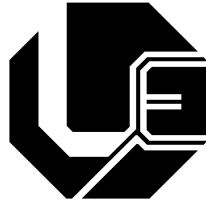


**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA**



**Otimização multiobjetivo baseada na análise em  
elementos finitos e aplicada sobre o sistema de  
acionamento de um motor a relutância variável**

**Breno Brito Miranda**

**Uberlândia**

**2023**



**Breno Brito Miranda**

**Otimização multiobjetivo baseada na análise em elementos finitos e aplicada sobre o sistema de acionamento de um motor a relutância variável**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Uberlândia, para obtenção do título de Doutor em Ciências - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Sistemas de Energia Elétrica

Orientador: Prof. José Roberto Camacho, Ph.D.

**Uberlândia**

**2023**

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU  
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

M672  
2023 Miranda, Breno Brito, 1990-  
Otimização multiobjetivo baseada na análise em  
elementos finitos e aplicada sobre o sistema de  
acionamento de um motor a relutância variável [recurso  
eletrônico] / Breno Brito Miranda. - 2023.

Orientador: José Roberto Camacho.  
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia,  
Pós-graduação em Engenharia Elétrica.  
Modo de acesso: Internet.  
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.te.2022.678>  
Inclui bibliografia.

1. Engenharia elétrica. I. Camacho, José Roberto, 1954-  
, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia.  
Pós-graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

CDU: 621.3

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:  
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091  
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
 Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
 Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 3N - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902  
 Telefone: (34) 3239-4707 - www.posgrad.feelt.ufu.br - copel@ufu.br



### ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Elétrica				
Defesa de:	Tese de Doutorado, 316, PPGEELT				
Data:	Trinta de janeiro de dois mil e vinte e três	Hora de início:	08:00	Hora de encerramento:	11:00
Matrícula do Discente:	11723EEL009				
Nome do Discente:	Breno Brito Miranda				
Título do Trabalho:	Otimização multiobjetivo baseada na análise em elementos finitos e aplicada sobre o sistema de acionamento de um motor a relutância variável				
Área de concentração:	Sistemas de energia elétrica				
Linha de pesquisa:	Sistemas Elétricos de Potência				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Coordenador do projeto: José Roberto Camacho Título do projeto: Métodos matemáticos aplicados ao projeto e otimização de máquinas elétricas. Agência financiadora: Não há. Número do processo na agência financiadora: Não há. Vigência do projeto: Indefinido, em andamento				

Reuniu-se por meio de videoconferência, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, assim composta: Professores Doutores: Luciano Coutinho Gomes - FEELT/UFU; Wellington Maycon Santos Bernardes - FEELT/UFU; Juliana Almansa Malagoli - UFPR; Fabrício Augusto Matheus Moura - UFTM; José Roberto Camacho - FEELT/UFU, orientador(a) do(a) candidato(a).

Iniciando os trabalhos o(a) presidente da mesa, Dr(a). José Roberto Camacho, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato(a), agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado(a).

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



## RESUMO

MIRANDA, B. B. **Otimização multiobjetivo baseada na análise em elementos finitos e aplicada sobre o sistema de acionamento de um motor a relutância variável**. 2023. 135p. Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2023.

Os motores elétricos são dispositivos eletromecânicos amplamente utilizados no setor industrial, porém com presença ainda modesta no setor de transporte. A necessidade de se reduzir o consumo de energia pelas indústrias, bem como a emergente demanda do mercado de transportes pela eletrificação de veículos requerem a produção de motores elétricos com o menor custo possível e de alta eficiência. Os Motores a Relutância Variável (MRV) são atrativos em relação aos motores de indução e de ímã permanente, tendo como características a robustez, construção mais simples, baixo custo e maior temperatura de operação permissível devido à ausência de ímãs no rotor. Contudo, apresentam desvantagens como baixa qualidade do torque, vibração e ruído acústico, normalmente relacionadas com os polos salientes, o chaveamento e a estratégia de controle impostos pelo conversor de potência. As técnicas de otimização multiobjetivo, em particular, as meta-heurísticas, quando combinadas à análise em elementos finitos formam uma ferramenta robusta na busca pela solução, ou mitigação, de tais problemas. O objetivo desta tese consiste em fornecer métodos de fácil implementação apropriados para a otimização numérica do projeto de MRVs e dos parâmetros de controle envolvidos no sistema de acionamento de forma eficiente. Dois problemas de otimização são formulados: busca pelas dimensões geométricas do motor que maximizam a relação *fluxo magnético concatenado por volume de material magnético*; busca pelos ângulos de comutação que minimizam o nível de oscilação e maximizam o valor médio do torque eletromagnético para um dado ponto de operação. Os problemas são resolvidos pelos algoritmos de Evolução Diferencial (ED) e de otimização multiobjetivo por enxame de partículas, SMPSO. Os resultados obtidos indicam que os algoritmos de otimização foram capazes de solucionar os problemas satisfatoriamente, dadas as limitações inerentes à metodologia proposta, aumentando a capacidade de produção e melhorando a qualidade do torque, porém, com redução da eficiência e do fator de potência do motor. Por fim, como trabalho futuro, propõe-se adicionar ao conversor, um método avançado de controle de velocidade e torque, *Torque Sharing Function* (TSF), com capacidade superior de aperfeiçoamento da qualidade do torque e eficiência do motor elétrico.

**Palavras-chave:** Análise computacional. Meta-heurísticas. Método dos elementos finitos. Motor a relutância variável. Otimização multiobjetivo.





## ABSTRACT

MIRANDA, B. B. **Multi-objective optimization based on finite element analysis and applied to a switched reluctance motor drive.** 2023. 135p. Thesis (Doctor) - Faculdade de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2023.

The electrical motors are electro-mechanical energy converters mostly used in the industrial sector, although even with modest presence in the transportation sector. The need for reducing the energy consumption by industries, as well as the emerging market demand for vehicle electrification require the manufacturing of low-cost and high-efficiency electrical motors. The Switched Reluctance Motors (SRMs) are attractive relating to induction and permanent magnet motors, having characteristics as robustness, simpler construction, low-cost and higher allowable operating temperature due to the absence of magnets on the rotor. However, the SRMs present drawbacks as poor torque quality, mechanical vibration and acoustic noise, usually related to the salient teeth, switching components and control strategies imposed by the power converter. The multi-objective optimization techniques, in particular meta-heuristics, coupled to the finite element analysis form a robust tool for either searching the solution, or mitigating such problems. The objective of this thesis is to provide easy implementation of appropriate methods for designing SRMs and controlling some drive system's parameters by numerical optimization in an efficient way. Two optimization problems are formulated: search for the geometric dimensions that maximize the *magnetic flux linkage per magnetic material bulk* relation; search for the commutation angles that minimize the torque ripple and maximize the mean torque value for a given operating point. The problems are solved by using the Differential Evolution (DE) and the Speed-constrained Multi-objective Particle Swarm Optimization (SMPSO) algorithms. The obtained results indicate that the optimization algorithms were capable to solve the problems satisfactorily, given the inherent limitations to the proposed methodology, improving the torque quality and production capability, however with motor efficiency and power factor reduction. Finally, an advanced speed and torque technique control, *Torque Sharing Function* (TSF), with higher improvement capability of the torque quality and efficiency, is proposed to be applied to the converter as future work.

**Keywords:** Computational analysis. Finite element method. Meta-heuristics. Multi-objective optimization. Switched reluctance motor.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Conjunto aberto e limitado $\Omega$ com uma superfície de corte $\Sigma_1$ . . . . .	40
Figura 2 – (a) O disco fechado; (b) interior do disco; (c) fronteira do disco . . . . .	42
Figura 3 – Superfície $\Sigma$ entre dois meios contínuos $\Omega_1$ e $\Omega_2$ . . . . .	45
Figura 4 – Subdomínio indutor $\Omega_{s,i}$ conectado a um gerador $\Omega_{g,i}$ . . . . .	53
Figura 5 – (a) Malha de elementos finitos; (b) matriz de rigidez . . . . .	59
Figura 6 – Elementos da banda de movimento com e sem deformação . . . . .	62
Figura 7 – Alocação dinâmica das condições de antiperiodicidade . . . . .	63
Figura 8 – Dimensões de um MRV 8/6 . . . . .	68
Figura 9 – Seção transversal do MRV 8/6: (a) modelo em elementos finitos; (b) vista frontal do protótipo . . . . .	71
Figura 10 – Condições de antiperiodicidade aplicadas às fronteiras $\Gamma_A$ e $\Gamma_B$ . . . . .	72
Figura 11 – Conversor <i>half-bridge</i> . . . . .	73
Figura 12 – Estratégia de chaveamento dos transistores $T_1$ e $T_2$ . . . . .	74
Figura 13 – Modelo do circuito de acoplamento entre o conversor assimétrico e o MRV 8/6 . . . . .	75
Figura 14 – Esquema elétrico de fechamento dos módulos IGBTs . . . . .	76
Figura 15 – Bancada experimental (a) e sistema de acionamento (b): subsistema de potência e subsistema de controle e aquisição de dados . . . . .	76
Figura 16 – Pontos de medição de tensão e corrente do circuito do conversor . . . . .	77
Figura 17 – Princípio de operação motora: (a) controle de histerese e ângulos de comutação sobre o perfil de indutância ideal; (b) diagrama que ilustra o sentido do conjugado e a rotação do MRV . . . . .	79
Figura 18 – Ilustração dos ângulos elétricos das fases energizadas em função da posição relativa dos polos . . . . .	80
Figura 19 – Taxonomia dos métodos inspirados na natureza . . . . .	86
Figura 20 – Mutação diferencial . . . . .	88
Figura 21 – Cruzamento uniforme ( $D = 8$ ) . . . . .	90
Figura 22 – Fluxograma do algoritmo de ED . . . . .	91
Figura 23 – Quantidade de publica�es por ano utilizando o PSO . . . . .	93
Figura 24 – Esquema vetorial PSO . . . . .	95
Figura 25 – Fluxograma do algoritmo SMPSO . . . . .	97
Figura 26 – Fluxograma para a otimiza�o da geometria ou dos ângulos de comuta�o . . . . .	101
Figura 27 – Malha de elementos finitos considerando metade do modelo do MRV 8/6 (7489 nós; 15219 elementos) . . . . .	104
Figura 28 – Interface do Gmsh com a soluço do campo vetorial da indu�o magnética . . . . .	105
Figura 29 – Diagrama funcional da soluço do problema magnetodinâmico . . . . .	105

Figura 30 – Conjugado mecânico medido pelo transdutor em função do tempo em segundos . . . . .	107
Figura 31 – Norma da densidade de fluxo magnético e gráfico da velocidade do rotor em função da quantidade de passos de tempo . . . . .	107
Figura 32 – Perfis das correntes do circuito . . . . .	108
Figura 33 – Perfis das correntes simuladas e experimentais das quatro fases do MRV 8/6 . . . . .	109
Figura 34 – Forma de onda do (a) torque eletromagnético e (b) perfil oscilatório (ampliação do torque) . . . . .	109
Figura 35 – Curvas da auto-indutância, fluxo concatenado e corrente de uma fase .	110
Figura 36 – Formas de onda da tensão e corrente no retificador: (a) simuladas e (b) obtidas na bancada experimental . . . . .	111
Figura 37 – Fronteira de Pareto do problema de otimização multiobjetivo obtida pelo algoritmo SMPSO . . . . .	112
Figura 38 – Mapa da densidade de fluxo magnético sobre a seção transversal do núcleo: (a) no modelo de referência e (b) no perfil otimizado pelo algoritmo SMPSO . . . . .	113
Figura 39 – Convergência do algoritmo de ED . . . . .	114
Figura 40 – Mapa da densidade de fluxo magnético no perfil otimizado pelo algoritmo de ED . . . . .	115
Figura 41 – Resultados da otimização multiobjetivo, caso II (max. $T_{avg}$ , min. $\Delta T_{rms}$ ): (a) espaço das variáveis de decisão, (b) fronteira de Pareto, (c) relação entre $\theta_{on}$ e $\Delta T_{rms}$ , (d) relação entre $\varepsilon$ e $\Delta T_{rms}$ , (e) relação entre $\theta_{on}$ e $T_{avg}$ , (f) relação entre $\varepsilon$ e $T_{avg}$ . . . . .	117
Figura 42 – Comparação entre os resultados da simulação para a solução $[x_0, x_1, x_2] = [111,71, 41,48, 310,3]$ e os resultados para os ângulos de comutação de referência: (a) correntes de fase, (b) perfil da velocidade, (c) perfil do torque, (d) forma de onda do torque . . . . .	118

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Dimensões geométricas do MRV 8/6 . . . . .	70
Tabela 2 – Especificações técnicas e elétricas do MRV 8/6 . . . . .	71
Tabela 3 – Estratégias de mutação . . . . .	89
Tabela 4 – Dados para a simulação computacional do MRV 8/6 . . . . .	106
Tabela 5 – Comparação entre os resultados numéricos e experimentais . . . . .	112
Tabela 6 – Dimensões otimizadas . . . . .	115
Tabela 7 – Fluxo concatenado, volume de material e densidade de fluxo, a 10 A e 15 A, para os três <i>designs</i> do MRV 8/6 . . . . .	116
Tabela 8 – Dados comparativos de desempenho do MRV 8/6 . . . . .	119



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AEF	Análise em Elementos Finitos
CA	Corrente Alternada
CC	Corrente Contínua
DOF	<i>Degrees of Freedom</i>
ED	Evolução Diferencial
EDP	Equação Diferencial Parcial
EFCAD	<i>Electromagnetic Fields Computer Aided Design</i>
FEMM	<i>Finite Element Method Magnetics</i>
GetDP	<i>A General Environment for the Treatment of Discrete Problems</i>
Gmsh	<i>A Three-dimensional Finite Element Mesh Generator with Built-in Pre- and Post-processing Facilities</i>
GNO	Grão Não Orientado
IGBT	<i>Insulated Gate Bipolar Transistor</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos
MOPSO	<i>Multiple-Objective Particle Swarm Optimizer</i>
MRVs	Motores a Relutância Variável
ONELAB	<i>Open Numerical Engineering LABoratory</i>
PSO	<i>Particle Swarm Optimization</i>
PVC	Problema de Valor de Contorno
SBX	<i>Simulated Binary crossover</i>
SMPSO	<i>Speed-constrained Multi-objective PSO</i>
SPX	<i>Simplex crossover</i>
TSF	<i>Torque Sharing Function</i>





## LISTA DE SÍMBOLOS

### Símbolos alfanuméricos

$a$	Campo escalar
$a_A$	Grau de liberdade associado às circulações de $\vec{A}$ sobre as arestas em $\Gamma_A$
$a_B$	Grau de liberdade associado às circulações de $\vec{A}$ sobre as arestas em $\Gamma_B$
$a_e$	Graus de liberdade associados com a circulação do campo $\vec{A}$ sobre as arestas
$dA$	Elemento diferencial de área
$d\ell$	Elemento diferencial de comprimento
$E$	Conjunto de arestas
$G$	Função de chaveamento
$\vec{n}$	Campo de vetores unitários normal
$\vec{R}$	Resíduo vetorial
$\vec{t}$	Campo de vetores unitários tangente
$\vec{u}$	Campo vetorial
$\vec{w}_e$	Funções de base associadas com as E arestas

### Símbolos matemáticos

$C^k(\bar{\Omega})$	Espaço vetorial $k$ vezes diferenciável continuamente sobre $\bar{\Omega}$
$C_0^\infty(\Omega)$	Conjunto de todas as funções escalares infinitamente diferenciáveis e compactamente suportadas sobre $\Omega$
$\mathbb{E}^3$	Espaço Euclidiano orientado tridimensional
$H^1(\Omega)$	Espaço de Sobolev de campos vetoriais de primeira ordem sobre $\Omega$
$H_0^1(\Omega)$	Espaço de Sobolev de campos vetoriais de primeira ordem sobre $\Omega$ com condições de contorno homogêneas
$H(\text{div}; \Omega)$	Espaço funcional do tipo fluxo

$\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$	Espaço funcional do tipo circulação
$L^2(\Omega)$	Espaço dos campos escalares de quadrado integrável sobre $\Omega$
$\mathbf{L}^2(\Omega)$	Espaço dos campos vetoriais de quadrado integrável sobre $\Omega$
$S$	Subconjunto de $X$
$S^0$	Coleção $\mathcal{P}$ de todos os pontos interiores de $S$
$\bar{S}$	Fecho de $S$
$\mathcal{T}$	Topologia do espaço topológico $X$
$\mathcal{W}$	Coleção de subconjuntos abertos
$W_1^i(\Omega)$	Espaço discreto de grau um
$X$	Espaço topológico

#### Grandezas físicas

$A_z$	Componente axial de $\vec{A}$ ( $Wb/m$ )
$\vec{A}$	Potencial vetor magnético ( $Wb/m$ )
$\vec{A}_h$	Potencial vetor magnético aproximado ( $Wb/m$ )
$\vec{A}'$	Função teste vetorial ( $Wb/m$ )
$B_{C_s}$	Densidade de fluxo na culatra do estator ( $T$ )
$B_g$	Módulo da densidade de fluxo no entreferro ( $T$ )
$B_{sat}$	Módulo da densidade de fluxo de saturação ( $T$ )
$\vec{B}$	Indução magnética ou densidade de fluxo magnético ( $T$ )
$\vec{B}_r$	Indução magnética remanente ( $T$ )
$C$	Capacitância do filtro ( $F$ )
$D$	Coefficiente de atrito viscoso ( $N.m.s$ )
$\vec{E}$	Campo elétrico ( $V/m$ )
$\vec{H}$	Campo magnético ( $A/m$ )
$i_a$	Corrente de fase instantânea ( $A$ )

$i_a^*$	Corrente de comando do controlador de histerese ( $A$ )
$I$	Intensidade de corrente ( $A$ )
$I_n$	Corrente nominal ( $A$ )
$I_p$	Valor de pico da corrente de fase ( $A$ )
$J$	Momento de inércia ( $kg.m^2$ )
$\vec{J}$	Densidade de corrente elétrica ( $A/m^2$ )
$\vec{J}_c$	Densidade de corrente de condução ( $A/m^2$ )
$\vec{J}_s$	Densidade de corrente imposta ( $A/m^2$ )
$L$	Indutância de fase não linear ( $H$ )
$L_{as}$	Indutância de fase ( $H$ )
$P$	Potência de saída ( $W$ )
$R$	Resistência de fase ( $\Omega$ )
$R_D$	Resistência variável do diodo ( $\Omega$ )
$R_{ON}$	Resistência de condução ( $\Omega$ )
$R_{OFF}$	Resistência de não condução ( $\Omega$ )
$R_S$	Resistência variável da chave controlada ( $\Omega$ )
$t$	Instante de tempo ( $s$ )
$t_f$	Tempo de simulação ( $s$ )
$T_{avg}$	Valor médio de torque ( $N.m$ )
$T_{emg}$	Torque eletromagnético ( $N.m$ )
$T_{mec}$	Torque de carga ( $N.m$ )
$T_{rp}$	Torque <i>ripple</i>
$TRV$	Torque por volume do rotor ( $N/m^2$ )
$T(\theta)$	Torque em função da posição rotórica ( $N.m$ )
$U_D$	Tensão nos terminais do diodo ( $V$ )
$U_S$	Tensão nos terminais da chave controlada ( $V$ )

$\vec{U}_h$	Campo vetorial aproximado de $\nabla\varphi$
$V$	Força eletromotriz ( $V$ )
$V_{dc}$	Tensão do retificador ( $V$ )
$\vec{w}$	Vetor densidade de condutor

#### Parâmetros do motor elétrico

$a_b$	Área da seção transversal da bobina ( $m^2$ )
$a_c$	Seção do condutor elétrico ( $mm^2$ )
$C_s$	Espessura da culatra do estator ( $m$ )
$C_r$	Espessura da culatra do rotor ( $m$ )
$D_{eixo}$	Diâmetro do eixo ( $m$ )
$D_r$	Diâmetro externo do rotor ( $m$ )
$D_s$	Diâmetro externo do estator ( $m$ )
$f_p$	Fator de empilhamento das lâminas
$g$	Comprimento do entreferro ( $m$ )
$h_s$	Altura dos polos do estator ( $m$ )
$h_r$	Altura dos polos do rotor ( $m$ )
$l$	Comprimento do rotor ( $m$ )
$N_s$	Número de polos do estator
$N_r$	Número de polos do rotor
$q$	Número de fases
$t_r$	Largura dos polos do rotor ( $m$ )
$t_s$	Largura dos polos do estator ( $m$ )
$T_{ph}$	Número de espiras por fase
$vol_{MRV}$	Volume do material magnético do motor ( $m^3$ )

## Variáveis de otimização

$Cr$	Taxa de cruzamento
$C_1, C_2$	Fatores de aprendizado
$D$	Dimensionalidade do problema de otimização
$f(\vec{u}_{i,g})$	<i>Fitness</i> do vetor <i>trial</i>
$f(\vec{x}_{i,g})$	<i>Fitness</i> do vetor <i>target</i>
$f_m(\vec{x})$	$m$ -ésima função objetivo
$F$	Fator de escala
$F_l$	Valor mínimo pré-definido de $F$
$F_h$	Valor máximo pré-definido de $F$
$\vec{F}(\vec{x})$	Espaço das funções objetivo
$g_j(\vec{x})$	$j$ -ésima restrição de desigualdade
$h_k(\vec{x})$	$k$ -ésima restrição de igualdade
$J$	Quantidade de restrições de desigualdade
$K$	Quantidade de restrições de igualdade
$M$	Quantidade de objetivos
$N$	Quantidade de variáveis de decisão
$NP$	Tamanho da população
$P_x$	População composta dos vetores solução $\vec{x}_{i,g}$
$r_0$	Índice da população de soluções selecionadas como vetores base a partir da geração atual
$r_1, r_2$	Índices das populações de soluções selecionadas para construir o vetor diferença
$r_3, r_4$	Índices dos indivíduos selecionados para compor o segundo vetor diferença
$\vec{u}_{i,g}$	Vetor <i>trial</i> gerado para o $i$ -ésimo vetor <i>target</i> da geração $g$
$\vec{v}_{i,g}$	Vetores mutantes

$\vec{v}_i(t)$	Velocidade da partícula $p_i$
$w$	Coefficiente de inércia da partícula
$x_i$	$i$ -ésima variável de decisão
$x_{j,i,0}$	$j$ -ésima componente dimensional da solução $i$ ( $g = 0$ )
$x_{min,i}, x_{max,i}$	Valores mínimo e máximo de cada variável $x_i$
$\vec{x}$	Vetor de variáveis de otimização
$\vec{x}_{best,g}$	Vetor da melhor solução de toda população atual
$\vec{x}_{g_i}$	Posição do melhor indivíduo (líder) dentre todos do enxame
$\vec{x}_{i,g}$	Vetor solução da $g$ -ésima geração
$\vec{x}_i(t)$	Posição da partícula $p_i$
$\vec{x}_{p_i}$	Posição com a melhor solução alcançada pela partícula $\vec{x}_i$ de todos os locais visitados
$\vec{y}_A, \vec{y}_A$	Vetores de funções objetivo

### Símbolos gregos

$\beta_s$	Ângulo dos polos do estator ( $^\circ$ )
$\beta_r$	Ângulo dos polos do rotor ( $^\circ$ )
$\gamma$	Curva fechada
$\Gamma$	Fronteira de $\Omega$ ( $= \partial\Omega$ )
$\Gamma_A$	Fronteira de referência
$\Gamma_B$	Fronteira associada
$\Delta_i$	Largura da banda de histerese ( $A$ )
$\Delta t$	Passo de tempo ( $s$ )
$\Delta T_{rms}$	Medida da qualidade do torque ( $N.m$ )
$\epsilon$	Permissividade elétrica ( $F/m$ )
$\varepsilon$	Ângulo elétrico de condução ( $^\circ$ )

$\theta$	Posição angular ( <i>rad</i> )
$\theta_{on}$	Ângulo elétrico de comutação ( <i>on</i> ) ( $^{\circ}$ )
$\theta_{off}$	Ângulo elétrico de comutação ( <i>off</i> ) ( $^{\circ}$ )
$\mu$	Permeabilidade magnética ( <i>H/m</i> )
$\mu_0$	Permeabilidade magnética no vácuo ( <i>H/m</i> )
$\nu$	Relutividade magnética ( <i>m/H</i> )
$\sigma$	Condutividade elétrica ( <i>S/m</i> )
$\Sigma$	Interface entre dois meios contínuos ou superfície de corte
$\hat{\tau}$	Vetor unitário perpendicular à superfície <i>A</i>
$\varphi$	Potencial escalar elétrico ( <i>V</i> )
$\Phi$	Força magnetomotriz ( <i>A.e</i> )
$\chi$	Fator de constrição
$\Psi$	Fluxo magnético concatenado ( <i>Wb</i> )
$\omega_m$	Velocidade angular ( <i>rad/s</i> )
$\omega_n$	Velocidade angular nominal ( <i>rpm</i> )
$\Omega$	Domínio limitado do espaço Euclidiano
$\bar{\Omega}$	Fecho de $\Omega$
$\Omega_c$	Domínio condutor
$\Omega_g$	Domínio dos geradores
$\Omega_s$	Domínio dos indutores

### **Operadores**

$c$	Complemento
$\partial$	Contorno
$\partial_x, \partial_y, \partial_z$	Derivadas espaciais
$\partial_t$	Derivada temporal

$\text{div}$	Divergente
<b><math>\text{grad}</math></b>	Gradiente
<b><math>\text{rot}</math></b>	Rotacional
<i><math>\text{supp}</math></i>	Suporte
$\cdot$	Produto escalar
$\times$	Produto vetorial



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>27</b>
<b>1.1</b>	<b>Motivações e justificativas</b>	<b>28</b>
<b>1.2</b>	<b>Objetivos</b>	<b>30</b>
1.2.1	Objetivo geral	30
1.2.2	Objetivos específicos	30
<b>1.3</b>	<b>Contribuições da tese</b>	<b>31</b>
<b>1.4</b>	<b>Estado da arte</b>	<b>31</b>
1.4.1	Livros	32
1.4.2	Teses e dissertações	34
1.4.3	Artigos técnicos	35
1.4.4	Manuais e <i>frameworks</i>	36
1.4.5	Publicações	37
<b>1.5</b>	<b>Organização da tese</b>	<b>37</b>
<b>2</b>	<b>MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O FENÔMENO ELETRO- MAGNÉTICO</b>	<b>39</b>
<b>2.1</b>	<b>Introdução</b>	<b>39</b>
<b>2.2</b>	<b>Teoremas da divergência, Stokes e identidades de Green</b>	<b>39</b>
<b>2.3</b>	<b>Conjuntos de espaços topológicos</b>	<b>40</b>
2.3.1	Conjunto aberto	40
2.3.2	Fecho, interior e fronteira	41
2.3.3	Conexidade	42
2.3.4	Compacidade	42
<b>2.4</b>	<b>Equações de Maxwell em meio contínuo</b>	<b>42</b>
<b>2.5</b>	<b>Condições de interface ou transmissão dos campos</b>	<b>44</b>
<b>2.6</b>	<b>Condições de contorno</b>	<b>46</b>
<b>2.7</b>	<b>Problema de valor de contorno</b>	<b>47</b>
<b>2.8</b>	<b>Espaços funcionais</b>	<b>49</b>
2.8.1	Espaços de quadrado integrável e de Sobolev	49
2.8.2	Estrutura matemática base	50
<b>2.9</b>	<b>Problema da magnetodinâmica</b>	<b>51</b>
2.9.1	Formulação em potencial vetor magnético	52
2.9.2	Domínios do problema	53
2.9.3	Forma fraca ou variacional	54
<b>2.10</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>56</b>

<b>3</b>	<b>MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS . . . . .</b>	<b>57</b>
<b>3.1</b>	<b>Introdução . . . . .</b>	<b>57</b>
<b>3.2</b>	<b>Estrutura matemática discreta . . . . .</b>	<b>58</b>
<b>3.3</b>	<b>Modelagem matemática do problema magnetodinâmico em duas dimensões . . . . .</b>	<b>60</b>
3.3.1	Equação de circuito externo . . . . .	60
<b>3.4</b>	<b>Condições de periodicidade e antiperiodicidade . . . . .</b>	<b>61</b>
<b>3.5</b>	<b>Método da banda de movimento . . . . .</b>	<b>62</b>
<b>3.6</b>	<b>Equações mecânicas . . . . .</b>	<b>63</b>
<b>3.7</b>	<b>Resolução no domínio do tempo . . . . .</b>	<b>64</b>
<b>3.8</b>	<b>Métodos de solução para sistemas de equações não lineares . . . . .</b>	<b>65</b>
<b>3.9</b>	<b>Considerações finais . . . . .</b>	<b>66</b>
<b>4</b>	<b>MOTOR A RELUTÂNCIA VARIÁVEL . . . . .</b>	<b>67</b>
<b>4.1</b>	<b>Introdução . . . . .</b>	<b>67</b>
<b>4.2</b>	<b>Equações de projeto . . . . .</b>	<b>68</b>
<b>4.3</b>	<b>Protótipo de um MRV 8/6 . . . . .</b>	<b>70</b>
4.3.1	Redução do domínio de estudo . . . . .	71
<b>4.4</b>	<b>Operação motora . . . . .</b>	<b>72</b>
4.4.1	Conversor <i>half-bridge</i> . . . . .	73
4.4.2	Modelagem matemática dos semicondutores de potência . . . . .	77
4.4.3	Ângulos de comutação . . . . .	78
<b>4.5</b>	<b>Considerações finais . . . . .</b>	<b>81</b>
<b>5</b>	<b>OTIMIZAÇÃO MONO E MULTIOBJETIVO . . . . .</b>	<b>83</b>
<b>5.1</b>	<b>Introdução . . . . .</b>	<b>83</b>
<b>5.2</b>	<b>Definição do problema de otimização multiobjetivo . . . . .</b>	<b>84</b>
<b>5.3</b>	<b>Algoritmos evolucionários . . . . .</b>	<b>85</b>
5.3.1	Evolução diferencial . . . . .	87
5.3.1.1	Inicialização . . . . .	87
5.3.1.2	Mutação . . . . .	88
5.3.1.3	Cruzamento . . . . .	89
5.3.1.4	Seleção . . . . .	90
5.3.1.5	Aleatorização do fator de escala . . . . .	91
<b>5.4</b>	<b>Algoritmos de inteligência de enxame . . . . .</b>	<b>92</b>
5.4.1	Otimização por enxame de partículas . . . . .	93
5.4.1.1	Algoritmo multiobjetivo baseado na otimização por enxame de partículas . . . . .	95
<b>5.5</b>	<b>Estudos de caso . . . . .</b>	<b>98</b>
5.5.1	Formulação dos problemas de otimização . . . . .	98
<b>5.6</b>	<b>Considerações finais . . . . .</b>	<b>102</b>

<b>6</b>	<b>RESULTADOS . . . . .</b>	<b>103</b>
<b>6.1</b>	<b>Introdução . . . . .</b>	<b>103</b>
<b>6.2</b>	<b>Modelagem em elementos finitos . . . . .</b>	<b>104</b>
<b>6.3</b>	<b>Análise computacional dinâmica do MRV . . . . .</b>	<b>106</b>
<b>6.4</b>	<b>Otimização da geometria do MRV . . . . .</b>	<b>111</b>
<b>6.5</b>	<b>Otimização dos ângulos de comutação do MRV . . . . .</b>	<b>116</b>
<b>6.6</b>	<b>Considerações finais . . . . .</b>	<b>119</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS . . . . .</b>	<b>121</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>123</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>131</b>
	<b>APÊNDICE A – CÓDIGO PARCIAL PARA OS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO (LINGUAGEM <i>PYTHON</i>) . . . . .</b>	<b>133</b>



## 1 INTRODUÇÃO

Os motores elétricos estão presentes em diversas aplicações domésticas e comerciais como refrigeradores, condicionadores de ar, aquecedores, eletrodomésticos e ferramentas de uso geral; e industriais como equipamentos de usinagem, compressores, bombas de propulsão, ventiladores, etc. Além disso, a maior parte da energia elétrica consumida pelo setor industrial em países desenvolvidos está relacionada às aplicações que envolvem o uso de motores elétricos de média e alta potência. Porém, o consumo de energia elétrica pelo setor de transporte ainda é baixo, frente à vasta presença de veículos movidos por motores de combustão interna a partir de combustíveis fósseis (BILGIN; JIANG; EMADI, 2018).

Devido à necessidade global de se reduzir a emissão de dióxido de carbono ao longo dos anos, os motores elétricos vêm sendo utilizados na eletrificação total e híbrida de veículos de carga e passeio, acompanhada pelo crescimento da produção de energia elétrica mediante o uso de fontes renováveis. Conseqüentemente, houve uma emergente demanda por motores elétricos de baixo custo, mais eficientes, potentes, de tamanho reduzido e com velocidade variável. Provavelmente, os motores elétricos utilizados na propulsão de veículos correspondem ao mercado de maior crescimento na indústria de transportes na atualidade.

Os Motores a Relutância Variável (MRVs) são atrativos para a indústria e para o setor de transporte, em resposta à crescente demanda por motores elétricos de alta eficiência, performance e baixo custo, devido à construção mais simples; podendo ainda fornecer confiabilidade de operação em ambientes severos (BILGIN; JIANG; EMADI, 2018). Tal atratividade se deve: à compatibilidade com aplicações que requerem um controle de velocidade e envolvem paradas e retomadas frequentes, devido à baixa inércia; ao maior custo de produção dos motores de ímã permanente (preços dos ímas de terras raras), uma vez que, estes têm um alto fator de potência inerente; e à alta eficiência, maior velocidade máxima e operação em cargas parciais durante grande parte do ciclo de trabalho, quando comparado aos motores de indução. Além do que, os MRVs podem produzir até o dobro de potência em relação aos motores de indução, considerando tamanhos equivalentes.

Os MRVs pertencem ao grupo de máquinas elétricas que produzem conjugado devido à variação da relutância do circuito magnético, têm uma construção simples, robusta e de baixo custo, maior temperatura de operação permissível devido à ausência de ímãs no rotor e podem fornecer alta eficiência em média e alta velocidade. Além disso, são, inerentemente, máquinas de velocidade variável que necessitam de um sistema de controle eletrônico para o acionamento e operação motora, porém, apresentam desvantagens como baixa qualidade do torque, vibração e ruído acústico, o que, provavelmente, restringiu sua popularidade em aplicações industriais. Contudo, os problemas relacionados aos MRVs, bem como a demanda por maior eficiência, potência entregue e tamanho reduzido podem

ser endereçados às técnicas de otimização fazendo-se uso de simulações numéricas. As simulações permitem que os engenheiros possam estimar o comportamento de projetos em vários cenários do mundo real, reduzindo a necessidade de construir protótipos físicos para testes.

O processo de otimização consiste em buscar as melhores combinações das variáveis técnicas que minimizam ou maximizam o resultado de uma ou mais funções de avaliação, satisfazendo restrições em um intervalo de tempo razoável (AHMAD *et al.*, 2022). Em vista disto, métodos heurísticos baseados em observações da natureza têm sido foco de estudo na aplicação em problemas de otimização reais. Em geral, problemas de projetos industriais podem ser formulados matematicamente como problemas de otimização com o intuito de alcançar critérios de desempenho específicos, enquanto, satisfaz restrições técnicas de projeto dentro de limites pré-definidos (KUCI, 2018). O processo de otimização é essencial em várias áreas científicas, devido à demanda da indústria por produtos mais competitivos e eficientes. Por exemplo, busca-se minimizar os custos de produção e maximizar a performance de um motor elétrico, simultaneamente, sem que a durabilidade e a confiabilidade sejam prejudicadas.

Este capítulo apresenta as motivações e justificativas, os objetivos e as contribuições da tese, bem como o estado da arte e as publicações desenvolvidas. Por fim, apresenta-se a organização deste trabalho.

## 1.1 Motivações e justificativas

A otimização baseada em modelos numéricos corresponde à campos de pesquisa ativos na engenharia e matemática aplicada, podendo ser desafiadora quando considera-se o acoplamento físico entre as Equações Diferenciais Parciais (EDP), relacionadas aos diferentes fenômenos físicos envolvidos que governam o comportamento de um motor elétrico e são discretizadas pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) (ZHANG; CEN, 2016). O acoplamento básico ocorre, geralmente, entre os modelos eletromagnético, mecânico e de circuito elétrico, o qual é suficiente na caracterização do comportamento operacional do motor elétrico (KERÄNEN; MANNINEN; PIPPURI, 2015).

