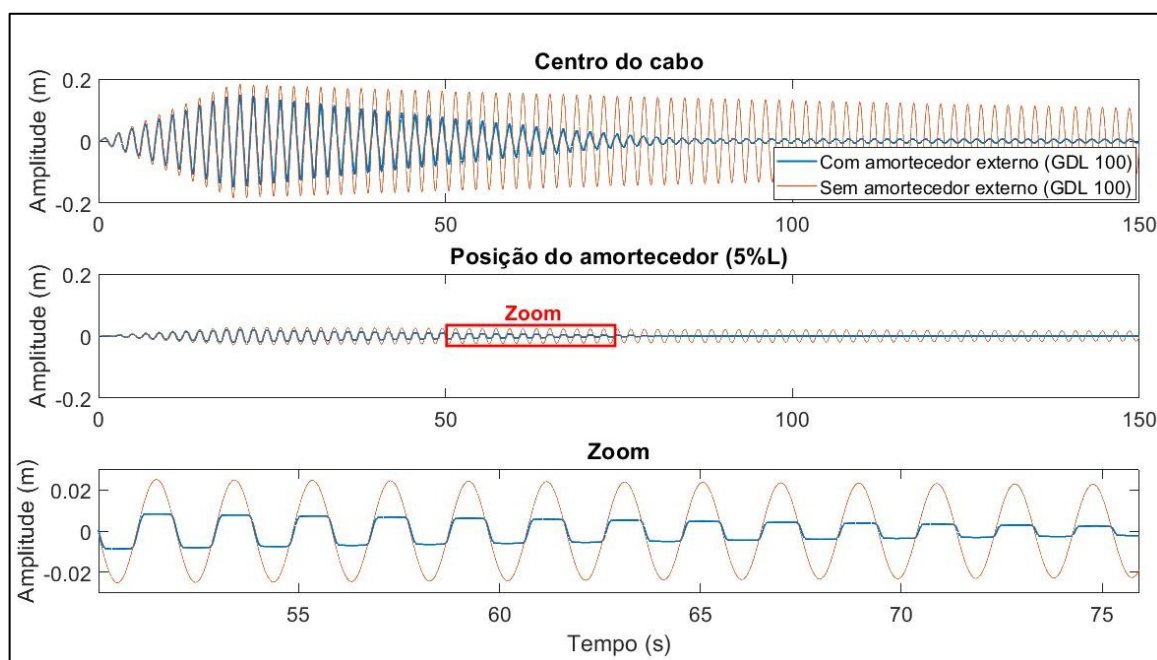


Fonte: Autor.

Comparando os efeitos das atenuações do cabo amortecido apenas internamente com o comportamento modificado pelo amortecimento externo (Figura 58), observa-se uma redução considerável de amplitude de deslocamento devida à adição do atrito seco, convertendo a envoltória de decaimento logarítmico, que é o caso típico para o amortecimento de Rayleigh, para linear.

Além disso, pelo fato de o atrito seco ter um comportamento parecido com a função tangente hiperbólica, o resultado produzido na posição do amortecedor é semelhante ao de uma onda saturada, ou seja, aproximadamente quadrada.

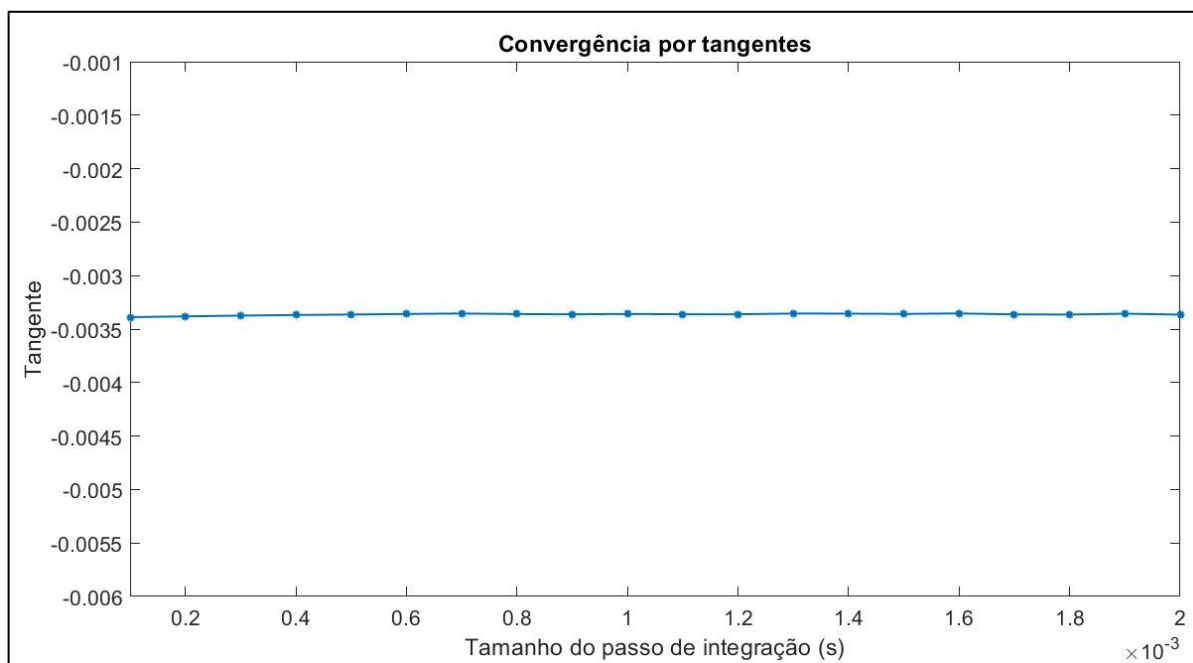
Figura 58 – Comparação da amplitude com e sem amortecimento externo.



Fonte: Autor.

O tamanho do passo incremental de integração foi escolhido com base na tangente do decaimento, indicando boa aproximação para valores abaixo de 2×10^{-3} (Figura 59).

Figura 59 – Variação das tangentes em função do passo de integração.



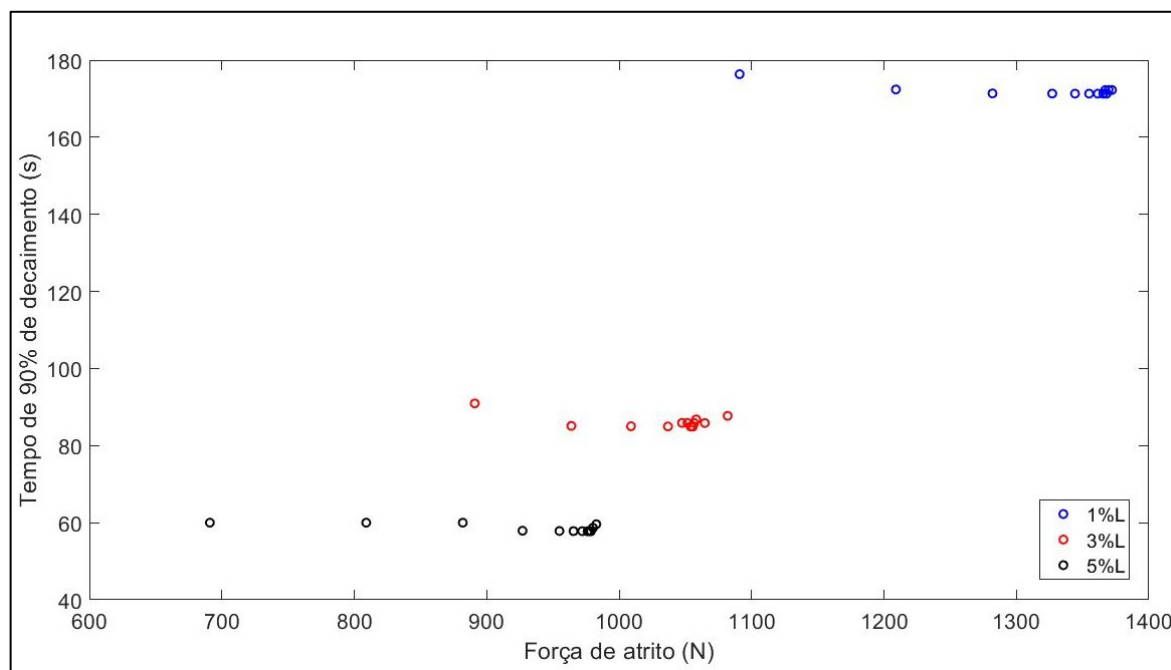
Fonte: Autor.

Objetivando ter uma comparação da eficiência máxima alcançada pelas aplicações do atrito seco e suas variações, faz-se necessário encontrar regiões ótimas dos seus valores onde o amortecimento alcançado seja máximo. Para isso, foi feita a otimização da força de atrito para o tempo mínimo de 90% de decaimento da amplitude (WEBER; HOGSBERG; KRENK, 2010), esta amplitude é usada como referência para as variações aplicadas ao atrito seco. Este critério limita a amplitude residual do modelo a 10% do valor máximo do deslocamento.

É mostrado na Figura 60 que, dentre as posições analisadas, a eficiência máxima se encontra mais próxima do centro do cabo, em 5% do seu comprimento, com uma força de atrito de aproximadamente 978,7 Newtons, como esperado. Apesar do resultado, ressalta-se que um decaimento mais acentuado pode ser encontrado com o aumento da força de atrito, porém a região de ineficiência começa a ficar mais participativa.

Os resultados devem ser considerados em termos de região ótima observando a possibilidade de pequenos desvios pelo critério adotado.

Figura 60 - Otimização da força de atrito seco constante.



Fonte: Autor.

Os valores de amplitude utilizados como referência e alguns dados obtidos das simulações estão na Tabela 6.

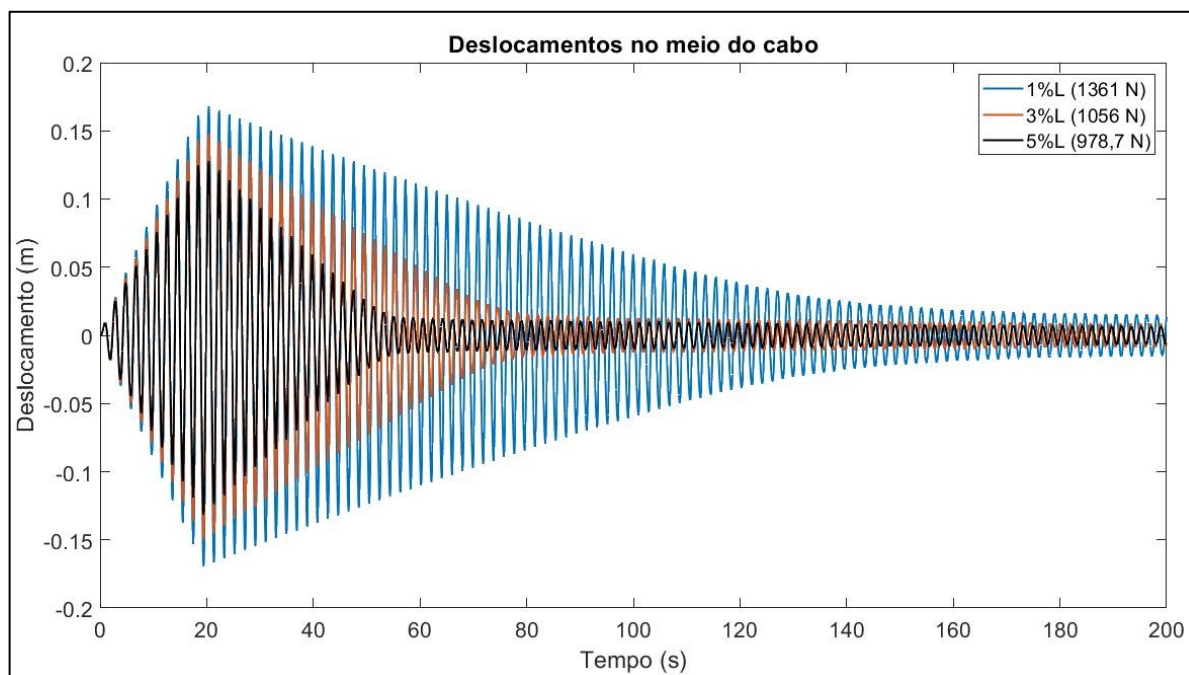
Tabela 6 – Dados do atrito seco constante.

Posição do amortecedor	Força de atrito (N)	Amplitude máxima (L/2) (m)	Tempo de decaimento (s)	Tempo de decaimento Normalizado na posição 0,01 × L (s)
1%L	1361,0	0,169	176,1	1,00
3%L	1056,0	0,150	84,9	0,48
5%L	978,7	0,131	57,8	0,33

Fonte: Autor.

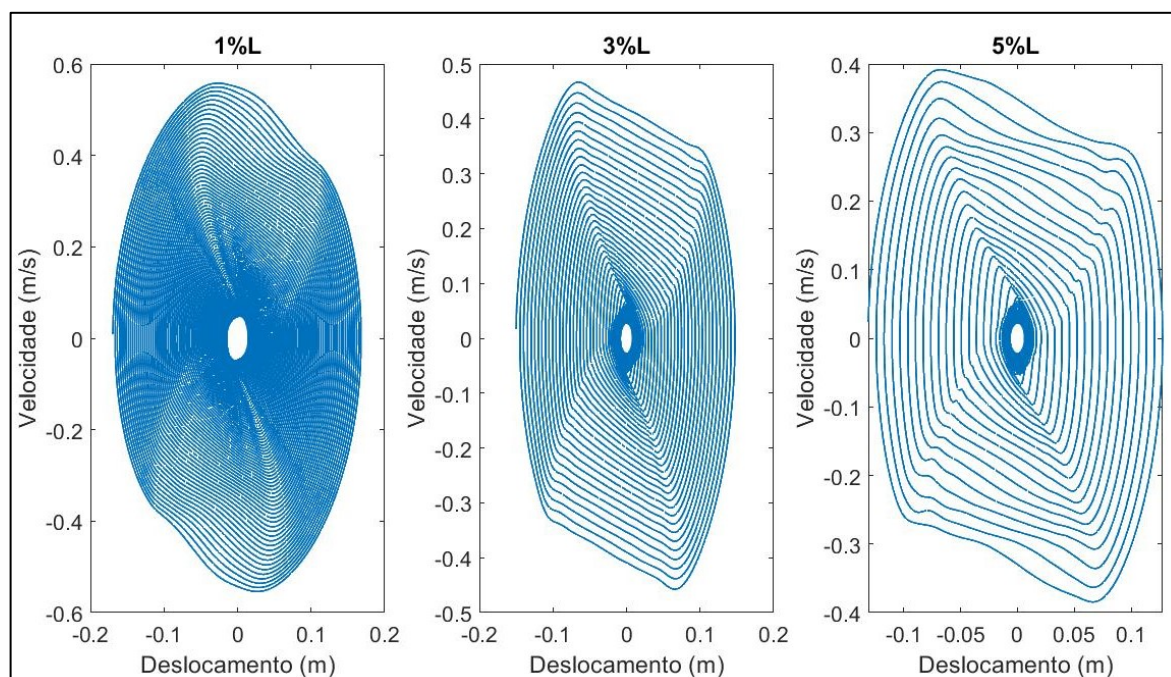
Observando os resultados das regiões ótimas em mesma escala, é possível perceber o ganho considerável no posicionamento do amortecedor mais próximo ao centro do cabo (Figura 61).

Figura 61 – Comparação entre as posições do amortecedor.



Fonte: Autor.

Figura 62 – Fase velocidade-deslocamento.

