Universidade Federal de Uberlândia

Faculdade de Ciências Integradas do Pontal

Curso de Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso

Uma Introdução à Teoria de Semigrupos Lineares

com Aplicação à Equação de Onda

por

Ially Alves Batista Pereira †

Bacharelado em Matemática - Ituiutaba - MG

Orientador: Prof. Dr. Alisson Rafael Aguiar Barbosa

Uma Introdução à Teoria de Semigrupos Lineares com Aplicação à Equação de Onda

Este exemplar corresponde à redação final da Monografia devidamente corrigida e defendida por **Ially Alves Batista Pereira** e aprovada pela comissão julgadora.

Ituiutaba, 02 de fevereiro de 2023.

Prof. Dr. Alisson R. A. Barbosa

Banca examinadora:

Prof. Dr. Alisson R. A. Barbosa (*orientador*)

Prof. Dra. Evaneide Alves Carneiro

Prof. Dra. Tânia Maria Machado de Carvalho

Monografia apresentada ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal (ICENP) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU) como requisito parcial para obtenção do título de **Bacharel em Matemática**.

Ao meu Orientador

Alisson

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço à Deus, que me concedeu saúde e força para que pudesse concluir mais essa etapa da minha vida. À minha família que esteve ao meu lado durante essa caminhada, em especial agradeço minha mãe **Maria Regina Batista Pereira**, uma mulher incrível e batalhadora que me ensinou que a perseverança é a chave para conquistar meus objetivos apesar das dificuldades. Ao meu pai **Francisco de Assis Pereira** e meu irmão **Daniel Paulo Batista Pereira** pela ajuda, ensinamentos e cuidado dedicados à minha família. Às minhas queridas irmãs **Maria Daniela Batista Pereira** e **Ana Vitoria Batista Pereira** por toda ajuda, apoio e motivação em toda essa caminhada. Em memória dos meus avós **João Pedro Pereira** e **Ildefônsia de Almeida Batista**, por todo amor e ajuda que ofereceram à minha família em vida. À minha avó paterna **Lazara Antônia Alves Pereira** e meu avô materno **Antônio Batista** pela ajuda e carinho dedicado aos netos e pela inspiração de pessoas amorosas, honestas, humildes e gentis. Ao meu companheiro **Charles David Verlim Zacharczuk** que me ajudou, apoiou e incentivou em todos os momentos. A todos os meus professores, em especial **Tânia Maria Machado de Carvalho**, **Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira**, **Evaneide Alves Carneiro** e **Cristiane Coppe de Oliveira**, por toda dedicação em ensinar os conteúdos que oferecem durante o curso, ajuda e apoio contribuído para o aprendizado das disciplinas. E aos colegas de curso por todo ajuda e pelas amizades. Ao meu orientador, professor e amigo **Alisson Rafael Aguiar Barbosa**, por me manter motivada durante todo o processo para concluir este trabalho, por toda ajuda nas orientações e pelas lições de vida que contribuíram para meu crescimento como graduanda e pessoa. À Universidade Federal de Uberlândia e ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal por todo empenho e ensino de qualidade oferecidos para uma formação ampla e diversificada.

RESUMO

A presente monografia foi fruto da participação no programa de Projetos de Pesquisa para Bolsas de Iniciação Científica concedidas no edital Nº 04/2020 PIBIC-CNPq. O objetivo foi estudar a teoria de semigrupos lineares e algumas aplicações, mais especificamente, estudamos a existência e unicidade de soluções de equações diferenciais parciais lineares e semilineares. Primeiro estudamos alguns conceitos básicos bem como resultados clássicos de análise funcional e equações diferenciais parciais que foram também vistos nas disciplinas do curso, e posteriormente, introduzimos o método de semigrupos lineares para resolver um problema linear e semilinear. A existência e unicidade das soluções dos problemas foram desenvolvidas com base nos trabalhos de Rivera [16] e o livro do Pazy[15]. Sendo assim, a pesquisa é de caráter bibliográfico e teve como principais referências [1], [3], [7], [10], [9], [13], [15], [16], e [17]. Os resultados alcançados na realização desta monografia foram principalmente o estudo de conteúdos mais aprofundados sobre a teoria de semigrupos, além dos vistos na graduação sobre o tema estudado e a aquisição de conhecimento de novas técnicas para resolução de sistemas equações diferenciais parciais analisando condições para existência e unicidade de soluções. Além disso, a pesquisa contribuiu para uma formação ampla e diversificada da aluna de Bacharelado em Matemática como futura pesquisadora em Matemática. Espera-se que o texto desta monografia sirva de material bibliográfico complementar para estudos relacionados á teoria básica de semigrupos lineares e suas aplicações.

CONTEÚDO

Lista de Símbolos

Notações Gerais

- $\emptyset$ Conjunto vazio.
- Δ Laplaciano das derivadas parciais em $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{P}(X)$ Coleção de todos os subconjuntos de X.
- $A^{\complement}$ Complementar do conjunto A.
- $C(\Omega)$ Espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ contínuas em Ω.
- $C^k(\Omega)$ Espaço das funções k-vezes continuamente diferenciáveis em Ω.
- $C^\infty(\Omega)$ Espaço das funções infinitamente diferenciáveis em Ω.
- $\overline{D(A)}$ Fecho do subconjunto $D(A)$.
- $D(A)$ Domínio do operador A.
- $\mathcal{B}(X)$ Conjunto dos operadores lineares limitados.
- X' Dual do espaço X.
- X'' Bidual do espaço X.
- $X \hookrightarrow Y$ Imersão contínua de X em Y.
- $Y \overset{c}{\hookrightarrow} X$ Imersão compacta de Y em X.

- H^1 — Caso particular do espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, quando $p = 2$ e $m = 1$.

- L^2 — Conjunto formado pelas funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $|f|^2$ é integrável (no sentido de Lebesgue).

Introdução

Com o advento das equações diferenciais observamos o crescimento do Cálculo Diferencial e Integral, provenientes de Newton e Leibniz no final do século XVII. Os estudos de fenômenos naturais governados pelas leis da física, progrediram utilizando o Cálculo Diferencial e assim as Equações Diferenciais foram incorporadas como área da Matemática. As equações diferenciais são grandes ferramentas matemáticas para modelar diversos problemas das ciências tais como física, engenharia, ecologia, entre outras. Em particular as EDP's têm um grande destaque em problemas famosos: O problema da Corda, da difusão de calor e do Laplaciano (Iório, [11]), por exemplo. Com avanço dos estudos das EDP's os conceitos de existência, unicidade e comportamento assintótico de soluções foram evoluindo gradualmente com o aparecimento de novas teorias como a Análise de Fourier, Teoria de Galerkin e Teoria de Semigrupo.

A presente monografia foi fruto da participação no programa de Projetos de Pesquisa para Bolsas de Iniciação Científica concedida no Edital Nº 04/2020 PIBIC-CNPq. O nosso trabalho foi motivado por uma pesquisa desenvolvida em um projeto de iniciação cientifica na qual foi estudado, a teoria de EDO's e aplicações, o que permitiu ampliar os conhecimento nessa área de pesquisa. Posteriormente foi elaborado um novo projeto de pesquisa na área de Equações Diferencias Parciais para estudar conceitos de existência e unicidade de soluções através da Teoria de Semigrupo, que desenvolveu o tema para este trabalho de conclusão.

Estamos interessados em estudar a existência e unicidade de soluções para o seguinte problema de Cauchy associado com a equação da onda em $\mathbb{R}^n$ com um termo dissipativo,

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta_u + u_t &= 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n && (1)\\ u(0) &= u_0, \quad u_t(0) = u_1, && (2) \end{aligned}$$

com $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. A ferramenta principal que usaremos para tal estudo, é a Teoria de Semigrupos de operadores lineares. Podemos enxergar os sistemas de equações diferenciais lineares como um problema de Cauchy abstrato, basicamente, reescrevemos o problema (1)–(2) como um problema de primeira ordem, a saber:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U + AU = 0, \\ U(0) = U_0 \end{cases} . \tag{3}$$

onde $A : D(A) \subset H \to H$ é um operador linear não limitado definido em um espaço de Banach (ou Hilbert) H. Sendo assim, os resultados de existência, unicidade e dependência contínua dos dados iniciais são mostrados por meio da técnica de semigrupos lineares. Nesse trabalho fazemos um estudo fundamentado em propriedades específicas para operadores lineares definidos em espaços de Banach. Iniciamos com algumas definições e resultados preliminares, prosseguimos com o conceito de semigrupo propriamente dito, desenvolvemos suas propriedades elementares e apresentamos os Teoremas de Lumer-Phillips e Hille-Yosida dois dos principais resultados da teoria de semigrupos. Finalizamos o trabalho com a aplicação da teoria ao estudo de alguns problemas de valor inicial lineares e semilineares associados à equação da onda.

Objetivo

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo breve da teoria dos semigrupos de operadores e aplicar os resultados em problemas de valor inicial envolvendo equações diferenciais parciais lineares e semilineares. Mostraremos a existência e unicidade de soluções para o problema linear (3) por meio da técnica de semigrupos lineares. E estenderemos a aplicação para mostrar a existência de solução local e unicidade do problema semilinear associado a (3), dado abaixo:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U + AU = F(U) \\ U(0) = U_0 \end{cases} . \tag{4}$$

Estrutura dos Tópicos Apresentados

O presente trabalho está dividido da seguinte maneira:

- No capítulo 1 (Definições e Resultados Preliminares), serão apresentados definições e resultados sobre Equações Diferencias Parciais e Análise Funcional considerados pré-requisitos para a compreensão do trabalho desenvolvido nesta monografia.

- No capítulo 2 (Introdução à Teoria de Semigrupos Lineares), serão apresentadas as definições de Semigrupos Lineares de Classe C_0, algumas caracterizações e propriedades que foram utilizados durante nossa pesquisa. E para finalizar este capítulo abordaremos o problema abstrato de Cauchy o qual será estudado como problema de valor inicial associado à equação da onda do capítulo 3.

- No capítulo 3 (Aplicação da Teoria de Semigrupos), utilizamos a teoria estudada e os resultados de semigrupos lineares vistos no capítulo 2. Primeiro abordamos o papel dos semigrupos na demonstração da existência e unicidade de solução de um problema linear não-homogêneo, aplicando a teoria à equação da onda com uma dissipação provocada por atrito. Concluímos o capítulo 3 aplicando o mesmo estudo dos semigrupos à existência e unicidade de solução local do problema semilinear abstrato.

CAPÍTULO 1

Definições e resultados preliminares

Nesse capítulo serão introduzidos conceitos de EDP's e resultados de Análise Funcional, que se fazem necessários para o entendimento dos resultados abordados nos próximos capítulos.

1.1 Conceitos de Equações Diferenciais Parciais

Definição 1.1. Uma Equação Diferencial parcial **(EDP)** é uma equação que envolve duas ou mais variáveis independentes $x_1, \ldots, x_n$ e derivadas parciais de uma função $u = u(x_1, \ldots, x_n)$.

Assim, uma EDP de ordem k é uma expressão da forma

$$F\Big(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\Big) = 0 \tag{1.1}$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, em que Ω é um domínio em $\mathbb{R}^n$ (isto é, um aberto conexo), F é uma função dada e $u(x)$ é a função que queremos determinar.

A *ordem* de uma EDP é dada pela derivada parcial de maior ordem que ocorre na equação. Uma EDP é dita *linear* se é de primeiro grau em u e em todas as suas derivadas parciais que ocorrem na equação, caso contrário a EDP é dita *não linear.* A parte principal de uma EDP é a parte da equação que contém os termos de maior ordem. Dentre as equações não lineares, as que têm parte principal linear são chamadas *semi-lineares*. No caso linear, dizemos que a equação é *homogênea* se o termo independente de u é identicamente nulo, caso contrário, a equação é dita *não homogênea*.

Definição 1.2. Uma solução clássica de uma EDP de ordem k em um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma função $u \in C^k(\Omega)$ que satisfaz a equação em todos os pontos de Ω.

Quando impomos condições sobre a solução no bordo da região $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ temos um *problema de contorno*; se as condições são dadas em uma subvariedade inicial, temos um *problema de Cauchy* ou *de valor inicial*.

Um problema para o qual valem existência, unidade e dependência contínua nos dados iniciais e/ou de contorno é chamado um *problema bem posto* no sentido de Hadamard, caso contrário o problema é dito *mal posto*.

1.2 Espaços de Banach e Espaços de Hilbert

Nesta seção $\mathbb{K}$ denotará o corpo dos números reais ($\mathbb{R}$) ou dos números complexos ($\mathbb{C}$).

Definição 1.3. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Um produto interno (ou produto escalar) sobre V é uma função de valor escalar $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{K}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $(x+y,z) = (x,y) + (y,z)$ para todos x, y e $z \in V$;

ii) $(x,y) = \overline{(y,x)}$ $\forall x, y \in V$, onde a barra denota a conjugação complexa;

iii) $(\alpha x, y) = \overline{\alpha}(x,y)$ $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ x, y \in V$;

iv) $(x,x) \geq 0$ para cada $x \in X$ e $(x,x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

Note que se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, então que a propriedade (ii) fica $(x,y) = (y,x)$. Denotaremos um produto interno em V por $(\cdot,\cdot)_V$.

No que segue será utilizada a notação $\mathbb{K}$-espaço vetorial para indicar um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$.

Definição 1.4. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Uma norma em V é uma função $\|\cdot\|_V : V \to \mathbb{R}^+$ tal que:

a) $\|x\|_V = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

b) $\|\alpha x\|_V = |\alpha|\|x\|_V$ para todo $x \in V$, e para todo $\alpha \in \mathbb{K}$;

c) $\|x + y\|_V \leq \|x\|_V + \|y\|_V$ para todo $x, y \in V$.

Observação 1.5. a) Um espaço vetorial V munido de uma norma $\|\cdot\|_V$ é chamado um espaço vetorial normado.

b) Denotamos um espaço vetorial normado pelo par $(V, \|\cdot\|_V)$. Quando não houver risco de confusão, será denotado por V um espaço vetorial normado e por $\|\cdot\|$ a norma em V.

