

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
ENGENHARIA ELETRÔNICA E DE TELECOMUNICAÇÕES  
*CAMPUS PATOS DE MINAS*

GLAUCIENI MARTINS MOREIRA

**UM ESTUDO COMPARATIVO DAS CONSTELAÇÕES QAM QUADRADA E NÃO-  
QUADRADA NOS CANAIS AWGN COM DESVANECIMENTO *RAYLEIGH***

Patos de Minas - MG

2023

GLAUCIENI MARTINS MOREIRA

**UM ESTUDO COMPARATIVO DAS CONSTELAÇÕES QAM QUADRADA E NÃO-  
QUADRADA NOS CANAIS AWGN COM DESVANECIMENTO *RAYLEIGH***

Trabalho de conclusão de curso apresentado à banca examinadora como requisito parcial de avaliação da disciplina de TCC2 da graduação em Engenharia Eletrônica e de Telecomunicações, da Faculdade de Engenharia Elétrica, da Universidade Federal de Uberlândia, Campus Patos de Minas.

Orientadora: Dra. Karine Barbosa Carbonaro

Patos de Minas - MG

2023

GLAUCIENI MARTINS MOREIRA

**UM ESTUDO COMPARATIVO DAS CONSTELAÇÕES QAM QUADRADA E NÃO-  
QUADRADA NOS CANAIS AWGN COM DESVANECIMENTO *RAYLEIGH***

Trabalho de Conclusão de Curso da  
Universidade Federal de Uberlândia como  
requisito parcial para obtenção do título de  
bacharel em Engenharia Eletrônica e de  
Telecomunicações.

Patos de Minas, 06 de março de 2023.

Banca Examinadora:

Dra. Karine Barbosa Carbonaro – FEELT/UFU

Dr. Pedro Luiz Lima Bertarini– FEELT/UFU

Dr. Renan Alves dos Santos - FEELT/UFU

*À minha mãe, Cremilda, dedico o resultado do esforço ao longo de todos esses anos.*

## **AGRADECIMENTOS**

À Deus por me proteger e me guiar como Pai Amoroso que nunca abandonou a sua filha.

À minha mãe, que sempre prezou por minha educação, por ser fonte de inspiração, força e dedicação.

Aos meus irmãos que me incentivaram nos momentos difíceis e compreenderam a minha ausência durante a minha formação.

À minha orientadora, Professora Doutora Karine Barbosa Carbonaro, grande amiga, instrutora e conselheira, obrigada por sua dedicação e confiança inabalável, por jamais desistir de mim, mesmo nos momentos de fraqueza. Declaro a minha eterna gratidão pelo compartilhamento do seu tempo e conhecimento.

Ao Mestre Wilian Eurípedes Vieira por suas essenciais contribuições para o desenvolvimento deste trabalho, gratidão pelo conhecimento compartilhado.

A todos os professores do curso de Engenharia Eletrônica e de Telecomunicações da Universidade Federal de Uberlândia - Campus Patos de Minas, cada um foi essencial para o meu desenvolvimento profissional.

A todos os colegas de curso, gratidão por todos os anos de caminhada.

A todos que passaram por minha vida, e acreditaram que esse momento um dia chegaria.

*“Pois vocês sabem que, quando a sua fé vence essas provações, ela produz perseverança.”*  
*Tiago 1:3 – Bíblia Sagrada*

## RESUMO

A modulação M-QAM, usada nas telecomunicações modernas, foi criada para aumentar a taxa de transmissão de bits e, para isso, combina as vantagens de duas técnicas de modulação, a modulação em fase e a modulação em amplitude. A modulação em amplitude utiliza largura de banda baixa, e a modulação em fase que apresenta imunidade ao ruído. Esse trabalho de conclusão de curso apresenta um estudo do desenvolvimento das equações da probabilidade de erro de bit. E a partir dessas equações é avaliado o desempenho da modulação M-QAM nas constelações dos tipos quadrada e não quadrada no canal AWGN com desvanecimento *Rayleigh*. Os resultados mostram que tanto o ruído quanto o desvanecimento degradam o desempenho da modulação QAM independentemente do tipo de constelação.

**Palavras-chave:** Desvanecimento, M-QAM quadrada, M-QAM não-quadrada, ruído.

## ABSTRACT

M-QAM modulation, used in modern telecommunications, was created to increase the bit rate, for that, it combines the advantages of two modulation techniques, the phase modulation and the amplitude modulation. Amplitude modulation uses low bandwidth, and phase modulation provides noise immunity. This course completion work presents a study of the development of bit error probability equations. And from these equations, the performance of the M-QAM modulation in the constellations of the square and non-square types in the AWGN and Rayleigh channels is evaluated. The results show that both noise and fading degrade QAM modulation performance regardless of the constellation type.

**Keywords:** Fading, square M-QAM, cross non square M-QAM, noise.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1– Diagrama de blocos do modelo de canal AWGN.....	15
Figura 2.2 – Constelações dos tipos I, II e III.....	19
Figura 2.3 – Constelação 16-QAM.....	19
Figura 2.4 – Constelação 128-QAM não quadrada cruzada.....	22
Figura 3.1 – Desvanecimento lento e rápido.....	27
Figura 3.2 – PDF da distribuição de <i>Rayleigh</i> .....	28
Figura 3.3 – CDF da distribuição de <i>Rayleigh</i> .....	29
Figura 4.1 – Probabilidade de erro de bit da M-QAM constelação quadrada no canal AWGN.....	34
Figura 4.2 – Probabilidade de erro de bit da M-QAM constelação não quadrada. no canal AWGN.....	35
Figura 4.3 – Probabilidade de erro de bit da 16-QAM com diversos valores de variância.....	36
Figura 4.4 – Probabilidade de erro de bit da 32-QAM com diversos valores de variância.....	37
Figura 4.5 – Probabilidade de erro de bit da M-QAM constelação quadrada no canal <i>Rayleigh</i> .....	38
Figura 4.6 – Probabilidade de erro de bit da M-QAM constelação não quadrada no canal <i>Rayleigh</i> .....	38

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Fator de escala para a constelação QAM não quadrada em cruzada.....	24
Tabela 2.2 – Número de vizinhos adjacentes.....	24

## LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS

ANATEL	Agência Nacional de Telecomunicações
ASK	<i>Amplitude Shift Keying</i>
AWGN	<i>Additive White Gaussian Noise</i>
BER	<i>Bit Error Rate</i>
BEP	<i>Bit Error Probability</i>
CDF	<i>Cumulative Distribution Function</i>
FSK	<i>Frequency Shift Keying</i>
ISI	<i>Intersymbol interference</i>
M-QAM	<i>Mary Quadrature Amplitude Modulation</i>
NLOS	<i>Non Line Of Sight</i>
$P_b$	Probabilidade de erro de bit
$P_b(\text{Rayleigh})$	Probabilidade de erro de bit com desvanecimento <i>Rayleigh</i>
PDF	<i>Probability Density Function</i>
PSK	<i>Phase Shift Keying</i>
$P_s$	Probabilidade de erro de símbolo
QAM	<i>Quadrature Amplitude Modulation</i>
TQAM	<i>Triangular Quadrature Amplitude Modulation</i>

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	13
2. REFERENCIAL TEÓRICO .....	15
2.1 RUIDO BRANCO GAUSSIANO ADITIVO- AWGN .....	15
2.2 MODULAÇÃO DIGITAL.....	16
2.2.1 Sinal QAM .....	16
2.2.2 Constelações.....	18
2.2.3 M-QAM Constelação Quadrada.....	20
2.3.4 M-QAM Constelação Não quadrada.....	22
2.3.4 Taxa de Erro de Bit - BER .....	24
2.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	25
3. DESENVOLVIMENTO .....	26
3.1 DESVANECIMENTO .....	26
3.2 DISTRIBUIÇÃO DE <i>RAYLEIGH</i> .....	27
3.3 CANAL DE DESVANECIMENTO <i>RAYLEIGH</i> .....	30
3.4 EQUACIONAMENTO DA M-QAM QUADRADA COM RUÍDO E DESVANECIMENTO	32
3.5 EQUACIONAMENTO DA M-QAM NÃO QUADRADA COM RUÍDO E DESVANECIMENTO .....	32
3.6 PARÂMETROS AVALIATIVOS .....	33
3.7 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	33
4. RESULTADOS OBTIDOS .....	34
4.1 PROBABILIDADE DE ERRO DE BIT NO CANAL AWGN .....	34
4.2 ANÁLISE DA VARIÂNCIA.....	35
4.3 PROBABILIDADE DE ERRO DE BIT NO CANAL <i>RAYLEIGH</i> .....	37
4.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	39
5. CONCLUSÕES GERAIS .....	40
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	42

# 1. INTRODUÇÃO

A utilização de sistemas digitais com taxa de transmissão de dados alta é a demanda atual nos canais com fio e sem fio. Alguns sistemas ópticos têm taxa de 40 Gbps, as redes locais Ethernet (LAN – *Local Area Network*) atinge o valor de 10 Mbps e conexões 4G e 5G alcançam 100 Mbps e 10 Gbps, respectivamente. Alguns desses sistemas de comunicação são contaminados por ruído Gaussiano branco aditivo (AWGN - *Additive White Gaussian Noise*), mas o desvanecimento é um efeito que também modifica a sequência recebida e ocasiona variações de intensidade [1]. O desvanecimento é caracterizado pela variação da envoltória e da fase do sinal transmitido. A distribuição que descreve estatisticamente as variações de larga escala é a lognormal, enquanto, as variações de pequena escala são as distribuições *Rayleigh, Hoyt, Rice, Nakagami-m e Weibull*.

Os canais sem fio, via satélite e terrestre, apresentam comportamento aleatório e ambientes de propagação diferentes. O canal de comunicação terrestre, objeto de estudo nesse trabalho, é caracterizado pelo efeito de múltiplos percursos de propagação resultando em desvanecimento do sinal no receptor. Além disso, sofre alguns outros efeitos como perdas de propagação, variação no tempo, interferência e ruído [2].

Para garantir o funcionamento adequado dos canais de comunicação, e assim, evitando que os sinais sejam recebidos com muitos erros, todos os padrões têm especificações de taxa de erro de bit (BER – *Bit Error Rate*). A BER é calculada pelo número de bits errôneos dividido pelo número total de bits transferidos durante um intervalo de tempo estudado e está diretamente relacionada à relação sinal-ruído do canal de comunicação. A ANATEL (Agência Nacional de Telecomunicações) especifica e homologa, para cada tipo de sistema, a taxa máxima aceitável de bits errados. De maneira geral, a BER de  $10^{-9}$  é considerada aceitável para telecomunicações. Porém, uma BER de  $10^{-13}$  é a mais apropriada para transmissão de dados.

A modulação QAM (*Quadrature Amplitude Modulation*) tem sido adotada para a transmissão de dados em sistemas de comunicações sem fio. Por exemplo, quando se utiliza a modulação 64-QAM permite-se enviar 6 bits por símbolo, enquanto, na modulação 16-QAM são enviados 4 bits por símbolo. Porém, nesse caso, é necessária uma melhor relação sinal ruído para possibilitar a sobreposição das interferências e manter uma determinada taxa de erro de bits.

A capacidade de um sistema digital está diretamente relacionada a eficiência espectral  $\eta = \frac{R_b}{BW} \left[ \frac{\text{bps}}{\text{Hz}} \right]$  (capacidade da modulação em transmitir informação dentro de uma largura de banda limitada) do esquema de modulação adotado. A modulação M-QAM apresenta eficiência espectral máxima (relação sinal ruído diferente de infinito) igual  $\eta = \frac{\log_2 M}{2} \left[ \frac{\text{bps}}{\text{Hz}} \right]$ .

Na literatura, existem diversos trabalhos sobre a avaliação das modulações M-QAM (*Mary - Quadrature Amplitude Modulation*). Alguns dos trabalhos avaliam apenas o efeito do ruído e outros avaliam também o desvanecimento. No artigo [4] é apresentado um novo método para a obtenção de expressões exatas para a probabilidade de erro de bit de esquemas de modulação sujeitos ao desvanecimento *Rayleigh*. Na monografia [5] é feita uma avaliação de desempenho da modulação M-QAM com constelação não quadrada cruzada submetida à presença de dois ruídos: gaussiano e impulsivo. O artigo [6] mostra um estudo da modulação 12 x 12-QAM em sistemas com canais corrompidos por ruído aditivo Gaussiano branco e desvanecimento *Rayleigh*. Em outra monografia [7], o autor apresenta um estudo da probabilidade de erro de símbolo da modulação TQAM no canal AWGN com desvanecimento *Rayleigh*.