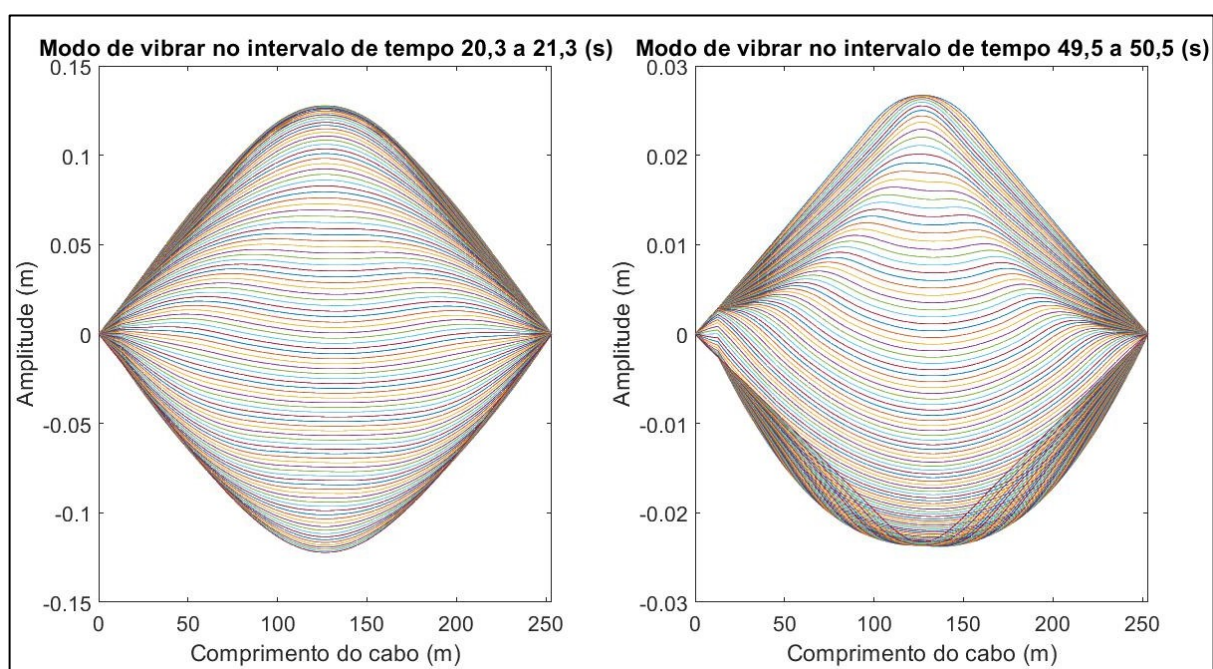


Fonte: Autor.

No plano de fase velocidade-deslocamento (Figura 62) são observadas ondulações na velocidade que aumentam conforme a posição do amortecedor fica mais afastada da extremidade. Estas ondulações são oriundas do travamento do amortecedor em sua posição, onde a energia mecânica residual do movimento, que não foi dissipada devido à parada brusca, é transmitida para o cabo em forma de ondas, resultando na alteração da forma do movimento (Figura 63). Isto fica evidenciado ao observar o comportamento da velocidade em função do tempo em ambas posições (Figura 64), onde as irregularidades da velocidade no meio do cabo iniciam quando a velocidade na posição do amortecedor é nula. Esta transferência de energia mecânica pode ser observada na FRF, obtida pela Transformada Rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform*) medida no centro longitudinal do cabo, no grau de liberdade 100, com o amortecedor em 5%L (Figura 65).

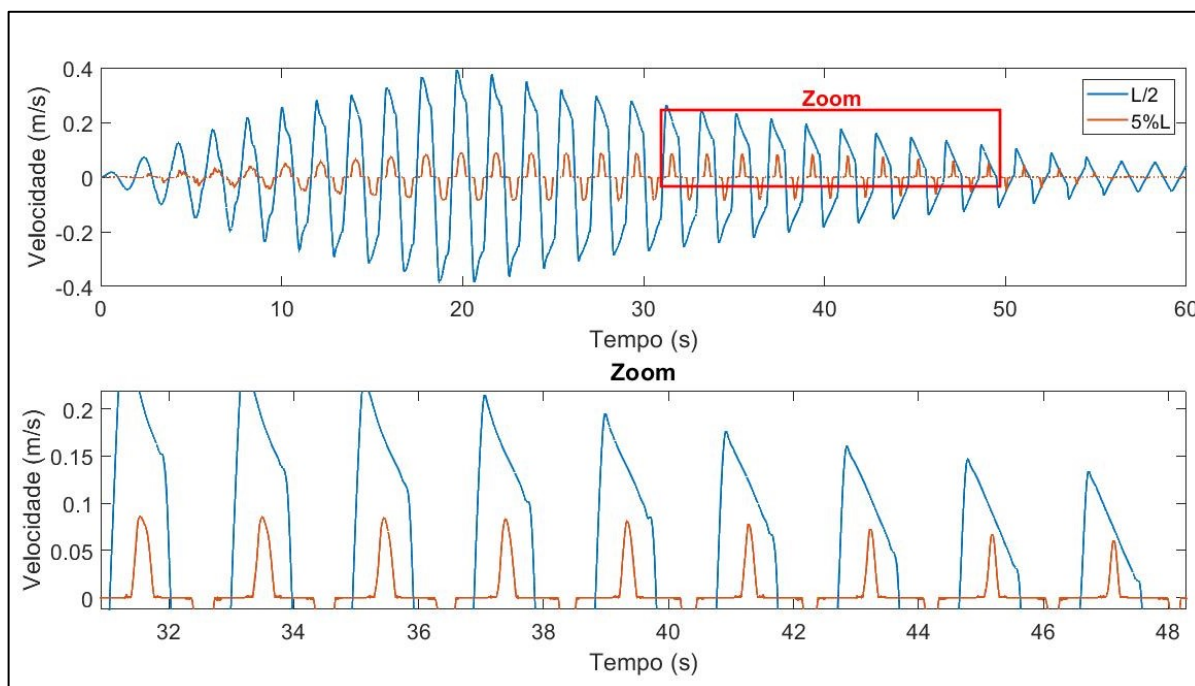
Os intervalos utilizados na Figura 63 foram escolhidos a fim de se obter a forma de vibrar no início do decaimento e no seu final, antes do amortecedor se fixar em sua posição. Assim é possível observar a participação de outras frequências no decaimento. As escolhas dos intervalos das próximas análises seguirão o mesmo raciocínio. Para evitar repetições desnecessárias, as exemplificações são mostradas com o amortecedor somente na posição 5%L.

Figura 63 – Evolução temporal do deslocamento em função do comprimento (5%L).



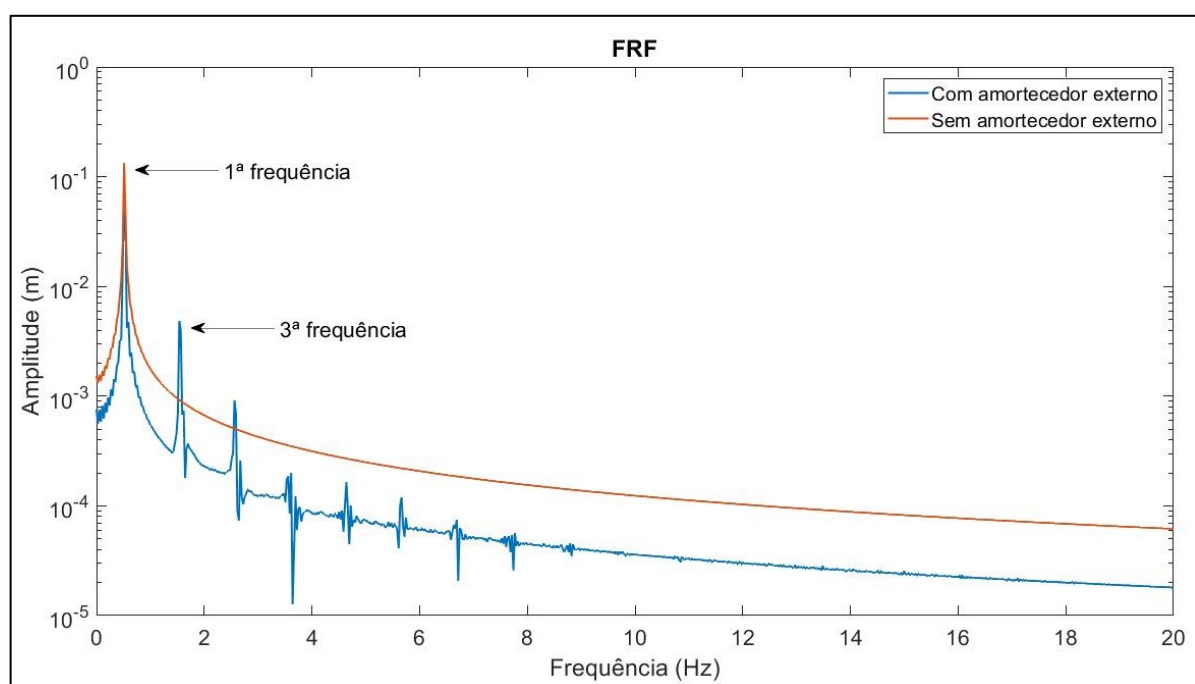
Fonte: Autor.

Figura 64 – Velocidade em função do tempo.



Fonte: Autor.

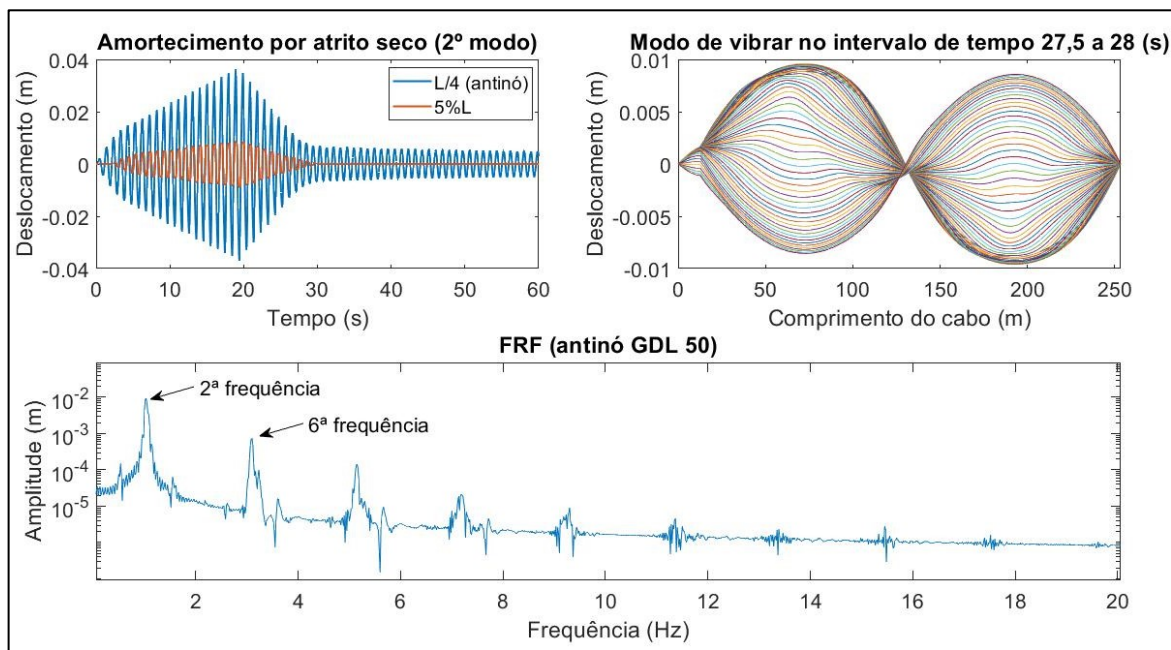
Figura 65 - FRF medida no meio do cabo (GDL 100) com amortecedor em 5%L.



Fonte: Autor.

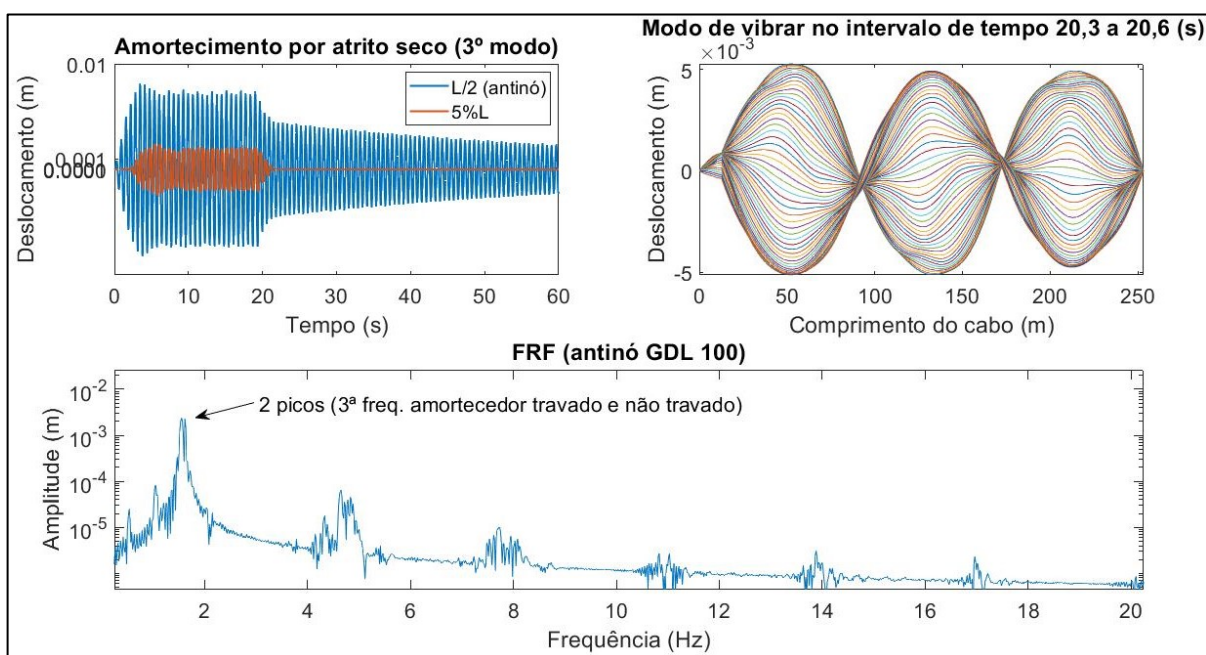
Para os modos de vibração subsequentes (do segundo ao quinto) foram obtidos resultados com a força de atrito de referência para o cabo com o amortecedor posicionado em 5%L.

Figura 66 – Conjunto de dados do segundo modo de vibrar (5%L).



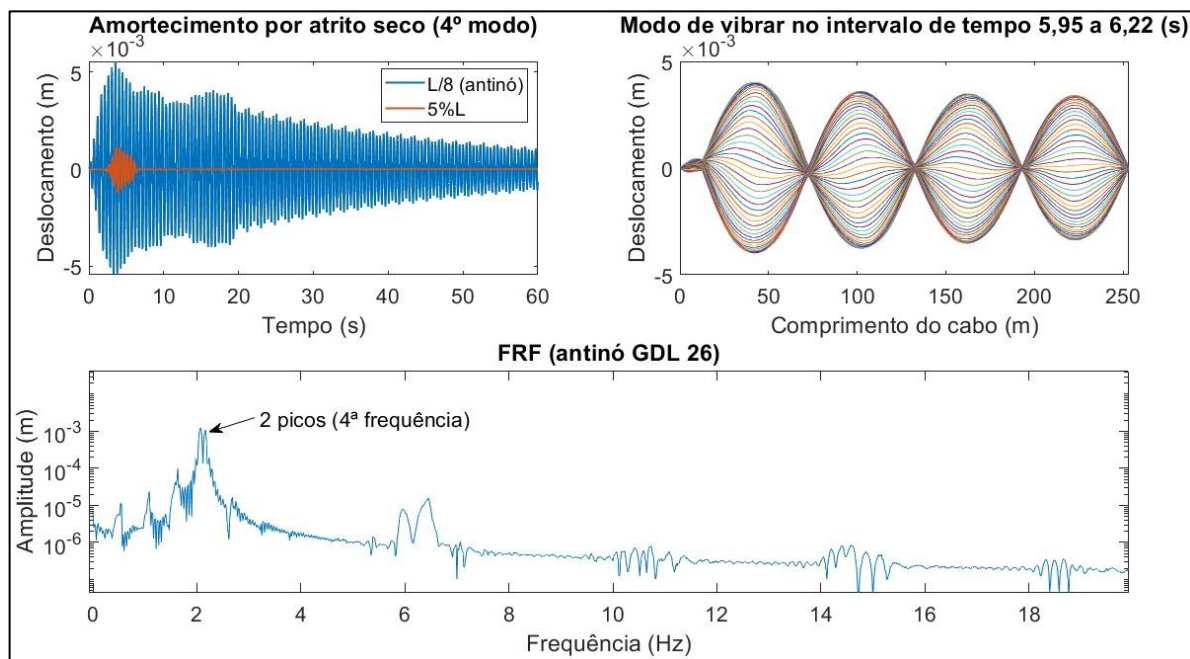
Fonte: Autor.

Figura 67 – Conjunto de dados do terceiro modo de vibrar (5%L).