A baixa qualidade do torque, vibração e ruído acústico, característicos dos MRVs, normalmente, estão relacionadas com os polos salientes, o chaveamento e a estratégia de controle impostos pelo conversor de potência (CORREA *et al.*, 2011). Basicamente, a redução da oscilação do torque, das vibrações e o aumento do valor médio do torque são alcançados por meio da otimização do controle dos ângulos de comutação, da corrente de referência e da aplicação de estratégias de controle sofisticadas, como o *Torque Sharing Function* (TSF) (CORREA *et al.*, 2011; PENG *et al.*, 2015). O controle dos ângulos de comutação é, geralmente, implementado através de um controlador de corrente de histerese, ambos sendo de fácil implementação. Porém seu desempenho é limitado ao ajuste

de apenas três parâmetros. Em contrapartida o TSF define uma referência de corrente completa em função da referência de torque, gerando diferentes perfis de corrente que reduzem a oscilação do torque nas regiões de comutação (BILGIN; JIANG; EMADI, 2018). Entretanto, em vista da disponibilidade do controle de corrente dos ângulos de comutação em uma bancada experimental, desenvolvida por Moraes Filho (2017), na Universidade Federal de Uberlândia, este tipo de controle foi escolhido para ser aplicado neste trabalho.

Os sistemas de acionamento compostos por conversores assimétricos e outras topologias que compartilham as chaves controladas, bem como os sistemas de acionamento de velocidade ajustável, *Adjustable Speed Drives*, são equipamentos industriais simples, de baixo custo, mas que produzem harmônicas durante a operação devido à presença de componentes eletrônicos de estado sólido. Ademais, estas topologias são sensíveis à problemas relacionados à qualidade de energia elétrica, incluindo afundamentos, picos e transitórios de tensão (DESWAL; DAHIYA; JAIN, 2008).

A minimização singular da oscilação do torque implica na degradação de outras características importantes, tais como a eficiência e o fator de potência. Contudo, a otimização multiobjetivo produz várias possíveis soluções resultando tanto na redução da oscilação quanto no incremento do valor médio do torque. Os métodos heurísticos baseados em observações da natureza, pertencentes ao campo de inteligência artificial e caracterizados pela busca aleatória, são capazes de realizar buscas em diferentes níveis de exploração durante o processo de otimização, garantindo a diversidade da população, enquanto, se concentram nas vizinhanças das melhores soluções. Neste contexto, as meta-heurísticas são flexíveis, robustas e eficientes, sendo capazes de localizar com eficiência o ótimo global de diferentes problemas de otimização, sem a necessidade de modificações expressivas na estrutura do algoritmo e do conhecimento de informações particulares acerca de diferentes tipos de problemas (AHMAD *et al.*, 2022).

O algoritmo de Evolução Diferencial (ED), pertencente à família de algoritmos evolucionários, é considerado um dos otimizadores mais populares para a solução de problemas de otimização complexos; apesar de sua simplicidade, o algoritmo de ED apresenta maior habilidade de otimização do que outras meta-heurísticas em resolver problemas não lineares, multimodais e não separáveis (AHMAD *et al.*, 2022). Por outro lado, os algoritmos de otimização por enxame de partículas, *Particle Swarm Optimization* (PSO), são aplicados em vários problemas do cotidiano e apresentam três vantagens sobre outras meta-heurísticas: facilidade de implementação e poucos parâmetros de ajuste; recursos de memória mais eficientes devido à lembrança dos melhores valores individuais e globais antecedentes; manutenção eficiente da diversidade do enxame (SLOWIK; KWASNICKA, 2018).

Em um estudo desenvolvido pelos autores Nebro *et al.* (2009), uma versão, ou variante dos algoritmos de otimização multiobjetivo por enxame de partículas, o algoritmo

*Speed-constrained Multi-objective PSO* (SMPSO), atingiu os melhores valores para três indicadores de qualidade em oito, numa média de doze problemas, quando comparado com cinco algoritmos de otimização multiobjetivo (dois algoritmos genéticos, um *scatter search*, um algoritmo genético celular e uma versão do PSO bio-inspirada).

Visto que ambos os algoritmos mostram-se promissores na solução de problemas de otimização reais (WANG; TAN; LIU, 2018; SLOWIK; KWASNICKA, 2018; POLI, 2008; SLOWIK; KWASNICKA, 2020; AHMAD *et al.*, 2022), o algoritmo de ED mono-objetivo e o SMPSO foram escolhidos para aplicação nos problemas abordados neste trabalho.

## 1.2 Objetivos

Esta seção apresenta a proposta da tese por meio dos objetivos gerais e específicos.

### 1.2.1 Objetivo geral

O objetivo principal deste trabalho consiste em aplicar técnicas de otimização, baseadas na Análise em Elementos Finitos (AEF), no sistema de acionamento de um MRV com foco na melhoria do desempenho e na redução dos problemas relacionados ao motor elétrico.

### 1.2.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos podem ser divididos em:

- Simular computacionalmente o comportamento de um MRV 8/6 (oito polos no estator e seis no rotor) operado por um conversor *half-bridge* com controle de histerese de corrente através dos programas Gmsh/GetDP/ONELAB;
- Validar a ferramenta de elementos finitos através da comparação com os dados obtidos em testes experimentais elaborados no trabalho de Moraes Filho (2017);
- Estudar as técnicas de otimização relacionadas aos algoritmos evolucionários e aos algoritmos de inteligência de enxame;
- Interligar os algoritmos de otimização multiobjetivo com os programas de elementos finitos através do módulo *onelab.py* incluso no ONELAB;
- Encontrar automaticamente as dimensões geométricas do MRV, a partir de um *design* existente, que maximizam a relação *fluxo magnético concatenado por volume de material magnético*;
- Encontrar automaticamente os ângulos de comutação que minimizam o nível de oscilação do torque eletromagnético e maximizam o valor médio do torque durante



um ciclo elétrico completo para um dado ponto de operação (velocidade, corrente e torque de carga);

### 1.3 Contribuições da tese

Esta tese destaca e revisita técnicas de otimização originadas de diferentes meta-heurísticas, as equações do fenômeno magnetodinâmico e o método dos elementos finitos aplicados aos motores a relutância. As principais contribuições da tese são apresentadas a seguir:

- Determinação de processos de otimização por meio da AEF de MRVs acoplados a conversores estáticos através de equações circuitais, utilizando os programas Gmsh e GetDP;
- Integração de dois *frameworks* voltados à otimização multiobjetivo, *pymoo* (BLANK; DEB, 2020) e *platypus* (HADKA, 2017), com a interface ONELAB, em vista da facilidade em operar diferentes algoritmos de otimização com ou sem restrições e a possibilidade de retomada do processo iterativo em qualquer geração em meio à uma falha de execução ou ausência de critério de parada;
- Eliminação da necessidade de criação e manipulação de *Look-Up Tables* (LUT), as quais descrevem a relação entre o fluxo magnético concatenado, a excitação de corrente e a posição do rotor. As LUT são, comumente, geradas através da análise em elementos finitos de motores elétricos e inseridas em programas especializados na solução de circuitos elétricos;
- Estudo do impacto da modificação de parâmetros geométricos de um MRV sobre a capacidade de produção de torque e redução da quantidade de material necessária à manufatura;
- Estudo do impacto do controle dos ângulos de comutação no conversor de potência sobre a qualidade do torque eletromagnético, eficiência e fator de potência do motor elétrico;
- Promoção e incentivo do uso de programas de código-aberto nas atividades de produção científica dentro do laboratório de Fontes Alternativas de Energia e Proteção de Sistemas Elétricos da Faculdade de Engenharia Elétrica.

### 1.4 Estado da arte

As referências foram agrupadas de acordo com a seguinte estruturação: livros, teses e dissertações, artigos técnicos, manuais de *software*, *frameworks* para os algoritmos de otimização e publicações.

A investigação bibliográfica realizada que expressa o estado da arte do assunto em pauta, se baseou no conjunto de publicações anteriores:

- 15 Livros;
- 11 Teses;
- 4 Dissertações;
- 40 Artigos técnicos;
- 5 Manuais de *software*;
- 2 *Frameworks* em linguagem *Python*;
- 1 Publicação;

A seguir, são apresentadas as produções bibliográficas relevantes ao desenvolvimento da tese.

#### 1.4.1 Livros

O autor Krantz (2013) do livro intitulado “A guide to functional analysis” apresenta os fundamentos da Análise Funcional matemática através da definição do espaço de funções estudados pela teoria de equações diferenciais e teoria das séries de Fourier. A análise é importante no desenvolvimento deste trabalho, uma vez que fornece a base para o entendimento dos espaços de quadrado integrável e os espaços de Hilbert, sobre os quais são definidos os operadores gradiente, divergente e rotacional aplicados aos campos elétrico e magnético.

Os autores Munkres (2000), Lima (1999), Krantz (2009) apresentam a topologia do espaço Euclidiano  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$ , incluindo os conceitos de conjuntos limitados abertos, fechados, compactos e o conceito de conexidade. Estes conceitos são necessários para o estudo e definição do domínio dos problemas relacionados aos dispositivos eletromagnéticos, em especial os motores elétricos. Além disso, são necessários para o desenvolvimento das condições de contorno e transmissão dos campos sobre as formulações variacionais.

Os autores Bastos (1996), Bastos (2012), Machado (2002) dos livros da teoria de Eletromagnetismo e cálculo de campos elétricos e magnéticos tratam dos fenômenos físicos que podem ser modelados pelas equações de Maxwell, em especial aproximando os campos na forma quase-estática. Os livros possuem a base teórica completa para o tratamento dos campos em meio contínuo, incluindo as condições de contorno e transmissão dos campos.

Os autores Gockenbach (2006), Griffiths e Smith (2006) introduzem os fundamentos de métodos computacionais, destinados à solução numérica de equações diferenciais parciais

através do método de elementos finitos, os quais incluem: a teoria, implementação e solução de sistemas lineares, bem como métodos de resolução de equações não lineares. Além disso, o método de elementos finitos é desenvolvido na forma variacional de problemas de valor de contorno com os espaços relevantes de Hilbert através do método de Galerkin.

Os fundamentos eletromecânicos, modelagem, simulação, análise e os procedimentos de projeto dos MRVs com foco em aplicações industriais são classificados, a seguir, de acordo com Krishnan (2017), Miller (1993), Bilgin, Jiang e Emadi (2018):

- Princípios operacionais e modelagem;
- Considerações de *design*;
- Construção mecânica;
- Topologias de conversores eletrônicos de potência;
- Técnicas e estratégias de controle;
- Fundamentos e análise da oscilação do torque eletromagnético, vibração mecânica, ruído acústico e tratamento térmico;
- Projeto de conversores de alta potência;
- Aplicações dos sistemas de acionamento do MRV;

Além disso, os autores Bilgin, Jiang e Emadi (2018) fornecem uma perspectiva da indústria de motores elétricos em um contexto mais atual, bem como diferentes proposições sobre as configurações dos MRVs e aplicação de técnicas de otimização sobre parâmetros de controle com o intuito de satisfazer requisitos de desempenho de uma aplicação.

O termo *machine learning* é utilizado na definição do aprendizado de máquinas e consiste em um campo de pesquisa dentro da inteligência artificial cujas técnicas incorporam ideias provenientes de uma variedade de áreas: psicologia, estatística, neurociência, genética, entre outras (KENNEDY, 2010). Dentro deste campo de pesquisa, existe a inteligência de enxames, disciplina que estuda o comportamento coletivo de sistemas compostos por vários indivíduos que interagem localmente entre si e com seu ambiente, baseando-se na auto-organização. Exemplos de tais sistemas são as colônias de formigas, cardumes de peixes, bandos de pássaros, incluindo sistemas robóticos e alguns programas de computador direcionados à problemas de otimização como o algoritmo de otimização por enxame de partículas (KENNEDY; EBERHART; SHI, 2001). Os autores Kennedy, Eberhart e Shi (2001) discutem os fundamentos e conceitos de inteligência, as técnicas de otimização por tentativa e erro, bem como a teoria da computação evolucionária e a inteligência coletiva.

Os autores Price, Storn e Lampinen (2005) apresentam o algoritmo de evolução diferencial, o qual é baseado no operador de mutação diferencial, como uma ferramenta poderosa e confiável para a solução de problemas de otimização global que apresentam certa dificuldade. Desta maneira, o livro apresenta a estrutura clássica do algoritmo e seu desempenho frente a outros algoritmos evolucionários, incluindo cenários de otimização multiobjetivo e diversas aplicações em sistemas reais.

Os autores Zhang e Cen (2016) apresentam a metodologia numérica e as aplicações de engenharia em problemas multidisciplinares referentes à simulações multifísicas. O livro descreve os princípios básicos e métodos de acoplamento para a modelagem multifísica, incluindo as áreas relacionadas da física, tal como a mecânica estrutural, dinâmica de fluidos, transferência de calor, eletromagnetismo e campos da acústica; com foco nos termos e condições de acoplamento relacionados. Além disso, apresenta tópicos importantes como a simulação multifísica de máquinas elétricas rotativas, as equações fundamentais envolvidas na modelagem, a discretização das formulações em potencial pelo método dos elementos finitos, as equações de acoplamento entre os fenômenos, bem como as condições de periodicidade para redução do domínio de estudo.

#### 1.4.2 Teses e dissertações

As simulações computacionais de dispositivos eletromagnéticos alimentados por conversores estáticos foram conduzidas através da resolução simultânea das equações de campo magnético e do circuito do conversor (ROEL O., 2002; OLIVEIRA, 2000; ANTUNES, 2002; LUZ, 2003) utilizando os software *Electromagnetic Fields Computer Aided Design* (EFCAD) e Gmsh/GetDP. O equacionamento do circuito elétrico é realizado em variáveis de espaço de estados pela Teoria dos Grafos aliada a Teoria de Circuitos Elétricos. As equações de circuito são combinadas diretamente com as equações de campo através das correntes nos enrolamentos da estrutura eletromagnética e as tensões entre seus terminais. Os autores Roel O. (2002) e Antunes (2002) aplicaram o método a um motor de indução linear tubular e a um servomotor CC sem escovas, ambos considerando o movimento da parte móvel através das equações mecânicas.

As teses de doutorado de Geuzaine (2001), Luz (2003) contribuem para a modelagem de fenômenos eletromagnéticos em estruturas tridimensionais utilizando técnicas de elementos finitos, como os elementos de aresta, acoplados às variáveis elétricas globais de circuitos fonte, por exemplo, diretamente nas formulações matemáticas dos problemas. Além disso, implementam métodos numéricos dentro do ambiente do programa de elementos finitos e detalham a formulação matemática necessária na modelagem. Destacando-se o método dos elementos finitos para a solução de equações diferenciais parciais em duas e três dimensões considerando-se ou não o acoplamento de outros fenômenos físicos com o fenômeno eletromagnético citam-se: Deliège (2003), Zaglmayr (2006), Kolmbauer (2012).

A tese de doutorado de Malagoli (2016) utiliza as técnicas de elementos finitos para a solução de problemas de otimização multiobjetivo envolvendo motores elétricos de indução através do uso de algoritmos de evolução. O trabalho tem por objetivos a minimização do volume da máquina e a maximização da eficiência energética via determinação das variáveis geométricas. Além da minimização dos custos na fabricação do motor de indução trifásico e maximização do torque médio. Por fim, o trabalho considera o movimento da parte móvel através das equações mecânicas usando o *software* Gmsh/GetDP.

Os trabalhos de Silveira (2012) explora o sistema de acionamento das máquinas a relutância variável operando como motor ou gerador através da transição dos modos de operação. Para tanto, implementou-se técnicas de controle de tensão através de diferentes estratégias, validando-as por meio de resultados experimentais de um protótipo. Ainda neste sentido, a dissertação de mestrado de Moraes Filho (2017) concentrou-se na implementação de uma plataforma experimental para o acionamento de um motor a relutância variável, com o auxílio da ferramenta de elementos finitos, FEMM. A análise foi primordial para o dimensionamento dos circuitos e componentes da bancada de modo a acionar o motor elétrico de forma apropriada, bem como na previsão do comportamento dinâmico do motor aplicando diferentes cargas.

### 1.4.3 Artigos técnicos

Conforme a análise do comportamento dinâmico de motores elétricos modelados em elementos finitos se torna mais complexa ao considerar efeitos como correntes induzidas no núcleo magnético, profundidade de penetração e efeitos de proximidade em indutores compostos por condutores maciços, a simulação demanda maior tempo computacional. Neste sentido, Peng e Gyselinck (2016), Peng *et al.* (2016) desenvolveram uma ferramenta que consiste de um modelo do circuito magnético equivalente combinado ao modelo reduzido de um MRV em elementos finitos com o intuito de reduzir o tempo computacional mantendo-se a precisão dos resultados. Os autores Rengifo, Romero e Aller (2018) estudaram os efeitos do inversor de tensão *PWM* sobre as perdas de potência de um motor de indução utilizando uma análise pelo MEF com os programas Gmsh e GetDP.

Os trabalhos recentes desenvolvidos pelos autores Kumar e Saxena (2019), Lachheb, Amraoui e Khediri (2016), Preethishri e Roseline (2019), Li, Chen e Fahimi (2018), Oncu, Tuncer e Koyuncu (2022), Peng *et al.* (2015) baseiam-se nas simulações do sistema de controle de MRVs através do pacote MATLAB/Simulink, sendo as características magnéticas estáticas obtidas por meio de ferramentas de elementos finitos e as equações analíticas do MRV derivadas do circuito magnético equivalente. De fato, esse procedimento é prático e efetivo na simulação do sistema de controle que alimenta o modelo matemático aproximado. Contudo, a aplicação de técnicas de otimização necessita da comunicação com o ambiente de elementos finitos a cada iteração do processo. Por outro lado, pacotes comerciais

de modelagem em elementos finitos para solução numérica de problemas físicos (ANSYS, COMSOL Multiphysics e JMAG) e não comerciais (Elmer FEM e Gmsh/GetDP/ONELAB) permitem a execução das técnicas de otimização dentro de seus ambientes.

Os autores Malagoli, Camacho e Luz (2021) aplicaram técnicas de otimização, implementadas no ambiente MATLAB, a um motor de indução modelado nos *software* Gmsh e GetDP a fim de otimizar o torque eletromagnético. Os autores Wang, Yang e Gu (2016) conduziram uma análise das perdas elétricas no núcleo de um MRV 8/6, em que o modelo em elementos finitos e o circuito elétrico foram acoplados entre os *software* Maxwell e ANSYS Simplorer, respectivamente.

O pacote ONELAB (ONELAB, 2022) é uma interface abstrata para o compartilhamento de informações entre o gerador de malhas 3D em elementos finitos Gmsh (GEUZAINÉ; REMACLE, 2009) e o solucionador GetDP (DULAR; GEUZAINÉ, 2022), o qual tem sido usado por pesquisadores para executar vários tipos de análises em máquinas de indução e a relutância (PENG; GYSELINCK, 2016; PENG *et al.*, 2016; RENGIFO; ROMERO; ALLER, 2018; PENG *et al.*, 2015; MALAGOLI; CAMACHO; LUZ, 2021; MALAGOLI, 2016). Os programas são gratuitos, têm código-fonte aberto e várias possibilidades de configuração, algo que não é possível em pacotes de solução de elementos finitos comerciais. As informações detalhadas sobre as funções de cada módulo, diagramas de blocos dos módulos presentes e vantagens sobre a utilização do pacote podem ser encontradas em Shchuchkin, Khoroshev e Pavlenko (2017).

#### 1.4.4 Manuais e *frameworks*

O *software* FEMM é um pacote de programas para a solução de problemas eletromagnéticos de baixa frequência em domínios bidimensionais, endereçando problemas magnéticos estáticos e harmônicos, eletrostáticos e de fluxo de calor (MEEKER, 2020) (Disponível em: <https://www.femm.info/wiki/Download>).

O *software* Gmsh é um gerador de malhas tridimensional em elementos finitos, possuindo uma interface gráfica com capacidades de visualização flexíveis. Os módulos embarcados (geometria, malha, solucionador e pós-processamento) podem ser controlados pela interface gráfica a partir de rotinas escritas na própria linguagem (arquivos *.geo*) ou outras interfaces de programação (C++, C, Python, Julia e Fortran) (GEUZAINÉ; REMACLE, 2009) (Disponível em: <http://gmsh.info>).

O *software* GetDP é uma ferramenta de elementos finitos cuja função é solucionar numericamente equações diferenciais parciais que se originam dos diferentes fenômenos físicos, permitindo o acoplamento de problemas eletromagnéticos, térmicos, estruturais, entre outros. Pode lidar com problemas de várias dimensões e diferentes resoluções: estática, transitória, harmônica e multi-harmônica; utilizando elementos finitos hierárquicos (DULAR; GEUZAINÉ, 2022) (Disponível em: <http://getdp.info>). A resolução de problemas

com redução do domínio de estudo e conexão com bandas de movimento tridimensionais também são possíveis, bem como o acoplamento de técnicas de otimização.

O ONELAB é uma interface desenvolvida para a integração do *software* de elementos finitos com o Gmsh, permitindo o compartilhamento de parâmetros e a construção de aplicações específicas para fins industriais ou de pesquisa (Disponível em: <https://onelab.info>). Além disso, implementa uma interface entre o servidor (Gmsh + banco de dados) e os clientes (programas de projeto assistidos por computador, gerador de malhas, solucionadores de elementos finitos, pós-processadores). A construção de aplicações específicas são possíveis através do uso de diferentes programas: (Gmsh+GetDP+LTSpice), (Gmsh+GetDP), (Gmsh+Safir), (Gmsh+GetDP+Elmer), (Gmsh+Code Aster), etc.

Por fim, o *framework pymoo* (BLANK; DEB, 2020) fornece vários códigos de algoritmos de otimização mono-objetivo e multiobjetivo, dispondo de vários recursos relacionados à métrica de convergência e tomada de decisão. Enquanto, que o *framework platypus* (HADKA, 2017) dedica-se à computação evolucionária com foco nos algoritmos evolucionários multiobjetivo. Ambas as bibliotecas são escritas em linguagem *Python*, sendo extremamente úteis para a integração dos *frameworks* através da interface ONELAB.

#### 1.4.5 Publicações

O desenvolvimento da tese gerou a seguinte publicação em revista: “Optimization Techniques and Mathematical Modeling Applied to Reluctance Motors”.

- Investigou-se técnicas de otimização baseadas no método dos elementos finitos que fossem adequadas à busca pela redução das perdas no cobre e pelo aumento da capacidade de produção do torque em diferentes motores a relutância variável através da modificação de parâmetros elétricos e geométricos. Para tanto, utilizou-se os algoritmos mono-objetivo de evolução diferencial e otimização por enxame de partículas, bem como o algoritmo multiobjetivo baseado no enxame de partículas em conjunto com os programas FEMM e Gmsh/GetDP/ONELAB (MIRANDA; MALAGOLI; CAMACHO, 2022).

## 1.5 Organização da tese

O Capítulo 2 apresenta um modelo matemático para a representação do comportamento físico de um MRV por meio das equações contínuas que governam o fenômeno eletromagnético, as quais são aplicadas sobre regiões magnéticas e de fontes de força eletromotriz, apropriadamente definidas, considerando-se condições de contorno e de transmissão dos campos adicionais. Além disso, desenvolve-se a formulação matemática do problema descrita em um sentido fraco, útil na utilização do MEF e introduz-se os espaços funcionais contínuos.

O Capítulo 3 expõe o complexo formado pelos espaços discretos de Whitney que correspondem aos diferentes tipos de elementos de Whitney, conduzindo à definição das funções de base e às definições das condições de contorno e de periodicidade (estas podem ser diretamente aplicadas à conexão da banda de movimento), bem como o acoplamento entre as equações de circuito elétrico externo e as equações de campo magnético. Por fim, o capítulo apresenta as equações mecânicas que regem o movimento da parte móvel dos motores elétricos e a AEF no domínio do tempo.

O Capítulo 4 apresenta as equações necessárias ao projeto e dimensionamento de um MRV 8/6, uma estratégia de operação utilizando uma topologia de conversor assimétrico através do controle de corrente de histerese e a modelagem matemática dos semicondutores de potência presentes no conversor. Além disso, caracterizam-se os ângulos de comutação do conversor sob a perspectiva dos ângulos elétricos de cada fase do motor definidos pela posição relativa dos respectivos polos.

Por sua vez, o Capítulo 5 discute técnicas de otimização baseadas na teoria da evolução e no comportamento de animais na natureza, bem como a formulação de um problema de otimização multiobjetivo, os conceitos de solução não dominada e a metodologia utilizada nos processos de otimização. Além disso, apresenta dois estudos de caso definidos como problemas de otimização.

O Capítulo 6 apresenta e discute os resultados da simulação numérica do acionamento do MRV, validados através de dados experimentais, para uma situação específica de carga e velocidade e os resultados relativos aos problemas de otimização definidos para os dois estudos de caso.

Em último, o Capítulo 7 apresenta as conclusões acerca das investigações conduzidas por meio da metodologia proposta com observações sobre os resultados obtidos e finalmente, cita as propostas para trabalhos futuros.



## 2 MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O FENÔMENO ELETROMAGNÉTICO

### 2.1 Introdução

As equações de Maxwell surgem da caracterização de aplicações reais em problemas eletromagnéticos, cujas relações expressam a interação entre os campos vetoriais. Tais equações formam uma representação matemática do problema físico onde há interdependência total das variáveis. Especificamente, problemas envolvendo máquinas elétricas recaem sobre o grupo de aplicações em baixa frequência, em que, a densidade de corrente de deslocamento é desprezada, direcionando à uma aproximação quase-estática. Desta maneira, a resolução numérica do problema utilizando o método de elementos finitos conduz aos chamados problemas variacionais, onde os espaços funcionais, chamados de espaços de quadrado integrável e Sobolev, formam uma estrutura matemática para a aplicação das equações de Maxwell. Para a resolução numérica, diferentes formulações podem ser desenvolvidas de acordo com o campo elétrico, ou magnético, conduzindo ao complexo dual de Rham (GEUZAINÉ, 2001).

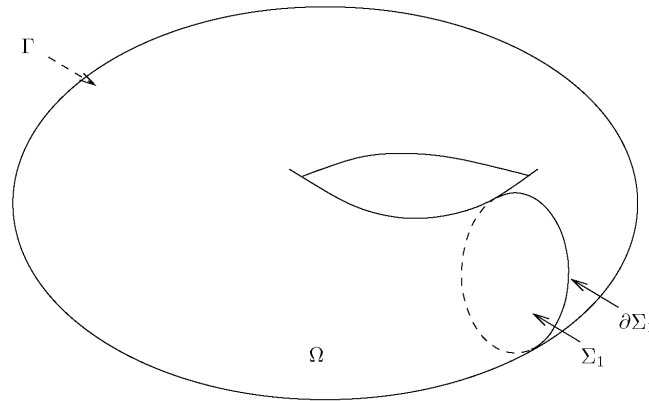
Este capítulo apresenta alguns conceitos de espaços topológicos necessários à definição do domínio do problema, as equações de Maxwell simplificadas para os fenômenos de baixa frequência, as leis de comportamento dos materiais e as condições de contorno, que descrevem o comportamento de dispositivos eletromagnéticos através da interação entre o meio e os campos vetoriais. Tais equações são base para as formulações matemáticas em potencial vetor magnético no problema da magnetodinâmica. Além disso, introduz-se os teoremas da divergência e de Stokes, necessários ao desenvolvimento das condições de contorno, e a identidade de Green, útil na construção das formulações variacionais juntamente com alguns conceitos matemáticos de espaços topológicos. A estrutura matemática contínua do problema eletromagnético é apresentada por meio dos espaços funcionais para a implementação das formulações na forma fraca.

### 2.2 Teoremas da divergência, Stokes e identidades de Green

Assume-se que  $\partial\Omega$  seja a fronteira de um domínio aberto  $\Omega$  indicada por  $\Gamma$ , como ilustra a Figura 1. Sendo, o campo de vetores unitários normal direcionado para fora de  $\Gamma$ , indicado por  $\vec{n}$ , o teorema da divergência relaciona a divergência de um campo vetorial  $\vec{u}$  no domínio  $\Omega$  ao fluxo de  $\vec{u}$  sobre a superfície  $\partial\Omega$  (DELIÉGE, 2003),

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{u} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot \vec{u} \, d\partial\Omega \quad (2.1)$$

Considere  $\Sigma$  como sendo uma superfície aberta em  $\Omega$ , seu contorno  $\partial\Sigma$  sendo uma

Figura 1 – Conjunto aberto e limitado  $\Omega$  com uma superfície de corte  $\Sigma_1$ 

Fonte: Adaptado de Geuzaine (2001).

linha e  $\vec{t}$  sendo um vetor unitário tangente a  $\partial\Sigma$ . O teorema de Stokes relaciona o rotacional do campo vetorial  $\vec{u}$  na superfície  $\Sigma$  à integral de linha de  $\vec{u}$  em torno de  $\partial\Sigma$  (DELIÉGE, 2003),

$$\int_{\Sigma} \vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{u}) \, d\Sigma = \int_{\partial\Sigma} \vec{u} \cdot \vec{t} \, d\partial\Sigma \quad (2.2)$$

As Equações (2.3a) e (2.3b) apresentam identidades vetoriais diferenciais úteis na obtenção das formulações de problemas variacionais (DELIÉGE, 2003),

$$a(\nabla \cdot \vec{v}) = \nabla \cdot (a\vec{v}) - \vec{v} \cdot \nabla a \quad (2.3a)$$

$$\vec{u} \cdot (\nabla \times \vec{v}) = \nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) + \vec{v} \cdot \nabla \times \vec{u}. \quad (2.3b)$$

## 2.3 Conjuntos de espaços topológicos

Esta seção apresenta noções de conjuntos fechados e abertos, fronteira ou contorno, fecho, interior e conexidade. Noções estas são essenciais para o desenvolvimento das condições de transmissão, de contorno e para a definição das formulações forte e fraca.

### 2.3.1 Conjunto aberto

Um conjunto aberto no espaço Euclidiano ou em um espaço topológico é a generalização de intervalo aberto em uma dimensão. Seja um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^2$ , se para cada par  $(x, y) \in S$  existe um disco aberto  $\Omega$  contendo  $(x, y)$  e está contido em  $S$ , o subconjunto  $S$  é aberto. Equivalentemente, um conjunto é aberto se ele não contém nenhum de seus pontos de fronteira, ou se, e somente se, coincidir com seu interior.

## 2.3.2 Fecho, interior e fronteira

Considere um subconjunto  $S \subset X$  em um espaço dotado de uma topologia  $\mathcal{T}$ , o fecho, ou aderência  $\bar{S}$  é definido como a interseção de todos os conjuntos fechados que estão contidos em  $S$  (MUNKRES, 2000). Ou seja, o fecho de  $S$  é a união de  $S$  com seu contorno, ou fronteira:

$$\bar{S} = S \cup \partial S, \quad (2.4)$$

e é, pela própria definição, um conjunto fechado.

Considerando o mesmo subconjunto  $S$ , dado um ponto  $p \in X$ , este é um ponto interior de  $S$  se  $p \in S$ . A coleção  $\mathcal{P}$  de todos os pontos interiores de  $S$  é chamado de interior do subconjunto  $S$  e denotado por  $S^0$ , cuja definição é a união de todos os conjuntos abertos que estão contidos em  $S$ .

Para  $S \subset X$ , a fronteira ou contorno de  $S$  é definida,

$$\partial S := \bar{S} \setminus S^0, \quad (2.5)$$

ou seja, a fronteira de  $S$  é definida como os elementos do fecho de  $S$  que não estão no interior de  $S$ . Em outras palavras, a fronteira de  $S$  é o complemento de seu interior  $S^0$ . Adicionalmente, define-se o complemento de  $S$  como:

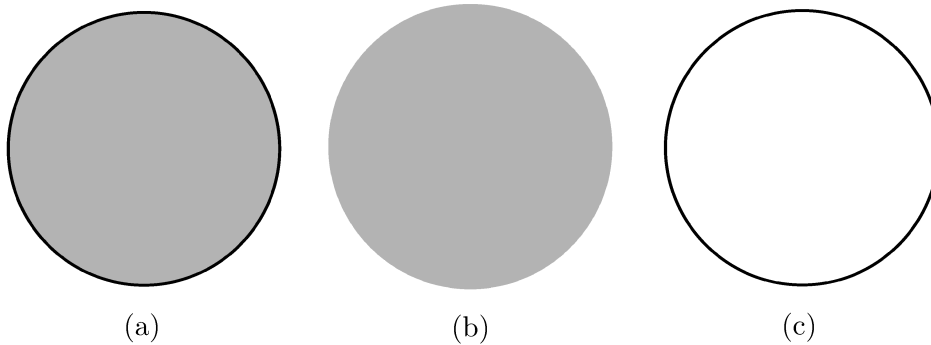
$$S^C = \{x \in X \mid x \notin S\}. \quad (2.6)$$

Em geral, a fronteira do subconjunto  $S$  é o conjunto de pontos que pode ser aproximado do interior ou do exterior de  $S$ . Dada uma topologia usual em  $\mathbb{R}^2$ , considere o disco fechado  $\bar{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , como ilustrado na Figura 2a. O contorno do disco fechado, que também é o contorno de seu interior, — o disco aberto  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ , Figura 2b — é o círculo de raio unitário que circunda o disco  $\partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ , como representado na Figura 2c.

Seguem algumas propriedades do interior e da fronteira de um conjunto:

- A fronteira de qualquer conjunto  $S$  é fechado;
- A fronteira de qualquer conjunto  $S$  é a fronteira do complemento do conjunto:  
 $\partial S = \partial(S^C)$ ;
- $\partial\Omega$  é a fronteira do disco aberto  $\Omega$  e também do disco fechado  $\Omega \cup \partial\Omega$ ;
- $\Omega$  é o interior do disco fechado  $\Omega \cup \partial\Omega$  e  $\Omega \cup \partial\Omega$  é o fecho do disco aberto  $\Omega$ .

Figura 2 – (a) O disco fechado; (b) interior do disco; (c) fronteira do disco



Fonte: Reprodução de Krantz (2009).

### 2.3.3 Conexidade

A cisão de um espaço topológico  $X$  é uma decomposição  $X = U \cup V$  em dois subconjuntos abertos disjuntos  $U$  e  $V$ , em que nenhum dos quais contém pontos limites do outro (MUNKRES, 2000). Ou seja, os dois subconjuntos  $U$  e  $V$  são ditos disjuntos se não existe nenhum elemento em comum entre ambos. O espaço  $X$  é dito conexo se não admite nenhuma cisão possível em  $X$ , caso contrário, é desconexo. A conexidade é uma propriedade intrínseca e não depende do espaço em que está imerso.

A partição de um conjunto  $X$  é qualquer coleção  $\mathcal{P}$  de conjuntos mutuamente disjuntos, cuja união é o próprio conjunto. Isto é, seja o conjunto  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , as partições são subconjuntos disjuntos tal que  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ .

### 2.3.4 Compacidade

Um conjunto compacto é um conjunto, possivelmente, infinito que se comporta como um finito (KRANTZ, 2009). Seja um espaço topológico  $X$  e  $S \subseteq X$ , uma cobertura aberta de  $S$  é uma coleção  $\mathcal{W} = \{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$  de subconjuntos abertos, cuja união dos elementos de  $\mathcal{W}$  é igual a  $S$ . Uma subcobertura finita de  $\mathcal{W}$  é uma coleção finita  $W_{\alpha_1}, W_{\alpha_2}, \dots, W_{\alpha_k}$ . O conjunto  $S$  é compacto se qualquer cobertura aberta  $\mathcal{W}$  de  $S$  tem uma subcobertura finita que também cobre  $S$ , resumidamente, quando o conjunto for limitado e fechado (LIMA, 1999). Por exemplo, todas as esferas e bolas fechadas do espaço euclidiano são compactas.