Diante das considerações apresentadas, esse trabalho de conclusão de curso propõem um estudo do desempenho, probabilidade de erro de bit, da modulação M-QAM com constelações quadrada e não quadrada, no canal AWGN com desvanecimento *Rayleigh*. O objetivo principal, desse trabalho, será a avaliação da constelação M-QAM não quadrada no canal com desvanecimento *Rayleigh* porque não foi encontrado um estudo específico em relação a essa constelação. Para cumprir o objetivo proposto, foi preciso:

- I. Estudar da distribuição *Rayleigh*;
- II. Estudar, detalhadamente, o equacionamento da probabilidade de erro de bit da M-QAM quadrada com desvanecimento *Rayleigh*;
- III. Equacionar a probabilidade de erro de bit da M-QAM não quadrada com desvanecimento *Rayleigh*;
- IV. Avaliar, comparativamente, o desempenho desses tipos de constelações no canal ruidoso e com desvanecimento.

O restante desse trabalho está organizado da seguinte maneira: No Capítulo 2 é descrito o referencial teórico. O desenvolvimento da metodologia é apresentado no Capítulo 3. O Capítulo 4 apresenta a discussão dos resultados obtidos. E por fim, as conclusões são apresentadas no Capítulo 5.

## 2. REFERENCIAL TEÓRICO

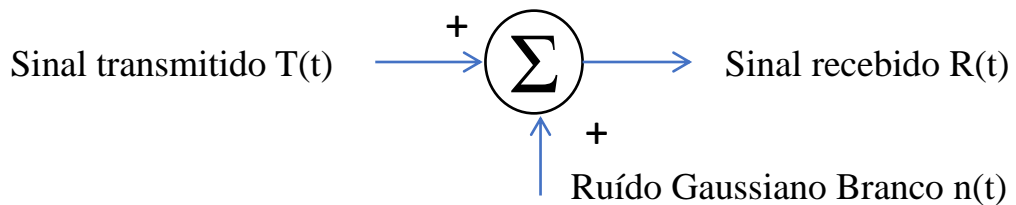
### 2.1 RUIDO BRANCO GAUSSIANO ADITIVO- AWGN

O termo ruído refere-se a qualquer sinal indesejável que perturbe o processamento de sinais e a transmissão em sistemas de comunicação [8]. O ruído sobrepõe o sinal, mascarando a informação e limitando a capacidade de detectar os símbolos corretamente no receptor.

O canal AWGN recebe esse nome devido ao ruído branco e gaussiano que é adicionado ao canal. O termo branco vem de uma analogia com luz branca, que contém teoricamente, todas as frequências com igual energia [8,9]. O ruído branco tem como característica a função densidade espectral de potência constante ao longo de uma extensa faixa de frequências.

O diagrama de blocos do modelo de canal AWGN, considerando um sistema sem atenuação, é ilustrado na Figura 2.1. O sinal transmitido no canal  $R(t)$  é igual ao sinal transmitido  $T(t)$ , saída do transmissor, mais o ruído  $n(t)$  adicionado pelo canal.

Figura 2.1- Diagrama de blocos do modelo de canal AWGN.



Fonte: A autora.

O ruído possui densidade espectral de potência expressa como uma função amostral [8,9], sendo:

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2} \quad (2.1)$$

Sabe-se que  $N_0$  é expresso em watts por Hertz [W/Hz] e é expressa da seguinte forma [8]:

$$N_0 = kT_c \quad (2.2)$$

Onde,

$k$  – constante de Boltzmann ( $k = 1,380649 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ );

$T_c$  – Temperatura equivalente do ruído no sistema receptor [K].

## 2.2 MODULAÇÃO DIGITAL

Modulação é o processo em que são modificadas uma ou mais características da onda portadora, que carrega uma informação no meio de propagação até um receptor [10]. A modulação é feita a partir da variação da fase, amplitude ou frequência da onda portadora. A informação é modificada e depois é recuperada. Há vários tipos de modulação entre os principais é possível citar [10]: ASK (*Amplitude Shift Keying*) consiste em variar a amplitude da onda portadora e a frequência da onda é mantida constante; FSK (*Frequency Shift Keying*) consiste em variar a frequência da onda portadora e a amplitude da onda é mantida constante; PSK (*Phase Shift Keying*) altera a fase da onda portadora em função do sinal a ser transmitido, e QAM é um tipo de modulação no qual os símbolos se diferenciam em fase e amplitude.

### 2.2.1 Sinal QAM

O sinal QAM, modulado em amplitude e fase, é definida como [11]:

$$s_i(t) = A_i \cos(2\pi f_c t + \theta_i), i = 1, 2, \dots, M \quad (2.3)$$

Onde,

$A_i$  – amplitude;

$f_c$  – frequência da portadora

$\theta_i$  – fase do  $i$ -ésimo sinal na modulação  $M$ -ary.

Para melhorar o espectro e controlar a ISI (*Intersymbol interference*) na QAM é utilizada a modelagem do pulso. O sinal QAM definido na Equação (2.3) é modelado pelo pulso conforme a Equação (2.4) [11].

$$s_i(t) = A_i p(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_i), i = 1, 2, \dots, M \quad (2.4)$$

Onde,  $p(t)$  é um pulso banda-base de forma apropriada. Nesse caso, tem-se  $p(t) = 1$ , em  $[0, T]$ . E, reescrevendo a Equação (2.4) é obtido o sinal QAM da Equação (2.5) [11].

$$s_i(t) = A_{i1} p(t) \cos(2\pi f_c t) + A_{i2} p(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (2.5)$$

Onde,  $A_{i1} = A_i \cos \theta_i$  e  $A_{i2} = A_i \sin \theta_i$ .

E, portanto, o módulo é definido como [11]:

$$A_i = \sqrt{(A_{i1})^2 + (A_{i2})^2} \quad (2.6)$$

A combinação linear de duas funções ortonormais é expressa na Equação (2.7) [11].



$$s_i(t) = s_{i1}\phi_1(t) + s_{i2}\phi_2(t) \quad (2.7)$$

Os termos  $s_{i1}$  e  $s_{i2}$  são definidos, respectivamente, da seguinte maneira:

$$s_{i1} = \sqrt{\frac{E_p}{2}} A_{i1} = \sqrt{\frac{E_p}{2}} A_{i1} \cos\theta_i \quad (2.8)$$

$$s_{i2} = \sqrt{\frac{E_p}{2}} A_{i2} = \sqrt{\frac{E_p}{2}} A_{i2} \sin\theta_i \quad (2.9)$$

E as funções base  $\phi_1$  e  $\phi_2(t)$  são:

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_p}} p(t) \cos(2\pi f_c t), 0 \leq t \leq T \quad (2.10)$$

$$\phi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{E_p}} p(t) \sin(2\pi f_c t), 0 \leq t \leq T \quad (2.11)$$

Para o pulso  $p(t)$  no intervalo de  $[0, T]$  [11], a energia é definida por  $E_p = \int_0^T p^2(t) dt$  [11]. O termo  $\sqrt{\frac{2}{E_p}}$  é normalizado para as bases  $\phi_1(t)$  e  $\phi_2(t)$  que são ortonormais para a condição  $f_c \gg \frac{1}{T}$  e, portanto:

$$\int_0^T \phi_1^2(t) dt = \frac{2}{E_p} \int_0^T p^2(t) \cos^2(2\pi f_c t) dt \quad (2.12)$$

$$\int_0^T \phi_1^2(t) dt = \frac{1}{E_p} \int_0^T p^2(t) [1 + \cos(4\pi f_c t)] dt \quad (2.13)$$

$$\int_0^T \phi_1^2(t) dt \cong 1, f_c \gg \frac{1}{T} \quad (2.14)$$

$$\int_0^T \phi_2^2(t) dt = -\frac{2}{E_p} \int_0^T p^2(t) \cos(2\pi f_c t) \cdot \sin(2\pi f_c t) dt \quad (2.15)$$

$$\int_0^T \phi_2^2(t) dt = -\frac{2}{E_p} \int_0^T p^2(t) \sin(4\pi f_c t) dt \quad (2.16)$$

$$\int_0^T \phi_2^2(t) dt \cong 0, f_c \gg \frac{1}{T} \quad (2.17)$$

Considerando  $p(t) = 1$  em  $[0, T]$ , a energia do pulso é  $E_p = T$  e a energia do  $i$ -ésimo sinal é definida na Equação (2.18) [11].

$$E_i = \int_0^T s_i^2(t) dt \cong \frac{1}{2} A_i^2 E_p \quad (2.18)$$

Retornando a Equação (2.7), a magnitude, a amplitude e a fase do sinal são definidas [11].

$$\|s_i\| = \sqrt{(s_{i1})^2 + (s_{i2})^2} = \sqrt{E_i} \quad (2.19)$$

$$A_i = \sqrt{\frac{2}{E_p}} \|s_i\| \quad (2.20)$$

$$\theta_i = \tan^{-1} \frac{s_{i2}}{s_{i1}} \quad (2.21)$$

E a distância entre um par de fasores é definida como [11]:

$$d_{ij} = \sqrt{|s_i - s_j|^2} = \sqrt{(s_{i1} - s_{j1})^2 + (s_{i2} - s_{j2})^2}, \quad i, j = 1, 2, \dots, M \quad (2.22)$$

Dependendo dos valores de  $(s_{i1}, s_{i2})$  ou  $(A_i, \theta_i)$  são criados os diversos tipos de constelações QAM.

### 2.2.2 Constelações

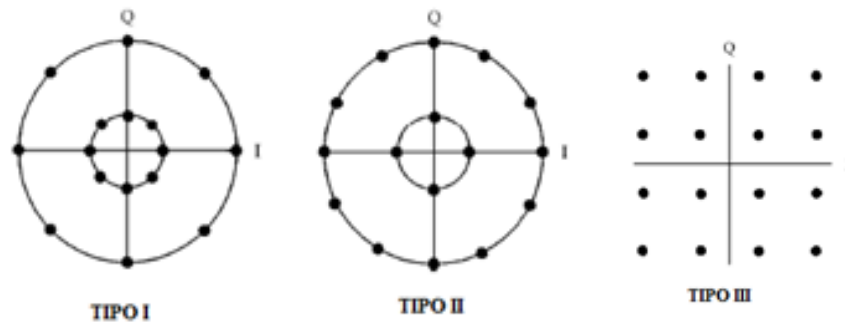
Em 1960, *C. R. Cahn* [12] propôs a constelação do tipo I, possuindo um número fixo de pontos igualmente espaçados em cada um dos  $N$  círculos ( $N$  – número de níveis de amplitudes). Depois de alguns meses *Hancock e Lucky* [13] propuseram a constelação do tipo II, composta por pontos do sinal em círculo onde o número de pontos no círculo interno é menor do que o número de pontos no círculo externo e a distância entre dois pontos adjacentes no círculo interno é aproximadamente igual à do círculo externo. Em 1962, *Campopiano e Glazer* [14] propuseram a constelação quadrada tipo III. Os três tipos de constelação são ilustrados na Figura 2.2.

Os principais requisitos de uma constelação QAM são [15]:

- i. Distância euclidiana mínima entre os pontos do sinal (fator). Deve ser o maior possível, pois determina a probabilidade de erro de símbolo do esquema de modulações;

- ii. Diferentes fases entre os fasores. Deve ser o maior possível, uma vez que determina a imunidade à variação do atraso de fase;
- iii. Potência média dos fasores. Deve ser menor possível em relação as outras constantes;
- iv. Relação entre a potência de pico e a média do fasor, que é a medida da robustez contra a distorção não linear causada pelo amplificador de potência, deve ser o um.