Definição 1.6. Seja V um espaço vetorial normado e $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ duas normas em V. Diz-se que a norma $\|\cdot\|_1$ é equivalente à norma $\|\cdot\|_2$ quando existem constantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$, tais que

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1, \qquad \forall x \in V. \tag{1.2}$$

Definição 1.7. Seja V um espaço vetorial normado. Uma sequencia em V é uma função $x : \mathbb{N} \mapsto V$. Usaremos a notação $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma restrição da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$, e será denotada por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$.

Definição 1.8. Seja V um espaço vetorial normado. Diz-se que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em V a um elemento $x \in V$ se satisfaz a seguinte condição: para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \epsilon$ para todo $n > n_0$. Denota-se a convergência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para x por $x_n \to x$.

Definição 1.9. Seja V um espaço vetorial normado. Diz-se que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em V se para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_m - x_n\| < \epsilon$ para todo $m, n > n_0$.

Definição 1.10. Sejam V um espaço vetorial e $(\cdot,\cdot)_V$ um produto interno em V. A função $\|\cdot\|_V = \sqrt{(\cdot,\cdot)_V}$, define uma norma sobre V. Esta norma é chamada de norma proveniente do produto interno $(\cdot,\cdot)_V$.

Definição 1.11. Um espaço vetorial normado $(V, \|\cdot\|_V)$ é chamado de espaço de Banach quando toda sequência de Cauchy em V é convergente em V com respeito à norma $\|\cdot\|_V$.

Recordemos que um espaço métrico E é dito completo se toda sequência de Cauchy converge (em E, claro). Assim, um espaço normado é um espaço de Banach se é um espaço métrico completo em relação à métrica induzida por sua norma.

Definição 1.12. Um espaço de Banach $(H, \|\cdot\|_H)$ é chamado de espaço de Hilbert quando a norma $\|\cdot\|_H$ é proveniente de um produto interno em H.

Observação 1.13. a) Todo espaço de Hilbert é um espaço de Banach, mas a afirmação recíproca não é verdadeira, pois nem toda norma provém de um produto interno.

b) Como exemplos de normas que não provêm de produto interno, podemos citar as normas da soma e a do máximo em $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_S = |x_1| + |x_2| + \quad + |x_n| \text{ e } \|x\|_M = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} |x_i|$$

onde $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, respectivamente.

Definição 1.14. Um espaço vetorial normado V é dito separável quando existe um subconjunto $U \subset V$ enumerável e denso em V, ou seja, as seguintes condições são satisfeitas:

a) Dado $v \in V$ e $\varepsilon > 0$, existe $u \in U$ tal que $\|v - u\|_V < \varepsilon$ (densidade);

b) Existe uma função bijetora: $f : \mathbb{N} \to U$ (enumerabilidade).

Definição 1.15. Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados com $X \subseteq Y$. Diz-se que X está imerso continuamente em Y quando a aplicação identidade $i : X \to Y$ dada por $i(x) = x, \ \forall x \in X$ é contínua em Y. Equivale também a dizer que a imersão de X em Y é contínua se existe $C > 0$ tal que

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X, \ \forall x \in X.$$

Denota-se a imersão contínua de X em Y por $X \hookrightarrow Y$.

Definição 1.16. Seja $X \hookrightarrow Y$ uma imersão contínua. É dito que X está imerso compactamente em Y se toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, limitada, possui subsequência convergente em Y. Outra maneira equivalente de definir uma imersão compacta é dizer que a imersão de X em Y é compacta se a aplicação identidade $i : X \to Y$ for compacta. Denota-se a imersão compacta de Y em X por $Y \overset{c}{\hookrightarrow} X$.

1.3 Operadores Lineares

Definição 1.17. Sejam X e Y dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais normados. Diz-se que um operador $A : D(A) \subset X \to Y$ é linear quando

$$A(x + \alpha y) = A(x) + \alpha A(y), \text{ para quaisquer } x, y \in D(A) \text{ e } \alpha \in \mathbb{K}.$$

Em outras palavras podemos dizer que, dados X e Y espaços normados, um operador linear é uma aplicação linear $A : D(A) \subset X \to Y$, onde $D(A)$ é o domínio de A. Nos casos particulares $Y = \mathbb{R}$ ou $Y = \mathbb{C}$, diz-se que A é um funcional linear.

Definição 1.18. Um operador linear $A : D(A) \subset X \to Y$ é chamado operador limitado se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|A(u)\|_Y \leq C\|u\|_X \ \forall\ u \in D(A).$$

Caso contrário, A é dito um operador não limitado, isto é, se existe uma sequência $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A)$ tal que

$$\frac{\|A(u_n)\|_Y}{\|u_n\|_X} \longrightarrow +\infty \text{ quando } n \to +\infty.$$

O operador A é dito densamente definido se seu domínio é um subconjunto denso do espaço X, isto é, $\overline{D(A)} = X$.

Lema 1.19. *Se $A : D(A) \subset X \to Y$ é um operador linear, então as seguintes condições são equivalentes:*

i) A é globalmente Lipschitz contínuo em $D(A)$, isto é, existe $C > 0$ tal que

$$\|Au - Av\|_Y \leq C\|u - v\|_X, \ \forall u, v \in D(A).$$

ii) A é uniformemente contínuo em $D(A)$;

iii) A é contínuo em $D(A)$,

iv) A é contínuo em $u_0 \in D(A)$;

v) A é um operador limitado.

Demonstração. Ver [8] página. 10. $\square$

Definição 1.20. Dizemos que o operador $B : D(B) \subset X \to Y$ é uma extensão do operador $A : D(A) \subset X \to Y$ quando $D(A) \subset D(B)$ e $Au = Bu$ para todo $u \in D(A)$. Neste caso, indica-se $A \subset B$ e dizemos que B é uma extensão própria de A.

Observação 1.21. i) Em geral um operador linear limitado $A : D(A) \subset X \to Y$ possui uma única extensão $A : D(A) \to Y$, a qual é um operador linear limitado.

ii) Se o domínio de A é denso em X então A pode ser estendido a todo X.

Definição 1.22. Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão infinita sobre o corpo $\mathbb{K}$. O conjunto dos operadores lineares limitados de X em Y será denotado por $\mathcal{B}(X,Y)$, isto é,

$$\mathcal{B}(X,Y) = \{T : X \to Y : T \text{ é linear limitado}\},$$

com a norma usual, dada por: $\|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} = \sup\Big\{\|T(x)\|_Y : x \in X \text{ e } \|x\| \leq 1\Big\}$.

Observação 1.23. i) Quando $Y = X$ o conjunto dos operadores lineares limitados $\mathcal{B}(X,Y)$ será denotado simplesmente por $\mathcal{B}(X)$, com norma $\|T\|_{\mathcal{B}(X)} = \sup\{\|T(x)\|_X : x \in X \text{ e } \|x\|_X \leq 1\}$.

ii) Vimos na Definição 1.17 o conceito de funcional linear. Quando temos $Y = \mathbb{R}$ ou $Y = \mathbb{C}$ denota-se $\mathcal{B}(X,\mathbb{R}) = X'$ e também $\mathcal{B}(X,\mathbb{C}) = X'$, que são os espaços de todos os funcionais lineares contínuos definidos em X. O espaço X' é chamado de espaço dual do espaço X. Define-se a norma (dual) sobre X', por

$$\|f\|_{X'} = \sup\Big\{|f(x)| : x \in X \text{ e } \|x\| \leq 1\Big\} = \sup\Big\{f(x) : x \in X \text{ e } \|x\| \leq 1\Big\}, \quad (1.3)$$

para $f \in X'$.

iii) X' é um espaço de Banach, pois com a norma $\|\cdot\|_{X'}$ o espaço dual é completo (ainda que X não seja). Isso é consequência da forma analítica do Teorema de Hahn-Banach (Veja teorema 1.28) - veja também ([12], Teorema 2.10-2).

iv) Quando não houver o risco de gerar confusão entre as notações vamos escrever $\|f\|$ no lugar de $\|f\|_{X'}$. Dados $f \in X'$ e $x \in X$, escreveremos frequentemente $\langle f, x\rangle$ para denotar $f(x)$.

Definição 1.24. Podemos construir o espaço dual do dual (bidual), dado por

$$X'' = \{f : X' \to \mathbb{K}; f \text{ é linear e contínua }\}.$$

O espaço X'' é também um espaço normado completo. A norma do espaço bidual é dada por

$$\|f\|_{X''} = \sup\{f(g) : g \in X', \|g\|_{X'} \leq 1\}.$$

Definição 1.25. Podemos relacionar o espaço X com o bidual X'' através da aplicação

$$\begin{aligned} J_c : X &\to X'' \\ x &\mapsto J_c(x) \in X'' \end{aligned}$$

definida por

$$\langle J_c(x), f\rangle = f(x), \ \forall f \in X',$$

onde $J_c(x) : X' \to \mathbb{K}$.

Definição 1.26. Seja X um espaço de Banach. dizemos que X é um espaço reflexivo quando a aplicação J_c definida acima é sobrejetora.

Definição 1.27. Seja E um espaço vetorial real. Dizemos que $p : E \to \mathbb{R}$ é uma função subaditiva se

$$p(t+s) \leq p(t) + p(s) \ \text{ e } \ \lambda p(t) = \lambda p(t), \ \forall t, s \in E, \ \lambda > 0.$$

Teorema 1.28 (Hahn-Banach)**.** *Sejam E um espaço normado, $p : E \to \mathbb{R}$ uma função subaditiva e M um subespaço vetorial de E. Se $f_0 : M \to \mathbb{K}$ é linear e*

$$|f_0(x)| \leq p(x), \forall x \in M,$$

então existe $f : E \to \mathbb{K}$ tal que

i) $f|M = f_0$;

ii) $|f(x)| \leq p(x), \forall x \in E$.

Demonstração. Ver [3]. □

Corolário 1.29. *Seja $F \subset E$ um subespaço vetorial tal que $\overline{F} \neq E$. Então existe*

$$f \in E', f \neq 0,$$

tal que

$$\langle f, x \rangle = 0 \ \forall x \in F.$$

Demonstração. Ver [3]. □

Observação 1.30. Frequentemente o corolário 1.29 é aplicado para mostrar que um subespaço vetorial $F \subset E$ é denso em E. Para isso considera-se um funcional linear e contínuo $f : E \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0, \ \forall x \in F$ e prova-se que f é identicamente nula em E.

Na seção 2.2 do capítulo 2, será apresentado o Teorema de Lumer-Phillips. As definições de dualidade e operador linear dissipativo abordadas a seguir serão utilizadas posteriormente ao referido teorema.

Definição 1.31. Seja X um espaço de Banach, X' o dual de X e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre X' e X. Para cada $x \in X$, define-se o conjunto dualidade $J(x) \subseteq X'$ por

$$J(x) = \{x' \in X' : \ \langle x, x' \rangle = \|x\|^2 = \|x'\|^2\}.$$

O símbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotará o produto interno para a dualidade X'.

Como consequência do Teorema de Hahn-Banach (Ver teorema 1.28), $J(x) \neq \emptyset | \forall x \in X$.

Definição 1.32. Uma aplicação dualidade é uma aplicação $j : X \to X'$ que a cada $x \in X$ faz corresponder $j(x) \in J(x)$ tal função está bem definida e tem-se

$$\|j(x)\| = \|x\| = \sqrt{\langle j(x), x \rangle}.$$

Definição 1.33. Um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é dissipativo relativamente a uma aplicação dualidade j, se

$$Re\langle A(x), j(x) \rangle \leq 0, \ \forall x \in D(A).$$

Definição 1.34. Um operador dissipativo A que satisfaça $Im(I - A) = X$ é denominado maximal dissipativo.

Teorema 1.35. *Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados. Se Y é um espaço de Banach, então $(\mathcal{B}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathcal{B}(X,Y)})$ é um espaço de Banach. Em particular, X' e $X'' = (X')'$ são espaços de Banach.*

Demonstração. Ver [12], página 118, Teorema 2.10-2. □

Definição 1.36. Sejam X e Y espaços normados. Um operador linear $A : D(A) \subseteq X \to Y$ é dito fechado se satisfaz umas das seguintes propriedades equivalentes.

i) O gráfico de A,

$$\begin{aligned} G(A) &= \{(x,y) \in X \times Y : x \in D(A), y = A(x)\} \\ &= \{(x, A(x)) \in X \times Y : x \in D(A)\}, \end{aligned}$$

é um subespaço fechado de $X \times Y$ munido com a norma do gráfico $\|\cdot\|_{G(A)}$ dada por

$$\|X\|_{G(A)} = \|x\|_X + \|A(x)\|_Y.$$

ii) Se, para toda a seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ os limites $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$ e $\lim\limits_{n\to\infty} A(x_n) = y \in Y$, existem, então $x \in D(A)$ e $A(x) = y$.

Proposição 1.37. *Se X e Y são espaços de Banach e $A : D(A) \subset X \to Y$ é um operador linear fechado, então $D(A)$ é um espaço de Banach, com a norma do gráfico.*

Para provar a Proposição 1.37 basta verificar que toda sequência de Cauchy em $D(A)$ converge com a norma do gráfico.

Teorema 1.38 (Teorema do Gráfico Fechado)**.** *Sejam X e Y espaços de Banach e $A : D(A) \subset X \to Y$ um operador linear. Se A é um operador fechado, então A é limitado.*

Demonstração. Ver [4]. □

A seguir H denotará um espaço de Hilbert com produto interno $(\cdot,\cdot)_H$, apresentaremos algumas definições e resultados sobre operadores lineares em espaços de Hilbert, que foram definidos na seção 1.2.

Definição 1.39. Seja H um espaço de Hilbert real, com produto interno dado por $(\cdot,\cdot)_H$. Um operador linear não limitado $A : D(A) \subset H \to H$ é dito ser monótono se

$$(A(u), u)_H \geq 0 \quad \forall u \in D(A).$$

O operador A é dito maximal monótono se A for monótono e ainda

$$\mathcal{R}(I + A) = H, \text{ isto é, } \forall f \in H, \text{ existe } u \in D(A) \text{ tal que } (I + A)u = f.$$

Observação 1.40. Dizer que um operador linear não limitado A é monótono é equivalente a dizer que $-A$ é dissipativo.

Proposição 1.41. *Seja A um operador maximal monótono e H um espaço de Hilbert real. Então,*

a) $D(A)$ é denso em H;

b) A é um operador fechado.

