

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

ANTÔNIO PORTILHO DAUD

**PROPOSTA DE APOSTILA
PARA LABORATÓRIO DE INTRODUÇÃO À FÍSICA**

UBERLÂNDIA
2022

ANTÔNIO PORTILHO DAUD

**PROPOSTA DE APOSTILA
PARA LABORATÓRIO DE INTRODUÇÃO À FÍSICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Física da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Bacharel em Física Médica.

Orientador: Prof. Dr. Djalmir Nestor Messias

UBERLÂNDIA
2022

AGRADECIMENTOS

Diante da conclusão desse trabalho, é importante ressaltar o apoio de todas as pessoas e instituições ao meu redor que contribuíram, cada um de sua forma, para a conclusão deste trabalho.

Agradeço primeiramente à Universidade Federal de Uberlândia, que providenciou o espaço físico, materiais e condição humana para minha formação acadêmica e realização deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Djalmir Nestor Messias pela atenção, disponibilidade, paciência e pontualidade não só para a minha orientação neste trabalho, mas também para o ensino competente de Física Básica.

A todos os docentes do Instituto de Física da Universidade Federal de Uberlândia, por produzirem ciência em um país que isso é tão pouco valorizado.

Aos meus pais, que sempre colaboraram emocionalmente e financeiramente para os meus estudos. É fato que, sem eles, eu não seria capaz de sequer começar uma graduação.

Ao meu irmão Augusto, pelos exagerados momentos de descontração e bom humor.

Aos meus amigos, pelos ainda mais exagerados momentos de descontração. Esses, com certeza, elevaram minha autoestima e tranquilidade ao ponto de me sentir capaz de fazer este trabalho.

RESUMO

Diante das dificuldades dos discentes ingressantes nas disciplinas de laboratório, o curso de Física Licenciatura adotou algumas disciplinas para levar os alunos ao nível de conhecimento desejado. Dentre elas, a criação da disciplina Laboratório de Introdução à Física (INFIS31103), que busca ensinar os conceitos básicos de uma aula prática experimental. A bibliografia por trás do que é ensino nessa disciplina é bem heterogênea, por isso esse trabalho se propôs a fazer uma revisão bibliográfica unificando o conteúdo na forma de uma apostila. Esse material reuniu os assuntos: metodologia científica; análise dimensional; incertezas em medidas; confecção de gráficos e tabelas; e roteiros para atividades práticas. Os capítulos contêm sugestões de exercícios e os roteiros foram testados e avaliados previamente. A disciplina Laboratório de Introdução à Física é, até o presente momento, uma exclusividade da Física Licenciatura, mas é possível dizer que o material (e a própria disciplina) poderia ser útil aos cursos de Física Médica e Física de Materiais.

Palavras-chave: Física; Ensino; Laboratório de Introdução à Física; Roteiros.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	4
2	METODOLOGIA CIENTÍFICA.....	6
2.1	O Método.....	6
2.2	Conhecimento popular x Conhecimento científico	6
2.3	O Método Científico	9
3	ANÁLISE DIMENSIONAL	12
3.1	Grandezas físicas e unidades de medida	12
3.2	Princípio da Homogeneidade dimensional.....	13
3.3	Exercícios sobre análise dimensional:	16
4	INCERTEZAS EM MEDIDAS	17
4.1	Introdução	17
4.2	Exercícios sobre incertezas em medidas:	20
4.3	Registrando os erros.	21
4.4	Exercícios sobre registro adequado de erros.....	23
4.5	Propagação de erros	23
4.6	Derivadas na propagação de erros.....	24
4.7	Exercícios sobre propagação de erros.....	26
5	CONFECÇÃO DE GRÁFICOS E TABELAS.....	27
5.1	Tabelas.....	27
5.2	Gráficos	27
5.3	Linearização	30
5.4	Exercícios sobre linearização	37
6	ROTEIROS PARA ATIVIDADES PRÁTICAS	39
6.1	Medida da espessura de uma folha de papel.....	39
6.2	Dinâmica de queda de uma folha de papel.....	43
6.3	Aproximação no período de oscilação de um pêndulo.....	48

6.4	Meia vida de uma espuma.....	51
6.5	Lei de resfriamento de Newton	54
6.6	Estudo de formação de crateras	59
6.7	Dimensão Fracionária.....	64
7	CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS	68
	BIBLIOGRAFIA.....	69

1 INTRODUÇÃO

É comum a todos os cursos de graduação em Física a presença de matérias práticas de experimentação. É fato que os alunos recém chegados do ensino médio têm normalmente pouca ou nenhuma experiência com as teorias básicas que regem uma disciplina em laboratório e com as próprias práticas experimentais de laboratório. Alguns exemplos de tópicos desconhecidos pelos alunos são: método científico, teoria dos erros, análise dimensional e até mesmo como escrever um relatório científico. Tendo isso em vista, o curso de Física Licenciatura adotou algumas disciplinas para levar os alunos ao nível desejado de conhecimento. Entre elas a disciplina de Laboratório de Introdução à Física (INFIS31103), que é uma disciplina introdutória de atividades experimentais do curso de Licenciatura em Física. Esta disciplina foi implementada no curso de licenciatura a partir do currículo 2019-1 e atende aos alunos ingressantes neste curso. Em sua ementa consta: “Realização de medidas, análise dimensional, gráficos, confecção de relatórios. Introdução a ferramentas digitais como planilhas, softwares gráficos, tratamento de vídeos, e uso de dispositivos móveis como instrumento de investigação (câmera, acelerômetro, bússola, e outros).” No entanto, ainda não existe disponível nenhum material bibliográfico próprio de suporte (na forma de livros específicos ou apostilas). Com isso, os alunos se utilizam de materiais bibliográficos de diversas fontes simultaneamente, o que impacta na compreensão dos conceitos a serem adquiridos. Nesse sentido, este projeto se dispõe a organizar o referencial teórico e prático da disciplina em um único material. Esta apostila se propõe a fazer uma revisão bibliográfica sobre os seguintes tópicos: introdução ao método científico; análise dimensional; introdução a erros em medidas; propagação de erros; e confecção e análise de gráficos e tabelas. Além disso, esse material conta com propostas para atividades práticas em laboratório que foram testadas e avaliadas em semestres anteriores.

A maioria dos roteiros propostos foram originalmente escritos para o ensino remoto (semestres 2020/2º Per. Esp. e 2021/1), logo foram testados, avaliados e corrigidos quando necessário, com o objetivo de adaptá-los ao novo contexto de ensino presencial. Além disso, foram descritos os resultados esperados para cada experimento testado, de forma a guiar alunos e professores em seus experimentos. Sendo assim, espera-se com esse trabalho: consolidar a disciplina Laboratório de Introdução à Física junto ao curso de Licenciatura em Física; guiar os alunos de forma mais eficiente na aplicação do método científico com ênfase na tomada e análise de dados e na escrita de um relatório científico;

facilitar, para professores e alunos, o acesso ao conteúdo consolidado do curso em um documento bibliográfico único na forma de uma apostila; otimizar as práticas já em uso, adequando-as ao ensino presencial e desenvolver novas práticas experimentais.

Será apresentado nos próximos capítulos o conteúdo da apostila proposta.

2 METODOLOGIA CIENTÍFICA

2.1 O Método

Todos nós conhecemos muitos métodos. Mesmo que inconscientemente, fazemos o uso deles nas atividades mais rotineiras do dia-a-dia, como escovar os dentes, preparar uma comida ou comprar algo em uma loja. É possível notar que, na maioria das atividades, há uma ordem específica de passos a serem seguidos, ou há pelo menos etapas que não podem ser realizadas sem a conclusão de outras. Não é possível escovar os dentes sem passar o creme dental na escova, ou preparar uma comida sem ter os ingredientes em mãos. Além disso, todos esses conjuntos de etapas têm um objetivo específico. Resumidamente um método é, de acordo com Aurélio Buarque de Holanda, *“Um caminho pelo qual se chega a um determinado resultado, ainda que esse caminho não tenha sido fixado de antemão de modo deliberado e refletido”* (2010, p.925).

Porém, não estamos interessados em um método para chegarmos a um objetivo qualquer, almejamos adquirir conhecimento científico. É importante então entendermos o que é esse tipo de conhecimento, e como diferenciá-lo do senso comum.

2.2 Conhecimento popular x Conhecimento científico

A diferença entre o conhecimento popular e o conhecimento científico não está na veracidade ou no objeto de estudo em si. A diferença está na forma pela qual o conhecimento é adquirido. Analisemos o seguinte exemplo: um fazendeiro sabe que a prática da monocultura (cultivo de somente um tipo de produto agrícola) “desgasta” a terra se não for feita a rotação de culturas. Ele pode ter descoberto isso porque alguém lhe contou ou por ter observado que após variar uma vez o tipo de plantio a produção aumentou. Nota-se em ambos os casos que ele não saberá se a técnica (rotação de culturas) funcionará em outro tipo de plantio, em outro lugar do mundo, ou se até mesmo as condições climáticas de cada ano influenciaram esse resultado. Por outro lado, ele pode ter descoberto isso pois estudou a composição do solo, as diferenças entre espécies de plantas e conhecia o ciclo reprodutivo das pragas. Com essas informações em mãos, ele testou várias vezes a rotação de culturas, e concluiu que essa técnica aumentava a produtividade porque não “desgastava” o solo.

Com isso, nota-se que a ciência não é a única forma de acesso ao conhecimento e à verdade. Além disso, um mesmo objeto de estudo pode ser observado por um cientista

e um homem comum. O que leva um ao conhecimento científico e outro ao conhecimento popular (ou senso comum) é o método pelo qual chegaram à sua conclusão.

O conhecimento científico tem algumas características importantes (além de ser construído pelo método científico), e essas serão citadas e explicadas resumidamente a seguir ((Lakatos & Marconi 1992,p 26-37) (Galliano 1979, p 24-30)):

- **Racional:** O conhecimento científico racional é aquele constituído por conceitos, julgamentos e raciocínio. O cientista deve deixar de lado sentimentos e sensações subjetivas.
- **Objetivo:** O conhecimento objetivo é aquele que concorda com o objeto ou fato sendo estudado. Tenta alcançar exatidão com a realidade, utilizando de observação, experimentos e investigações disponíveis.
- **Baseado em fatos:** O conhecimento científico atém-se aos fatos. Parte deles e retorna a eles. Um exemplo é a observação da marcação do tempo em um cronômetro (fato). Porém, nem sempre é possível ou desejável respeitar a integridade dos fatos, às vezes é necessário interferir com o intuito de obter dados significativos das propriedades reais dos fatos. Contudo, é preciso que a interferência seja claramente definida e controlável, para que a avaliação ainda conte com exatidão.
- **Transcendente aos fatos:** O conhecimento popular costuma se apegar à aparência dos fatos sem tentar explicá-los. Ao analisar um fato, o conhecimento científico não somente trata de explicá-lo, como também busca descobrir suas relações com outros fatos e explicá-las.
- **Analítico:** A ciência decompõe os problemas a fim de melhor analisar suas partes separadas. Ao encontrar soluções individuais para as partes, busca-se entender as relações entre elas e integrar as soluções resolvendo o problema original.
- **Exato e claro:** No conhecimento científico não há espaço para obscuridades. Como o mesmo está sempre sendo submetido a verificações, é essencial que o conhecimento seja exato e claro, para que todos possam entendê-lo e reproduzi-lo. Mesmo quando há incertezas, é necessário que as mesmas sejam especificadas.

- **Comunicável:** O conhecimento científico deve ter uma linguagem que permita a qualquer leitor instruído entendê-lo. A linguagem deve ter caráter informativo e claro, de forma que outras pessoas possam reproduzir e verificar seus dados e hipóteses.
- **Verificável:** Hipóteses feitas a partir da observação só podem ser consideradas científicas quando são testadas por experiências ou demonstrações. É claro que, a norma de que hipóteses devem ser confirmadas ou falseadas com base na verificação depende do objeto de estudo e da tecnologia disponível.
- **Depende de Investigação Metódica:** O cientista planeja seu trabalho de forma que sabe o que quer descobrir e como proceder para chegar a tal objetivo. O conhecimento não resulta de um único trabalho, o investigador parte de hipóteses já confirmadas para realizar seu estudo. Além disso, obedece a um método pré-estabelecido, com etapas, normas e técnicas.
- **Sistemático:** O conhecimento científico é composto de ideias logicamente correlacionadas. Um conjunto básico de hipóteses comprovadas ou princípios fundamentais constitui uma teoria, e um conjunto de teorias constitui uma ciência.
- **Geral:** O conhecimento científico busca generalizar regras que regem fatos isolados para o resto do universo, por meio de “leis naturais” e “leis sociais”. E quando essas leis são alcançadas, parte em busca de novas leis.
- **Explicativo:** O conhecimento científico tenta explicar o “porquê” das coisas. Não se atém a explicar a ocorrência de fatos isoladamente, mas busca em outros fatos relações e motivações que justifiquem os primeiros. Apesar disso, a explicação causal dos fatos é apenas um dos vários tipos de explicação científica.
- **Preditivo:** Baseando-se em um conhecimento científico prévio, é possível prever com variável grau de exatidão a ocorrência de algum evento. A predição científica não é infalível, visto que depende de leis e informações. Apesar disso, a falha de uma previsão pode trazer valioso conhecimento sobre a eficácia de uma lei, a qualidade de uma informação, etc.
- **Aberto:** O conhecimento científico depende das circunstâncias da época, como técnicas, ferramentas e conhecimento adquirido. Com isso, os resultados obtidos não são definitivos. Além disso, a ciência é controvertida e aberta justamente por ser falível. É importante para o avanço do conhecimento que seja questionado o que se sabe.

- **Útil:** A ciência é útil pois em sua busca são criadas técnicas e ferramentas adequadas para a investigação, e ao compreender as coisas é possível manipulá-las. Há também o olhar do avanço tecnológico, que depende da solução de problemas científicos.

2.3 O Método Científico

Agora vamos tratar do método científico e algumas de suas características. É importante ressaltar que ele não é uma receita única e infalível que nos conduz a resultados científicos. Dadas as várias frentes da ciência (Física, Química, Antropologia, História, Computação, etc), existem várias formas de se chegar ao conhecimento científico. O que o método faz é proporcionar uma orientação geral que facilita ao cientista planejar sua investigação, formular suas hipóteses, realizar suas experiências e interpretar seus resultados.

Uma possível definição para o método científico é: “Em linhas gerais, método científico é um instrumento utilizado pela ciência na sondagem da realidade, mas um instrumento formado por um conjunto de procedimentos, mediante os quais os problemas científicos são formulados e as hipóteses científicas são examinadas.” (Galliano 1979, p 32)

Antes de apresentar algum método, é importante salientar que a ciência possui dois grandes grupos, as ciências formais e as ciências factuais. Entre as diferenças, é importante destacar o método pelo qual se alcança cada uma delas. Os métodos dedicados às ciências formais (Matemática, Filosofia, Estatística, etc) contentam-se com a lógica e a dedução para demonstrar seus teoremas. Já para as ciências factuais (Física, Biologia, Química, etc), é necessário efetuar experimentos alterando os objetos, fenômenos ou processos para verificar até que ponto suas hipóteses se ajustam aos fatos. (Lakatos & Marconi 1992, p 25)

Como estamos tratando de uma apostila cujo objeto de estudo é a Física, é importante usarmos como exemplo um método voltado para as ciências factuais (que contenha uma etapa de experimentação). Para simplificar, tomaremos como exemplo o método de Galileu, que pode ser descrito como indução experimental. Em outras palavras, esse método tenta chegar a uma lei geral observando um certo número de casos particulares. Ele pode ser dividido em alguns passos (Lakatos & Marconi 1992, p 42):

- a) **observação** dos fenômenos;
- b) **análise** dos elementos constitutivos desses fenômenos, com a finalidade de estabelecer relações quantitativas entre eles;
- c) **indução** de certo número de hipóteses, tendo por fundamento a análise da relação desses elementos constitutivos dos fenômenos;
- d) **verificação** das hipóteses aventadas por intermédio de experiências;
- e) os resultados obtidos através de experimentos devem ser comparados com o que foi previsto nas hipóteses levantadas. Caso a resposta não seja satisfatória, uma ou mais **iterações** (repetições com pequenas melhorias) experimentais podem ser feitas até que a resposta obtida seja considerada satisfatória para confirmar ou refutar as hipóteses;
- f) **generalização** do resultado das experiências para casos similares;
- g) **confirmação** das hipóteses, obtendo-se, a partir dela, leis gerais.