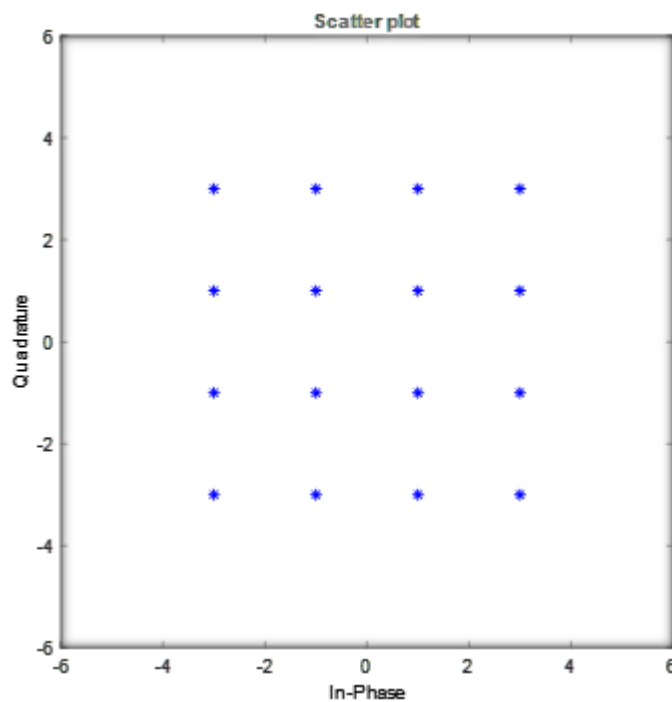
Figura 2.2 – Constelações dos tipos I, II e III.



Fonte: adaptada de [11].

Na Figura 2.3 é apresentada a constelação 16-QAM, as demais constelações geradas no MATLAB são apresentadas no Anexo I.

Figura 2.3 – Constelação 16-QAM.



Fonte: A autora.

A modulação é composta de fase (I - *In-phase*) e de quadratura (Q - *Quadrature*) e são ortogonais porque elas estão separadas de 90°. A fase é relativa ao sinal de referência, a portadora e a magnitude são o valor absoluto. A projeção do vetor sinal no eixo I é a componente “I” e a projeção no eixo Q é a componente “Q”. O vetor sinal é mapeado em um ponto discreto denominado de ponto da constelação e, ele também é descrito em coordenadas retangulares. As justificativas dessa representação são [15]:

- i. Metade dos bits é representada no eixo real e a outra metade é representada no eixo imaginário. Os sinais em fase e em quadratura são independentes;
- ii. Para decodificar o critério de decisão pode ser aplicado independente dos eixos real e imaginário. Assim, simplifica a implementação do receptor.

### 2.2.3 M-QAM Constelação Quadrada

A Equação (2.23) define os sinais M-QAM na constelação quadrada [11].

$$s_i(t) = I_i \sqrt{\frac{E_o}{E_p}} p(t) \cos(2\pi f_c t) - Q_i \sqrt{\frac{E_o}{E_p}} p(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (2.23)$$

$$s_i(t) = I_i \sqrt{\frac{E_o}{E_p}} \phi_1(t) + Q_i \sqrt{\frac{E_o}{E_p}} \phi_2(t) \quad (2.24)$$

Onde,  $E_o$  é a energia do sinal com a menor amplitude e os valores mínimos para o par definido  $(I_i, Q_i)$  do elemento da matriz  $L \times L$  são  $(\pm 1, \pm 1)$ . A matriz com dimensão  $L \times L$  possui L linhas e L colunas e é mostrada na Equação (2.18) [11].

$$[I_i, Q_i] = \begin{bmatrix} (-L+1, L-1) & \cdots & (L-1, L-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-L+1, -L+1) & \cdots & (L-1, -L+1) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Onde,  $L = \sqrt{M}$ ,  $M = 2^b$ ,  $b = 1, 2, \dots$ . Caso o número de bits por símbolo seja par, a constelação é chamada de quadrada (16-QAM, 64-QAM, 256-QAM, e outras). A matriz do 16-QAM,  $L = 4$ , é exemplificada abaixo.

$$[I_i, Q_i] = \begin{bmatrix} (-3, 3) & (-1, 3) & (1, 3) & (3, 3) \\ (-3, 1) & (-1, 1) & (1, 1) & (3, 1) \\ (-3, -1) & (-1, -1) & (1, -1) & (3, -1) \\ (-3, -3) & (-1, -3) & (1, -3) & (3, -3) \end{bmatrix}$$

A constelação pode ser expressa em termos de  $(I_i, Q_i)$  na forma fasorial seguindo a Equação (2.26) [11].

$$s_i = \left( I_i \sqrt{\frac{E_o}{2}}, Q_i \sqrt{\frac{E_o}{2}} \right) \quad i = 1, 1, \dots, M \quad (2.26)$$

Assim, a magnitude do fasor é expressa da seguinte maneira [11]:

$$\|s_i\| = \sqrt{\frac{E_o}{2} (I_i^2 + Q_i^2)} \quad (2.27)$$

A amplitude e a fase desse fasor são definidas nas Equações (2.28) e (2.29).

$$A_i = \sqrt{\frac{E_o}{E_p} (I_i^2 + Q_i^2)} = \sqrt{\frac{2}{E_p}} \|s_i\| \quad (2.28)$$

$$\theta_i = \tan^{-1} \frac{Q_i}{I_i} \quad (2.29)$$

A distância entre esses pares de fasores é definida como [11]:

$$d_{ij} = \sqrt{|s_i - s_j|^2} = \sqrt{(I_i - I_j)^2 + (Q_i - Q_j)^2}, \quad i, j = 1, 2, \dots, M \quad (2.30)$$

É possível calcular a energia e a potência média utilizando as Equações (2.31) e (2.32), respectivamente.

$$\overline{E_{média}} = E \left\{ \frac{E_o}{2} (I_i^2 + Q_i^2) \right\} = \frac{E_o}{2} [E\{I_i^2\} + E\{Q_i^2\}] = E_o E\{I_i^2\} \quad (2.31)$$

$$\overline{P_{média}} = \frac{E_o}{T} E\{I_i^2\} \quad (2.32)$$

Para as constelações quadradas ( $L \times L$ ) QAM tem-se a seguinte definição [11]:

$$E\{I_i^2\} = \frac{1}{3} (L^2 - 1) = \frac{1}{3} (M - 1) \quad (2.33)$$

Conforme mostrado em [11], a Equação (2.34) é a equação mais utilizada para determinar a probabilidade de erro de bit da  $M$ -ary QAM com constelação quadrada.

$$P_b(QAM) \cong 4 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) Q \left( \sqrt{\frac{3 \log_2 M E_b}{(M - 1) N_0}} \right) \quad (2.34)$$

Onde,

$M$  – número de símbolos;

$E_b$  – energia do símbolo;

$N_0$  – Densidade Espectral de Potência (PSD) do AWGN;

$Q$  – função  $Q$  com valores tabulados definida como  $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) d\lambda$

### 2.3.4 M-QAM Constelação Não quadrada

No trabalho [15] foi apresentado um estudo da constelação não quadrada cruzada. A Figura (2.4) ilustra o 128-QAM constelação não quadrada cruzada, na configuração apresentada, em azul o ponto sinalizado apresenta dois vizinhos, em verde o ponto sinalizado possui três vizinhos e em laranja, quatro vizinhos.

O alfabeto da constelação é formado conforme a Equação (2.35) [15].

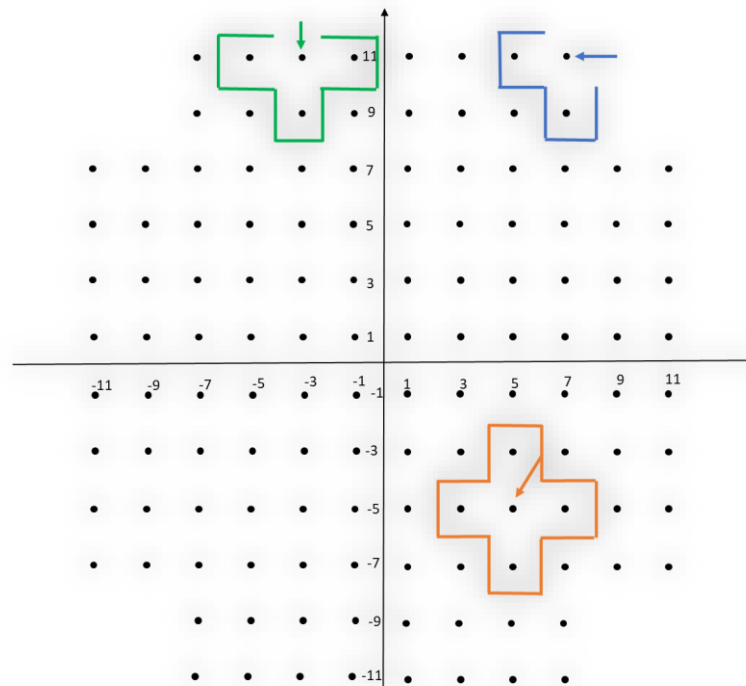
$$\gamma_{M-QAM} = \{\mp(2m-1) \mp j(2m-1)\} \quad m \in \left\{1, \dots, \frac{3}{4} \sqrt{\frac{M}{2}}\right\} \quad (2.35)$$

Para que seja compreendida a diferença entre as constelações quadrada e não quadrada observe o exemplo do sistema 128-QAM ( $M = 128$  e  $b = 7$ ). A constelação é formada pelo conjunto de  $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e o alfabeto correspondente é apresentado a seguir.

$$[I_i, Q_i] = \begin{bmatrix} \pm 11 \pm j 11 & \pm 11 \pm j 9 & \pm 11 \pm j 7 & \pm 11 \pm j 5 & \pm 11 \pm j 3 & \pm 11 \pm j 1 \\ \pm 9 \pm j 11 & \pm 9 \pm j 9 & \pm 9 \pm j 7 & \pm 9 \pm j 5 & \pm 9 \pm j 3 & \pm 9 \pm j 1 \\ \pm 7 \pm j 11 & \pm 7 \pm j 9 & \pm 7 \pm j 7 & \pm 7 \pm j 5 & \pm 7 \pm j 3 & \pm 7 \pm j 1 \\ \pm 5 \pm j 11 & \pm 5 \pm j 9 & \pm 5 \pm j 7 & \pm 5 \pm j 5 & \pm 5 \pm j 3 & \pm 5 \pm j 1 \\ \pm 3 \pm j 11 & \pm 3 \pm j 9 & \pm 3 \pm j 7 & \pm 3 \pm j 5 & \pm 3 \pm j 3 & \pm 3 \pm j 1 \\ \pm 1 \pm j 11 & \pm 1 \pm j 9 & \pm 1 \pm j 7 & \pm 1 \pm j 5 & \pm 1 \pm j 3 & \pm 1 \pm j 1 \end{bmatrix}$$

Os termos assinalados em vermelho não pertencem a constelação 128-QAM

Figura 2.4 – Constelação 128-QAM não quadrada cruzada.



Fonte: A autora.

A soma das energias dos termos individuais do alfabeto é mostrada na Equação (2.36) [15].

$$E_1 = \sum_{m=1}^{\frac{3}{4}\sqrt{\frac{M}{2}}} |(2m-1) + j(2m-1)|^2 \quad (2.36)$$

Desenvolvendo a equação acima foi obtido a energia dos termos do alfabeto  $E_1$  como mostrado na Equação (2.37) [15].

$$E_1 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{M}{2}} \right) \left( \frac{9M}{8} - 1 \right) \quad (2.37)$$

Na constelação cruzada observe que cada termo do alfabeto repete  $\left( 3\sqrt{\frac{M}{2}} \right)$  vezes.

Portanto, a energia total da constelação quadrada cruzada é definida na Equação (2.38) [15].

$$E_1 = \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{M}{2}} \right) \left( \frac{9M}{8} - 1 \right) \right] \cdot 3\sqrt{\frac{M}{2}} = \frac{3M}{4} \left( \frac{9M}{8} - 1 \right) \quad (2.38)$$

No exemplo, constelação 128-QAM, alguns termos do alfabeto estão destacados na cor vermelha que não pertencem à constelação ilustrada na constelação. A energia  $E_2$ , dos termos não pertencentes a constelação, é definida na Equação (2.39) [15].

$$E_2 = 2 \sum_{m=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{2}}+1}^{\frac{3}{4}\sqrt{\frac{M}{2}}} (2m-1)^2 = \frac{13}{4}M + 4 - 2\sqrt{\frac{M}{2}} \quad (2.39)$$

Os termos não pertencentes à constelação repetem  $\left( \sqrt{\frac{M}{2}} \right)$  vezes e a energia dos símbolos é mostrada na Equação (2.40) normalizada.

$$E_2 = 2 \sum_{m=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{2}}+1}^{\frac{3}{4}\sqrt{\frac{M}{2}}} (2m-1)^2 = \frac{M}{128} \left[ (26M + 32) - M\sqrt{\frac{128}{M}} \right] \quad (2.40)$$

A energia média da constelação não quadrada cruzada é a diferença entre a energia de todos os termos e a energia dos termos não pertencentes à constelação 128-QAM. Esta diferença é dividida pelo número total de símbolos.

$$\overline{E_{M-QAM(Cruz)}} = \frac{E_1 - E_2}{M} = \frac{1}{128} \left( 82M + M \sqrt{\frac{128}{M}} - 128 \right) \quad (2.41)$$

Ao substituir na Equação (2.41) os valores  $M = 32, 128$  e  $512$ , os resultados das energias são:  $\overline{E_{32-QAM}} = 20$  Joules,  $\overline{E_{128-QAM}} = 82$  Joules e  $\overline{E_{512-QAM}} = 330$  Joules. Esses valores obtidos devem ser normalizados pelo fator de escala  $k$  conforme mostrado na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Fator de escala para a constelação QAM não quadrada cruzada.