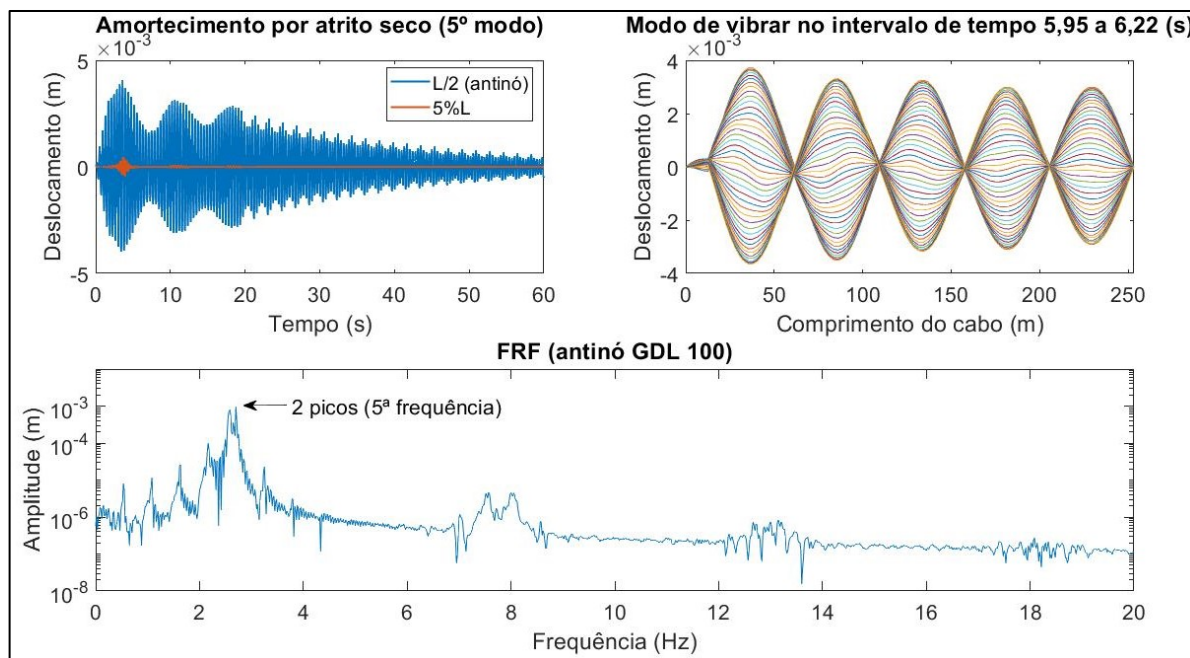
Fonte: Autor.

Figura 68 – Conjunto de dados do quarto modo de vibrar (5%L).



Fonte: Autor.

Figura 69 – Conjunto de dados do quinto modo de vibrar (5%L).



Fonte: Autor.

Através das Figuras 66 a 69 é observada a sensibilidade do amortecimento por atrito seco em função da amplitude. Para uma mesma força de atrito, quando os modos de vibrar são aumentados a amplitude da parcela residual amortecida apenas internamente também aumenta, resultando em dois picos de frequência na FRF, uma para o amortecedor em deslocamento e outra para o amortecedor fixo. Nesta última situação o amortecedor funciona como um apoio, diminuindo o comprimento do cabo a ser vibrado e, conseqüentemente, aumentando sua frequência natural.

Como o atrito seco é independente da velocidade na maior parte do seu funcionamento, pode-se estender as conclusões obtidas nas análises do primeiro modo de vibrar para os demais modos apenas alterando a amplitude de vibração através da variação do carregamento. Por este motivo apenas o primeiro modo de vibração será considerado nas análises subseqüentes.

Por fim, para um amortecedor que tenha sua ação principal devida ao atrito seco constante, nota-se que a impedância ao deslocamento se dá no limite da força resultante em sua posição, sendo um fator redutor constante para qualquer carregamento, porém não haverá amortecimento se a força de atrito ultrapassar este valor, pois o amortecedor não se deslocará. Portanto, pode-se concluir que a estabilidade de um cabo excitado em suas frequências naturais tem sua estabilidade assegurada pela presença do amortecimento interno, tendo em vista a tendência dos deslocamentos ao infinito sem a presença do mesmo.

8.6.2 Efeito da força de atrito estática

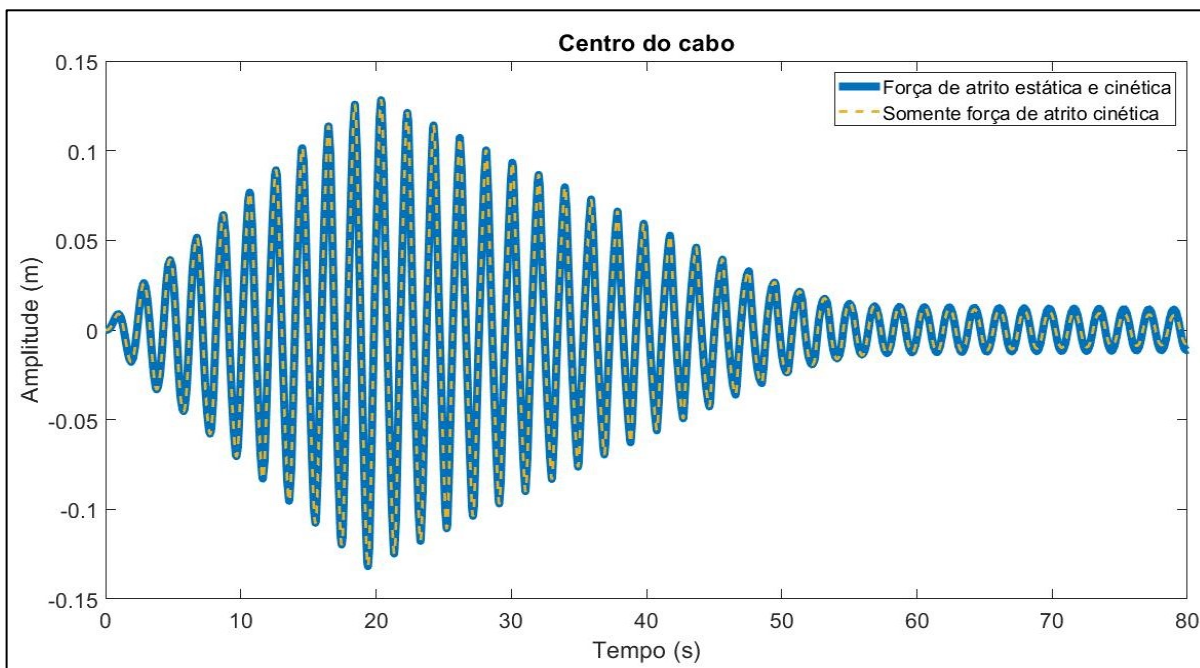
Foi visto na seção 7.3.1 a consideração da força de atrito estática para pequenas velocidades de deslizamento, o que pode gerar o efeito *stick-slip* (aderência-deslizamento). Na presente seção é realizada a comparação entre os resultados com o atrito estático e sem o mesmo (Figura 70).

As diferenças de deslocamentos no meio do cabo foram mínimas, indicando que não há necessidade da inclusão do atrito estático para a região de funcionamento principal do amortecedor. Porém, na fase semiestacionária, onde o amortecedor é fixo em sua posição, podem ser notadas diferenças sutis.

Na posição do amortecedor, colocado em 5% do comprimento do cabo afastado da extremidade, também não se nota diferenças significativas na fase principal de atuação do amortecedor, que é o decaimento (Figura 71). Entretanto, o amortecedor com força de atrito

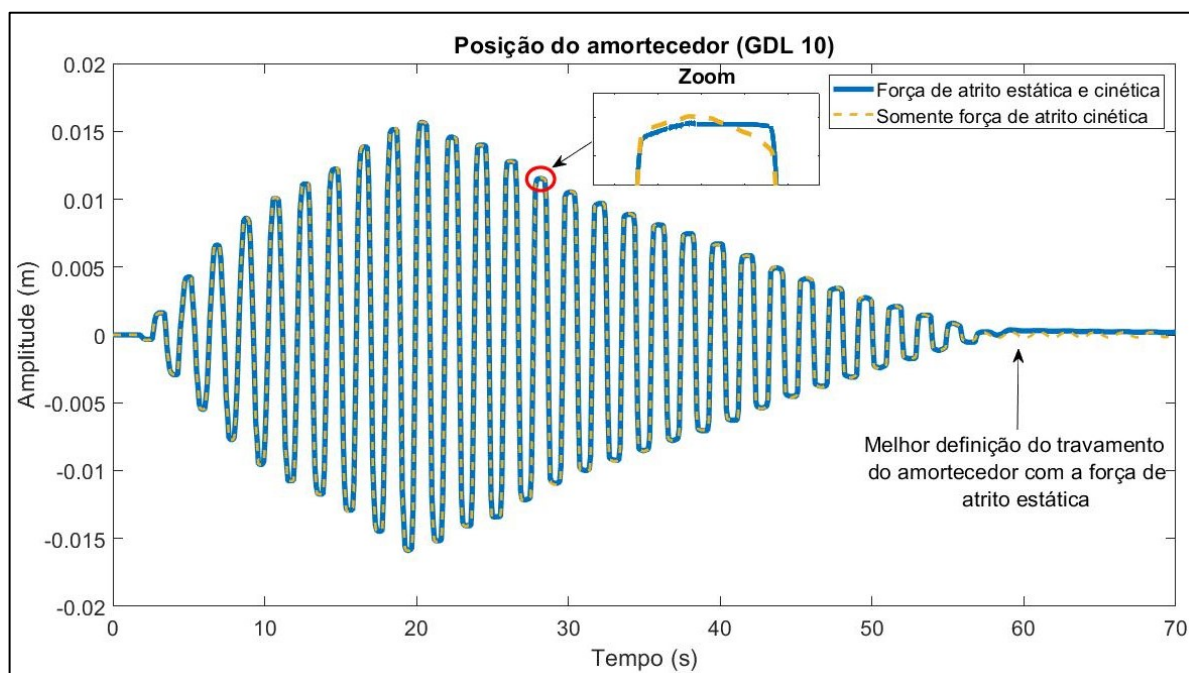
estática presente em sua formulação possui melhores definições da linearização dos picos de amplitude e do travamento dos deslocamentos na sua posição.

Figura 70 – Comparação com e sem atrito estático no meio do cabo (GDL 100).



Fonte: Autor.

Figura 71 – Comparação com e sem atrito estático na posição do amortecedor (GDL 10).

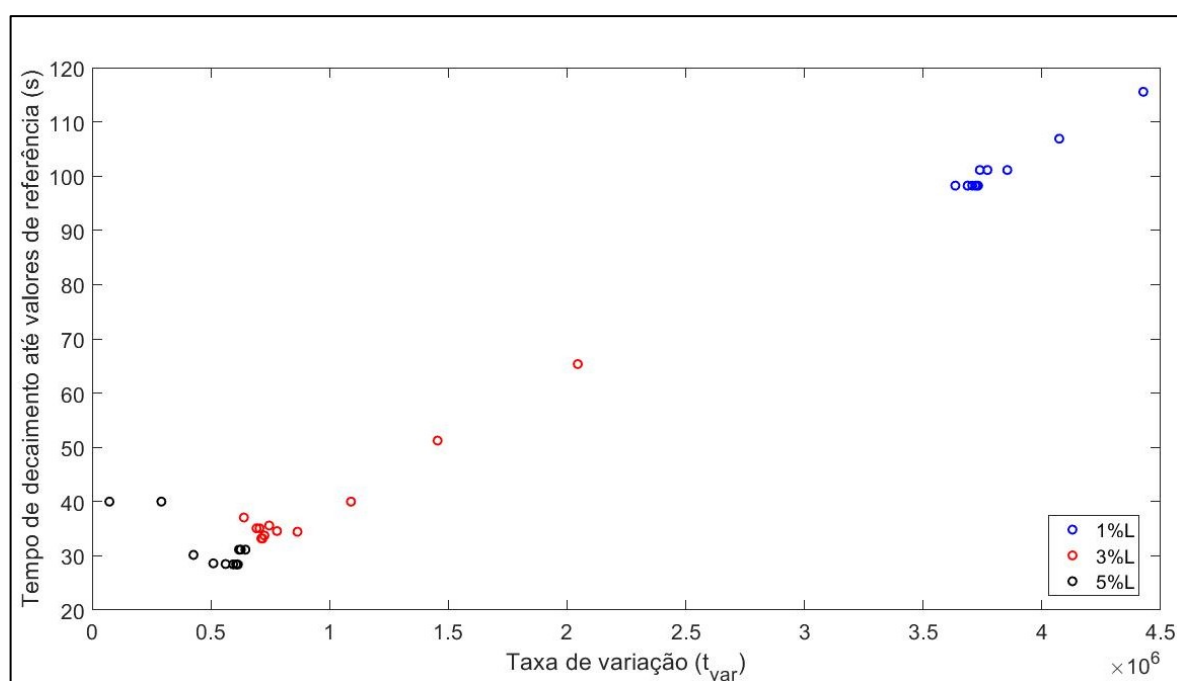


Fonte: Autor.

8.6.3 Atrito seco com progressão linear

Foi analisada a variação linear do atrito seco a fim de diminuir o tempo de decaimento e a amplitude máxima alcançada. A variação segue conforme a Eq. (75), com $n = 1$. Na Figura 72 são mostradas regiões da taxa de variação (t_{var}) ótima para as posições de alocação do amortecedor, referenciadas pelo tempo de decaimento encontrado no atrito seco constante. O intervalo máximo utilizado para a otimização foi de 2×10^6 . Os dados obtidos são expostos na Tabela 7.

Figura 72 – Otimização da posição e taxa de variação linear.



Fonte: Autor.

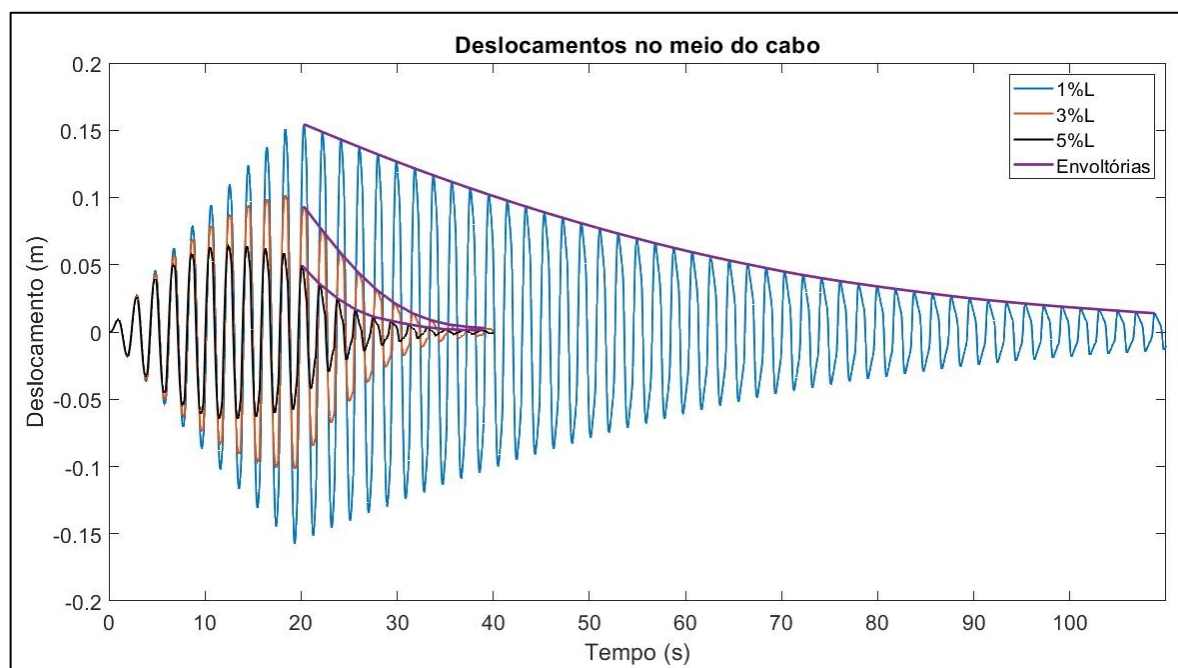
Tabela 7 – Dados do atrito seco com variação linear.

Posição do amortecedor	t_{var}	Amplitude máxima ($L/2$) (m)	ξ equivalente	ξ equivalente normalizado na posição $0,05 \times L$	Tempo de decaimento (s)
1%L	$3,7 \times 10^6$	0,157	0,83%	0,135	106,90
3%L	$7,129 \times 10^5$	0,102	5,07%	0,828	33,75
5%L	$5,942 \times 10^5$	0,064	6,12%	1,000	28,42

Fonte: Autor.

Nota-se, na Figura 73, que o decaimento passou a ter uma envoltória não linear. Além disso, é observada a não aderência em pontos próximos à amplitude nula no regime permanente, já que a força de atrito nessa região é próxima de zero. Pode-se observar também que a eficiência do amortecedor para o decaimento em 3%L e 5%L foi próxima, conforme visto na Figura 72, indicando uma boa relação de posição e benefício com o amortecedor posicionado em 3%L.