Para ilustrar, vamos utilizar um simples exemplo:

Um empresário deseja promover o seu vendedor mais produtivo a gerente, e para isso utilizará o critério “número de vendas por hora trabalhada” (repare que todo o processo começa com uma **pergunta** a ser respondida: “*qual o vendedor mais produtivo?*”).

- Ele entende que o problema envolve todos os seus funcionários, e a razão do número de vendas de cada um pela quantidade de horas trabalhadas, então ele coleta esses dados (**análise**);
- Nesse problema há várias hipóteses: (**indução**);
 1. O vendedor A é o mais produtivo;
 2. O vendedor B é o mais produtivo;
 3. O vendedor C é o mais produtivo;
- Ele **verifica** qual dos vendedores possui a maior razão “venda/hora”;
- Ele **confirma** qual vendedor será promovido a gerente.

Repare que nem todos os passos do método foram utilizados. Como citado antes, o método científico não é uma receita, ele apenas orienta quem faz uso dele. Apesar disso, é importante

lembrar que para os resultados terem valor científico, é preciso que o investigador se esforce para seguir o método.

3 ANÁLISE DIMENSIONAL

3.1 Grandezas físicas e unidades de medida

Agora falando sobre os elementos de estudo em laboratório, começaremos conceituando **grandezas físicas**: são elementos que podem ser definidos quantitativamente com o objetivo de facilitar o estudo ou descrição de um fenômeno físico. São exemplos: massa, tempo, pressão, temperatura, força.

Medir uma grandeza física significa compará-la com uma **unidade padrão**. Então, para medir uma grandeza física deve-se:

- a) Eleger uma unidade de medida adequada para aquela grandeza;
- b) Checar, utilizando um instrumento de medida adequado, quantas vezes essa grandeza está contida ou contém a unidade eleita;
- c) O resultado dessa comparação é a medida desejada.

Falando mais profundamente sobre as unidades de medida, em 1971, a 42ª Conferência Geral de Pesos e Medidas escolheu sete grandezas como fundamentais, formando assim a base do Sistema Internacional de Unidades, abreviado como SI e popularmente conhecido como sistema métrico. Muitas unidades secundárias são definidas em termos das unidades de medidas fundamentais. Por exemplo, a unidade no SI para potência, o watt (W), é definido termos de massa, comprimento e tempo:

$$1 \text{ watt} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^3$$

Na tabela a seguir estão as sete unidades fundamentais do Sistema Internacional.

Grandeza	Unidade	Símbolo	Símbolo dimensional
Comprimento	metro	m	L
Tempo	segundo	s	T
Massa	quilograma	kg	M
Corrente elétrica	ampère	A	I
Intensidade Luminosa	candela	cd	I_0
Temperatura termodinâmica	kelvin	K	θ
Quantidade de matéria	mol	mol	N

Tabela 1: Unidades fundamentais do SI (Halliday, Resnick, & Walker 1983, p 2)

3.2 Princípio da Homogeneidade dimensional

Esse princípio diz que todos os termos de uma equação devem possuir a mesma dimensão. Vamos estabelecer então algumas propriedades de equações dimensionais:

G = grandeza física qualquer, definida por outras grandezas A e B .

$[X]$ = dimensão de uma grandeza física X .

a) Propriedade da multiplicação:

$$G = A \cdot B \quad (1)$$

$$[G] = [A \cdot B] = [A] \cdot [B] \quad (2)$$

b) Propriedade da divisão:

$$G = A/B \quad (3)$$

$$[G] = [A]/[B] \quad (4)$$

c) Propriedade da potenciação:

$$G = A^n \quad (5)$$

$$[G] = [A]^n \quad (6)$$

É importante ressaltar que essa análise depende somente do **tipo** da grandeza (comprimento, tempo, massa) e não de sua medida (3 metros, 2 horas, 3 gramas).

Analiseemos um exemplo: Mostre, usando dois elementos de geometria plana diferentes, que a dimensão de uma área é L^2 , onde L representa a dimensão de comprimento.

Resolução:

Vamos primeiro analisar o caso de um retângulo, cuja área A é dada pelo produto de dois lados consecutivos a e b .

$$A = a \cdot b \quad (7)$$

$$[A] = [a] \cdot [b] \quad (8)$$

Sabemos que $[a] = [b] = L$ (a dimensão dos lados é comprimento), portanto:

$$[A] = L^2 \quad (9)$$

Agora analisemos o caso de um círculo de área $B = \pi \cdot r^2$, onde r é o raio:

$$[B] = [\pi] \cdot [r]^2 \quad (10)$$

Sabemos que π é uma constante adimensional (sem dimensão) e que $[r] = L$, portanto:

$$[B] = L^2 \quad (11)$$

Além de determinarmos as dimensões, a análise dimensional nos permite prever expressões, através do **Teorema de Bridgman**. Esse, afirma que se for comprovado experimentalmente que uma grandeza X depende de outras grandezas $A, B, C \dots$ independentes entre si, então:

$$X = k \cdot A^\alpha \cdot B^\beta \cdot C^\gamma \quad (12)$$

Onde k é uma constante de proporcionalidade, que pode possuir dimensões ou não. E α, β e γ são expoentes quaisquer a serem definidos por aplicação do Teorema de Bridgman e análise dimensional.

Vejamos um exemplo: Determine o período P de oscilação de um pêndulo simples, sabendo que esse depende da aceleração gravidade g , e do comprimento do fio l .

Resolução:

De acordo com o Teorema de Bridgman, é possível escrever o período como:

$$P = k \cdot g^\alpha \cdot l^\beta \quad (13)$$

Façamos então a análise dimensional (vamos pressupor que k seja adimensional a princípio):

$$[P] = [g]^\alpha \cdot [l]^\beta \quad (14)$$

Porém, as dimensões da gravidade e do comprimento do fio são:

$$[g] = L \cdot T^{-2} \text{ e } [l] = L. \quad (15)$$

então:

$$[g]^\alpha = L^\alpha \cdot T^{-2\alpha}, [l]^\beta = L^\beta \text{ e } [P] = T, \quad (16)$$

Logo, substituindo na equação (13):

$$T^1 = L^{\alpha+\beta} \cdot T^{-2\alpha} \quad (17)$$

Conseguimos com isso, comparando os expoentes de cada grandeza, o sistema:

$$1 = -2\alpha \quad (18)$$

$$0 = \alpha + \beta \quad (19)$$

Cujas soluções são $\alpha = -\frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{2}$. Agora, usemos do princípio da homogeneidade dimensional para checar se k necessita de dimensões:

$$T^1 = k^n \cdot L^{(-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2})} \cdot T^{-2 \cdot (-\frac{1}{2})} \quad (20)$$

$$T^1 = k^n \cdot T^1 \quad (21)$$

$$\therefore n = 0 \quad (22)$$

Isso nos mostra que k é adimensional e nos permite escrever a equação original como:

$$P = k \cdot l^{\frac{1}{2}} \cdot g^{-\frac{1}{2}} \quad (23)$$

$$P = k \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (24)$$

Da literatura sabemos que k vale 2π . Apesar disso, a constante pode ser determinada experimentalmente no laboratório.

3.3 Exercícios sobre análise dimensional:

- a) Define-se intensidade I de uma onda como a razão entre a potência que essa onda transporta por unidade de área perpendicular à direção dessa propagação. Considere que para uma certa onda de amplitude a , frequência f e velocidade v , que se propaga em um meio de densidade ρ , foi determinada que a intensidade é dada por: $I = 2\pi^2 f^x \rho v a^y$. Indique quais são os valores adequados para x e y .
- b) Seja F = força, M = massa, V = volume e E = energia. Os valores de x , y e n para que a equação: $(F)^x (M)^y = (V)(E)^n$ seja dimensionalmente correta, são?
- c) Um estudante de física resolvendo certo problema chegou à expressão final: $F = 2(m_1 + m_2)vt^2$, onde F representa uma força, m_1 e m_2 representam massas, v é uma velocidade linear e t é o tempo. Outro estudante resolvendo o mesmo problema chegou à expressão: $F = 2(m_1 + m_2)vt^{-1}$. Mesmo sem conhecer os detalhes do problema você deve ser capaz de verificar qual das respostas acima obviamente deve estar errada. Explique qual delas é certamente errada.
- d) No Sistema Internacional de Unidades (SI), as sete unidades de base são o metro (m), o quilograma (kg), o segundo (s), o kelvin (K), o ampere (A), a candela (cd) e o mol (mol). A lei de Coulomb da eletrostática pode ser representada pela expressão $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$, onde Q é o valor da carga, r é a distância entre elas e ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo. Sobre a constante ϵ_0 responda se ela possui dimensões, se sim, qual sua unidade em função das unidades básicas do SI.

4 INCERTEZAS EM MEDIDAS

4.1 Introdução

Quando medimos alguma grandeza, é importante saber que o valor encontrado nunca é exatamente o seu valor verdadeiro. Para isso existem as **incertezas** e os **erros**, eles quantificam o grau de confiabilidade de alguma medida.

As incertezas e os erros são quantificados da mesma forma, mas possuem significados ligeiramente diferentes. As incertezas estão associadas a valores desconhecidos de grandezas que medimos. Um exemplo seria medir a distância entre duas paredes de seu quarto. Não importa o quanto seja preciso seu instrumento ou quanta habilidade você tenha, sempre haverá um limite para a precisão, e essa será quantificada como incerteza. Já o erro está relacionado ao desvio de um valor conhecido. Posicione-se um peso padrão de 500g sobre uma balança, e a mesma retorna um valor de 508g. Consta-se que há um erro de 8g na medida.

Para o curso em questão essas diferenças não são muito importantes. Uma classificação mais útil seria quanto ao tipo de incerteza. São elas:

- **Incertezas aleatórias:** são aquelas que surgem devido à repetição de medidas. Ela pode ser quantificada pelo **erro estatístico** $\Delta_{estat} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$. Onde s_x é o desvio padrão e N é o número de medidas tomadas. A quantidade s_x mostra o quanto os dados variaram com relação à sua média aritmética, um desvio menor mostra medidas mais confiáveis.

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}{(N-1)}} \quad (25)$$

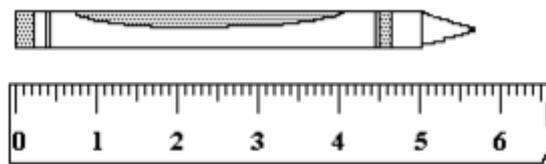
Onde \bar{x} é a média aritmética das medidas, x_i é uma medida independente qualquer e N é o número de medidas tomadas.

- **Incertezas sistemáticas:** são aquelas que surgem devido à técnica de quem mediu e ao instrumento. A primeira é chamada de operacional, e ocorre devido à imperícia no manuseio dos instrumentos de medidas ou falta de rigor do experimentador. Essa incerteza não será quantificada pois é trabalho do investigador minimizar os erros operacionais. Já a segunda é chamada de **erro**

instrumental Δ_{instr} , que surge devido a instrumentos mal calibrados, com defeito ou devido às limitações de precisão do instrumento. Nos casos de calibração ou defeito o erro não será quantizado, já para as limitações de precisão há como o investigador quantificar a incerteza.

- a) Para instrumentos analógicos ou não digitais a incerteza é convencionalmente pela metade da menor medida na escala do instrumento. Exemplo: se a menor marcação de uma régua for de 1 mm, o seu erro instrumental será de 0,5 mm. (Note que quanto maior a precisão menor o erro instrumental).

Figura 1: Medição de comprimento de um lápis utilizando uma régua com escala 1 mm.



Fonte: <http://www.leb.esalq.usp.br/leb/aulas/lce5702/medicao.pdf>

- b) Para instrumentos digitais a convenção é o usar a menor medida *da escala escolhida* no aparelho como erro instrumental. Um exemplo é a escolha de duas escalas no multímetro para medir a tensão em uma fonte de alimentação.

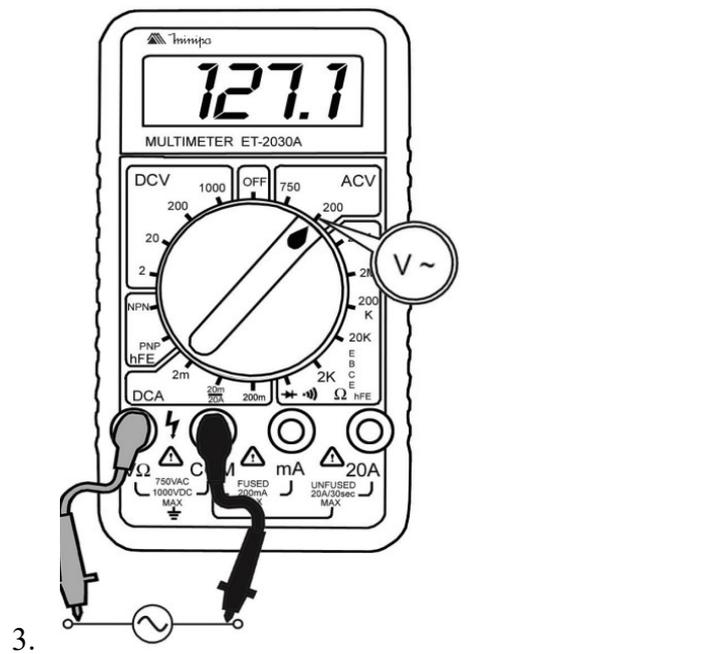
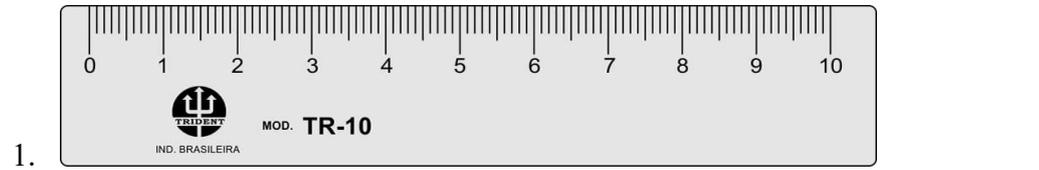
Figuras 2 e 3: Medição da tensão em uma fonte usando as escalas de 20 V (erro instrumental 0,01 V) à esquerda e 200 V (erro instrumental 0,1 V) à direita. Fonte: Autor.



Nota-se que em ambos os casos a unidade do instrumento é volt, porém na imagem 2 a incerteza é de 0,01 V e na imagem 3 a incerteza é de 0,1 V. Isso mostra a importância da escolha de uma boa escala para as medições. É papel do investigador, além de registrar com honestidade as incertezas, minimizá-las.

4.2 Exercícios sobre incertezas em medidas:

- a) Determine a incerteza instrumental e a unidade dos instrumentos a seguir:





4.

- b) Utilizando um paquímetro, foram calculadas várias medidas de comprimento de um bastão de polietileno de alta densidade, conforme mostrado abaixo:

L (cm)	13,75	13,70	13,70	13,80	13,75	13,70	13,75	13,65	13,75	13,85	13,65
--------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

A partir desses dados, determine a média dos valores medidos, o desvio padrão, o erro estatístico e o erro instrumental.

4.3 Registrando os erros.

Uma medida só tem valor se estiver registrada junto a ela a sua incerteza. Para isso, escreve-se: $\bar{x} \pm \Delta_{total}$, onde \bar{x} é a média aritmética das medidas e σ_{total} é o erro que combina os erros de natureza aleatória (estatístico) com o erro instrumental através da fórmula (IWAMOTO, p.9):

$$\Delta_{total} = \sqrt{(\Delta_{estat})^2 + (\Delta_{instr})^2}. \quad (26)$$

Além disso, o registro das medidas e dos erros segue algumas regras:

1. O erro deve possuir apenas 1 algarismo significativo. São considerados algarismos significativos:
 - a) Qualquer algarismo diferente de 0.
 - b) O número 0 entre dois algarismos significativos (exemplos: 1003; 2,305).
 - c) O número 0 à direita de algarismos significativos (exemplos: 0,50; 2,3560).

2. Caso o erro possua mais de 1 algarismo significativo, ele deve ser ajustado ou arredondado de acordo com as regras:
 - a) Os algarismos 1, 2, 3 e 4 devem ser arredondados para baixo, ou seja, o algarismo precedente deve-se manter inalterado (exemplo: 3,4 e 0,73 serão arredondados para 3 e 0,7 respectivamente).
 - b) Os algarismos 5, 6, 7, 8 e 9 devem ser arredondados para cima, ou seja, deve-se somar em 1 o algarismo precedente (exemplo: 0,98 e 37 devem ser arredondados para 1 e 40 respectivamente).