Constelação	Fator de escala $k = \sqrt{\frac{1}{\overline{E_{M-QAM}}}}$
<b>32-QAM</b>	$1/\sqrt{20}$
<b>128-QAM</b>	$1/\sqrt{82}$
<b>512-QAM</b>	$1/\sqrt{330}$

Fonte: [15].

Como ilustrado na Figura 2.4, os símbolos são classificados em três categorias que são apresentados na Tabela 2.2 [15].

Tabela 2.2 – Número de vizinhos adjacentes.

	$S_2$	$S_3$	$S_4$
QAM cruzada	8	$3\sqrt{2M} - 16$	$M - 3\sqrt{2M} + 8$

Fonte: [15].

Para calcular a probabilidade de erro de bit da constelação cruzada é recomendado o uso da Equação (2.42) [15].

$$P_b(QAMcruz) = \left( 2 - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{M}} \right) \operatorname{erfc} \left( k \sqrt{\log_2 M \frac{E_b}{N_0}} \right) - \left( 1 + \frac{2}{M} - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{M}} \right) \operatorname{erfc}^2 \left( k \sqrt{\log_2 M \frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (2.42)$$

### 2.3.4 Taxa de Erro de Bit - BER

A probabilidade de erro de bit dependerá do mapeamento símbolo  $\rightarrow$  bit. No caso em que se utiliza o mapeamento Gray, e tem-se altos valores de  $\frac{E_b}{N_0}$  tem-se a seguinte aproximação  $BER \cong \frac{P_b}{2}$ . Conhecendo a probabilidade de erro de um canal de comunicação e o tipo de



modulação, pode-se determinar a BER. Portanto, as Equações (2.34) e (2.42) podem ser reescritas como:

$$BER(QAM) \cong 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q \left( \sqrt{\frac{3 \log_2 M E_b}{(M-1) N_0}} \right) \quad (2.43)$$

$$BER(QAM_{cruz}) = \frac{\left(2 - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{M}}\right)}{2} \operatorname{erfc} \left( k \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) - \frac{\left(1 + \frac{2}{M} - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{M}}\right)}{2} \operatorname{erfc}^2 \left( k \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (2.44)$$

Além disso, essas Equações (2.34) e (2.42) também podem ser escritas em função da probabilidade de erro de símbolo. Para isso, considera-se  $E_s = E_b \cdot \log_2 M$  tem-se:

$$P_s(QAM) \cong 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q \left( \sqrt{\frac{3 E_s}{(M-1) N_0}} \right) \quad (2.45)$$

$$P_s(QAM_{cruz}) = \left(2 - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{M}}\right) \operatorname{erfc} \left( k \sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \right) - \left(1 + \frac{2}{M} - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{M}}\right) \operatorname{erfc}^2 \left( k \sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \right) \quad (2.46)$$

## 2.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse item foram apresentados os principais conceitos e o desenvolvimento dos equacionamentos da modulação M-QAM. O objetivo é compreender o desenvolvimento matemático descrito na literatura.

### 3. DESENVOLVIMENTO

Nesse capítulo é desenvolvido um cenário com a presença de desvanecimento e, para isso, utiliza-se a distribuição de *Rayleigh* para redefinir a relação sinal ruído. E as constelações da modulação M-QAM, apresentadas no capítulo anterior, são desenvolvidas para atender a essa nova relação sinal ruído.

#### 3.1 DESVANECIMENTO

O comportamento conhecido por desvanecimento é quando a propagação de um sinal no canal tem suas características variando continuamente no tempo. Observa-se que no destino, o nível do sinal recebido também varia no tempo, mesmo que, no emissor, a potência transmitida permaneça constante [19].

Em função da frequência do sinal, o desvanecimento é classificado em seletivo e não-seletivo.

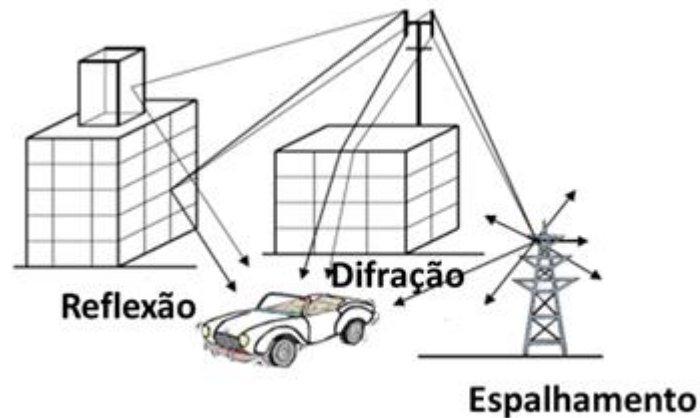
- Desvanecimento seletivo: o fenômeno manifesta-se somente em algumas frequências ou faixas de frequências que compõe o sinal.
- Desvanecimento não-seletivo ou plano: o fenômeno manifesta-se em toda a faixa de frequência ocupada pelo sinal.

A outra classificação que se refere à variação do sinal recebido ao longo do tempo, em larga escala e em pequena escala [19].

- Desvanecimento de larga escala (longo prazo, lento ou sombreamento): ocorre devido às perdas de propagação em função da distância e do sombreamento provocado por pelas obstruções naturais (relevo e vegetação) e construções, como casas e edifícios. Nesse caso, a amplitude do sinal recebido apresenta flutuações lentas. A sua avaliação é feita em termos de uma grande distância entre o transmissor e o receptor
- Desvanecimento de pequena escala (curto prazo, rápido): ocorre devido a interferências construtiva e destrutiva provocada pelos múltiplos percursos entre transmissor e receptor. A sua avaliação é feita em termos de uma curta distância entre o transmissor e o receptor, da ordem do comprimento da onda portadora, e é dependente da frequência. As atenuações duram curtos períodos, desde frações de segundo até minutos

A Figura 3.1 ilustra alguns mecanismos básicos que impactam na propagação do sinal em um sistema de comunicação móvel.

Figura 3.1 – Desvanecimento lento e rápido.



Fonte: A autora.

É muito difícil realizar uma transmissão de altas taxas em um ambiente de comunicação móvel com propagação por múltiplos percursos.

### 3.2 DISTRIBUIÇÃO DE *RAYLEIGH*

O desvanecimento rápido, representado por rápidas flutuações de sinal em pequenas áreas, é ocasionado pela adição alternada em forma construtiva e destrutiva das componentes de multipercurso no deslocamento do terminal móvel. Esse efeito multipercurso é agravado no ambiente dinâmico. A distância entre dois sucessivos desvanecimentos rápidos máximos ou mínimos é de aproximadamente meio comprimento de onda. Fisicamente, a distribuição de *Rayleigh* ajusta-se a ambientes de propagação homogêneos, onde se tem elevado número de ondas originadas de multipercursos e sem linha de visada (NLOS – *Non Line Of Sight*). As inúmeras componentes de multipercursos têm suas fases distribuídas no intervalo de 0 a  $2\pi$ , amplitudes mutuamente independentes e sem destaque para nenhuma delas. Para esse ambiente, a envoltória  $R$  do sinal recebido é expressa por componentes em fase e quadratura como [19]:

$$\tilde{r}(t) = r_I(t) + jr_Q(t) \quad (3.1)$$

onde,  $r_I(t)$  e  $r_Q(t)$  são processos gaussianos independentes e apresentam média nula  $E(r_Q) = E(r_I) = 0$ , e as variâncias iguais  $E(r_I^2) = E(r_Q^2) = \sigma_r^2$  [11; 19]. Então, a envoltória do sinal  $z(t) = |\tilde{r}(t)|$  segue a distribuição de *Rayleigh* e a sua Função Densidade de Probabilidade (PDF – *Probability Density Function*) é definida conforme a Equação (3.1) [11, 19].

$$p(z) = \begin{cases} \frac{z}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) & 0 \leq z \leq \infty \\ 0 & z < 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Onde,

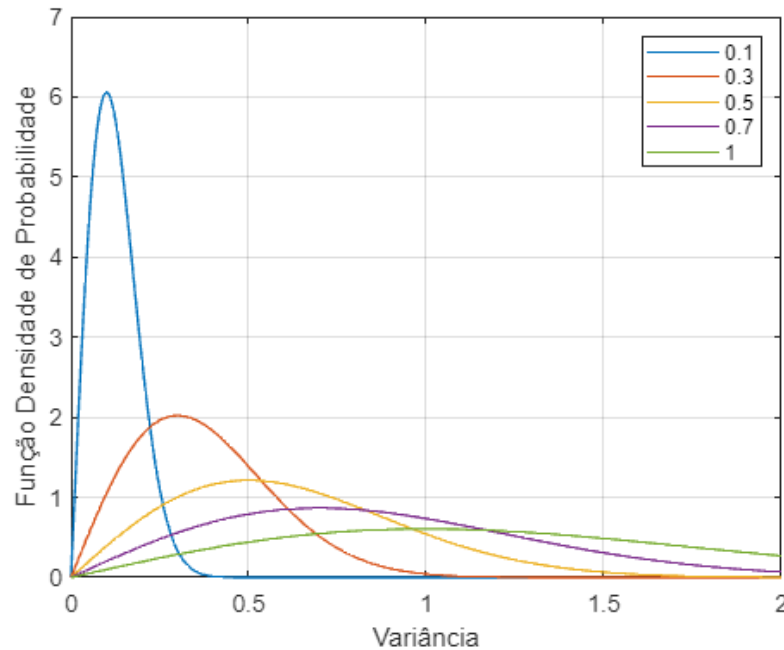
$z$  – envoltória (tensão) do sinal recebido;

$\sigma^2$  – média temporal da potência do sinal antes da detecção do envelope;

$\frac{z^2}{2}$  – potência média do sinal em desvanecimento de pequena escala.

A Figura 3.2 ilustra o gráfico da PDF considerando diversos valores de variância. Analisando o gráfico foi observado que a PDF,  $p(z)$ , assume o valor máximo quando  $z = \sigma$ .

Figura 3.2 – PDF da distribuição de *Rayleigh*.



Fonte: A autora.

E a Função Distribuição Acumulada (CDF – *Cumulative Distribution Function*) da distribuição é mostrada na Equação (3.3) [19].

$$F(z) = 1 - \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right), r \geq 0 \quad (3.3)$$

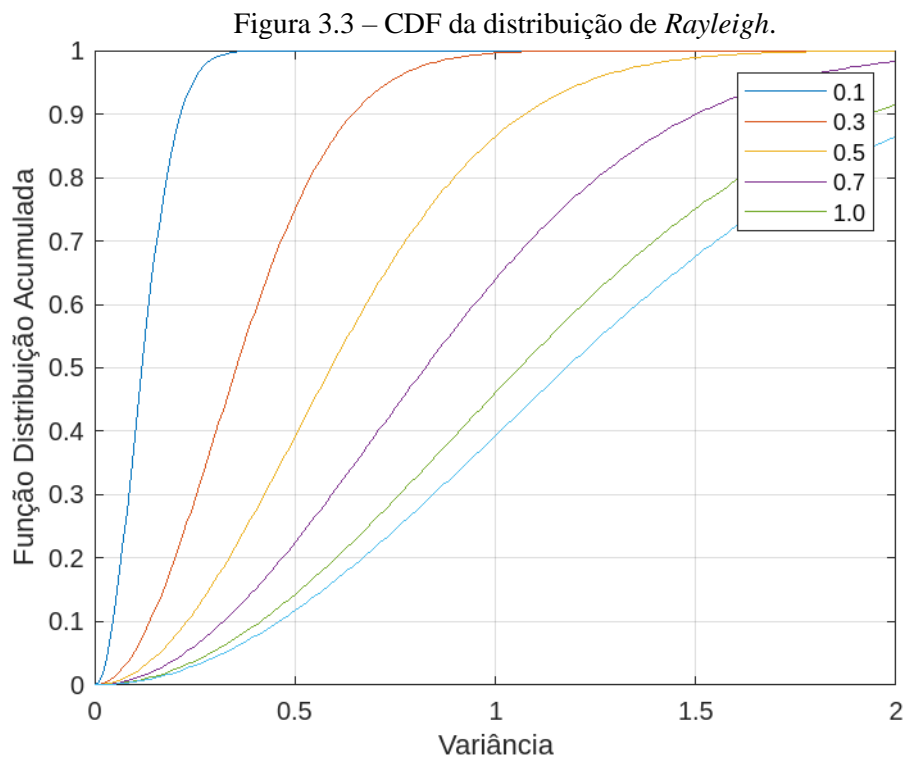
No caso de envoltória normalizada, a Função Distribuição Acumulada pode ser obtida utilizando-se a definição de que CDF é igual à integral da PDF [19]. A Figura 3.3 ilustra o gráfico da CDF considerando diversos valores de variância

O valor médio da distribuição é mostrado na Equação (3.4) [11; 20].

$$E\{z\} = \int_0^{\infty} z \cdot p(z) dz = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1,2533\sigma \quad (3.4)$$

E a variância que representa a potência AC da envoltória do sinal é dada pela Equação 3.5 [11; 20].