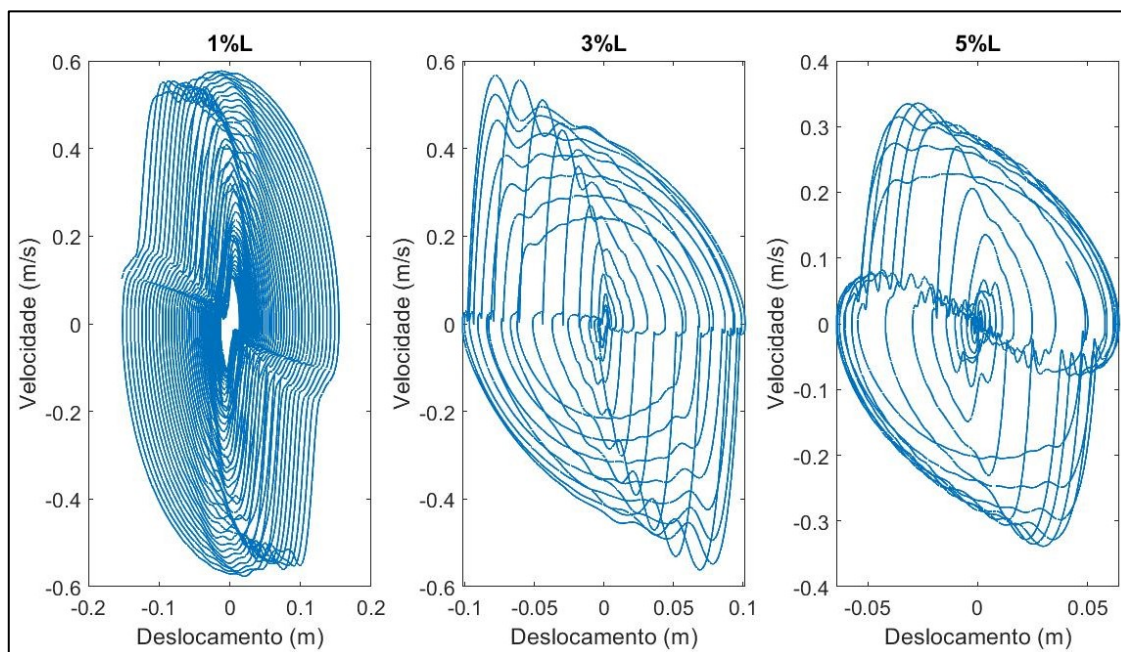
Figura 73 – Comparação entre as posições do amortecedor com variação linear.



Fonte: Autor.

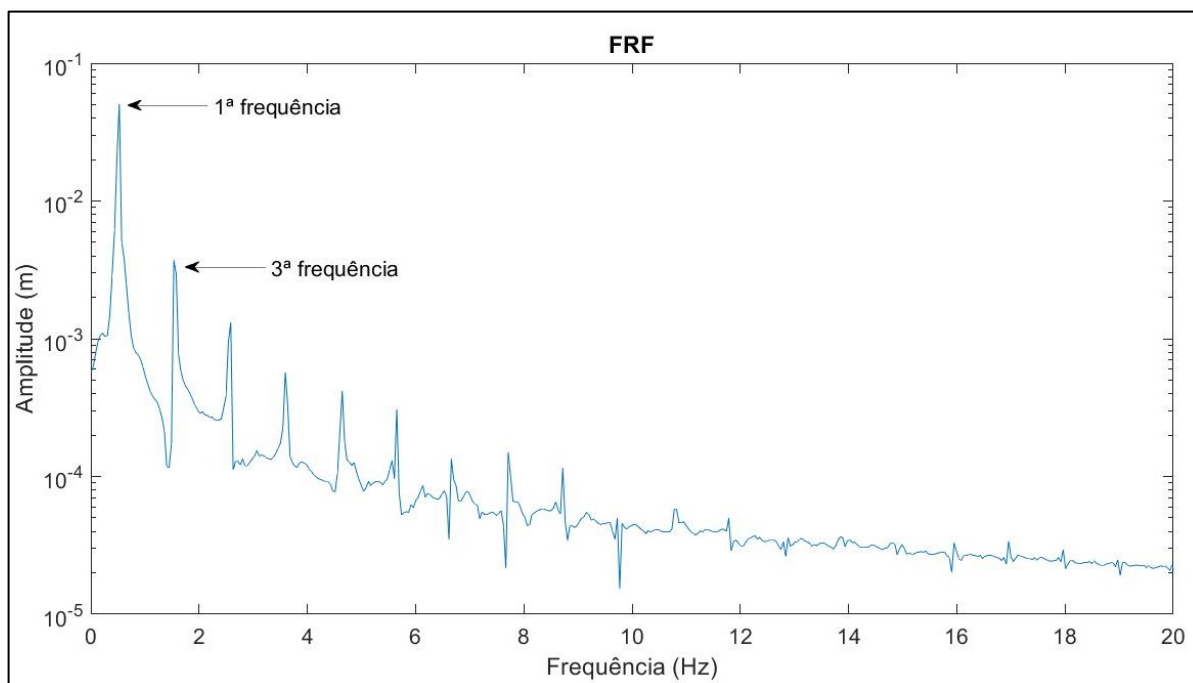
Pela análise da fase velocidade-deslocamento (Figura 74), percebe-se que as ondas propagadas em regiões onde a velocidade é próxima de zero são intensificadas conforme a posição do amortecedor se afasta da extremidade, indicando um comportamento mais participativo dos modos superiores de vibração. Como a amplitude de travamento é reduzida, maior é a energia mecânica transmitida para outros modos de vibração (Figura 75).

Figura 74 – Fase velocidade-deslocamento (linear).



Fonte: Autor.

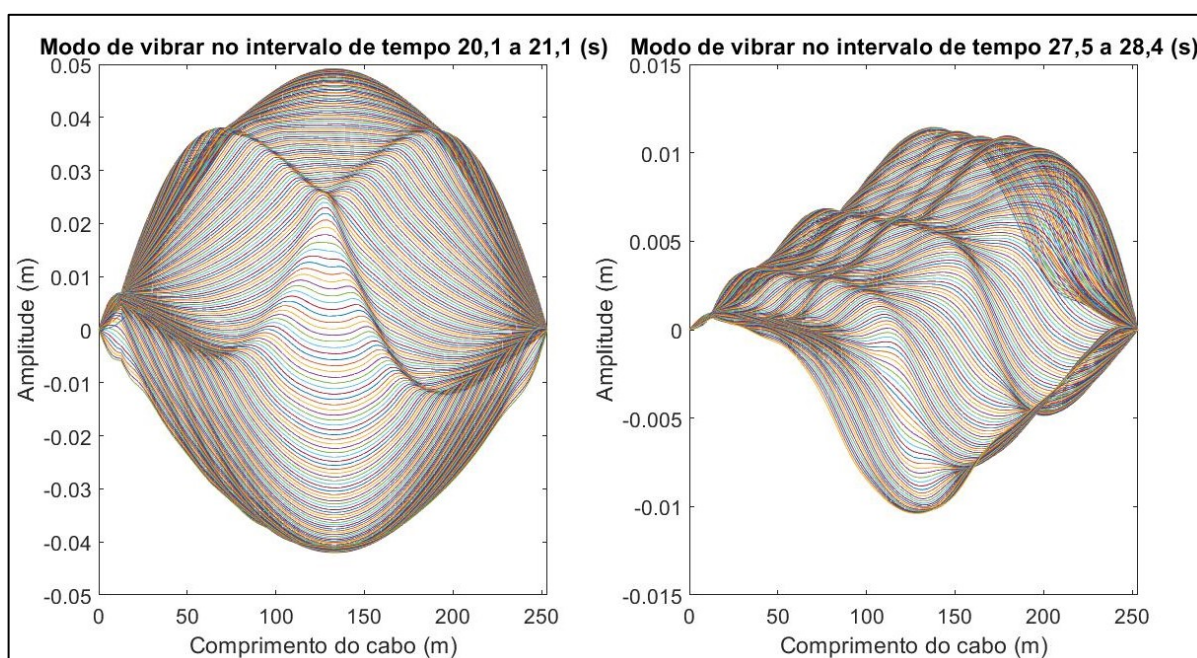
Figura 75 – FRF no meio do cabo (amortecedor em 5%L).



Fonte: Autor.

Na Figura 76 são mostradas duas configurações deformadas do cabo em intervalos de tempo contidos na fase de decaimento, sendo uma no seu início e outra no seu final para que, seguindo o mesmo raciocínio da seção 8.6.1, possa ser observada a variação do modo de vibração. Assim como no atrito seco, as interferências são mais participativas quando o amortecedor está próximo do regime permanente, sendo esta uma posição onde os travamentos já somaram maior número e, conseqüentemente, a transferência de energia mecânica entre os modos já aconteceu mais vezes.

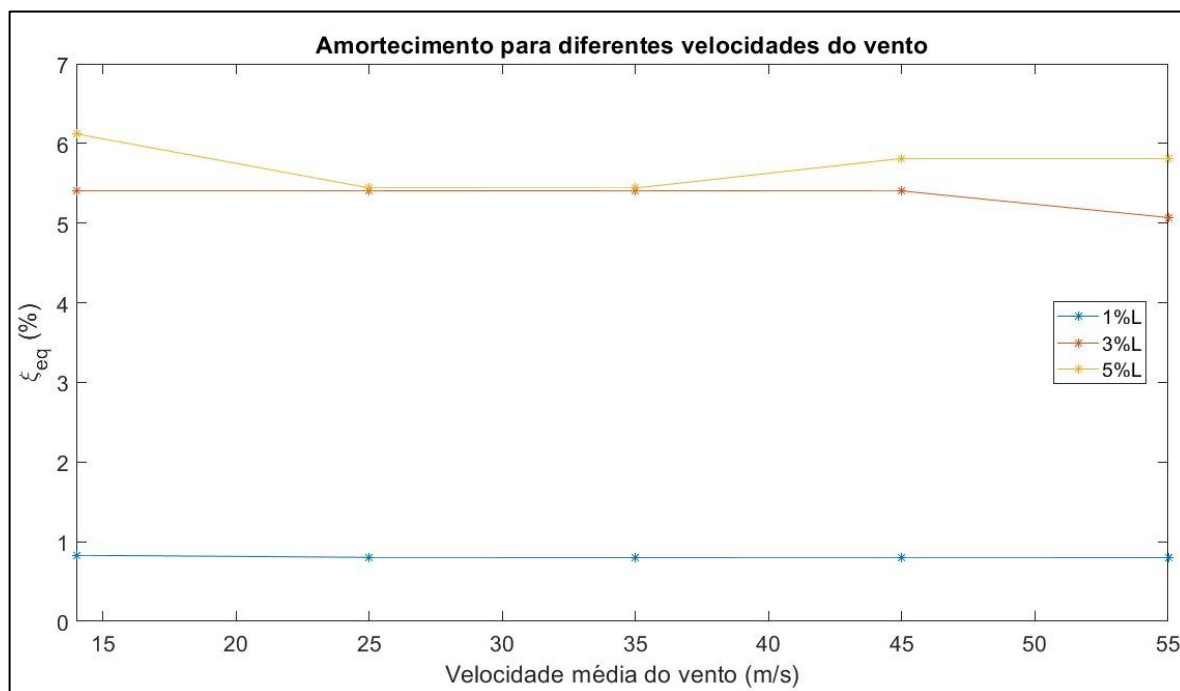
Figura 76 – Evolução temporal do deslocamento em função do comprimento (linear).



Fonte: Autor.

Utilizando a mesma taxa de variação do amortecedor para deslocamentos diferentes, obtém-se a variação da eficiência alcançada (Figura 77). A mudança dos deslocamentos se dá em função da velocidade média do vento, onde seu intervalo de interesse será dividido entre 14 (velocidade padrão), 25, 35, 45 e 55 m/s.

Figura 77 – Relação de eficiência-deslocamento.



Fonte: Autor.

A taxa de variação manteve a mesma eficiência para os carregamentos estudados na posição 1%L, onde também teve seu pior desempenho relativo. O mesmo aconteceu com o amortecedor na posição 3%L, com uma pequena perda no maior carregamento. Na posição 5%L o amortecedor apresentou uma perda inicial e um ganho subsequente de amortecimento.

Em todas as posições foi alcançado um fator de amortecimento viscoso equivalente superior ao amortecimento viscoso ótimo, que é aproximadamente $0,52 x_p/L$ (Eq. (21)), sendo, portanto, 0,52% para 1%L, 1,56% para 3%L e 2,6% para 5%L.

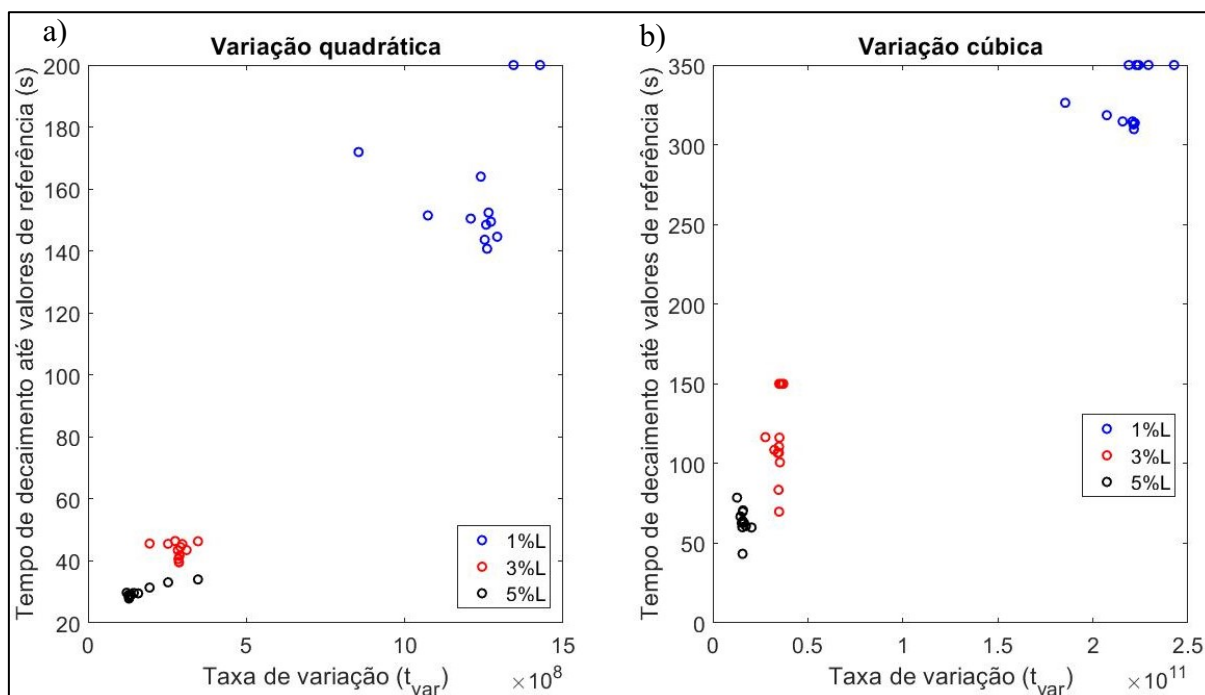
8.6.4 Atrito seco com progressões quadrática e cúbica

Para observar a tendência do comportamento da variação do atrito seco, suas variações proporcionais ao quadrado e ao cubo do deslocamento foram estudadas. A Eq. (75) é utilizada com $n = 2$ para a variação quadrática e $n = 3$ para a variação cúbica. Primeiramente, foram obtidas suas otimizações para o carregamento padrão F_{exc} (Figura 78). Os intervalos máximos de otimização foram de 7×10^8 para a variação quadrática e 1×10^{11} para a variação cúbica.

Através da Figura 78, percebe-se que a convergência tem alta sensibilidade à mudança da taxa de variação da força de atrito nas regiões ótimas. Isto se deve pela maior propagação de ondas, ou seja, pela transferência de energia mecânica entre os modos apresentadas nestas variações (Figura 79), resultando em desvios em torno dos valores ótimos para o critério de otimização.