3. A quantidade de casas decimais apresentada no valor médio da grandeza deve concordar com a quantidade de casas decimais da incerteza. Caso isso não ocorra, o valor médio deve ser ajustado ou arredondado de acordo com as regras acima.

Vejamos alguns exemplos de ajuste de erros e medidas:

- $123 \pm 0,3 \text{ cm}$. O erro possui apenas um algarismo significativo, porém a medida não possui a mesma quantidade de casas decimais do erro. A forma correta seria $123,0 \pm 0,3 \text{ cm}$.
- $240 \pm 12 \text{ g}$. O erro possui 2 algarismos significativos, ele deve ser arredondado para 10 e ajustado por potências de dez para 1×10 . Para que a medida concorde com seu erro, a notação ficaria $(24 \pm 1) \times 10 \text{ g}$.
- $0,569 \pm 0,0487 \text{ m}$. O erro possui 3 algarismos significativos, por isso deve ser arredondado em etapas $0,0487 \Rightarrow 0,049 \Rightarrow 0,05$. Já a medida deve ser arredondada para que o seu algarismo mais à direita esteja na mesma casa do algarismo significativo do erro, logo $0,569 \pm 0,0487 \text{ m} \Rightarrow 0,57 \pm 0,05 \text{ m}$.
- $3 \pm 0,01 \text{ m}$. O erro está escrito de forma correta, porém a medida não concorda com o erro em casas decimais. Portanto, a escrita correta é $3,00 \pm 0,01$.

4.4 Exercícios sobre registro adequado de erros.

a) Julgue se as seguintes medidas estão com seus erros registrados corretamente, caso não estejam, reescreva-as da forma adequada:

1. $300 \pm 10 \text{ m/s}$.
2. $0,037 \pm 0,01 \text{ g}$.
3. $(5,4 \pm 0,5) \times 10^2 \text{ cm}^2$.
4. $0,2 \pm 0,0021 \text{ J}$.
5. $1,0 \pm 0,7 \text{ m}$.
6. $1370 \pm 45 \text{ min}$.
7. $2,5 \pm 0,10 \text{ km/h}$.
8. $(13 \pm 0,5) \times 10^3 \text{ eV}$.
9. $(1354 \pm 50) \times 10^{-3} \mu\text{s}$.

b) A partir dos dados do exercício 4.2 b) de Introdução a incertezas em medidas, determine o erro total da média dos comprimentos.

4.5 Propagação de erros

Na maioria das vezes os valores pelos quais se interessa não podem ser medidos diretamente. São medidas então as chamadas grandezas de entrada e, a partir de relações matemáticas, são encontradas as grandezas de saída que se tem interesse. Com isso, é preciso saber como o erro da grandeza de entrada reflete no erro da grandeza de saída, e para isso existe a **propagação de erros**. Para ilustrar melhor, usemos de um exemplo:

Deseja-se encontrar o valor da densidade ρ de uma bola de Tênis, a qual possui massa $56,0 \pm 0,1 \text{ g}$ e volume $153,0 \pm 0,2 \text{ cm}^3$. Usando a relação $\rho = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}$, temos que $\rho = 0,36601307 \text{ g/cm}^3$. Porém, quantos desses algarismos podemos ter realmente certeza do valor? Em outras palavras, qual a incerteza de ρ ?

Para resolver o problema, vamos propagar os erros das medidas iniciais de massa e volume (grandezas de entrada) para a densidade (grandeza de saída) usando da relação (Taylor 2012):

$$\sigma_S = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial e_1}\right)^2 (\sigma e_1)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial e_2}\right)^2 (\sigma e_2)^2 + \dots + \left(\frac{\partial S}{\partial e_n}\right)^2 (\sigma e_n)^2} \quad (27)$$

Onde σ_S é o erro da grandeza de saída, e_n é a n -ésima grandeza de entrada e σe_n é o erro da n -ésima grandeza de entrada. A operação $\frac{\partial S}{\partial e_n}$ significa *derivada parcial de S com relação a n -ésima grandeza de entrada* (falaremos melhor dessa operação depois). Agora aplicando a propagação no problema da densidade:

$$\sigma_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m}\right)^2 (\sigma m)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial V}\right)^2 (\sigma V)^2} \quad (28)$$

$$\sigma_\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{V}\right)^2 (0,1)^2 + \left(-\frac{m}{V^2}\right)^2 (0,2)^2} \quad (29)$$

$$\sigma_\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{153}\right)^2 (0,1)^2 + \left(-\frac{56}{(153)^2}\right)^2 (0,2)^2} \quad (30)$$

$$\sigma_\rho = \sqrt{6,56 \times 10^{-7}} \quad (31)$$

$$\sigma_\rho \simeq 0,0008 \text{ (já fazendo o arredondamento adequado)} \quad (32)$$

Com isso, é possível fazer o registro correto do valor da densidade: $0,3660 \pm 0,0008 \text{ g/cm}^3$. É importante notar que, se uma das grandezas de entrada dependesse de outra, por exemplo se o volume dependesse do raio da bola, seria necessário que o erro medido nesse raio fosse propagado para o volume, e só depois o erro do volume seria propagado para a densidade.

4.6 Derivadas na propagação de erros

Deve-se olhar com mais atenção para a operação $\frac{df(x)}{dx}$. É possível que boa parte dos leitores não tenha familiaridade com derivadas. A intenção desse material é introduzir brevemente essa operação, de forma que o estudante seja capaz de propagar erros.

É importante constatar primeiramente que uma derivada é uma operação sobre uma função $f(x)$ que resultará em uma outra função $f'(x)$ (se pronuncia “f linha de x”), onde $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$. A segunda forma (chamada de notação de Leibniz) serve para explicitar com relação a qual variável se está derivando. No caso $f(x)$ está sendo derivada com relação a x . É importante saber com relação a qual variável se está derivando, pois na maioria das vezes as funções dependem de mais de uma variável, por exemplo $f(x, y, z) = x \cdot y + z$. (Stewart 2014, p 131)

Para a propagação de erros, é mais importante sabermos como encontrar $f'(x)$. Para este curso usaremos principalmente os erros já propagados das funções descritas na tabela abaixo.

Tabela 2: Derivadas e propagação de erro de algumas funções.

Tipos de função	Derivada	Erro propagado para Δf
$f(x) = k \cdot x$	$k = \text{constante}, \frac{df}{dx} = k$	$\Delta f = \sqrt{(k)^2(\sigma x)^2}$
$f(x) = x^n$	$n = \text{constante}, \frac{df}{dx} = nx^{n-1}$	$\Delta f = \sqrt{(nx^{n-1})^2(\sigma x)^2}$
$f(x, y, z) = x + y + z$	$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 1$	$\Delta f = \sqrt{1(\sigma x)^2 + 1(\sigma y)^2 + 1(\sigma z)^2}$
$f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$	$\frac{\partial f}{\partial x} = yz; \frac{\partial f}{\partial y} = xz; \frac{\partial f}{\partial z} = xy$	$\Delta f = \sqrt{(yz)^2(\sigma x)^2 + (xz)^2(\sigma y)^2 + (xy)^2(\sigma z)^2}$
$f(x, y) = \frac{x}{y}$	$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}; \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$	$\sigma f = \sqrt{\left(\frac{1}{y}\right)^2(\sigma x)^2 + \left(-\frac{x}{y^2}\right)^2(\sigma y)^2}$

$f(x) = \ln x$ ou $f(x) = \log x$	$k = \text{constante}, \frac{df}{dx} = \frac{1}{x}$	$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 (\sigma x)^2}$
$f(x) = e^{k \cdot x}$	$k = \text{constante}, \frac{df}{dx} = k e^{kx}$	$\Delta f = \sqrt{(k e^{kx})^2 (\sigma x)^2}$
$f(x) = 10^{k \cdot x}$	$k = \text{const.}, \frac{df}{dx} = k \ln 10 \cdot 10^{kx}$	$\Delta f = \sqrt{(k \ln 10 \cdot 10^{kx})^2 (\sigma x)^2}$
$f(x) = \text{sen}(x)$	$\frac{df}{dx} = \text{cos}(x)$	$\Delta f = \sqrt{(\text{cos}(x))^2 (\sigma x)^2}$
$f(x) = \text{cos}(x)$	$\frac{df}{dx} = -\text{sen}(x)$	$\Delta f = \sqrt{(-\text{sen}(x))^2 (\sigma x)^2}$

4.7 Exercícios sobre propagação de erros

a) Determine o erro, Δf , da função $f(x, y, z)$ (recomendado apenas para estudantes com conhecimento em Cálculo).

1. $f(x) = e^{-3x}$.
2. $f(x) = x^2 + x + 1$.
3. $f(x, y) = \text{sen}(x) + y^3$.
4. $f(x, y) = 3x + \pi y$.
5. $f(x, y, z) = 8x \cdot 3y \cdot z$.
6. $f(x, y) = 4 \ln(x) + 2y^5$.
7. $f(x, y) = e^{2y} \text{cos}(x)$.

5 CONFEÇÃO DE GRÁFICOS E TABELAS

As grandezas físicas podem ser representadas e relacionadas em gráficos ou tabelas. A principal vantagem de um gráfico é a possibilidade da visualização mais rápida de como as grandezas se relacionam. É possível, por exemplo, imaginar uma curva que descreve o comportamento dos dados. Sua principal desvantagem é a perda de precisão com relação às tabelas, que por sua vez, se atêm a expor os dados numericamente.

5.1 Tabelas

Uma tabela é um arranjo de números em linhas e colunas. A primeira linha deve especificar qualitativamente a grandeza e unidade de cada coluna, se for necessário há uma coluna à esquerda que ordena os elementos também. Há também a necessidade de enumerar a tabela e explicitar o seu conteúdo no título. Exemplo:

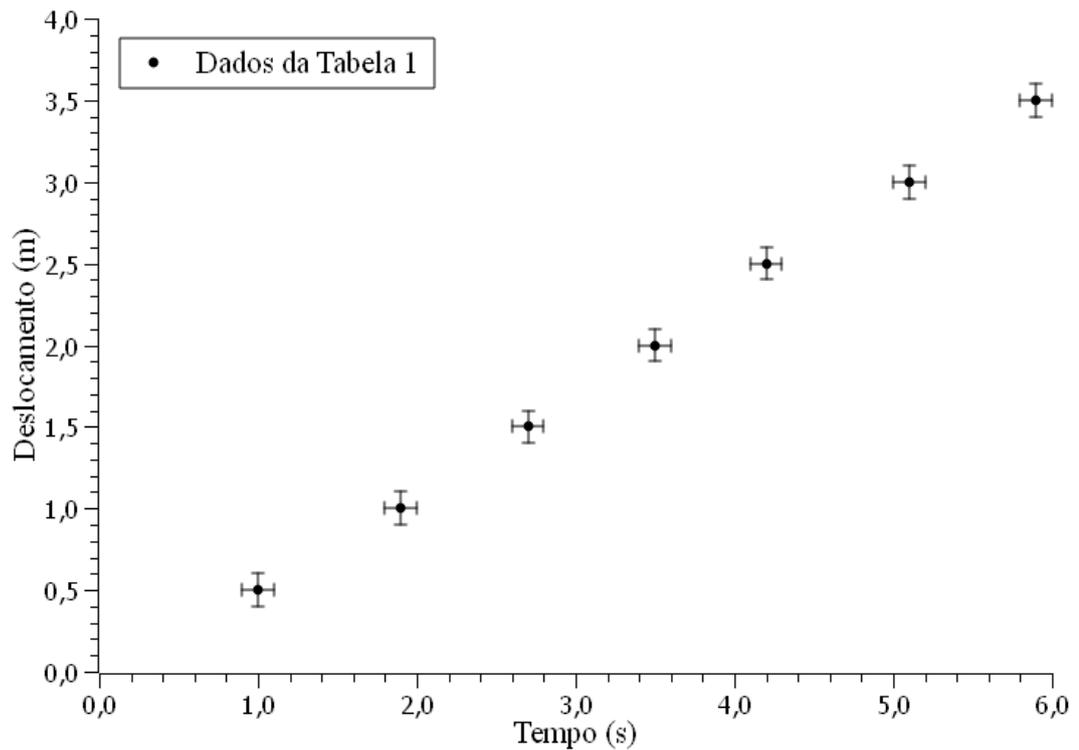
Tabela 3: Dados coletados de N medidas do deslocamento total em função do tempo de movimento de uma partícula.

N	Tempo (s)	Deslocamento (m)
1	$1,0 \pm 0,1$	$0,5 \pm 0,1$
2	$1,9 \pm 0,1$	$1,0 \pm 0,1$
3	$2,7 \pm 0,1$	$2,0 \pm 0,1$
4	$3,5 \pm 0,1$	$2,5 \pm 0,1$
5	$4,2 \pm 0,1$	$3,0 \pm 0,1$
6	$5,1 \pm 0,1$	$3,5 \pm 0,1$
7	$5,9 \pm 0,1$	$4,0 \pm 0,1$

5.2 Gráficos

Há semelhanças na confecção de gráficos com a montagem de tabelas. Nos seus eixos é necessário especificar as grandezas e unidades envolvidas. Por sua vez, o título acompanha a enumeração de imagens (Figura x: grandeza A em função da grandeza B).

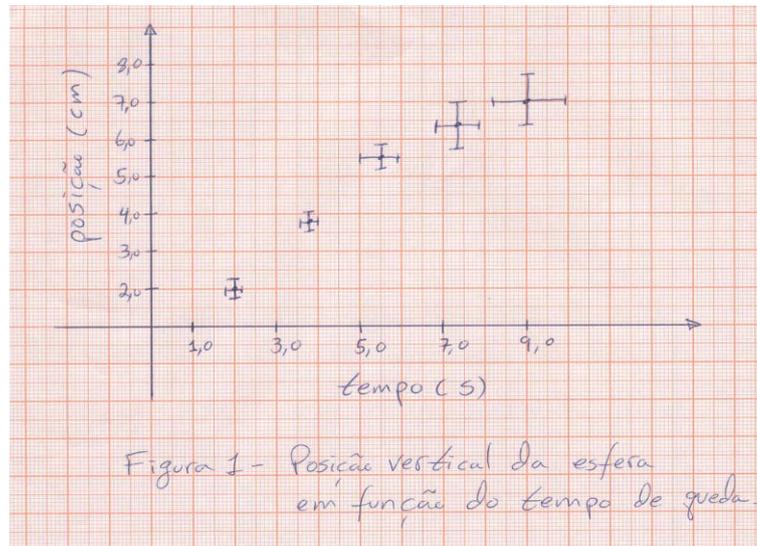
Figura 4: Deslocamento do carrinho em função do tempo.



Note que em cada ponto há barras especificando a incerteza de cada medida. Essas barras são as incertezas totais, Δf , calculadas ou medidas para cada ponto. Além disso, é importante que seja especificado de onde saíram os dados para a montagem do gráfico, que a escala seja regular, contemple todos os valores, e que ela possua a mesma quantidade de algarismos significativos dos dados fonte.