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= E\{z^2\} - E^2\{z\} \\ &= \int_0^{\infty} z^2 \cdot p(z) dz - \sigma^2 \frac{\pi}{2} = \left(2\sigma^2 - \frac{\pi}{2}\sigma^2\right) = \sigma^2 \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0,4292\sigma^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$



No canal com desvanecimento plano, o sinal sofre uma variação multiplicativa. Em geral, esse fator multiplicativo é complexo ocorrendo na amplitude na fase do sinal. Assumindo que o desvanecimento é lento, a atenuação de amplitude e o deslocamento de fase do sinal recebido podem ser considerados constante ao longo de pelo menos uma duração de símbolo. Portanto, se o sinal transmitido equivale ao sinal complexo passa-baixa  $\tilde{s}(t)$ , o recebido equivale ao sinal complexo passa-baixa descrito na Equação (3.6) [11].

$$\tilde{r}(t) = z e^{-j\phi} \tilde{s}(t) + \tilde{n}(t) \quad (3.6)$$

Onde,

$z$  – amplitude do sinal (assumindo que  $\tilde{s}(t)$  tem uma amplitude unitária);

$\phi$  – deslocamento de fase do sinal causado pelo canal;

$\tilde{n}(t)$  – sinal equivalente ao ruído Gaussiano.

O sinal recebido, definido em (3.6), pode ser detectado coerentemente ou não, e isso, depende se é possível estimar com precisão a mudança de fase. Nos dois casos, a probabilidade de erro média considera a média da probabilidade de erro para uma amplitude fixa  $z$  em todo o intervalo de  $z$  conforme a Equação (3.7) [11; 21].

$$P_b(\text{Rayleigh}) = \int_0^{\infty} P_b(\gamma_b) p(\gamma_b) d\gamma_b \quad (3.7)$$

Onde,

$P_b(\gamma_b)$  – probabilidade de erro de bit condicionada em um  $\gamma_b$  fixo,

$p(\gamma_b)$  – densidade de probabilidade função de  $\gamma_b$ .

E,  $\gamma_b$  é a relação sinal-ruído com desvanecimento para um valor particular de  $z$  [11].

$$\gamma_b = z^2 \frac{E_b}{N_0}$$

### 3.3 CANAL DE DESVANECIMENTO RAYLEIGH

Para esse canal,  $z$  tem a distribuição de *Rayleigh*, então  $z^2$  e  $\gamma_b$  têm uma distribuição qui-quadrada, distribuição de amostragem associada à inferência sobre a variância, com dois graus de liberdade definida na Equação (3.8) [11].

$$p(\gamma_b) = \frac{1}{\Gamma} \exp\left(-\frac{\gamma_b}{\Gamma}\right) \quad (3.8)$$

Onde, o valor médio da relação sinal ruído é definida como [11]:

$$\Gamma = E\{z^2\} \frac{E_b}{N_0} = 2\sigma^2 \frac{E_b}{N_0}$$

De forma geral, tem-se a expressão de probabilidade de erro da modulação específica no canal AWGN definida na Equação (3.9) [11].

$$P_b(\text{QAM}) = C \exp\left(-\frac{\delta E_b}{N_0}\right) = C Q\left(\sqrt{\frac{\delta E_b}{N_0}}\right) \quad (3.9)$$

Onde,  $C$  e  $\delta$  são constantes.

No cenário de desvanecimento, a relação sinal-ruído dos sistemas de transmissão digital é dada por  $\gamma_b = z^2 \frac{E_b}{N_0}$ . Consequentemente, a Equação (3.9) trona-se a Equação (3.10) [11].

$$P_b(\gamma_b) = C \exp(-\delta\gamma_b) = C Q(\sqrt{\delta\gamma_b}) \quad (3.10)$$

Substituindo (3.10) e (3.8) em (3.7), obtém-se a Equação (3.11), probabilidade de erro de símbolo ou bit da modulação no canal Rayleigh. [11]:

$$P_b(\text{Rayleigh}) = \int_0^{\infty} C Q(\sqrt{\delta\gamma_b}) \frac{1}{\Gamma} \exp\left(-\frac{\gamma_b}{\Gamma}\right) d\gamma_b \quad (3.11)$$

Para a função  $Q$ , o termo  $P_e(\gamma_b)$  é calculado usando duas expressões.

A primeira é a relação entre a função de erro e a função  $Q$ , Equação (3.12), e a segunda é da tabela integral, Equação (3.13) [11].

$$1 - \text{erf}(x) = 2Q(\sqrt{2}x) \quad (3.12)$$

$$\int_0^{\infty} [1 - \text{erf}(\beta x)] \exp(\mu x^2) \cdot x dx = \frac{1}{2\mu} \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\mu + \beta^2}}\right) \quad (3.13)$$

Considerando uma variável  $\gamma_b = x^2$ , e fazendo algumas substituições a Equação (3.11) é reescrita na forma [11]:

$$P_b(\text{Rayleigh}) = \int_0^{\infty} \frac{C}{\Gamma} \left[1 - \text{erf}\left(\sqrt{\frac{\delta}{2}}x\right)\right] \exp\left(-\frac{x^2}{\Gamma}\right) \cdot x dx \quad (3.14)$$

Considerando  $\sqrt{\frac{\delta}{2}} = \beta$  e  $\frac{1}{\Gamma} = \mu$  em (3.13) tem-se a probabilidade de erro de bit ou símbolo no canal de desvanecimento *Rayleigh* lento e plano, Equação (3.15) [11].

$$P_b(\text{Rayleigh}) = \frac{C}{2} \left[1 - \sqrt{\frac{\delta\Gamma}{2 + \delta\Gamma}}\right] \quad (3.15)$$

### 3.4 EQUACIONAMENTO DA M-QAM QUADRADA COM RUÍDO E DESVANECIMENTO

Observando a equação da probabilidade de erro de bit da  $M$ -ary QAM constelação quadrada no canal com ruído, apresentada em (2.34), foram feitas as seguintes considerações:  $C = 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) e \delta = \frac{3 \log_2 M}{M-1}$ . E aplicando essas considerações aplicada em (3.15), resulta na Equação (3.16) [11].

$$P_{b(QAM)}(Rayleigh) = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) \left[1 - \sqrt{\frac{3\Gamma \log_2 M}{2(M-1) + 3\Gamma \log_2 M}}\right] \quad (3.16)$$

Recordando que  $\Gamma = E\{z^2\} \frac{E_b}{N_0}$ .

### 3.5 EQUACIONAMENTO DA M-QAM NÃO QUADRADA COM RUÍDO E DESVANECIMENTO

Utilizando o raciocínio desenvolvido nas seções anteriores tem-se probabilidade de erro de bit condicionada em um  $\gamma_b$  fixo na Equação (3.17).

$$P_b(\gamma_b) = \left[ \left(2 - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{M}}\right) \operatorname{erfc}(k\sqrt{\log_2 M \gamma_b}) - \left(1 + \frac{2}{M} - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{M}}\right) \operatorname{erfc}^2(k\sqrt{\log_2 M \gamma_b}) \right] \quad (3.17)$$

O segundo termo da expressão (3.17) pode ser desprezado porque não tem influência significativa no resultado. Então, de forma geral, a expressão de probabilidade de erro da modulação específica no canal *Rayleigh* é reescrita como:

$$P_b(\gamma_b) \approx A \operatorname{erfc}(\sqrt{k^2 \delta \gamma_b}) \quad (3.18)$$

Onde,  $A$  e  $\delta$  são constantes. Nesse caso,  $A = 2 - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{M}}$ , e  $\delta = \log_2 M$ .

Substituindo (3.18) e (3.8) em (3.7), obtém-se a Equação (3.19), probabilidade de erro de símbolo ou bit da modulação no canal *Rayleigh*.

$$P_b(Rayleigh) = \int_0^\infty \left[ A \operatorname{erfc}(\sqrt{k^2 \delta \gamma_b}) \right] \frac{1}{\Gamma} \exp\left(-\frac{\gamma_b}{\Gamma}\right) \gamma_b d\gamma_b \quad (3.19)$$

Reorganizando a (3.19), tem-se:



$$P_b(Rayleigh) = \frac{A}{\Gamma} \int_0^{\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{k^2 \delta \gamma_b}\right) \exp\left(-\frac{\gamma_b}{\Gamma}\right) \gamma_b d\gamma_b \quad (3.20)$$

Utilizando a mesma igualdade apresenta em (3.15), tem-se:

$$P_b(Rayleigh) = \frac{A}{2} \left[ 1 - \sqrt{\frac{\delta \Gamma}{2 + \delta \Gamma}} \right] \quad (3.21)$$

Fazendo as devidas substituições  $\left( A = 2 - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{M}}, \delta = \log_2 M, \Gamma = 2\sigma^2 \frac{E_b}{N_0} \right)$  encontra-se a probabilidade de erro de bit da modulação M-QAM com constelação cruzada no canal *Rayleigh*, Equação (3.22).

$$P_{b(QAM-cruz)}(Rayleigh) \approx \left( 2 - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{M}} \right) \left[ 1 - \sqrt{\frac{6 \log_2 M \sigma^2 \frac{E_b}{N_0}}{2(M-1) + 6 \log_2 M \sigma^2 \frac{E_b}{N_0}}} \right] \quad (3.22)$$

### 3.6 PARÂMETROS AVALIATIVOS

O principal parâmetro avaliativo para análise das modulações é a probabilidade de erro de bit ou símbolo. E, também, utiliza-se a taxa de erro de bit. A avaliação será estendida para análise do parâmetro  $\Gamma = E\{z^2\} \frac{E_b}{N_0}$ . O gamma, que representa o fenômeno de desvanecimento do canal, relaciona-se com a variância  $E\{z^2\} = 2\sigma^2$ . A análise da variância foi ilustrada na Figura 3.2. Lembrando que, quanto menor é a variância, mais próximos os valores estão da média; mas quanto maior ela é, mais os valores estão distantes da média. E para realizar as análises das equações desenvolvidas foram utilizados os códigos (Anexo II) no MATLAB.

### 3.7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse item foi apresentado o conceito de desvanecimento com destaque para o desvanecimento plano modelado pelo modelo estocástico de *Rayleigh*. Esse modelo foi aplicado, por desenvolvimento matemático, nas equações da probabilidade de erro de bit da modulação M-QAM.