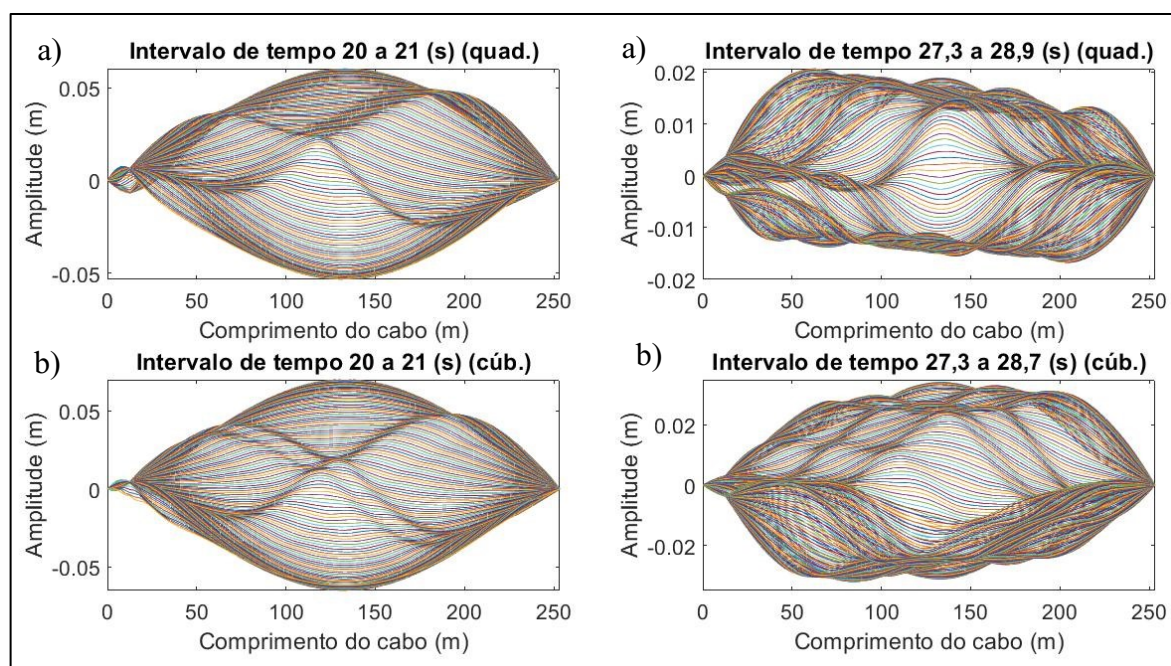
A escolha dos intervalos de tempo da Figura 79 segue os mesmos critérios expostos na seção 8.6.1, em ambos casos pode-se notar um modo de vibrar com muitas interferências de frequências superiores. A comparação entre as fases está indicada na Figura 80, onde é possível perceber a alta irregularidade nas variações da velocidade ao longo do deslocamento, resultado proveniente dos travamentos precoces do amortecedor em sua posição; este fenômeno é mais presente quando o amortecedor se distancia mais das extremidades. Os dados obtidos são mostrados na Tabela 8.

Figura 78 – Otimização das variações a) quadráticas e b) cúbicas da força de atrito.



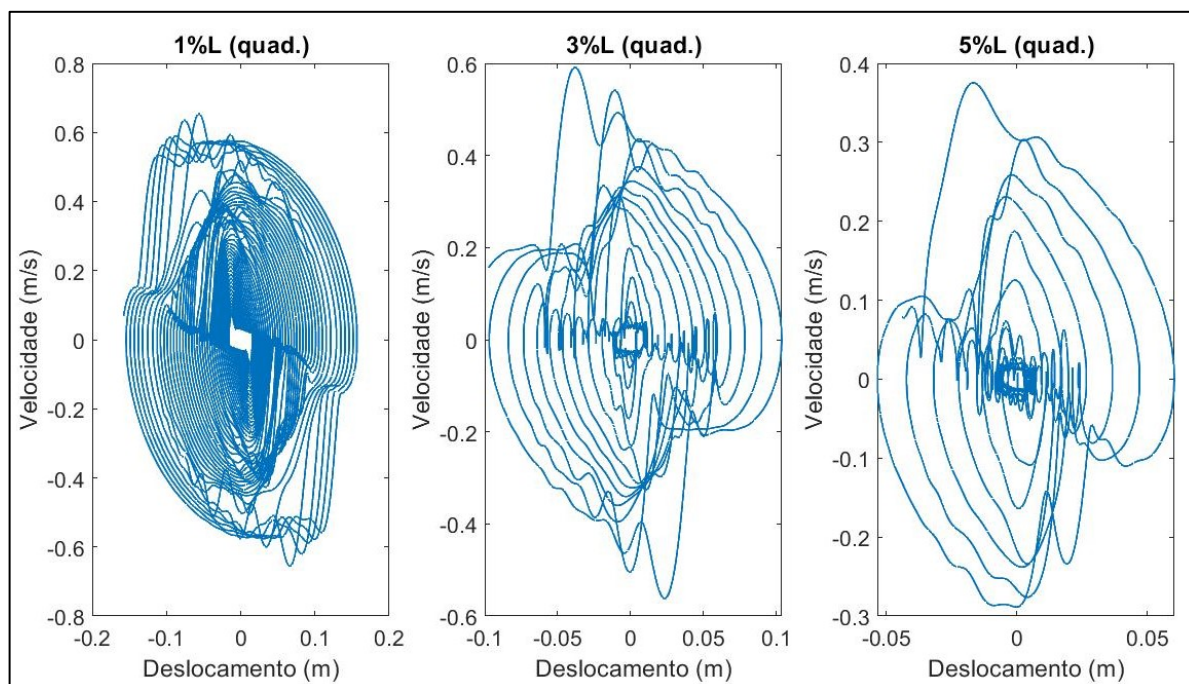
Fonte: Autor.

Figura 79 – Evolução temporal do deslocamento em função do comprimento a) quadrática e b) cúbica.

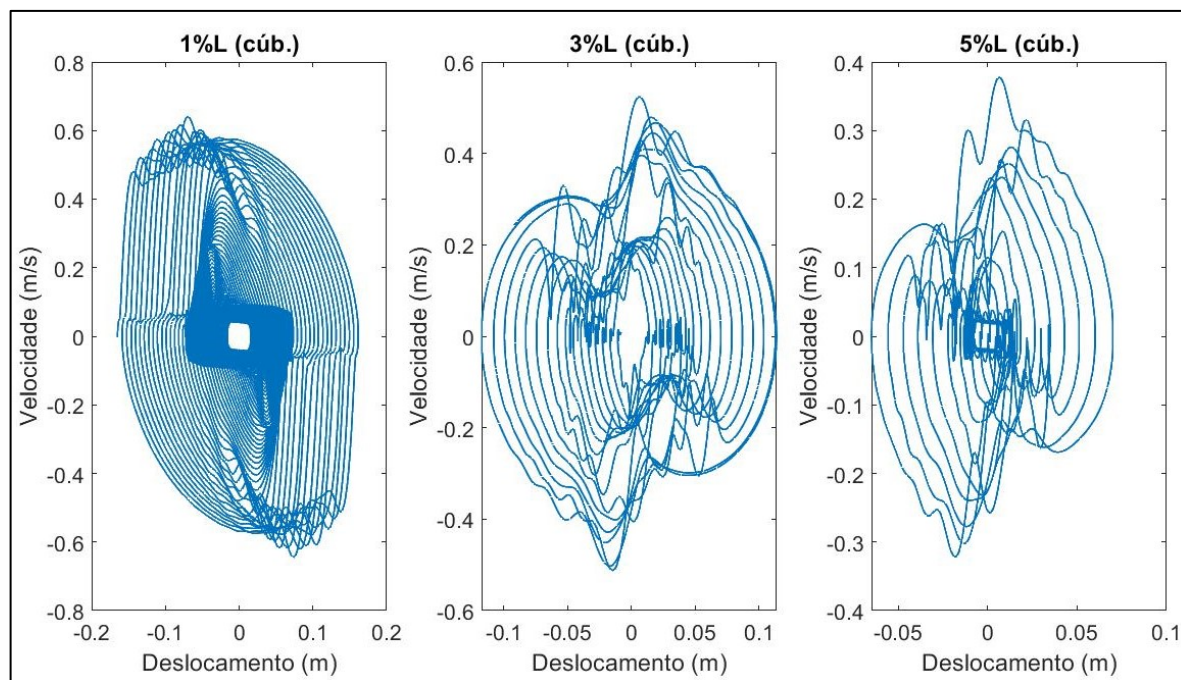


Fonte: Autor.

Figura 80 – Comparação das fases no meio do cabo a) quadrática e b) cúbica.



a)



b)

Fonte: Autor.

Tabela 8 – Dados das variações quadráticas e cúbicas.

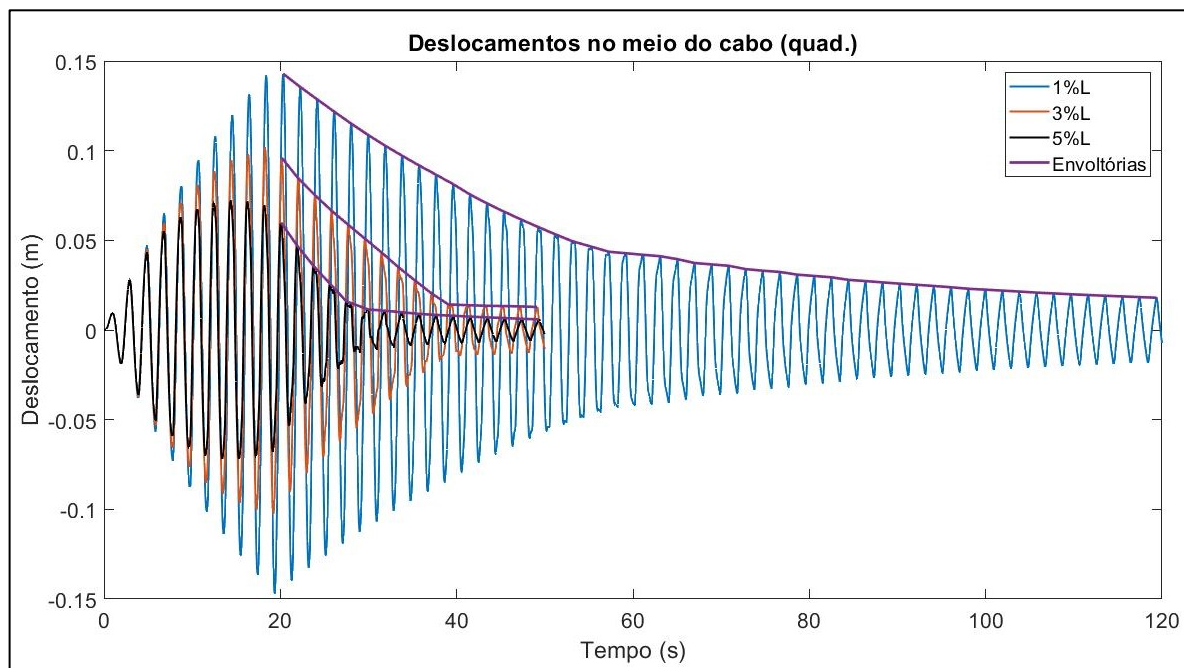
	Variação quadrática			Variação cúbica		
	1%L	3%L	5%L	1%L	3%L	5%L
t_{var}	$1,260 \times 10^9$	$2,876 \times 10^8$	$1,296 \times 10^8$	$2,216 \times 10^{11}$	$3,485 \times 10^{10}$	$1,564 \times 10^{10}$
Amplitude máxima (L/2) (m)	0,159	0,110	0,074	0,164	0,118	0,080
ξ equivalente	0,72%	3,26%	5,55%	0,45%	2,90%	3,02%
ξ equivalente norm. pos. 5%L	0,13	0,59	1,00	0,15	0,96	1,00
Tempo dec. (s)	118,30	38,42	29,78	244,60	46,54	32,91

Fonte: Autor.

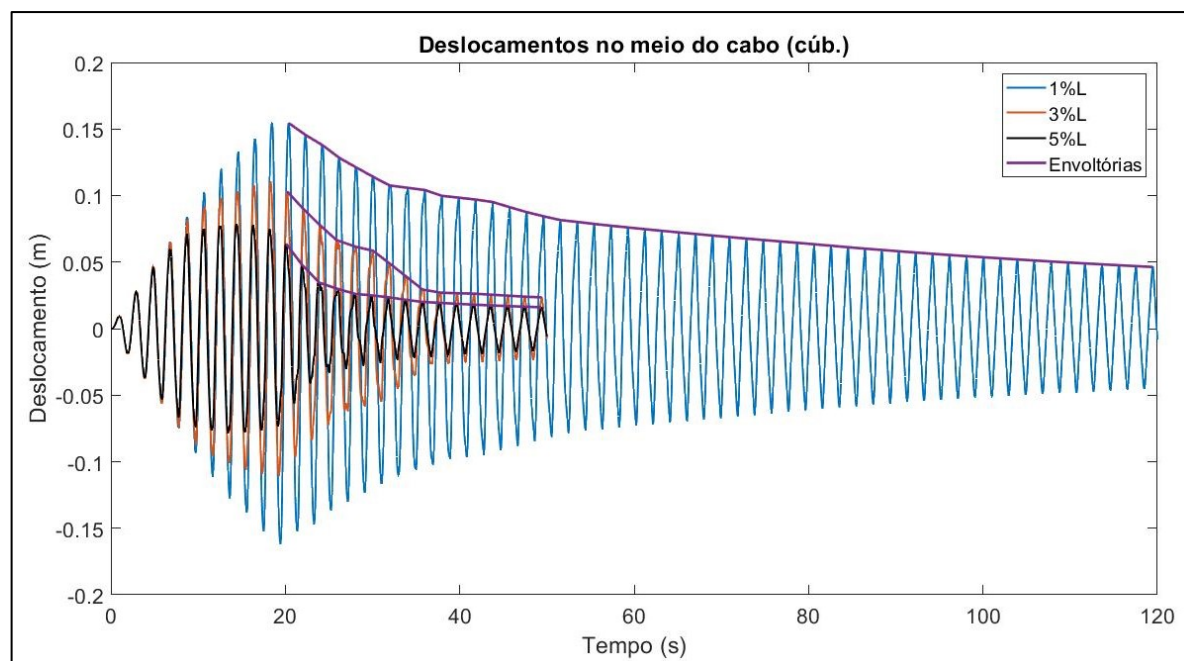
A envoltória do decaimento apresenta irregularidades, não possuindo um formato bem definido. Além disso, diferentemente da variação do atrito seco linearmente dependente do deslocamento, aqui são observadas parcelas residuais de deslocamento semelhantes ao comportamento visto no atrito seco constante (Figura 81). Mesmo o amortecedor não se fixando

em pequenos deslocamentos, tem-se uma região de pouca participação do mesmo em torno do valor nulo, condicionando o decaimento ao amortecimento intrínseco.

Figura 81 – Comparação entre os valores ótimos a) quadrática e b) cúbica.



a)



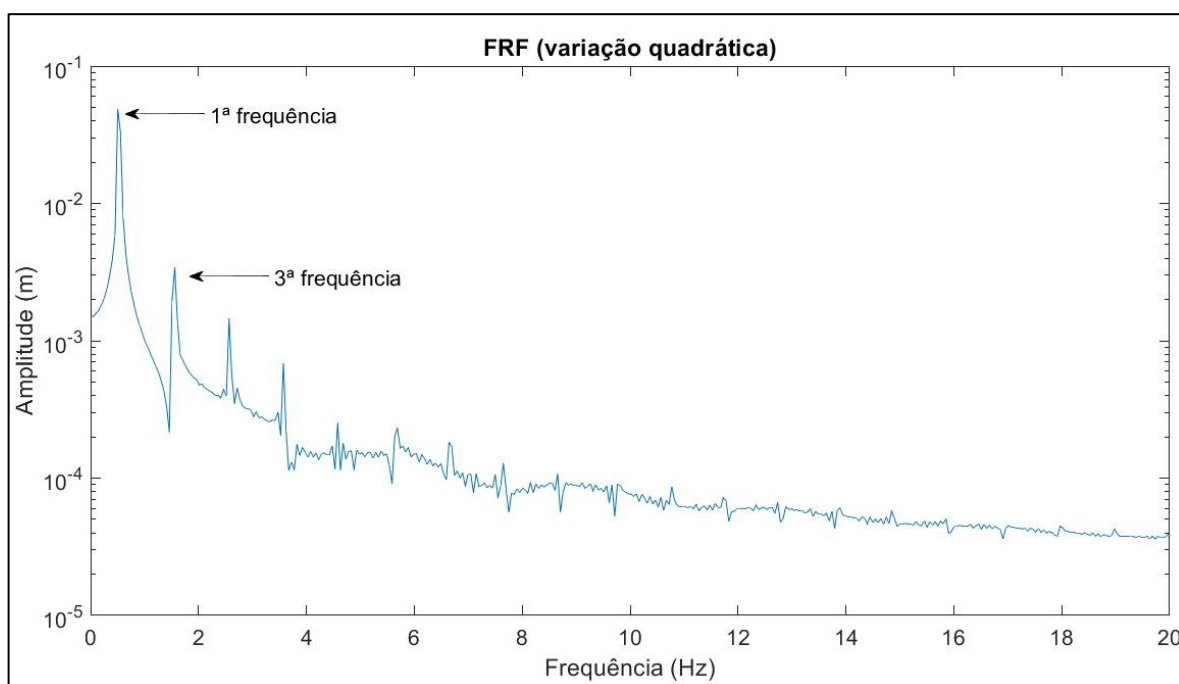
b)

Fonte: Autor.