## 2.4 Equações de Maxwell em meio contínuo

O eletromagnetismo clássico trata do fenômeno físico eletromagnético, cujos campos elétricos variantes no tempo produzem campos magnéticos e vice-versa (ZAGLMAYR, 2006). Em aplicações de baixa frequência, a corrente de condução é considerada muito maior que a densidade de corrente de deslocamento, podendo esta ser desprezada caso a frequência não exceda poucas centenas de kHz no vácuo. Deste modo, o comprimento de

onda excede as dimensões geométricas da maioria dos dispositivos estudados (DELIÉGE, 2003). Esta aproximação é chamada de quase-estática e permite desacoplar o sistema em dois grupos principais: eletrostática e magnetismo. As equações de Maxwell para este último, na forma quase-estática, são escritas no  $\mathbb{R}^3$  como,

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (2.7a)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.7b)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (2.7c)$$

Onde:

$\vec{H}$  é o campo magnético ( $A/m$ );

$\vec{J}$  é a densidade de corrente elétrica ( $A/m^2$ );

$\vec{E}$  é o campo elétrico ( $V/m$ );

$\vec{B}$  é a indução magnética ou densidade de fluxo magnético ( $T$ ).

As Equações (2.7a)-(2.7c) formam uma representação matemática dos problemas físicos magnetodinâmicos. A ideia é resolvê-las numericamente, a fim de se obter uma solução para o problema, mais precisamente, determinar os campos vetoriais (quantidades locais)  $\vec{H}$ ,  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  em qualquer instante de tempo  $t$ . Se não houver variação temporal de grandeza ( $\partial \vec{B} / \partial t = 0$ ), o sistema de equações refere-se à magnetostática. O conjunto de equações de Maxwell sob a forma completa, é caracterizado pelo acoplamento das equações, onde há interdependência total de variáveis, devendo portanto, ser resolvido de maneira única (BASTOS, 1996).

Adicionalmente, a chamada “equação da continuidade de corrente” é deduzida aplicando-se a divergência em ambos os lados da Equação (2.7a),

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0. \quad (2.8)$$

Isto significa que a corrente de condução é conservativa (BASTOS, 1996).

Em um meio contínuo, os campos elétrico e magnético podem induzir os fenômenos de condução, polarização e magnetização. A forma como isto ocorre depende do tipo de material imerso nestes campos. O sistema de equações (2.7) ainda é indeterminado, visto que, o número de equações fornecidas é inconsistente com o número de incógnitas (ZAGLMAYR, 2006). A solução consiste na inclusão de relações constitutivas apropriadas, também chamadas de leis de comportamento, modelando os efeitos macroscópicos resultantes das interações entre o meio e os campos vetoriais (DELIÉGE, 2003). Primeiro, relaciona-se o campo magnético com o fluxo correspondente,

$$\vec{B} = \mu\vec{H} + \vec{B}_r, \quad (2.9)$$

onde  $\vec{B}_r$  é a indução magnética remanente, a qual é acrescentada para tratar ímãs permanentes porventura existentes no domínio (LUZ, 2003). Além disso, em materiais condutores, o campo elétrico induz uma corrente de condução com densidade  $\vec{J}_c$ , dada pela Lei de Ohm:

$$\vec{J} = \vec{J}_c + \vec{J}_s \quad (2.10)$$

$$\vec{J}_c = \sigma\vec{E}, \quad (2.11)$$

onde  $\vec{J}$  e  $\vec{J}_s$  denotam as densidades de corrente total e imposta, respectivamente. Esta última é válida para geradores, cuja densidade de corrente independe do campo eletromagnético. Um tipo de corrente de condução são as correntes parasitas, as quais surgem em corpos metálicos se excitado por campos magnéticos variantes no tempo. A relação (2.10) é válida para condutores não móveis (GEUZAINÉ, 2001).

As propriedades elétrica e magnética de um meio são caracterizadas pela: permeabilidade magnética  $\mu$  ( $H/m$ ), permissividade elétrica  $\epsilon$  ( $F/m$ ) e condutividade elétrica  $\sigma$  ( $S/m$ ). Em geral, estes parâmetros são tensores com dependência do espaço, tempo e dos próprios campos eletromagnéticos. No entanto, em meios isotrópicos, são simplificados em quantidades escalares (ZAGLMAYR, 2006). Mesmo que as relações constitutivas sejam aproximações das interações físicas, elas permitem descrever com precisão o comportamento do problema estudado (GEUZAINÉ, 2001).

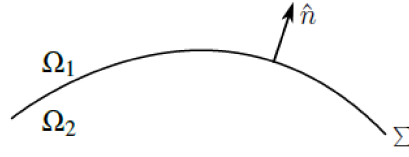
## 2.5 Condições de interface ou transmissão dos campos

Assuma que um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , definido como um volume fechado, seja partido em dois domínios disjuntos  $\Omega_1, \Omega_2$ , tal que  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  (ZAGLMAYR, 2006). A interface  $\Sigma := \Omega_1 \cap \Omega_2$  é a interseção dos subdomínios, e  $\hat{n}$  refere-se ao vetor unitário normal à superfície  $\Sigma$  que aponta de  $\Omega_2$  para  $\Omega_1$ , como ilustrado na Figura 3.

Aplicando-se o teorema da divergência na Equação (2.7b), obtêm-se a lei de Gauss na forma integral:

$$\int_{\partial\Omega} \vec{B} \cdot \hat{n}_{\partial\Omega} dA = 0, \quad (2.12)$$

onde  $\hat{n}_{\partial\Omega}$  é o vetor unitário normal à superfície de contorno  $\partial\Omega$  e  $dA$  sua respectiva área infinitesimal. A indução magnética através da superfície de um volume fechado (limitado)  $\Omega$  é conservativa; não existem cargas magnéticas e as linhas de campo são fechadas.

Figura 3 – Superfície  $\Sigma$  entre dois meios contínuos  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ 

Fonte: Reprodução de Luz (2003).

Considerando-se uma superfície gaussiana cilíndrica fechada de bases iguais e comprimento desprezível (MACHADO, 2002) entre os dois meios, a integral da indução magnética  $\vec{B}$  sobre o contorno  $\partial\Omega$  se torna:

$$0 = \int_{\Sigma} (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n} dA, \quad (2.13)$$

onde  $\vec{B}_1 := \vec{B}|_{\Omega_1}$ ,  $\vec{B}_2 := \vec{B}|_{\Omega_2}$ ,  $\hat{n} = \hat{n}_2 = -\hat{n}_1$  e  $(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n} = \vec{B} \cdot \hat{n}$  denota a transmissão sobre a interface  $\Sigma$ . Para satisfazer a Equação (2.13),

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)|_{\Sigma} = 0, \quad (2.14)$$

implica que as componentes normal da indução magnética devem ser contínuas sobre a interface  $\Sigma$  e define a condição de transmissão para a indução magnética  $\vec{B}$ .

A condição de transmissão para o campo elétrico  $\vec{E}$  é obtida da lei de Faraday na forma integral, a qual é derivada da Equação (2.7c) após aplicado o teorema de Stokes

$$\int_{\partial\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{t} dl = - \int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA, \quad (2.15)$$

onde  $\hat{t}$  é o vetor unitário tangente ao contorno  $\partial\Sigma$  e  $dl$  seu comprimento. Considerando-se um plano de superfície arbitrário  $A$  entre os dois meios, seu percurso retangular é denotado por  $\partial A$ . Assuma que, este plano  $A$  intercepte a interface  $\Sigma$ , definida acima, ao longo de uma linha  $L := A \cap \Sigma$ ;  $A_1 := A \cap \Omega_1$  e  $A_2 := A \cap \Omega_2$  sejam duas partes disjuntas de  $A$ , tal que  $A_1 \cup A_2 = A$  e  $A_1 \cap A_2 = L$ . Aplicando-se a lei de Faraday sobre os subdomínios  $A_1$  e  $A_2$ ,

$$\begin{aligned} - \int_{A_1} \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \cdot \hat{n}_{A_1} dA_1 - \int_{A_2} \frac{\partial \vec{B}_2}{\partial t} \cdot \hat{n}_{A_2} dA_2 &= \int_{\partial A_1} \vec{E}_1 \cdot \hat{t}_1 dl_{A_1} + \int_{\partial A_2} \vec{E}_2 \cdot \hat{t}_2 dl_{A_2} \\ 0 &= \int_L \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) dl, \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde  $\vec{E}_1 := \vec{E}|_{A_1}$ ,  $\vec{E}_2 := \vec{E}|_{A_2}$ ,  $\hat{t} = \hat{t}_2 = -\hat{t}_1$  e  $\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \hat{n} \times \vec{E}$  denota a transmissão sobre a interface  $\Sigma$ . Para satisfazer a Equação (2.16),

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)|_{\Sigma} = 0, \quad (2.17)$$

implica que as componentes tangenciais do campo elétrico devem ser contínuas sobre a interface  $\Sigma$  e define a condição de transmissão para o campo elétrico  $\vec{E}$ . Esta última abordagem pode ser utilizada na obtenção das condições de transmissão para o campo magnético  $\vec{H}$ . Aplicando-se o teorema de Stokes na Equação (2.7a):

$$\int_{\partial\Sigma} \vec{H} \cdot \hat{t} d\ell = - \int_{\Sigma} \vec{J}_s \cdot \hat{n} dA, \quad (2.18)$$

e levando-se em conta a existência de correntes impostas na superfície  $\Sigma$ ,

$$\begin{aligned} - \int_A \vec{J}_s \cdot \hat{n}_A dA &= \int_{\partial A_1} \vec{H}_1 \cdot \hat{t}_1 d\ell_{A_1} + \int_{\partial A_2} \vec{H}_2 \cdot \hat{t}_2 d\ell_{A_2} \\ - \vec{J}_s \cdot \hat{\tau} &= (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \hat{t}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde  $\hat{\tau} = \hat{n} \times \hat{t}$  é o vetor unitário perpendicular à superfície  $A$ , obtém-se a condição de transmissão para o campo magnético:

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)|_{\Sigma} = -\vec{J}_s. \quad (2.20)$$

Caso não exista qualquer densidade de corrente imposta  $\vec{J}$  na interface  $\Sigma$  entre os dois meios, a componente tangencial do campo magnético  $\vec{H}$  é contínua na interface, não sofrendo alteração em direção ou intensidade (MACHADO, 2002). Caso contrário, a componente tangencial terá descontinuidade na fronteira.

Logo, conclui-se que as componentes normais da densidade de fluxo  $\vec{B}$  e as componentes tangenciais das intensidades de campo  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  são contínuas na interface, desconsiderando correntes impostas  $\vec{J}_s = 0$ . Contudo, as componentes normais das intensidades de campo e as componentes tangenciais das densidades de fluxo podem sofrer descontinuidades na interface (ZAGLMAYR, 2006).

## 2.6 Condições de contorno

As condições de contorno adequadas devem ser aplicadas sobre a fronteira do domínio de estudo  $\Omega$  para assegurar a unicidade da solução (LUZ, 2003). Assim, ocorrem



por razões físicas (condições no infinito ou associadas aos materiais idealizados) e/ou simetria (quando fixa-se a direção dos campos). As condições de contorno clássicas, ou condições homogêneas, para as componentes normais ou tangenciais dos campos eletromagnéticos são do tipo Dirichlet e Neumann, respectivamente.

Assuma que  $\Omega_{PC}$  seja uma região perfeitamente condutora,  $\sigma \approx \infty$ . A lei de Ohm,  $\vec{J}_c = \sigma \vec{E}$ , implica  $\vec{E}|_{\Omega_{PC}} \approx 0$ , desde que,  $\vec{J}_c$ , seja limitado (ZAGLMAYR, 2006). Deste modo, a condição de transmissão (2.17) justifica substituir as regiões perfeitamente condutoras através de:

$$\hat{n} \times \vec{E}|_{\Sigma_{PC}} = 0. \quad (2.21)$$

Sendo  $\Omega_{PM}$  uma região perfeitamente magnética,  $\mu \approx \infty$ , o campo magnético  $\vec{H}|_{\Omega_{PM}} \approx 0$  pela lei de comportamento,  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ . A condição de transmissão justifica substituir uma região perfeitamente magnética pela condição de contorno:

$$\hat{n} \times \vec{H}|_{\Sigma_{PM}} = 0. \quad (2.22)$$

Além disso, as densidades de correntes superficiais prescritas, ou impostas, sobre o contorno  $\Sigma$  são definidas pela condição de interface (2.20), através da condição de contorno:

$$\hat{n} \times \vec{H}|_{\Sigma} = \vec{J}_s. \quad (2.23)$$

## 2.7 Problema de valor de contorno

As equações de Maxwell introduzidas na Seção 2.4 são Equações Diferenciais Parciais (EDPs) utilizadas para descrever problemas eletromagnéticos de baixa frequência no domínio do tempo. Mais especificamente, problemas práticos onde há indução de correntes de Foucault nos domínios condutores quando as fontes de excitação são variantes no tempo. Suponha que o problema físico seja modelado pela seguinte EDP,

$$\nabla \times (\alpha \nabla \times \vec{u}) + \beta \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla v \right) = \vec{f} \quad em \ \Omega, \quad (2.24)$$

onde  $\vec{f}$  é uma função vetorial definida em  $\Omega$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes,  $v$  é uma função escalar e  $\vec{u}$  é um campo vetorial desconhecido.

A Equação (2.24) é descrita em um domínio<sup>1</sup> limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , mais precisamente em um espaço Euclidiano orientado<sup>2</sup>. A fronteira do domínio não faz parte do próprio conjunto e é finita, denotada por  $\partial\Omega$ . O fecho do domínio será denotado por  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  (GOCKENBACH, 2006). A EDP, por si só, é insuficiente para determinar uma solução particular, além disso, possui várias soluções. Logo, as condições de contorno são necessárias para garantir a existência e unicidade da solução, constituindo um Problema de Valor de Contorno (PVC). Este pode ser transformado na forma equivalente, chamada forma fraca ou variacional, a qual pode ser aproximada por diferentes métodos (GOCKENBACH, 2006). O método comumente utilizado, chamado método de Galerkin, produz a melhor aproximação, através de um dado subespaço, da solução exata de um problema variacional.

Por exemplo, se  $\vec{f}$  é uma função definida no domínio  $\Omega$  e  $\vec{g}$  é uma função definida na fronteira  $\partial\Omega$ :

$$\nabla \times (\alpha \nabla \times \vec{u}) + \beta \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla v \right) = \vec{f} \quad em \ \Omega \quad (2.25a)$$

$$\vec{n} \times \vec{u} = \vec{g} \quad em \ \partial\Omega, \quad (2.25b)$$

a Equação (2.25b) é referida como condição de contorno de Dirichlet. Comumente, utiliza-se esta condição de contorno para definir quantidades locais sobre a fronteira  $\partial\Omega$  do domínio  $\Omega$ . Se  $\vec{g}$  é fixado como uma função nula, significa dizer que as componentes tangenciais de  $\vec{u}$  se anulam sobre a fronteira e a condição de contorno é dita ser homogênea. Similarmente, a condição de contorno de Neumann fixa a derivada das componentes normais de  $\vec{u}$  sobre  $\partial\Omega$  e tem a forma:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = \vec{h} \quad em \ \partial\Omega, \quad (2.26)$$

onde  $\partial \vec{u} / \partial \vec{n}$  é a derivada normal de  $\vec{u}$  em  $\partial\Omega$ . Esta condição pode ser incluída em condições de contorno periódicas ou anti-periódicas e aplicada em problemas que possuem simetria geométrica, onde somente uma porção do domínio é suficiente para caracterizar o problema. A vantagem na utilização deste método é a redução do domínio computacional.

As condições de contorno e de transmissão dos campos (acoplam os campos locais entre os subdomínios) caracterizam as restrições locais do problema. Já as fontes, definidas pelo fluxo ou circulação dos campos, podem ser fixadas quantitativamente ou acopladas aos campos locais para levar em consideração circuitos externos. Estas são caracterizadas como restrições globais.

<sup>1</sup> Um domínio é um conjunto conectado aberto.

<sup>2</sup> O espaço Euclidiano tridimensional  $\mathbb{E}^3$  é um espaço dos números reais  $\mathbb{R}^3$  dotado de um produto interno.

## 2.8 Espaços funcionais

Na teoria clássica, assume-se que todas as derivadas parciais existem e são contínuas, levando ao espaço  $C^k(\bar{\Omega})$  (GOCKENBACH, 2006). No entanto, no sentido fraco, não é necessário que todas as funções e derivadas sejam contínuas, mas que sejam integráveis. A noção de limite na definição de derivadas parciais pode ser substituída por outra forma no sentido de distribuição. Se  $u$  é uma função, seu suporte é o fecho do conjunto no qual  $u$  é não nulo:

$$\text{supp}(u) = \overline{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : u(x, y) \neq 0\}}, \quad (2.27)$$

onde  $u$  é definido em  $\Omega$  e o  $\text{supp}(u)$  é um subconjunto compacto de  $\Omega$ ; logo  $u$  é compactamente suportado em  $\Omega$ . Este tipo de função tem seu valor nulo próximo e sobre a fronteira  $\partial\Omega$  e se adequa a problemas físicos.

Considere que o espaço  $C_0^\infty(\Omega)$  seja um conjunto de todas as funções infinitamente diferenciáveis e compactamente suportadas em  $\Omega$ . Tal função  $u \in C_0^\infty(\Omega)$  deve ter a propriedade que  $u$  e todas suas derivadas parciais tendam a zero se  $(x, y)$  aproxima-se do contorno de  $\text{supp}(u)$ . Neste tipo de espaço, condições de contorno homogêneas são impostas. Quando o PVC (2.25) é descrito num sentido fraco, as derivadas sobre o campo vetorial  $\vec{u}$  são descritas no sentido distributivo, requerendo unicamente que estas sejam localmente integráveis. O que conduz aos espaços de quadrado integrável.

### 2.8.1 Espaços de quadrado integrável e de Sobolev

O espaço  $L^2(\Omega)$  dos campos escalares de quadrado integrável e o espaço  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  dos campos vetoriais de quadrado integrável sobre  $\Omega$  são definidos por:

$$L^2(\Omega) = \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} v^2 d\Omega < \infty \right\}, \quad (2.28)$$

$$\mathbf{L}^2(\Omega) = \left\{ \vec{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} \|\vec{u}\|^2 d\Omega < \infty \right\}, \quad (2.29)$$

os quais são espaços de Lebesgue das funções de quadrado integrável. A solução  $\vec{u}$  do PVC (2.25) e suas derivadas parciais devem pertencer ao espaço  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . Estas condições definem o espaço de Sobolev de campos vetoriais (GOCKENBACH, 2006),

$$\mathbf{H}^1(\Omega) = \left\{ \vec{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \frac{\partial \vec{u}}{\partial x}, \frac{\partial \vec{u}}{\partial y}, \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \right\}, \quad (2.30)$$

combinando os conceitos de fracamente diferenciável e a norma de Lebesgue. Este é um subespaço de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , para o qual todas as derivadas parciais de primeira ordem são funções

de quadrado integrável (GEUZAINÉ, 2001). O espaço de Sobolev para o qual condições de contorno homogêneas devam ser satisfeitas é definido por:

$$\mathbf{H}_0^1(\Omega) = \{\vec{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \vec{u} = 0 \text{ em } \partial\Omega\}. \quad (2.31)$$

Assuma que  $\Gamma_H$  e  $\Gamma_E$  ( $\Gamma = \partial\Omega$ ) sejam as fronteiras dos domínios disjuntos  $\Omega_H$  e  $\Omega_E$ , estas são definidas em relação às componentes tangenciais de  $\vec{H}$  e  $\vec{E}$  (LUZ, 2003). Os espaços que definem o domínio dos operadores diferenciais gradiente  $\mathbf{grad}_E$ , rotacional,  $\mathbf{rot}_E$  e divergente  $\mathbf{div}_E$  (GEUZAINÉ, 2001) são definidos por:

$$H_E^1(\mathbf{grad}; \Omega) = \{u \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \nabla u \in \mathbf{L}^2(\Omega), u|_{\Gamma_E} = 0\}, \quad (2.32)$$

$$\mathbf{H}_E^1(\mathbf{rot}; \Omega) = \{\vec{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \nabla \times \vec{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \vec{n} \times \vec{u}|_{\Gamma_E} = 0\}, \quad (2.33)$$

$$\mathbf{H}_E^1(\mathbf{div}; \Omega) = \{\vec{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \nabla \cdot \vec{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \vec{n} \cdot \vec{u}|_{\Gamma_E} = 0\}. \quad (2.34)$$

### 2.8.2 Estrutura matemática base

A estrutura matemática, na qual as equações de Maxwell são aplicadas, é formada pelos espaços de quadrado integrável desenvolvidos no espaço Euclidiano de objetos orientados no  $\mathbb{R}^3$ . Neste caso, os campos eletromagnéticos são caracterizados por campos escalares, por exemplo, o potencial escalar elétrico  $\varphi$ , e campos vetoriais como o campo magnético  $\vec{H}$  e a densidade de fluxo magnético  $\vec{B}$ . Segundo Geuzaine (2001), os espaços de quadrado integrável  $L^2$  e  $\mathbf{L}^2$  são os espaços nos quais se procuram as soluções das equações de Maxwell. Contudo, a estrutura poderia ser estendida a um espaço topológico  $n$ -dimensional, onde os campos escalares e vetoriais seriam considerados como a representação, em três dimensões, de outros elementos geométricos definidos como formas diferenciais. Além disso, é de conhecimento que os campos eletromagnéticos não são considerados campos vetoriais, mas pertencem a uma classe mais genérica de campos vetoriais covariantes antissimétricos (DELIÉGE, 2003). Existem quatro tipos de tais campos, os quais são chamados de formas diferenciais (forma- $p$ ), onde  $p = 0, \dots, 3$ .

Uma estrutura que comporta as formas diferenciais, muito útil na análise numérica das equações de Maxwell, é o Complexo de Rham, o qual relaciona espaços funcionais e seus operadores diferenciais naturais, em três dimensões, (ZAGLMAYR, 2006),

$$H_E^1(\Omega) \xrightarrow{\mathbf{grad}_E} \mathbf{H}_E^1(\mathbf{rot}; \Omega) \xrightarrow{\mathbf{rot}_E} \mathbf{H}_E^1(\mathbf{div}; \Omega) \xrightarrow{\mathbf{div}_E} L^2(\Omega). \quad (2.35)$$

Este é referido como o complexo dual de Rham quando relacionado com a formulação conforme em  $\vec{B}$  (GEUZAINÉ, 2001).

Um campo físico (local) é dito ser de forma- $p$ , se quando integrado no domínio dimensional- $p$ , uma quantidade física (global) é obtida. Estas são conhecidas como grandezas globais, as quais podem ser impostas na região do domínio através dos funcionais do tipo fluxo e circulação,  $\mathbf{H}(\text{div}; \Omega)$  e  $\mathbf{H}(\text{rot}; \Omega)$  (LUZ, 2003), respectivamente. As condições globais do tipo fluxo remetem aos campos vetoriais  $\vec{J}$  e  $\vec{B}$ . Quando integrados através das superfícies  $\Gamma_i$ , situadas sobre a fronteira do domínio de estudo, obtêm-se a intensidade de corrente  $I$ , e o fluxo magnético  $\Psi$ . Os fluxos são definidos por:

$$\int_{\Gamma_i} \vec{n} \cdot \vec{J} ds = I_i, \quad (2.36)$$

$$\int_{\Gamma_i} \vec{n} \cdot \vec{B} ds = \Psi_i. \quad (2.37)$$

As condições globais do tipo circulação remetem-se aos campos vetoriais  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ , que se integradas ao longo das curvas,  $\gamma_i$ , pertencentes ao domínio, obtêm-se a força eletromotriz,  $V$ , e a força magnetomotriz,  $\Phi$ , respectivamente. As circulações são definidas por:

$$\int_{\gamma_i} \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_i, \quad (2.38)$$

$$\int_{\gamma_i} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Phi_i, \quad (2.39)$$

onde  $\vec{n}$  é o campo de vetores unitários normal à  $\Gamma_i$  orientados para o exterior de  $\Omega$ , e  $d\vec{l}$  é o campo de vetores unitários tangente à  $\gamma_i$ .

## 2.9 Problema da magnetodinâmica

O sistema de equações (2.7) compõe os chamados problemas de correntes de Foucault. Para a solução de tais problemas, existem várias formulações derivadas de diferentes potenciais introduzidos pelos campos  $\vec{E}$  ou  $\vec{H}$  (KOLMBAUER, 2012). Este trabalho aborda o problema da magnetodinâmica através da formulação em potencial vetor magnético conforme em  $\vec{B}$ , ou formulação  $\vec{A} - V$ , a qual é derivada de Luz (2003) e Geuzaine (2001). Assume-se que  $\Omega$  seja um domínio simplesmente conexo e limitado no  $\mathbb{R}^3$ . Da Equação (2.7b), a indução magnética pode ser expressa como  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ , no qual,  $\vec{A}$  é o potencial vetor magnético. Inserindo o termo na lei de Faraday, Equação (2.7c), e utilizando uma identidade vetorial, existe um potencial escalar elétrico  $\varphi$ , tal que:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi. \quad (2.40)$$

### 2.9.1 Formulação em potencial vetor magnético

Combinando a lei de Ampère, Equação (2.7a), a relação constitutiva, Equação (2.9), a equação (2.10) e introduzindo o potencial vetor magnético junto da Equação (2.40), obtém-se,

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) = \nabla \times (\nu \vec{B}_r) - \sigma \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \varphi \right) + \vec{J}_s, \quad (2.41)$$

onde  $\nu$  é a relutividade magnética ( $m/H$ ). Como não há presença de imãs no domínio de estudo, característica da máquina a relutância variável, por exemplo, a equação anterior se reduz a:

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) = -\sigma \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \varphi \right) + \vec{J}_s. \quad (2.42)$$

A continuidade do potencial vetor magnético sobre a interface,  $\Gamma_E$ , é garantida em analogia à condição de contorno (2.21):

$$\hat{n} \times \vec{A} \Big|_{\Gamma_E} = 0, \quad (2.43)$$

e implica que a densidade de fluxo magnético através da fronteira seja nula, isto é,  $\vec{n} \cdot \vec{B} = 0$ .

Na formulação em potencial vetor magnético, não existem dificuldades ligadas às regiões não simplesmente conexas, mas seu caráter vetorial acarreta maior número de incógnitas em relação às formulações em potencial escalar (LUZ, 2003). No entanto, a formulação necessita de condições suplementares para garantir a unicidade da solução, uma vez que os potenciais  $\vec{A}$  e  $\varphi$  não são únicos. A unicidade pode ser forçada impondo condições adicionais, chamadas de calibre (*gauging*, em inglês) (ZAGLMAYR, 2006). No caso de coeficientes constantes, o calibre de Coulomb é comumente usado:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \text{ em } \Omega, \quad (2.44)$$

e requer uma condição de contorno adicional  $\hat{n} \cdot \vec{A} = 0$ . Além disso, correntes impostas tem seu divergente nulo,  $\nabla \cdot \vec{J}_s = 0$ . Outra equação de calibre pode ser escrita como:

$$\vec{A} \cdot \vec{W} = 0, \quad (2.45)$$

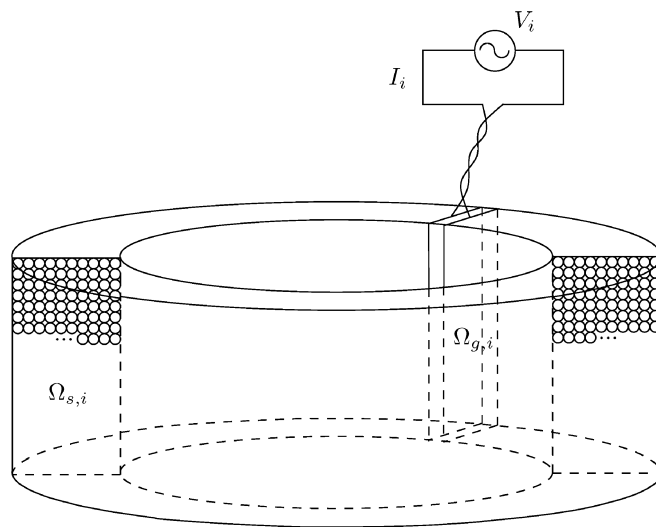
onde  $\vec{W}$  é um campo de vetores cujas linhas de campo não são fechadas e são tais que podem ligar todos os pares de pontos quaisquer do domínio de estudo (LUZ, 2003). A condição  $\vec{A} \cdot \vec{W} = 0$  é natural no espaço de elementos de aresta e sua implementação consiste em anular a circulação de  $\vec{A}$  ao longo de todas as arestas de uma árvore<sup>3</sup> definida no domínio de estudo.

A estrutura do modelo magnetodinâmico para a formulação conforme em  $\vec{B}$  é formada pelos espaços funcionais definidos na sequência de Rham (2.35). Os campos vetoriais  $\vec{E} \in \mathbf{H}_E^1(\mathbf{rot}; \Omega)$  e  $\vec{B} \in \mathbf{H}_E^1(\mathbf{div}; \Omega)$  compõem a solução do sistema de equações (2.7) com as relações constitutivas, aplicado os potenciais  $\vec{A} \in \mathbf{H}_E^1(\mathbf{rot}; \Omega)$  e  $\varphi \in H_E^1(\Omega)$ . Analisando o Complexo de Rham, ao se aplicar o operador diferencial **grad** no potencial escalar elétrico  $\varphi \in H_E^1(\Omega)$ , resulta em  $-\nabla\varphi = \vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \in \mathbf{H}_E^1(\mathbf{rot}; \Omega)$ . A aplicação do operador diferencial **rot** no potencial vetor magnético  $\vec{A}$  resulta na densidade de fluxo magnético  $\vec{B} \in \mathbf{H}_E^1(\mathbf{div}; \Omega)$ . E, sucessivamente, aplicando o operador **div** em  $\vec{B}$ , resulta no vetor nulo  $\vec{0} \in L^2(\Omega)$ . Perceba que os operadores diferenciais **grad**, **rot** e **div** transformam uma forma- $p$  em uma forma- $(p+1)$ . Neste sentido, geometrias diferenciais definem um operador de derivação chamado de derivada exterior  $d$ .

### 2.9.2 Domínios do problema

Assume-se que o domínio limitado  $\Omega$ , definido na Seção 2.7, contenha os subconjuntos  $\Omega_{s,i}$  e  $\Omega_{g,i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , os quais são apresentados na Figura 4.

Figura 4 – Subdomínio indutor  $\Omega_{s,i}$  conectado a um gerador  $\Omega_{g,i}$



Fonte: Adaptado de Geuzaine (2001).

<sup>3</sup> Uma árvore é um conjunto de arestas que liga todos os nós da malha entre elas sem formar um caminho fechado.

Considera-se, também, que os domínios indutores  $\Omega_{s,i}$  sejam compostos de condutores finos, sobre os quais é imposta uma densidade de corrente  $\vec{J}_{s,i}$ . A região  $\Omega_{s,i}$  é caracterizada por uma bobina de  $N_i$  espiras de calibre muito pequeno. Desta forma, pode-se assumir que não há indução de correntes no domínio dos indutores  $\Omega_{s,i}$  e, por este motivo, é definido como uma parte não condutora ( $\sigma = 0$ ) de  $\Omega$ , denotado por  $\Omega_c^C$ . Os indutores finos podem ser conectados a um gerador impondo uma tensão global  $V_i$  ou corrente global  $I_i$ , como ilustrado na Figura 4. O gerador age como uma força magnetomotriz. As quantidades globais podem ser conhecidas a priori, ou fornecidas através de circuitos externos. Maiores detalhes sobre as definições de tais domínios e subdomínios, e como é feita a composição das correntes nos indutores finos, maciços ou superfícies condutoras são encontrados em Luz (2003) e Geuzaine (2001).

Em um dispositivo eletromagnético, comumente, há um núcleo magnético laminado envolto por uma bobina de condutores finos. Enquanto, os indutores pertencem a um subdomínio não condutor, o núcleo magnético pertence a um subdomínio condutor ( $\sigma > 0$ ), denotado por  $\Omega_c$  e definido em  $\Omega$ . Isto implica na consideração de uma densidade de corrente  $\vec{J}_c$  dependente do campo elétrico local, Equação (2.11). Caso o núcleo magnético seja considerado um subdomínio pertencente a  $\Omega_c^C$ , as correntes parasitas são desprezadas.

As definições apresentadas até aqui são suficientes para o desenvolvimento da formulação magnetodinâmica, em um sentido fraco, especificando em quais subdomínios os campos vetoriais locais são avaliados.

### 2.9.3 Forma fraca ou variacional

A forma fraca de um PVC é precursor na implementação do Método dos Elementos Finitos (MEF). Para derivá-la das equações que descrevem o fenômeno magnetodinâmico é necessário o uso das identidades de Green (2.3). Suponha que a Equação (2.42), mais a condição de contorno homogênea (2.43) em potencial vetor magnético sobre a interface  $\Gamma_E$  formem um PVC de Dirichlet:

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) + \sigma \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \varphi \right) = \vec{J}_s \quad em \ \Omega, \quad (2.46a)$$

$$\hat{n} \times \vec{A} = 0 \quad em \ \Gamma_E, \quad (2.46b)$$

sendo  $\vec{A}$  uma solução da equação diferencial (2.46a) e  $\vec{J}_s$ ,  $\vec{A}$  e sua derivada parcial contínuos em  $\Omega$ . Utilizando o método dos resíduos ponderados, define-se um resíduo vetorial  $\vec{R}$  através da Equação (2.46a), tal que:

$$\vec{R} = \nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) + \sigma \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \varphi \right) - \vec{J}_s. \quad (2.47)$$



O resíduo é ponderado (NUNES, 2018), (MALAGOLI, 2016) de forma a se anular num sentido médio por meio de funções teste  $\vec{A}' \in \mathbf{H}_E^1(\mathbf{rot}; \Omega)$  sobre o domínio  $\Omega$ , independentemente do instante de tempo:

$$\int_{\Omega} \vec{R} \vec{A}' d\Omega = 0. \quad (2.48)$$

Substituindo a Equação (2.47) em (2.48), tem-se:

$$\int_{\Omega} \left( \nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) + \sigma \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \varphi \right) \right) \cdot \vec{A}' d\Omega = \int_{\Omega} \vec{J}_s \cdot \vec{A}' d\Omega, \quad (2.49)$$

desde que a igualdade seja satisfeita em  $\Omega$ , suas integrais sobre o domínio devem ser iguais. Aplicando a Equação (2.3b) no primeiro termo do lado esquerdo da Equação (2.49), e considerando  $\vec{v} = \nu \nabla \times \vec{A}$  e  $\vec{u} = \vec{A}'$ :

$$\int_{\Gamma_H} \hat{n} \times \vec{H} \cdot \vec{A}' d\Gamma_H + \int_{\Omega} (\nu \nabla \times \vec{A}) \cdot \nabla \times \vec{A}' d\Omega + \int_{\Omega_c} \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{A}' d\Omega_c + \int_{\Omega_c} \sigma \nabla \varphi \cdot \vec{A}' d\Omega_c = \int_{\Omega_s} \vec{J}_s \cdot \vec{A}' d\Omega_s. \quad (2.50)$$

Em geral, a integral sobre  $\Gamma_H$  se anula porque a função teste  $\vec{A}'$  sobre o mesmo contorno é nula. A Equação (2.50) conduz à forma variacional do problema (2.46) em termos do espaço de Sobolev. Encontre  $\vec{A} \in \mathbf{H}_E^1(\mathbf{rot}; \Omega)$ , tal que:

$$\begin{aligned} (\nu \nabla \times \vec{A}, \nabla \times \vec{A}')_{\Omega} + \left( \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \vec{A}' \right)_{\Omega_c} + (\sigma \nabla \varphi, \vec{A}')_{\Omega_c} = \\ (\vec{J}_s, \vec{A}')_{\Omega_s}, \quad \forall \vec{A}' \in \mathbf{H}_E^1(\mathbf{rot}; \Omega), \end{aligned} \quad (2.51)$$

onde  $(\cdot, \cdot)_{\Omega}$  é a notação do produto interno entre dois vetores sobre um domínio volumétrico  $\Omega$ ,

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\Omega} = \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{v} d\Omega, \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{H}_E^1(\mathbf{rot}; \Omega). \quad (2.52)$$

Na Equação (2.51), nota-se a presença de derivadas parciais somente de primeira ordem, enquanto que sua forma forte (2.46), contém um termo de segunda ordem. Isto é, há um relaxamento dos requisitos em  $\vec{A}$ . Pela definição de derivadas fracas, há somente o requisito de que os termos  $\nu \nabla \times \vec{A}$  e  $\nabla \times \vec{A}'$ , por exemplo, sejam localmente integráveis. Em algumas literaturas, o Problema 2.51 é chamado de forma genérica, **rot-rot**, em decorrência do operador diferencial rotacional.