## 4. RESULTADOS OBTIDOS

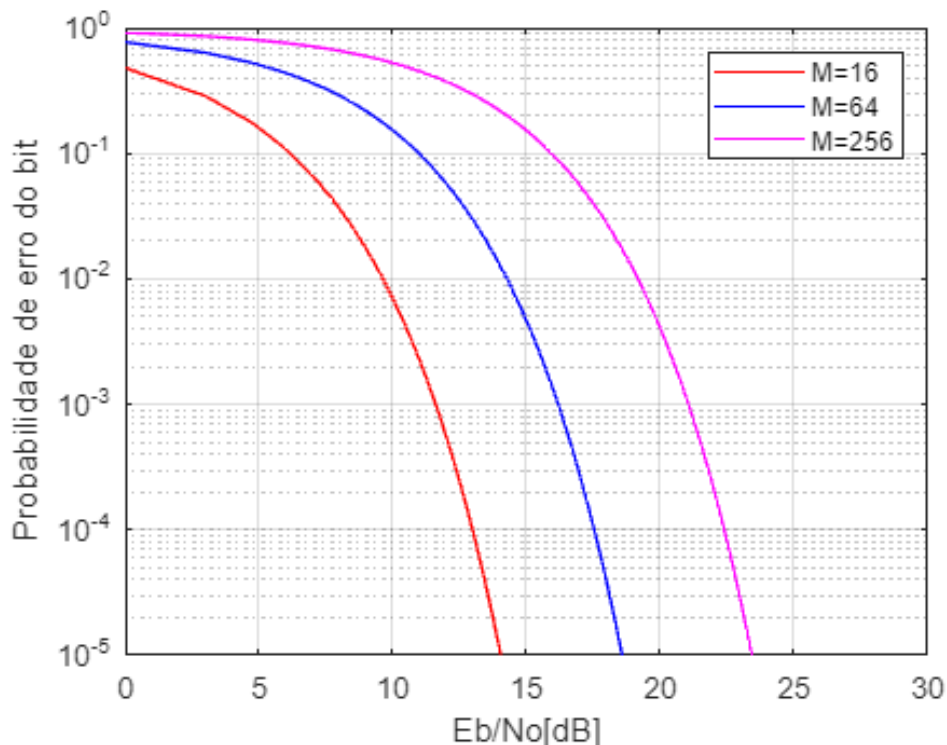
Nesse Capítulo são apresentados os resultados obtidos da simulação das equações das duas modulações descritas no canal AWGN com desvanecimento *Rayleigh*. Além disso, esses resultados são interpretados e discutidos para o entendimento desse trabalho de conclusão de curso.

### 4.1 PROBABILIDADE DE ERRO DE BIT NO CANAL AWGN

A análise inicial é feita para o canal com a presença de ruído que será utilizada como base para a avaliação do efeito do desvanecimento plano e lento.

A Figura 4.1 ilustra o gráfico da probabilidade de erro de bit da M-QAM com constelação quadrada. Os resultados obtidos são referentes a Equação (2.34) variando o valor de M em 16, 64 e 256.

Figura 4.1 – Probabilidade de erro de bit da M-QAM constelação quadrada no canal AWGN.

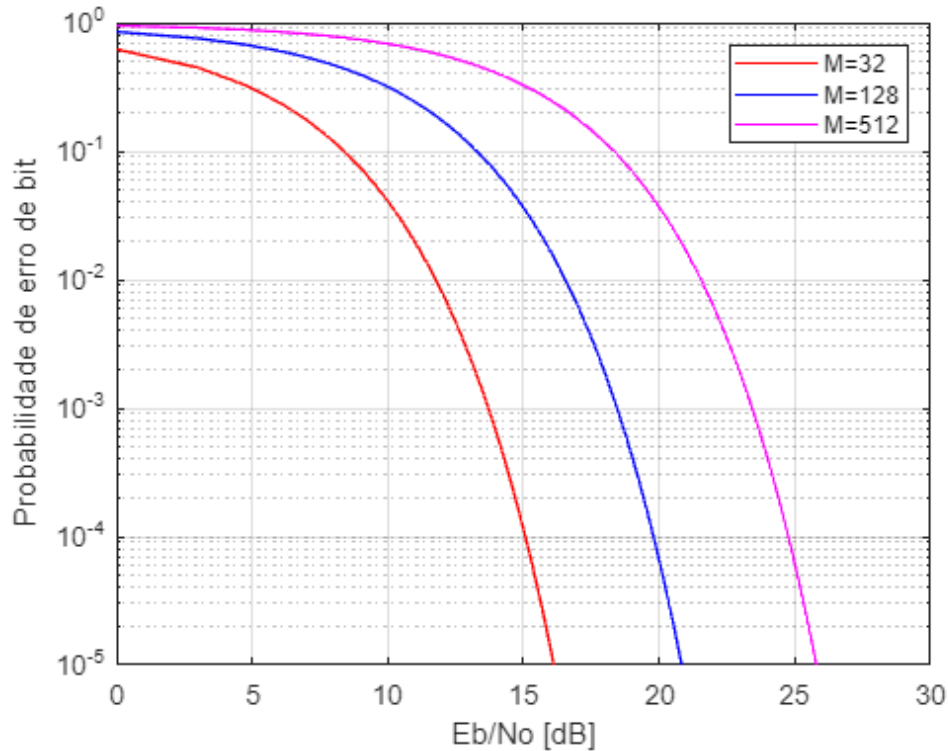


Fonte: A autora.

Observe que para manter a probabilidade de erro de símbolo houve um acréscimo de aproximadamente 6 dB (13,1; 18,57; 23,40) na relação sinal ruído entre os valores de M.

A Figura 4.2 ilustra o gráfico da probabilidade de erro de símbolo da M-QAM com constelação não quadrada cruzada. Os resultados obtidos são referentes a Equação (2.43) variando o valor de M em 32, 128 e 512.

Figura 4.2 – Probabilidade de erro de bit da M-QAM constelação não quadrada no canal AWGN.



Fonte: A autora.

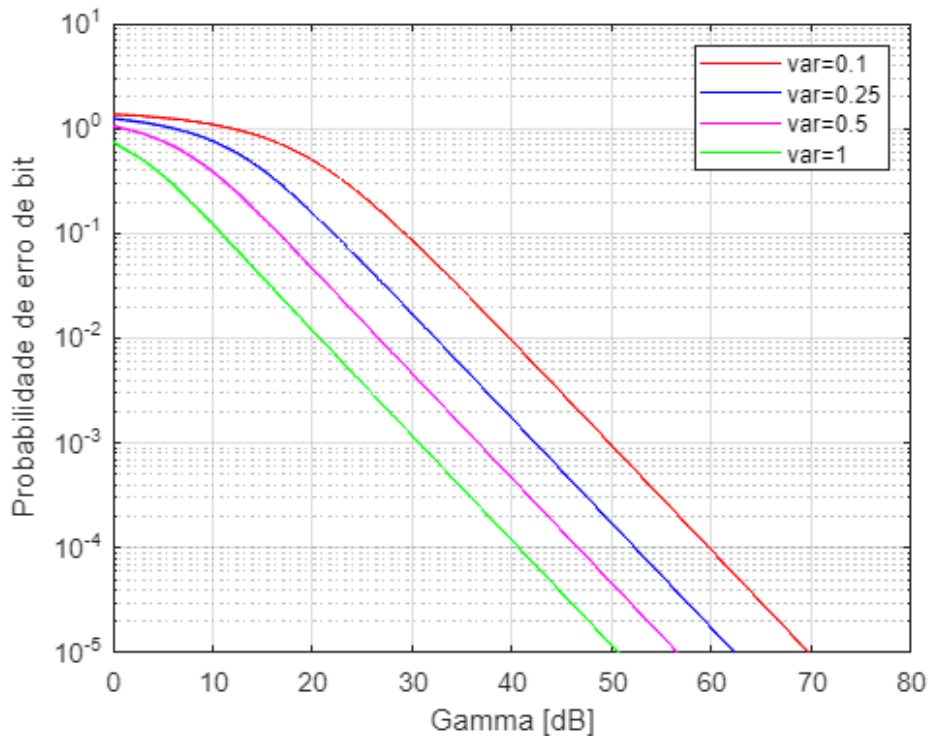
Para manter a probabilidade de erro de símbolo foi observado os seguintes valores de relação sinal ruído (15,9; 20,95; 25,78) entre os valores de M. A 16-QAM tem 13,1 dB enquanto a 32-QAM tem 15,9 dB, ou seja, o acréscimo de um bit por símbolo na modulação leva ao acréscimo de aproximadamente 3 dB na relação sinal ruído.

## 4.2 ANÁLISE DA VARIÂNCIA

Para compreender melhor o fenômeno de desvanecimento plano no canal avaliou-se diversos valores de variância (0,1; 0,25; 0,5 e 1) nas Equações (3.16) e (3.22) para  $M = 16$  e 32, respectivamente. O objetivo é compreender a correspondência entre a variância e a probabilidade de erro. Para um valor menor de variância torna-se necessário o aumento da relação sinal ruído para manter a probabilidade de erro de bit.

A Figura 4.3 ilustra o gráfico da 16-QAM com o parâmetro variância e os valores encontrados para a  $BEP = 10^{-5}$  foram, respectivamente, 69,72 dB; 62,1 dB; 56,3 dB e 50,1 dB.

Figura 4.3 – Probabilidade de erro de bit da 16-QAM com diversos valores de variância.



Fonte: A autora.

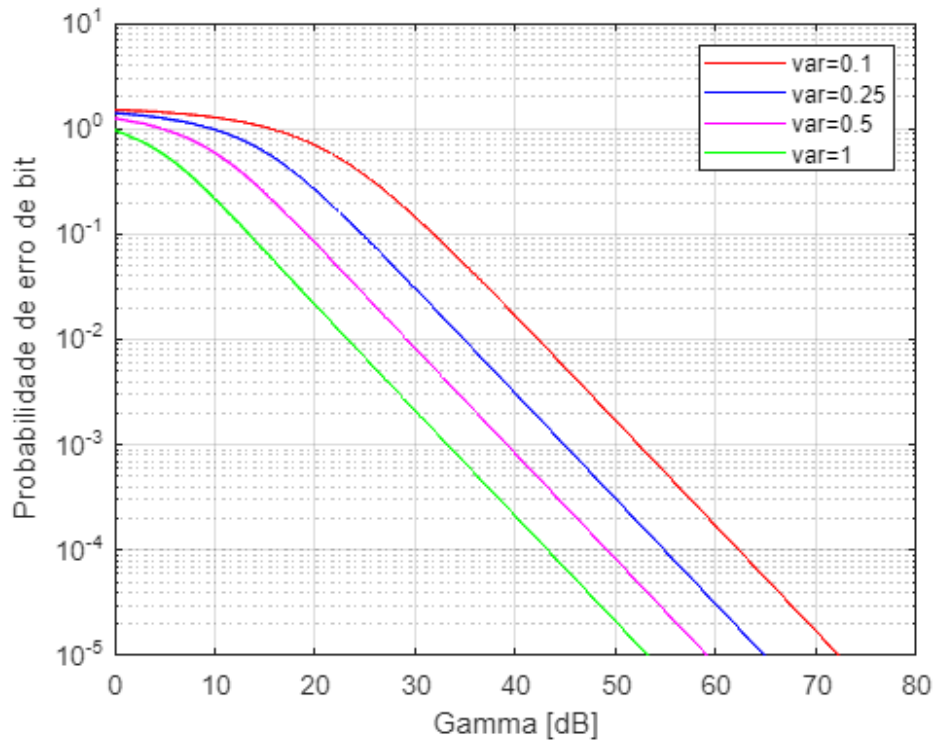
Fazendo uma análise em relação a variação do parâmetro variância houve um aumento significativo na relação sinal ruído necessária para manter a probabilidade de erro de bit. A 16-QAM com variância de 0,2 necessita de 63,69 dB, enquanto, com variância de 0,1 o resultado foi 69,72 dB. O desvanecimento afetou consideravelmente o desempenho da probabilidade de erro porque foi necessário um acréscimo de aproximadamente 6 dB.

E a Figura 4.4 ilustra o gráfico da 32-QAM com o parâmetro variância e os valores encontrados para a  $BEP = 10^{-5}$  foram, respectivamente, 72,1dB; 64,6 dB; 59,1 dB e 53,2 dB. Observe que para os mesmos valores de variância a modulação segue o acréscimo de aproximadamente 3dB da 16-QAM para a 32-QAM, mantendo o conceito teórico.

Estendendo a análise para a 32-QAM foram encontrados os seguintes resultados: 66,04 dB para variância de 0,2 e 72,03 para variância de 0,1. Nessa modulação, observou-se também a necessidade de aproximadamente 6 dB.

Analisando o acréscimo de um bit por símbolo na modulação, para variância de 0,1, observou-se o acréscimo de aproximadamente 2,31 dB na relação sinal ruído.

Figura 4.4 – Probabilidade de erro de bit da 32-QAM com diversos valores de variância.



Fonte: A autora.