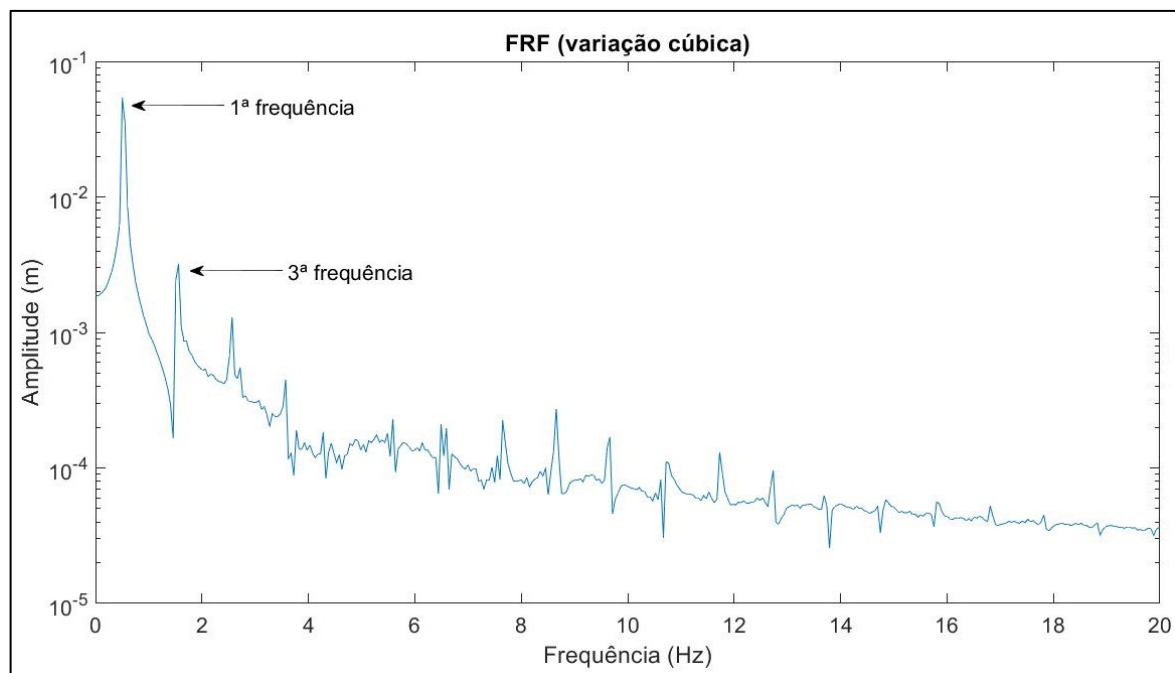
Pode-se notar que houve perda de desempenho com a elevação da potência de variação, principalmente quando o amortecedor é posicionado mais próximo à extremidade. Para as posições do amortecedor em 3%L e 5%L foram utilizadas faixas de tempo reduzidas a fim de otimizar o custo computacional.

Na Figura 82 são expostas as FRFs de ambos casos no meio do cabo com o amortecedor em 5%L. As características vistas na variação linear são potencializadas aqui, evidenciando em alguns pontos de ressonância dois picos de amplitude, indicando duas frequências naturais obtidas, sendo uma com o amortecedor travado em sua posição e outra com o amortecedor em curso.

Figura 82 – FRF no meio do cabo (GDL 100) das variações a) quadrática e b) cúbica (amortecedor em 5%L).



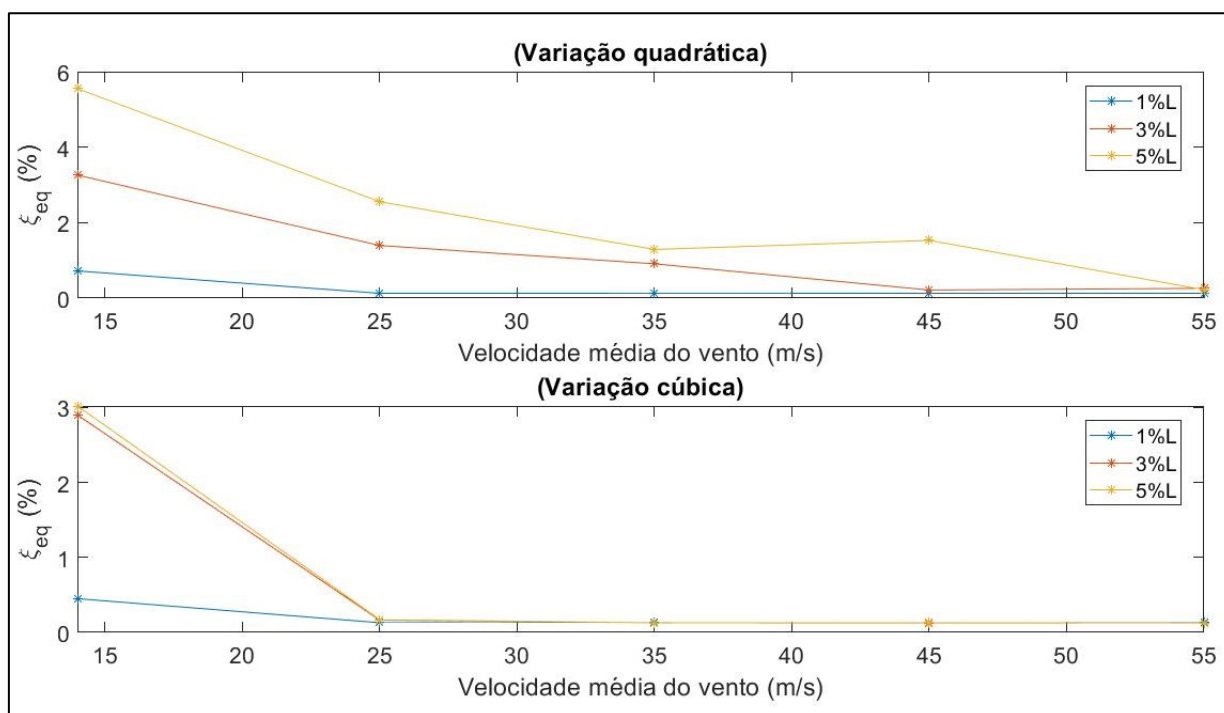
a)



b)

Fonte: Autor.

Figura 83 – Relação de eficiência-deslocamento.



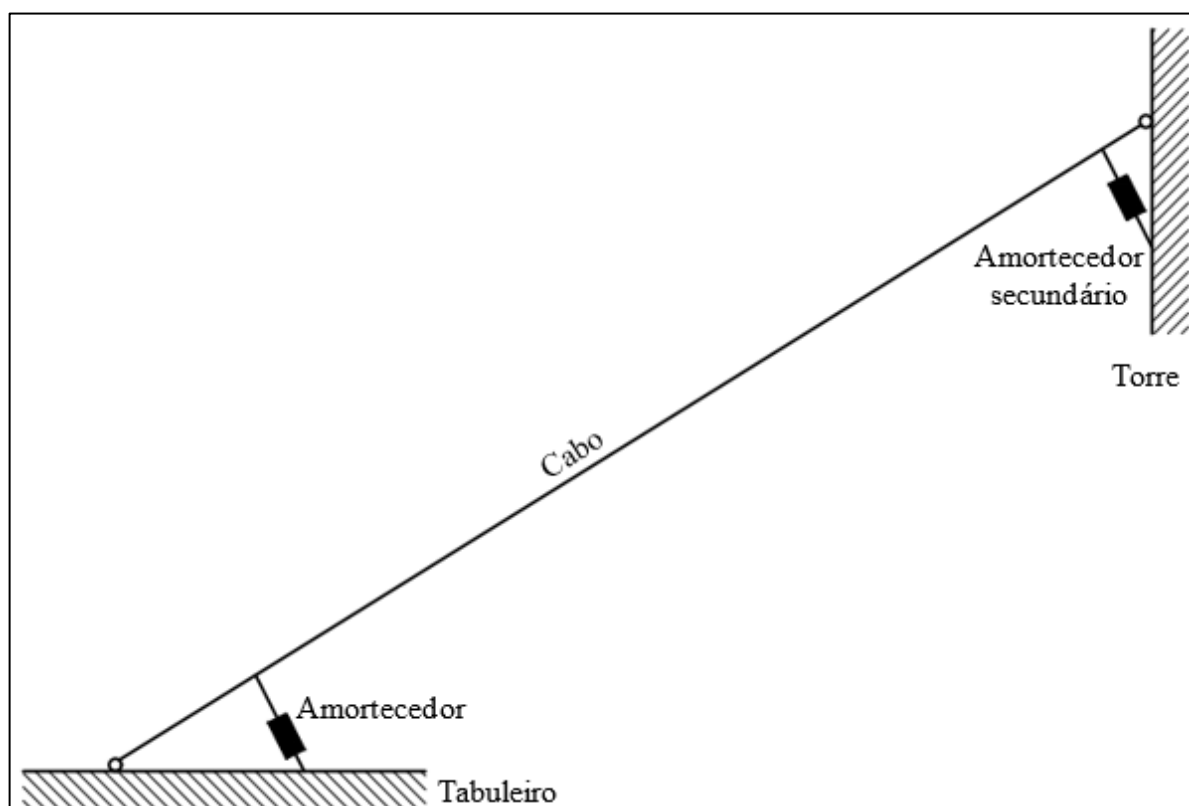
Fonte: Autor.

Assim como feito para a variação linear, a influência da mudança do carregamento é mostrada na Figura 83. Os resultados indicam que há uma perda considerável de amortecimento para o uso da mesma taxa de variação em diversos carregamentos, tornando as variações quadráticas e cúbicas inviáveis para este propósito. Esta perda se deve provavelmente pelo travamento precoce do amortecedor em função do aumento do deslocamento, tendo sua região de amortecimento restrita a uma pequena faixa de amplitudes que se torna insignificante para maiores deslocamentos do cabo.

8.7 Análise do uso de dois amortecedores

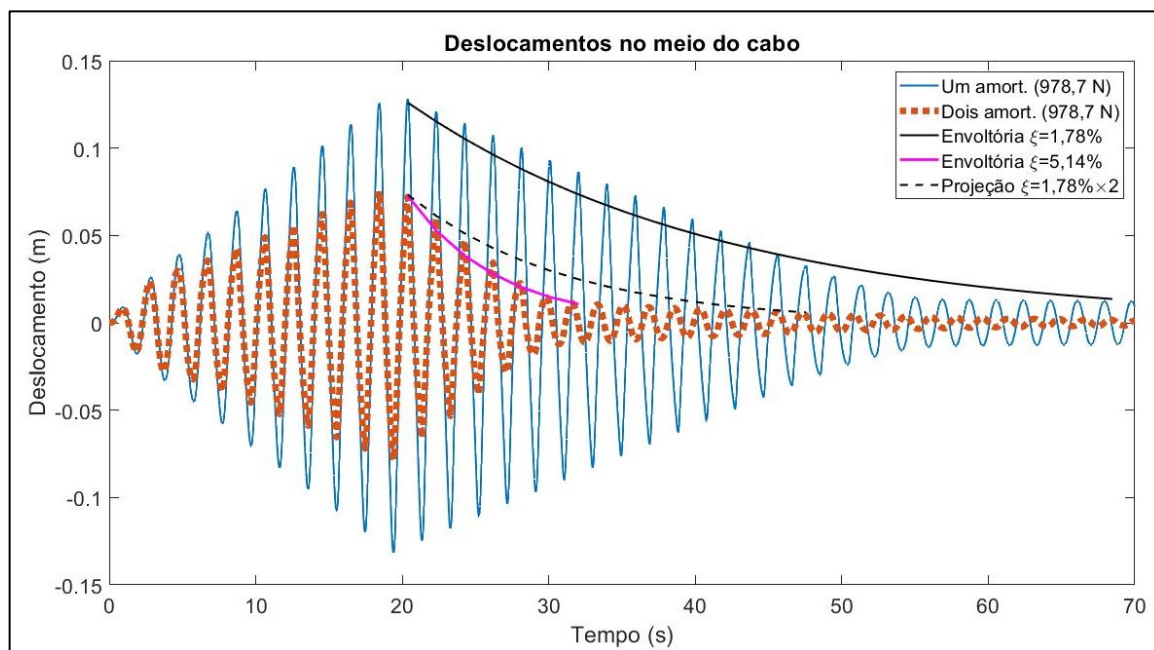
O uso de dois amortecedores é utilizado quando o amortecimento alcançado por apenas um é insuficiente para as solicitações dinâmicas. Quando isto acontece, usualmente é acrescentado um amortecedor na outra extremidade do cabo, sendo fixado na torre da ponte (Figura 84).

Figura 84 – Representação esquemática do uso de dois amortecedores.



Fonte: Autor.

Figura 85 – Deslocamentos do cabo com um e dois amortecedores (GDL 100).



Fonte: Autor.

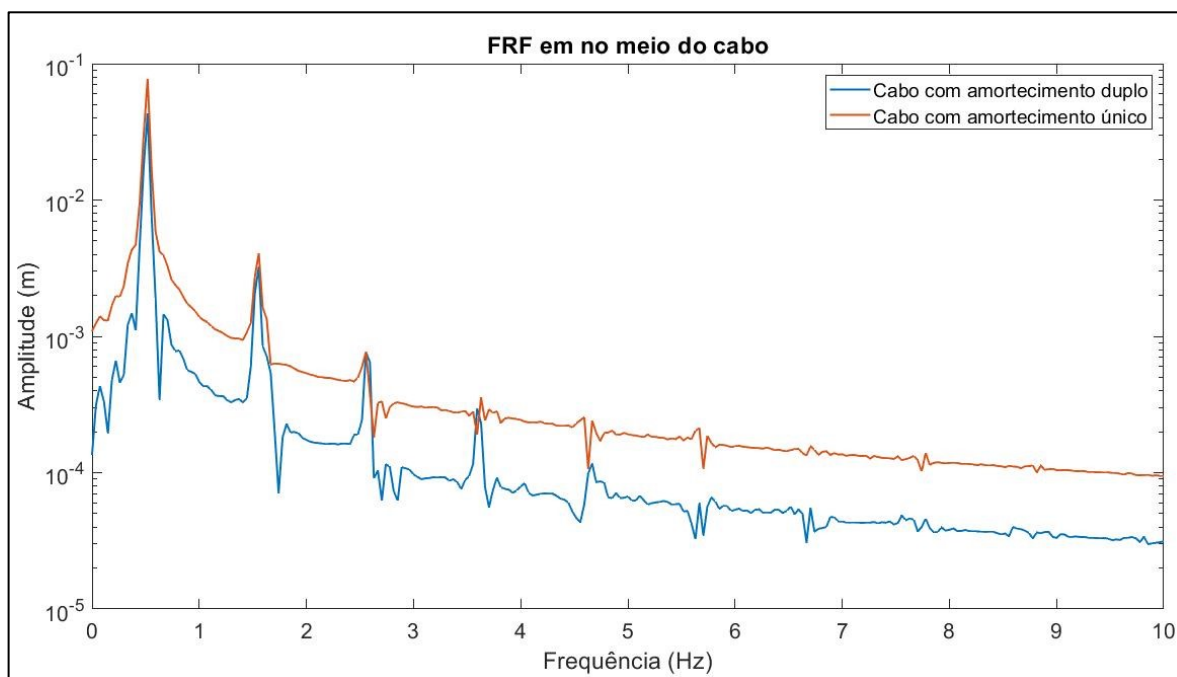
É exposto na Figura 85 a comparação dos deslocamentos no meio do cabo de um amortecedor por atrito seco constante com uma força máxima igual a 978,7 Newtons na posição 5%L (obtida na seção 8.6.1) com o uso de dois amortecedores, um em cada extremidade, a uma força de atrito igual a 978,7 Newtons cada um.

Para a comparação entre os resultados foi utilizada a Eq. (47) que, apesar de não ser muito apropriada, serve como parâmetro universal de amortecimento. Assim sendo, é observado que o uso de dois amortecedores alcançou um fator de amortecimento viscoso equivalente para a fase de decaimento de 5,14%, bem superior ao que seria previsto pela teoria do amortecimento viscoso para amortecedores duplos (3,56%), sendo aproximadamente 44,4% maior. As causas para o aumento do amortecimento na utilização e dois amortecedores ainda precisam ser investigadas, porém a variação do amortecimento por atrito seco constante em função da amplitude pode ser um dos fatores que influenciam diretamente nesses resultados.