Demonstração:

a) Vamos usar o corolário 1.29 para mostrar que $D(A)$ é denso em H. Para isso, vamos tomar $f \in H$ tal que $(f, v) = 0,\ \forall v \in D(A)$. Como A é maximal monótono, existe $v_0 \in D(A)$ tal que $v_0 + Av_0 = f$. Assim,

$$0 = (f, v_0) = (v_0 + Av_0, v_0) = \|v_0\|^2 + (Av_0, v_0) \geq \|v_0\|^2,$$

pois A é operador monótono. Logo, $v_0 = 0$, o que implica $f = 0$. Portanto pelo corolário 1.29, $D(A)$ é denso em H. A é um operador fechado, para provar essa condição, faremos o seguinte:

Afirmação: Para todo $f \in H$ existe único $u \in D(A)$ tal que $u + Au = f$. A existência é consequência do fato que A é maximal monótono. Agora, considerando $\overline{u}$ outra solução de $u + Au = f$, obtemos que

$$(u - \overline{u}) + A(u - \overline{u}) = 0,$$

consequentemente,

$$A(u - \overline{u}) = -(u - \overline{u}),$$

como A é operador monótono, segue que

$$(A(u - \overline{u}), u - \overline{u}) = (-(u - \overline{u}), (u - \overline{u})) = -\|u - \overline{u}\|^2 \geq 0,$$

isso implica que

$$\|u - \overline{u}\|^2 = 0.$$

Assim, $u = \overline{u}$, isto prova a afirmação. Portanto, $I + A$ é bijetivo, ou seja, existe $(I + A)^{-1}$.

Mostraremos que $(I + A)^{-1}$ é contínuo (limitado). De fato, como A é monótono, tem-se que

$$(u + Au, u) = (u, u) + (Au, u) \geq \|u\|^2, \ \forall u \in D(A),$$

isto é,

$$((I + A)u, u) \geq \|u\|^2, \ \forall u \in D(A).$$

Do fato que $I + A$ é bijetivo segue que

$$(v, (I + A)^{-1}v) \geq \|(I + A)^{-1}v\|^2, \ \forall v \in H.$$

A partir da desigualdade de Schwarz, conclui-se que

$$\|(I + A)^{-1}v\| \leq \|v\|, \ \forall v \in H.$$

Isso mostra que $(I + A)^{-1}$ é operador limitado (contínuo).

b) Provaremos agora que A é um operador fechado. Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequencia no domínio de A tal que

$$u_n \to u \text{ e } Au_n \to f.$$

Vamos mostrar que $u \in D(A)$ e $Au = f$. E claro que

$$u_n + Au_n \to u + f.$$

Agora, sendo $(I+A)u_n = u_n + Au_n$, como $(I+A)^{-1}$ é contínuo, temos

$$u_n = (I+A)^{-1}(u_n + Au_n) \to (I+A)^{-1}(u+f).$$

Consequentemente, $u = (I+A)^{-1}(u+f)$, o que implica que $u \in D(A)$ e $u+Au = u+f$. Assim, provamos que $u \in D(A)$ e $Au = f$.

Logo, A é operador fechado. □

Definição 1.42. Sejam X um espaço de Banach e $A \in \mathcal{B}(X)$. Um número complexo λ se diz autovalor de A se existe $x \in X\backslash\{0\}$ tal que $A(x) = \lambda x$. O elemento x que satisfaz a equação anterior é chamado um autovetor de A.

Observação 1.43.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ é um autovalor de } A &\iff \text{existe } x \neq 0 \text{ tal que } (\lambda I - A)x = 0 \\ &\iff x \in N_{(\lambda I - A)} \\ &\iff (\lambda I - A) \text{ não é injetivo, isto é, } N_{(\lambda I - A)} \neq \{0\}. \end{aligned}$$

Onde $N_{(\lambda I - A)}$ é o núcleo do operador $(\lambda I - A)$.

Definição 1.44. Seja $A \in \mathcal{B}(X)$ um operador linear de um espaço de Banach X. O conjunto resolvente de A representado por $\rho(A)$, é o conjunto formado por todos os números complexos λ para os quais o operador linear $(\lambda I - A)$ é inversível, isto é,

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ existe em } \mathcal{B}(X)\},$$

seu inverso $(\lambda I - A)^{-1} : Im(\lambda I - A) \subset X \to X$ é limitado e densamente definido. Para $\lambda \in \rho(A)$ o operador

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}, \ \lambda \in \rho(A),$$

é chamado de operador resolvente de A. Se A é fechado e $\lambda \in \rho(A)$, então $R(\lambda I - A) = X$.

O conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A)$ é chamado espectro do operador A. Além disso o espectro de A é constituído do espectro pontual denotado por $\sigma_p(A)$, do espectro residual denotado por $\sigma_r(A)$ e do espectro contínuo denotado por $\sigma_c(A)$, que são definidos por

$$\begin{aligned}
\sigma_p(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ não existe,}\}\\
\sigma_r(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ existe, } Im\overline{(\lambda I - A)} \neq X\},\\
\sigma_c(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ existe, } Im\overline{(\lambda I - A)} = X \text{ e } (\lambda I - A)^{-1} \text{ não é limitada}\}.
\end{aligned}$$

Proposição 1.45. *Sejam A um operador linear fechado de um espaço de Banach X e $\lambda \in \rho(A)$. Então, $D(R(\lambda, A)) = X$. Em particular, $R(\lambda, A)$ é fechado.*

Demonstração. Ver [12], página 376, Teorema 7.3-2. □

Teorema 1.46 (Banach-Steinhaus ou Princípio da Limitação Uniforme.)**.** *Sejam X espaço de Banach e Y espaço vetorial normado. Seja $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de operadores lineares limitados $T_n : X \to Y$ em $\mathcal{B}(X, Y)$. Suponha que, para cada $x \in X$, a família $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, ou seja*

$$\|T_n x\|_Y \leq K(x), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então, a família das normas $(\|T_n x\|)_{n=1}^{\infty}$ também é limitada, isto é, existe $C > 0$ tal que

$$\|T_n\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \leq C, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Ver [4], página 32, Teorema 2.2. □

1.4 Teorema de Lax-Milgram

Definição 1.47. Sejam X e Y dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Uma aplicação $a : X \times Y \to \mathbb{K}$ é chamada de forma sesquilinear em $X \times Y$ se satisfizer as seguintes condições:

1. $a(x + y, z) = a(x, z) + a(y, z), \ \forall x, y \in X$ e $\forall z \in Y$;
2. $a(x, y + z) = a(x, y) + a(x, z), \ \forall x \in X$ e $\forall y, z \in Y$;
3. $a(\gamma x, y) = \gamma a(x, y), \ \forall x \in X, \ \forall y \in Y$ e $\forall \gamma \in \mathbb{K}$;
4. $a(x, \gamma y) = \overline{\gamma} a(x, y), \ \forall x \in X, \ \forall y \in Y$ e $\forall \gamma \in \mathbb{K}$.

No caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, a é chamada de forma bilinear.

Definição 1.48. Sejam X um espaço vetorial normado e $a : X \times X \to \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear em X. Diz-se que a é hermitiana quando $a(x,y) = \overline{a(y,x)}$, $\forall x, y \in X$.

Definição 1.49. Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados e $a : X \times Y \to \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear. Diz-se que a é contínua limitada quando existe uma constante $C > 0$ tal que $|a(x,y)| \leq C \parallel x \parallel_X \parallel y \parallel_Y$, para todo par $(x,y) \in X \times Y$.

Definição 1.50. Sejam X um espaço vetorial normado e $a : X \times Y \to \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear. Diz-se que a é coerciva quando existe uma constante $C > 0$ tal que $Re(a(x,x)) \geq C \parallel x \parallel_X^2$, para todo $x \in X$.

Teorema 1.51 (Teorema de Lax-Milgram)**.** *Sejam H um espaço de Hilbert real (complexo) e $a : H \times H \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ uma forma bilinear (sesquilinear) contínua e coerciva sobre H. Então, para todo $f \in H'$, isto é, para todo funcional linear (anti linear) limitado f, existe um único $x \in H$ tal que $a(x,y) = \langle f, y \rangle$, $\forall y \in H$.*

Demonstração. Para o caso real ver [4], página 140, Corolário 5.8 e para o caso complexo ver [14], página 595, Corolário 6.6.2. □

1.5 Espaços L^p

Definição 1.52. Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto qualquer e $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X. Uma σ-álgebra de subconjuntos de X é uma família $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X, tais que:

a) $\emptyset \in \mathcal{M}$;

b) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^{\complement} \in \mathcal{M}$;

c) Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos em $\mathcal{M}$ então sua união $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Observação 1.53. O conjunto dos elementos de uma σ-álgebra são ditos *conjuntos mensuráveis*, portanto uma σ-álgebra em X define uma família de conjuntos mensuráveis em X.

Definição 1.54. Um espaço mensurável é uma dupla $(X, \mathcal{M})$ onde X é um conjunto e $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X.

Definição 1.55. Uma medida positiva em $(X, \mathcal{M})$ é uma função $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty)$ que satisfaz as seguintes propriedades

a) $\mu(\emptyset) = 0$;

b) Se $(M_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ é uma coleção disjunta, então

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(M_i).$$

A tripla $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é chamado de espaço de medida μ. Se $E \in \mathcal{M}$ e $\mu(E) = 0$, dizemos que E tem medida nula.

Se uma propriedade P pode ser aplicada aos elementos $x \in X$ de um espaço com medida μ, dizemos que $P(x)$ vale em quase todo o ponto (q.t.p.) ou quase sempre (q.s.) $x \in X$, quando o conjunto

$$\{x \in X : P(x) \text{ é falso }\}$$

possui medida nula em relação à medida nula, em relação à medida μ.

Sejam X e Y conjuntos mensuráveis, uma função $f : X \to Y$ é dita *mensuráveis*, se a imagem inversa de todo mensurável é mensurável.

Definição 1.56. Seja $A \subset X$. Definimos a função característica χ_A de A por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{se } x \in A \\ 0, \text{se } x \notin A \end{cases}.$$

Definição 1.57. Chamamos de função simples uma classe de função mensurável que tem número finito de valores. Elas são funções da forma

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}, \tag{1.4}$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são valores distintos da uma função simples $s : X \to \mathbb{R}$ e $A_i \in \mathcal{M}, i = 1, \ldots, n$ e χ_A é a função característica do conjunto A.

A *integral de uma função simples sobre* S é definida por

$$\int_S s(x)d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap S), \tag{1.5}$$

com $S \in \mathcal{M}$. Se $f : X \to [0, \infty]$, definimos a *integral de* f *sobre* S sendo

$$\int_S f(x)d\mu(x) = \sup \int_S s(x)d\mu(x), \tag{1.6}$$

onde o supremo em (1.6) é estendido sobre todas as funções simples s satisfazendo

$$0 \le s(x) \le f(x)\ \forall\ x \in X.$$

Definição 1.58. A função f é dita integrável sobre S em relação à medida μ no sentido de Lebesgue se, e só se,

$$\int_S f(x)d\mu(x) < \infty. \tag{1.7}$$

Definição 1.59. Seja $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida μ e $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis. Dizemos que f e g são equivalentes se $f = g$ q.t.p.

Definição 1.60. Seja $p \in [1, \infty), (\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida μ e $V = \mathbb{R}^m$ ou $\mathbb{C}$. Definimos o conjunto $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu, V)$ como a coleção das funções $f : \Omega \to V$ mensuráreis em relação a μ tais que

$$\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) < +\infty,$$

ou seja,

$$\mathcal{L}^p = \left\{ f : \Omega \to V;\ f \text{ é mensurável e } \int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) < +\infty \right\}.$$

Pode-se denotar também o espaço $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu, V)$ por $\mathcal{L}^p(\Omega)$ ou somente por $\mathcal{L}^p$.

Observação 1.61. Seja $p \in [1, \infty)$. O espaço vetorial $L^p = L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ é o quociente de $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu, V)$ pela relação de equivalência $f \sim g \Longleftrightarrow f = g$ q.t.p. Isso significa que

$$L^p = \{cls(f) \mid f \in \mathcal{L}^p\},$$

onde $cls(f) = \{g \in \mathcal{L}^p \mid f = g,\ \text{q.t.p.}\}$. Mais propriamente, se $f = g$, q.t.p., f e $g \in \mathcal{L}^p$, então $cls(f) = cls(g)$, isto é, a passagem de $\mathcal{L}^p$ a L^p transforma uma igualdade q.t.p. de funções numa igualdade de fato entre elementos de L^p.

Definição 1.62. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto em $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$. Definiremos

$$L^p(\Omega) = \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ é mensurável e} \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \Big\},$$

isto é, o conjunto $L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ é formado pelas funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $|f|^p$ é integrável (no sentido de Lebesgue) em Ω.

Definição 1.63. Seja $V = \mathbb{R}^m$ ou $\mathbb{C}$. Uma função mensurável $f : \Omega \to V$ é dita essencialmente limitada se existir uma constante $M \in \mathbb{R}$, tal que:

$$|f(x)| \leq M, \text{ para quase todo } x \in \Omega,$$

isto é, $|f| \leq M$ q.t.p. Ou seja, há uma modificação de f em um conjunto nulo, de modo que a função resultante fica limitada no sentido clássico.

Definição 1.64. Seja $p = \infty$, $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida μ e $V = \mathbb{R}^m$ ou $\mathbb{C}$. Definimos o conjunto $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{M}, \mu, V)$ como a coleção das funções $f : \Omega \to V$ mensuráreis em relação a μ essencialmente limitada, ou seja,

$$\mathcal{L}^\infty = \Big\{ f : \Omega \to V;\ f \text{ é mensurável e essencialmente limitada} \Big\}.$$

Do mesmo modo definimos os espaços L^∞ de acordo com a observação feita sobre a relação de equivalência na definição 1.59.

Definição 1.65. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto em $\mathbb{R}^n$ e $p = \infty$. Definimos $L^\infty = L^\infty(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ como

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ é mensurável e limitada q.t.p. em } \Omega \}.$$

Corolário 1.66. *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Se $1 \leq p < \infty$ então*

(i) a função

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \|f\|_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |f(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

é uma norma para o espaço $L^p(\Omega)$.

(ii) e a função

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)} : L^\infty(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{\sup_{x\in\Omega} |f(x)|\} \end{aligned}$$

é uma norma para o espaço vetorial $L^\infty(\Omega)$. *O lado direito da igualdade é muita vezes chamado de supremo essencial de* f.