## **2.10 Considerações finais**

Este capítulo apresentou a estrutura matemática contínua para uma modelagem apropriada de dispositivos eletromagnéticos. Além disso, definiram-se as regiões físicas condutoras e não condutoras do dispositivo e dos circuitos externos. O problema da magnetodinâmica formulado em potencial vetor magnético conforme em  $\vec{B}$  se encaixa no complexo de Rham, o qual relaciona espaços funcionais e seus operadores diferenciais naturais. Todas as conjecturas matemáticas são base para a discretização dos campos eletromagnéticos por meio de funções base. O Capítulo 3 introduz as definições da estrutura discreta necessárias para a resolução de problemas magnetodinâmicos pelo método dos elementos finitos e as relações que acoplam os campos magnético com as equações de circuito elétrico.

## 3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

### 3.1 Introdução

Em aplicações práticas, as EDPs, tais como as equações de Maxwell devem ser discretizadas e resolvidas numericamente. Dentre os métodos mais populares de resolução estão o método das diferenças finitas, o método dos volumes finitos e o MEF (DELIÉGE, 2003). Este último surgiu durante os anos 50 na pesquisa do petróleo em águas profundas e na aeronáutica, vindo a se tornar uma ferramenta flexível e eficiente na solução de problemas de distribuição de campos elétricos e magnéticos (BASTOS, 2012; MENDES *et al.*, 2019; WENGERKIEVICZ *et al.*, 2017). Além disso, o método é útil na análise multifísica, a qual engloba problemas de acoplamento de naturezas diversas, sendo de interesse na área de otimização quando se relaciona desempenho e custos de manufatura, por exemplo.

O MEF é baseado na formulação variacional e tem sido estabelecido como a ferramenta mais poderosa na discretização dos campos. Provavelmente, sua principal vantagem se encontra no fato de ser aplicável em uma vasta gama de problemas com coeficientes variantes em domínios complexos com diferentes tipos de condição de contorno (KOLMBAUER, 2012). O método transforma a formulação fraca de uma EDP original em um sistema de equações algébricas lineares. Além disso, requer uma representação discreta da geometria do problema na forma de uma malha de elementos finitos, comumente constituída por triângulos; e espaços funcionais discretos definidos na malha. Os campos discretos definidos nestes espaços são combinações lineares de funções de interpolação, também chamadas de funções de forma, ou funções de base, as quais são determinadas por um conjunto de coeficientes. Estes caracterizam os graus de liberdade do problema (DELIÉGE, 2003).

O processo para discretizar a formulação em potencial vetor magnético consiste em aproximar os espaços contínuos de dimensão infinita, contidos no complexo dual de Rham, em subespaços de dimensão finita. Estes são definidos em uma malha de elementos finitos do domínio de estudo. Usualmente, utiliza-se o método de Galerkin na discretização das equações, o qual é uma técnica de solução numérica aplicada em problemas variacionais. O método de Galerkin se baseia no teorema da projeção em que a melhor aproximação da solução exata, dado um subespaço finito, é calculada. Os subespaços de aproximação devem ser escolhidos tal que a solução real do problema possa ser aproximada por um elemento do subespaço, levando a uma matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  esparsa (GOCKENBACH, 2006).

Este capítulo apresenta, resumidamente, a estrutura matemática discreta, a aproxi-

mação dos campos vetoriais através dos elementos de Whitney, a modelagem matemática do MRV 8/6 com as definições das condições de contorno e de periodicidade, as quais podem ser diretamente aplicadas à conexão da banda de movimento, bem como o acoplamento entre as equações de circuito elétrico externo e as equações de campo magnético. Por fim, o capítulo expõe as equações mecânicas que regem o movimento da parte móvel dos motores elétricos e a Análise em Elementos Finitos (AEF) no domínio do tempo.

### 3.2 Estrutura matemática discreta

Se o objetivo é aproximar os espaços contínuos em subespaços discretos, o domínio deve ser discretizado por meio de uma malha constituída pela união de elementos geométricos com formas simples. A fim de se criar uma sequência completa de espaços sobre a malha, os elementos de Whitney são introduzidos, os quais se baseiam nas formas diferenciais discretas de Whitney. Neste contexto, os quatro tipos de elementos finitos são definidos conforme os subespaços contínuos da sequência (2.35), e estão relacionados aos campos definidos na forma diferencial (forma- $p$ ), discutido na Seção 2.8. O que leva aos espaços globais discretos de grau um  $W_1^i(\Omega)$ ,  $i = 0, \dots, 3$  correspondentes aos tipos de elementos  $i$ . Os espaços discretos constituem um complexo de Rham na forma discreta:

$$W_1^0(\Omega) \xrightarrow{\text{grad}_E} W_1^1(\Omega) \xrightarrow{\text{rot}_E} W_1^2(\Omega) \xrightarrow{\text{div}_E} W_1^3(\Omega). \quad (3.1)$$

O MEF consiste em aproximar a solução  $\vec{A}$  da Equação (2.51) por  $\vec{A}_h$  em um espaço  $W_1^1(\Omega)$ , onde  $h$  representa o tamanho da entidade geométrica. Esta aproximação é feita com relação às funções de base dos elementos finitos. Cada função de base é caracterizada pelo tipo  $i$  correspondente aos espaços  $W_1^i(\Omega)$  e pela entidade geométrica associada, isto é, nós, arestas, faces ou volume do elemento.

Para elementos triangulares de primeira ordem,  $\vec{A}_h$  e as funções teste são tomadas em um espaço:

$$W_1^1(\Omega) = \text{span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_E\}, \quad (3.2)$$

cujos resultados da operação  $\text{span}()$  é definido como o conjunto de todas as combinações lineares dos elementos  $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_E$ , onde  $\vec{w}_e$ ,  $e = 1, \dots, E$  são as funções de base associadas com as  $E$  arestas da malha sobre o domínio  $\Omega$ . Contudo, os campos vetoriais (forma-1)  $\vec{A} \approx \vec{A}_h$  pertencentes ao espaço  $W_1^1$  são interpolados por:

$$\vec{A}_h = \sum_{e=1}^E a_e \vec{w}_e, \quad (3.3)$$

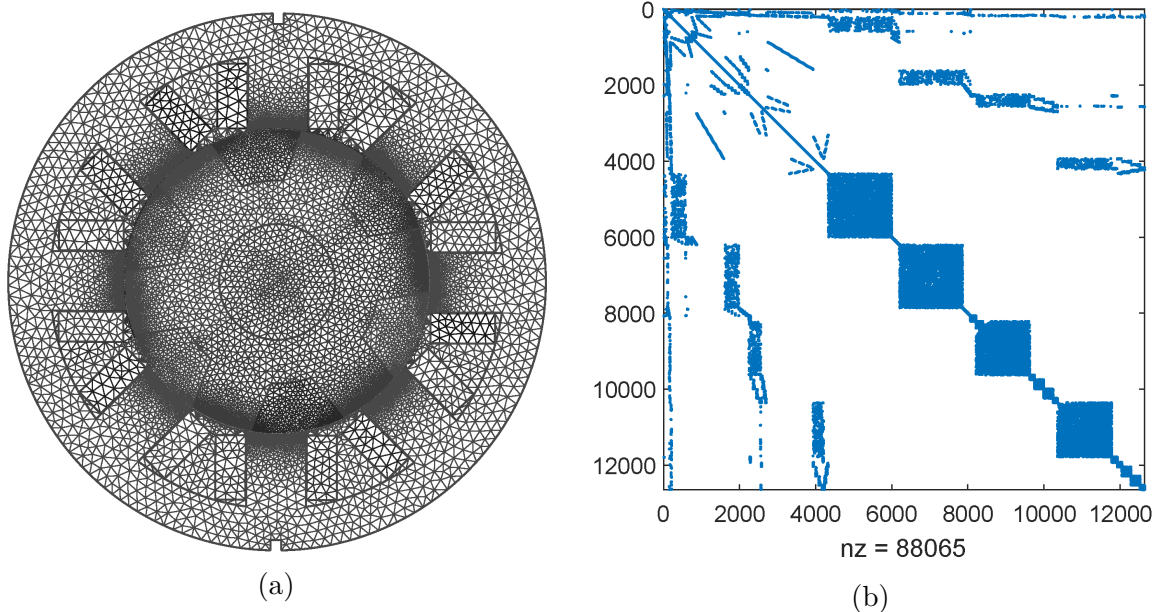
onde  $a_e$  são os graus de liberdade (ou coeficientes) associados com a circulação do campo  $\vec{A}$  sobre as arestas. De modo similar, as funções teste  $\vec{A}'$  são definidas por funções de base<sup>1</sup>  $\vec{w}_e$ . Além disso, o gradiente do potencial escalar elétrico  $\nabla\varphi$  é aproximado por um campo vetorial  $\vec{U}_h$  em um espaço  $W_1^1(\Omega)$ , de tal forma que as funções de base também estejam associadas às arestas da malha.

Inserindo-se a Equação (3.3) em (2.51) e considerando para  $\vec{A}'$ :  $\vec{w}_e$ ,  $e = 1, \dots, E$ , o método de Galerkin conduz a um sistema de equações lineares, para  $s = 1, \dots, E$ , na forma matricial:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{K}$  é a matriz contendo as integrais relacionadas aos operadores diferenciais,  $\mathbf{u}$  é o vetor das variáveis desconhecidas (coeficientes) e  $\mathbf{f}$  é o vetor contendo as integrais relacionadas à densidade de corrente  $\vec{J}_s$ . As funções de base associadas com arestas distantes na malha geométrica conduz a várias integrais nulas, tornando a matriz  $\mathbf{K}$  esparsa. Por exemplo, a resolução numérica de um motor a relutância, cuja malha de elementos finitos contém 12807 nós e 28155 elementos, produz um sistema com 12645 *Degrees of Freedom* (DOF), ou graus de liberdade, o que leva a uma matriz de rigidez simétrica e de tamanho (12645  $\times$  12645) com  $nz = 88065$  elementos não-nulos, ilustrados na Figura 5.

Figura 5 – (a) Malha de elementos finitos; (b) matriz de rigidez



Fonte: Autoria própria.

Os requisitos de armazenamento e o tempo de solução podem ser minimizados através do armazenamento dos elementos envolvidos em somente metade da largura de

<sup>1</sup> Maiores detalhes são encontrados em Nunes (2018), Geuzaine (2001).

banda, ao invés de armazenar a matriz inteira (SADIKU, 2000). Em dispositivos de núcleo magnético saturável, a matriz  $\mathbf{K}$  é dependente das variáveis desconhecidas do vetor coluna  $\mathbf{u}$ . Desta forma, o sistema de equações não linear pode ser resolvido iterativamente por meio do método de Newton-Raphson.

### 3.3 Modelagem matemática do problema magnetodinâmico em duas dimensões

Considera-se o domínio simplesmente conectado  $\Omega$  e limitado no plano  $xy$ , no qual o campo magnético  $\vec{H}$  e a indução magnética  $\vec{B}$  tem componentes na direção em  $z$  nulas. E, assume-se que os campos vetoriais tenham dependência espaço-tempo, desta forma,  $\vec{H} = \vec{H}(x, y, t)$  e  $\vec{B} = \vec{B}(x, y, t)$ . O problema magnetodinâmico é modelado pelas equações de Maxwell considerando-se uma aproximação quase-estática e uma formulação  $\vec{A} - V$  (NSHIMIYIMANA *et al.*, 2020; MALAGOLI, 2016; LUZ, 2003; LUZ *et al.*, 2002; GEUZAINÉ, 2001), segundo a Equação (2.51):

$$(\nu \nabla \times \vec{A}, \nabla \times \vec{A}')_{\Omega} + \left( \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \vec{A}' \right)_{\Omega_c} + (\sigma \nabla \varphi, \vec{A}')_{\Omega_c} - (\vec{J}_s, \vec{A}')_{\Omega_s} = 0, \quad (3.5)$$

onde  $\Omega$  é o domínio de uma seção transversal do dispositivo magnético,  $\Omega_c$  é seu subdomínio condutor e  $\Omega_s$  é o subdomínio, onde a corrente é imposta. Assume-se que a densidade de corrente e o potencial vetor magnético têm direção radial na modelagem bidimensional:  $\vec{J}_s = J_s(x, y, t)\hat{z}$  e  $\vec{A} = A(x, y, t)\hat{z}$ , respectivamente. O potencial escalar,  $\varphi$ , é não nulo somente nas regiões condutoras, desde que  $\vec{A}$  exista em todo o domínio (KERÄNEN; MANNINEN; PIPPURI, 2015).

O problema é descrito em um sentido fraco, e não há necessidade que a equação seja válida absolutamente, mas somente com respeito às funções teste  $\vec{A}'$ . Esta formulação matemática pode ser transcrita (no formato ASCII) para dentro do solucionador GetDP, onde o domínio é discretizado através de elementos de aresta, ou seja, elementos de Whitney. As funções de base de aresta, Equação (3.3), são aplicadas para discretização do campo vetorial  $\vec{A}$ . Ademais, a definição dos tipos de espaços funcionais correspondentes às funções de base, é requerida, uma vez definidas as quantidades locais  $\vec{A}$  e  $\vec{U} = \nabla \varphi$ .

O último termo do lado esquerdo da Equação (3.5) implica na imposição de uma densidade de corrente efetiva, a priori, já conhecida que flui no domínio dos indutores. Para se obter as relações de circuito quando os condutores são submetidos a uma tensão, são necessárias ferramentas adicionais (LUZ, 2003), uma vez que os circuitos são acoplados com o dispositivo eletromagnético através de uma tensão e corrente global.

#### 3.3.1 Equação de circuito externo

Considera-se que os circuitos externos de alimentação estão conectados ao circuito magnético através de indutores finos, ver Seção 2.9.2. Um indutor fino consiste de uma

bobina com  $N_i$  espiras de um fio condutor o qual possui diâmetro reduzido de forma que a corrente seja uniformemente distribuída em sua seção transversal, desprezando-se o efeito pelicular. Segundo a Lei de Faraday aplicada sobre os enrolamentos da bobina, a relação de circuito associada a um indutor fino,  $j$ , é dada por Luz *et al.* (2002):

$$\partial_t(\vec{A}, \vec{w})_{\Omega_s} + RI_j = -U_j, \quad (3.6)$$

onde  $\vec{w}$  é o vetor densidade de condutor,  $U_j$  é a tensão imposta sobre os terminais da bobina,  $R$  é a resistência da bobina e  $I_j$  é a corrente que circula nos enrolamentos do indutor. As grandezas globais  $U$  e  $I$  são provenientes de circuitos externos, sendo a tensão comum tanto ao dispositivo quanto ao conversor, enquanto que a corrente nos enrolamentos é desconhecida. Segundo Malagoli (2016), para cada ramo do circuito são associadas uma corrente e uma tensão no solucionador GetDP, sendo as Leis de Kirchhoff enunciadas em seguida.

O primeiro termo do lado esquerdo da Equação (3.6) se refere à variação temporal do fluxo magnético concatenado  $\Psi$  na bobina. O acoplamento entre as equações do campo magnético e do circuito elétrico, Equações (3.5) e (3.6), é obtido através da densidade de corrente efetiva da fonte no indutor  $\vec{J}_s$ , a qual é expressa em termos da corrente da bobina e de  $\vec{w}$  (LUZ *et al.*, 2002; LUZ, 2003).

### 3.4 Condições de periodicidade e antiperiodicidade

As condições de contorno periódicas, ou condições de periodicidade, são úteis na exploração da simetria inerente às máquinas elétricas, bem como de estruturas periódicas que apresentam repetibilidade da geometria, permitindo que o domínio de estudo do problema possa ser reduzido a uma seção elementar repetitiva (LUZ *et al.*, 2002).

Qualquer par de fronteiras de uma seção periódica é conectado por meio das relações entre os graus de liberdade associados à todas as suas entidades geométricas, aos pares. Tais fronteiras são definidas como fronteira de referência e fronteira associada, indicadas por  $\Gamma_A$  e  $\Gamma_B$ , respectivamente (DULAR *et al.*, 2001).

Na formulação conforme em  $\vec{B}$ , utilizando elementos finitos de aresta, a relação essencial de periodicidade (ou antiperiodicidade, com sinal oposto) para um par de arestas igualmente orientadas em  $\Gamma_A$  e  $\Gamma_B$  é,

$$a_B = \pm a_A, \quad (3.7)$$

onde  $a_A$  e  $a_B$  são os graus de liberdade associados às circulações de  $\vec{A}$  sobre as arestas

consideradas,  $\Gamma_A$  e  $\Gamma_B$  (DULAR *et al.*, 2001). Além disso, a relação natural de periodicidade obtida da Equação (2.50) é,

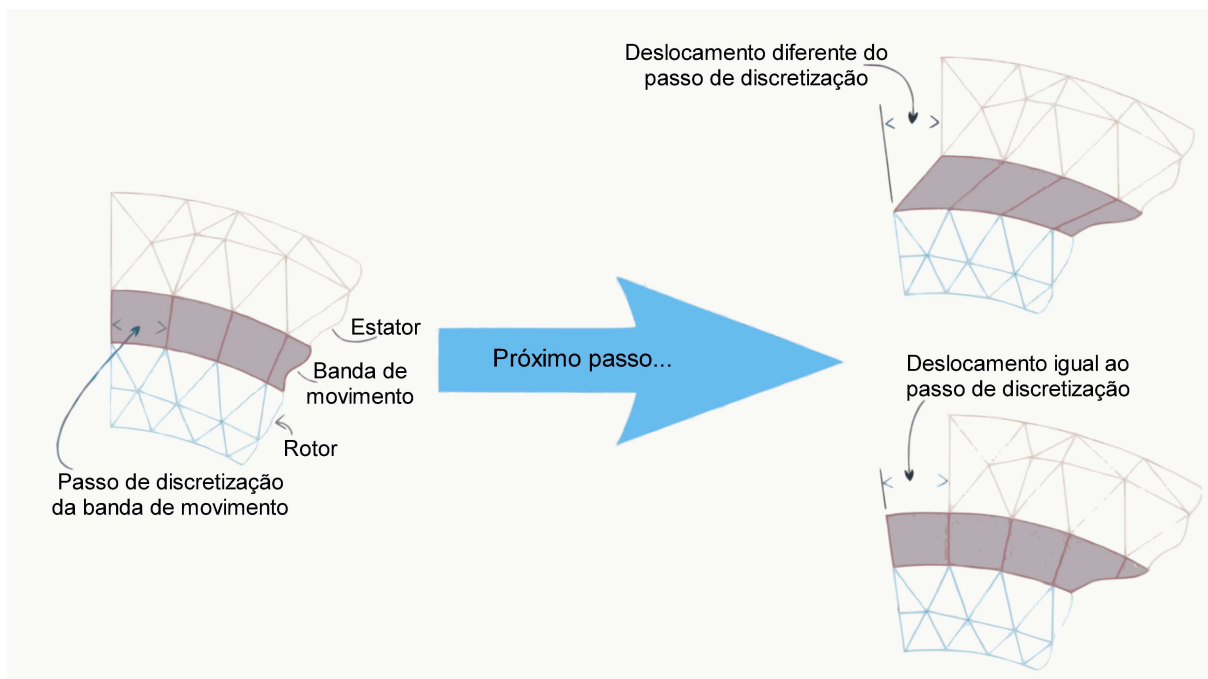
$$-\vec{n} \times \vec{H}|_{\Gamma_B} = \pm \vec{n} \times \vec{H}|_{\Gamma_A}, \quad (3.8)$$

com  $\Gamma_A$  e  $\Gamma_B$  inclusos em  $\Gamma_H$ . Adicionalmente, as condições de periodicidade podem ser diretamente aplicadas à conexão da banda de movimento, apresentada na seção seguinte.

### 3.5 Método da banda de movimento

A técnica da banda de movimento é, comumente, utilizada para tratar o movimento das partes móveis dos motores elétricos, a qual consiste em discretizar o entreferro através da divisão do domínio eletromagnético em três subdomínios: estator, rotor e uma camada que conecta ambas as partes, chamada banda de movimento (GYSELINCK *et al.*, 2003). Além disso, a técnica permite que o movimento da parte móvel ocorra, independente do passo de discretização da banda de movimento, desde que a deformação dos elementos da banda seja tolerável; os elementos se deformam até o ponto em que uma permutação de seus nós seja efetuada a fim de evitar uma distorção excessiva (ROEL O., 2002). Contudo, o deslocamento da parte móvel pode ser igualado ao passo de discretização da banda de movimento. Ambas as situações são ilustradas na Figura 6.

Figura 6 – Elementos da banda de movimento com e sem deformação

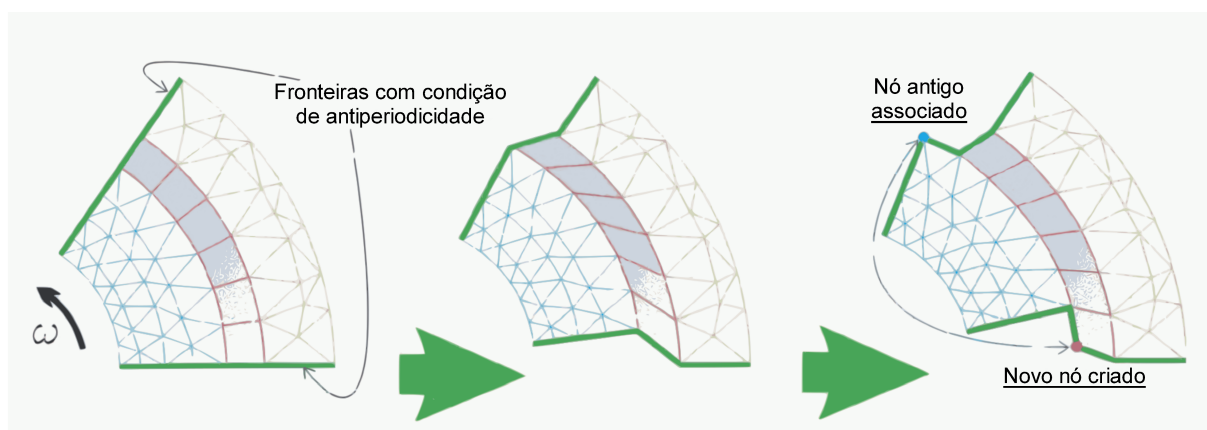


Fonte: Reprodução de (ANTUNES, 2002).



A conexão das fronteiras entre as regiões móveis e estáticas malhadas separadamente através da banda de movimento, pode ser considerada como uma combinação da conexão direta e das condições de contorno periódicas (DULAR *et al.*, 2001). À medida que a posição do rotor varia com o tempo, a malha em elementos finitos pertencente ao estator e ao rotor permanece inalterada de acordo com as respectivas coordenadas de referência (GYSELINCK *et al.*, 2003). Além disso, com o deslocamento do rotor, são criados nós suplementares (adicionados às condições de antiperiodicidade) na banda de movimento, acompanhado por uma realocação das condições de contorno antiperiódicas (ANTUNES, 2002; ROEL O. *et al.*, 2002), como visto na Figura 7.

Figura 7 – Alocação dinâmica das condições de antiperiodicidade



Fonte: Reprodução de (ANTUNES, 2002).

A deformação dos elementos da banda de movimento, bem como a utilização de elementos triangulares com larguras reduzidas devido a um menor entreferro causam oscilações numéricas das quantidades globais (LUZ *et al.*, 2002). A utilização de elementos quadriláteros (decompostos em triângulos) e hierárquicos podem ajudar a amenizar o problema.

O processo de movimento do rotor pode ser realizado a partir das equações mecânicas do motor elétrico ou imposto por meio de uma velocidade constante (ROEL O., 2002). As equações mecânicas são apresentadas na seção seguinte.

### 3.6 Equações mecânicas

A equação mecânica rege o comportamento rotacional das máquinas rotativas em função dos campos eletromagnéticos  $\vec{H}$  e  $\vec{E}$  produzidos pela força magnetomotriz (fmm). Esta por sua vez, é definida pela indução dos enrolamentos das bobinas, os quais são acoplados aos circuitos externos. A seguinte equação é bem definida e utilizada na literatura:

$$T_{emg} = T_{mec} + D\omega_m + J\frac{d\omega_m}{dt}, \quad (3.9)$$

onde  $T_{emg}$  é o torque eletromagnético produzido pela máquina elétrica,  $T_{mec}$  é o torque mecânico ou de carga disponível no eixo,  $D$  é o coeficiente de atrito viscoso do sistema,  $J$  é o momento de inércia do sistema e  $\omega_m$  é a velocidade angular do eixo do rotor  $\omega_m = \frac{d\theta}{dt}$ ;  $\theta$  é a posição angular do rotor (MORAES FILHO, 2017). O torque eletromagnético está intimamente ligado à indução magnética através de  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ .

A inserção da Equação (3.9) no GetDP é realizada por meio das quantidades globais  $\omega_m$  e  $\theta$ , com os termos  $D$  e  $J$  definidos como constantes características da máquina rotativa e o  $T_{emg}$ , calculado no pós-processamento a cada passo de tempo.

### 3.7 Resolução no domínio do tempo

As Equações (3.5) e (3.6), aplicadas sobre o domínio discretizado resultam em um sistema matricial de equações<sup>2</sup> (3.4). A quantidade de graus de liberdade do sistema é dependente do número de entidades geométricas e das funções de base atreladas a elas. Desta forma, a Equação (3.9) resulta em um sistema com dois graus de liberdade (posição e velocidade angular), uma vez que os torques eletromagnético e de carga são tidos como quantidades globais. Para uma dada tensão de excitação do circuito externo e condições iniciais (em  $t = 0$ ), ambos os sistemas matriciais podem ser resolvidos no domínio do tempo (GYSELINCK *et al.*, 2004). Na resolução, utiliza-se o método- $\theta$ , ou esquema de recorrência de Euler (para  $\theta = 1$ ), a fim de discretizar as derivadas temporais (ROEL O. *et al.*, 2002). Devido às características não lineares do MRV, o método produz um sistema de equações não lineares para cada passo de tempo  $i$  do instante  $t_i$  até o instante  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ , o qual é resolvido através do método iterativo de Newton-Raphson.

O método- $\theta$  é uma técnica numérica para solução de problemas de valor inicial onde as equações diferenciais são lineares (GRIFFITHS; SMITH, 2006). A técnica envolve a interpolação linear das derivadas entre um ponto precedente  $t_i$  e seu sucessor  $t_{i+1}$  para cada intervalo de tempo  $\Delta t$ . O método parte de uma condição inicial  $t_0$ , e caminha pelo eixo através de passos de tempo. A cada passo, um novo valor de  $\vec{A}$  é estimado. O método utiliza a informação de um ponto precedente  $(t_i, \vec{A}_i)$ , para estimar o próximo ponto  $(t_{i+1}, \vec{A}_{i+1})$ . Considerando uma equação diferencial de primeira ordem:

$$y' = f(t, y), \quad (3.10)$$

<sup>2</sup> Mais detalhes sobre o sistema matricial construído pelo GetDP pode ser encontrado em Roel O. *et al.* (2002)

o método- $\theta$  é escrito na forma geral (GRIFFITHS; SMITH, 2006),

$$y_1 = y_0 + \Delta t[(1 - \theta)y'_0 + \theta y'_1], \quad (3.11)$$

onde o parâmetro  $\theta$  varia entre  $0 \leq \theta \leq 1$ ,  $y'_0$  e  $y'_1$  são as equações diferenciais em  $t_0$  e  $t_1$ . O parâmetro age como um coeficiente de ponderação sobre as derivadas  $y'_0$  e  $y'_1$ . O uso de  $\theta = 0,5$  é referido como o método de Crank-Nicolson. Na Equação (3.11), este produz pesos iguais aos gradientes em  $t_0$  e  $t_1$  (GRIFFITHS; SMITH, 2006). Contudo, o método de recorrência de Euler é indicado para a eliminação de oscilações que podem ocorrer quando componentes eletrônicos de potência estão presentes no circuito elétrico (GYSELINCK *et al.*, 2004).

### 3.8 Métodos de solução para sistemas de equações não lineares

A aplicação de métodos numéricos em problemas eletromagnéticos resulta em um sistema de equações. Em motores elétricos como os motores a relutância, é comum considerar que as partes ativas sejam compostas de materiais isotrópicos não lineares e não hysteréticos, resultando em um sistema de equações não lineares. Neste caso, a relutividade do material magnético  $\nu(B)$ , determinada pela curva  $B-H$ , é função da magnitude de  $\vec{B}$ .

Os principais métodos iterativos, ou indiretos, indicados para a solução de sistemas não lineares são:

- Método das aproximações sucessivas, também conhecido como método do ponto fixo ou método iterativo de Picard, é normalmente utilizado nas iterações iniciais para viabilizar a convergência de métodos mais rápidos como o método de Newton-Raphson (GRIFFITHS; SMITH, 2006; MALAGOLI, 2016);
- Método de Newton-Raphson deriva da expansão em séries de Taylor de uma função na vizinhança de um ponto, necessitando da avaliação da função  $f(x)$  e sua derivada  $f'(x)$  a partir de um chute inicial para a raiz da função. Para um sistema de  $N$  equações não lineares, o método define uma matriz Jacobiana dotada das derivadas parciais.

No GetDP, a componente não linear do diferencial do tensor relutividade, ou seja, a derivada do vetor campo magnético  $\vec{H}$  com respeito ao vetor indução magnética  $\vec{B}$ , é definida como parte da matriz Jacobiana a ser resolvida pelo método de Newton-Raphson (DULAR; GEUZAIN, 2022; GYSELINCK *et al.*, 2004).

### **3.9 Considerações finais**

Este capítulo apresentou a estrutura matemática discreta com as funções de base de aresta, a qual se adequa ao MEF, e o acoplamento entre os campos magnéticos e as equações de circuito que descrevem o comportamento dinâmico da operação do MRV, juntamente com as condições de antiperiodicidade, utilizada para a conexão entre as partes fixa e móvel através da banda de movimento. Estas condições caracterizam corretamente o problema físico estudado e reduzindo o domínio de estudo. Além disso, definiu-se o esquema de recorrência de Euler como técnica de resolução no domínio do tempo. Estes conceitos são necessários para o entendimento e correta implementação do problema no programa GetDP.

O Capítulo 4 apresenta as equações de projeto, as dimensões e características elétricas de um MRV 8/6, bem como uma estratégia de operação motora e a bancada experimental desenvolvida para o acionamento e operação do motor. Adicionalmente, discute-se acerca dos ângulos de comutação e seu papel no comportamento do motor elétrico.

## 4 MOTOR A RELUTÂNCIA VARIÁVEL

### 4.1 Introdução

Os MRVs têm uma construção simples, robusta e de baixo custo, em razão da ausência de condutores e ímãs permanentes no rotor, apresentando menor necessidade de manutenção. Além disso, a ausência de ímãs permite que o motor tenha uma maior temperatura de operação permissível. Os MRVs pertencem ao grupo de máquinas elétricas que produzem conjugado devido à variação da relutância do circuito magnético e são inerentemente máquinas de velocidade variável, podendo fornecer alta eficiência em média e alta velocidade. Tipicamente, o estator pode ser resfriado com maior eficiência que o rotor, o que resulta em um motor elétrico com dimensões reduzidas, dada uma potência e dimensões específicas (BALAJI *et al.*, 2011; CORREA *et al.*, 2011).

O funcionamento do MRV consiste da produção de torque pela tendência de um polo do rotor a alinhar-se com o polo do estator (minimização da relutância do circuito magnético), quando a bobina de fase correspondente é excitada. Em vista disto, a energização sequencial das fases justapostas nos polos do estator é executada de acordo com a posição da parte móvel em que há maior taxa de variação da indutância, a fim de manter o movimento contínuo em uma direção com maior capacidade de produção de torque (MIRANDA, 2017).

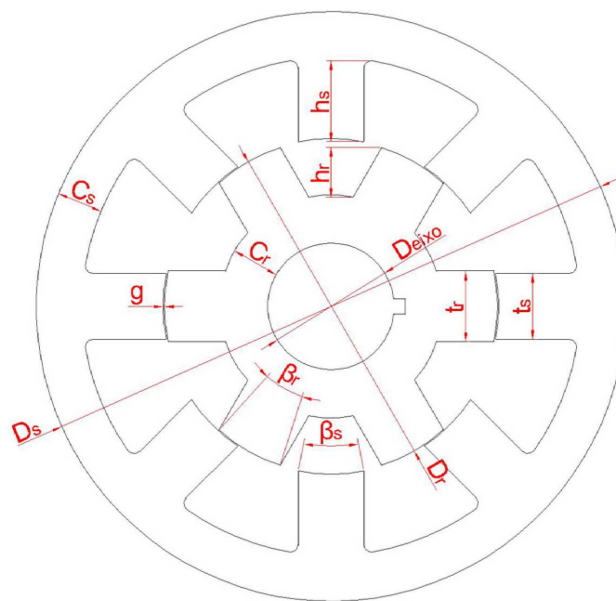
Com o avanço tecnológico dos sistemas digitais e dispositivos semicondutores de potência, as dificuldades relacionadas ao acionamento e controle de velocidade dos MRVs foram superadas, tornando-os competitivos frente aos tipos tradicionais de máquinas elétricas amplamente utilizados na indústria. Contudo, o dimensionamento do sistema de acionamento precisa ser conduzido de acordo com as condições de operação do MRV, sendo o sistema capaz de suprir a demanda de energia e suportar o máximo valor permissível da corrente média requerida pelos enrolamentos do motor elétrico. Para um dimensionamento apropriado, a predição do desempenho do MRV é necessária, podendo ser obtida através de ferramentas numéricas como o MEF.

O capítulo apresenta as equações necessárias ao projeto e dimensionamento de um MRV 8/6, uma estratégia de operação utilizando uma topologia de conversor assimétrico através do controle de corrente de histerese, a modelagem matemática para os semicondutores de potência presentes no conversor e a definição dos ângulos de comutação em função da posição relativa dos polos do motor. Adicionalmente, o capítulo apresenta o aparato experimental usado na obtenção das grandezas elétricas que serão comparadas aos resultados computados numericamente.

## 4.2 Equações de projeto

As metodologias tradicionais de dimensionamento (KRISHNAN, 2017), (MILLER, 1993), ainda são muito utilizadas no projeto de MRVs. Em geral, as dimensões são obtidas a partir da potência de saída desejada para o sistema (MAMEDE; CAMACHO; ANDRADE, 2016), dados alguns parâmetros relacionados ao material magnético e à operação da máquina. A Figura 8 apresenta as variáveis geométricas a serem calculadas para o projeto de um MRV de quatro fases.

Figura 8 – Dimensões de um MRV 8/6



Fonte: Reprodução de Moraes Filho *et al.* (2016).

Os símbolos são especificados como segue:  $C_s$  é a espessura da culatra do estator;  $C_r$  é a espessura da culatra do rotor;  $t_s$  é a largura dos polos do estator;  $t_r$  é a largura dos polos do rotor;  $\beta_s$  é ângulo dos polos do estator;  $\beta_r$  é ângulo dos polos do rotor;  $h_s$  é a altura dos polos do estator;  $h_r$  é a altura dos polos do rotor;  $D_{eixo}$  é o diâmetro do eixo;  $D_s$  é o diâmetro externo do estator;  $D_r$  é o diâmetro externo do rotor;  $g$  é o comprimento do entreferro.