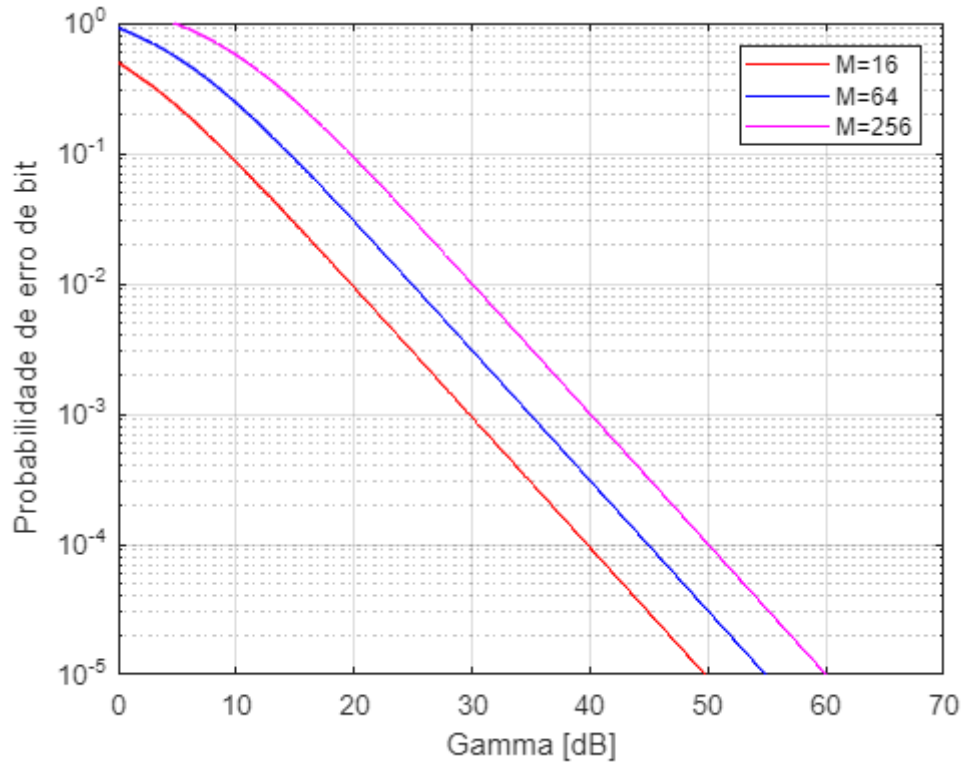
### 4.3 PROBABILIDADE DE ERRO DE BIT NO CANAL RAYLEIGH

Na Figura 4.5 ilustra-se o gráfico da probabilidade de erro de bit da M-QAM com constelação quadrada no canal *Rayleigh*. Os resultados obtidos são referentes a Equação (3.16), variância com valor igual a 1. Os valores obtidos, aproximadamente, foram 49,2 dB; 54,67 dB e 59,84 dB apresentando um acréscimo de um pouco mais de 5 dB para a adição de dois bits por símbolo da modulação.

Na Figura 4.6 ilustra-se o gráfico da probabilidade de erro de bit da M-QAM com constelação não quadrada no canal *Rayleigh*. Os resultados obtidos são referentes a Equação (3.22), variância de 1. Os valores obtidos, aproximadamente, foram 52,20 dB; 57,39 dB e 62,52 dB apresentando um acréscimo de um pouco mais 5 dB para a adição de dois bits por símbolo da modulação.

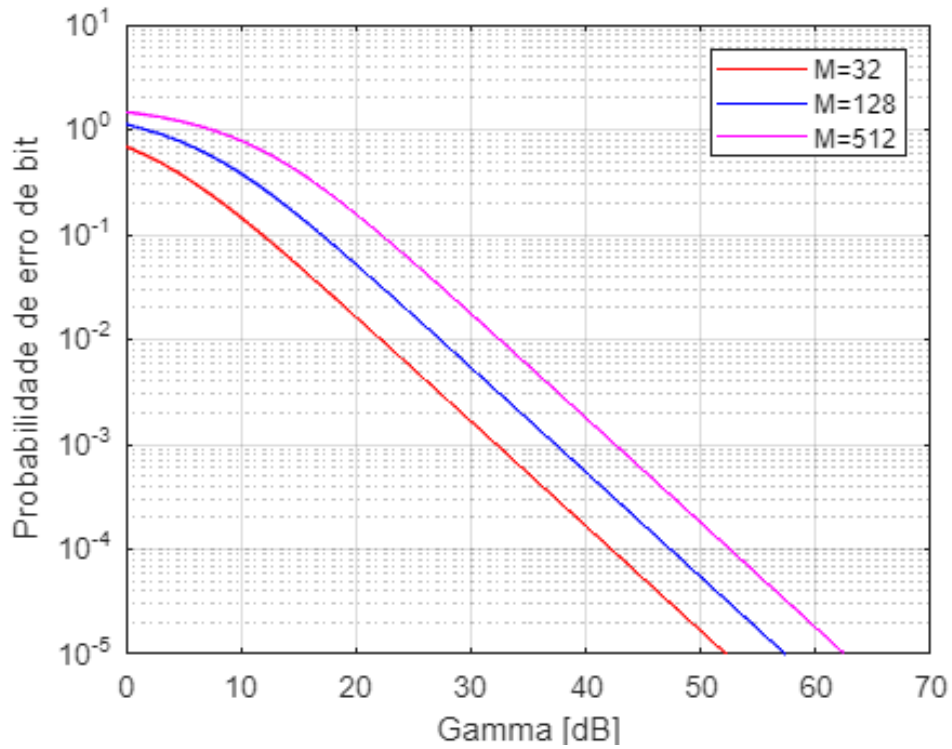
Avaliando comparativamente os gráficos das Figuras 4.1 e 4.5 ou as Figuras 4.2 e 4.6, observou-se que independente da constelação, quadrada ou não quadrada, é necessário um aumento significativo na relação sinal ruído para manter a probabilidade de erro de bit. É fato que tanto o ruído quanto o desvanecimento degradam o desempenho da modulação QAM.

Figura 4.5 – Probabilidade de erro de bit da M-QAM constelação quadrada no canal *Rayleigh*.



Fonte: A autora.

Figura 4.6 – Probabilidade de erro de bit da M-QAM constelação não quadrada no canal *Rayleigh*.



Fonte: A autora.

#### **4.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Nesse item foram apresentados os resultados obtidos com o intuito de mostrar o efeito do desvanecimento plano, distribuição *Rayleigh*, na modulação digital do tipo M-QAM em diferentes tipos de constelação.

## 5. CONCLUSÕES GERAIS

No cenário de transmissão de dados em canal terrestre, observa-se que a qualidade do sinal recebido é prejudicado pelo ruído e desvanecimento. Para combater efeitos de desvanecimento dos sinais nos canais de comunicação são utilizadas técnicas de diversidade, que consiste em transmitir a mesma informação diversas vezes, melhorando o desempenho do sistema como um todo.

No capítulo 2 foi definido o conceito de ruído gaussiano branco aditivo e foi apresentada a modulação digital com ênfase na modulação M-QAM quadrada e não-quadrada e suas constelações.

No capítulo 3 foi desenvolvido um cenário com a presença de desvanecimento utilizando a distribuição de *Rayleigh*. Foi equacionada a M-QAM quadrada com ruído e desvanecimento, bem como a M-QAM não-quadrada com ruído e desvanecimento. Ainda neste capítulo foram definidos os parâmetros de análise das equações desenvolvidas.

Os resultados e discussões foram apresentados no capítulo 4. Primeiramente foi apresentado os resultados da probabilidade de erro de bit da M-QAM quadrada e não-quadrada no canal AWGN. Posteriormente foi realizado a análise da variância para compreender melhor o fenômeno do desvanecimento plano no canal e foi observado que para um menor valor da variância é necessário o aumento da relação sinal ruído para manter a probabilidade de erro de bit. Para os mesmos valores de variância, a modulação segue o acréscimo de um pouco mais de 2 dB da 16-QAM para a 32-QAM, mantendo conceito teórico.

Conclui-se que independente da constelação, quadrada ou não quadrada, tanto o ruído quanto o desvanecimento degradam o desempenho da modulação QAM. É necessário um aumento significativo na relação sinal ruído para manter a probabilidade de erro de bit.

### Propostas de Trabalhos Futuros

Para dar continuação a esse trabalho de conclusão de curso sugere-se:

- I. O equacionamento da modulação M-QAM constelação cruzada no canal *Rician*. Esse é um modelo estocástico para a propagação do sinal de rádio onde se observa o cancelamento parcial de um sinal. No modelo de propagação, o sinal alcança o receptor por diversos caminhos diferentes e em pelo menos um caminho ele é mudado.



- II. Estudar e propor técnicas para amenizar o efeito do desvanecimento, e assim, diminuir a probabilidade de erro de bit da modulação M-QAM em canal hostil.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

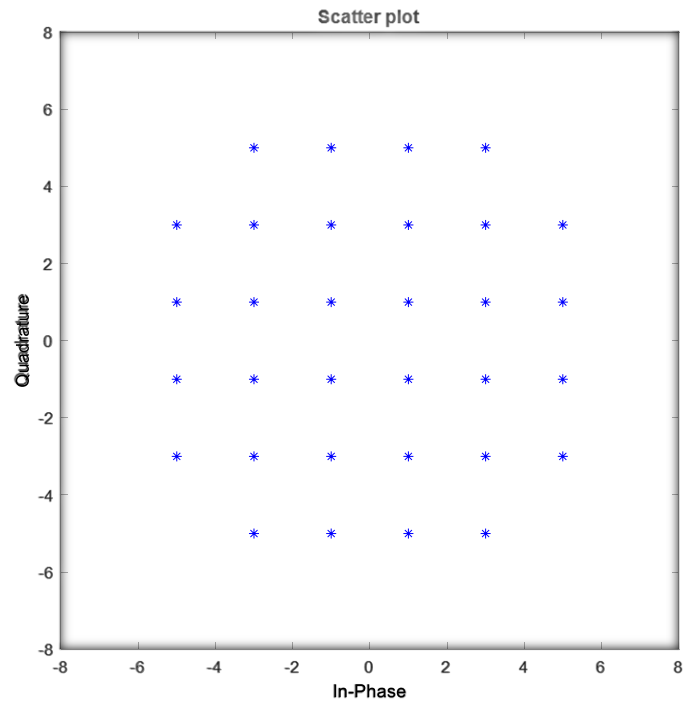
- [1] GUIMARÃES, D. A.; de SOUZA, R. A. A. *Transmissão Digital – Princípios e Aplicações*, São Paulo, Brasil: Editora Érica, 2012.
- [2] ROLIM, T. H. P. et al. Um método para síntese e análise dos principais efeitos de propagação em canais de rádio móvel. Disponível em: <<https://www.inatel.br/docentes/dayan/easyfolder/Publications/12.pdf>>. Acesso em: 20 de junho de 2022.
- [3] N. L. M. Hweesa, A. R. Zerek and A. M. Daeri, "Investigation the Performance Effect of Adjacent and Co-Channel Interferences on AWGN and Rayleigh Channels Using 16-QAM Modulation," 2020 17th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices (SSD), 2020, pp. 1052-1057.
- [4] LOPES, W. T. R., MADEIRO, F. ALENCAR, M.S. Um novo método para o cálculo da probabilidade de erro de bit de esquemas de modulação QAM sujeitos ao desvanecimento de Rayleigh. Disponível em: <<https://jcis.sbvt.org.br/jcis/article/view/300/213>>. Acesso em: 20 de junho de 2022.
- [5] LIMA, A. C. M-QAM não quadrada cruzada em um canal ruidoso. Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal de Uberlândia. Faculdade de Engenharia Elétrica, 2016. Disponível em: <[http://www.antigo.feelt.ufu.br/sites/feelt.ufu.br/files/2016\\_andressa\\_41111ETE014.pdf](http://www.antigo.feelt.ufu.br/sites/feelt.ufu.br/files/2016_andressa_41111ETE014.pdf)>. Acesso em: 20 de junho de 2022.
- [6] OLIVEIRA, F. C. M., ALCOFORADO, M. L. M. G. Modulação 12x12-QAM em sistemas com canais corrompidos por ruído aditivo Gaussiano branco e desvanecimento Rayleigh. Disponível em: <<http://revistas.poli.br/index.php/anais/article/view/1560>>. Acesso em: 20 de junho de 2022.
- [7] SANTOS, P. R. S. Um Estudo da Probabilidade de erro de símbolo da modulação TQAM nos canais AWGN e Rayleigh. Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal de Uberlândia. Faculdade de Engenharia Elétrica, 2020.
- [8] HAYKIN. S, *Sistemas de Comunicação: Analógicos e Digitais*. 4ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.
- [9] RIBEIRO, C. A. M. *Sistemas de Comunicação Digital*. Instituto Superior de Engenharia de Lisboa. Lisboa, Portugal. Julho de 2014.
- [10] Pallam, Simon & Luka, Matthew & Aminu, Muhammad. (2015). BER Evaluation of M-QAM Modulation in Wireless Transmission over AWGN Channel. *International Journal of Scientific Research in Science, Engineering and Technology*. 1. 158 - 167.
- [11] XIONG, F. *Digital modulation techniques*. 2. ed, Artech house, 2006.