Demonstração. Ver [4], página 93,Teorema 4.7. □

Teorema 1.67. *Se* $1 \leq p < \infty$. *Os espaços* $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ *e* $(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ *são espaços de Banach. Em particular,*

$$L^2(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ é mensurável e} \int_\Omega |f(x)|^2 dx < \infty\},$$

é um espaço de Hilbert com produto interno e norma definidos por

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx \quad e \quad \| u \|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = (u, u)^{\frac{1}{2}}_{2}.$$

Demonstração. Ver [4], página 93,Teorema 4.7. □

Definição 1.68. Uma função mensurável $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita localmente integrável se, para todo compacto $K \subset \Omega$,

$$\int_K f(x)dx < \infty.$$

Indica-se por $L^p_{loc}(\Omega)$ o conjunto de todas as funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $|f|^p$ é localmente integrável, isto é,

$$L^p_{loc}(\Omega) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{R} \ ; \ f \text{ é mensurável e} \int_K f(x)dx < \infty \ \forall K \subset \Omega \text{ compacto}\right\}.$$

Definição 1.69. Seja p e $q \in [1, +\infty]$. Diz-se que um número real q é expoente conjugado de p quando $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Por exemplo $p = 1$, se $q = +\infty$ ou $p = q = 2$.

Lema 1.70. *Se* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $a, b > 0$, *então* $a^p + b^p \leq (a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$.

Demonstração. Ver [6], página 87, Lema 5.2.3 □

Lema 1.71. *Sejam a e b números reais não negativos e $0 < \lambda < 1$. Então,*

$$a^{\lambda}b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda)b.$$

Demonstração. Ver [6], página 171, Lema 8.2.12. □

Lema 1.72 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam A e B números reais não negativos, e seja $1 < p < \infty$ e q seu expoente conjugado. Usando o Lema (1.71) com $\lambda = \frac{1}{p}, a = A^p$ e $b = B^q$, obtém-se*

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}.$$

Demonstração. Ver [6], página 171, Lema 8.2.12. □

Teorema 1.73 (Desigualdade de Hölder)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e sejam p e q expoentes conjugados, $1 \leq p \leq \infty$. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [4], página 92, Teorema 4.6. □

Teorema 1.74 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Sejam $f, g \in L^p(\Omega)$ e, $1 \leq p \leq \infty$. Então,*

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver em [12], páginas 13-15. □

Teorema 1.75 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}$ um aberto limitado. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

Demonstração. Ver em [5], página 29, Teorema 3. □

1.6 Espaços de Sobolev

Neste trabalho precisamos generalizar a noção de solução de uma equação diferencial parcial, pois o estudo das EDP's envolve naturalmente espaços de funções que são definidos não apenas em termos das próprias funções, mas também de suas derivadas. Assim, nesta seção, iremos apresentar os espaços de Sobolev que mostram-se muito mais convenientes.

Definição 1.76. Seja f uma função de valor real em $\mathbb{R}^n$ e um vetor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, onde α_i é um inteiro não negativo, então α é chamado um multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$. Dado um multi-índice α definimos,

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Que denota uma derivada parcial, de ordem $|\alpha|$, de f.

Definição 1.77. Seja Ω um aberto em $\mathbb{R}^n$ e $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua. O suporte da função $\phi(x)$ é o fecho em Ω do conjunto dos pontos $x \in \Omega$ onde $\phi(x)$ não se anula. Denotamos por

$$supp\ (\phi) = \overline{\{x \in \Omega : \phi(x) \neq 0\}}. \tag{1.8}$$

Denota-se por $C_0^\infty(\Omega) = \{\phi \in C^\infty(\Omega)\ e\ supp(\phi) \subset \Omega \text{ é compacto}\}$.

Nesse trabalho, estudamos as funções $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$, com suporte compacto contido em Ω que são infinitamente diferenciáveis.

Para isso, definimos o espaço $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ como sendo o espaço vetorial das funções infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto contido em Ω. Os elementos de $\mathcal{D}(\Omega)$ são denominados funções testes em Ω, considerando a noção de convergência da definição abaixo nestes espaços.

Definição 1.78. Dizemos que uma sequência de funções $\{\phi_n\} \in \mathcal{D}(\Omega)$ converge a 0 se, e somente se, existe um conjunto compacto e fixado $K \subset \Omega$ tal que

i) $supp(\phi_n) \subset K,\ \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, os suportes de todas as funções testes ϕ_n, da sequência dada, estão contidos num compacto fixo K.

ii) Para cada α, a sequência das derivadas $D^\alpha \phi_n$ convergem a 0, uniformemente, em $K,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}$.

Dizemos que a sequência ϕ_n em $\mathcal{D}(\Omega)$ converge para ϕ em $\mathcal{D}(\Omega)$, quando a sequência $\phi_n - \phi$ converge para zero no sentido dado na definição 1.78.

Definição 1.79. Uma distribuição sobre um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um um funcional linear contínuo em $C_0^\infty(\Omega)$, ou seja, uma distribuição é um operador linear contínuo de $C_0^\infty(\Omega)$ para $\mathbb{R}$. Denotamos o espaço de todas as distribuições sobre Ω por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Definição 1.80. Dado um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, sejam $f, g \in L^1_{Loc}(\Omega)$ e α um multi-índice. Dizemos que g é a $\alpha-$ésima derivada fraca de f, e escrevemos

$$D^\alpha f = g,$$

se

$$\int_\Omega f(x) \cdot D^\alpha \varphi(x)\ dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g(x) \cdot \varphi(x)\ dx \text{ para toda } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Definição 1.81. Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p < \infty$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é definido como sendo

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega),\ \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n, 0 \leq |\alpha| \leq m\}, \tag{1.9}$$

onde $D^\alpha f$ é a derivada fraca de f.

Definição 1.82. O funcional $\|\cdot\|_{m,p} : W^{m,p}(\Omega) \to \mathbb{R}_+$ definido por

$$\|f\|_{m,p} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty \\ \displaystyle\max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^\infty}, \qquad p = \infty \end{cases},$$

é uma norma em $L^p(\Omega)$, para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ com a norma $\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ para $1 \leq p < \infty$ é um espaço de Banach.

Observação 1.83. a) O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é chamado espaço de Sobolev de ordem m e expoente p. Além disso, $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

b) Para m um inteiro positivo $1 \leq p \leq \infty$ o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é o completamento de $\{u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{m,p} < \infty\}$ com respeito à norma $\|\cdot\|_{m,p}$.

c) A notação $H^m(\Omega)$ é usada para representar o espaço $W^{m,p}(\Omega)$, quando $p = 2$. Este espaço $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(f, g)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L^2(\Omega)}.$$

Definição 1.84. Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. O espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ é definido como o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Analogamente, $H_0^m(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$.

Teorema 1.85. *Os espaços $W^{m,p}(\Omega)$ e $W_0^{m,p}(\Omega)$ são completos, isto é, são espaços de Banach. Além disso, são reflexivos para $1 < p < \infty$ e separáveis para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. A prova consiste em mostrar que os espaços $W^{m,p}(\Omega)$ são isométricos a um subespaço fechado de $[L^p\Omega)]^n$. Ver [3].

Enunciaremos agora os seguintes teoremas que se referem às imersões dos espaços de Sobolev:

Teorema 1.86. *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, de classe C^m, e $1 \leq p \leq \infty$. Então as seguintes imersões são compactas:*

a) $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \dfrac{np}{n-mp}$ *se* $mp < n$;

b) $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$ *se* $mp = n$;

c) $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^k(\Omega)$. $k < m - \frac{n}{p} \leq k+1$ *se* $mp > n$ *onde* k *é um inteiro não negativo.*

Demonstração. Ver [3]. □

Teorema 1.87. *Sejam Ω um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, com fronteira regular*

i) Se $n > 2m$, *então* $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, *onde* $1 \leq p \leq \dfrac{2n}{n-2m}$;

i) Se $n = 2m$, *então* $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, *onde* $1 \leq p < +\infty$;

i) Se $n = 1$ *e* $m \geq 1$, *então* $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\infty)$.

Demonstração. Ver [3]. □

Exemplo 1.88. *Sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, o espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno*

$$(f,g)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \Big((f(x)g(x) + \nabla f(x) \cdot \nabla g(x)\Big)dx,$$

onde ∇ é o operador definido por $\nabla = \Big(\dfrac{\partial}{\partial x_i}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\Big)$.

Exemplo 1.89 (Operador de Laplace ou Laplaciano)**.** *O operador de Laplace ou Laplaciano, denotado por* Δ *e definido por*

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

é um operador linear não limitado em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$*, onde* Ω *é um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$*, limitado, suficientemente suave, com fronteira regular.*

Definição 1.90. Seja $U \subset \mathbb{R}^m$, se $u \in C^k(U), k \in \mathbb{N}$. Um operador diferenciável de segunda ordem é da forma

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{m} a^{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{m} b^i(x) u_{x_i} + c(x) u \tag{1.10}$$

Doravante, assumimos que $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$ para todos $i, j = 1, \ldots, n$, isto é, que a matriz (a^{ji}) é simétrica.

Definição 1.91. O operador L é dito elíptico se os autovalores da matriz (a^{ji}) são não nulos e têm todos o mesmo sinal. (Ou seja, a matriz (a^{ji}) ou é definida positiva ou é definida negativa.)

Teorema 1.92 (Teorema da Regularidade)**.** *Sejam* L *um operador diferencial elíptico de ordem* $2m, m \in \mathbb{N}$*, definido em um aberto regular* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *e* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$*. Seja* u *a solução de* $Lu = f$*, no sentido distribucional, com* $f \in L^2(\Omega)$*. Então,* $u \in H^{2m}(\Omega)$*.*

Demonstração. Ver [4].

□

CAPÍTULO 2

Introdução à Teoria de Semigrupos Lineares

Neste capítulo iniciamos o estudo da teoria de Semigrupos de Operadores Lineares. São apresentados a definição de semigrupo de classe C_0 em um espaço de Banach X, e algumas propriedades e teoremas importantes, os quais serão utilizados no Capítulo 3.

2.1 Semigrupos de Classe C_0

Definição 2.1. Seja X um espaço de Banach. Uma família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, a um parâmetro $\{S(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{B}(X)$, de operadores lineares limitados é um Semigrupo de operadores lineares e limitados de X se:

a) $S(0) = I$, onde I é o operador identidade em X;

b) $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$.

Definição 2.2. Um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares é dito de Classe C_0 ou C_0-Semigrupo se

$$\lim_{t\to 0^+} \|[S(t) - I]x\| = 0 \quad \forall x \in X. \tag{2.1}$$

A seguir apresentamos um exemplo de semigrupo de classe C_0 que é a função exponencial $S(t) = e^{tA}$, que pode ser definida quando A for um operador linear limitado.

No caso em que A é um operador linear não limitado, com certas propriedades boas, pode-se também definir e^{tA}. Isso é feito pela teoria de semigrupos (Gomes[9],Pazy[15]).

Exemplo 2.3. *Se A é um operador linear limitado em X, então temos que $S(t) = e^{tA}$ define um semigrupo de classe C_0, onde $e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$. De fato,*

a) $S(0) = e^{0A} = I$;

b) $S(t+s) = e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA} = S(t)S(s)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$.

c) Para cada $x \in X, S(t)x = e^{tA}x$, *logo,*

$$\|S(t)x - x\| = \|e^{tA}x - x\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k A^k x}{k!} \right\| = \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{j+1} A^{j+1} x}{(j+1)!} \right\| \leq |t| \|A\| \leq \|x\| e^{\|tA\|},$$

o que implica

$$\|S(t)x - x\| \to 0 \text{ quando } t \to 0.$$

Isto é,

$$S(t)u \to u \text{ quando } t \to 0.$$

Portanto, a família $S(t) = e^{tA}$ é um semigrupo de classe C_0 de operadores lineares.

Observação 2.4. *Uma família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares limitados que satisfaz as condições das definições 2.1 e 2.2, também é chamada semigrupo fortemente contínuo* (Ver Pazy [15]).

Definição 2.5. Um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares é chamado uniformemente contínuo se

$$\lim_{t\to 0^+} \|S(t) - I\|_{\mathcal{B}(X)} = 0. \tag{2.2}$$

Proposição 2.6. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 em X, onde X é um espaço de Banach. Então $\|S(t)\|$ é uma função limitada em qualquer intervalo limitado $[0, T]$, isto é, existem $\delta > 0$ e $M \geq 1$ tais que, para $0 \leq t \leq \delta$,*

$$\|S(t)\| \leq M.$$

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $\|S(t)\|$ não seja limitada, ou seja, existe uma sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ e $\|S(t_n)\| \geq n, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Então, pelo Teorema 1.46, $\|S(t_n)\|$ não seria limitada para todo $x \in X$, o que entraria em contradição com a definição 2.2.

Além disso, temos que $M \geq 1$, pois pela condição a) da definição 2.1 de semigrupo, $\|S(0)\| = 1$. Seja $t \in [0, T]$ portanto, para algum inteiro não negativo n e algum $r \in \mathbb{R}$, com $0 \leq r < \delta$ temos que $t = n\delta + r$. Logo

$$\begin{aligned} \|S(t)\| &= \|S(n\delta + r)\| \\ &= \|S(\delta)^n S(r)\| \leq \|S(\delta)^n\| \|S(r)\| \leq M^n M = M^{n+1}, \end{aligned}$$

o que mostra que $\|S(t)\|$ é uma função limitada em $[0, T]$. □

Corolário 2.7. *Todo semigrupo de classe C_0 é fortemente contínuo em $\mathbb{R}^+$, ou seja, se $t \in \mathbb{R}^+$ então*

$$\lim_{s\to t} S(s)x = S(t)x, \ \forall x \in X.$$

Demonstração: Consideremos $t \geq 0$. Para cada $x \in X$ e $h > 0$, segue que

$$\begin{aligned} \|S(t+h)x - S(t)x\| &= \|S(t)[S(h) - I]x\| \\ &\leq \|S(t)\| \|[S(h) - I]x\| \to 0, \end{aligned}$$

quando $h \to 0$, pois $\|S(t)\|$ é limitada e $\lim_{h\to 0} \|[S(h) - I]x\| = 0, \ \forall x \in X$. Também temos para $x \in X$ e para os valores de h tais que $0 < h < t$, resulta que

$$\begin{aligned} \|S(t+h)x - S(t)x\| &= \|S(t-h)[I - S(h)]x\| \\ &\leq \|S(t-h)\| \|[I - S(h)]x\| \to 0, \end{aligned}$$

quando $h \to 0$. Portanto, $\lim_{s\to t} S(s)x = S(t)x, \ \forall x \in X$. □

Observação 2.8. Sabemos que se A é um operador linear e limitado em X, então

$$\|e^{tA}\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| \leq \| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} \| = e^{t\|A\|} \ t \geq 0. \tag{2.3}$$

No caso da função exponencial, se $w \geq \|A\|$, então $\|e^{tA}\| \leq e^{tw}$, para todo $t \geq 0$.