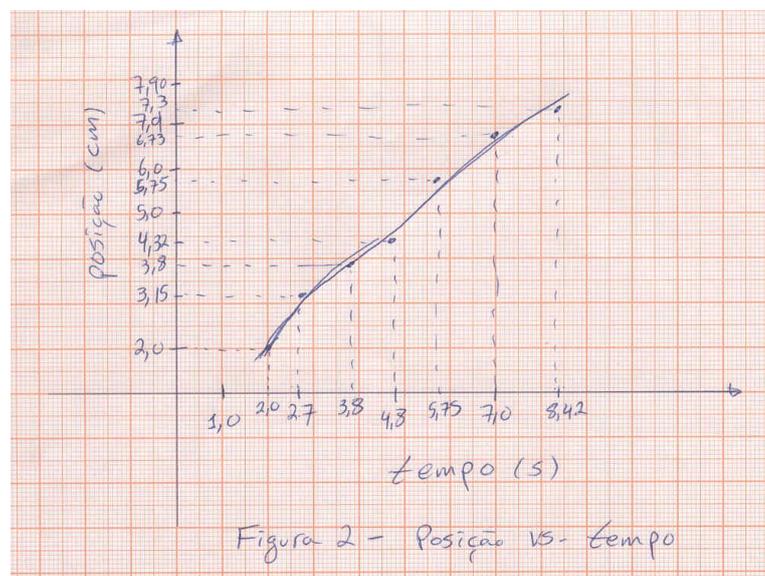
Na Figura 4, o gráfico foi feito usando-se o software livre SciDAVis, porém é possível fazer gráficos à mão usando papel milimetrado. Vejamos um exemplo de gráfico montado dessa forma:

Figura 5: Bom exemplo de gráfico. Fonte: Prof. Dr.: Wellington Akira Iwamoto



Esse pode ser considerado um bom gráfico pois possui escalas regulares (números nos eixos igualmente espaçados), barras de erro, o título é numerado e descreve bem o seu conteúdo, e os eixos possuem os nomes das grandezas com suas respectivas unidades. Para que fique mais claro o que deve ser feito ou não na montagem de gráficos, vejamos exemplos de gráficos defeituosos:

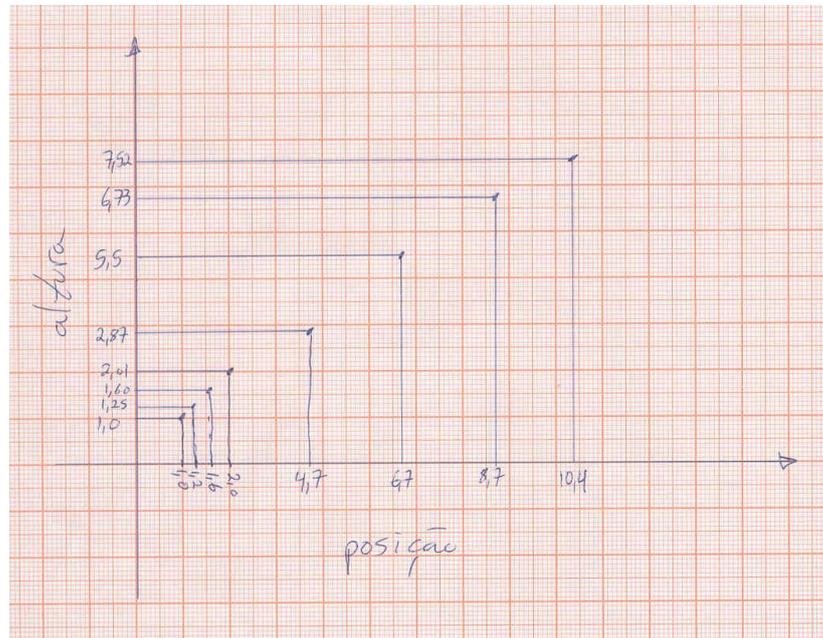
Figura 6: Mau exemplo de gráfico 1. Fonte: Prof. Dr.: Wellington Akira Iwamoto



Vejamos os problemas: as escalas são irregulares; os pontos estão ligados aos eixos por linhas pontilhadas; o título poderia descrever melhor o conteúdo do gráfico (o

ideal seria “Gráfico da posição em função do tempo”); os pontos não possuem barras de erros; e há uma linha ligando os pontos.

Figura 7: Mau exemplo de gráfico 2. Fonte: Prof. Dr.: Wellington Akira Iwamoto.



Já nesse gráfico, os problemas são: não há título nem enumeração do gráfico; não há unidades nas descrições dos eixos; não há barras de erro; os pontos estão ligados por linhas aos eixos; e as escalas são irregulares.

5.3 Linearização

O processo de linearização consiste em transformar uma curva em uma reta no formato $Y = a \cdot X + b$. É um processo importante na análise de dados, pois é mais fácil adquirir informações de uma reta, já que é possível descrevê-la com apenas dois coeficientes (linear e angular), diferente de curvas mais complexas. Após a tomada de dados experimentais, é comum que o gráfico gerado por estes dados não apresente um comportamento linear (similar a uma reta). Neste caso, se já se conhece uma função $f(x)$ que melhor ajuste os dados experimentais (ou utilizando-se de argumentos teóricos é possível “chutar” uma função $f(x)$ que melhor descreva os dados), é possível utilizar algumas técnicas matemáticas que transformem esta função em uma função linear. Desta forma através de uma regressão linear simples (que pode ser feito à mão ou através

de softwares) pode-se encontrar os coeficientes a (angular) e b (linear) da reta e através deles encontrar todos os parâmetros da função $f(x)$.

Existe mais de uma forma de linearizar uma curva, mas no final todos se resumem a comparar a equação linearizada com a equação típica de uma reta. Vamos aos exemplos:

- **Método de linearização por logaritmo:** Para esse método é preciso ter conhecimento de algumas relações entre logaritmos:

$$A. \log_b(a \cdot c) = \log_b a + \log_b c. \quad (32)$$

$$B. \log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c. \quad (33)$$

$$C. \log_b(a^c) = c \cdot \log_b a. \quad (34)$$

$$D. \log_b 1 = 0. \quad (35)$$

$$E. \log_b b = 1. \quad (36)$$

Em muitos casos pode-se usar também logaritmo neperiano \ln para fazer a linearização, onde $\ln x = \log_e x$ e $e = 2,7182 \dots$ é o número de Euler. Embora sejam usados em situações específicas o \log de base 10 (mais comumente usado) e o \ln obedecem às mesmas regras descritas acima. Assim então vamos usá-lo para os exemplos.

Exemplo 1: Os dados obedecem a uma lei do tipo $y = k \cdot x^\alpha$, onde α e k são constantes desconhecidas e y e x são os dados coletados. Aplicando o logaritmo, ficamos com:

$$\log(y) = \log(k \cdot x^\alpha) \quad (37)$$

Aplicando a propriedade da adição A:

$$\log(y) = \log(k) + \log(x^\alpha) \quad (38)$$

Aplicando a propriedade C em $\ln(x^\alpha)$:

$$\log(y) = \log(k) + \alpha \cdot \log(x) \quad (39)$$

Comparando com a equação típica $Y = a \cdot X + b$, podemos identificar na Eq. 39 os seguintes termos:

$$Y = \log(y); X = \log(x); a = \alpha; e b = \log(k) \quad (40)$$

Agora os dados de Y em função de X formam uma reta, conhecendo seu coeficiente linear b e o angular a , é possível determinar α ($\alpha = a$) e k ($10^b = k$).

É importante lembrar que o novo gráfico que será montado (Y em função de X) utilizará dados novos $Y = \log(y)$ e $X = \log(x)$, portanto os erros antigos σx e σy serão propagados para σX e σY . Nesse caso ficamos com:

$$\sigma X = \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 (\sigma x)^2} \quad (22) \quad \text{e} \quad \sigma Y = \sqrt{\left(\frac{1}{y}\right)^2 (\sigma y)^2} \quad (41)$$

Exemplo 2: Os dados x e y do problema obedecem a uma lei do tipo $y = k \cdot e^{\alpha x}$, onde k e α são constantes que deseja-se determinar. Aplicando o logaritmo neperiano:

$$\ln(y) = \ln(k \cdot e^{\alpha x}) \quad (42)$$

Aplicando a propriedade da adição A:

$$\ln(y) = \ln(k) + \ln(e^{\alpha x}) \quad (43)$$

Aplicando a propriedade C em $\ln(e^{\alpha x})$:

$$\ln(y) = \ln(k) + \alpha x \cdot \ln(e) \quad (44)$$

$$\ln(y) = \ln(k) + \alpha \cdot x \quad (45)$$

Comparando com a equação típica $Y = a \cdot X + b$, podemos identificar na Eq. 45 os seguintes termos:

$$Y = \ln(y); X = x; a = \alpha; e b = \ln(k) \quad (46)$$

Nota-se que, nesse caso, $X = x$, portanto só há necessidade de mudar os dados e propagar o erro para Y . Podemos então encontrar os coeficientes $\alpha = a$ e $k = e^b$. O Erro de Y é novamente:

$$\sigma Y = \sqrt{\left(\frac{1}{y}\right)^2 (\sigma y)^2} \quad (47)$$

- **Método de linearização por substituição:** Nesse método, chamamos uma função não linear que depende de x de X e deixamos o y inalterado.

Exemplo 1: Os dados y e x se relacionam de acordo com a lei: $y = k \cdot \cos^2(x)$, onde k é uma constante desconhecida.

Se chamarmos $\cos^2(x)$ de X , e compararmos com a equação de reta $Y = a \cdot X + b$, temos que $Y = k \cdot X$. Onde $y = Y$; $k = a$; $\cos^2(x) = X$; e $b = 0$.

Para encontrar a constante k basta descobrir o coeficiente angular a . Os erros dos valores de X valem:

$$\sigma X = \sqrt{\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 (\sigma x)^2} \quad (48)$$

porém $\frac{d(\cos^2 x)}{dx} = -2\text{sen}(x)\cos(x)$, logo

$$\sigma X = \sqrt{(-2\text{sen}(x)\cos(x))^2 (\sigma x)^2} \quad (49)$$

$$\sigma X = 2\text{sen}(x)\cos(x)(\sigma x) \quad (50)$$

Exemplo 2: Os dados y e x se relacionam de acordo com a lei: $y = \frac{k}{x}$, onde k é uma constante desconhecida.

Se chamarmos $\frac{1}{x}$ de X e compararmos com a equação de reta $Y = a \cdot X + b$, temos que $Y = y$; $X = \frac{1}{x}$; $a = k$; e $b = 0$.

Portanto, é possível descobrir o valor da constante k descobrindo o valor do coeficiente angular a . Como Y não se altera basta encontrar o erro de X .

$$\sigma X = \sqrt{\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 (\sigma x)^2} \quad (51)$$

Porém, de acordo com a Tabela 2, $\frac{d(1/x)}{dx} = -\frac{1}{x^2}$, logo:

$$\sigma X = \sqrt{\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2 (\sigma x)^2} \quad (52)$$

$$\sigma X = \frac{1}{x^2} (\sigma x) \quad (53)$$

Para ilustrar mais ainda o processo de linearização usaremos de um exemplo de tomada de dados, análise gráfica, linearização e aquisição de resultados.

Exemplo: Dependência do volume de uma esfera com seu raio.

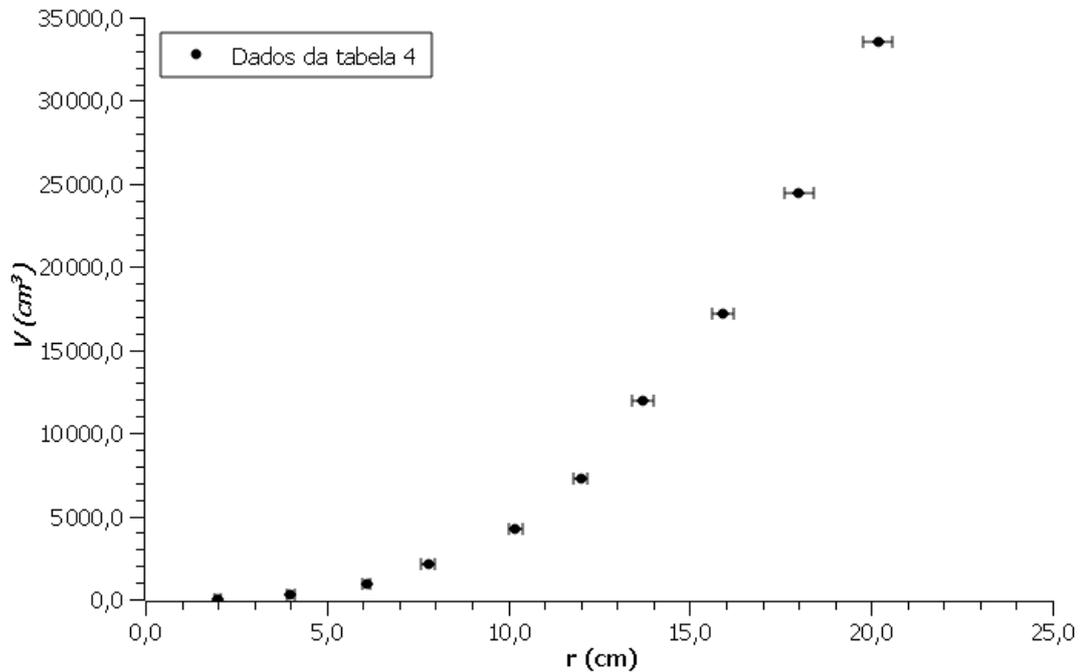
Foram feitas 10 medidas de raio para 10 esferas metálicas de volumes diferentes (com seus respectivos erros). Almeja-se com esse experimento determinar como um volume geral V de uma esfera depende de seu raio r .

Tabela 4: Dados coletados do volume e do raio das esferas.

Volume $\pm \sigma V$ (cm^3)	raio $\pm \sigma r$ (cm)
<i>33,5 \pm 0,1</i>	<i>2,0 \pm 0,1</i>
<i>268,1 \pm 0,1</i>	<i>4,0 \pm 0,1</i>
<i>904,8 \pm 0,1</i>	<i>6,1 \pm 0,1</i>
<i>2144,7 \pm 0,1</i>	<i>7,8 \pm 0,2</i>
<i>4188,8 \pm 0,1</i>	<i>10,2 \pm 0,2</i>
<i>7238,2 \pm 0,1</i>	<i>12,0 \pm 0,2</i>
<i>11949,1 \pm 0,1</i>	<i>13,7 \pm 0,3</i>
<i>17157,3 \pm 0,1</i>	<i>15,9 \pm 0,3</i>
<i>24429,0 \pm 0,1</i>	<i>18,0 \pm 0,4</i>
<i>33510,3 \pm 0,1</i>	<i>20,2 \pm 0,4</i>

Usando o software SciDAVis temos a seguinte distribuição:

Figura 8: Gráfico do volume V (cm³) em função do raio r (cm)



É possível notar, pela distribuição dos pontos, que V varia em função de r obedecendo a uma lei de potência do tipo $V(r) = k \cdot r^\alpha$. Por análise dimensional é possível determinar α :

$$[V] = [k] \cdot [r]^\alpha \quad (54)$$

$$L^3 = 1 \cdot L^\alpha \quad (55)$$

$$\therefore \alpha = 3 \quad (56)$$

Falta agora determinar k , que sabemos apenas que é uma constante adimensional. Para isso, vamos linearizar a função $V(r) = kr^3$ por substituição de r^3 por R . Ficamos então com a equação $V(R) = kR$. Para encontrar k , precisamos encontrar o coeficiente angular de $V(R)$. Com isso, teremos um novo conjunto de dados:

Tabela 5: Dados linearizados de V e $R = r^3$

$V \pm \sigma V$ (cm^3)	$R \pm \sigma R$ (cm)
$33,5 \pm 0,1$	8 ± 1
$268,1 \pm 0,1$	64 ± 5
$904,8 \pm 0,1$	$(23 \pm 1) \times 10$
$2144,7 \pm 0,1$	$(48 \pm 4) \times 10$
$4188,8 \pm 0,1$	$(106 \pm 6) \times 10$
$7238,2 \pm 0,1$	$(173 \pm 9) \times 10$
$11949,1 \pm 0,1$	$(26 \pm 2) \times 10^2$
$17157,3 \pm 0,1$	$(40 \pm 2) \times 10^2$
$24429,0 \pm 0,1$	$(58 \pm 4) \times 10^2$
$33510,3 \pm 0,1$	$(82 \pm 5) \times 10^2$

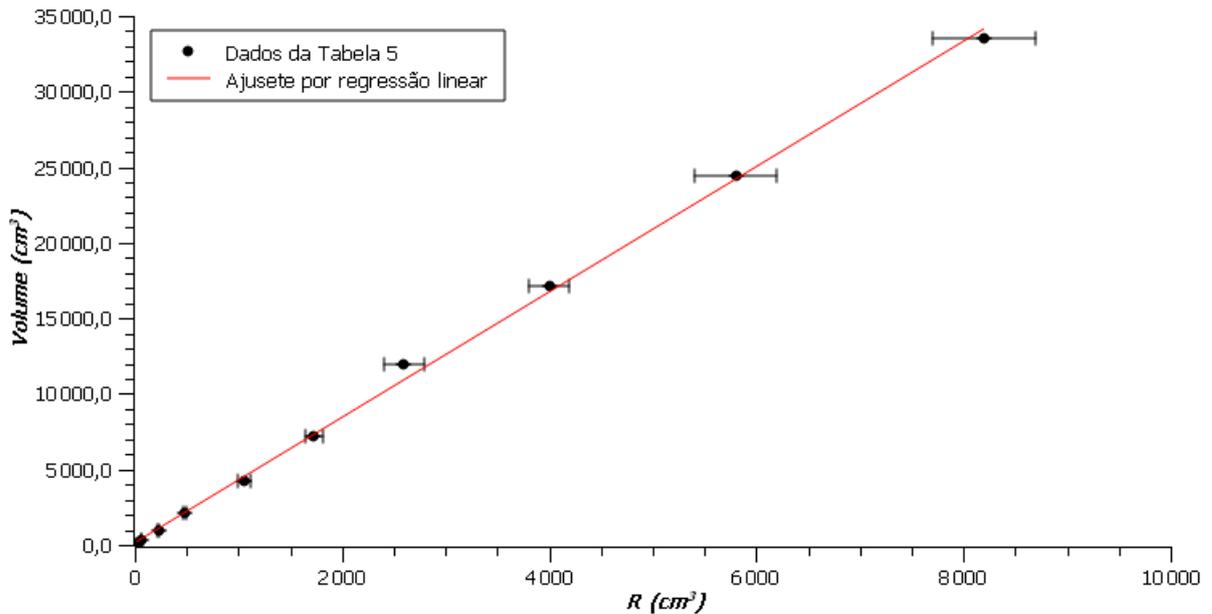
O erro σr foi propagado para σR de acordo com:

$$\sigma R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)^2 (\sigma r)^2} \quad (57)$$

$$\sigma R = \sqrt{(3r^2)^2 (\sigma r)^2} \quad (58)$$

$$\sigma R = \sqrt{(9r^4) (\sigma r)^2} \quad (59)$$

Temos agora a seguinte distribuição linear:

Figura 9: Gráfico do volume V em função de R 

A linha vermelha foi ajustada por um mecanismo chamado regressão linear. Essa ferramenta estatística fornece os coeficientes da curva que melhor representa uma distribuição qualquer de dados. Normalmente, esse ajuste é feito utilizando softwares (nesse caso foi usado o SciDAVis) mas também pode ser feito manualmente (o que é desproporcionalmente mais trabalhoso) utilizando o método de mínimos quadrados. Nesse caso, o valor que nos interessa é o do coeficiente angular a que indicará o valor de k . Da literatura, sabe-se que o volume de uma esfera é dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, portanto k deve se aproximar de $\frac{4}{3}\pi \simeq 4,19$. A regressão linear devolveu o valor de $a = k = 4,14 \pm 0,06$. Repare que o erro de k inclui o valor esperado.