Analisando a FRF no meio do cabo, no GDL número 100 (Figura 86), nota-se o amortecimento superior com a combinação de dois amortecedores, principalmente na transição entre as frequências de ressonância. Além disso, com a aplicação do segundo amortecedor os deslocamentos apresentam maior simetria (Figura 87), mantendo os amortecedores em mesma

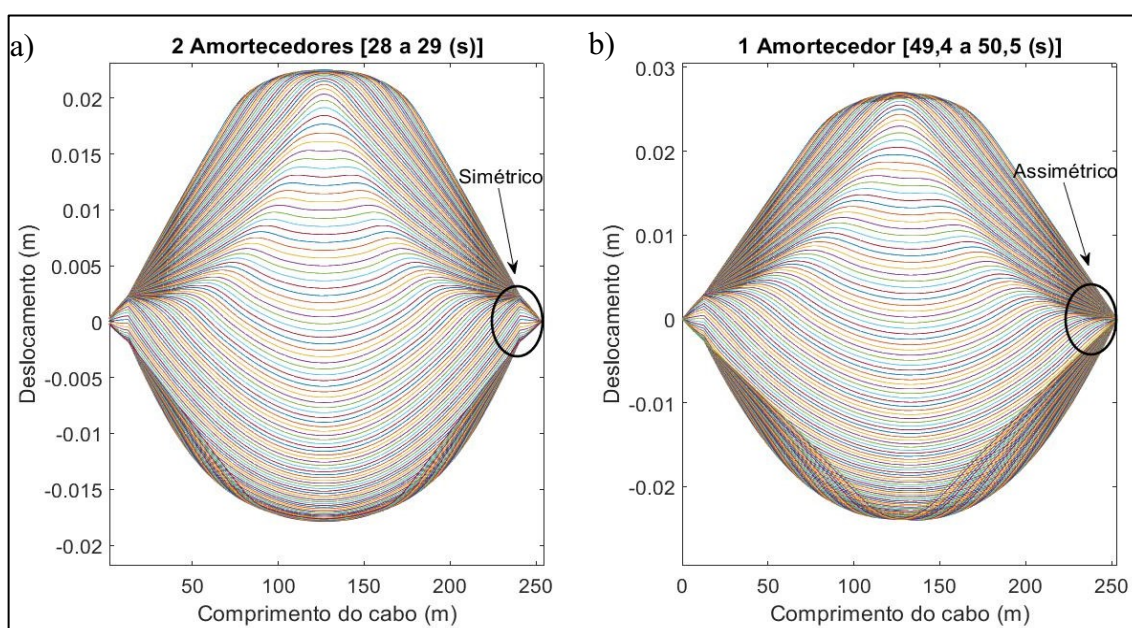
fase para modos simétricos de vibração, o que pode contribuir para a redução de amplitude nas frequências de transição supracitadas.

Figura 86 – FRF no meio do cabo (GDL 100).



Fonte: Autor.

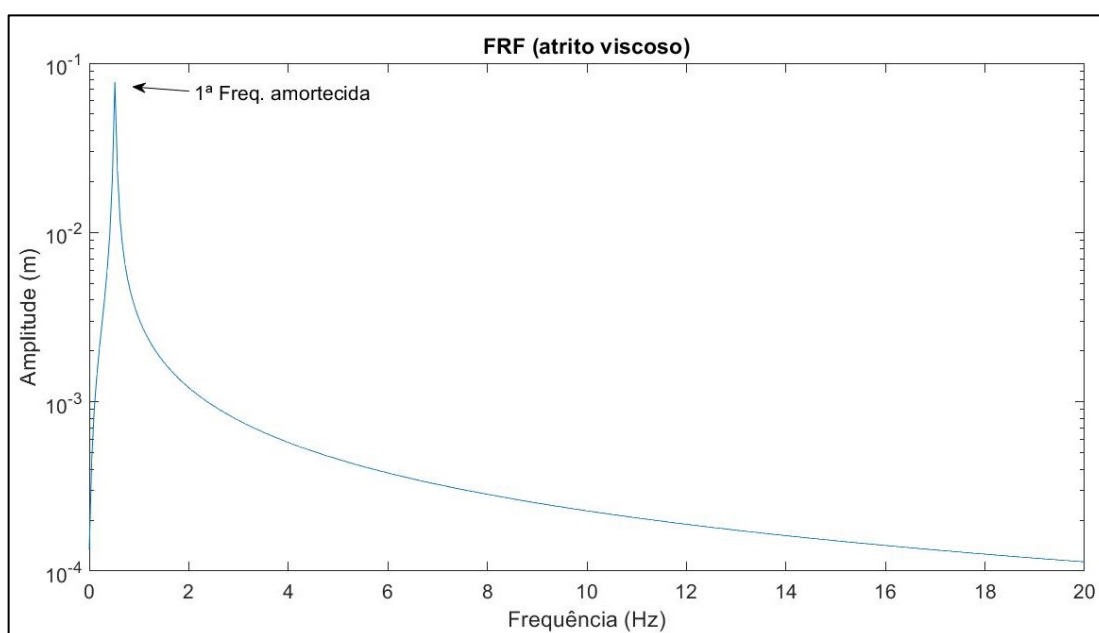
Figura 87 – Deslocamento em função do comprimento com a) dois amortecedores e b) um amortecedor.



Fonte: Autor.

O fenômeno da transferência de energia mecânica do modo fundamental para os modos superiores não se manifesta com o mecanismo de amortecimento pelo atrito viscoso, sendo esta situação particular do atrito seco. O atrito viscoso tem seu funcionamento em função da velocidade de deslocamento, que é máxima onde a amplitude da vibração é nula e mínima onde a amplitude é máxima. Esta característica implica em uma resposta harmônica simples, não manifestando modos superiores de vibração em sua FRF (Figura 88).

Figura 88 – FRF sem transferência de energia mecânica (atrito viscoso) medida no meio do cabo (GDL 100).



Fonte: Autor.

Na Figura 88 é mostrada a resposta em frequência do cabo com amortecimento por atrito viscoso, excitado na primeira frequência natural, onde é possível perceber que não são manifestos modos de vibração diferentes do modo de excitação (WEBER; HOGSBERG; KRENK, 2010), indicando um comportamento harmônico simples. Porém, para o atrito seco não se pode supor uma resposta harmônica simples pois há participação de outros modos de vibração (Figura 86) mesmo que a excitação seja somente em um modo específico, não sendo adequado, portanto, tomar o amortecimento por atrito viscoso equivalente como metodologia de projeto.

9 Conclusões

No modelo discreto do cabo, foi adotado o número de cem elementos para a discretização através da análise da convergência da quinta frequência natural. Os resultados obtidos das frequências naturais pelo método dos elementos finitos foram comparados com soluções analíticas oriundas da teoria das cordas vibrantes na Tabela 4, onde foi possível concluir que as aproximações foram satisfatórias. Juntamente com as frequências naturais, os modos de vibração também foram obtidos a partir da equação do movimento livre e não amortecido, onde pôde-se observar a alternância entre simetria e assimetria dos deslocamentos do cabo.

Na função resposta em frequência, tendo em vista que o ponto de análise (GDL) se encontra na região central do cabo, os resultados foram coerentes com a realidade. Foi mostrado na Figura 54 que, nos modos pares, o meio do cabo possui baixos deslocamentos, enquanto nos modos ímpares o deslocamento é máximo neste local. Também é possível observar que o amortecimento proporcional, dado por Rayleigh, é mais perceptível nas zonas de ressonância. Isto acontece porque seu valor é muito pequeno quando comparado com as parcelas associadas à massa e à rigidez e, quando ambas se anulam pela frequência natural, o único valor resultante passa a ser o do amortecimento. Nota-se que sem a presença do amortecimento a relação Y/F tende ao infinito nas frequências de ressonância, mas quando o amortecimento é acrescentado a relação passa a ter um valor finito para todas as frequências.

Com a aplicação do atrito seco constante no amortecimento do cabo foi possível confirmar a dependência do mesmo ao deslocamento através da análise modal. Com isso, foi percebido que a diferença de amortecimento entre os modos se dá exclusivamente pela diferença de amplitude produzida por eles.

A partir da análise da variação da posição do amortecedor foi observado que quanto maior é a restrição do deslocamento máximo pelas condições de contorno, menor é a eficiência do amortecimento por atrito seco, ou seja, quanto mais próximo o amortecedor estiver das extremidades, menor será sua eficiência.

No mais, observou-se que os travamentos do amortecedor em sua posição geram transferências de energia mecânica para modos superiores de vibração, propagando ondulações para toda a extensão do cabo. A participação de harmônicos superiores na resposta do cabo contrasta com as hipóteses de equivalência energética, onde se assume uma resposta harmônica simples para o cabo.

A aplicação da variação linear da força de atrito em função do deslocamento alcançou um amortecimento viscoso equivalente superior ao amortecimento viscoso ótimo advindo da teoria analítica, inclusive para várias intensidades de carregamento considerando as velocidades médias do vento usuais em projetos. A transferência de energia mecânica neste caso foi intensificada, com os harmônicos superiores alterando consideravelmente o modo de vibrar.

As justificativas para este ganho ainda precisam ser investigadas, porém uma possível causa é a frequente alteração da frequência natural do cabo combinada com a inserção de modos superiores de vibração, descaracterizando o estado de ressonância do cabo.

Com o estudo das variações do atrito seco em função do quadrado e do cubo do deslocamento foi possível concluir que mesmo apresentando valores de amortecimento eficientes para um carregamento específico, essa eficiência não se estende quando o mesmo é alterado. Isto se deve pela baixa força de atrito apresentada em deslocamentos relativamente pequenos e pelo seu valor demasiado quando os deslocamentos aumentam, ocasionando travamentos precoces e, conseqüentemente, reduzindo sua eficiência.

Por fim, foi analisada a interferência do atrito seco no funcionamento conjunto de dois amortecedores, onde foi constatada a não equivalência com a teoria do amortecimento viscoso para dois amortecedores, apresentando um ganho de amortecimento de aproximadamente 44,4% acima do esperado. Uma possível causa para este ganho pode ser o amortecimento extra dos modos superiores de vibração que não estão em simetria com o funcionamento dos amortecedores, ou seja, os modos antissimétricos para os amortecedores em fase e os modos simétricos para os amortecedores em fases opostas.

10 Sugestões para próximos estudos

Para novas investigações que dão continuidade a estes estudos, sugere-se:

- Implementar a variação linear do atrito seco em função dos deslocamentos em um modelo puramente passivo incluindo suas peculiaridades, tais como o acréscimo de uma força resistiva gerada pela decomposição da variação da força de atrito;
- Estudar a influência da curvatura e da rigidez do suporte na eficiência do amortecimento;
- Implementar um modelo robusto de análise para uma convergência mais acurada dos resultados;

- Quantificar o erro máximo obtido pela aproximação do sinal da força de atrito pelo passo de tempo anterior;
- Acrescentar a rigidez à flexão no sistema de equações a fim de observar sua influência nos resultados;
- Realizar o dimensionamento e a validação via método experimental de um amortecedor com o mecanismo de amortecimento com as variações do atrito seco propostas, observando a durabilidade do dispositivo.

Referências

- ANDERSON, J. R.; FERRI, A. A. Behavior of a single-degree-of-freedom system with a generalized friction law. **Journal of Sound and Vibration**, v. 140, n. 2, p. 287-304, 1990. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(90\)90529-9](https://doi.org/10.1016/0022-460X(90)90529-9)
- AVALLONE, E. A.; BAUMEISTER III, T.; SADEGH, A. **Marks' standard handbook for mechanical engineers**. McGraw-Hill Education, 2007.
- BANKS, H. T.; SMITH, R. C.; WANG, Y. Smart material structures- Modeling, estimation and control. **Chichester, United Kingdom and New York/Paris: John Wiley & Sons/Masson, 1996.**, 1996.
- BENSON, D. J.; HALLQUIST, J. O. A single surface contact algorithm for the post-buckling analysis of shell structures. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 78, n. 2, p. 141-163, 1990. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(90\)90098-7](https://doi.org/10.1016/0045-7825(90)90098-7)
- BENT, A. A.; HAGOOD, N. W.; RODGERS, J. P. Anisotropic actuation with piezoelectric fiber composites. **Journal of intelligent material systems and structures**, v. 6, n. 3, p. 338-349, 1995. <https://doi.org/10.1177/1045389X9500600305>
- BEUCKE, K. E.; KELLY, J. M. Equivalent linearizations for practical hysteretic systems. **International journal of non-linear mechanics**, v. 20, n. 4, p. 211-238, 1985. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(85\)90031-9](https://doi.org/10.1016/0020-7462(85)90031-9)
- BHUSHAN, B. **Introduction to tribology**. John Wiley & Sons, 2013. <https://doi.org/10.1002/9781118403259>
- BRASIL, R.; BALTHAZAR, J. M.; GÓIS, W. **Métodos numéricos e computacionais na prática de engenharias e ciências**. Editora Blucher, 2015.
- BOSDOGIANNI, A.; OLIVARI, D. Wind – and rain – induced oscillations of cables of stayed bridges. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**. Elsevier Science Publisher, v. 64, p.171-185, 1996. [https://doi.org/10.1016/S0167-6105\(96\)00089-X](https://doi.org/10.1016/S0167-6105(96)00089-X)
- CAETANO, E. Cables. In: **Innovative Bridge Design Handbook**. Butterworth-Heinemann, 2022. p. 663-709. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-823550-8.00046-9>
- CAETANO, E. **Cable vibrations in cable-stayed bridges**. IABSE, 2007.

CAETANO, E.; CUNHA, A.; GATTULLI, V.; LEPIDI, M. Cable–deck dynamic interactions at the International Guadiana Bridge: On-site measurements and finite element modelling. **Structural Control and Health Monitoring: The Official Journal of the International Association for Structural Control and Monitoring and of the European Association for the Control of Structures**, v. 15, n. 3, p. 237-264, 2008.

<https://doi.org/10.1002/stc.241>

CAI, C. S.; WU, W. J.; ARAUJO, M. Cable vibration control with a TMD-MR damper system: Experimental exploration. **Journal of structural engineering**, v. 133, n. 5, p. 629-637, 2007. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2007\)133:5\(629\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2007)133:5(629))

CARACOGLIA, L.; JONES, N. P. In-plane dynamic behavior of cable networks. Part 1: formulation and basic solutions. **Journal of Sound and Vibration**, v. 279, n. 3-5, p. 969-991, 2005. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2003.11.058>

CARNEIRO, D. **Dimensionamento de amortecedores para controlo de vibrações em tirantes de pontes**. Dissertação (Mestrado) - Universidade do Porto, 2009.

CHEN, W.; DUAN, L. **Bridge engineering handbook: construction and maintenance**. CRC press, 2014. <https://doi.org/10.1201/b16467>

CHOI, S.; HAN, Y. **Magnetorheological fluid technology: applications in vehicle systems**. CRC press, 2012. <https://doi.org/10.1201/b13050>

CHOPRA, A. K. **Dynamics of structures**. Pearson Education India, 2007.

CHOU, D. **Dahl friction modeling**. 2004. Tese de Doutorado. Massachusetts Institute of Technology.

CRÉMONA, C. Courbe universelle pour le dimensionnement d'amortisseurs en pied de haubans. **Revue française de génie civil**, v. 1, n. 1, p. 137-159, 1997.

<https://doi.org/10.1080/12795119.1997.9692107>

CROUCH, K. M.; DOCK, D. A. Selection factors for cable damping systems. **Modern Steel Construction**, v. 51, n. 10, p. 40-43, 2011.

CURIE, J.; CURIE, P. Développement, par compression, de l'électricité polaire dans les cristaux hémihédres à faces inclinées. **Bulletin de la Société minéralogique de France**, volume 3, p. 90-93, 1880. <https://doi.org/10.3406/bulmi.1880.1564>

DAHL, P. R. Solid friction damping of mechanical vibrations. **AIAA journal**, v. 14, n. 12, p. 1675-1682, 1976. <https://doi.org/10.2514/3.61511>

DE ALMEIDA, L. R. T.; RODRIGUES, J. Análise de uma ponte estaiada com diferentes disposições dos estais. **Revista Prociências**, v. 5, n. 2, p. 2-32, 2022.

<https://doi.org/10.15210/prociencias.v5i2.4310>

DE SILVA, C. W. (Ed.). **Vibration damping, control, and design**. CRC Press, 2007. <https://doi.org/10.1201/9781420053227>

DEN HARTOG, J. P. **Mechanical vibrations**. Courier Corporation, 1985.

DEN HARTOG, J. P. Transmission line vibration due to sleet. **Transactions of the American Institute of Electrical Engineers**, v. 51, n. 4, p. 1074-1076, 1932.