Existe uma propriedade semelhante a esta para os semigrupos, que será mostrada na próxima proposição. Vamos precisar do seguinte lema:

Lema 2.9. *Seja p uma função subaditiva em $\mathbb{R}^+$ e limitada superiormente em todo intervalo limitado. Então, existe o limite de $\frac{p(t)}{t}$ quando $t \to \infty$ e*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{p(t)}{t} = \inf_{t>0} \frac{p(t)}{t}. \tag{2.4}$$

Demonstração: Defina $w_0 = \inf\limits_{t>0} \frac{p(t)}{t}$, sendo $-\infty \leq w_0 < \infty$. A demonstração será dividida em dois casos: $w_0 > -\infty$ e $w_0 = -\infty$.

Caso 1: $w_0 > -\infty$.

Seja $\epsilon > 0$. Da definição de ínfimo, existe $T > 0$ tal que $\frac{p(T)}{T} \leq w_0 + \epsilon$. Sejam $t > T, n \in \mathbb{N}$. e r real com $0 \leq r < T$ tais que $t = nT + r$. Como a função p, por hipótese, é subaditiva, resulta da definição de w_0 que

$$w_0 \leq \frac{p(t)}{t} \leq \frac{np(T) + p(r)}{t} = \frac{nTp(T)}{Tt} + \frac{p(r)}{t} \leq \frac{nT(w_0 + \epsilon)}{t} + \frac{p(r)}{t}. \tag{2.5}$$

Também do fato de que p é limitada superiormente em $[0, T)$, passando ao limite quando $t \to \infty$ na desigualdade 2.5 acima, obtemos

$$w_0 \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{p(t)}{t} \leq w_0 + \epsilon. \tag{2.6}$$

Como ϵ é arbitrário, está provado 2.4 para $w_0 > -\infty$.

Caso 2: $w_0 = -\infty$.

Para cada real w existe $T > 0$ tal que $\frac{p(T)}{T} \leq w$. Procedendo de forma análoga ao caso anterior, obtém-se $\limsup\limits_{t\to\infty} \frac{p(t)}{t} \leq w$. Como w é arbitrário, segue que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{p(t)}{t} = -\infty,$$

o que conclui a prova do lema. □

Proposição 2.10. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0. Então*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log \|S(t)\|}{t} = \inf_{t>0} \frac{\log \|S(t)\|}{t} = w_0, \tag{2.7}$$

e para cada $w > w_0$ existe uma constante $M \geq 1$ tal que

$$\|S(t)\| \leq Me^{tw}, \ \forall t \geq 0. \tag{2.8}$$

Demonstração: A função $\log \|S(t)\|$ é subaditiva. De fato,

$$\begin{aligned} \log \|S(t+s)\| &= \log \|S(t)S(s)\| \\ &\leq \log(\|S(t)\| \|S(s)\|) \\ &= \log \|S(t)\| + \log \|S(s)\|) \end{aligned}$$

Pela proposição 2.6, a função $\|S(t)\|$ é limitada superiormente em todo intervalo limitado. Assim, $\log \|S(t)\|$ é uma função limitada superiormente em intervalos limitados e pelo lema (2.9), tomando $p(t) = \log \|S(t)\|$, conclui-se que (2.10) é válida.

Da definição de limite e de (2.10), se $w > w_0$, existe t_0 tal que, para $t > t_0$, vale a desigualdade

$$\frac{\log \|S(t)}{t} < w. \tag{2.9}$$

Do fato que $\|S(t)\| \leq M_0, \ \forall t \in [0, t_0]$ e $\|S(t)\| = 1$, concluímos que $M_0 \geq 1$. Agora, considerando $w \geq 0$ em (2.9), obtemos

$$\log \|S(t)\| \leq wt + \log M_0, \ \forall t \geq 0. \tag{2.10}$$

Aplicando a exponencial em ambos os lados da desigualdade (2.10) acima, vemos que

$$\|S(t)\| \leq e^{wt} e^{\log M_0} = M_0 e^{wt}, \ \forall t \geq 0. \tag{2.11}$$

No caso em que $M = M_0$, verifica-se (2.8). De modo análogo, se $w < 0$ em (2.9), obtemos

$$\log \|S(t)\| \leq wt - wt_0 + \log M_0, \ \forall t \geq 0. \tag{2.12}$$

Da mesma forma que no procedimento anterior,

$$\|S(t)\| \leq e^{wt} e^{-wt_0} e^{\log M_0} = M_0 e^{-wt_0} e^{wt}, \ \forall t \geq 0. \tag{2.13}$$

Tomando $M = M_0 e^{-wt_0}$, obtemos (2.8). Para concluir a prova, podemos observar que

$M \geq 1$ em ambos os casos, pois $M_0 \geq 1$. □

Observação 2.11. a) Quando $w_0 < 0$, é possível tomar $w = 0$, assim a proposição 2.10 acima nos diz que existe uma constante $M \geq 1$ tal que $\|S(t)\| \leq M$, para todo $t \geq 0$. Neste caso, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de classe C_0 é denominado Semigrupo Uniformemente Limitado.

b) Diz-se que um Semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de classe C_0 é um Semigrupo de Contração, se para $w_0 < 0$ tivermos $M = 1$. Isto é, $\|S(t)\| \leq 1$, para todo $t \geq 0$.

Agora introduziremos um importante conceito na teoria de semigrupos.

Definição 2.12. Seja X um espaço de Banach e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0. O operador linear $A : D(A) \subset X \to X$, dado por

$$Ax = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x,$$

definido $\forall x \in D(A)$, onde

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x \ \text{ existe em } X \right\},$$

é chamado gerador infinitesimal do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, e denotaremos por A_h, com $h > 0$, o operador linear limitado dado por $\dfrac{S(h) - I}{h}$.

A próxima proposição tratará da diferenciabilidade de um semigrupo associado a seu gerador infinitesimal.

Proposição 2.13. *Seja A o gerador de um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de classe C_0. Temos*

i) Se $x \in D(A)$ e $t \geq 0$, então $S(t)x \in D(A)$ e a função $\mathbb{R}^+ \to X$ dada por $t \mapsto S(t)$ é diferenciável e

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax. \tag{2.14}$$

ii) Para $u \in D(A)$,

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t S(\tau)Axd\tau = \int_s^t AS(\tau)xd\tau. \tag{2.15}$$

iii) Para $x \in X$ *e* $t \in \mathbb{R}$ *com* $t \geq 0$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)x d\tau = S(t)x. \tag{2.16}$$

iv) Para $x \in X$, *tem-se* $\int_0^t S(s)xds \in D(A)$ *e além disso,*

$$A = \left(\int_0^t S(s)xds \right) = S(t)x - x. \tag{2.17}$$

Demonstração:

i) Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de classe C_0 e A seu gerador. Para $t > 0$ e $h > 0$, vale a identidade

$$\frac{S(t+h) - S(t)}{h} x = \frac{S(h) - I}{h} S(t)x = A_h S(t)x = S(t)A_h x,$$

assim, para $x \in D(A)$, o termo $S(t)A_h x$ tem um limite quando $h \to 0$, isto é,

$$S(t) \left(\frac{S(h) - I}{h} \right) x = S(t)A_h x \to S(t)Ax,$$

pela definição de gerador infinitesimal.

Logo, $S(t)x \in D(A)$ e

$$\frac{d^+}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax. \tag{2.18}$$

Também para $0 < h < t$ e $x \in D(A)$, segue que

$$\frac{S(t-h) - S(t)}{-h} x = S(t-h)A_h x = S(t-h)(A_h x - Ax) + S(t-h)Ax \to S(t)Ax,$$

quando $h \to 0$.

Isso se justifica pois $A_h x \to S(t)Ax$, quando $h \to 0$ e pela proposição 2.6, $\|S(t)\|$ é limitada para $0 < h < t$. Assim, o termo $S(t-h)(A_h x - Ax) \to 0$ quando $h \to 0$. Além disso, da continuidade forte do semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ temos que$S(t-h)Ax \to S(t)Ax$. Portanto,

$$\frac{d^-}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax. \tag{2.19}$$

De (2.18) e (2.19), temos

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

ii) Consideremos $x \in D(A)$ e t, s números positivos. Integrando (2.14) de s a t, obtemos (2.15), ou seja

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t S(\tau)Axd\tau = \int_s^t AS(\tau)xd\tau. \tag{2.20}$$

iii) Pelo corolário 2.7, $\lim_{\tau \to t} S(\tau)x = S(t)x$, $\forall x \in X$ e $t \geq 0$, isto é, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $|\tau - t| < \delta$ resulta

$$\|S(\tau)\| - S(t)x\| < \epsilon.$$

Consequentemente, para $x \in X$ e $0 < |h| \leq \delta$,

$$\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (S(\tau)x - S(t)x)d\tau \right\| \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|S(\tau)x - S(t)x\|d\tau < \epsilon.$$

iv) Agora para $x \in X$ e $h > 0$ obtemos

$$\begin{aligned} A_h = \int_0^t S(\tau)xd\tau &= \frac{S(h) - I}{h} \int_0^t S(\tau)xd\tau \\ &= \frac{1}{h} \int_0^t S(h+\tau)xd\tau - \frac{1}{h} \int_0^t S(\tau)xd\tau \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)xd\tau - \frac{1}{h} \int_0^h S(\tau)xd\tau. \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $h \to 0$, é consequência do item iii) anterior que

$$A = \left(\int_0^t S(s)xds \right) = S(t)x - x.$$

□

Proposição 2.14. *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de classe*

C_0, então A é fechado com domínio denso em X.

Demonstração: Sejam $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal. Para cada $x \in X$ e $h > 0$, considere

$$x_h = \frac{1}{h}\int_0^h S(t)xdt. \tag{2.21}$$

Mostremos que $\overline{D(A)} = X$: Do item (iv) da Proposição 2.13 resulta que $x_h \in D(A)$ para todo $h > 0$ e pelo item (iii) da mesma proposição

$$\lim_{h\to 0} x_h = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_o^{0+h} S(t)xdt = S(0)x = x.$$

Portanto $x_h \to x$ quando $h \to 0$. Isso mostra que $x \in \overline{D(A)}$. Logo, $D(A)$ é denso em X.

Mostremos agora que A é fechado. De fato, tomemos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(A)$ uma sequência no domínio de A, tal que $x_n \to x$ e $Ax_n \to y$, quando $n \to \infty$, Da parte (ii) da Proposição 2.13, temos

$$S(t)x_n - S(0)x_n = \left(\int_0^t S(\tau)Ax_n d\tau\right),\ t \geq 0. \tag{2.22}$$

Observemos que $S(\tau)Ax_n \to S(\tau)Ay, n \to \infty$. Dessa forma, fazendo $n \to \infty$ em (2.22) temos

$$S(t)x - x = \int_0^t S(\tau)yd\tau,$$

e, pelo item (iii) da Proposição 2.13

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{S(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)yd\tau = S(0)y = y.$$

Logo, $x \in D(A)$ e$A(u) = y$. Portanto, A é um operador fechado. □

2.2 Os teoremas de Hille-Yosida e Lumer-Phillips

Nesta seção, apresentamos os teoremas de Hille-Yosida e Lumer-Phillips, os quais caracterizam geradores de semigrupos de classe C_0. O teorema de Lumer-Phillips é estudado aqui para o caso específico dos semigrupos lineares de contrações de classe C_0.

Teorema 2.15 (Hille-Yosida). *Seja X um espaço de Banach. Um operador linear A definido em $D(A) \subset X$ e com valores em X é o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de classe C_0, que satisfaz a condição $\|S(t)\| \leq Me^{wt}$ com $t \geq 0$, se, e somente se*

i) A é um operador fechado e seu domínio $D(A)$ é denso em X;

ii) Existem M e w números reais tais que, para cada real $\lambda > w$, se tenha $\lambda \in \rho(A)$ e para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}. \tag{2.23}$$

O Teorema de Hille-Yosida tem grande importância no estudo de solução para problemas de valor inicial, do tipo

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au, \quad t > 0 \\ u(0) = u_0, \quad u_0 \in D(A), \end{cases} \tag{2.24}$$

pois com o Teorema de **Hille-Yosida**, a solução de (2.24) se reduz ao estudo da existência de solução da equação

$$\lambda u - Au = v$$

aliada de uma estimativa adequada da mesma. Encontramos sua demonstração em [9].

Corolário 2.16. *Para que o operador A seja gerador de um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de classe C_0, tal que para $t \geq 0$ se tenha $\|S(t)\| \leq e^{wt}$, é suficiente que A seja fechado, com domínio denso e exista um número real w, de modo que se $\lambda > w$, $\lambda \in \rho(A)$ e $\|R(\lambda, A)\| \leq \dfrac{1}{\lambda - w}$.*

Demonstração: Como

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \|R(\lambda, A)\|^n \lambda \leq \frac{1}{(\lambda - w)^n},$$

então o operador A satisfaz as condições do Teorema de **Hille-Yosida** com $M = 1$.

□

Corolário 2.17. *Para que um operador A seja gerador infinitesimal de um semigrupo de contração de classe C_0, é necessário e suficiente que A seja fechado, seu domínio denso em X, $(0, \infty) \subset \rho(A)$ e para todo $\lambda > 0, \|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1$.*

Este corolário caracteriza geradores de semigrupos de contração de classe C_0 e sua demonstração é um caso particular do corolário anterior, tomando $w = 0$.