5.4 Exercícios sobre linearização

- a) Linearize as funções abaixo e especifique (em função dos coeficientes angular e linear de uma reta) como encontrar o valor da constante k . Exemplo: $y = e^{kx}$.

Resolução: Utilizando a linearização por logaritmo, ficamos com

$$\ln(y) = \ln(e^{kx})$$

$$\ln(y) = kx$$

Com isso, é possível encontrar k a partir do coeficiente angular da reta dada por $\ln(y)$ em função de x .

1. $y = kx^2$.
2. $y = \ln^{2k}(x)$.
3. $y = 2x^k$.
4. $y = k\text{sen}(3x)$.
5. $y = \frac{l}{x} + k$.

6 ROTEIROS PARA ATIVIDADES PRÁTICAS

A partir deste capítulo serão apresentados os roteiros sugeridos para esta disciplina. Estes roteiros foram escolhidos com a intenção de não repetir conteúdo que será visto em outras disciplinas, ter uma abrangência de diversos temas abordados pela Física e possibilitar que os estudantes pratiquem todas as etapas necessárias a uma atividade de laboratório. Também são apresentados alguns resultados esperados para os experimentos, de forma que o professor e os estudantes possam ter uma noção do comportamento dos dados experimentais da prática.

6.1 Medida da espessura de uma folha de papel

6.1.1 Objetivos

Determinar, com o máximo de precisão possível, a espessura de uma folha de papel.

6.1.2 Materiais

- 100 folhas de papel.
- Paquímetro.

6.1.3 Metodologia

1ª abordagem – Utilizando a régua, meça diretamente a espessura de 1 folha de papel. Qual o valor obtido? Qual a incerteza da medida?

Tabela 6: Sugestão para tomada de dados.

Medida	Espessuras (mm)	Incerteza (mm)
1		
2		
3		
Média:		Incerteza total (mm):

2ª abordagem

- Empilhe uma quantidade conhecida de folhas de papel (10 folhas).
- Meça a espessura total da pilha (qual a incerteza desta medida?). Agora aumente a quantidade de folhas na pilha para 20 folhas. Meça a nova espessura da pilha de folhas. Repita o procedimento, preenchendo uma tabela similar à tabela abaixo:

Tabela 7: Sugestão para tomada de dados.

N, nº de folhas	E, espessura (mm), medida 1	E, espessura (mm), medida 2	E, espessura (mm), medida 3	E, espessura média (mm)	Incerteza total (mm)
10					
20					
30					
40					
50					
⋮					
100					

- De posse destes dados, trace um gráfico da espessura E em função do número de folhas N (N na abcissa e E na ordenada). Assuma que o comportamento da espessura E em função do número de folhas N obedece a uma equação do tipo $E=aN+b$, onde a é o coeficiente angular e b o coeficiente linear da equação da reta dada.
- Faça um ajuste linear, usando o software SciDavis, da curva obtida e encontre a equação da reta que ajusta os dados experimentais. Desta equação encontre o valor da espessura **de uma folha** e sua incerteza.

6.1.4 Discussão

Baseado nos resultados obtidos no procedimento experimental, qual a medida mais precisa da espessura de uma folha de papel?

6.1.5 Resultados esperados

Nesse experimento, espera-se que o estudante aprenda a usar o paquímetro. Espera-se também que ele entenda que, ao fazer mais medidas mesmo de forma indireta, a incerteza encontrada para seu resultado tende a diminuir.

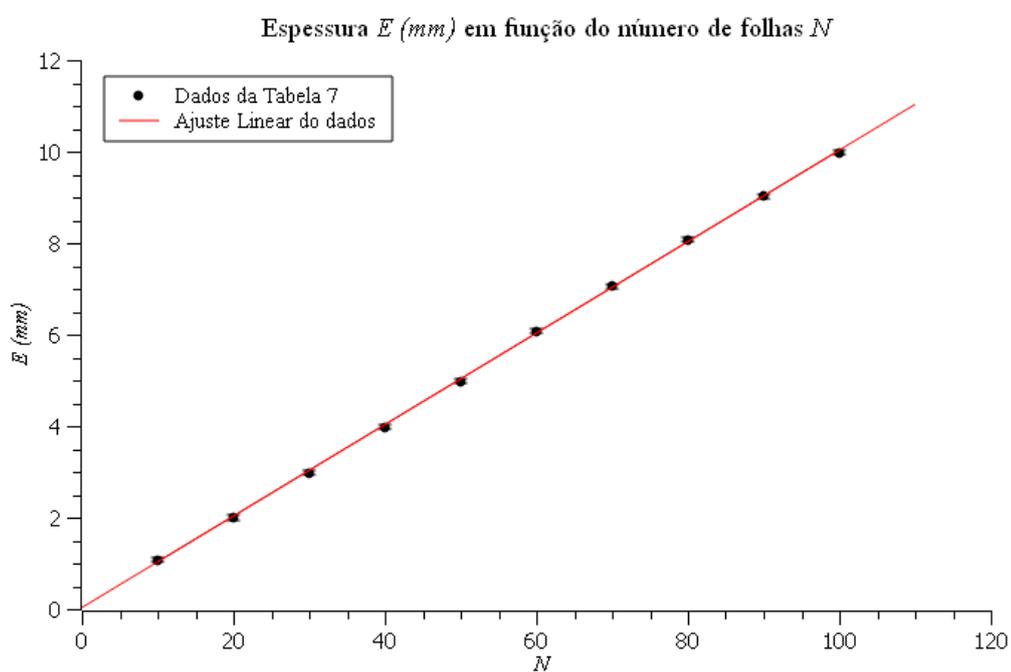
Os resultados numéricos esperados para a segunda abordagem são os seguintes:

Independentemente das três medidas, espera-se que a média das espessuras E seja de aproximadamente 1mm a cada 10 folhas, se comportando de forma linear durante o experimento. Na Tabela 7 estão as médias e erros coletados pelo autor.

Tabela 8: Dados estimados para a média da espessura do monte de folhas, sua quantidade e sua incerteza

N, nº de folhas	E, espessura (mm), medida 1	E, espessura (mm), medida 2	E, espessura (mm), medida 3	E, espessura média (mm)	Incerteza total da Espessura (mm)
10	X	X	X	1,08	0,05
20	X	X	X	2,00	0,06
30	X	X	X	2,98	0,05
40	X	X	X	3,98	0,05
50	X	X	X	4,98	0,05
60	X	X	X	6,07	0,05
70	X	X	X	7,05	0,05
80	X	X	X	8,07	0,05
90	X	X	X	9,03	0,05
100	X	X	X	9,98	0,05

Figura 10: Gráfico construídos a partir dos dados da Tabela 7.



Usando o software *SciDAVis*, encontrou-se um valor de coeficiente angular de $0,1000 \pm 0,0006$ mm a partir do ajuste linear.

6.2 Dinâmica de queda de uma folha de papel

6.2.1 Objetivos

- Observar e analisar o comportamento da queda livre de uma folha de papel em diferentes condições.
- Descrever matematicamente esse movimento.

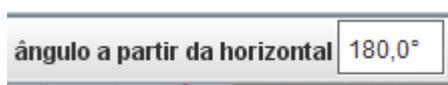
6.2.2 Materiais

- Uma folha de papel;
- Uma régua milimetrada (ou trena);
- Celular e computador;
- Software Tracker e SciDAVis.

6.2.3 Metodologia

Folha de papel aberta:

1. Escolha um ponto de referência acima do chão e o meça com a régua ou trena. Por exemplo, você pode medir na parede 1 m de altura em relação ao solo.
2. Solte a folha de papel paralela ao chão desta altura e, ao mesmo tempo, filme sua queda até chegar ao solo. Escolha uma parede que faça um bom contraste com a cor da folha, para facilitar a filmagem.
3. Amasse a folha o máximo possível formando uma bola e repita o passo anterior.
4. Utilizando o software Tracker, faça um gráfico de posição vertical y em função do tempo de queda t . (Dica: coloque o 0 do sistema de coordenadas na posição inicial da folha e rotacione o eixo- x a partir da horizontal em 180°)



- Isso fará com que o eixo- y aponte para baixo.
5. Supondo que o movimento de queda vertical y obedece à relação $y = kt^n$, onde k e n são constantes, determine os valores de k e n . Para isso, faça a linearização da equação e dos dados experimentais. Usando o software SciDAVis, faça o ajuste linear dos dados linearizados. Lembre-se de registrar o erro de sua resposta.

Folha de papel amassada:

1. Amasse o máximo possível a folha de papel, fazendo uma bola com ela.

2. Repita os procedimentos da etapa anterior.

Obs.: Sempre descreva sua resposta na forma $f = (f_{med} \pm \sigma f)$ unidade.

6.2.4 Discussão

Baseado nos resultados obtidos no procedimento experimental, qual a diferença entre as duas formas de queda da folha de papel? Qual seria a origem desta diferença? Como você modificaria o experimento para deixar mais claras as suas respostas?

6.2.5 Resultados esperados

Espera-se que com esse experimento o aluno consiga aprender a usar o software *Physics Tracker* e tenha seu primeiro contato com a cinemática escalar. Além disso, esse experimento tentará fazer com que o aluno perceba dois comportamentos distintos da queda da folha de papel por análise gráfica.

Figura 11: Gráfico mostrando a distância D (m) em função do tempo de queda T (s) da folha aberta.

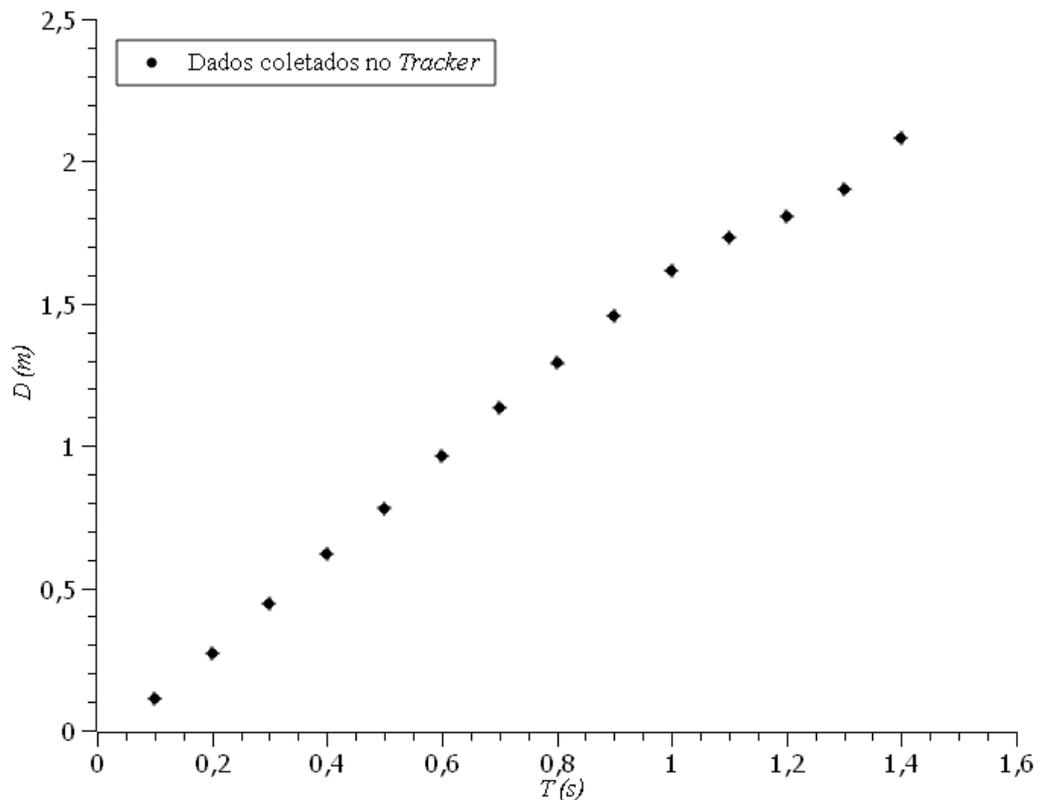
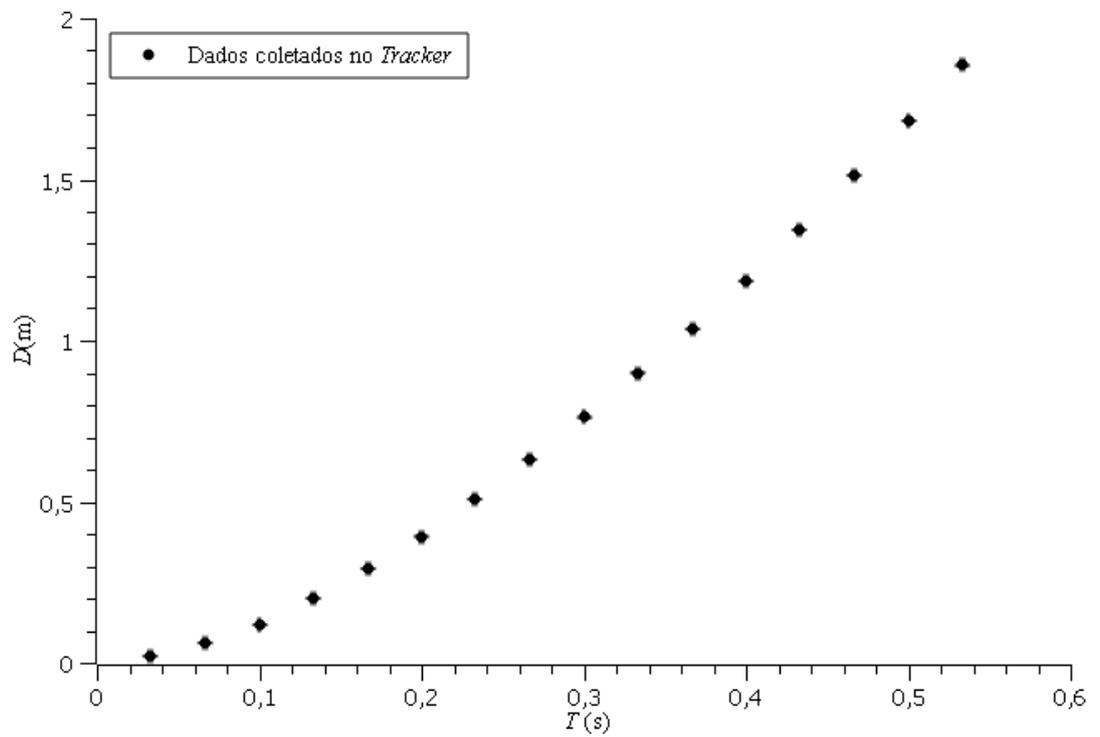
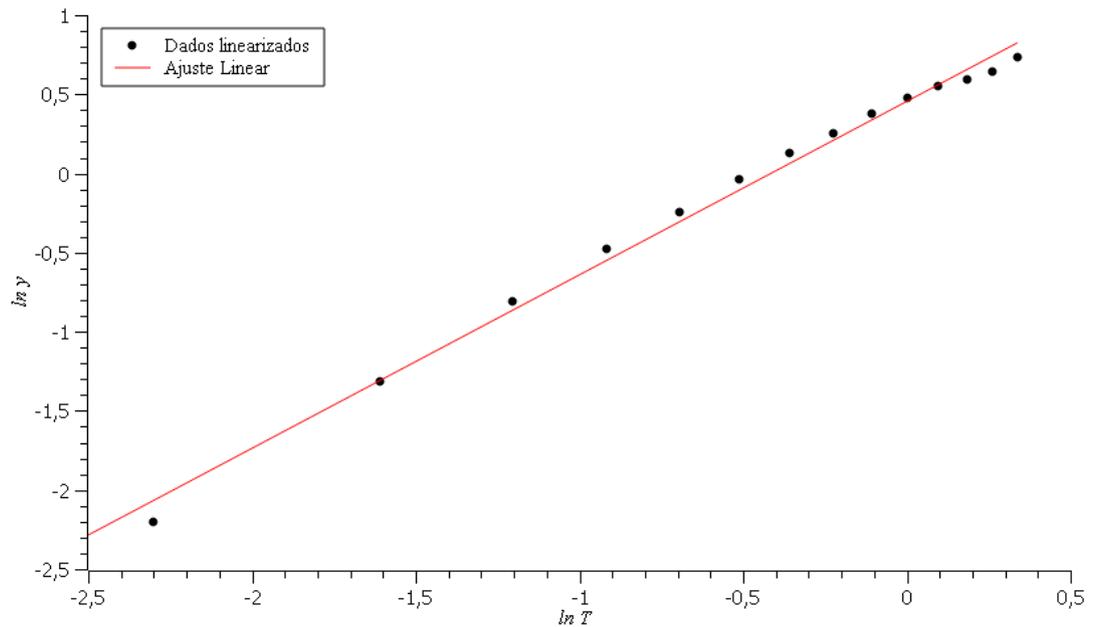