A potência de saída é dada por Miller (1993),

$$P = \frac{TRV \cdot k_1 \cdot \omega \cdot \pi \cdot D_r}{4}, \quad (4.1)$$

onde  $TRV$  é o torque por volume do rotor,  $k_1$  é a constante que relaciona o diâmetro do rotor e o comprimento da máquina e  $\omega$  é a velocidade do rotor ( $rad/s$ ). Adicionalmente, o valor mínimo para os arcos polares é definido de acordo com o número de polos do motor,

$$\min(\beta_s, \beta_r) = \frac{4\pi}{N_s N_r}, \quad (4.2)$$

onde  $N_s$  é o número de polos do estator e  $N_r$  é o número de polos do rotor. Contudo, a fim de garantir o torque de partida adequado, o arco polar do rotor deve ser maior que o arco polar do estator. A espessura da culatra do estator  $C_s$  deve suportar no mínimo, metade do fluxo magnético que flui através dos polos, a qual é calculada através de,

$$C_s = 1,1 \left[ \left( \frac{D_r}{2} + g \right) \text{sen} \left( \frac{\beta_s}{2} \right) \right]. \quad (4.3)$$

O diâmetro do rotor  $D_r$  é calculado através da Equação (4.1), enquanto que o comprimento do entreferro  $g$  deve ser escolhido com o menor valor possível de acordo com as limitações de manufatura do protótipo, com o intuito de aumentar a densidade de torque. Os motores de maior potência são, geralmente, construídos com um entreferro entre 0,3 e 0,5 mm.

As alturas e larguras dos polos do estator e rotor podem ser calculados por,

$$t_s = 2 \left[ \left( \frac{D_r}{2} + g \right) \text{sen} \left( \frac{\beta_s}{2} \right) \right], \quad (4.4)$$

$$h_s = \left( \frac{D_s - D_r}{2} \right) - g - C_s, \quad (4.5)$$

$$t_r = t_s + 2g, \quad (4.6)$$

$$h_r = \frac{t_s}{2}, \quad (4.7)$$

onde o diâmetro do rotor  $D_r$ , geralmente, assume valores de 0,4 a 0,7 vezes o valor do diâmetro externo do estator  $D_s$  (MILLER, 1993). Além disso, é recomendado que a espessura da culatra do rotor  $C_r$  seja metade da largura do polo do rotor,  $t_r$ . Segundo Bilgin, Jiang e Emadi (2018), uma culatra mais espessa no estator fornece maior suporte para os polos do estator, o que pode ajudar a reduzir o ruído acústico e evitar que ocorra deformação. Em contrapartida, as culatras mais finas tanto no estator como no rotor saturam mais rapidamente afetando a produção de torque do MRV.

O dimensionamento das bobinas é realizado em dois passos: primeiro, o número de espiras por fase  $T_{ph}$  é calculado em termos do valor de pico da corrente de fase  $I_p$  e do comprimento do entreferro  $g$  de forma a produzir uma densidade de fluxo no entreferro  $B_g$  pré-determinada (em relação à densidade de fluxo de saturação  $B_{sat}$  no núcleo magnético); por último, a seção do condutor  $a_c$  é obtida em termos de  $I_p$ , da máxima densidade

de corrente permitida na bobina  $J_c$  e do número de fases  $q$  do MRV. As equações que descrevem o procedimento são apresentadas a seguir,

$$T_{ph} = \frac{2g B_g}{I_p \mu_0}, \quad (4.8)$$

$$a_c = \frac{I_p}{J_c \sqrt{q}}, \quad (4.9)$$

onde  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética no vácuo ( $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ ). Em regime permanente, o termo  $I_p$  está relacionado com o máximo valor admissível atingido após o estágio de crescimento da corrente quando a bobina de fase é alimentada por um conversor (KRISHNAN, 2017). Além disso, a Equação (4.9) define a densidade de corrente como a razão do valor *rms* da corrente sobre a área de seção transversal do condutor.

### 4.3 Protótipo de um MRV 8/6

Um MRV 8/6 de quatro fases com potência de saída nominal de 2,2 kW foi projetado, com base nas Equações (4.1)-(4.9), para ser inserido na carcaça de um motor de indução trifásico de 3 cv (MORAES FILHO *et al.*, 2016). As Tabelas 1 e 2 apresentam os dados de projeto do MRV, dimensões geométricas e especificações técnicas e elétricas, respectivamente.

Tabela 1 – Dimensões geométricas do MRV 8/6

Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidade
Espessura da culatra do estator	$C_s$	12,45	mm
Espessura da culatra do rotor	$C_r$	13,0	mm
Largura dos polos do estator	$t_s$	17,8	mm
Largura dos polos do rotor	$t_r$	18,3	mm
Ângulo dos polos do estator	$\beta_s$	22,5	graus
Ângulo dos polos do rotor	$\beta_r$	24,5	graus
Altura dos polos do estator	$h_s$	22,0	mm
Altura dos polos do rotor	$h_r$	15,0	mm
Diâmetro do eixo	$D_{eixo}$	34,5	mm
Diâmetro externo do rotor	$D_r$	90,5	mm
Diâmetro externo do estator	$D_s$	160,0	mm
Comprimento do rotor	$l$	63,0	mm
Comprimento do entreferro	$g$	0,3	mm

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 9 apresenta lado a lado, a seção transversal do modelo do MRV 8/6 com as quatro fases indicadas,  $A-A'$ ,  $B-B'$ ,  $C-C'$  e  $D-D'$ , e seu protótipo, no qual cada bobina de fase é constituída por um par de enrolamentos conectados em série.



Tabela 2 – Especificações técnicas e elétricas do MRV 8/6

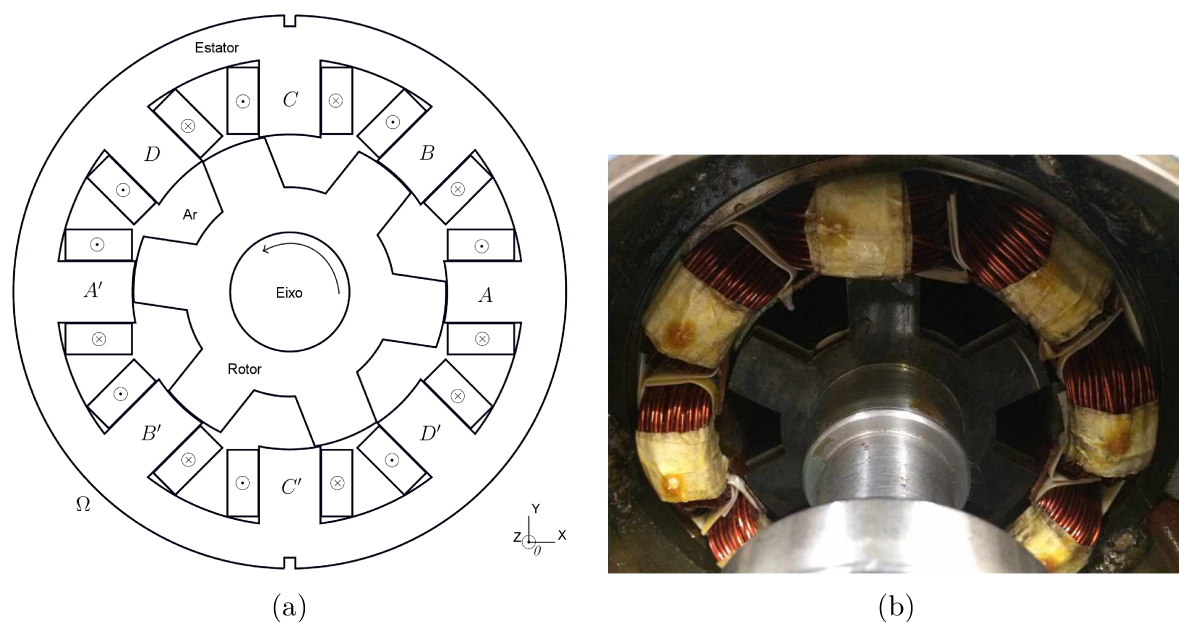
Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidade
Potência nominal	$P$	2200	W
Velocidade nominal	$\omega_n$	3500	rpm
Corrente nominal	$I_n$	10	A
Nº de polos no estator	$N_s$	8	–
Nº de polos no rotor	$N_r$	6	–
Nº de fases	$q$	4	–
Espiras por fase	$T_{ph}$	110	–
Resistência de fase	$R$	0,161	$\Omega$
Seção do condutor	$a_c$	2,08 (AWG 14)	mm <sup>2</sup>
Densidade de corrente	$J_c$	3,6	A/mm <sup>2</sup>
Material do estator/rotor	–	Aço silício GNO <sup>1</sup> E185 Aperam <sup>2</sup> 0.50 mm	–
Material do eixo	–	Aço carbono 1020	–
Densidade de fluxo de saturação	$B_{sat}$	1,59	T

<sup>1</sup>Aço silício de Grão Não Orientado (GNO).

<sup>2</sup>Consultar o *datasheet* M470-50A 0.50 mm como referência.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 9 – Seção transversal do MRV 8/6: (a) modelo em elementos finitos; (b) vista frontal do protótipo



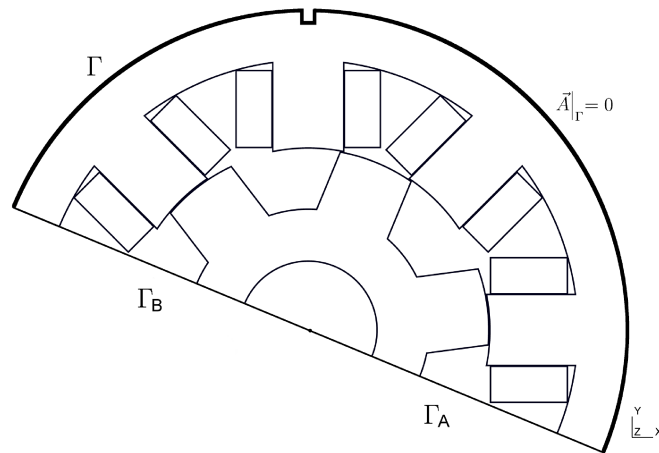
Fonte: Reprodução de Moraes Filho (2017).

#### 4.3.1 Redução do domínio de estudo

Considerando as simetrias eletromagnéticas e utilizando condições de antiperiodicidade, o menor domínio de estudo consiste de um setor periódico de 180° da estrutura

magnética original do MRV 8/6, apresentado na Figura 10, em que apenas as bobinas  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são consideradas, cujos sentidos das correntes são indicados na Figura 9a.

Figura 10 – Condições de antiperiodicidade aplicadas às fronteiras  $\Gamma_A$  e  $\Gamma_B$



Fonte: Autoria própria.

As fronteiras  $\Gamma_A$  e  $\Gamma_B$ , separadas de  $180^\circ$ , são conectadas pela aplicação das condições de antiperiodicidade, uma vez que o sentido das correntes das bobinas repetitivas  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  tem direções opostas.

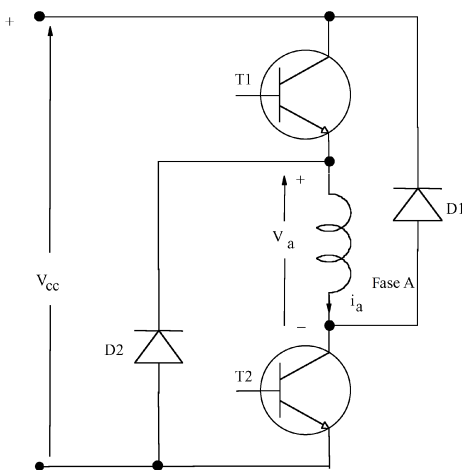
Assumindo que o campo magnético  $\vec{H}$  esteja totalmente contido no material do estator (uma vez que a permeabilidade do material seja relativamente mais alta comparada à permeabilidade do ar) e tangencie a circunferência externa do estator, o potencial vetor magnético é imposto na fronteira  $\Gamma$  através da condição de contorno de Dirichlet, Equação (2.43) (BASTOS; SADOWSKI; CARLSON, 2008). Essa condição representa adequadamente o problema físico a ser resolvido, onde os campos serão apropriadamente calculados.

#### 4.4 Operação motora

Diferentemente de uma máquina de indução, é impossível acionar um MRV tal que o sentido de rotação seja mantido constante, caso o motor seja alimentado diretamente por uma fonte de tensão senoidal. Em vista disso, o uso de conversores estáticos são mandatórios para este tipo de máquina; estes conversores são sistemas de conversão de energia elétrica que se aproveitam da característica de comutação dos interruptores (ROEL O. *et al.*, 2002). Como o torque eletromagnético no MRV é independente da polaridade da corrente de excitação, somente um transistor por bobina de fase é necessário (KRISHNAN, 2017).

4.4.1 Conversor *half-bridge*

Uma topologia de conversor assimétrico, conhecido como conversor *half-bridge*, que considera somente uma fase, é apresentada na Figura 11.

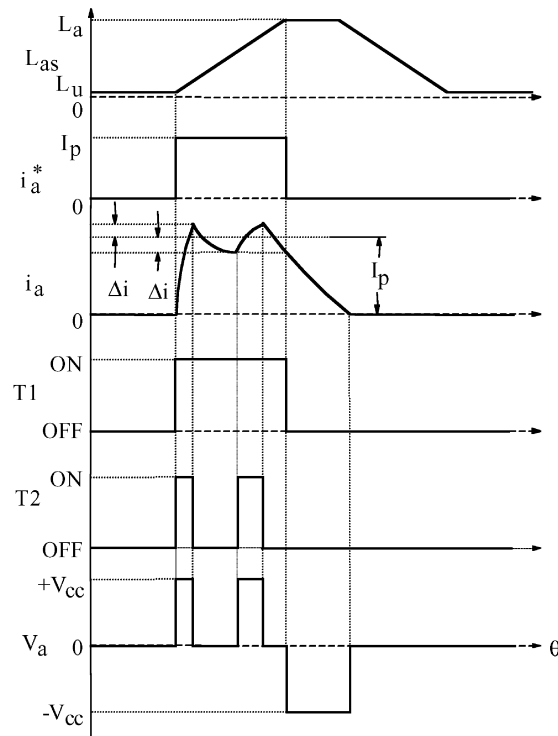
Figura 11 – Conversor *half-bridge*

Fonte: Reprodução de Krishnan (2017).

O conversor é alimentado pela tensão  $V_{dc}$  imposta pelo retificador trifásico. No momento em que os transistores  $T_1$  e  $T_2$  entram em estado de condução, flui uma corrente  $i_a$  na fase  $A$  com alta taxa de crescimento. Como as bobinas são comumente projetadas para suportar um valor nominal em torno de 5 a 20 A, dependendo das dimensões do motor, a corrente elétrica precisa ser limitada. Neste caso, um controlador de corrente por histerese pode ser utilizado, sendo de simples e fácil implementação. O controlador age diretamente no chaveamento dos transistores, determinando os instantes de comutação de forma a manter o valor da corrente de fase dentro do limite máximo permitido.

Diferentes estratégias de operação podem ser empregadas a fim de se reduzir a deterioração dos isolantes e as perdas por chaveamento, aumentando assim a vida útil dos capacitores (KRISHNAN, 2017). A forma com que esse objetivo é alcançado depende: da frequência de repetições em que ocorre a troca de energia magnética entre a fonte e a carga durante um ciclo de excitação de uma das fases; e da taxa de variação da tensão a qual as bobinas são submetidas. Uma estratégia para ação motora da máquina a relutância variável é apresentada na Figura 12.

Durante o crescimento da indutância de fase  $L_{as}$ , o controlador de histerese gera uma corrente de comando  $i_a^*$  para que seja comparada com a corrente de fase  $i_a$ . Assumindo que se queira manter um limite máximo de corrente  $I_p$  (valor de referência), o controle é processado através de uma janela de erro  $\Delta_i$ . Se o erro for excedido superiormente, ou inferiormente, em relação à referência, o controlador age na comutação dos transistores.

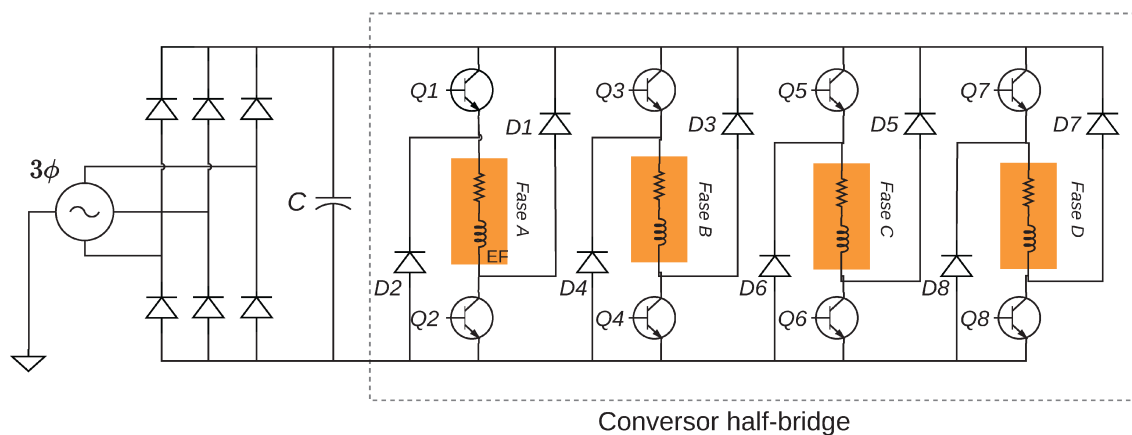
Figura 12 – Estratégia de chaveamento dos transistores  $T_1$  e  $T_2$ 

Fonte: Reprodução de Krishnan (2017).

No ciclo de excitação da fase são definidas três etapas: magnetização, roda livre e desmagnetização. A etapa de magnetização é caracterizada pela ativação dos transistores  $T_1$  e  $T_2$ , na qual a fase  $A$  fica submetida à tensão do retificador  $V_{dc}$ . A corrente da bobina de fase  $i_a$  cresce a partir do valor zero, desde que não haja energia armazenada na bobina. Quando o erro de corrente atinge  $+\Delta_i$ , somente o transistor  $T_2$  é desligado. O diodo  $D_1$ , então, torna-se diretamente polarizado permitindo que a corrente continue a fluir por  $T_1$  e pela fase  $A$ . Desta forma, a energia armazenada na bobina circula pelo próprio ramo até que o valor de  $i_a$  decaia para  $I_p - \Delta_i$ . Ao exceder o erro  $-\Delta_i$ ,  $T_2$  é religado e o retificador volta a fornecer a energia para a bobina de fase. Este processo é definido como a etapa de roda livre. A zona positiva da corrente de comando é chamada de ângulo de condução  $\varepsilon$ , o qual define o intervalo de excitação das bobinas. Após este intervalo, a corrente de comando se anula,  $T_1$  e  $T_2$  são desligados simultaneamente e os diodos  $D_1$  e  $D_2$  ficam diretamente polarizados. Neste instante, a bobina fica sujeita à tensão  $-V_{dc}$  imposta pelo retificador e a energia armazenada no indutor é enviada à fonte até que a corrente se anule, momento no qual a tensão sobre a bobina também se anula. Contudo, nesta etapa de desmagnetização, o valor da corrente decai mais rapidamente quando comparado à etapa de roda livre. A vantagem é que o controle consegue extinguir a corrente antes que o motor gere torque negativo (região de declínio da indutância de fase).

O modelo do circuito do sistema conversor-motor para a análise dinâmica através do método de elementos finitos é apresentado na Figura 13.

Figura 13 – Modelo do circuito de acoplamento entre o conversor assimétrico e o MRV 8/6



Fonte: Autoria própria.

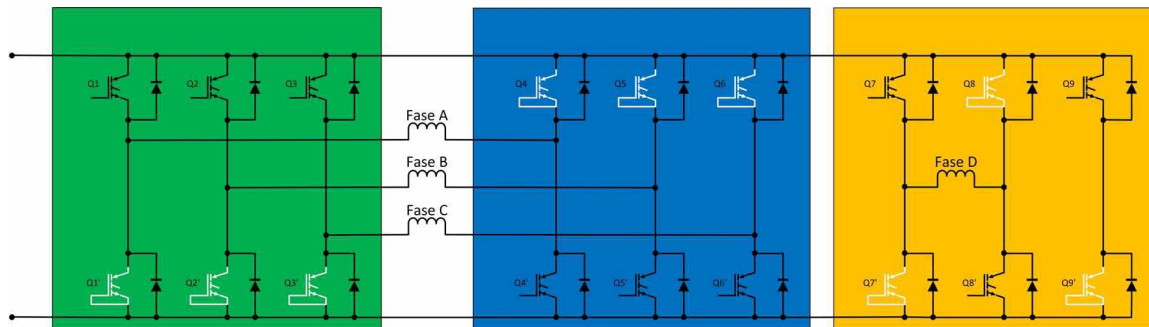
O conversor *half-bridge* compõe o circuito externo de acionamento do MRV 8/6, o qual é equipado com um filtro capacitivo e alimentado por uma fonte de tensão senoidal trifásica retificada, assim como foi desenvolvido em Moraes Filho (2017). Adicionalmente, o controlador de corrente de histerese atua nas chaves *Insulated Gate Bipolar Transistor* (IGBT) Q1 – Q8, as quais são controladas em função dos valores instantâneos de corrente de fase e da posição do rotor.

A estratégia de acionamento, em que os diodos de roda livre ímpares, D1 – D7, operam sob chaveamento da corrente, garante que a amplitude das correntes sobre os enrolamentos das bobinas não excederá os limites exigidos. Além disso, as fases são excitadas na região de condução, a qual corresponde a um ciclo de operação do motor. Em termos de circuitos, as fases são representadas por uma impedância, composta por uma resistência linear e uma indutância não linear  $L = L(I, \theta)$ . A não linearidade é proveniente da característica do MRV, no qual a indutância varia de acordo com a posição dos polos do rotor e também com a amplitude da corrente nos enrolamentos. Cada uma das quatro fases é avaliada como uma impedância não linear na simulação computacional (identificadas pelos indutores *EF* na Figura 13), sendo acopladas ao circuito por meio da tensão global do conversor, como discutido na Seção 3.3.1.

Na prática, o modelo do conversor apresentado consiste de três módulos *Fuji full-bridge* (6MBI100S-060) com alguns terminais base-emissor curto-circuitados, como apresentado na Figura 14.

A bancada experimental desenvolvida para o acionamento e a medição das grandezas elétricas e mecânica é composta pelo MRV 8/6 acoplado à um máquina CC através de um

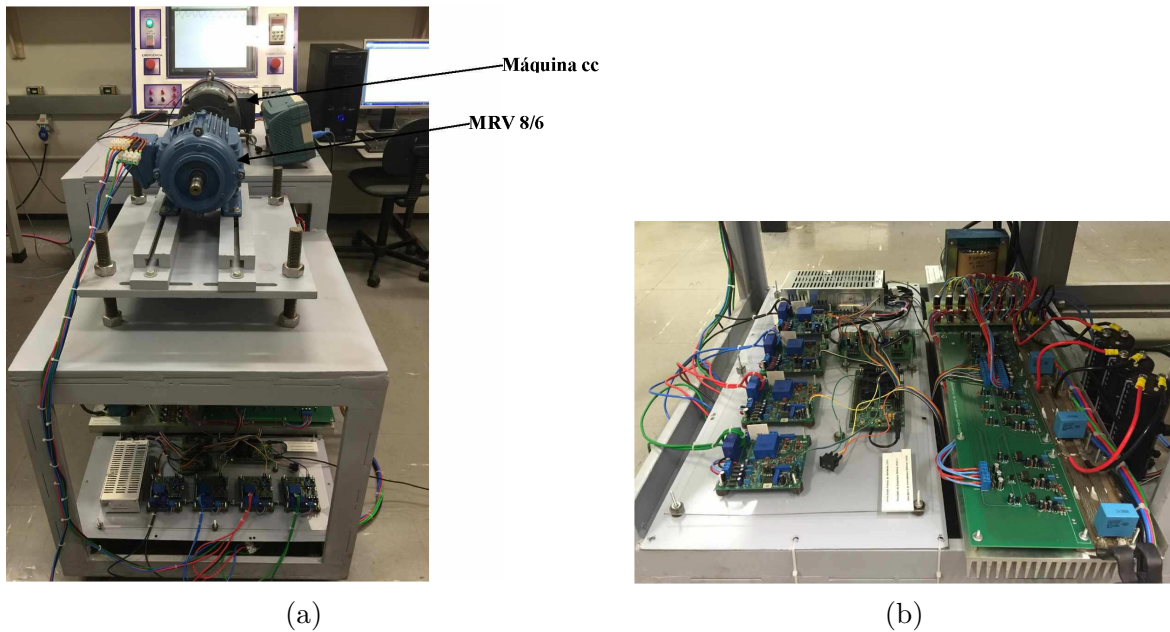
Figura 14 – Esquema elétrico de fechamento dos módulos IGBTs



Fonte: Reprodução de Moraes Filho (2017).

transdutor de torque e pelo sistema de acionamento; sendo o sistema dividido em dois subsistemas: potência, e controle e aquisição de dados. A bancada é apresentada na Figura 15.

Figura 15 – Bancada experimental (a) e sistema de acionamento (b): subsistema de potência e subsistema de controle e aquisição de dados



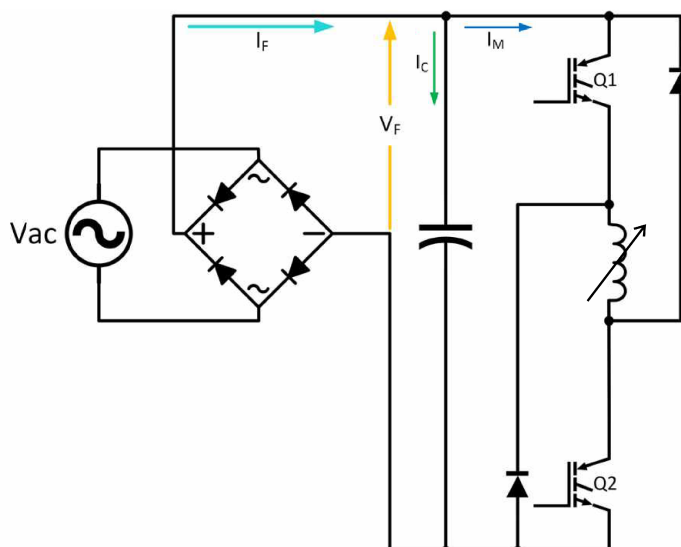
Fonte: Reprodução de Moraes Filho (2017).

A carga líquida do sistema mecânico é a soma do momento de inércia e do atrito viscoso do motor, e do conjugado produzido pela excitação da máquina CC. Como o sistema de acionamento, Figura 15b, é desprovido de um controlador de velocidade, a tensão no conversor é ajustada com o intuito de limitar a corrente nos enrolamentos de modo que o MRV atinja a velocidade desejada em regime, dada a carga produzida separadamente pela máquina CC. Isto é, as condições de operação do MRV são definidas

pela tensão no conversor, corrente elétrica nos enrolamentos, torque eletromagnético, carga acoplada e velocidade do eixo do motor.

A medição das grandezas elétricas no conversor é estabelecida de acordo com a Figura 16.

Figura 16 – Pontos de medição de tensão e corrente do circuito do conversor



Fonte: Reprodução de Moraes Filho (2017).

A potência de entrada é definida pelo produto dos valores médios de tensão e corrente após o retificador,  $V_F$  e  $I_F$ , respectivamente. Sendo que a corrente  $I_C$  circula no ramo do capacitor, esta pode assumir sentido contrário caso o capacitor forneça a energia armazenada pela fonte; a corrente  $I_M$  circula nos ramos do conversor. Como não há excitação simultânea de duas ou mais fases,  $I_M$  pode ser considerada a corrente que circula em cada bobina de fase durante as etapas de magnetização e desmagnetização.

#### 4.4.2 Modelagem matemática dos semicondutores de potência

Os semicondutores de potência são dispositivos eletrônicos que compõem sistemas como os conversores estáticos, os quais são sistemas de conversão de energia elétrica que se aproveitam da característica de comutação das chaves ou interruptores (ROEL O. *et al.*, 2002). Quando um controle de comutação é aplicado, o controle de corrente de histerese por exemplo, os interruptores recebem o sinal de comutação por meio do controle que é implementado e atua durante a resolução numérica do problema a cada passo de tempo.

Tanto os interruptores de comutação espontânea quanto os de comutação controlada têm características não lineares o que, geralmente, acarreta na dificuldade de se empregar um modelo preciso na análise de circuitos e no incremento do tempo computacional. Uma maneira de contornar o problema consiste em criar tabelas de consulta – *Look-Up Tables*

(LUT), em inglês – de acordo com as especificações do fabricante do semicondutor de potência, assim, como desenvolvido em Peng *et al.* (2015) para o cálculo das perdas de chaveamento e condução. Por outro lado, modelos simplificados são indicados na adaptação para uso específico de certos problemas. O modelo do diodo ideal é utilizado para uma análise mais rápida, no qual, assume-se que a queda de tensão através do semicondutor seja nula.

Desde que a tensão de alimentação do conversor seja muito maior que a queda de tensão no próprio semicondutor, o que é o caso para o acionamento do MRV, a queda de tensão pode ser desprezada, resultando em perdas mínimas de precisão do modelo. Além disso, o modelo assume que a inclinação da curva de tensão *versus* corrente é vertical quando o interruptor está diretamente polarizado, agindo como um curto-circuito. Quando reversamente polarizado, este age como um circuito aberto. Neste trabalho, os diodos e as chaves controladas são modelados como resistências variáveis e dependem do sinal de tensão em seus ramos, como definido em Nshimiyimana *et al.* (2020), Gyselinck *et al.* (2004):

$$R_D = \begin{cases} R_{ON}, & \text{se } U_D > 0, \\ R_{OFF}, & \text{se } U_D < 0, \end{cases} \quad (4.10)$$

onde,  $R_D$  é a resistência variável do diodo,  $U_D$  é a tensão sobre o diodo,  $R_{ON}$  e  $R_{OFF}$  são os estados de condução e não condução, respectivamente. De maneira similar, as chaves controladas são definidas como:

$$R_S = \begin{cases} R_{ON}, & \text{se } (U_S > 0 \text{ e } G = 1), \\ R_{OFF}, & \text{se } (U_S \leq 0 \text{ e } G = 1) \\ & \text{ou } G = 0 \text{ ou } (U_S > 0 \text{ e } G = 0), \end{cases} \quad (4.11)$$

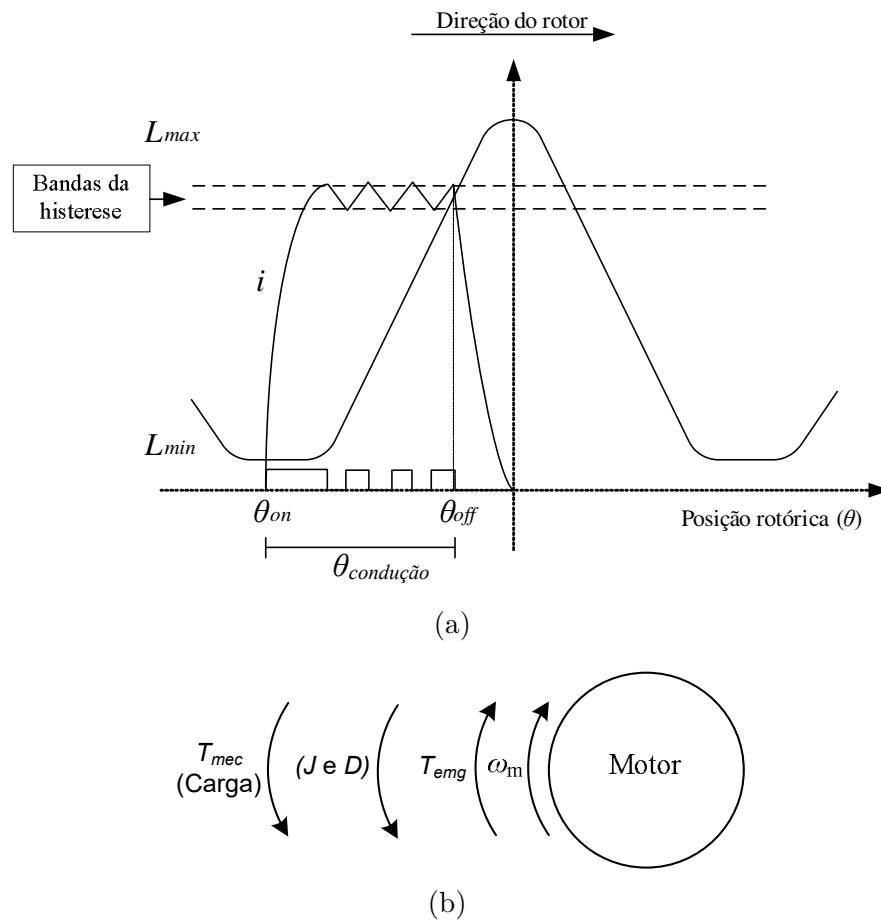
onde,  $R_S$  é a resistência variável da chave controlada,  $U_S$  é a tensão sobre a chave e  $G$  é a função de chaveamento, a qual é uma função do ciclo de trabalho (NSHIMIYIMANA *et al.*, 2020).  $R_{ON}$  e  $R_{OFF}$  para ambos os componentes são definidos com valores de  $10^{-2} \Omega$  e  $10^5 \Omega$ , respectivamente.

#### 4.4.3 Ângulos de comutação

Segundo o princípio de operação motora, as fases devem ser excitadas exclusivamente na região de crescimento da indutância, de modo que, produza conjugado eletromagnético positivo (mesmo sentido de rotação do eixo), cujo sentido seja contrário ao conjugado de carga aplicado ao eixo do MRV, como apresentado na Figura 17.



Figura 17 – Princípio de operação motora: (a) controle de histerese e ângulos de comutação sobre o perfil de indutância ideal; (b) diagrama que ilustra o sentido do conjugado e a rotação do MRV



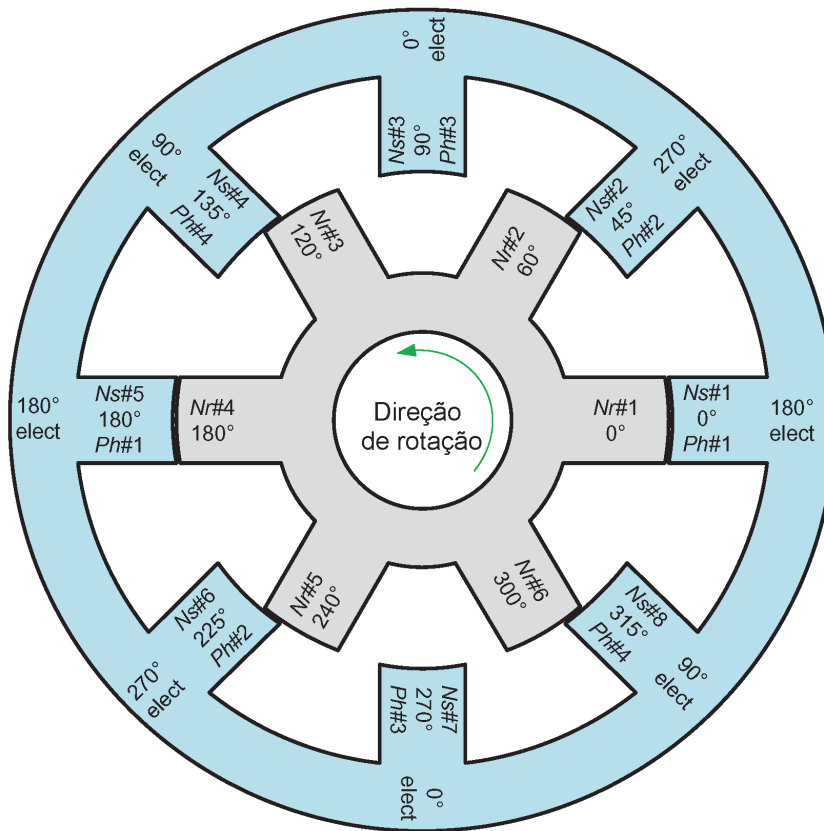
Fonte: Adaptado de Silveira (2012).

Na estratégia de acionamento utilizada no trabalho (MORAES FILHO, 2017), o ângulo de condução de energia  $\varepsilon$  representa o intervalo de comutação entre duas fases subsequentes, sendo definido pela diferença entre os instantes de desenergização  $\theta_{off}$  e energização  $\theta_{on}$ . Neste caso em específico, o ângulo de desenergização para qualquer uma das fases equivale ao ângulo de energização da fase subsequente. A escolha destes dois parâmetros influencia diretamente no comportamento do MRV.

Para melhor visualização e entendimento da correlação dos ângulos de comutação no MRV 8/6, os ângulos elétricos correspondentes às fases a serem excitadas são definidos de acordo com as posições relativas dos polos durante a rotação do motor, como ilustrado na Figura 18.