Definição 2.18. Para facilitar a linguagem escreve-se $A \in G(M, w)$, para indicar que o operador linear A é gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares limitados de classe C_0, que satisfaz a condição

$$\|S(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq Me^{wt}, \quad t \geq 0.$$

Observação 2.19. i) No caso em que $w = 0$, tem-se que $A \in G(M, 0)$ e significa que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo limitado com

$$\|S(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq M, \quad t \geq 0.$$

ii) No caso particular em que $M = 1$, e $w = 0$, então $A \in G(1, 0)$, significa que A é gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de classe C_0 de contrações, pois

$$\|S(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq 1, \quad t \geq 0.$$

Uma outra caracterização dos geradores de semigrupos de contração linear de classe C_0 é devida a Lumer e Phillips, cujo enunciado segue abaixo.

Teorema 2.20 (Lumer-Phillips)**.** *Seja X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear com domínio denso em X*

i) Se A é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que $\mathcal{R}(\lambda_0 I - A) = X$, então $A \in G(1, 0)$.

ii) Se $A \in G(1, 0)$ sobre X, então $\mathcal{R}(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo.

O teorema de Lumer-Phillips estabelece quais são as condições para que um operador seja gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações. Este resultado será de grande importância na prova da existência e unicidade de soluções do problema semilinear (4). Sua demonstração pode ser encontrada em [9] ou [15].

2.3 O problema abstrato de Cauchy

Nesta seção iremos apresentar o problema abstrato de Cauchy e uma condição necessária para que uma função seja solução forte do problema e abordaremos o papel dos semigrupos na procura da boa colocação para a solução do problema. E, em sequência, no capítulo 3, estabeleceremos a boa colocação, no sentido das soluções clássicas, para uma equação diferencial parcial muito conhecida, a saber, a equação da onda.

A evolução de um sistema físico no tempo é geralmente descrita por um problema de valor inicial para uma equação diferencial. Suponhamos que $u(t)$ descreva o estado de algum processo físico no tempo t, e que a taxa de variação instantânea de $u(t)$ seja dada por alguma função A do estado do sistema $u(t)$ e o valor inicial seja dado por $u(0) = u_0$. Assim, temos o seguinte problema:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au, \quad t > 0 \\ u(0) = u_0, \quad u_0 \in D(A), \end{cases} \tag{2.25}$$

considerando X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. Dado $u_0 \in X$, o problema 2.25 é um problema abstrato de Cauchy para A, com valor inicial u_0 e consiste em encontrar a função $u(t)$ para o problema de valor inicial tal que $u(t)$ seja solução clássica de 2.25, para todo $t > 0$.

Devido ao Teorema da representação de Riesz (Caso particular do teorema de Lax-Milgram - Ver 1.51 para H um espaço de Hilbert real), a definição de A, um operador monótono equivale à definição de $-A$ dissipativo (Ver definição 1.39). Então, o problema abstrato de Cauchy dado em 2.25 pode ser estudado a partir de agora, substituindo-se A por $-A$. Ou seja, será considerado o seguinte problema de valor inicial para um operador monótono A

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0, \quad u_0 \in D(A). \end{cases} \tag{2.26}$$

Como nosso objetivo é estudar a existência e unicidade da solução da equação da onda não homogênea linear, iremos considerar. em nosso trabalho, o seguinte problema abstrato de Cauchy de valor inicial para uma equação não homogênea linear

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(u(t)), \quad t > 0 \\ u(0) = u_0, \quad u_0 \in D(A), \end{cases} \tag{2.27}$$

em que A gera um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de classe C_0, sobre X, $f : \mathbb{R}^+ \to X$ é uma função contínua, X é um espaço de Banach e $u_0 \in X$.

Definição 2.21. Dizemos que uma função $u : \mathbb{R}^+ \to X$ é uma solução forte do problema (2.27), se u for contínua para todo $t \geq 0$, continuamente diferenciável para $t > 0$, além disso, para todo $t > 0, u(t) \in D(A)$ e u satisfaz (2.27).

Observação 2.22. Seja $u = u(t)$ com $t > 0$ uma solução forte de (2.27) e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ o semigrupo de classe C_0 gerado por A. Considerando a função $w(s) = S(t-s)u(s)$ diferenciável para $0 \leq s \leq t$ e por (2.27), encontramos

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{ds}(s) &= \lim_{h\to 0} \frac{w(s+h) - w(s)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{S(t-(s+h))u(s+h) - S(t-s)u(s)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[S(t-(s+h)) \left(\frac{u(s+h)-u(s)}{h} + \frac{I - S(h)}{h} u(s) \right) \right],
\end{aligned}$$

o que implica

$$\frac{dw}{ds}(s) = S(t-s)\Big(\frac{du}{dt}(s) - Au(s)\Big)$$

sendo u solução de (2.27)

$$\frac{dw}{ds}(s) = S(t-s)f(s) \tag{2.28}$$

Como f é uma função contínua, podemos integrar (2.28) de 0 a t. Assim,

$$\int_0^t \frac{dw}{ds}(s)ds = \int_0^t S(t-s)f(s)ds,$$

agora, usando a definição de $w(s)$, concluímos que

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds. \tag{2.29}$$

Essa é uma condição necessária para que u seja solução forte do problema de valor inicial (2.27). Deste modo uma solução clássica do problema (2.27), com f contínua, tem a forma dada em (2.29) e consequentemente é única.

Definição 2.23. Se $u = u(t)$ é apenas uma função contínua que satisfaz (2.29) então dizemos que u é uma solução fraca (ou generalizada) de (2.27).

CAPÍTULO 3

Aplicação da Teoria de Semigrupos

Neste capítulo utilizaremos a teoria e resultados de semigrupos lineares estudada no capítulo 2. Na seção 3.1 iremos apresentar a equação da onda com a qual trabalharemos. Na subseção 3.1.1 abordaremos o papel dos semigrupos na procura da boa colocação para o Problema abstrato de Cauchy linear em que serão estudadas a existência e unicidade de soluções da equação da onda não-homogênea linear. Concluiremos o capítulo 3 aplicando o mesmo estudo dos semigrupos para existência e unicidade de soluções do problema semilinear abstrato.

3.1 A equação da Onda

A equação diferencial parcial linear não-homogênea que iremos estudar é a equação da onda em $\mathbb{R}^n$, com um termo dissipativo,

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u + u_t &= 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n && (3.1)\\ u(0) &= u_0, \quad u_t(0) = u_1 && (3.2) \end{aligned}$$

sendo

$$u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n) \text{ e } u_1 \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{3.3}$$

Para estudar a existência e unicidade de solução, consideraremos o problema abstrato de Cauchy (2.27) visto na seção 2.3 do capítulo 2, o qual está associado com a equação da onda em $\mathbb{R}^n$, com um termo dissipativo. Nosso objetivo é, após estudar o problema linear, resolver o problema semilinear abstrato, o qual associado que será apresentado na próxima seção. Uma vez resolvido o problema de existência e unicidade para o problema linear, pode-se usar o método do ponto fixo para obter a existência e unicidade de soluções para o problema semilinear.

3.1.1 Existência e Unicidade do Problema Linear

No estudo da existência de soluções utilizamos a proposição abaixo:

Proposição 3.1. *Sejam $A \in G(1,0)$ e $B \in \mathcal{B}(X)$. Então $A + B \in G(1, \|B\|)$.*

Essa proposição fala sobre perturbações de um operador linear A por um operador linear B, a demonstração pode, ser encontrada em [17], por exemplo. Outros resultados da teoria de perturbações de operadores podem ser também vistos em [19].

Como já visto, temos o seguinte problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u + u_t &= 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n & (3.4) \\ u(0) &= u_0, \quad u_t(0) = u_1 & (3.5) \end{aligned}$$

sendo

$$u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n) \text{ e } u_1 \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{3.6}$$

Mostraremos que o problema (3.4)-(3.5) possui uma única solução utilizando a teoria de semigrupos lineares. Fazendo a mudança de variável $v = u_t$, isto é $u_t - v = 0$ e $v_t = u_{tt}$, substituindo em (3.4)-(3.5), obtemos

$$\begin{cases} v_t - \Delta u + v = 0 \text{ em } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \\ u_t - v \quad = 0 \text{ em } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \end{cases}, \tag{3.7}$$

sendo

$$u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n) \text{ e } u_1 \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{3.8}$$

e denotando

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & I \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

podemos transformar (3.4)-(3.5) no seguinte problema abstrato de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U + AU = 0, \ t \geq 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases}. \tag{3.10}$$

Para contemplar a condição de fronteira (3.8) definiremos os seguintes espaços de Hilbert

$$H = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n).$$

O operador diferencial A em (3.9) é definido como $A : D(A) \subset H \to H$, e o seu domínio é dado por

$$D(A) = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n).$$

No que se segue, mostraremos a existência de soluções de (3.10). Para isso, vamos dividir a prova em duas etapas:

Etapa 1. Mostraremos aqui que o operador A gera um semigrupo de classe C_0. Observe que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta + I & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Então, podemos escrever $A = A' + B$ com

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta + I & I \end{pmatrix} \qquad \text{e} \ \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Note que $D(A) = D(A')$.

Basta provarmos que $A' \in G(1, 0)$ e $B \in \mathcal{B}(H)$ e concluir pela Proposição 3.1, que $A \in G(1, \|B\|)$. Feito isso, o problema (3.10) com dado inicial $U_0 \in D(A)$ terá como solução

$$U(t) = S(t)U_0, \tag{3.13}$$

sendo $S(t)$ o semigrupo de classe C_0 gerado por A.

• Para provarmos que $A' \in G(1, 0)$, mostraremos que A' é maximal e monótono e a conclusão seguirá do Teorema de **Lumer-Phillips** (ver teorema 2.20).

(i) A' **é monótono:** Vamos definir o produto interno em $H = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$. Sejam

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix},\ V = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \in H, \tag{3.14}$$

então

$$\langle U, V\rangle = (\nabla u_1, \nabla u_2) + (u_1, u_2) + (v_1, v_2),$$

em que os produtos internos do lado direito da igualdade acima, são os produtos internos usuais de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Para $U \in D(A')$, $\langle A'U, V\rangle \geq 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
\langle A'U, V\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u + u + v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= -(\nabla v, \nabla u) - (v, u) + (-\Delta u + u + v, v) \\
&= -(\nabla v, \nabla u) - (v, u) - (\Delta u, v) - (u, v) - (v, v) \\
&= -(\nabla v, \nabla u) - (v, u) - (\nabla u, \nabla v) + (u, v) + (v, v) = (v, v) = \|v\|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

(ii) A' **é maximal:** Com efeito, provaremos que, dado $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in H$, existe

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A'),\ \text{tal que } (A' + I)U = F, \tag{3.15}$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u + u + v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Isso nos leva ao sistema

$$\begin{cases} -v + u = f \\ -\Delta u + 2v + u = g \end{cases}.$$

Isolando v na primeira equação e substituindo-o na segunda, vemos que

$$-\Delta u + 3u = g + 2f. \tag{3.16}$$

Portanto, para mostrar que A' é maximal, basta verificar que existe $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ que satisfaça (3.16). Para essa tarefa, usaremos o teorema de **Lax-Milgram** (ver teorema 1.51). Como $H^1 = H^1(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert, definimos

$$\begin{aligned} a(\cdot,\cdot): \quad & H^1 \times H^1 \to \mathbb{R} \\ & (u,v) \to (\nabla u, \nabla v) + 3(u,v). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Note que a é uma forma bilinear contínua e coerciva. Com efeito, pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Poincaré (ver Teorema 1.75)

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &= |(\nabla u, \nabla v) + 3(u,v)| \\ &\leq |(\nabla u, \nabla v)| + 3|(u,v)| \\ &\leq \|\nabla u\|\|\nabla v\| + 3\|u\|\|v\| \\ &\leq 4\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}, \ \forall u, v \in H^1. \end{aligned}$$

portanto a é contínua, e

$$a(u,u) = (\nabla u, \nabla u) + 3(u,u) = \|\nabla u\|^2 + 3\|u\|^2 \geq \|\nabla u\|^2 + \|u\|^2 = \|u\|_{H^1}, \ \forall u \in H^1,$$

portanto a é coerciva. Definimos ainda o funcional

$$\begin{aligned} \Phi : H^1 &\to \mathbb{R} \\ v &\to (g + 2f, v). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Verifica-se facilmente que Φ é um funcional linear de acordo com a Definição 1.17, e ainda, segue da desigualdade de Poincaré que Φ é contínuo, pois

$$|\Phi(v)| = |(g + 2f, v)| \leq \|g + 2f\|\|v\| \leq \|g + 2f\|\|v\|_{H^1}, \ \forall v \in H^1.$$

Logo, pelo Teorema de **Lax-Milgram** (Ver Teorema 1.51), existe um único $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$a(u,v) = \Phi(v) = (g + 2f, v), \ \forall v \in H^1(\mathbb{R}^n),$$

isto é, $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ satisfaz

$$(\nabla u, \nabla v) + 3(u, v) = (g + 2f, v), \ \forall v \in H_0^1(\mathbb{R}^n).$$

Em particular, a equação (3.16) é satisfeita para toda $\theta \in D(\mathbb{R}^n)$, ou seja,

$$(\nabla u, \nabla \theta) + 3(u, \theta) = (g + 2f, \theta), \ \forall \theta \in D(\mathbb{R}^n),$$

sendo $D(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções testes. Isso mostra que

$$-\Delta u + 3u = g + 2f$$

no sentido de $D'(\mathbb{R}^n)$. Também para $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, aplicando o Teorema da **regularidade elíptica** (Ver Teorema 1.92) para o operador elíptico $3I - \Delta$, sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$, resulta que $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$. Mas, como $u, f \in H^1(\mathbb{R}^n)$, vemos que $v = u - f \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Portanto existe um único

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A'), \ \text{tal que } (A' + I)U = F,$$

mostrando que (3.16) possui uma única solução $U \in H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n) = D(A')$, como desejado, e concluímos que A' é maximal e monótono. Logo, segue do Teorema de **Lumer-Phillips** (Teorema 2.20) que $A' \in G(1, 0)$. Portanto A' gera um semigrupo de classe C_0.

- Para concluir a **Etapa 1,** resta provar que $B \in \mathcal{B}(H)$. Temos

$$\begin{aligned}
\|B(U)\|_H &= \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_H \\
&= \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -u \end{pmatrix} \right\|_H \\
&= \|u\|_{L^2} \\
&\leq \|u\|_{H^1} \leq \|u\|_{H^1} + \|v\|_{L^2} \\
&= \|U\|_H.
\end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 3.1, $A = A' + B$ é gerador de um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de classe

C_0.