Figura 12: Gráfico mostrando a distância D (m) em função do tempo de queda T (s) da folha amassada.



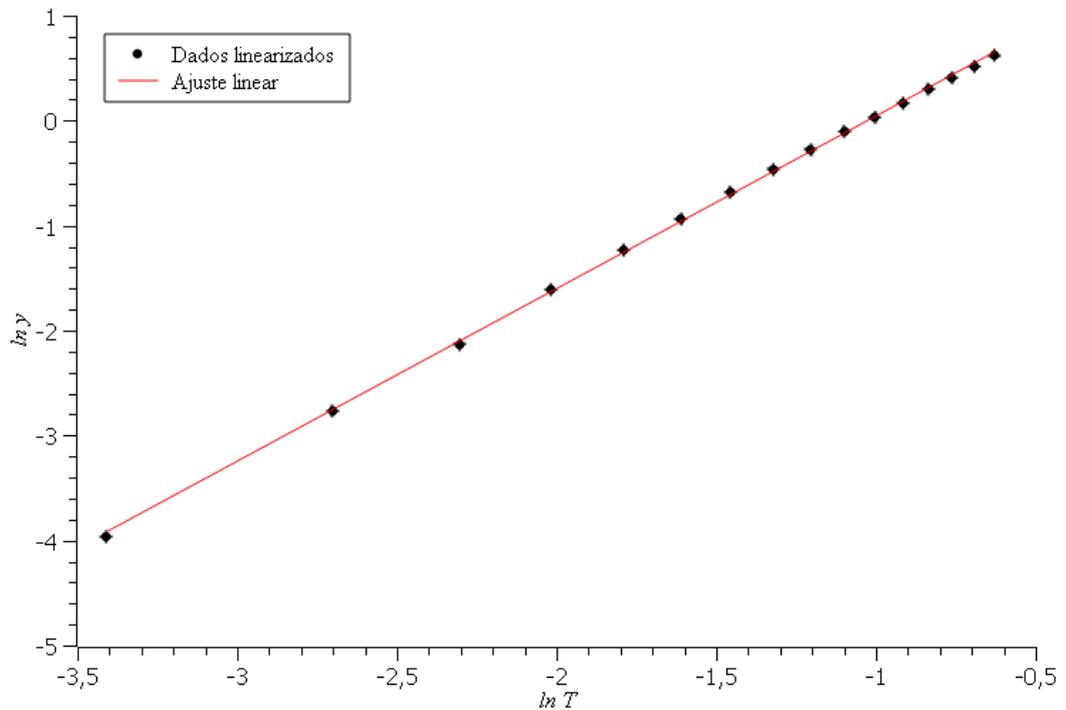
Utilizando a linearização por logaritmo $\ln(y) = \ln(k) + n \cdot \ln(T)$, consegue-se um novo conjunto de dados que fornecerá, por regressão linear, os coeficientes k e n .

Figura 13: Gráfico relacionando os dados linearizados $\ln(y)$ em função de $\ln(T)$ da queda da folha aberta.



O valor encontrado para o coeficiente angular a foi $1,10 \pm 0,03$ e para o coeficiente linear b foi $0,46 \pm 0,02$. De posse desses valores é possível encontrar o coeficiente n que é o próprio a e o coeficiente $k = e^b = 1,58 \pm 0,03$

Figura 14: Gráfico relacionando os dados linearizados $\ln(y)$ em função de $\ln(T)$ da queda da folha amassada.



Foi encontrado o valor de $1,90 \pm 0,05$ para o coeficiente angular a que coincide com o valor de n . Para o coeficiente linear b foi encontrado um valor de $1,63 \pm 0,03$. Para encontrar o valor de k , deve ser feito $k = e^b = 5,10 \pm 0,03$.

6.3 Aproximação no período de oscilação de um pêndulo

6.3.1 Introdução

Teoricamente, um pêndulo simples é um sistema ideal que consiste em uma massa puntiforme suspensa por um fio leve e inextensível. Em termos práticos pode ser considerado como uma massa suspensa por um fio preso em um ponto fixo, como mostra a figura 13. Quando afastado de sua posição de equilíbrio e largado, o pêndulo oscilará em um plano vertical executando um tipo de movimento denominado de movimento harmônico simples (MHS). Se o ângulo de afastamento for pequeno (θ pequeno), o pêndulo executará um movimento cujo período T não depende de θ . O período T é definido como o tempo necessário para o pêndulo, após largado, voltar à sua posição inicial, ou seja, para ele dar um balanço completo.

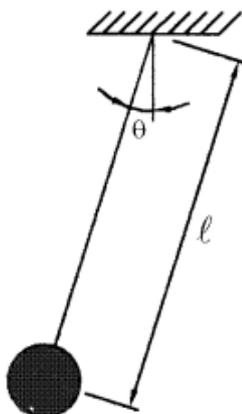


Figura 15: Pêndulo simples de comprimento l , deslocado de um ângulo θ em relação à posição de repouso.

6.3.2 Objetivos

- Determinar o ângulo máximo até onde se pode usar a aproximação de que T independe de θ .
- Determinar de que forma T varia com θ , quando a aproximação anterior não for mais válida.

6.3.3 Materiais

- Kit pêndulo simples.
- Cronômetro;
- Um transferidor;
- Software SciDavis.
- Fita adesiva

6.3.4 Metodologia

1. Com o pêndulo montado, deixe a corda com 50 cm.
2. Usando a fita adesiva, prenda o transferidor no pivot do pêndulo como mostra a Figura 16.

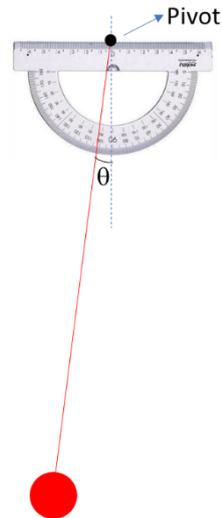


Figura 16: Aparato experimental a ser utilizado. Em vermelho destacam-se o barbante e a massa pendular

3. Com a ajuda do transferidor ajuste o ângulo inicial de oscilação e solte a massa pendular.
4. Meça o tempo necessário para 20 oscilações completas em cada ângulo e complete a Tabela 10.

Ângulo, (graus)	20T (s) medida 1	20T (s) medida 2	20T (s) medida 3	20T _{médio} (s)	⊗ (20T _{médio}) (s)	T _{médio} (s)	⊗ (T _{médio}) (s)
3							
6							
9							
12							
15							
20							
25							

Tabela 10: Tabela exemplo de tomada de dados contendo o valor do ângulo de oscilação θ , 3 conjuntos de medida com 20 oscilações cada, o valor médio do tempo de 20 oscilações e sua incerteza, o valor médio de uma oscilação e sua incerteza.

- a. Construa um gráfico de período de oscilação T em função do ângulo de abertura do pêndulo θ , com as respectivas incertezas.

- b. Do comportamento deste gráfico determine o ângulo a partir do qual o período T não é mais independente de θ .
- c. A partir deste ponto, suponha que o período obedece à relação $T = k\theta^n$, onde k e n são constantes. Aplique seus conhecimentos para linearizar esta equação e a seguir linearize os dados experimentais.
- d. Determine o valor de n . Para isto, trace um novo gráfico para os dados linearizados e, finalmente, faça o ajuste linear (regressão linear) dos mesmos (Dica: use o SciDavis).

6.3.5 Resultados esperados

Havia a expectativa para esse experimento que para pequenos ângulos ($\theta < 10^\circ$) o período de oscilação fosse praticamente constante. O que se observou foi uma grande dificuldade em estimar o erro dos 20 períodos, provavelmente relacionado ao tempo de reação de quem solta o pêndulo e aciona e para o cronômetro.

6.4 Meia vida de uma espuma

6.4.1 Introdução

Leis de decaimento exponencial são um tipo de fenômeno físico encontrado em diversas situações diferentes. Por exemplo, podemos vê-las em ação em sistemas de amortecedores, processos de carga ou descarga de capacitores e no decaimento da intensidade da luz ao atravessar uma amostra. Em particular, quando uma bebida gera uma camada de espuma sobre ela, quando a colocamos em um copo, vemos que esta camada diminui com o tempo, Figura 10. Esta diminuição apresenta um comportamento exponencial e já foi observado sob diferentes condições. Neste trabalho veremos como a passagem do tempo afeta a altura da camada de espuma e determinaremos o tempo de meia vida da espuma. Neste contexto, o tempo de meia vida, $t_{1/2}$, é o tempo necessário para que a altura da camada de espuma diminua à metade.



Figura 17: Bebida gaseificada com uma camada de espuma de altura h .

6.4.2 Objetivo

Determinar o tempo de meia vida da camada de espuma gerada sobre uma bebida gaseificada.

6.4.3 Materiais

- Um béquer;
- Uma garrafa de bebida espumante, de preferência não alcoólica e envelhecida;
- Aparelho celular;
- Régua;
- Software SciDavis.

6.4.4 Metodologia

1. Coloque o béquer e a régua aproximadamente juntos.
2. Posicione o celular de forma que seja possível observar lateralmente o líquido dentro do béquer e as marcações da régua.
3. Despeje o líquido no béquer de uma maneira que ele forme espuma enquanto o celular filma tudo.
4. Para cada instante de tempo na Tabela 6, meça a altura da base e do topo da camada de espuma, na régua. Em geral, o topo da camada de espuma não é reto, e por isso deve-se ter cuidado na hora de determinar sua posição.



Figura 18: Determinação das alturas da base e do topo da camada de espuma

Tempo (s)	Δt (s)	Base (cm)	Topo (cm)	Altura, h (cm)	Δh (cm)
0					
1					
2					
3					
⋮					
100					

Tabela 11: Sugestão de tabela para registro de dados do experimento.

5. A altura da camada de espuma é definida como $h = \text{altura do topo} - \text{altura da base}$. Sabendo que Δl é a incerteza da régua, pode-se demonstrar que a incerteza da camada de espuma h é $\Delta h = \sqrt{2\Delta l}$ (você consegue demonstrar?)

6. Construa um gráfico da altura h da espuma em função do tempo t . (lembre-se de usar barras de erro)
7. Assuma que o comportamento de h é do tipo $h(t) = h_0 e^{-t/\tau}$, onde $h_0 = h(t = 0)$ é a altura inicial (em $t = 0$) da espuma e τ é a constante de decaimento da altura h com o tempo.
8. Mostre que o tempo de meia vida (tempo necessário para que a altura h_0 caia pela metade) da camada de espuma $t_{1/2}$, pode ser encontrado da relação $t_{1/2} = -\tau \cdot \ln(0,5)$.
9. Determine o valor de $t_{1/2}$. Para isso, trace um novo gráfico para os dados linearizados. Utilizando o software SciDAVis, faça o ajuste linear (regressão linear) dos mesmos.
10. Verifique se o valor encontrado pela regressão linear está coerente com o que pode ser visto no vídeo.

6.4.5 Discussão

- Em que outros fenômenos você encontra tempos de meia vida?
- Como você modificaria o experimento para deixar mais claras as suas respostas?

6.4.6 Resultados esperados

Nesse trabalho, esse experimento não foi testado para ser utilizado na disciplina. Porém, ainda sim ele está presente como sugestão de prática. Espera-se que, além dos alunos terem contato com um comportamento de queda exponencial, também entendam o conceito de meia vida e como encontrá-la pela linearização.

6.5 Lei de resfriamento de Newton

6.5.1 Introdução

Quando objetos a temperaturas diferentes estão em contato, haverá uma transferência de calor do corpo mais quente para o mais frio até que o sistema alcance o equilíbrio térmico (mesma temperatura em ambos). O tempo para que este equilíbrio seja alcançado, depende de uma série de fatores como a área de contato entre eles, a massa dos corpos, etc. Para objetos que se resfriam em contato com o ar ambiente (considerando que a temperatura ambiente, T_a , não se altera no processo), pode-se obter a expressão para a sua temperatura em função do tempo como:

$$T = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt} \quad (1)$$

onde T_0 é a temperatura inicial do objeto e k é a constante de decaimento da temperatura.

6.5.2 Objetivo

Obter a constante de decaimento da temperatura para o sistema estudado.

6.5.3 Materiais

- Becker;
- Suporte para becker;
- Bico de Bunsen;
- Termômetro ou termopar;
- Multímetro (se usa termopar);
- Cronômetro;
- Água.

6.5.4 Procedimento experimental

1. Meça a temperatura ambiente com o termômetro;
2. Coloque 200 mL de água, e o termômetro, no béquer e aqueça até a fervura, aproximadamente 100°C.

3. Desligue o bico de bunsen. Espere a temperatura alcançar 90°C (T_0). Neste instante assuma $t = 0$ e meça o tempo decorrido para diferentes temperaturas até que a água atinja 30°C . Siga as recomendações encontradas na Tabela 12.

Tempo (s)	Δt (s)	Temperatura, T ($^{\circ}\text{C}$)	$\theta(T - T_{amb})(^{\circ}\text{C})$
0		90	
		88	
		86	
		84	
⋮		⋮	
		30	

Tabela 12: Sugestão de tabela para registro de dados do experimento.

4. Faça um gráfico de **temperatura em função do tempo**, considerando os erros de medida.
5. Considerando a Equação 1, determine a constante k (não esqueça o caráter exponencial desta equação). Para isto, faça a linearização dos dados experimentais, **construa um novo gráfico** com os dados linearizados e faça um ajuste linear (regressão linear) dos mesmos (Dica: use o SciDavis).