<https://doi.org/10.1109/T-AIEE.1932.5056223>

- DUAN, Y. F.; NI, Y. Q.; KO, J. M. Cable vibration control using magnetorheological dampers. **Journal of intelligent material systems and structures**, v. 17, n. 4, p. 321-325, 2006. <https://doi.org/10.1177/1045389X06054997>
- FLAMAND, O. Rain-wind induced vibration of cables. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**. Elsevier Science Publisher, v.57, p. 353-362, 1995. [https://doi.org/10.1016/0167-6105\(94\)00113-R](https://doi.org/10.1016/0167-6105(94)00113-R)
- FERRERO, J. F.; BARRAU, J.J. Study of dry friction under small displacements and near-zero sliding velocity. **Wear**, v. 209, n. 1-2, p. 322-327, 1997. [https://doi.org/10.1016/S0043-1648\(97\)00027-6](https://doi.org/10.1016/S0043-1648(97)00027-6)
- FOURNIER, J. A.; CHENG, S. Impact of damper stiffness and damper support stiffness on the efficiency of a linear viscous damper in controlling stay cable vibrations. **Journal of Bridge Engineering**, v. 19, n. 4, p. 04013022, 2014. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)BE.1943-5592.0000562](https://doi.org/10.1061/(ASCE)BE.1943-5592.0000562)
- FUJINO, Y.; KIMURA, K.; TANAKA, H. **Wind resistant design of bridges in Japan**. Springer, 2012. <https://doi.org/10.1007/978-4-431-54046-5>
- FUJINO, Y.; WARNITCHAI, P.; PACHECO, B. Active stiffness control of cable vibration. **Journal of Applied Mechanics**, 1993. <https://doi.org/10.1115/1.2901006>
- GAO, H.; WANG, H.; LI, J.; WANG, Z.; LIANG, R.; XU, Z.; NI, Y. Optimum design of viscous inerter damper targeting multi-mode vibration mitigation of stay cables. **Engineering Structures**, v. 226, p. 111375, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.111375>
- GILLMOR, S. C. **Coulomb and the Evolution of Physics and Engineering in Eighteenth-Century France**. Princeton: Princeton University Press, 1971. <https://doi.org/10.1515/9781400886234>
- GIMSING, N.; GEORGAKIS, C. **Cable supported bridges**. Chichester: John Wiley & Sons, 2012. <https://doi.org/10.1002/9781119978237>
- GONÇALVES, L. K. S. **Análise de fadiga de sistemas estocásticos incorporando materiais viscoelásticos**. Tese de doutorado. 2018.
- GU, M.; LUI, C.; XU, Y.; XIANG, H. Response characteristics of wind excited cables with artificial rivulet. **Applied Mathematics and Mechanics**. Shangai University, v. 23, p.1176-1187, 2002. <https://doi.org/10.1007/BF02437666>
- GURAN, A.; PFEIFFER, F.; POPP, K. (Ed.). **Dynamics with Friction, Modeling, Analysis and Experiments, Part II**. World Scientific, 2001. <https://doi.org/10.1142/4720>
- HIKAMI, Y.; SHIRAISHI, N. Rain-wind induced vibrations of cables in cable stayed bridges. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**. Elsevier Science Publisher, v.29, p. 409-418, 1988. [https://doi.org/10.1016/0167-6105\(88\)90179-1](https://doi.org/10.1016/0167-6105(88)90179-1)
- HOANG, N.; FUJINO, Y. Combined damping effect of two dampers on a stay cable. **Journal of Bridge Engineering**, v. 13, n. 3, p. 299-303, 2008. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1084-0702\(2008\)13:3\(299\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1084-0702(2008)13:3(299))
- HOANG, N.; FUJINO, Y. Multi-mode control performance of nonlinear dampers in stay cable vibrations. **Structural Control and Health Monitoring: The Official Journal of the International Association for Structural Control and Monitoring and of the European**

Association for the Control of Structures, v. 16, n. 7-8, p. 860-868, 2009.

<https://doi.org/10.1002/stc.364>

HUANG, H.; SUN, L.; JIANG, X. Vibration mitigation of stay cable using optimally tuned MR damper. **Smart Structures and Systems**, v. 9, n. 1, p. 35-53, 2012.

<https://doi.org/10.12989/sss.2012.9.1.035>

HUANG, P.; WANG, X.; WEN, Q.; WANG, W.; SUN, H. Active control of stay cable vibration using a giant magnetostrictive actuator. **Journal of Aerospace Engineering**, v. 31, n. 5, p. 04018074, 2018. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)AS.1943-5525.0000905](https://doi.org/10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0000905)

IRVINE, M. H. **Cable structures**. The MIT Press, 1981.

IRWIN, P. Wind vibrations of cables on cable-stayed bridges. **Proc., Struct. Congr. XV**, p. 383-387, 1997.

JAVANBAKHT, M.; CHENG, S.; GHRIB, F. Multimode vibration control of stay cables using optimized negative stiffness damper. **Structural Control and Health Monitoring**, v. 27, n. 4, p. e2503, 2020. <https://doi.org/10.1002/stc.2503>

JAVANMARDI, A.; GHAEDI, K.; HUANG, F.; HANIF, M. U.; TABRIZIKAHOU, A. Application of structural control systems for the cables of cable-stayed bridges: state-of-the-art and state-of-the-practice. **Archives of Computational Methods in Engineering**, p. 1-31, 2021. <https://doi.org/10.1007/s11831-021-09632-4>

JOHNSON, E. A.; BAKER, G. A.; SPENCER, B. F.; FUJINO, Y. Semiactive damping of stay cables. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 133, n. 1, p. 1-11, 2007.

[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2007\)133:1\(1\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2007)133:1(1))

JOHNSON, E. A.; CHRISTENSON, R. E.; SPENCER JR, B. F. Smart Stay Cable Damping-Effects of Sag and Inclination. In: **Structural Safety and Reliability: Proceeding of ICOSSAR '01, the 8th International Conference on Structural Safety and Reliability**. 2001.

JOLLY, M. R.; BENDER, J. W.; CARLSON, J. D. Properties and applications of commercial magnetorheological fluids. In: **Smart structures and materials 1998: passive damping and isolation**. SPIE, 1998. p. 262-275. <https://doi.org/10.1117/12.310690>

KARNOPP, D. Computer simulation of stick-slip friction in mechanical dynamic systems. **Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control**, 1985.

<https://doi.org/10.1115/1.3140698>

KOVACS, I. Zur frage der seil-schwingungen und der seildämpfung. **Bautechnik**, v. 59, n. 10, 1982.

KOVACS, I.; STROMMEN, E.; HJORTH-HANSEN, E. Damping devices against cable oscillations on Sunningesund Bridge. In: **Proceedings of 3rd International Symposium on Cable Dynamics**. 1999. p. 145-150.

KRENK, S. Complex modes and frequencies in damped structural vibrations. **Journal of Sound and Vibration**, v. 270, n. 4-5, p. 981-996, 2004. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00768-5](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00768-5)

KRENK, S.; NIELSEN, S. R. K. Vibrations of a shallow cable with a viscous damper. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical**

and **Engineering Sciences**, v. 458, n. 2018, p. 339-357, 2002.

<https://doi.org/10.1098/rspa.2001.0879>

KRENK, S. Vibrations of a taut cable with an external damper. **Jornal of applied mechanics**, v. 67, n. 4, p. 772-776, 2000. <https://doi.org/10.1115/1.1322037>

KUMARASENA, S.; JONES, N. P.; IRWIN, P.; TAYLOR, P. **Wind induced vibration of stay cables**. RDT05-004, 2005.

LANKIN, P. E. J.; KILPATRICK, J.; IRWIN, P. A.; ALCA, N. Wind-induced stay cable vibrations: measurement and mitigation. In: **Advanced Technology in Structural Engineering**. 2000. p. 1-8. [https://doi.org/10.1061/40492\(2000\)46](https://doi.org/10.1061/40492(2000)46)

LI, H.; LIU, M.; LI, J.; GUAN, X.; OU, J. Vibration control of stay cables of the shandong binzhou yellow river highway bridge using magnetorheological fluid dampers. **Journal of Bridge Engineering**, v. 12, n. 4, p. 401-409, 2007. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1084-0702\(2007\)12:4\(401\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1084-0702(2007)12:4(401))

LIN, K.; ZHOU, A.; LIU, H.; LIU, Y.; HUANG, C. Shear thickening fluid damper and its application to vibration mitigation of stay cable. **Structures, Elsevier**, 2020. p. 214-223. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2020.04.018>

LIPPMANN, G. Principe de la conservation de l'électricité, ou second principe de la théorie des phénomènes électriques. **Journal de Physique Théorique et Appliquée**, v. 10, n. 1, p. 381-394, 1881. <https://doi.org/10.1051/jphysap:0188100100038100>

MACHADO, D. **Caracterização aerodinâmica de cabos de pontes estaiadas submetidos à ação combinada de chuva e vento**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2008.

MAIN, J. A.; JONES, N. P. Free vibrations of taut cable with attached damper. II: Nonlinear damper. **Journal of engineering mechanics**, v. 128, n. 10, p. 1072-1081, 2002. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:10\(1072\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:10(1072))

MAKRIS, N.; CONSTANTINOU, M. C. Analysis of Motion Resisted by Friction. I. Constant Coulomb and Linear/Coulomb Friction. **Journal of Structural Mechanics**, v. 19, n. 4, p. 477-500, 1991. <https://doi.org/10.1080/08905459108905153>

MATSUMOTO, M.; SHIRAISHI, N; SHIRATO, H. Rain-wind induced vibration of cables of cable-stayed bridges. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**. Elsevier Science Publisher, v.41-44, p.2011-2022, 1992. [https://doi.org/10.1016/0167-6105\(92\)90628-N](https://doi.org/10.1016/0167-6105(92)90628-N)

MATSUMOTO, M.; SAITOH, T.; KITAZAWA, M.; SHIRATO, H.; NISHIZAKI, T. Response characteristics of rain-wind induced vibration of stay-cables of cable-stayed bridges. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**. Elsevier Science Publisher, v.57, p.323-333, 1995. [https://doi.org/10.1016/0167-6105\(95\)00010-O](https://doi.org/10.1016/0167-6105(95)00010-O)

MAZARIM, D. M. **Histórico das pontes estaiadas e sua aplicação no Brasil**. 2011. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

MCTAVISH, S.; D'AUTEUIL, A.; RAEESI, A. Effect of cable surface characteristics and flow turbulence on the aerodynamic behaviour of stay cables in dry conditions. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, v. 207, p. 104414, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2020.104414>

- MOSTAGHEL, N.; DAVIS, T. Representations of Coulomb friction for dynamic analysis. **Earthquake engineering & structural dynamics**, v. 26, n. 5, p. 541-548, 1997. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1096-9845\(199705\)26:5<541::AID-EQE660>3.0.CO;2-W](https://doi.org/10.1002/(SICI)1096-9845(199705)26:5<541::AID-EQE660>3.0.CO;2-W)
- NASHIF, A. D.; JONES, D. I. G.; HENDERSON, J. P. **Vibration Damping**. New York: John Wiley & Sons, 1985.
- NGUYEN, D. T.; VO, D. H. A Study on Combination of Two Friction Dampers to Control Stayed-cable Vibration under considering its Bending Stiffness. In: **CIGOS 2019, Innovation for Sustainable Infrastructure**. Springer, Singapore, 2020. p. 87-92. https://doi.org/10.1007/978-981-15-0802-8_10
- NI, Y. Q.; WANG X. Y.; CHEN, Z. Q.; KO, J. M. Field observations of rain-wind-induced cable vibration in cable-stayed Dongting Lake bridge. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**. Elsevier Science Publisher, v. 95, p. 303-328, 2007. <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2006.07.001>
- OGATA, K. **Modern control engineering**. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2010.
- PACHECO, B.; FUJINO, Y.; SULEKH, A. Estimation curve for modal damping in stay cables with viscous damper. **Journal of Structural Engineering**, v. 119, n. 6, p. 1961-1979, 1993. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1993\)119:6\(1961\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1993)119:6(1961))
- PENNESTRÌ, E.; ROSSI V.; SALVINI P.; VALENTINI P. P. Review and comparison of dry friction force models. **Nonlinear dynamics**, v. 83, n. 4, p. 1785-1801, 2016. <https://doi.org/10.1007/s11071-015-2485-3>
- PERSSON, B. N. J.; TOSATTI, E. (Ed.). **Physics of sliding friction**. Springer Science & Business Media, 2013.
- PHELAN, R. S.; SARKAR, P. P.; MEHTA, K. C. Full-scale measurements to investigate rain-wind induced cable-stay vibration and its mitigation. **Journal of Bridge Engineering**. American Society of Civil Engineering, v. 11, p. 293-304, 2006. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1084-0702\(2006\)11:3\(293\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1084-0702(2006)11:3(293))
- POPOVA, E.; POPOV, V. L. The research works of Coulomb and Amontons and generalized laws of friction. **Friction**, v. 3, n. 2, p. 183-190, 2015. <https://doi.org/10.1007/s40544-015-0074-6>
- PTI (POST-TENSIONING INSTITUTE). **Recommendations for stay cable design, testing and installation**. 2007.
- RABINOWICZ, E. **Friction and Wear of Materials**. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1965.
- RAO, S. **The finite element method in engineering**. Butterworth-heinemann, 2017.
- RAO, S. **Vibrações mecânicas**. Butterworth-heinemann, 4ªEd., 2009.
- REICHERT, B. A. **Application of magnetorheological dampers for vehicle seat suspensions**. 1997. Tese de Doutorado. Virginia Tech.
- RIBEIRO, L. P.; DE LIMA, A. M. G. Robust passive control methodology and aeroelastic behavior of composite panels with multimodal shunted piezoceramics in parallel. **Composite Structures**, v. 262, p. 113348, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113348>

- SAITO, T; MATSUMOTO, M.; KITAZAWA, M. Rain-wind excitation of cables on cable-stayed Higashi-Kobe Bridge and cable vibration control. **Proceedings of the Cable-Stayed and Suspension Bridges, Deauville, 1994**, v. 2, p. 507-514, 1994.
- SPENCER, B. F.; NAGARAJIAH, S. State of the art of structural control. **Journal of structural engineering**, v. 129, n. 7, p. 845-856, 2003. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2003\)129:7\(845\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2003)129:7(845))
- SVENSSON, H. **Cable-stayed bridges: 40 years of experience worldwide**. John Wiley & Sons, 2012. <https://doi.org/10.1002/9783433601044>
- TAKANO, H.; OGASAWARA, M.; ITO, N.; SHIMOSATO, T.; TAKEDA, K.; MURAKAMI, T. Vibrational damper for cables of the Tsurumi Tsubasa bridge. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, v. 69, p. 807-818, 1997. [https://doi.org/10.1016/S0167-6105\(97\)00207-9](https://doi.org/10.1016/S0167-6105(97)00207-9)
- TAN, X.; ROGERS, R. J. Equivalent viscous damping models of Coulomb friction in multi-degree-of-freedom vibration systems. **Journal of sound and vibration**, v. 185, n. 1, p. 33-50, 1995. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.0362>
- THOMSON, W. **Teoria da Vibração, com aplicações**. Ed. Interciência, 1973.
- TROITSKY, S. **Cable-stayed bridges: theory and design**. BSP Professional books, 1977.
- VIRLOGEUX, M. Recent evolution of cable-stayed bridges. **Engineering structures**, v. 21, n. 8, p. 737-755, 1999. [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(98\)00028-5](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(98)00028-5)
- WALTHER, R. **Cable stayed bridges**. Thomas Telford, 1999.
- WANG, Z. J.; ZHOU, Y.; HUANG, J. F.; XU, Y. Fluid dynamics around an inclined cylinder with running water rivulets. **Journal of Fluids and Structures**. Elsevier Science Publisher, v. 21, p. 49-64, 2005. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2005.05.017>
- WEBER, F.; HOGSBERG, J.; KRENK, S. Optimal tuning of amplitude proportional Coulomb friction damper for maximum cable damping. **Journal of Structural Engineering**, v. 136, n. 2, p. 123-134, 2010. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2010\)136:2\(123\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2010)136:2(123))
- WITTHOFT, S.; KESNER, K.; POSTON, R. W. Performance and repair design of stay cables with rain/wind-induced vibrations. **Journal of performance of constructed facilities**, v. 22, n. 6, p. 364-372, 2008. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0887-3828\(2008\)22:6\(364\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0887-3828(2008)22:6(364))
- WHITEMAN, W. E.; FERRI, A. A. Analysis of beam-like structures with displacement-dependent friction forces: Part I—Single Degree of Freedom Model. In: International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. **American Society of Mechanical Engineers**, 1995. p. 1093-1100. <https://doi.org/10.1115/DETC1995-0355>
- XU, Y. **Wind effects on cable-supported bridges**. John Wiley & Sons, 2013. <https://doi.org/10.1002/9781118188293>
- YI, K. A.; VEILLETTE, R. J. A charge controller for linear operation of a piezoelectric stack actuator. **IEEE transactions on control systems technology**, v. 13, n. 4, p. 517-526, 2005. <https://doi.org/10.1109/TCST.2005.847332>
- ZHU, X.; JING, X.; CHENG, L. Magnetorheological fluid dampers: a review on structure design and analysis. **Journal of intelligent material systems and structures**, v. 23, n. 8, p. 839-873, 2012. <https://doi.org/10.1177/1045389X12436735>