O ângulo elétrico estabelece em qual posição se encontra um polo do estator em relação ao polo do rotor mais próximo para a fase excitada. Por exemplo, caso a fase  $Ph\#3$  esteja sendo energizada durante a operação do motor, o polo  $Ns\#3$  (deslocado de  $90^\circ$

Figura 18 – Ilustração dos ângulos elétricos das fases energizadas em função da posição relativa dos polos



Fonte: Reprodução de Bilgin, Jiang e Emadi (2018).

mecânicos do polo  $Ns\#1$ ) se encontra na posição de total desalinhamento, ou seja, está deslocado de  $30^\circ$  mecânicos tanto de  $Nr\#2$  quanto de  $Nr\#3$ . Logo, um ângulo elétrico de  $0^\circ$  é definido à fase  $Ph\#3$ , no exato momento. À medida que  $Nr\#2$  se aproxima de  $Ns\#3$ , o ângulo elétrico da fase  $Ph\#3$  aumenta, subindo até o valor de  $180^\circ$  (situação equivalente a  $Ph\#1$ ), momento em que ambos os polos se alinham. Quando  $Nr\#2$  alcança a posição ocupada por  $Nr\#3$ , o ângulo elétrico da fase equivale a  $360^\circ$ , ou  $0^\circ$  por simplicidade.

O deslocamento descrito em função da fase  $Ph\#3$ , equivale a um ciclo elétrico completo. Durante o ciclo, todas as quatro fases são energizadas, a depender dos ângulos de comutação definidos. Na ação motora, Figura 17a, é desejável que o ângulo de comutação  $\theta_{on}$  seja definido entre  $0^\circ$  e um valor não muito superior à posição de início de alinhamento (sobreposição) dos polos, o que equivale a, aproximadamente,  $40^\circ$  elétricos para o MRV 8/6 estudado. Enquanto, que o ângulo de comutação  $\theta_{off}$  seja atribuído com valores, equivalentes ao intercurso,  $\theta_{off} > 40^\circ$  e menor que  $180^\circ$  elétricos.

Portanto, a escolha de se manter a operação do motor sem a sobreposição das fases resulta em baixa qualidade do torque, dado que a corrente leva certo tempo até atingir

o valor de comando  $I_p$ . No capítulo seguinte, a otimização dos instantes de comutação será objeto de estudo na busca da melhora da qualidade e no aumento do valor médio do torque.

#### 4.5 Considerações finais

A estratégia de operação para ação motora, bem como a topologia do conversor empregadas tem papel fundamental no desempenho final do MRV. De igual importância, a escolha adequada dos ângulos de comutação permite que haja melhor aproveitamento na conversão de energia elétrica em mecânica. E, além de aumentar a capacidade de produção de torque, também melhora sua qualidade, reduzindo a oscilação, e conseqüente, vibração mecânica e ruído acústico.

Este capítulo apresentou o procedimento para dimensionamento do projeto do MRV 8/6, a topologia do conversor, a estratégia de operação com controle de histerese e a definição dos ângulos de comutação empregues em Moraes Filho (2017) para fins experimentais. À estas condições designou-se o termo “modelo de referência”, tanto para a parte geométrica quanto a parte de acionamento. O Capítulo 5 discute técnicas de otimização baseadas em métodos heurísticos, bem como a formulação de um problema de otimização multiobjetivo e os conceitos de solução não dominada. Além disso, dois estudos de caso são definidos: busca pela maximização da densidade de fluxo magnético por volume de material magnético; e busca pela melhora da qualidade do torque eletromagnético em detrimento do valor médio do torque produzido.



## 5 OTIMIZAÇÃO MONO E MULTIOBJETIVO

### 5.1 Introdução

Os modelos complexos que formulam os modernos sistemas de engenharia são solucionados através de um processo de tomada de decisão, conhecido como otimização, a fim de buscar as melhores combinações das variáveis de decisão que minimizam ou maximizam o resultado de uma ou mais funções objetivo, satisfazendo restrições em um intervalo de tempo razoável (AHMAD *et al.*, 2022). Genericamente, os modelos, ou problemas, descrevem qualquer tipo de situação na qual se busque uma solução. A otimização pode se referir a um processo de adaptação ou ajuste de um sistema que produza o melhor resultado possível, ou que seja bom o suficiente (aceitável), através da avaliação da função objetivo. Neste sentido, os problemas de otimização são, usualmente, modelados por meio da minimização ou maximização de múltiplas funções objetivo, o que conduz à otimização de múltiplos objetivos concorrentes ou conflitantes. Contudo, segundo o conceito de otimalidade, problemas com múltiplos objetivos possuem um conjunto de soluções ótimas, denominado fronteira de Pareto-ótima ou não dominada (PARREIRAS, 2006). Dentre as várias possíveis soluções Pareto-ótimas que correspondem a diferentes ponderações entre os objetivos, apenas uma solução será escolhida e executada, levando a um problema de decisão.

A respeito dos motores elétricos, o processo de otimização consiste em modificar parâmetros geométricos e físicos (relativos aos aspectos construtivos) com o intuito de satisfazer, simultaneamente, a minimização ou maximização de múltiplas funções objetivo conflitantes. Isto é, procura-se, por exemplo, minimizar os custos de produção de um motor a relutância variável e maximizar a performance sem que a durabilidade e a confiabilidade do produto sejam prejudicadas. Comumente, os objetivos são definidos conforme à necessidade na criação de produtos competitivos. Por maximizar o desempenho, entende-se: aprimorar a potência de saída, a densidade de torque, a eficiência, o fator de potência, a rigidez mecânica, reduzir o ruído acústico, a vibração mecânica, as perdas aerodinâmicas pelo rotor, as perdas no cobre e no núcleo magnético. Além disso, a otimização dos parâmetros geométricos está intimamente atrelada ao fato de que o funcionamento do motor a relutância é baseado na variação da relutância magnética. Por consequência, o desempenho entregue pelo motor elétrico se torna extremamente sensível à sua geometria, bem como ao tipo de topologia do conversor e estratégia de operação e controle. Em contrapartida, o projeto inadequado acaba por acarretar no alto valor de oscilação do torque (*torque ripple*, em inglês), em baixa densidade de torque, e no baixo fator de potência, sendo este, outro problema comum a este tipo de máquina elétrica.

Dentre as várias técnicas de otimização desenvolvidas ao longo dos anos, os métodos

heurísticos baseados em observações da natureza têm sido foco de estudo na aplicação em problemas de otimização reais. As meta-heurísticas, pertencentes ao campo de inteligência artificial e caracterizadas pela busca aleatória, são capazes de realizar buscas em diferentes níveis de exploração durante o processo de otimização, garantindo a diversidade da população, enquanto, se concentram nas vizinhanças das melhores soluções. Além disso, as meta-heurísticas são flexíveis, robustas e eficientes, sendo capazes de localizar com eficiência o ótimo global de diferentes problemas de otimização, sem a necessidade de modificações expressivas na estrutura do algoritmo e do conhecimento de informações particulares acerca de diferentes tipos de problemas (AHMAD *et al.*, 2022). Os algoritmos de busca meta-heurísticos podem ser divididos em quatro categorias principais: algoritmos evolucionários, algoritmos de inteligência de enxames, algoritmos baseados em humanos e algoritmos baseados na Física. Este trabalho destaca os algoritmos evolucionários e os baseados na inteligência de enxames.

Por outro lado, métodos de programação matemática convencionais tais como programação linear, programação dinâmica e métodos de Newton, não são tão inteligentes e genéricos quanto as meta-heurísticas, porém desempenham bem em certos tipos de problemas. Em contrapartida, requerem bom conhecimento da natureza do dado problema e sofrem com alguns inconvenientes: capacidade global limitada, baixa eficácia na geração de bons chutes da solução inicial e forte dependência da informação de gradientes (AHMAD *et al.*, 2022).

Este capítulo apresenta os métodos estocásticos baseados no processo de evolução natural e na teoria do enxame de partículas. A partir das duas famílias de meta-heurísticas, dois algoritmos de otimização mono-objetivo e um multiobjetivo são discutidos: ED, *Particle Swarm Optimization* (PSO), ou otimização por enxame de partículas, e o algoritmo baseado no PSO, *Speed-constrained Multi-objective PSO* (SMPSO), respectivamente. O primeiro e o terceiro serão aplicados no processo de otimização de dois estudos de caso, os quais são definidos ao final do capítulo. Além disso, em Parreiras (2006), Malagoli (2016), os conceitos de solução não dominada, relação de dominância e fronteira de Pareto-ótima, bem como a formulação de um problema de otimização multiobjetivo são extensivamente detalhados, e serão aqui, brevemente apresentados.

## 5.2 Definição do problema de otimização multiobjetivo

A otimização é essencial em várias áreas científicas como a engenharia, análise de dados e *deep learning*. A grande maioria das aplicações reais conduzem a problemas de otimização com várias funções objetivo conflitantes que podem estar sujeitas a restrições de desigualdade ou igualdade, seja por razões físicas ou a critério do usuário. O objetivo principal da otimização é encontrar um conjunto de soluções, ou vetores de variáveis de otimização  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_i)$  que satisfaça todas as restrições e sejam boas o suficiente

a respeito dos valores das funções objetivo (BLANK; DEB, 2020). O problema com  $N$  variáveis de decisão  $x_i$ ,  $M$  objetivos  $f_m(\vec{x})$ ,  $J$  restrições de desigualdade  $g_j(\vec{x})$  e  $K$  restrições de igualdade  $h_k(\vec{x})$  pode ser descrito como Parreiras (2006), Malagoli (2016), Blank e Deb (2020),

$$\min. \quad \vec{F}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})), \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (5.1)$$

$$\text{sujeito a} \quad g_j(\vec{x}) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (5.2)$$

$$h_k(\vec{x}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (5.3)$$

$$x_{\min,i} \leq x_i \leq x_{\max,i}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.4)$$

onde  $\vec{F}(\vec{x})$  é o espaço das funções objetivo em que são avaliadas sobre as variáveis de decisão;  $x_{\min,i}$  e  $x_{\max,i}$  são os valores mínimo e máximo de cada variável  $x_i$ .

O conjunto de soluções desejado no processo de otimização pode ser definido aplicando-se os conceitos de relação de dominância e de Pareto-ótimo (PARREIRAS, 2006). O primeiro conceito é caracterizado como segue: dados dois vetores  $\vec{y}_A = (f_1(\vec{x}_A), f_2(\vec{x}_A), \dots, f_m(\vec{x}_A))$  e  $\vec{y}_B = (f_1(\vec{x}_B), f_2(\vec{x}_B), \dots, f_m(\vec{x}_B))$ ,  $\vec{y}_A$  domina  $\vec{y}_B$  se, em pelo menos uma dimensão  $j$ ,  $\vec{y}_A$  for estritamente menor que  $\vec{y}_B$  e nas demais dimensões  $i \neq j$ ,  $\vec{y}_A$  for menor ou igual a  $\vec{y}_B$  (PARREIRAS, 2006),

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, f_i(\vec{x}_A) \leq f_i(\vec{x}_B) \wedge \exists j \in \{1, 2, \dots, m\}, f_j(\vec{x}_A) < f_j(\vec{x}_B). \quad (5.5)$$

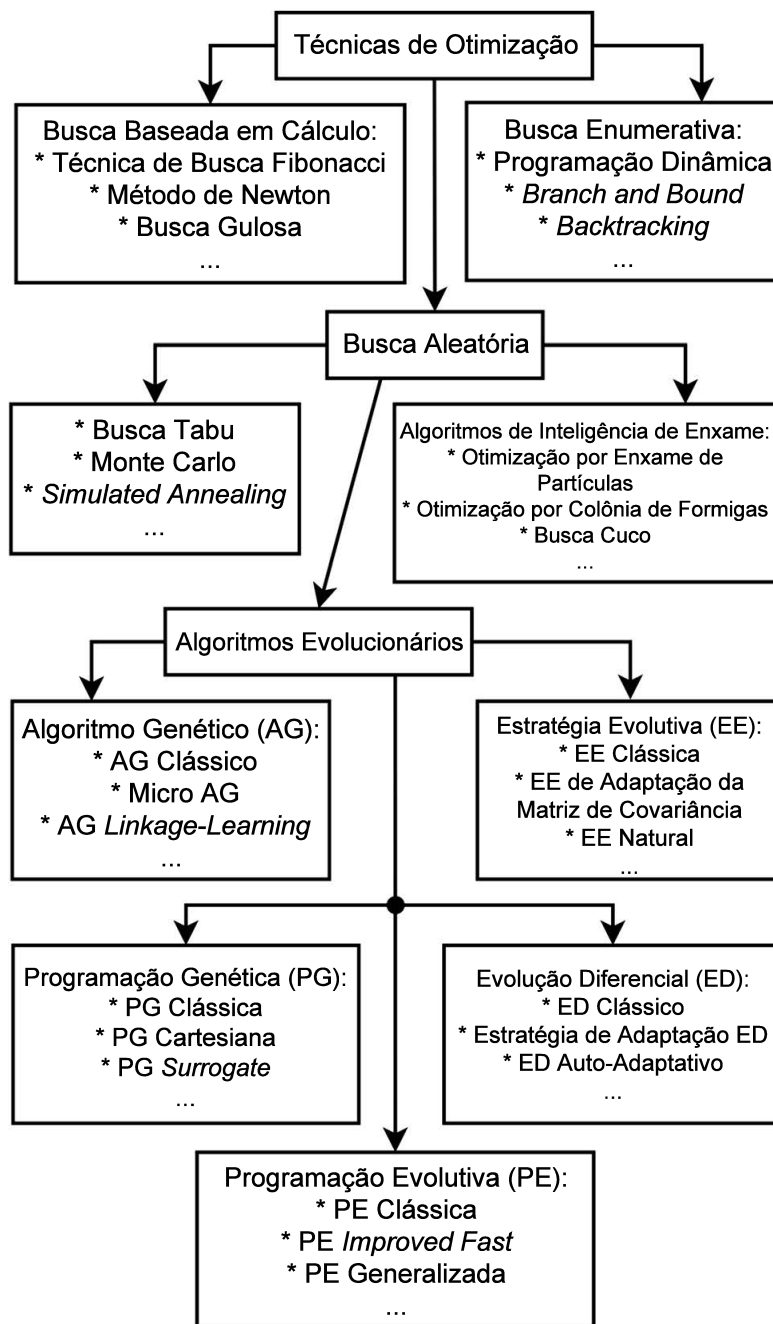
Uma solução  $\vec{x}_A$  é comumente, considerada ser não dominada, ou Pareto-ótima, se não há nenhum outro ponto  $\vec{x}_B$  tal que,  $\vec{y}_B$  domine  $\vec{y}_A$ . Ao conjunto de soluções não dominadas corresponde uma fronteira de Pareto que delimita um porção da região de todas as soluções dominadas. A fronteira de Pareto é desejada, uma vez que não há nenhuma outra solução encontrada em que seu valor da função objetivo seja menor que as soluções da própria fronteira de Pareto. Contudo, uma única solução é escolhida a critério do usuário ou através de técnicas de tomada de decisão.

### 5.3 Algoritmos evolucionários

Os algoritmos evolucionários são uma classe de algoritmos baseados na evolução Darwiniana, em que os mais aptos tendem a sobreviver e se reproduzir através da recombinação genética, acompanhada do mecanismo de seleção e da probabilidade de mutação. A função da mutação e recombinação aleatória consiste em introduzir variação ou inovação à população. Enquanto que a seleção garante que as melhores soluções persistam. Na família dos algoritmos evolucionários, destacam-se os seguintes algoritmos de otimização: o algoritmo genético, programação genética, evolução diferencial, estratégia evolutiva,

programação evolutiva, algoritmo coevolutivo, modelo evolutivo humano e otimização bio-inspirada. Dentre estes, o algoritmo de evolução diferencial foi escolhido para conduzir o processo de otimização de projeto devido seu bom desempenho em encontrar o ótimo global (AHMAD *et al.*, 2022). A Figura 19 apresenta abordagens com foco nas técnicas de otimização.

Figura 19 – Taxonomia dos métodos inspirados na natureza



Fonte: Reprodução de Slowik e Kwasnicka (2020).



### 5.3.1 Evolução diferencial

O algoritmo de evolução diferencial é um método baseado em população que foi desenvolvido para solucionar problemas de otimização (STORN; PRICE, 1997), tornando-se um dos otimizadores mais populares voltado para a otimização de funções no espaço de busca contínuo (SLOWIK; KWASNICKA, 2020). Além disso, é um algoritmo simples e robusto no qual o processo de busca é conduzido com poucos parâmetros tal como o tamanho da população  $NP$ , o fator de escala  $F$  e a taxa de *crossover*  $Cr$ ; tem elevada escalabilidade podendo lidar com problemas de otimização computacionalmente dispendiosos, de larga escala e que apresentam características como não linearidade, não separabilidade e multimodais. Assim, como outros algoritmos evolucionários, o algoritmo de ED produz filhos, ou descendentes, através dos mecanismos de mutação, cruzamento (*crossover*) e seleção, recombinao as soluções.

#### 5.3.1.1 Inicialização

O processo de inicialização do algoritmo de ED ocorre uma única vez e precede os mecanismos de mutação, cruzamento e seleção (nesta ordem), os quais se repetem em um processo iterativo no espaço de solução de dimensão  $D$  até que o critério de interrupção seja satisfeito, onde  $D$  equivale à quantidade de variáveis de decisão.

As soluções iniciais de um problema de otimização multidimensional consistem de  $NP$  vetores de parâmetros de valor real, em que  $NP$  representa o tamanho da população e cada vetor possui dimensão  $D$ . Durante a  $g$ -ésima geração, a população,  $P_{\mathbf{x}}$ , composta dos vetores solução  $\vec{x}_{i,g}$  (PRICE; STORN; LAMPINEN, 2005; AHMAD *et al.*, 2022), são representados por

$$P_{\mathbf{x}} = (\vec{x}_{i,g}) \quad (5.6)$$

$$\vec{x}_{i,g} = (x_{1,i,g}, x_{2,i,g}, \dots, x_{D,i,g}) = (x_{j,i,g}). \quad (5.7)$$

onde  $i = 1, 2, \dots, NP$ ,  $j = 1, 2, \dots, D$  e  $g = 1, 2, \dots, g_{max}$ . O espaço de busca das soluções é delimitado pelos vetores  $\vec{x}_{min}$  e  $\vec{x}_{max}$  que contém os valores limite fixos para cada variável de decisão a fim de inicializar o vetor população,

$$\vec{x}_{min} = (x_{1,min}, x_{2,min}, \dots, x_{D,min}) \quad (5.8)$$

$$\vec{x}_{max} = (x_{1,max}, x_{2,max}, \dots, x_{D,max}), \quad (5.9)$$

ou seja, cada indivíduo é especificado dentro dos limites estabelecidos a depender do tipo de método de amostragem aplicado na inicialização. A distribuição uniforme é comumente utilizada no algoritmo clássico, sendo eficaz na cobertura do domínio de busca inserindo

certo grau de aleatoriedade (PRICE; STORN; LAMPINEN, 2005). Para cada solução  $i$ , a  $j$ -ésima componente dimensional é inicializada ( $g=0$ ) através da geração de um valor aleatório entre os limites máximo  $x_{j,max}$  e mínimo  $x_{j,min}$  (AHMAD *et al.*, 2022),

$$x_{j,i,0} = x_{j,min} + rand_j(0, 1)(x_{j,max} - x_{j,min}) \quad (5.10)$$

onde  $rand_j(0, 1)$  é uma distribuição uniforme que gera qualquer valor real entre 0 e 1 para cada parâmetro.

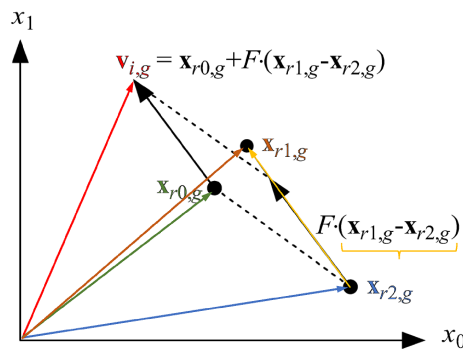
### 5.3.1.2 Mutação

A ideia principal do ED clássico consiste em computar a diferença entre dois indivíduos da popula o escolhidos aleatoriamente e adicionar o vetor resultante a um terceiro vetor, também escolhido aleatoriamente (esquema de sele o parental). O algoritmo determina a fun o gradiente dentro de uma determinada área, prevenindo a aderência da soluço em uma região distante da fun o otimizada (SLOWIK; KWASNICKA, 2020). Um dado problema   otimizado com  $n$  variáveis de decisão, no qual o mecanismo de muta o escala os valores adicionados às variáveis de decisão através do fator de escala  $F$ , produzindo uma popula o de  $NP$  vetores mutantes ou doadores  $\vec{v}_{i,g}$ ,

$$\vec{v}_{i,g} = \vec{x}_{r_0,g} + F \cdot (\vec{x}_{r_1,g} - \vec{x}_{r_2,g}). \quad (5.11)$$

onde  $r_0$    o  ndice da popula o de solu es selecionadas como vetores base a partir da gera o atual;  $r_1$  e  $r_2$  são os índices das popula es de solu es selecionadas para construir o vetor diferença; os índices são mutuamente distintos entre si. O processo de muta o, dado um problema de dimensão  $D = 2$ ,   ilustrado na Figura 20.

Figura 20 – Muta o diferencial



Fonte: Adaptado de (PRICE; STORN; LAMPINEN, 2005).

O vetor diferença é multiplicado pelo fator  $F$  e adicionado ao vetor base para produzir o vetor mutante. Além disso, o índice  $i$  especifica os vetores *target* escolhidos para recombinar com os vetores doadores na etapa de cruzamento e para competir com os vetores *trial* no processo de seleção.

As diferentes estratégias de mutação podem ser aplicadas, levando a versões distintas do algoritmo de ED quando o operador de cruzamento é especificado. O método clássico, tratado até agora, pode ser representado pela classe de algoritmos ED/*rand*/1/\*, em que o vetor base é aleatoriamente escolhido e somado com apenas um vetor diferença, Equação (5.11). Os mecanismos de busca das cinco estratégias de mutação comumente utilizadas estão reunidas na Tabela 3 (AHMAD *et al.*, 2022; GEORGIODAKIS; PLEVRIS, 2020). Os índices  $r_3$  e  $r_4$  correspondem aos indivíduos selecionados para compor o segundo vetor diferença. O vetor  $\vec{x}_{best,g}$  implica que a melhor solução de toda população atual é escolhida como o vetor base. Na mutação *current-to-best*, os vetores base são escolhidos na região compreendida entre o vetor *target*  $\vec{x}_{i,g}$  e o melhor indivíduo  $\vec{x}_{best,g}$ .

Tabela 3 – Estratégias de mutação

Número	Mutação	Estratégia
1	$\vec{v}_{i,g} = \vec{x}_{r_0,g} + F \cdot (\vec{x}_{r_1,g} - \vec{x}_{r_2,g})$	ED/ <i>rand</i> /1
2	$\vec{v}_{i,g} = \vec{x}_{r_0,g} + F \cdot (\vec{x}_{r_1,g} - \vec{x}_{r_2,g}) + F \cdot (\vec{x}_{r_3,g} - \vec{x}_{r_4,g})$	ED/ <i>rand</i> /2
3	$\vec{v}_{i,g} = \vec{x}_{best,g} + F \cdot (\vec{x}_{r_1,g} - \vec{x}_{r_2,g})$	ED/ <i>best</i> /1
4	$\vec{v}_{i,g} = \vec{x}_{best,g} + F \cdot (\vec{x}_{r_1,g} - \vec{x}_{r_2,g}) + F \cdot (\vec{x}_{r_3,g} - \vec{x}_{r_4,g})$	ED/ <i>best</i> /2
5	$\vec{v}_{i,g} = \vec{x}_{i,g} + F \cdot (\vec{x}_{best,g} - \vec{x}_{i,g}) + F \cdot (\vec{x}_{r_1,g} - \vec{x}_{r_2,g})$	ED/ <i>current-to-best</i> /1

Fonte: Elaborada pelo autor.

### 5.3.1.3 Cruzamento

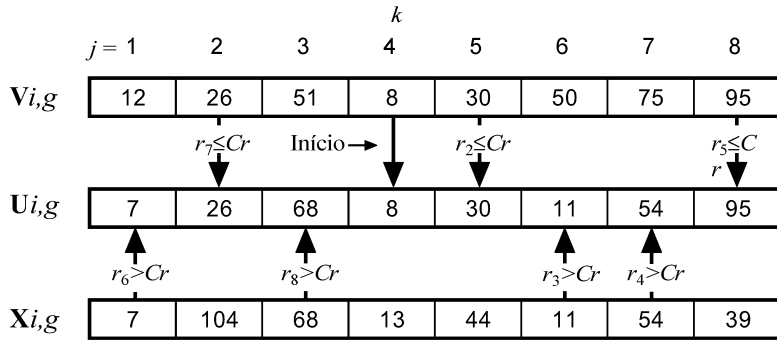
Após o processo de mutação, os vetores doadores e os vetores *target* recombinam suas componentes com uma probabilidade de cruzamento  $Cr \in [0, 1]$  a fim de produzir os vetores *trial* (descendentes). O algoritmo de evolução diferencial clássico utiliza o cruzamento uniforme, o qual compara  $Cr$  com um valor aleatório  $rand_j(0, 1)$  e determina se o vetor *trial* herdará o parâmetro do vetor mutante ou do vetor *target*,

$$\vec{u}_{i,g} = u_{j,i,g} = \begin{cases} v_{j,i,g}, & \text{se } (rand_j(0, 1) \leq Cr \text{ ou } j = k), \\ x_{j,i,g}, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (5.12)$$

onde  $\vec{u}_{i,g}$  é o vetor *trial* gerado para o  $i$ -ésimo vetor *target* da geração  $g$ . O número  $k = j_{rand} \in \{1, 2, \dots, D\}$  é um índice gerado aleatoriamente no início do processo para garantir que no mínimo um componente do vetor *trial* seja herdado pelo vetor mutante, de forma que o indivíduo da população da geração atual  $\vec{x}_{i,g}$  não seja duplicado. O processo é

ilustrado na Figura 21. Inicialmente, um parâmetro aleatório é herdado do vetor mutante, por exemplo,  $k = 4$ , em seguida  $D - 1$  tentativas são conduzidas de modo a determinar a origem dos parâmetros restantes.

Figura 21 – Cruzamento uniforme ( $D = 8$ )



Fonte: Adaptado de (PRICE; STORN; LAMPINEN, 2005).

O número de parâmetros mutantes herdados segue uma distribuição binomial, desde que as origens dos parâmetros sejam determinadas por um número finito de tentativas independentes tendo dois resultados com probabilidades constantes (PRICE; STORN; LAMPINEN, 2005), caracterizando a estratégia clássica *ED/rand/1/bin*. Em outras palavras, cada parâmetro do vetor *trial* tem a mesma probabilidade  $p_{Cr}$  de herança a partir dos vetores de origem. Além disso, o comportamento do algoritmo de ED é sensível aos operadores de mutação e cruzamento e também aos parâmetros envolvidos como  $F$  e  $Cr$  (ZAHARIE, 2009). Valores mais altos de  $Cr$  são apropriados quando há dependência de variáveis, o que, frequentemente, acontece em problemas de otimização reais.

Há vários modelos de operadores de cruzamento que podem ser utilizados em substituição ao cruzamento uniforme: cruzamento de um ponto,  $N$  pontos, exponencial, *Simulated Binary crossover* (SBX), *Simplex crossover* (SPX), entre outros. Cada operador varia de acordo com o modo em que os descendentes são gerados a partir das soluções parentais, resultando em diferentes quantidades média de parâmetros mutantes para um dado valor de  $Cr$ .

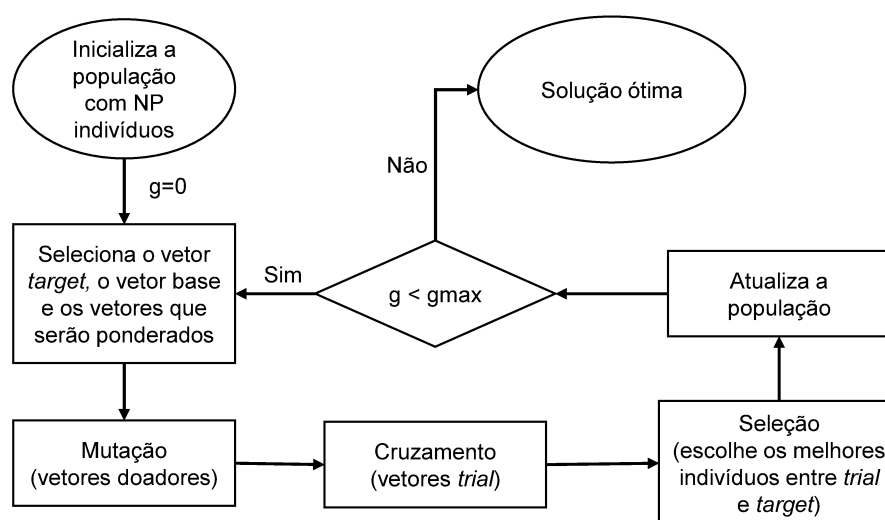
#### 5.3.1.4 Seleção

Neste processo, a sobrevivência das soluções parentais ou descendentes na próxima geração é determinada de acordo com os valores da função objetivo das soluções,  $f(\vec{u}_{i,g})$  e  $f(\vec{x}_{i,g})$ ,

$$\vec{x}_{i,g+1} = \begin{cases} \vec{u}_{i,g}, & \text{se } f(\vec{u}_{i,g}) \leq f(\vec{x}_{i,g}), \\ \vec{x}_{i,g}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.13)$$

Se o valor da função objetivo, ou *fitness*, do vetor *trial* for menor ou igual que o vetor *target*, este é substituído pelo primeiro (considerando um problema de minimização). Caso contrário, o vetor *target* permanece na população da próxima geração. Este esquema de seleção é elitista, uma vez que os melhores vetores das populações atual e de descendentes sempre sobrevivem. A Figura 22 ilustra o processo de busca do algoritmo pelas soluções ótimas.

Figura 22 – Fluxograma do algoritmo de ED



Fonte: Autoria própria.

### 5.3.1.5 Aleatorização do fator de escala

A tentativa de se combinar corretamente os parâmetros de controle não é uma tarefa trivial, depende do tipo de problema a ser otimizado e necessita de boa experiência do usuário, impactando diretamente no desempenho do algoritmo de ED. Três tipos de métodos podem ser utilizados para este fim: determinístico, adaptativo e autoadaptativo. O *dither* é uma técnica de controle de parâmetro determinístico que permite ao parâmetro  $F$ , Seção 5.3.1.2, admitir valores aleatórios entre um intervalo específico representado por  $F_{low}$  e  $F_{high}$  para cada vetor diferença (DAWAR; LUDWIG, 2014). Por outro lado, a técnica de geração de novos valores de  $F$  para cada parâmetro  $j$  é conhecida por *jitter*. Enquanto, o método *dither* apenas escala o comprimento do diferencial de vetores, o *jitter* escala e rotaciona, dado que cada componente do vetor diferença é multiplicada por um fator de escala diferente.

Há várias maneiras de aleatorizar  $F$ , uma delas é a randomização geracional (DAWAR; LUDWIG, 2014),

$$F_{dither} = F_l + rand_g(0, 1) \cdot (F_h - F_l), \quad (5.14)$$

onde  $F_l$  e  $F_h$  são os menores e maiores valores pré-definidos de  $F$ , respectivamente, e  $rand_t(0, 1)$  é um valor real distribuído uniformemente a cada nova geração  $g$ . Caso a randomização seja individual, diferentes valores de  $F$  são aplicados na mutação de cada indivíduo da população.

Embora, o fator de escala  $F$  possa ser mantido constante durante o processo de otimização sem que haja perda de eficácia na solução do problema ou comprometimento na habilidade do algoritmo em explorar o espaço de busca, aleatorizar o parâmetro  $F$  através de funções densidade de probabilidade oferece benefícios como aprimorar a diversidade do grupo de potenciais vetores *trial* (PRICE; STORN; LAMPINEN, 2005). O esquema *ditter* apresenta rápida convergência sem que haja necessidade no incremento do tamanho da população. Além disso, apresenta algumas vantagens sobre a técnica *jitter*.

Segundo Dawar e Ludwig (2014), a técnica *ditter* pode ser útil durante a fase inicial de busca, devido ao tamanho dos passos serem aleatórios; no entanto na fase final, em que se prioriza deslocamentos em determinadas áreas, passos de tamanho largos podem prejudicar a convergência, necessitando de técnicas de redução do tamanho do passo. Contudo, decidiu-se por utilizar a técnica *ditter* durante todo o processo de otimização com o intuito de comparar o desempenho do algoritmo quando o fator de escala for mantido constante.

## 5.4 Algoritmos de inteligência de enxame

A inteligência de enxames possui a perspectiva de que interações sociais entre indivíduos permitem a otimização de padrões complexos de atitudes, comportamentos e cognições (KENNEDY; EBERHART; SHI, 2001). O termo “enxame” se refere a qualquer estrutura coletiva de agentes individuais interligados: um exame de abelhas, uma colônia de formigas, um bando de pássaros, uma multidão de pessoas, etc. Além disso, a noção de enxame sugere um aspecto de movimento coletivo no espaço, bem como todos os tipos de comportamento coletivo. A auto-organização e a divisão de trabalho são dois conceitos fundamentais na obtenção do comportamento da inteligência de enxames, em que padrões funcionais globais emergem da interação local entre agentes em seu ambiente (SLOWIK; KWASNICKA, 2018). As duas meta-heurísticas dominantes que pertencem à família de algoritmos de inteligência de enxames são: otimização por enxame de partículas e otimização por colônia de formigas. Além destas, uma variedade de abordagens são mencionadas: colônia artificial de abelhas, otimização por bactérias forrageiras, algoritmo

dos vaga-lumes e otimização por enxame de peixes. Em vista da crescente popularidade dos algoritmos PSO e da facilidade de implementação, estes fatores foram cruciais na escolha como otimizador complementar ao algoritmo de ED.

#### 5.4.1 Otimização por enxame de partículas

O PSO é um algoritmo capaz de otimizar problemas multidimensionais e não lineares exigindo pouca parametrização, sendo caracterizado como um algoritmo estocástico de busca baseado em população e motivado pelo comportamento social de pássaros dentro de um bando, o qual tem sido aplicado com sucesso em vários problemas de otimização mono-objetivo (SIERRA; COELLO COELLO, 2005). As aplicações em diversos problemas de otimização utilizando o PSO tiveram crescente aumento desde o desenvolvimento do algoritmo, apresentando um crescimento quase que exponencial de publicações na plataforma IEEE Xplore a partir do ano de 2001 (POLI, 2008), como mostra a Figura 23. Dentre as publicações, 4,4% é dedicada às aplicações em projetos, incluindo o projeto de motores, 5,8% é voltada à área de eletrônica e eletromagnetismo e 1,4% das publicações é atribuída ao projeto ou otimização de motores elétricos.

Figura 23 – Quantidade de publicações por ano utilizando o PSO

Ano	IEEE Xplore
1995	(0)
1996	(0)
1997	(2)
1998	(3)
1999	(6)
2000	█ (10)
2001	█ (13)
2002	█ (36)
2003	█ (86)
2004	█ (270)
2005	█ (425)
2006	█ (687)

Fonte: Reprodução de Poli (2008).

O conceito básico do algoritmo, introduzido por Kennedy e Eberhart (1995), consiste em criar um enxame de partículas que se movem no espaço do problema em busca de um objetivo, em que as posições das partículas são avaliadas através de uma função de aptidão. O conjunto de partículas é designado no espaço e as posições e velocidades de cada partícula são atualizadas iterativamente. Ao contrário dos algoritmos evolucionários, o PSO não utiliza o método de seleção e, geralmente, todos os indivíduos da população

sobrevivem até o fim da execução. O termo enxame de partículas foi designado por causa do tamanho da população, do movimento simultâneo dos indivíduos e da tendência em se agruparem em regiões ótimas do espaço de busca (KENNEDY, 2010).