6.5.4 Discussões

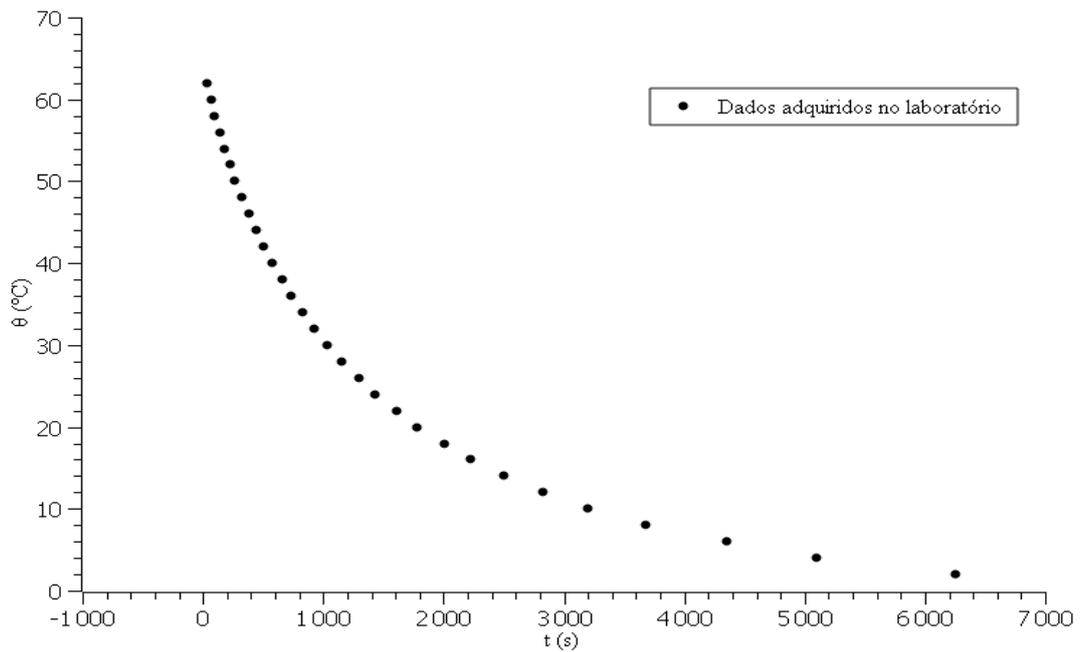
Se ao invés de água aquecida, tivéssemos feito o experimento com água congelada, qual teria sido o comportamento esperado da curva de temperatura versus tempo? No que você baseia este raciocínio?

6.5.5 Resultados esperados

Espera-se com esse experimento que o aluno observe uma queda exponencial da diferença da temperatura da água e da temperatura ambiente $\theta(T - T_a)$ em função do tempo t , que consiga manipular a Equação 1 para que ela seja

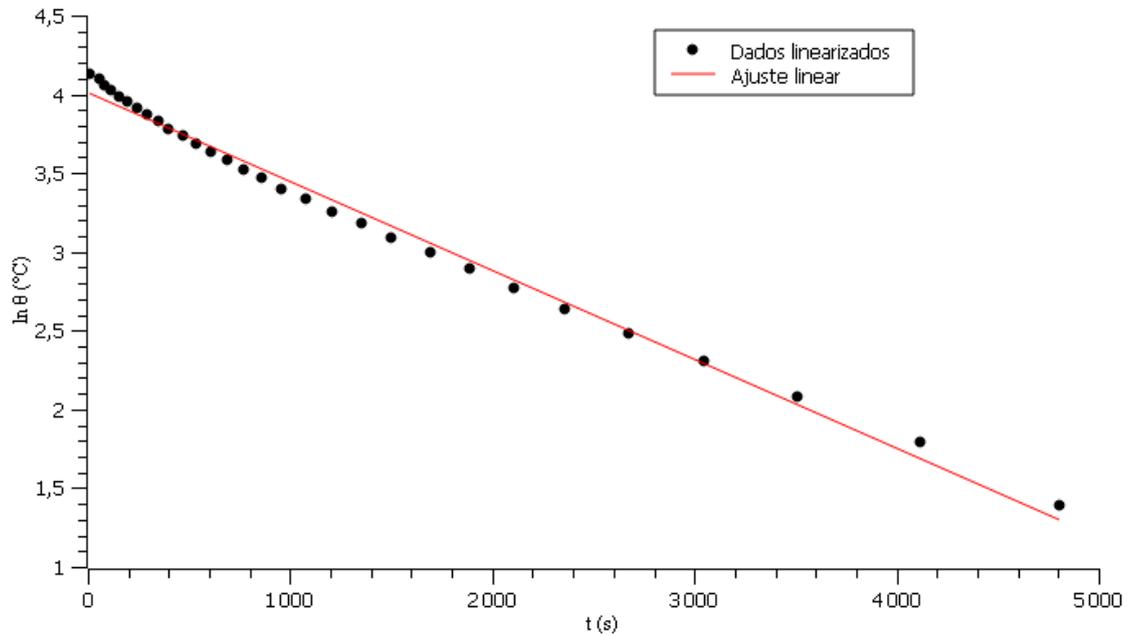
linearizável, e que com isso consiga achar o valor da constante de resfriamento k . O gráfico esperado tem o seguinte formato:

Figura 19: Gráfico do decaimento de $\theta(T_{\text{água}} - T_{\text{ambiente}})(^{\circ}\text{C})$ de 200mL de água em função do tempo t (s).



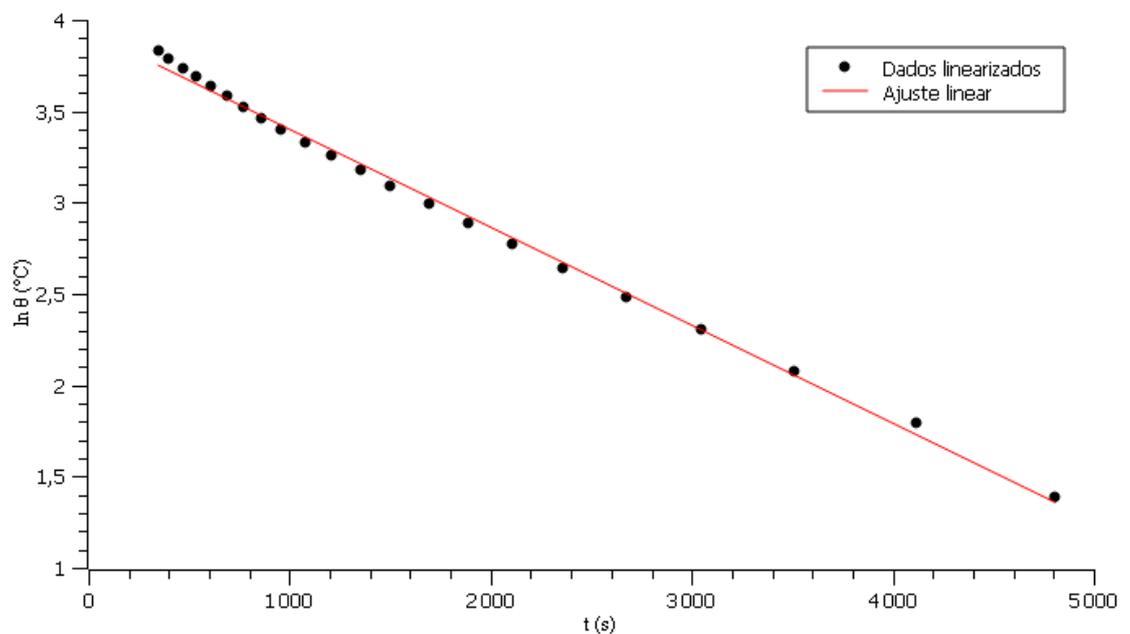
Com os dados linearizados adequadamente consegue-se um novo gráfico:

Figura 20: Gráfico da temperatura linearizada por $\ln\theta$ ($^{\circ}\text{C}$) em função do tempo t (s).



Nota-se que há dois decaimentos. Há uma queda mais acentuada nos 8 primeiros pontos e o resto possui um decaimento menos intenso. Para conseguir resultados melhores, recomenda-se que a análise seja feita a partir dos 74°C ($\theta = 46^{\circ}\text{C}$).

Figura 21: Gráfico relacionando os dados linearizados $\ln(\theta)$ em função de t (s), a partir de $\theta = 46^{\circ}\text{C}$



Fazendo a análise dessa maneira, espera-se que o experimentador encontre um coeficiente angular (que nesse caso corresponde à $-k$) de $-0,000537 \pm 0,000007$.

6.6 Estudo de formação de crateras

6.6.1 Introdução

De acordo com o Amato *et. al.* [1] as crateras formadas por impacto de um objeto sobre a superfície deformável podem ser modeladas por uma lei de potência do tipo:

$$D = kE^n \quad (1)$$

onde D é o diâmetro da cratera e E é a energia do impacto. Neste estudo discutiu-se que se a deformação plástica for a principal forma de formação de cratera então $n = \frac{1}{3}$. Se, por outro lado, a cratera foi formada pela ejeção de massa então $n = \frac{1}{4}$. Na Eq. 1 o parâmetro k é uma constante a ser determinada experimentalmente.

6.6.2 Objetivos

Observar e analisar a formação de crateras por impacto, determinando o principal mecanismo de sua formação.

6.6.3 Materiais

- Uma esfera (de metal, vidro, borracha, etc);
- Uma régua milimetrada (ou trena);
- Caixa (de sapato, de sorvete ou similar);
- Material para a superfície de impacto (Areia, açúcar, sal, farinha de mandioca ou farinha de trigo)
- Celular e computador;
- Balança;
- Software SciDavis ou similar.

6.6.4 Métodos

1. Utilizando uma balança, meça a massa da esfera.
2. Coloque o material de superfície na caixa até uma altura de aproximadamente 1,5 vezes o diâmetro da esfera (no mínimo). Não compacte o material.
3. Com a ajuda de uma régua ou trena deixe a esfera cair, do repouso, de uma altura conhecida sobre a superfície previamente preparada.



4. Meça o diâmetro D da cratera formada no impacto. Você pode usar o feixe de luz de uma lanterna ou celular para ajudar a visualizar melhor as bordas da cratera. Para isso coloque a luz de forma lateral à cratera e observe a sombra formada pela borda. Repita este procedimento ao menos 3 vezes. Após cada impacto, retire a esfera e sacuda lateralmente a caixa para nivelar a superfície. Como sugestão, você pode organizar seus dados conforme a Tabela 7.
- 
5. Calcule a energia de impacto como sendo sua energia potencial gravitacional inicial $E = mgh$, com $g = 9,79 \text{ m/s}^2$, h sendo a altura de queda e m a massa da bolinha.
6. Utilize, no mínimo, 5 alturas diferentes. A altura da esfera será sempre a distância do seu centro até a superfície de impacto;
7. Construa um gráfico do diâmetro da cratera em função da energia e discuta o comportamento dos dados;
8. Supondo que o diâmetro da cratera obedeça à Eq. 1 determine os valores de k e n . Para isto, faça a linearização dos dados experimentais, construa um novo gráfico com os dados linearizados e faça um ajuste linear (regressão linear) dos mesmos (Dica: use o SciDavis).
9. Troque o material da superfície e repita os procedimentos acima (note que para cada material da superfície haverá 2 gráficos).
10. Determine a dimensão do parâmetro k . Discuta também o mecanismo de formação de crateras encontrado por você.

Esfera 1			Massa, $m =$				$\Delta m =$	
h (m)	Δh (m)	D_1 (m)	D_2 (m)	D_3 (m)	$D_{\text{médio}}$ (m)	ΔD (m)	E (J)	ΔE (J)
0,2								
0,4								
0,6								
0,8								
1,2								

Tabela 13: Tabela sugerida para a tomada de dados de uma das esferas, onde D_i é o diâmetro da cratera obtido na i -ésima queda, E é a energia inicial da esfera, h é a

altura de queda sugerida e Δh é a incerteza total do parâmetro altura (as outras incertezas são escritas de forma análoga).

6.6.5 Discussões

Baseado nos resultados obtidos no procedimento experimental, quais os mecanismos de formação de crateras observados? Qual o valor de k encontrado para cada caso?

6.6.6 Resultados esperados

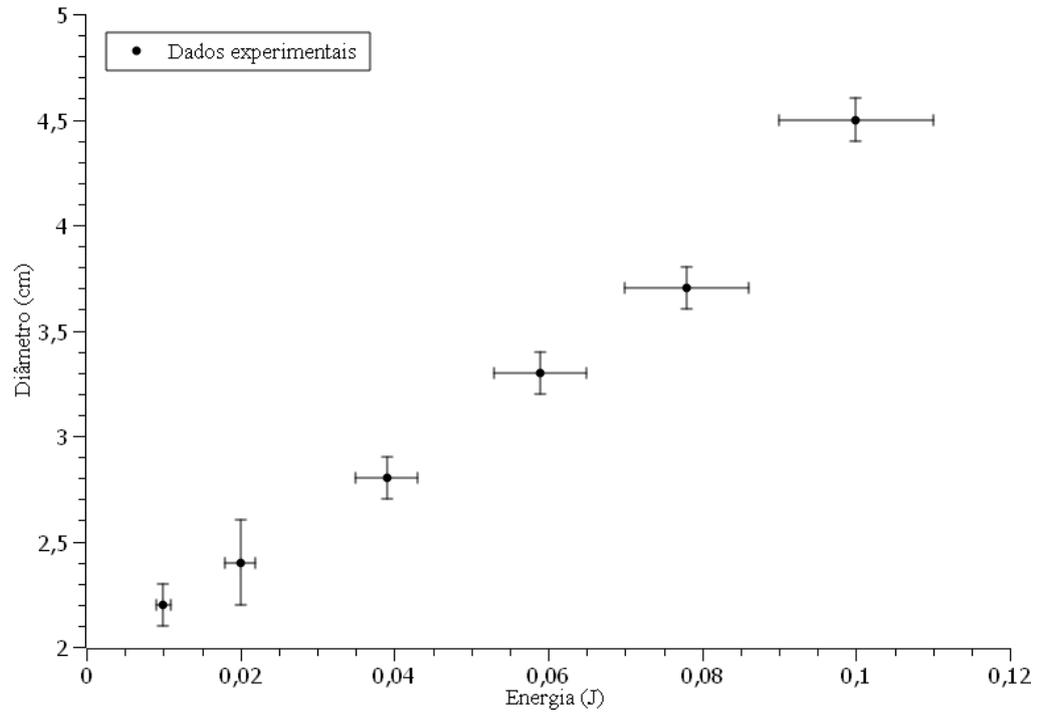
Nesse experimento, espera-se que o estudante ache o principal mecanismo de formação de crateras encontrando um valor de n próximo a $1/3$ ou a $1/4$. Utilizando farinha de trigo como superfície para impacto e uma bola de gude, espera-se que o experimentador adquira dados próximos aos seguintes:

Tabela 14: Dados coletados pelo autor.