Etapa 2. Agora temos que para $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in D(A)$,

$$U(t) = S(t)U_0$$

é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U + AU = 0, \ \forall t \geq 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases} . \tag{3.19}$$

De fato, da proposição 2.13 se deduz que

a) $U(t) = S(t)U_0 \in D(-A) = D(A)$;

b) $\dfrac{dU}{dt}(t) = \dfrac{d}{dt}(S(t)U_0) = -AS(t)U_0 = -AU(t), t \geq 0$;

c) $U(0) = S(0)U_0 = U_0$ pois $S(0) = I$.

De b) e c) resulta que a função U é diferenciável em $t \geq 0$ e satisfaz o problema de valor inicial (3.19). Uma vez que para $U_0 \in D(A)$, obtemos da proposição 2.13 que

$$U(t) = S(t)U_0 \in D(A),$$

e, do fato de que $S(t)$ é contínua, resulta que

$$U \in C([0, \infty); D(A)).$$

Também segue da proposição 2.13 que

$$U'(t) = -AU(t) = -AS(t)U_0 = -S(t)AU_0 \in H.$$

Como $S(t)AU_0$ é função contínua, concluímos que

$$U \in C^1([0, \infty); H),$$

logo, $U \in C^1([0, \infty); H) \cap C([0, \infty); D(A)$, dado que $U(t) = S(t)U_0$ é a solução de (3.19) se $U_0 \in D(A)$. Isto é,

$$U \in C^1([0,\infty); H) \cap C([0,\infty); D(A)) \tag{3.20}$$

Interpretemos (3.20): Como $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ é solução de (3.19) obtém-se em particular que $v = u_t$. Assim

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \in C^1\Big([0,\infty); H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)\Big) \cap C\Big([0,\infty); H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)\Big).$$

Isso prova que:

- $u \in C^1([0,\infty); H^1(\mathbb{R}^n))$;
- $u_t \in C^1([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^n))$, ou seja, $u \in C^2([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^n))$;
- $u \in C([0,\infty); H^2(\mathbb{R}^n))$;
- $u_t \in C([0,\infty); H^1(\mathbb{R}^n))$, ou seja, $u \in C^2([0,\infty); H^1(\mathbb{R}^n))$.

Concluímos então disso que, para $(u_0, u_1) \in H^2 \times H^1$, a solução de (3.4)-(3.5) satisfaz

$$u \in C([0,\infty); H^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,\infty); H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^2([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^n)).$$

Além disso, a proposição 2.13 implica que, se $(u_0, u_1) \in H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$, o problema (3.4)-(3.5) possui uma solução fraca na classe

$$u \in C([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^n)) \cap ([0,\infty); H^1(\mathbb{R}^n)).$$

Unicidade

Provamos a unicidade utilizando a proposição dada abaixo:

Proposição 3.2. *Sejam $\{S_1(t)\}_{t\geq 0}$ e $\{S_2(t)\}_{t\geq 0}$ semigrupos de classe C_0 que possuem o mesmo gerador infinitesimal A. Então $\{S_1(t)\}_{t\geq 0} = \{S_2(t)\}_{t\geq 0}$.*

Demonstração: Definamos a função $W(s) = S_1(s)xS_2(t-s)$ para $x \in D(A)$. Sabemos da proposição 2.13 que

$$\begin{aligned} W'(s) &= AS_1(s)xS_2(t-s) + S_1(s)x(-AS_2(t-s)) \\ &= AS_1(s)xS_2(t-s) - AS_1(s)xS_2(t-s) = 0, \end{aligned}$$

logo $W(s)$ é uma função constante em s. Mas,

$$W(t) = S_1(t)xS_2(t-t) = S_1(t)xS_2(0) = S_1(t)x$$

e

$$W(0) = S_1(0)xS_2(t-0) = S_1(0)xS_2(t) = S_2(t)x.$$

Sendo $W(s)$ constante devemos ter

$$S_1(t)x \; = S_2(t)x \;\forall x \in D(A) \;\forall t \geq 0.$$

Portanto, $S_1(t) \; = S_2(t)$. □

Suponhamos agora que $V = V(t)$ seja outra solução do problema de valor inicial (3.19). Então devemos ter

$$\frac{d}{dt}V(t) = AV(t) \;\text{ e }\; V(0) = U(0),$$

logo nossa solução é da forma

$$V(t) = T(t)U_0,$$

sendo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo gerado por A. Portanto segue da Proposição 3.2 que $\{S(t)\}_{t\geq 0} = \{T(t)\}_{t\geq 0}$, ou seja, $U = V$.

Consequentemente concluímos que existe uma única função $u = u(x,t)$ que satisfaz o problema de valor inicial (3.4)-(3.5).

Além disso, para dados iniciais $(u_0, u_1) \in H^2 \times H^1$ a solução do problema linear, está na classe

$$u \in C([0,\infty); H^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,\infty); H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^2([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^n)).$$

3.2 Problema semilinear abstrato

Para concluir o trabalho, nesta seção mostraremos a existência e unicidade da solução local, para a equação semilinear associada com o problema linear (3.4)-(3.5). Usaremos para isso o Teorema do Ponto Fixo de Banach, que será apresentado abaixo juntamente com algumas proposições e definições necessárias para tal estudo.

Teorema 3.3 (Ponto Fixo de Banach)**.** *Seja (X, d) um espaço métrico completo e $P : X \to X$ uma contração, isto é,*

$$d(P(x), P(y)) \leq k\ d(x, y),\ \forall x, y \in X,$$

para algum k fixado tal que $0 \leq k < 1$. Então P tem único ponto fixo, isto é, existe um único ponto $u \in X$ tal que

$$P(u) = u.$$

Demonstração. Ver [18]. □

Proposição 3.4 (Desigualdade de Gronwall)**.** *Sejam $C \geq 0$ uma constante, $g \in L^1(0, T)$ e $h \in L^\infty(0, T)$ tais que $g > 0$ e $h \geq 0$. Se*

$$g(t) \leq C + \int_0^t g(s)h(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.21}$$

então

$$g(t) \leq Ce^{\int_0^T h(t)dt}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

Demonstração: *Consideremos a função $\phi(t) = C + \int_0^t g(s)h(s)ds$, com $t \in [0, T]$. Então,*

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = g(t)h(t),$$

e por (3.21),

$$g(t)h(t) = \frac{d\phi}{dt}(t) \leq \phi(t)h(t),$$

ou seja,

$$\frac{d\phi}{dt}(t) - \phi(t)h(t) \leq 0, \quad t \in [0, T],$$

que pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt}\Big(\phi(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}\Big) = \Big(\frac{d\phi}{dt}(t) - \phi(t)h(t)\Big)e^{-\int_0^t h(s)ds} \leq 0,$$

e integrando essa desigualdade de 0 até t, obtemos

$$\int_0^t \frac{d}{dr}\Big(\phi(t)e^{-\int_0^r h(s)ds}\Big)dr = \phi(t)e^{-\int_0^t h(s)ds} - \phi(0) \leq 0.$$

Logo,

$$\phi(t)e^{-\int_0^t h(s)ds} \leq \phi(0) = C,$$

e portanto,

$$\phi(t) \leq Ce^{-\int_0^t h(s)ds} \leq Ce^{-\int_0^T h(t)dt}, \quad t \in [0,T].$$

□

Definição 3.5. Seja (X,d) um espaço métrico. Uma aplicação $F : X \to X$ é dita globalmente Lipschitz contínua se existe uma constante positiva L tal que

$$d(F(v),F(u)) \leq Ld(v,u), \ \forall u,v \in X.$$

Definição 3.6. Seja X espaço normado. Uma aplicação $F : X \to X$ é dita Lipschitz contínua sobre conjuntos limitados se, para cada constante positiva M, existir uma constante positiva L_M de modo que

$$\|F(v) - F(u)\| \leq L_M\|v-u\|,$$

para todo $u, v \in X$ tal que

$$\|u\| \leq M \text{ e } \|v\| \leq M.$$

O problema semilinear associado com (3.4)-(3.5) é:

$$u_{tt} - \Delta u + u_t = |u|^p, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \tag{3.22}$$

$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1 \tag{3.23}$$

sendo que p satisfaz

$$1 < p \leq \frac{n}{n-2} \text{ se } n \geq 3, \ 1 < p < \infty \text{ se } n = 1,2.$$

Da mesma maneira que na seção anterior, tomando $v = u_t$ e $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$, podemos reescrever o problema de valor inicial na forma de uma problema semilinear abstrato

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt}(t) + A'U = F(U) \\ U(0) = U_0 \end{cases}, \tag{3.24}$$

em que $U \in D(A') = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n) \subset H = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$, o operador

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta + I & I \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} F : H &\to H \\ U &\to F(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ |u|^p + u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

para $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H$.

Mostramos agora que F está bem definida para o expoente p com $1 < p \leq \dfrac{n}{n-2}$.

De fato, seja $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H$, devemos mostrar que

$$|u|^p + u \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Temos que $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, assim para provar que $|u|^p \in L^2(\mathbb{R}^n)$, consideremos dois casos:

Caso 1: $n > 2$.

Para $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ e pelo item (i) do teorema das **Imersões de Sobolev** (Ver teoremas 1.87 e 1.86) sabemos que

$$H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n) \tag{3.25}$$

se $2 \leq p \leq \dfrac{2n}{n-2m}$.

Assim usando a imersão (3.26), observamos que para $2 \leq p \leq \dfrac{2n}{n-2m}$ pela Desigualdade de Poincaré (Ver teorema 1.75) vale

$$\|u^p\|_{L^2}^2 = \int |u|^{2p} dx = \|u\|_{L^{2p}}^{2p} \leq C\|u\|_{H^1}^{2p} < +\infty.$$

Portanto, podemos concluir que $|u|^p \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Caso 2: $n = 1, 2$:

Para este último caso, observamos que, se $n = 1$ então pelo item do teorema das

Imersões de Sobolev (Ver teorema 1.87 e 1.86) temos que

$$H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \forall p \geq 1, \tag{3.26}$$

e se, $n = 2$ tem-se que

$$H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \quad \forall p \geq 2. \tag{3.27}$$

Logo, basta proceder, de modo análogo, como no **Caso 1** e teremos $|u|^p \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Assim temos

$$u \in H^1(\mathbb{R}^n) \to |u|^p \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Portanto, concluímos, observando que trivialmente, $0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$, que F aplica H em H, com $H = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$.

Para mostrar que o problema de valor inicial (3.24) possui uma única solução local, precisaremos de alguns resultados que apresentaremos abaixo. Consideraremos o seguinte problema semilinear abstrato de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au = F(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} . \tag{3.28}$$

em um espaço normado X, em que F é uma aplicação de X em X, $u_0 \in X$ é um valor inicial dado dado, e, A é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações. Os dois teoremas apresentados a seguir são estudados para mostrar a existência e unicidade de soluções para o problema (3.28). O primeiro diz que se F é globalmente Lipschitz contínua, o problema (3.28) possui solução (Fraca) definida para $t \geq 0$. Já o segundo teorema garante, caso F seja Lipschitz contínua sobre conjuntos limitados, que (3.28) possui única solução em um intervalo da forma $[0, T_m]$, com $T_m > 0$ convenientemente escolhido.

Teorema 3.7. *Seja um X espaço de Banach, A gerador de um semigrupo de contrações, F globalmente Lipschitz contínua sobre X e $u_0 \in X$. Então, existe uma única solução global fraca $u = u(t)$ de (3.28) no sentido que $u \in C([0, \infty), X)$ e*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds, \tag{3.29}$$

para todo $t \geq 0$, sendo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ o semigrupo de contrações gerado pelo operador A.

Além disso, existe a dependência contínua de u em relação a u_0, isto é,

$$\|v(t) - u(t)\| \leq e^{Lt}\|v_0 - u_0\|$$

para todo $t \geq 0$, com v a solução da equação (3.29) com valor inicial v_0.

Demonstração: Provaremos primeiro a unicidade de soluções. Sejam u e v soluções de (3.29). Como F é globalmente Lipschitz e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de contração, vemos que

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \int_0^t \|u(s) - v(s)\| ds.$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall com $C = 0, h(t) = L$ e $g(t) = \|u(t) - v(t)\|$, concluímos que $u = v$.

Para provarmos a existência de soluções, consideramos o espaço

$$E = \{u \in C([0, \infty), X); \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|u(t)\| < \infty\},$$

com $k > 0$, constante, escolhida convenientemente. Pode-se provar de uma maneira trivial que o espaço E com a norma

$$\|u\|_E = \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|u(t)\|,$$

é um espaço de Banach.

Agora definimos a aplicação $\phi : E \to C([0, \infty), X)$ dada por

$$\phi(u(t)) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds, \quad u \in E \text{ e } t \geq 0,$$

sendo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ semigrupo de contração, vemos que $\phi(u) \in C([0, \infty), X)$, para todo $u \in E$. Assim, ϕ está bem definida. Mostraremos que $\phi(u) \in E$, para cada $u \in E$.

De fato, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é semigrupo de contração, consequentemente

$$\|\phi(u(t))\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|F(u(s))\| ds.$$

Uma vez que F é Lipschitz contínua com constante $L > 0$,

$$\|F(u(s))\| \leq L\|u(s)\| + \|F(0)\|,$$

portanto,

$$\|\phi(u(t))\| \leq \|u_0\| + t\|F(0)\| + L\|u\|_E \int_0^t e^{ks}ds = \|u_0\| + t\|F(0)\| + L\frac{e^{ks}-1}{k}\|u\|_E.$$

Assim, para $u \in E$ resulta que $\phi(u) \in E$ e

$$\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|\phi(u)\|\|\phi(u)\|_E \leq \|u_0\| + \frac{1}{ke}\|F(0)\| + \frac{1}{k}\|u\|_E,$$

pois $te^{-kt} \leq \frac{1}{ke}$, $\forall t \geq 0$.