Desta maneira, diversas variantes foram propostas desde a introdução do algoritmo. Contudo, referindo-se ao algoritmo original, mudanças na posição  $\vec{x}_i(t)$  de cada partícula  $p_i$  a cada iteração  $t$  são baseadas na tendência em que os indivíduos imitam o sucesso dos demais. A posição é atualizada conforme,

$$\vec{x}_i(t) = \vec{x}_i(t-1) + \vec{v}_i(t). \quad (5.15)$$

Neste contexto, percebe-se que a Equação (5.15) é a forma simplificada de um problema de dimensionalidade  $D$ , a qual refere-se às partículas correspondentes a uma dada variável de decisão  $j$ . De acordo com uma variante do algoritmo, a qual adiciona um coeficiente de ponderação na versão original *Global Best* do PSO, a velocidade  $\vec{v}_i(t)$ , (NEBRO *et al.*, 2009), é descrita por

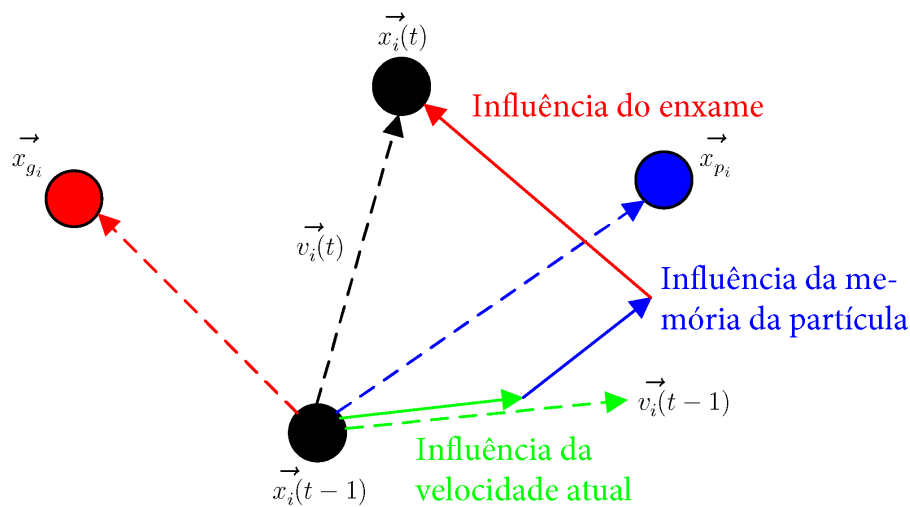
$$\vec{v}_i(t) = w\vec{v}_i(t-1) + C_1r_1(\vec{x}_{p_i} - \vec{x}_i(t)) + C_2r_2(\vec{x}_{g_i} - \vec{x}_i(t)), \quad (5.16)$$

onde  $\vec{x}_{p_i}$  é a posição com a melhor solução (aptidão) alcançada pela partícula  $\vec{x}_i$  de todos os locais visitados,  $\vec{x}_{g_i}$  é a posição do melhor indivíduo dentre todos do enxame, referido como o líder,  $w$  é o coeficiente de inércia da partícula,  $r_1$  e  $r_2$  são valores aleatórios uniformemente distribuídos sobre o intervalo  $[0, 1]$ , e  $C_1$  e  $C_2$  são os fatores de aprendizado. O programa avalia a partícula  $p_i$  em uma função de aptidão  $f(\vec{x})$  e compara o resultado à melhor solução obtida pela partícula, chamada  $pbest_i$  (KENNEDY, 2010). Caso, o atual resultado seja melhor,  $\vec{x}_{p_i}$  e  $pbest_i$  são atualizados. De forma análoga, o algoritmo compara o resultado obtido pela partícula com o líder, se o atual resultado for melhor,  $\vec{x}_{g_i}$  e  $gbest_i$  são atualizados. A Figura 24 apresenta o esquema iterativo das partículas segundo as Equações (5.15) e (5.16).

Nesta versão, chamada de algoritmo PSO canônico, todo o enxame está interconectado, uma vez que as partículas compartilham informações entre elas e são vistas como soluções em potencial ao problema, sendo que cada partícula tem sua própria posição e velocidade. Os fatores estocásticos  $r_1$  e  $r_2$  permitem que as partículas se movam através de regiões desconhecidas do problema, aumentando as chances de encontrar as melhores soluções com eficiência. Além disso, os coeficientes  $C_1$  e  $C_2$  na Equação (5.16) são também referidos como constantes de aceleração para a componente cognitiva e a componente social, respectivamente. A parametrização do coeficiente de inércia  $w$  permite que o algoritmo explore tanto os locais com as melhores soluções conhecidas quanto as áreas desconhecidas do espaço de busca.



Figura 24 – Esquema vetorial PSO



Fonte: Adaptado de Wang, Tan e Liu (2018).

#### 5.4.1.1 Algoritmo multiobjetivo baseado na otimização por enxame de partículas

O mecanismo de compartilhamento de informações na maioria dos algoritmos PSO é bem diferente de outras ferramentas de otimização baseadas em enxame, onde somente *gbest* fornece informação para outras partículas. Enquanto, que nos algoritmos genéticos, os cromossomos trocam informações entre si através da operação de cruzamento (WANG; TAN; LIU, 2018).

Com o intuito de tratar múltiplos objetivos e estender a aplicação do algoritmo PSO canônico para a otimização multiobjetiva, várias abordagens foram sugeridas. Os algoritmos, genericamente chamados de *Multiple-Objective Particle Swarm Optimizers* (MOPSOs), modificam o processo de seleção das partículas relacionadas a  $\vec{x}_{p_i}$  e  $\vec{x}_{g_i}$  no algoritmo PSO canônico. Dentre os diferentes MOPSOs desenvolvidos, o algoritmo de destaque chamado OMOPSO (SIERRA; COELLO COELLO, 2005) é baseado na dominância de Pareto e no uso da técnica de avaliação da distância de aglomeração (*crowding distance*, em inglês) para a seleção do líder. O *crowding distance* é uma técnica introduzida pelo algoritmo NSGA-II que fornece uma estimativa da densidade de soluções na vizinhança. A abordagem utilizada pelo algoritmo OMOPSO evita escolher qualquer solução não dominada como um novo líder e a cada geração o conjunto de líderes é atualizado com as melhores soluções. Além disso, o algoritmo usa o método “ $\epsilon$ -dominance” para manter a diversidade e um esquema para aprimorar a capacidade de busca das partículas. O conceito “ $\epsilon$ -dominance” fixa a quantidade de soluções não dominadas que serão armazenadas pelo algoritmo. Já o esquema consiste em dividir o enxame em três partes de mesmo tamanho. Ao primeiro subenxame não é aplicado nenhum operador de mutação, enquanto, que no segundo e

terceiro subenxames é aplicado a mutação uniforme e não uniforme, respectivamente, advindas dos algoritmos evolucionários. Contudo, cada partícula pode utilizar um líder como referência, proveniente de qualquer subenxame.

Em um estudo de análise de desempenho desenvolvido por Nebro *et al.* (2009), seis algoritmos MOPSO significativos (incluindo o OMOPSO) foram incapazes de resolver alguns problemas multimodais satisfatoriamente. Os resultados indicaram um problema relacionado à velocidade das partículas nestes algoritmos, em que a velocidade podia assumir valores muito altos, resultando em movimentos erráticos. Neste sentido, foi desenvolvido o algoritmo SMPSO, baseado no próprio OMOPSO, com o objetivo de prevenir tal comportamento através de um mecanismo de constrição, no qual a velocidade das partículas é controlada de acordo com um coeficiente de constrição, ao invés de utilizar parâmetros de máximo e mínimo que limitam o tamanho de passo da velocidade. As velocidades das partículas são calculadas conforme a Equação (5.16), em que o valor resultante é então multiplicado pelo fator de constrição (NEBRO *et al.*, 2009), dado por:

$$\chi = \frac{2}{2 - \varphi - \sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}}, \quad (5.17)$$

onde  $\varphi$  está relacionado aos fatores de aprendizado de acordo com,

$$\varphi = \begin{cases} C_1 + C_2, & \text{se } C_1 + C_2 > 4, \\ 0, & \text{se } C_1 + C_2 \leq 4. \end{cases} \quad (5.18)$$

Em seguida, a velocidade acumulada resultante de cada partícula, e para cada variável, é restringida através da equação de constrição da velocidade,

$$v_{i,j}(t) = \begin{cases} \text{delta}_j, & \text{se } v_{i,j}(t) > \text{delta}_j, \\ -\text{delta}_j, & \text{se } v_{i,j}(t) \leq -\text{delta}_j, \\ v_{i,j}(t), & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (5.19)$$

onde  $\text{delta}_j$  é definido pelos limites (superior  $l_{sup}$  e inferior  $l_{inf}$ ) de busca impostos a cada variável  $j$ , ou dimensão, como segue:

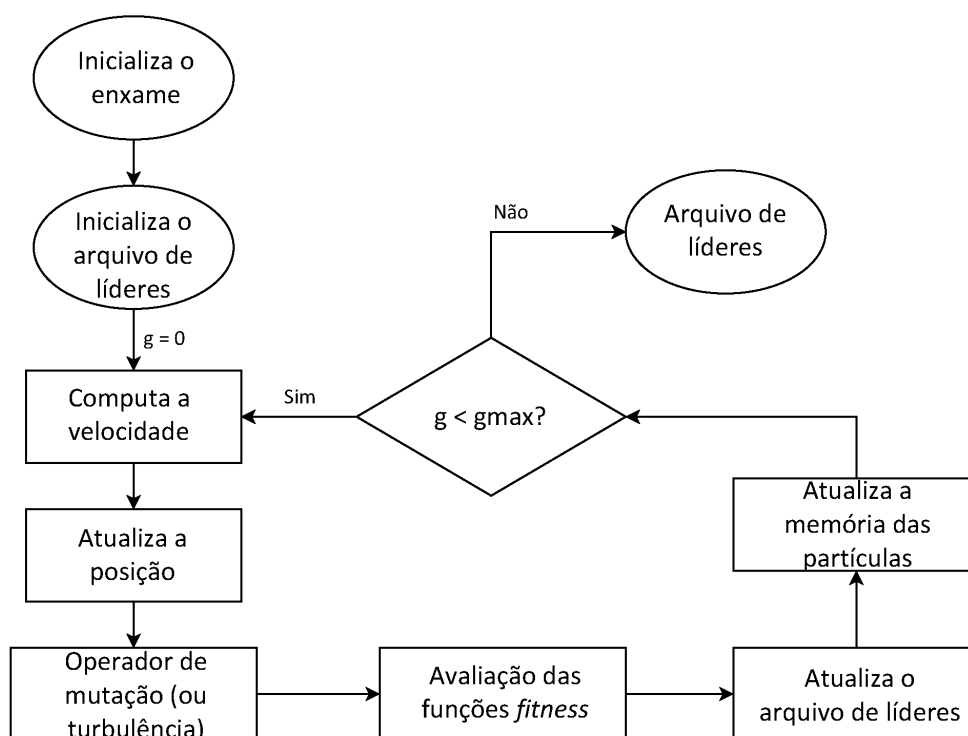
$$\text{delta}_j = \frac{l_{sup} - l_{inf}}{2}. \quad (5.20)$$

Este mecanismo garante que as partículas se movam eficientemente dentro dos limites do espaço de busca. Ao invés de utilizar o esquema de subdivisão do enxame,

aplicando-se os operadores de mutação uniforme e não uniforme, uma mutação polinomial é aplicada em 15% das partículas no algoritmo SMPSO.

O fluxograma do algoritmo é apresentado na Figura 25. O enxame, incluindo a posição, velocidade e melhor solução individual *pbest* das partículas, e o arquivo de líderes são inicializados. O objetivo principal consiste em atualizar as posições das partículas baseado nas velocidades calculadas e aplicar o operador de mutação a fim de acelerar a convergência. Um arquivo contendo o conjunto de líderes do enxame, em que o tamanho máximo é fixado com valor igual ao tamanho do enxame, é atualizado após cada iteração (ou geração). À medida que o arquivo é preenchido e a quantidade de líderes armazenados se aproxima do valor máximo permitido, o *crowding distance* é aplicado ao arquivo com a finalidade de filtrar as soluções, decidindo quais partículas devem permanecer (NEBRO *et al.*, 2009).

Figura 25 – Fluxograma do algoritmo SMPSO



Fonte: Autoria própria.

A Seção 5.5 apresenta dois estudos de caso, os quais constituem problemas de otimização mono e multiobjetivo em que se buscam a maximização do fluxo magnético concatenado nos enrolamentos de fase do MRV por meio da modificação (combinação) dos parâmetros geométricos com base no *design* inicial; e a maximização da densidade do torque através do ajuste dos ângulos de comutação. Os problemas serão definidos de

acordo com as funções objetivo, as variáveis de decisão e seus limites.

## 5.5 Estudos de caso

Segundo o protótipo de um MRV 8/6, discutido no Capítulo 4, dois estudos de caso foram elaborados:

### 5.5.1 Formulação dos problemas de otimização

- I. maximizar a densidade de fluxo magnético concatenado em uma das bobinas, enquanto o volume de material magnético é minimizado. O problema de otimização pode ser formulado a partir de  $M = 2$  funções objetivo sem restrições,

$$\max. \quad f_1 = \Psi = 2 \int_s^l \frac{T_{ph} A_z}{a_b} ds, \quad (5.21)$$

onde  $f_1$  é a função objetivo utilizada para avaliar o fluxo magnético concatenado  $\Psi$  na bobina,  $l$  é o comprimento da pilha de lâminas do estator,  $A_z$  é a componente axial do potencial vetor magnético  $\vec{A}$  e  $a_b$  é a área da seção transversal da bobina.

A função objetivo  $f_2$  a ser minimizada, a qual avalia o volume do núcleo magnético é definida por,

$$\min. \quad f_2 = vol_{MRV} = l \cdot f_p (a_{es} + a_r + a_{eixo}), \quad (5.22)$$

onde  $f_p \approx 0,97$  é o fator de empilhamento das lâminas,  $a_{es}$ ,  $a_r$  e  $a_{eixo}$  são as áreas das seções transversais das lâminas do estator, rotor e eixo, respectivamente.

O domínio de busca consiste no conjunto de  $N = 5$  variáveis de decisão, as quais são definidas (em milímetros) a seguir,

$$80,5 < D_r < 100,5 \quad (5.23)$$

$$7,45 < C_s < 20,45 \quad (5.24)$$

$$10 < C_r < 18 \quad (5.25)$$

$$24,5 < D_{eixo} < 34,5 \quad (5.26)$$

$$0,30 < g < 0,60 \quad (5.27)$$

Todas as dimensões geométricas do protótipo presentes na Tabela 1 serão ajustadas, exceto  $\beta_s$ ,  $\beta_r$ ,  $D_s$  e  $l$ . Além disso, os parâmetros da Tabela 2 permanecerão inalterados a fim de manter as mesmas características elétricas, o curso de operação do motor e

a dimensão externa do estator (equivalente à geometria da carcaça 100L). Ademais, percebe-se que nem todos os parâmetros geométricos foram selecionados como variáveis de decisão. As larguras e alturas dos polos do motor são controladas pelas larguras das culatras e pelo diâmetro interno  $D_r$  (equacionamento definido na linguagem dedicada *.geo* do Gmsh), uma vez que os ângulos dos polos são constantes.

Em seguida, um algoritmo de otimização global, com foco apenas na busca da melhor solução entre todos os indivíduos, será aplicado ao mesmo problema de otimização e variáveis de decisão (5.23)-(5.27), porém formulado a partir de apenas uma função objetivo, como segue,

$$\max. \quad f_3 = \frac{\Psi}{vol_{MRV}} = \frac{2 \int_s \frac{l T_{ph} A_z}{a_b} ds}{l \cdot f_p(a_{es} + a_r + a_{eixo})}. \quad (5.28)$$

As funções objetivo de ambos os problemas de otimização serão calculadas através de uma análise magnetostática, considerando fixos os valores das correntes de excitação.

- II. maximizar o valor médio e minimizar a oscilação do torque eletromagnético com o intuito de melhorar a qualidade do torque produzido. O problema de otimização é formulado a partir de  $M = 2$  funções objetivo,

$$\max. \quad f_4 = T_{avg} = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} T(\theta) d\theta, \quad (5.29)$$

onde,  $f_4$  é a função objetivo utilizada para avaliar o valor médio do torque,  $T(\theta)$  é o torque eletromagnético em função da posição rotórica e  $(\theta_2 - \theta_1)$  equivale a um ciclo elétrico completo (60° mecânicos).

A função objetivo  $f_5$  a ser minimizada, a qual avalia a medida da qualidade do torque é definida por,

$$\min. \quad f_5 = \Delta T_{rms} = \sqrt{\frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (T(\theta) - T_{avg})^2 d\theta}, \quad (5.30)$$

onde  $(T(\theta) - T_{avg})$  é a componente periódica da forma de onda do torque instantâneo. A fim de se evitar valores negativos e, também uma qualidade do torque demasiadamente baixa, o problema será sujeito à função de restrição ( $J = 1, K = 0$ ),

$$g_1 = T_{rp} (T_{rp} - 3, 0) \leq 0 \quad (5.31)$$

$$\text{em que, } T_{rp} = \frac{\max(T(\theta)) - \min(T(\theta))}{T_{avg}}. \quad (5.32)$$

As  $N = 3$  variáveis de entrada, são definidas:  $x_0 = \varepsilon$ ,  $x_1 = \theta_{on}$ , ambas em graus elétricos, e  $x_2 = V_F$  em volts,

$$6 \leq x_0 \leq 150 \quad (5.33)$$

$$0 \leq x_1 \leq 90 \quad (5.34)$$

$$250 \leq x_2 \leq 350 \quad (5.35)$$

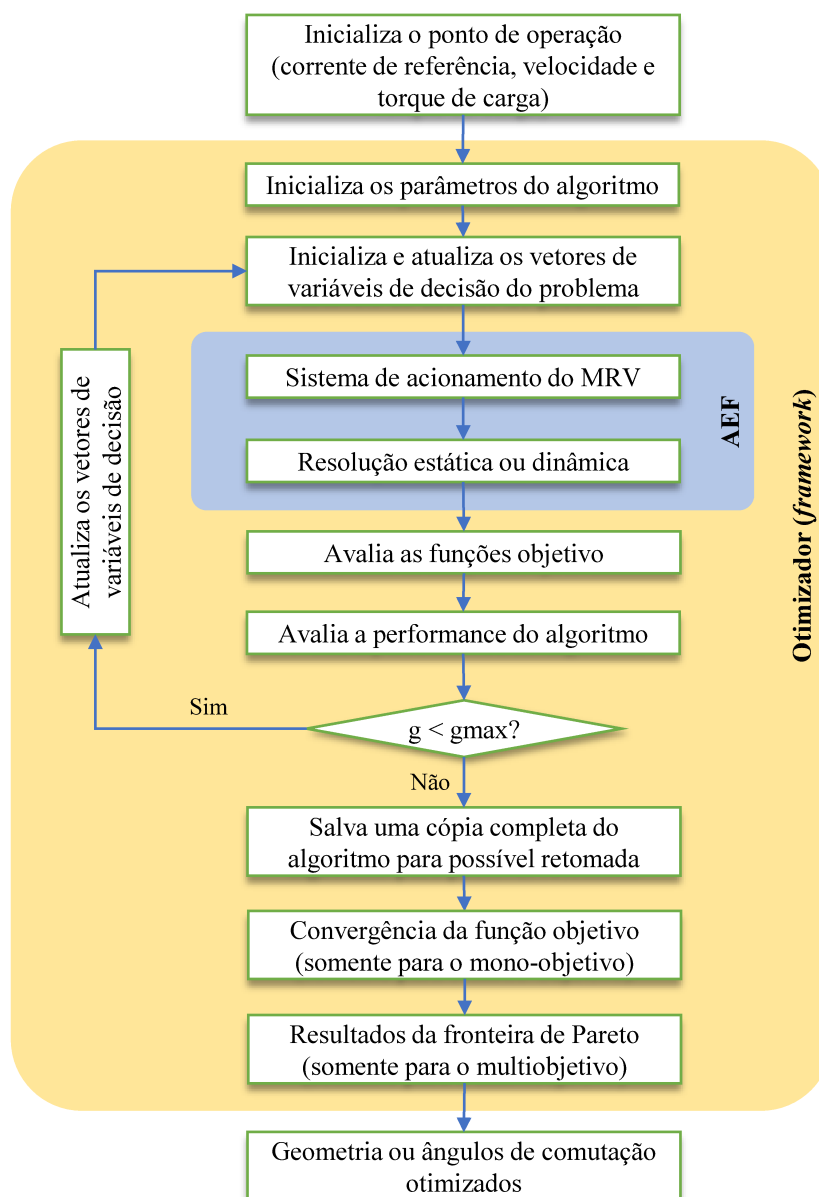
Devido à ausência de um controle da velocidade, a manutenção do cenário de carga, da corrente de comando e coeficientes mecânicos é requerida. Isto assegura a condução da otimização em pontos de operação equivalentes e permite que o desempenho do motor possa ser comparado entre diferentes configurações, construídas pelo algoritmo multiobjetivo.

As funções objetivo do problema de otimização serão calculadas através de uma análise magnetodinâmica. Além disso, de início, uma análise dinâmica sem otimização será desempenhada à parte dos estudos de caso, com o intuito de comparar o comportamento do MRV 8/6 entre os resultados da simulação eletromagnética e os dados experimentais obtidos em Moraes Filho (2017).

A busca por maiores valores de fluxo concatenado conduz a um cenário em que o MRV adquire maior capacidade de produção de torque eletromagnético para a mesma densidade de corrente elétrica, enquanto, que o volume do motor é minimizado para a redução da quantidade de material magnético necessário na construção do MRV. Uma vez que o fluxo magnético e o volume do rotor são duas quantidades inversamente proporcionais sob uma condição de operação, o algoritmo de otimização multiobjetivo SMPSO, o qual é baseado na estratégia PSO, será aplicado. Através da fronteira de Pareto constituída de soluções não dominadas, os pontos Pareto-ótimos podem ser escolhidos na ausência de uma técnica de tomada de decisão. Além disso, o fluxo concatenado por unidade volumétrica pode ser definido como uma única função objetivo a fim de ser maximizada sem que haja preocupação em lidar com a tomada de decisão de múltiplas funções. Para fins comparativos, o algoritmo de ED será utilizado na busca do ótimo global.

A Figura 26 apresenta o fluxograma utilizado nos problemas de otimização. A seção “AEF” representa o *loop* de simulações conduzidas pelo Gmsh/GetDP, em que o modelo do MRV 8/6 e do sistema de acionamento são chamados pelo otimizador. Em ambos os algoritmos de otimização, toda a população de possíveis soluções é simulada durante a geração atual. Ou seja, a cada geração são executadas  $NP$  funções de avaliação. Durante o processo de otimização, dados de performance do algoritmo podem ser enviados à interface do Gmsh: índice da geração atual  $g$ , violação de restrições (se aplicável), quantidade de soluções não dominadas encontradas (se multiobjetivo), entre outros.

Figura 26 – Fluxograma para a otimização da geometria ou dos ângulos de comutação



Fonte: Autoria própria.

Se o critério de parada for satisfeito, neste caso o número máximo de gerações é atingido, uma cópia completa do algoritmo é salva em um arquivo externo, permitindo a retomada da otimização a partir da última geração. Esse recurso é útil para simulações dispendiosas que levam dias para serem finalizadas, ou caso a quantidade de iterações tenha sido insuficiente para o potencial aproveitamento do algoritmo na solução do problema de otimização. Em seguida, um gráfico de evolução com o melhor resultado da função de avaliação encontrado em cada geração (problema mono-objetivo) é criado. Caso seja um problema de otimização multiobjetivo, os resultados otimizados são traçados na fronteira de Pareto e as soluções são armazenadas e indexadas junto com os resultados da fronteira.

## 5.6 Considerações finais

Os métodos heurísticos baseados em observações da natureza têm sido foco de estudo na aplicação em problemas de otimização reais. Em vista disto, este capítulo apresentou meta-heurísticas baseadas na evolução natural e na teoria do enxame de partículas junto aos conceitos básicos dos algoritmos de ED, PSO e SMPSO. Os algoritmos evolucionários e de inteligência de enxame se diferenciam na forma como a busca no espaço de soluções e a convergência da população é conduzida durante a geração de novos indivíduos, bem como na utilização de operadores de mutação e seleção. Contudo, cada método pode ter vantagens sobre outros dependendo do tipo de aplicação requerida.

O Capítulo 6 apresenta os resultados da aplicação dos algoritmos de otimização nos estudos de caso, bem como os resultados da análise do comportamento dinâmico do MRV 8/6 considerando a estratégia de operação e os ângulos de comutação para o modelo de referência.



## 6 RESULTADOS

### 6.1 Introdução

Os projetos de motores elétricos são essenciais na previsão do custo de manufatura e desempenho. Para este propósito, simulações computacionais utilizando o pacote MATLAB/Simulink são comuns nesta etapa pela facilidade de implementação e por fornecer boa estimativa dos perfis de corrente nos enrolamentos das bobinas para o dimensionamento adequado do circuito de alimentação e do controle de corrente e velocidade. Uma vez que, o motor é modelado em equações de espaço de estado, o fluxo magnético concatenado nas bobinas, necessário ao equacionamento, é obtido, comumente, por meio de *software* de elementos finitos como o *Finite Element Method Magnetics* (FEMM). Alguns trabalhos foram conduzidos com esta metodologia (MORAES FILHO, 2017; SILVEIRA, 2012).

Outra metodologia de análise de desempenho de motores elétricos que requerem um tipo de controle de tensão com circuito de alimentação externo foi implementada em Oliveira (2000), Roel O. (2002), Antunes (2002), Luz (2003). O equacionamento do circuito elétrico é realizado em variáveis de espaço de estado pela Teoria dos Grafos aliada à Teoria de Circuitos Elétricos. As equações de circuito são combinadas diretamente com as equações de campo através das correntes nos enrolamentos da estrutura eletromagnética e das tensões entre seus terminais.

Este capítulo apresenta os resultados da análise do comportamento dinâmico e de dois estudos de caso envolvendo a otimização do protótipo do MRV 8/6. A análise considera um projeto de motor com as mesmas características nominais e condições de operação definidos no estágio experimental em Moraes Filho (2017) com o propósito de validar a ferramenta de elementos finitos. No estudo de caso I, os otimizadores mono e multiobjetivo, algoritmos de ED e SMPSO, conduzem as análises magnetostáticas a cada geração. No caso II, o algoritmo de otimização multiobjetivo SMPSO conduz as análises dinâmicas considerando-se condições de operação em regime permanente. Em todas as situações, emprega-se um modelo bidimensional do motor, aproveitando-se a simetria e considerando a rotação do MRV 8/6 através da técnica da banda de movimento.

O *framework* chamado *pymoo* (BLANK; DEB, 2020) fornece os códigos do algoritmo de ED; a ferramenta concentra-se em algoritmos mono e multiobjetivo, dispondo de vários recursos relacionados à métrica de convergência e tomada de decisão: distância geracional, *hypervolume*, abordagem *pseudo-weight vector*, métrica *trade-off*, entre outros. Enquanto, que o *framework platypus* (HADKA, 2017) fornece o código do algoritmo SMPSO, o qual dedica-se à computação evolucionária com foco nos algoritmos evolucionários multiobjetivo. Ambas as bibliotecas são escritas em linguagem *Python*, sendo requisito à utilização do

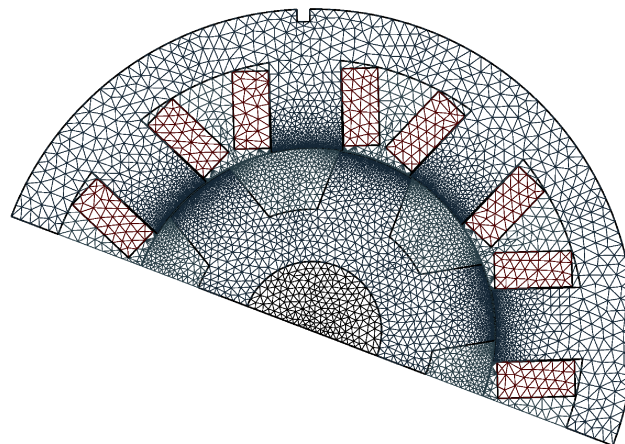
módulo de comunicação do ONELAB.

## 6.2 Modelagem em elementos finitos

Para as simulações, a estrutura magnética do modelo do MRV 8/6 é caracterizada por um núcleo não condutor  $\sigma = 0$  (sem correntes induzidas) e saturável  $\mu(\vec{B})$ . Adicionalmente, as bobinas de fase são compostas por indutores finos de indutância variável  $L = L(I, \theta)$ , onde os efeitos de proximidade dos condutores e o efeito pelicular são desprezados.

Considerando-se metade da estrutura física do MRV 8/6, a malha de elementos finitos gerada sobre o domínio e a indução magnética  $\vec{B}$  obtida a partir da excitação da fase  $A$ , em corrente nominal, com os polos parcialmente sobrepostos são apresentadas nas Figuras 27 e 28, respectivamente.

Figura 27 – Malha de elementos finitos considerando metade do modelo do MRV 8/6 (7489 nós; 15219 elementos)

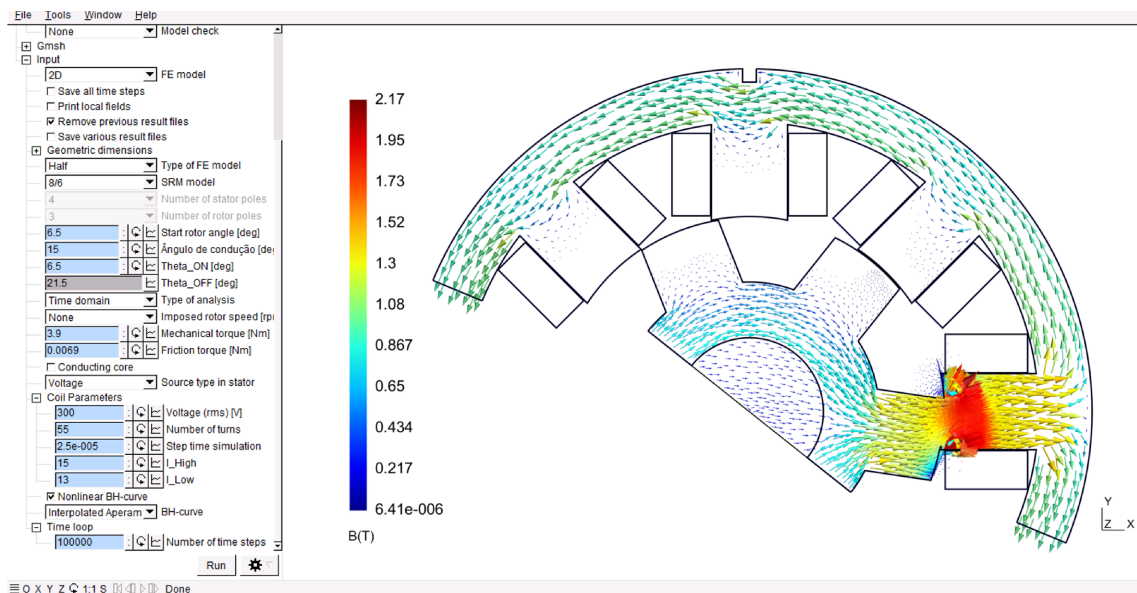


Fonte: Autoria própria.

O tamanho dos elementos triangulares de primeira ordem é refinado nas proximidades da banda de movimento com a finalidade de considerar corretamente os fluxos de dispersão, permitindo um cálculo preciso do torque eletromagnético no entreferro, à medida que os elementos periféricos são relaxados. O que implica em uma menor quantidade de DOF do sistema e assim, reduzindo o esforço computacional.

Em relação à Figura 28, a região central dos polos do estator e do rotor não apresenta saturação magnética. Por outro lado, quando o motor opera com correntes e cargas mecânicas mais elevadas, a condição de saturação do material magnético é alcançada, logo, a capacidade de produção do torque e o fator de potência são aprimorados (BILGIN; JIANG; EMADI, 2018).

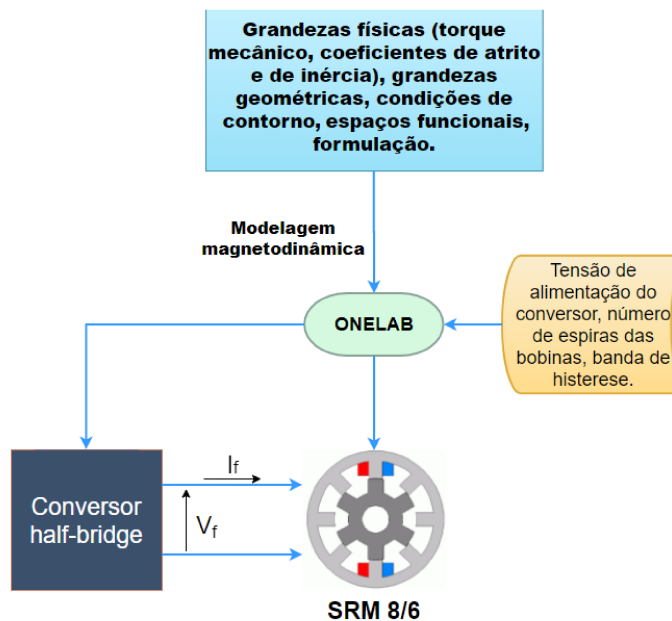
Figura 28 – Interface do Gmsh com a solução do campo vetorial da indução magnética



Fonte: Autoria própria.

O diagrama ilustrativo da conexão entre o conversor e o motor elétrico na análise magnetodinâmica é apresentado na Figura 29.

Figura 29 – Diagrama funcional da solução do problema magnetodinâmico



Fonte: Autoria própria.

A seção seguinte apresenta a simulação de um teste experimental, onde o motor elétrico é acionado por um conversor *half-bridge* com uma carga mecânica aplicada ao eixo

através de um motor de corrente contínua. Os resultados da análise numérica do sistema de acionamento do MRV 8/6 são comparados aos resultados obtidos experimentalmente.

### 6.3 Análise computacional dinâmica do MRV

Considera-se os seguintes parâmetros extraídos do teste experimental: a tensão do conversor é  $V_F = 300$  V e a capacitância do banco de capacitores é  $C = 6$  mF, alimentado por uma fonte de tensão trifásica de 60 Hz para uma velocidade desejada  $\omega = 2000$  rpm; a largura da banda de histerese é  $\Delta i = 1$  A para o chaveamento em torno da corrente de referência  $I_p = 14$  A; os ângulos de comutação são  $\theta_{on} = 39^\circ$  e  $\theta_{off} = 129^\circ$  elétricos, tal que duas ou mais fases não sejam excitadas simultaneamente; o torque médio de carga mecânica é  $T_{mec} = 3,9$  N.m; o coeficiente de fricção e de inércia do sistema são, respectivamente,  $D = 0,0069$  N.m.s e  $J = 0,00206$  kg.m<sup>2</sup>. Os dados foram reunidos na Tabela 4.

Tabela 4 – Dados para a simulação computacional do MRV 8/6

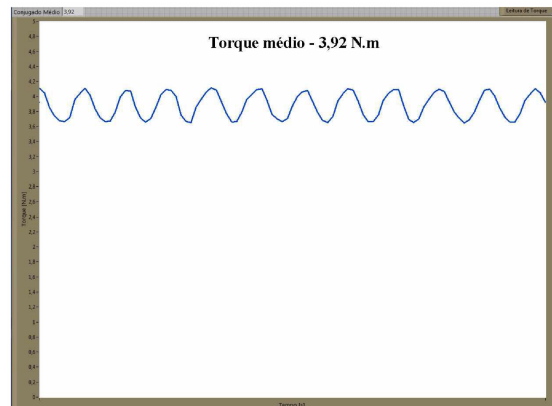
Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidade
Tensão do <i>Link-DC</i>	$V_F$	300	V
Capacitância do filtro	$C$	6	mF
Largura da banda de histerese	$\Delta i$	1	A
Corrente de referência	$I_p$	14	A
Ângulo elétrico de comutação ( <i>on</i> )	$\theta_{on}$	39	graus
Ângulo elétrico de comutação ( <i>off</i> )	$\theta_{off}$	129	graus
Ângulo elétrico de condução	$\varepsilon$	90	graus
Torque mecânico de entrada	$T_{mec}$	3,9	N.m
Coefficiente de atrito viscoso	$D$	0,0069	N.m.s
Coefficiente de inércia	$J$	0,00206	kg.m <sup>2</sup>
Tempo de simulação	$t_f$	2,5	s
Passo de tempo	$\Delta t$	$2,5 \cdot 10^{-5}$	s

Fonte: Elaborada pelo autor.