Esfera 1			Massa, $m = 10\text{g}$				$\Delta m = 1\text{g}$	
h (m)	Δh (m)	D_1 (cm)	D_2 (cm)	D_3 (cm)	$D_{\text{médio}}$ (cm)	ΔD (cm)	E (J)	ΔE (J)
0,10	0,001	2,1	2,2	2,1	2,2	0,1	0,010	0,001
0,20	0,001	2,5	2,6	2,2	2,4	0,2	0,020	0,002
0,40	0,001	2,9	3,0	3,0	3,0	0,1	0,039	0,004
0,60	0,001	3,2	3,4	3,2	3,3	0,1	0,059	0,006
0,80	0,001	3,7	3,8	3,6	3,7	0,1	0,078	0,008
1,00	0,001	4,5	4,5	4,6	4,5	0,1	0,10	0,01

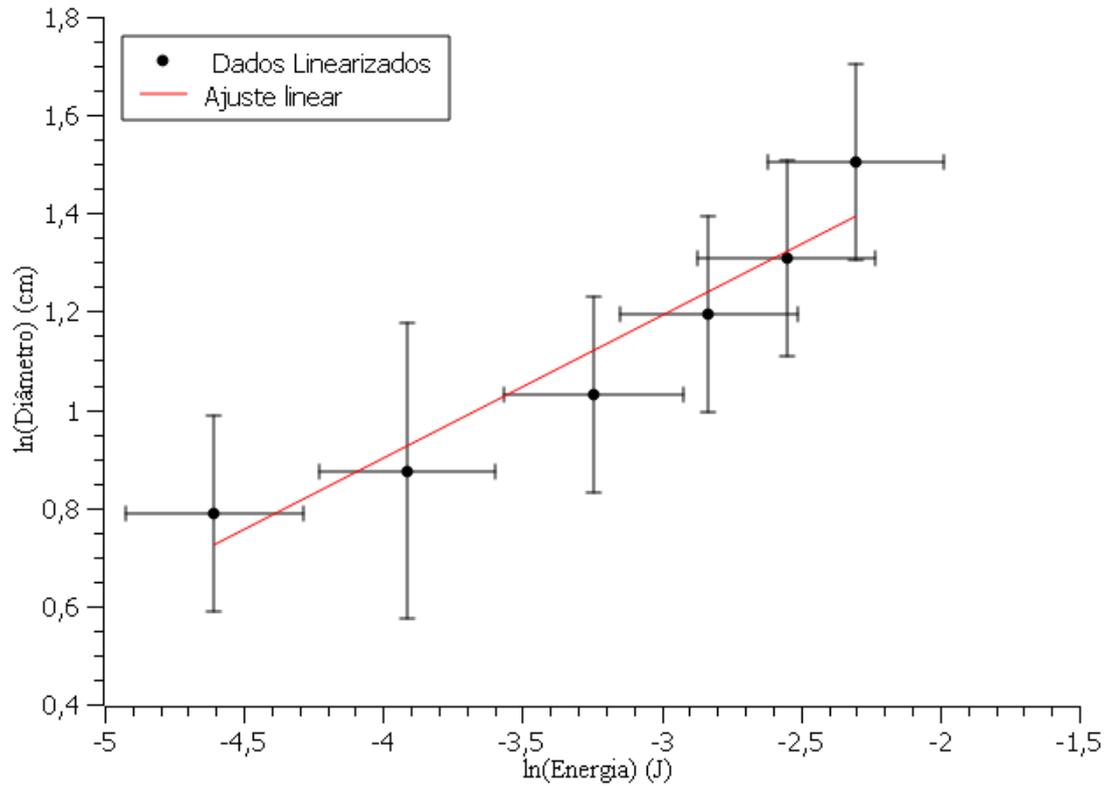
Utilizando o software *SciDAVis*, espera-se a seguinte dispersão de dados:

Figura 22: Gráfico do diâmetro das crateras (cm) em função da energia potencial gravitacional.



Linearizando os dados por $\ln(D) = \ln(k) + n \ln(E)$, onde D é o diâmetro da cratera e E é a energia potencial gravitacional da bola no momento inicial, encontra-se a seguinte dispersão.

Figura 23: Gráfico mostrando a dispersão dos dados linearizados.



A partir do ajuste linear encontrou-se os valores de $2,0 \pm 0,4$ para o coeficiente linear e $0,3 \pm 0,1$ para o angular. O coeficiente angular corresponde ao n , que indicará o mecanismo de formação principal da cratera. Como esse valor está mais próximo de $1/3$ do que de $1/4$, entende-se que o mecanismo principal é a deformação plástica nesse sistema.

6.7 Dimensão Fracionária

6.7.1 Introdução

De uma forma simplificada, na geometria Euclidiana, o tamanho de um objeto é proporcional a um comprimento elevado a um número inteiro, chamado dimensão.

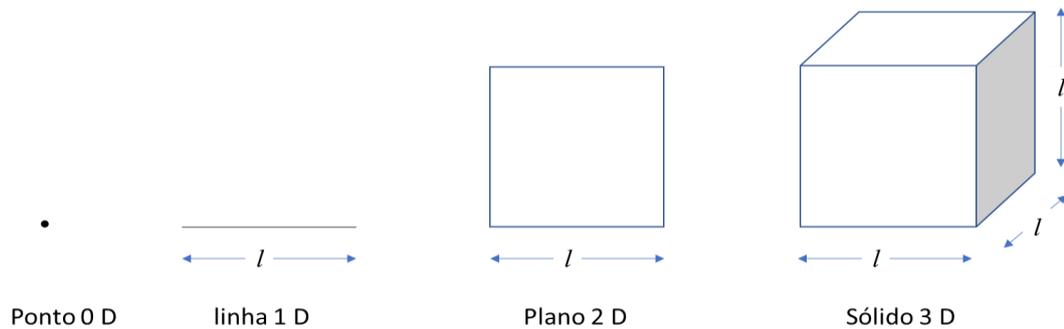


Figura 24: Objetos básicos presentes na geometria Euclidiana.

Podemos tomar como exemplo os objetos apresentados na Figura 12, onde:

Linha: comprimento = l^1

Plano: área = l^2

Sólido: volume = l^3

Logo, para um objeto que obedeça a geometria Euclidiana pode-se dizer que tamanho $\propto l^n$, com n inteiro. No entanto, para objetos de forma irregular (o perfil do litoral num mapa, etc) é possível obter valores de n fracionários, como foi descoberto pelo matemático francês Benoit Mandelbrot (MANDELBROT, 1982), que deu o nome de geometria fractal a estes sistemas. É neste contexto que esta prática se insere. Aqui, partiremos de objetos essencialmente bidimensionais, formaremos objetos de dimensão superior e utilizando técnicas de análise de dados determinaremos a sua dimensionalidade. Para isto, faremos uso do conceito de densidade superficial de massa

$$\sigma = \frac{m}{A} \quad (1)$$

onde m é a massa contida numa superfície de área A . Logo é possível perceber que $m \propto A \propto l^n$, com $n = 2$ neste caso. Da mesma forma, para um objeto tridimensional temos uma relação semelhante, ou seja $m \propto V \propto l^n$, com $n = 3$ e V sendo o volume do objeto. Para um objeto bidimensional amassado é, portanto, de se esperar que o valor de n seja diferente de 2 e de 3. A dimensão deste novo objeto deverá ser encontrada neste trabalho.

6.7.2 Objetivo

Determinar a dimensionalidade de um objeto formado a partir de um outro objeto bidimensional.

6.7.3 Materiais

- Papel de gramatura conhecida (sulfite, papel alumínio, papel manteiga, etc);
- Paquímetro;
- Balança;
- Computador;
- Software SciDavis.

6.7.4 Metodologia

1. Usando papel de mesma gramatura, corte pedaços quadrados de lado conhecido, l , como mostra a Tabela 9.
2. Calcule o valor da massa de cada quadrado, utilizando a balança.
3. Amasse cada quadrado de papel até formar uma esfera com o menor diâmetro possível. Meça, ao menos 3 vezes, o diâmetro da bola formada (em diferentes posições) e calcule o diâmetro médio.

Lado, l (cm)	m (g)	Δm (g)	D_1 (cm)	D_2 (cm)	D_3 (cm)	$D_{\text{médio}}$ (cm)	ΔD (cm)
1							
2							
5							
10							
15							

Tabela 15: Tabela exemplo de tomada de dados contendo: o valor do lado do quadrado l , a massa calculada de cada quadrado m , e o diâmetro da bolinha formada após amassar o quadrado de papel. Todas as grandezas devem ser anotadas com sua respectiva incerteza total.

4. Construa um gráfico da massa em função do diâmetro das bolinhas.
5. Pelo exposto na Introdução deste trabalho, podemos supor que a massa m obedece à relação $m = kD^n$, onde k e n são constantes. Aplique seus conhecimentos para linearizar esta equação. A partir dela, linearize os dados experimentais e determine o valor de n . Para isso, trace um novo gráfico para os dados linearizados e, finalmente, faça o ajuste linear (regressão linear) dos

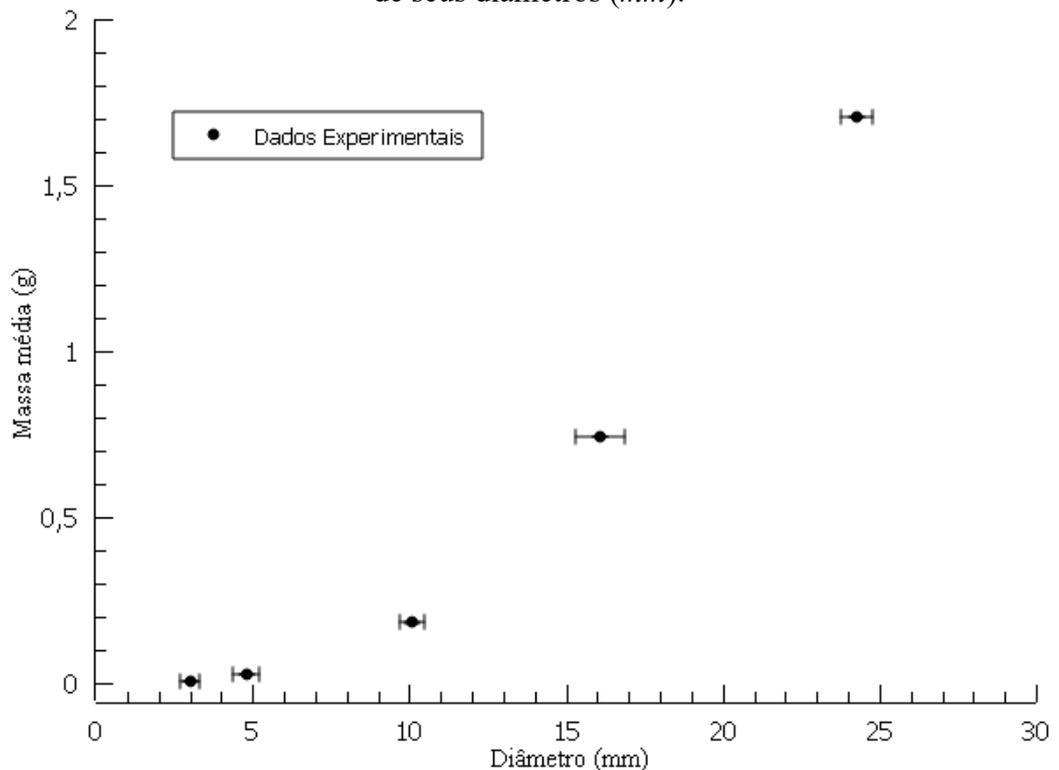
mesmos (Dica: use o SciDavis). Compare o valor de n com o resultado esperado para objetos 2D e 3D.

6.7.5 Resultados esperados

Espera-se com esse experimento que o aluno entenda a relação $m = kD^n$ apenas como uma proporção entre a massa e o diâmetro, que advém do fato da densidade superficial do papel ser constante.

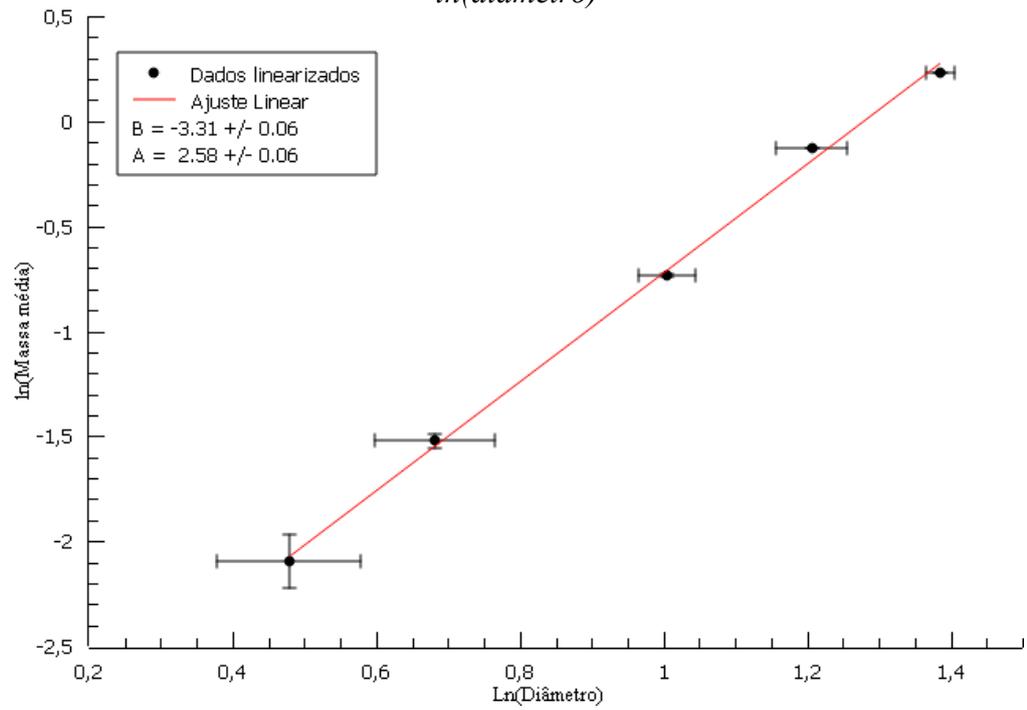
Além disso, o espera-se um resultado para n entre 2 e 3. Os resultados obtidos previamente, para pedaços de papel de 1, 2, 5, 10 e 15 cm, foram os seguintes:

Figura 25: Massa média (g) de cada uma das bolinhas amassadas em função da média de seus diâmetros (mm).



Linearizando a relação $m = kD^n$ por $\ln(m) = \ln(k) + n \ln(D)$, encontra-se a seguinte dispersão de dados:

Figura 26: Dispersão dos dados linearizados $\ln(\text{massa média})$ em função de $\ln(\text{diâmetro})$



Nota-se que o valor encontrado para o coeficiente angular (que nesse caso corresponde a n) é de $2,58 \pm 0,06$, que está entre 2 e 3.

7 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS

É fato que, diferente de outras disciplinas teóricas da graduação, a bibliografia necessária para o entendimento dos conceitos que regem uma disciplina de experimentação é muito heterogênea. Além da teoria por trás dos laboratórios convencionais, (como os laboratórios de Física Básica) há a necessidade de conhecer os assuntos desenvolvidos para a apostila. Neste trabalho foram abordados temas como cálculo, registro adequado de erros, confecção de gráficos e o próprio conceito de ciência.

Com isso, pode-se dimensionar a relevância dessa reunião de bibliografias distintas em um mesmo material, em termos de didática e praticidade para os discentes que, por ventura, teriam acesso à apostila.

É importante pontuar que, no momento, a disciplina “Introdução a laboratório de Física” é exclusiva ao curso de Física Licenciatura. Porém, a sua presença na grade curricular dos cursos de Física Médica e Física de Materiais deveria ser avaliada, já que os discentes ingressantes desses dois cursos passam pelos mesmos desafios nas disciplinas experimentais.

Acerca dos experimentos propostos, é importante ressaltar a ausência de necessidade de conhecimento prévio de Física para realizá-los, o que transfere o foco das aulas práticas ao estudo do fenômeno em si.

As perspectivas para o futuro desse trabalho são a criação de propostas para o refinamento dos experimentos e o desenvolvimento de novas atividades práticas. Alguns resultados preliminares como os da “Dinâmica de queda de uma folha de papel” e “Aproximação no período de oscilação de um pêndulo” apresentaram erros difíceis de serem estimados ou resultados inconclusivos, o que indica a necessidade de serem aprimorados utilizando novas abordagens para a tomada dos dados.

BIBLIOGRAFIA

Amato, J. C. and Williams, R.E., 1998. Crater formation in the laboratory: An introductory experiment in error analysis, *Am. J. Phys.*, 66(2), pp 141-143.

Galliano, A. G. 1979. *O Método Científico: teoria e prática*. São Paulo: HARBRA.

Halliday, David, Robert Resnick, and Jearl Walker. 1983. *Fundamentos da Física 1: Mecânica*. 4th ed. Vol. 1. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro: LTC.

IWAMOTO, W. A. et al. Guias e roteiros para Laboratório de Física Experimental 1. Uberlândia: UFU, 2014. Disponível em: http://www.infis.ufu.br/system/files/conteudo/apostila_mecanica.pdf.

Acesso em: 03 fev. 2022.

Lakatos, Eva M., and Marina d. Marconi. 1992. *Metodologia Científica*. 2nd ed. São Paulo: Atlas.

Mandelbrot, Benoit B. 1983. *The fractal geometry of nature*. N.p.: Henry Holt and Company.

Stewart, James. 2014. *Cálculo*. 7th ed. Vol. 1. N.p.: Cengage Learning.

Taylor, Jhon R. 2012. *Introdução à Análise de Erros: O Estudo de Incertezas em Medições Físicas*. 2nd ed. Porto Alegre: Bookman.

Vuolo, Jose H. 1996. *Fundamentos da teoria dos erros*. 2nd ed. São Paulo:
E. Blucher.