Agora vamos mostrar que ϕ é contração sobre E se $k > L$. Da definição de ϕ, do fato que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é semigrupo de contração e F é Lipschitz, temos

$$\begin{aligned} \|\phi(u(t)) - \phi(v)(t)\| &\leq L\int_0^t \|u(s) - v(s)\|ds \\ &\leq L\|u - v\|_E \int_0^t e^{ks}ds = L\frac{e^{kt}-1}{k}\|u - v\|_E \\ &\leq \frac{Le^{kt}}{k}\|u - v\|_E, \ \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\phi(u) - \phi(v)\|_E \leq \frac{L}{k}\|u - v\|_E.$$

Assim, escolhendo algum $k > L$, pelo teorema do ponto fixo de Banach, existe uma única função $u \in E$ tal que $\phi(u) = u$. Consequentemente, u é solução da equação integral (3.29) e $u \in C([0,\infty), X)$. Isto é, u é solução fraca do problema (3.28).

Para finalizar a prova, mostraremos agora a dependência contínua. Sejam u e v soluções de (3.29) associadas aos valores iniciais u_0 e v_0 respectivamente. Então obtemos

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|u_0 - v_0\| + L\int_0^t \|u(s) - v(s)\|ds.$$

Da desigualdade de Gronwall, verificamos que

$$\|u(t) - v(t)| \leq \|u_0 - v_0\|e^{Lt},$$

o que conclui a prova do teorema. $\square$

Teorema 3.8. *Para cada $u_0 \in X$, existe $0 < T < \infty$ e uma única solução fraca u de (3.28) definida em $[0,T]$. Isto é, $u \in C([0,T],X)$ e (3.29) é válida para todo $t \in [0,T]$.*

Demonstração: Seja $E = C([0,T],X)$ com a norma usual e $T > 0$ a ser escolhido convenientemente. Vamos definir o conjunto

$$K = \{u \in E; \|u(t)\| \leq \|u_0\| + 1 \ \forall t \in [0,T]\}.$$

Assim, K é um subconjunto fechado do espaço de Banach E. Agora, para $u \in K$, podemos facilmente concluir que $\phi(u) \in E$ sendo $\phi(u)$ dada por

$$\phi(u(t)) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds, t \in [0,T]$$

com $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ o semigrupo de contração gerado pelo operador A dado no problema (3.28).

Também da definição 3.6 temos

$$\|\phi(v) - \phi(u)\|_E \leq LT\|v - u\|_E \tag{3.30}$$

para todo $u, v \in K$, em que $L = L_M$ com $M = \|u_0\| + 1$. De fato, sendo $u, v \in K$, segue que

$$\begin{aligned}
\|\phi(v) - \phi(u)\|_E &= \sup_{0\leq t\leq T}\left\|\int_0^t S(t-s)F(u(s))ds - \int_0^t S(t-s)F(v(s))ds\right\| \\
&\leq \sup_{0\leq t\leq T}\int_0^t \|F(u(s)) - F(v(s))\|ds \\
&\leq \sup_{0\leq t\leq T}\int_0^t L_M\|u(s)) - v(s)\|ds \\
&\leq \int_0^t L_M\|u(s)) - v(s)\|ds \leq TL_M\|u - v\|_E.
\end{aligned}$$

Aqui usamos o fato de F ser localmente Lipschitz com $M = \|u_0\| + 1$. Também usamos que

$$\|u\|_E = \sup_{0 \le t \le T} \|u(t)\|_X.$$

Provaremos que

$$\phi(K) \subseteq K$$

se

$$T\Big(\|F(0)\| + L(\|u_0\| + 1)\Big) \le 1.$$

Com efeito,

$$\|\phi(u(t))\| \le \|u_0\| + \int_0^t \|F(u(s))\| ds, t \in [0, T].$$

Usando o fato de que se $u \in K$, a desigualdade abaixo é válida

$$\|F(u(s)) - F(0)\| \le L\|u(s)\| \le L(\|u_0\| + 1),$$

para $s \in [0, T], L = L_M$ e $M = \|u_0\| + 1$, obtemos

$$\|\phi(u(t))\| \le \|u_0\| + T\Big(\|F(0)\| + L(\|u_0\| + 1)\Big),\ t \in [0, T].$$

Assim, tomando T suficientemente pequeno tal que

$$T\Big(\|F(0)\| + L(\|u_0\| + 1)\Big) < 1, \tag{3.31}$$

constatamos que $\phi(u) \in K$. Assim, com a condição (3.31) sobre T, ϕ atua de K em K. A condição (3.31) sobre T implica que $TL < 1$. Então a estimativa (3.30) diz que $\phi : K \to K$ é uma contração.

Portanto, ϕ tem um único ponto fixo $u \in K$. Esse u é uma solução local fraca do problema (3.29).

A unicidade de u segue da definição 3.6 e da desigualdade de Gronwall (Ver proposição 3.4), como na demonstração do Teorema 3.7. Logo o Teorema 3.8 está demonstrado. □

3.2.1 Existência Local e Unicidade

Mostraremos agora a existência e unicidade local de solução do problema (3.22)– (3.23).

Observação 3.9. Seja $F(s) = |s|^p + s, s \in \mathbb{R}$. Então

$$F(s) - F(r) = |s|^p - |r|^p + s - r.$$

Agora, se $g(s) = |s|^p$, então $g'(s) = p|s|^{p-2}s$. Portanto, pelo **Teorema do Valor Médio**

$$g(s) - g(r) = p|\xi|^{p-2}\xi(|s| - |r|),$$

para algum ξ entre r e s. Assim

$$|g(s) - g(r)| \leq p|\xi|^{p-1}(|s - r|) \leq p(|s| + |r|)^{p-1}|s - r| \leq C_p(|s|^{p-1} + |r|^{p-1})|r - s|,$$

com C_p uma constante positiva que depende de p. Logo,

$$|F(s) - F(r)| \leq \Big[C_p(|s|^{p-1} + |r|^{p-1}) + 1\Big]|r - s|.$$

Agora sejam

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \in H,$$

então, pela observação 3.2.1 temos

$$\begin{aligned} \|F(U) - F(V)\|_H &= \||u_1|^p + u_1 - |u_2|^p - u_2\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|\Big[C(|u_1|^{p-1} + |u_2|^{p-1}) + 1\Big](u_1 - u_2)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

sendo $C > 0$ uma constante. Assim, para $U, V \in B(0, R)$, temos

$$\begin{aligned} \|F(U) - F(V)\|_H &\leq C\int_{\mathbb{R}^n} (|u_1|^{p-1} + |u_2|^{p-1})^2|u_1 - u_2|^2 dx \\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^n} (|u_1|^{2(p-1)} + |u_2|^{2(p-1)})|u_1 - u_2|^2 dx \\ &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} (|u_1|^{2(p-1)} + |u_2|^{2(p-1)})^{\frac{p-1}{p}}\right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |u_1 - u_2|^{2p} dx\right]^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

onde aplicou-se na última desigualdade a desigualdade de Hölder e ao fato de que $p > 1$. Logo,

$$\|F(U) - F(V)\|_H^2 H \leq C\left[\int_{\mathbb{R}^n}(|u_1|^{2p} + |u_2|^{2p})dx\right]^{\frac{p-1}{p}} \|u_1 - u_2\|^2_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.32}$$

Usando (3.32) e as imersões de Sobolev (3.26) e (3.27) resulta que:

$$\|F(U) - F(V)\|_H^2 \leq C\Big[\|u_1\|^{2p}_{H^1} + \|u_2\|^{2p}_{H^1}\Big]^{\frac{p-1}{p}} \|u_1 - u_2\|^2_{H^1}. \tag{3.33}$$

Assim, se $\|U\|_H, \|V\|_H \leq R$ tem-se de (3.33) que

$$\|F(U) - F(V)\|_H^2 \leq C\Big[2R^{2p}\Big]^{\frac{p-1}{p}} \|U - V\|^2_H. \tag{3.34}$$

Logo,

$$\|F(U) - F(V)\|_H \leq L_R\|U - V\|_H,$$

com $L_R = C^{\frac{1}{2}}[2R^{2p}]^{\frac{p-1}{2p}}$.

Portanto, F é localmente Lipschitz contínua sobre conjuntos limitados, com $M = R$. Como H pode ser visto como um espaço métrico, com a métrica induzida pela sua norma, e na seção anterior provamos que $A \in G(1, 0)$, estamos nas hipóteses do Teorema 3.8. Assim, para algum $T > 0$ apropriado, existe uma única função

$$U = U(t) \in C([0, T), H = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)), \tag{3.35}$$

solução fraca de (3.24) com dado inicial $U_0 \in H$.

Interpretemos (3.35). Lembrando que se pode escrever $U = (u, v)$ segue que u e v, as componentes de U, satisfazem

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} = u_t,$$

Como U é solução de (3.24) segue de (3.35) que

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \in C([0, T); H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)).$$

Isto mostra que

$$u \in C([0,T); H^1(\mathbb{R}^n);$$
$$u_t t \in C([0,T); L^2), \text{ ou seja, } u \in C^1([0,T); L^2).$$

Logo, concluímos que

$$u \in C([0,T); H^1(\mathbb{R}^n) \cap C^1[0,T); L^2), \tag{3.36}$$

é solução local fraca de (3.22)-(3.23) com dados iniciais $(u_0, u_1) \in H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$.

Constatamos, assim que o problema de valor inicial (3.22)-(3.23) possui uma única solução local fraca $u = u(x,t)$ com u satisfazendo (3.36). Ou seja, existe única função u solução do problema de valor inicial

$$u_{tt} - \Delta u + u_t = |u|^p, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \tag{3.37}$$
$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1 \tag{3.38}$$

com dados iniciais em $H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ e p um número real que satisfaz

$$1 < p < \frac{n}{n-2} \text{ se } n \geq 2, \ e \ 1 < p < \infty \text{ se } n = 1, 2.$$

Ou seja, existe uma única função $u = u(x,t)$ definida, para algum $T > 0$, em $[0,T)$ que satisfaz (3.36) e é solução do do problema acima.

Considerações

Embora seja importante a modelagem matemática dos problemas presentes nesse trabalho, não foi o principal foco tais deduções. Existe uma ampla literatura que trata desse tema, e o leitor interessado pode consultar [2] ou [20]. Durante um bom tempo, a existência e unicidade de soluções de problemas lineares e semilineares envolvendo EDP's era obtida utilizando o método de Faedo-Galerkin. Com advento da Teoria de Semigrupos foi possível obter um novo método que possibilitou, no caso dos problemas autônomos, a diminuição das etapas na obtenção dos resultados desses problemas. A estratégia utilizada para obter a existência e unicidade de soluções envolvendo equações diferencias parciais, nesse caso, consiste em fazer uma mudança de variáveis transformando o problema estudado em um Problema Abstrato de Cauchy na variável t, o qual envolve um operador linear ilimitado A, pois, nesse contexto podemos aplicar a teoria de semigrupos. Essa estratégia que possibilita a obtenção da solução do PAC, e consequentemente, a solução do problema mãe estudado. Vale observar que, no caso de problemas lineares, esse método nos leva a uma solução forte do problema (no sentido da definição 2.21), Já para os problemas semilineares, a obtenção de solução forte depende da não-linearidade envolvida, mas na maioria dos casos, encontramos apenas a solução fraca (no sentido da definição 3.8).

No capítulo 1 fizemos a revisão da teoria de análise funcional, que serviu de base para o entendimento da teoria de semigrupos estudada no capítulo 2. Ao estudarmos os Teoremas de Hille-Yosida e Lummer-Phillips somos apresentados às ferramentas chave para caracterização dos geradores infinitesimais de um semigrupo de classe C_0. Como vimos no capítulo 3, caso o operador A relacionado ao Problema Abstrato de Cauchy seja um gerador de um semigrupo de classe C_0, então a solução do Problema Abstrato de Cauchy é dada por $U(t) = S(t)U_0$ de acordo com a Proposição 2.13.

Observamos que, para os dados iniciais $u_0, u_1 \in H^1 \times L^2$ mostramos que existe uma única solução local do problema (3.22)-(3.23). A solução global do problema mencionado pode ser obtida para dados inicias sobre certas condições, isto é, devemos ter dados inicias limitados para ser possível aplicar o teorema de Gronwall e assim estender a solução local obtida no Teorema 3.8.

BIBLIOGRAFIA

[1] BARBOSA A. R. A. **Existência Global e Propriedades Assintóticas para a Equação Semilinear da Onda em $\mathbb{R}^n$.** Dissertação (Mestre em Matemática) – Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, p. 90. 2008.

[2] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C., **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

[3] BREZIS, H. **Analyse Fonctionnelle: Theórie et Applications**. Dunod, Paris, 2005.

[4] BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. Universitext, Springer, New York, 2011.

[5] CUNHA, C. A. R. da; AVILA, J. A. J. **Equações Diferenciais Parciais.** São João del-Rei, UFSJ, Minas gerais, 2009.

[6] CARVALHO, A. N. **Análise Funcional II.** Notas de aula- Universidade de São Paulo, 2007.

[7] CUNHA, C.R. da **Semigrupos Aplicados a Sistemas Dissipativos em EDP**. Notas em Matemática Aplicada - SBMAC - volume 32, 2007.

[8] CZAJA, R. M. **Differential Equations with Sectorial Operator.** [S.l.]: Wydawnictwo Uniwersytetu Slakigo, 2002.

[9] GOMES, A. M. **Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução**. Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1985

[10] HOUNIE, J. **Teoria Elementar das Distribuições**.12° Colóquio Brasileiro de matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[11] IÓRIO, V. **EDP, um curso de Graduação**. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2ª edição, Rio de janeiro, 2001.

[12] KREYSIZG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications.** Wiley Classics Library, 1989.

[13] LIU, Z., ZHENG, S. **Semigroups Associated with Dissipative Systems**. Chapman & Hall/CRC.London, 1999.

[14] ODEN J. T.; DEMKOWICZ L. F. **Applied Functional Analysis**. Computational Mechanics and Applied Analysis, 1996.

[15] PAZY, A. **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**. Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1983.

[16] RIVERA, J. E. M. **Semigrupos e Equações Diferenciais Parciais, Série: Textos de Pós- Graduação**. LNCC, Petrópolis, Rio de Janeiro, 2007.

[17] RIVERA, J. E. M., **Estabilização de Semigrupos & Aplicações.** Notas de aula em minicurso,UFPA, Belém, Pará, 2007.

[18] SOTOMAYOR, J., **Lições de equações diferenciais ordinárias.** Projeto Euclides IMPA, 1976.

[19] YOSIDA, K. **Functional analysis.** Springer-Verlag, Berlim-Heildelberg, New York, 1966.

[20] ZILL, D. G.; CULLEN, M. R., **Equações Diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001. v. 1.