- [12] CAHN, C. Combined digital phase and amplitude modulation communication systems. *IRE Transactions on Communications Systems*, vol. 8, no. 3, pp. 150 –155, setembro 1960.
- [13] HANCOCK, J.; LUCKY, R. Performance of combined amplitude and phase-modulated communication systems. *IRE Transactions on Communications Systems*, vol. 8, no. 4, pp. 232 – 237, dezembro 1960.
- [14] CAMPOPIANO, C.; GLAZER, B. A coherent digital amplitude and phase modulation scheme. *IRE Transactions on Communications Systems*, vol. 10, no. 1, pp. 90 – 95, março 1962.
- [15] CARBONARO, K. B., Avaliação do sistema M-QAM OFDM sem e com tempo de guarda em um canal PLC com os ruídos Gaussiano e impulsivo e múltiplas reflexões. Tese de doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Uberlândia, 2015. 165 f.
- [16] QURESHI, F. H. et al. SEP performance of triangular QAM with MRC spatial diversity over fading channels. *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, 2016.
- [17] Sung-Joon Park: Triangular quadrature amplitude modulation, *IEEE Commun. Lett.*, vol. 11 (2007), no. 4, 292–294.
- [18] PARK, J. PARK, S. Approximation for the Two-Dimensional Gaussian Q-Function and Its Applications. *ETRI Journal*, vol. 32, N. 1, February, 2010.
- [19] PINEHIRO, J. C. M. Caracterização de canais sem fio em ambientes generalizados de desvanecimento. Dissertação de mestrado. Departamento de Engenharia Elétrica da Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília. Brasília, 2012. 75 p. Disponível em: <[https://repositorio.unb.br/bitstream/10482/11357/1/2012\\_JulioCesardeMelloPinheiro.pdf](https://repositorio.unb.br/bitstream/10482/11357/1/2012_JulioCesardeMelloPinheiro.pdf)>. Acesso em: 10 de dezembro de 2022.
- [20] Análise estatística do sinal. Disponível em: <[https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/15393/15393\\_5.PDF](https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/15393/15393_5.PDF)>. Acesso em: 15 de dezembro de 2022.
- [21] Modulação Digital em Canais com Desvanecimento. Disponível em: <<https://www.decom.fee.unicamp.br/~celso/mac/fading.pdf>>. Acesso em: 15 de dezembro de 2022.

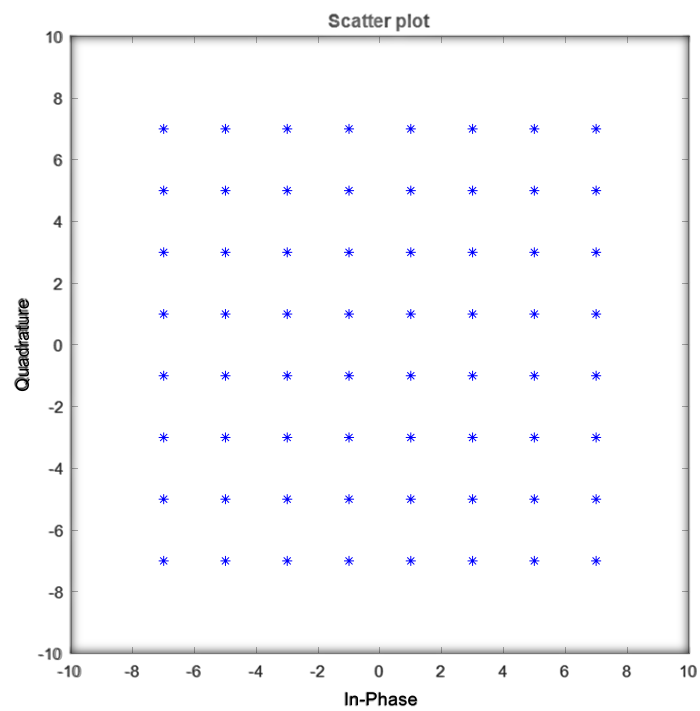
# ANEXO I

## Constelações M-QAM

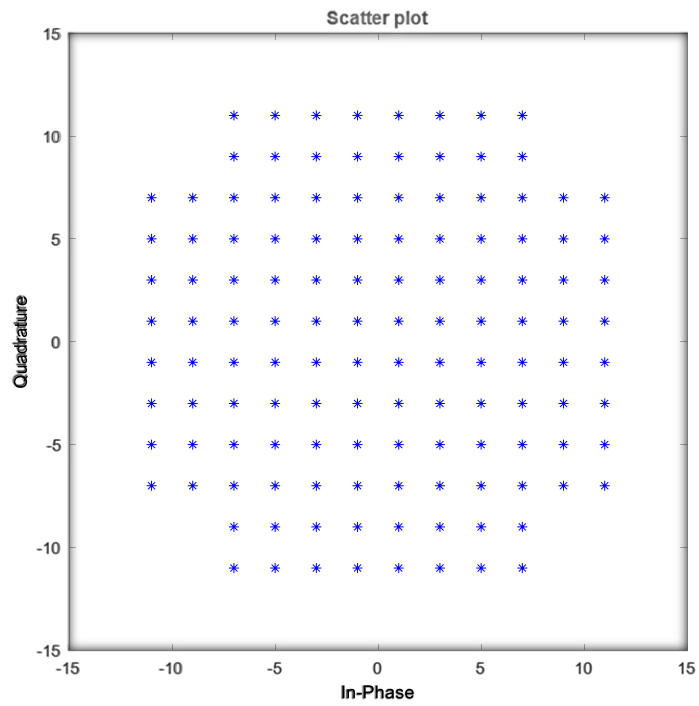
### 32-QAM



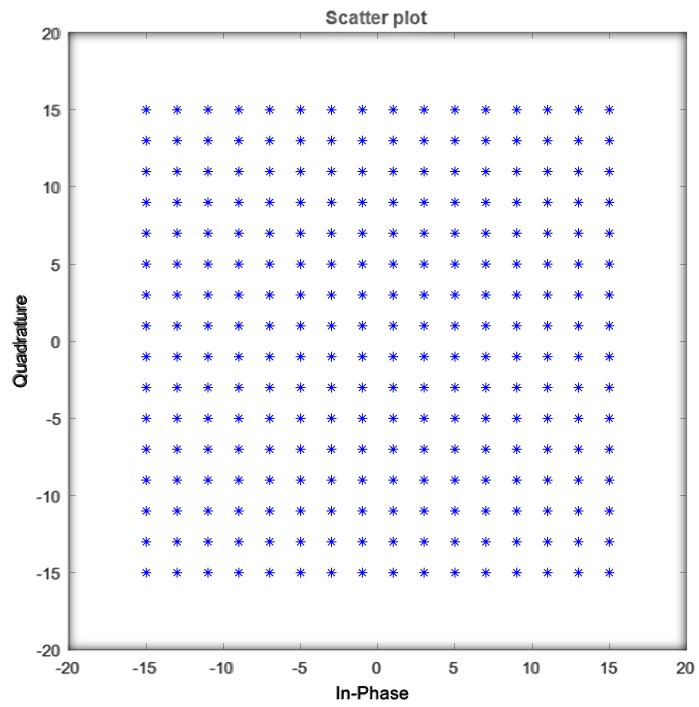
### 64-QAM



## 128-QAM



## 256-QAM



## ANEXO II

### Códigos do Matlab

#### Diversas constelações QAM

```
%% M= 16;
%% M=32;
%% M=64;
%% M=128;
%% M=256;
M=256;
data=0:M-1;
sym=qammod(data,M, 'bin');
scatterplot(sym,1,0, 'b*');
axis([-20 20 -20 20])
%%axis ([-6 6 -6 6]) para M=16;
%%axis ([-8 8 -8 8]) para M=32
%%axis ([-10 10 -10 10]) para M=64
%%axis ([-15 15 -15 15]) para M=128
%%axis ([-20 20 -20 20]) para M=256
```

#### Função Densidade de Probabilidade

```
x = [0:0.01:2];
pdf = raylpdf(x,0.5);
plot(x,pdf)
hold on
x = [0:0.01:2];
pdf = raylpdf(x,0.2);
plot(x,pdf)
hold off
ylabel('Função Densidade de Probabilidade');
xlabel('Variância');
```

#### Função Distribuição Acumulada

```
x = [0:0.01:2];
cdf = raylcdf(x,0.5)
plot(x,cdf)
hold on
x = [0:0.01:2];
cdf = raylcdf(x,0.2);
plot(x,cdf)
hold off
ylabel('Função Distribuição Acumulada');
xlabel('Variância');
grid on
```

#### % M-QAM constelação quadrada no canal AWGN

```
M=[16 64 256];
s=['r' 'b' 'g'];
for j=1:3
G=10;
i=0;
while(G>0.000001)
i=i+1;
x1(i,j)=i; %SNR
y1(i,j)=sqrt(x1(i,j)); % Raiz da SNR
E= (2/3)*((M(j))-1)
k=1/(sqrt(E));
```

```

    a = k*(y1(i,j));
    b=2*(1-(1/(sqrt(M(j)))));
    c=1-(2/(sqrt(M(j)))+(1/(M(j))));
    P(i,j)= ((b)*(erfc(a)))-((c)*(erfc(a))^2);
    G=P(i,j);
    end
x1(:,j)= 10*log10(x1(:,j));
semilogy(x1(:,j), P(:, j), s(j));
    hold on
end
grid
title('M-QAM constelação quadrada no canal AWGN');
legend('M=16', 'M=64', 'M=256', 3);
ylabel('Probabilidade de erro de bit');
xlabel('Eb/No [dB]');
axis([0 45 10^-5 10^0]);
hold off

```

```

M-QAM constelação não quadrada no canal AWGN
M=[32 128 512];
s=['r' 'b' 'g'];
for j=1:3
G=10;
i=0;
    while(G>0.000001)
        i=i+1;
        x1(i,j)=i; %SNR
        y1(i,j)=sqrt(x1(i,j)); % Raiz da SNR
        E= (1/128)*((82*(M(j)))-128+(M(j))*(sqrt(128/(M(j)))));
        k=1/(sqrt(E));
        a = k*(y1(i,j));
        b=2-((3/2)*(sqrt(2/(M(j)))));
        c=1+(2/(M(j)))-((3/2)*(sqrt(2/(M(j)))));
        P(i,j)= ((b)*(erfc(a)))-((c)*(erfc(a))^2);
        G=P(i,j);
    end
x1(:,j)= 10*log10(x1(:,j));
semilogy(x1(:,j), P(:, j), s(j));
    hold on
end
grid
title('M-QAM constelação não quadrada com AWGN');
legend('M=32', 'M=128', 'M=512', 3);
ylabel('Probabilidade de erro de bit');
xlabel('Eb/No [dB]');
axis([0 40 10^-5 10^0]);
hold off

```

```

var = [0.1 0.25 0.5 1];
s = ['r' 'b' 'm' 'g'];
for j=1:4
M = 16;
%M = 32;
G=10;
i=0;
    while(G>0.000001)
        i=i+1;
        x1(i,j)=i; %SNR
        Ez(j)=2*((var(j))^2);

```

```

M1 = sqrt(M);
P(i,j)= ((2*(M1-1))/M1)*(1-
(sqrt((3*(log2(M))*Ez(j)*x1(i,j))/((3*(log2(M))*Ez(j)*x1(i,j)+2*(M-1))))));
%P(i,j)= (2-((3/2)*sqrt(2/M)))*(1-
(sqrt((3*(log2(M))*Ez(j)*x1(i,j))/((3*(log2(M))*Ez(j)*x1(i,j)+2*(M-1))))));
G=P(i,j);
end
x1(:,j)= 10*log10(x1(:,j));
semilogy(x1(:,j), P(:, j), s(j));
hold on
end
grid
legend('var=0.1', 'var=0.25', 'var=0.5', 'var=1');
ylabel('Probabilidade de erro de bit');
xlabel('Gamma [dB]');
axis([0 80 10^-5 10^1]);
hold off

```