O conjugado mecânico de carga proveniente da máquina CC apresenta uma oscilação natural no teste experimental, conforme a Figura 30. Contudo, decidiu-se, por viabilidade, considerar apenas o valor médio e constante de carga durante a evolução da velocidade do eixo na simulação computacional. Como resultado, a solução numérica gerada na interface do Gmsh, ao final da simulação (totalizando  $10^5$  passos de tempo), com o mapa da densidade de fluxo e a curva de evolução da velocidade do rotor, é apresentada na Figura 31.

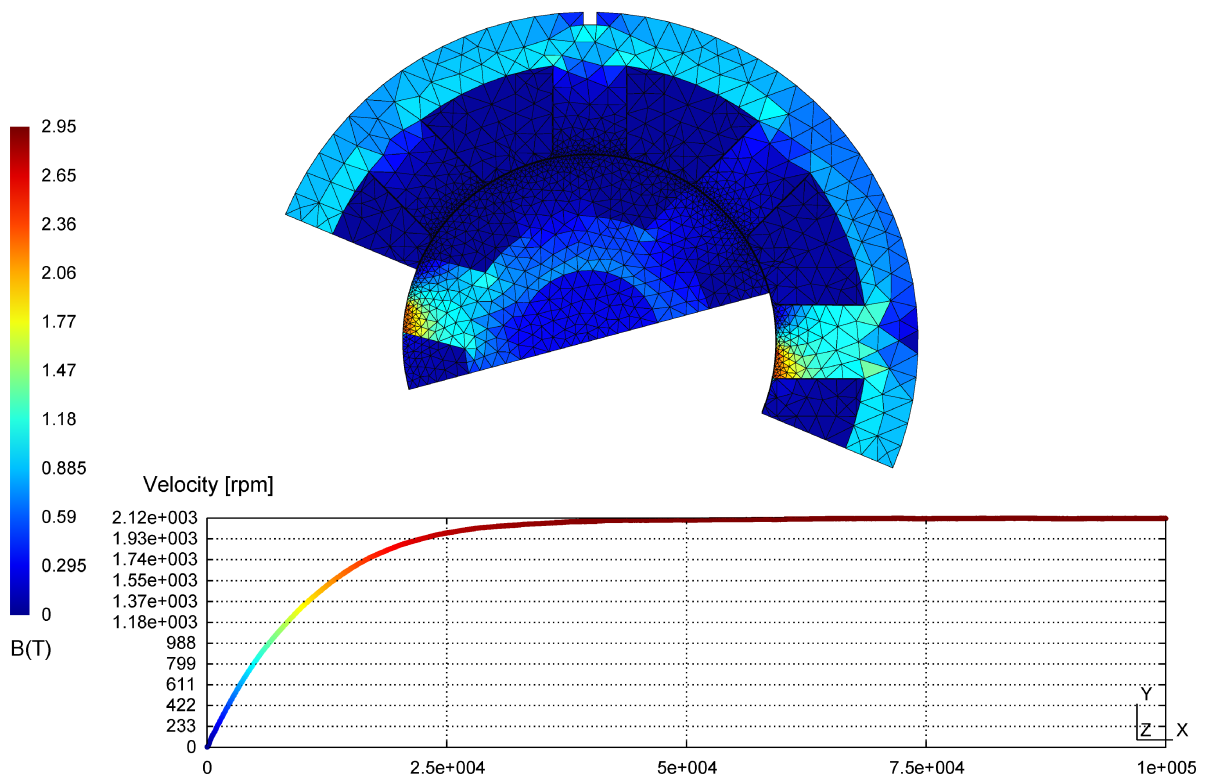
Durante um curso de operação do motor (chamado de *stroke*, em inglês), correspondente a um percurso de  $60^\circ$  mecânicos, apenas as quinas dos polos relacionados à fase excitada apresentam saturação magnética. A densidade de fluxo no centro dos polos do estator atinge o valor máximo de 1,6 T tão somente em instantes antes da etapa de

Figura 30 – Conjugado mecânico medido pelo transdutor em função do tempo em segundos



Fonte: Reprodução de Moraes Filho (2017).

Figura 31 – Norma da densidade de fluxo magnético e gráfico da velocidade do rotor em função da quantidade de passos de tempo



Fonte: Autoria própria.

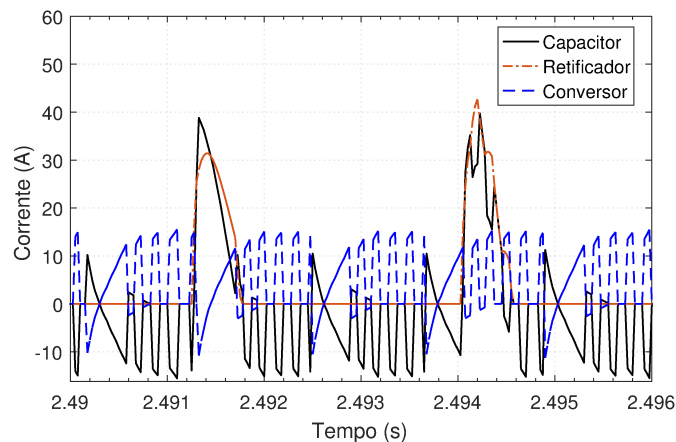
desmagnetização, quando a indutância também atinge seu valor máximo. À vista disso, o MRV pode operar em condições de operação com maior carga no eixo e corrente nos enrolamentos ao custo de uma maior densidade de torque eletromagnético. Assim como foi discutido brevemente na Seção 6.2, a saturação magnética tem um papel importante

no aprimoramento da capacidade de produção de torque.

No instante inicial  $t = 0$ , uma das fases é excitada pela tensão do conversor  $V_F$ , iniciando o movimento do rotor no sentido anti-horário a partir da sobreposição do par de polos relacionado às bobinas energizadas. Como o conjugado mecânico incide no eixo desde o instante inicial, o rotor gira brevemente no sentido contrário até que o conjugado eletromagnético supere o conjugado de carga e o momento de inércia somados ao atrito viscoso, conforme Equação (3.9).

As correntes do circuito,  $i_F(t)$ ,  $i_C(t)$  e  $i_M(t)$ , obtidas através da solução numérica durante um *stroke*, são apresentadas na Figura 32. Os altos picos de corrente do retificador  $I_F$  e do filtro capacitivo  $I_C$  ocorrem nos instantes em que a fonte fornece energia para carregar o banco de capacitores. Os instantes de desmagnetização de uma fase e magnetização da fase subsequente é visto nos picos negativos de corrente no conversor  $I_M$ . Além disso, nos instantes em que a corrente no capacitor assume valores negativos, o capacitor fornece energia para a excitação das bobinas de fase do motor.

Figura 32 – Perfis das correntes do circuito

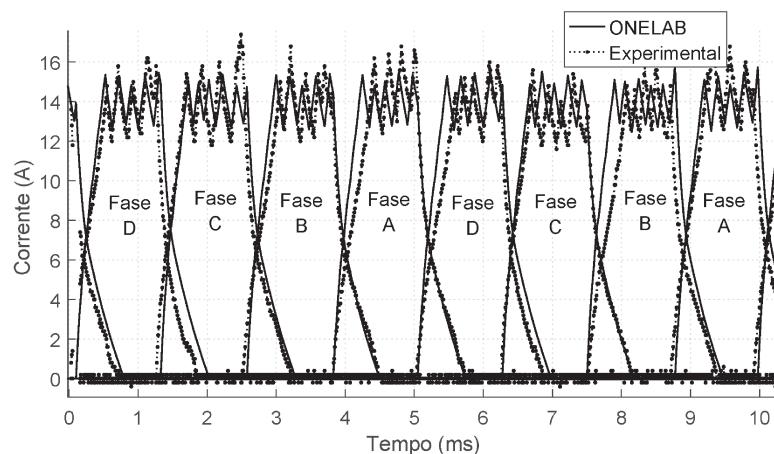


Fonte: Autoria própria.

Sob operação do controle de histerese, desprezando-se efeitos de cabeça de bobina e perdas no núcleo magnético e no conversor, as curvas das correntes de fase simuladas numericamente e medidas experimentalmente durante o regime permanente do motor, são apresentadas na Figura 33.

Os valores de pico das correntes excedem a largura da banda de histerese, sendo mais expressiva nos dados de medição. Além disso, os desvios entre algumas curvas podem ser atribuídos ao desprezo dos efeitos das cabeças de bobina no modelo computacional e às imperfeições na manufatura do protótipo. Por outro lado, os instantes de comutação são similares entre ambos os resultados.

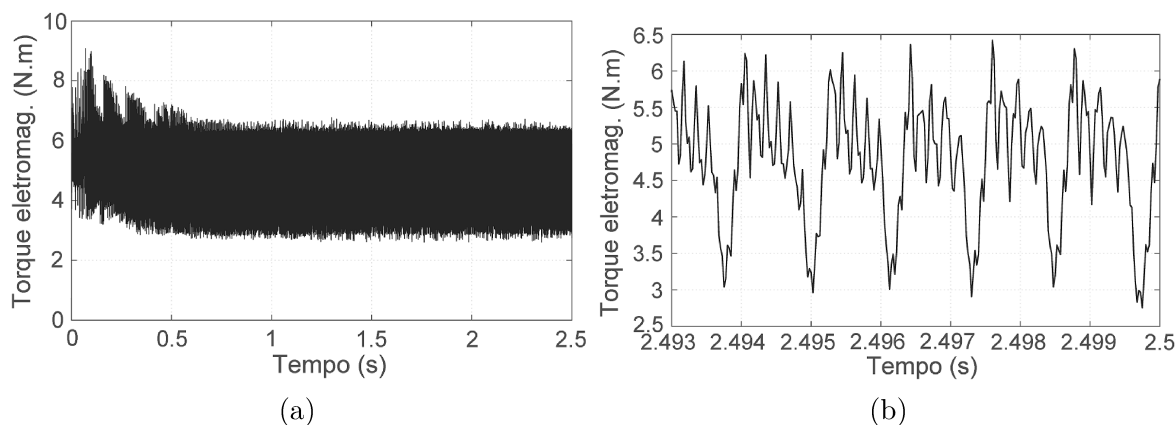
Figura 33 – Perfis das correntes simuladas e experimentais das quatro fases do MRV 8/6



Fonte: Autoria própria.

O torque eletromagnético, calculado pelo método do Tensor de Maxwell, é apresentado na Figura 34.

Figura 34 – Forma de onda do (a) torque eletromagnético e (b) perfil oscilatório (ampliação do torque)

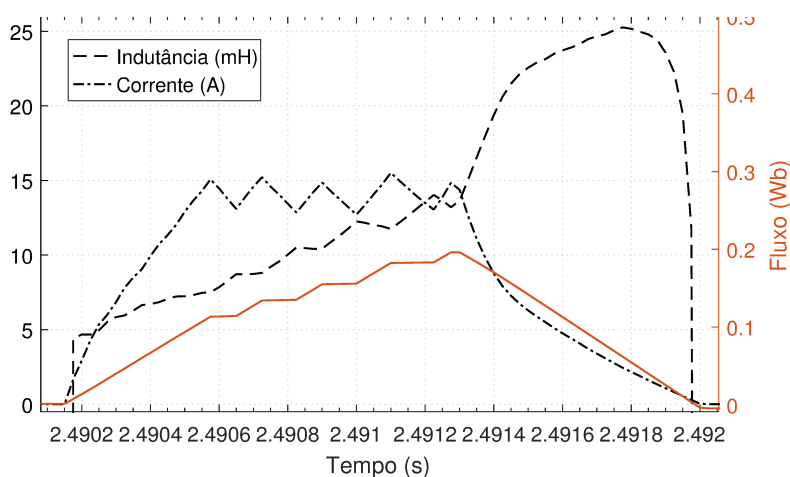


Fonte: Autoria própria.

Durante as condições de partida, o motor produz maiores amplitudes de torque, comparado às condições em alta velocidade, quando a força contra-eletromotriz ( $f_{cem}$ ) aumenta. No instante inicial, a  $f_{cem}$  é nula e evolui de acordo com a velocidade de rotação  $\omega$ , desacelerando o crescimento das correntes de fase durante o processo de magnetização. Em regime permanente, o alto valor de torque pico a pico, 3,5 N.m, devido aos instantes de comutação entre duas fases subsequentes, pode ser visto na Figura 34b. Enquanto que o torque médio é de 4,8 N.m. Esta variação tem consequências como vibração mecânica e ruído acústico.

Para que o motor produza conjugado sempre positivo, há a restrição de que a corrente se anule antes que a inclinação da curva de indutância se torne negativa. O fluxo magnético concatenado, a corrente de fase e a auto-indutância das bobinas, a qual é obtida pela divisão entre o primeiro pelo segundo, respectivamente,  $L(\theta, I) = \Psi/I$ , são apresentadas na Figura 35. O ângulo de comutação  $\theta_{off} = 129^\circ$  elétricos é atingido, aproximadamente, em  $t = 2,4913$  s, instante em que a corrente decai mais rapidamente devido à etapa de desmagnetização. Além disso, o instante de declínio da indutância ocorre em  $t = 2,4918$  s, quando a amplitude da corrente é em torno de 2,5 A, o que implica em uma breve produção de torque negativo.

Figura 35 – Curvas da auto-indutância, fluxo concatenado e corrente de uma fase



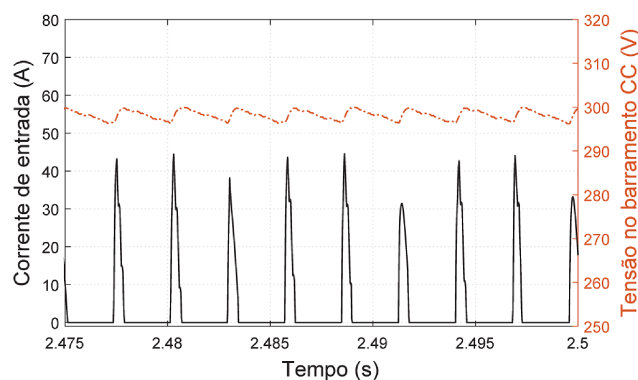
Fonte: Autoria própria.

A tensão e as correntes na saída do retificador, e a potência média de entrada obtida da análise em elementos finitos e das medições experimentais são apresentadas na Figura 36. Há uma diferença notável nas amplitudes e perfis de corrente entre os resultados. O máximo valor de corrente medido na saída do retificador é  $I_F = 14,4$  A, enquanto que o valor obtido através do modelo computacional atinge 48 A. Além disso, a duração dos pulsos de corrente contínua na solução numérica é menor que a duração dos pulsos de corrente obtidos dos dados experimentais. Isto sugere um modelo não conforme para o banco de capacitores, uma vez que a corrente  $I_F$  se eleva no momento em que os capacitores são carregados.

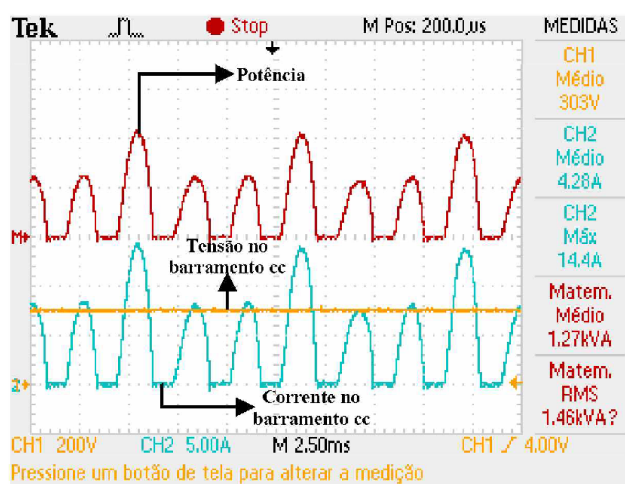
Desta maneira, os valores de pico de corrente similares são observados nos resultados obtidos do trabalho de referência (MORAES FILHO, 2017), em que a simulação foi conduzida no ambiente MATLAB/Simulink para o conversor e para o MRV 8/6. Por outro lado, considerando-se a corrente média no retificador em ambos os cenários, 4,47 A (simulado) e 4,28 A (medido), a potência média de entrada na simulação é cerca de 1,335 kW, enquanto no teste experimental a média tende a 1,27 kW. No senso de média, a



Figura 36 – Formas de onda da tensão e corrente no retificador: (a) simuladas e (b) obtidas na bancada experimental



(a)



(b)

Fonte: Reprodução de Moraes Filho (2017)

energia armazenada no banco de capacitores nos dois cenários é próxima. A afirmação é justificada, uma vez que os perfis das correntes de fase do motor, apresentados na Figura 33, estão em concordância e o banco de capacitores somente lidam com a energia que flui no circuito.

Os valores médios para os dados simulados e de medição na condição de operação em regime permanente são apresentados na Tabela 5. A potência de saída é a potência líquida entregue no eixo do rotor, isto é, o produto da velocidade  $\omega$  pela carga mecânica  $T_{mec}$ . A eficiência do MRV simulado é próxima à eficiência do protótipo devido à maior velocidade atingida, apesar da demanda por uma maior potência.

#### 6.4 Otimização da geometria do MRV

Os seguintes parâmetros foram definidos para a execução do algoritmo SMPSO: tamanho do enxame = 100, tamanho do arquivo de líderes = 100, probabilidade de mutação

Tabela 5 – Comparação entre os resultados numéricos e experimentais

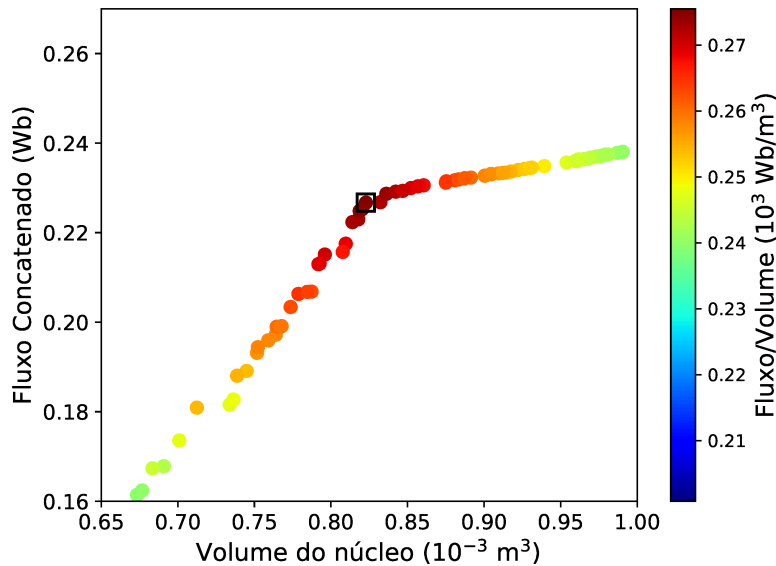
	Corrente média de entrada (A)	Potência média de entrada (W)	Potência média de saída (W)	Eficiência (%)
Solução numérica	4,47	1335,0	864,0	64,72
Medições de bancada	4,28	1270,0	821,0	64,64

Fonte: Elaborada pelo autor.

= 0,1, perturbação = 0,5, gerações = 100,  $r_1 = r_2 = [0, 1]$ ,  $C_1 = C_2 = [1,5-2,5]$  e  $w = [0,1-0,5]$ . Os parâmetros variáveis são aleatoriamente selecionados durante o processo de otimização, enquanto a probabilidade de mutação e a perturbação não são fornecidas como parâmetros de controle.

A partir do estudo de caso I, as soluções não dominadas encontradas na otimização, considerando a fase na posição alinhada e excitada no valor da corrente nominal, são avaliadas pelas funções objetivo  $f_1$  e  $f_2$ . Os pares dos valores avaliados são apresentados na fronteira de Pareto, Figura 37.

Figura 37 – Fronteira de Pareto do problema de otimização multiobjetivo obtida pelo algoritmo SMPSO



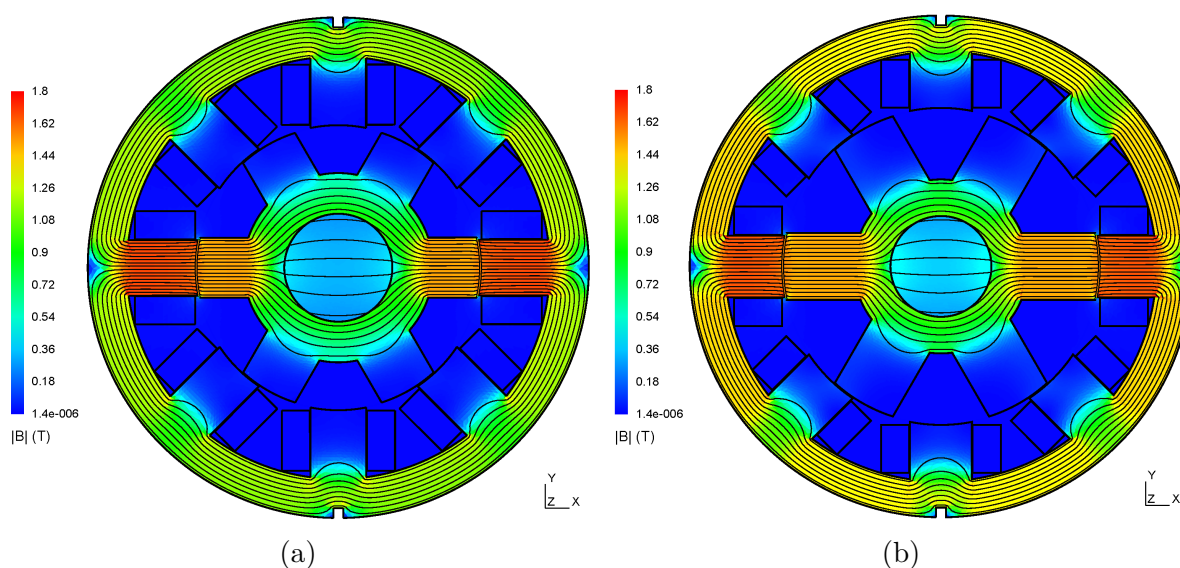
Fonte: Autoria própria.

Dos 100 vetores desejáveis no preenchimento do arquivo de líderes, 91 foram selecionados como vetores de avaliações das funções objetivo e correspondem ao total de soluções não dominadas encontradas pelo algoritmo. Este resultado só foi alcançado após a execução de 10000 avaliações das funções objetivo ( $NP \times gmax$ ).

Embora, as soluções correspondentes à fronteira de Pareto sejam as melhores possíveis, a escolha da solução que melhor se adequa ao problema consiste no compromisso do aperfeiçoamento simultâneo de ambas as funções objetivo, conduzindo à relação  $f_3$ , Equação (5.28). Contudo, deseja-se reduzir o volume de material necessário à manufatura do MRV, em detrimento ao fluxo concatenado produzido, porém, que não seja demasiadamente reduzido. Para melhor visualização, a barra colorida na Figura 37 denota a taxa de crescimento do fluxo concatenado por volume de material. Deste modo, os valores mais altos indicam melhor exploração da densidade de fluxo magnético a um baixo custo no incremento de material.

A melhor solução, em termos do fator fluxo/volume, correspondente a um volume magnético de  $0,82 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$  e indicado pelo marcador quadrado no centro da Figura 37, foi escolhida para realizar a simulação da geometria a fim de se extrair os dados e gerar o mapa da densidade de fluxo magnético para comparação com os resultados do *design* inicial. As Figuras 38a e 38b apresentam as densidades de fluxo magnético nos modelos do MRV 8/6 de referência e otimizado, respectivamente, excitando uma única fase em 10 A.

Figura 38 – Mapa da densidade de fluxo magnético sobre a seção transversal do núcleo: (a) no modelo de referência e (b) no perfil otimizado pelo algoritmo SMP SO



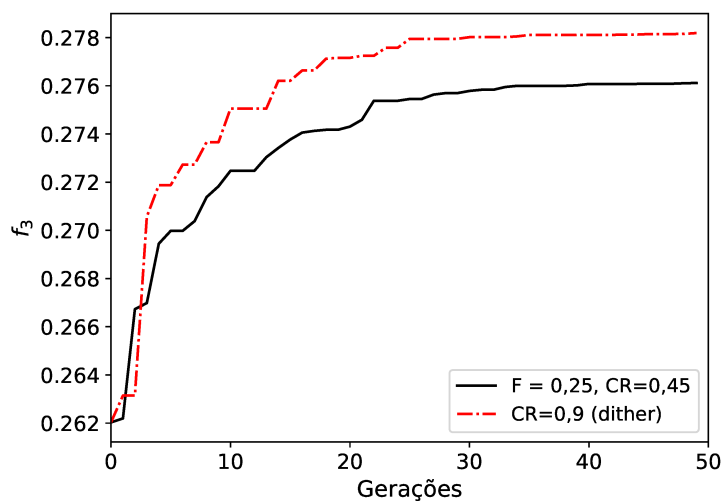
Fonte: Autoria própria.

Em contrapartida, o algoritmo de otimização global ED é executado em sua versão clássica, *ED/rand/1/bin*, a partir de dois conjuntos de parâmetros distintos a fim de se encontrar a melhor combinação para o problema dado. O seguinte conjunto é definido: tamanho da população = 50, probabilidade de cruzamento = 0,45, taxa de perturbação = 0,25 e número de iterações = 50. Enquanto, que o segundo conjunto difere somente nas operações de mutação e cruzamento: probabilidade de cruzamento = 0,9 e taxa de perturbação = [0,5-1,0]. Além disso, a técnica *dither* é aplicada no segundo conjunto

para aprimorar a convergência. O fator de escala (taxa de perturbação)  $F$  é selecionado aleatoriamente no intervalo  $(0,5-1,0)$  para cada vetor diferença, assim como foi discutido no Capítulo 5.

Neste caso, somente 2500 funções de avaliação foram executadas, uma vez que não houve ganhos ao se incrementar o tamanho da população ou a quantidade de gerações. Utilizando os mesmos parâmetros de simulação definidos durante a execução do algoritmo SMPSO, a convergência do algoritmo de ED para os dois conjuntos de parâmetros é apresentada na Figura 39.

Figura 39 – Convergência do algoritmo de ED

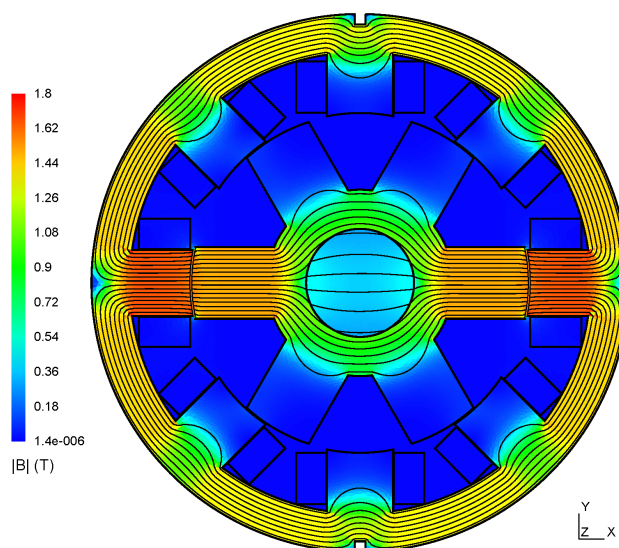


Fonte: Autoria própria.

Os resultados de convergência foram obtidos da execução que obteve o maior valor de avaliação da função objetivo  $f_3$ , após 10 tentativas de execução do algoritmo. Assim, percebe-se que valores mais altos de  $F$  e  $Cr$  beneficiaram a busca pela solução global ótima, visto que o *dither* considera valores aleatórios de  $F$  maiores que 0,5. Entretanto, uma conclusão sólida a respeito da velocidade de convergência não pode ser elaborada, em virtude que as curvas não convergem uma na outra. Além disso, os máximos valores de avaliação da função objetivo  $f_3$  encontrados para o primeiro e segundo conjunto de parâmetros foram  $0,2761 \times 10^3 \text{ Wb/m}^3$  e  $0,2781 \times 10^3 \text{ Wb/m}^3$ , respectivamente, enquanto, que o máximo valor encontrado pelo algoritmo SMPSO, correspondente ao fator fluxo/volume, foi  $0,2755 \times 10^3 \text{ Wb/m}^3$ . A densidade de fluxo magnético calculada aplicando-se a melhor solução encontrada pelo algoritmo de ED com *dither* é apresentada na Figura 40.

A Tabela 6 apresenta as soluções ótimas encontradas pelo SMPSO e ED, respectivamente. A partir da análise em elementos finitos dos modelos de referência e otimizados, os valores da densidade de fluxo magnético concatenado na fase e a densidade de fluxo magnético calculada no ponto central da culatra do estator são apresentados na Tabela 7.

Figura 40 – Mapa da densidade de fluxo magnético no perfil otimizado pelo algoritmo de ED



Fonte: Autoria própria.

O fluxo concatenado por unidade de volume teve um aumento de 10% e 11,3% a 10 A, enquanto que, a 15 A, teve um aumento 8,15% e 9,6% após a otimização utilizando o SMPSO e o ED, respectivamente. O motor relacionado à solução ótima do algoritmo de evolução diferencial alcançou o menor volume  $vol_{MRV}$  e a maior densidade de fluxo na culatra do estator  $B_{C_s}$  (incremento de 20%) em relação ao modelo de referência.

Tabela 6 – Dimensões otimizadas

Parâmetro (mm)	SMPSO	ED
$h_s$	18,05	18,34
$h_r$	22,51	27,76
$t_s$	19,72	19,72
$t_r$	21,32	21,32
$g$	0,3	0,3
$D_r$	100,5	100,5
$C_s$	11,39	11,12
$C_r$	11,66	10,04
$D_{eixo}$	32,151	24,86

Fonte: Elaborada pelo autor.

Comparando-se as Tabelas 1 e 6, a altura e largura dos polos do estator,  $h_s$  e  $t_s$  aumentaram em 17% e 10,8%, respectivamente. Como a região do estator experimenta densidades de fluxo mais elevadas que o rotor, o aumento no fluxo concatenado parece ser mais sensível a aumentos no diâmetro interno  $D_r$  e larguras dos polos.

Tabela 7 – Fluxo concatenado, volume de material e densidade de fluxo, a 10 A e 15 A, para os três *designs* do MRV 8/6

Parâmetro	Referência		SMPSO		ED	
$\Psi$ (Wb)	0,2065	0,2257	0,2267	0,2474	0,2253	0,2428
$vol_{MRV}$ ( $10^{-3}$ m <sup>3</sup> )	0,8251	0,8251	0,8228	0,8228	0,8101	0,8101
$\Psi/vol_{MRV}$ ( $10^3$ Wb/m <sup>3</sup> )	0,2503	0,2735	0,2755	0,2958	0,2786	0,2997
$B_{C_s}$ (T)	1,198	1,3110	1,434	1,519	1,461	1,571

Fonte: Elaborada pelo autor.

## 6.5 Otimização dos ângulos de comutação do MRV

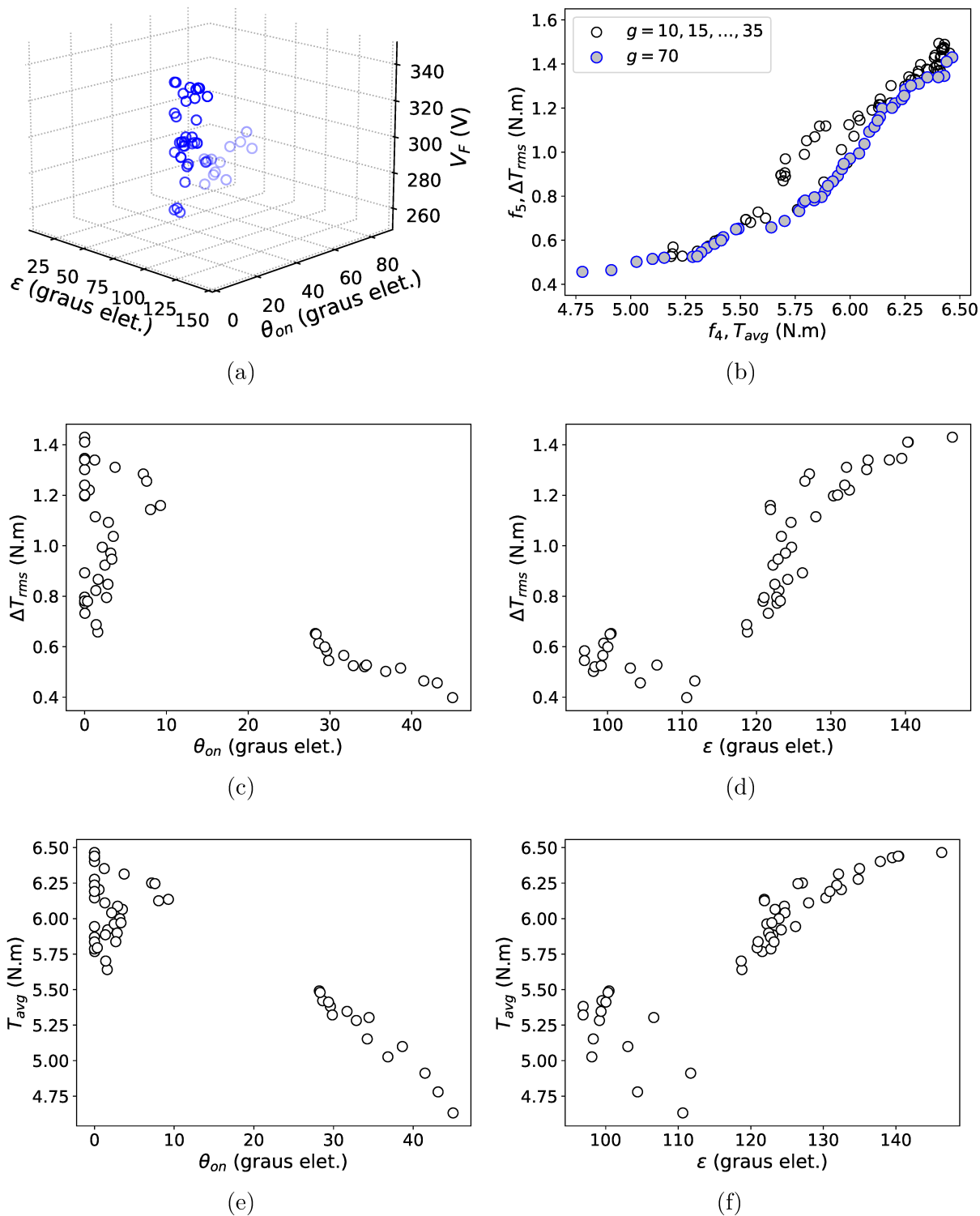
O algoritmo multiobjetivo SMPSO foi utilizado na otimização dos ângulos de comutação com os seguintes parâmetros: tamanho do enxame = 10, tamanho do arquivo de líderes = 50, probabilidade de mutação = 0,1, perturbação = 0,5, gerações = 70,  $r_1 = r_2 = [0, 1]$ ,  $C_1 = C_2 = [1,5-2,5]$  e  $w = [0,1-0,5]$ . A cada geração, as posições das dez partículas são avaliadas, o que corresponde a dez situações simuladas na ferramenta de elementos finitos. Além disso, o arquivo de líderes permite que cinquenta vetores de avaliação das funções objetivo correspondentes às soluções não dominadas formem a fronteira de Pareto.

Após a inicialização do algoritmo, as variáveis de decisão são passadas para o servidor ONELAB. As funções objetivo são avaliadas na instância de elementos finitos, onde as partículas são geradas para a mesma condição de operação pré-definida (velocidade de referência = 2100 rpm,  $I_p = 14$  A e  $T_{mec} = 3,9$  N.m) durante um intervalo de simulação que corresponde a, aproximadamente, três ciclos elétricos. Os resultados da otimização, apresentados na Figura 41, foram obtidos através da biblioteca *Matplotlib*.

A fronteira de Pareto a qual é representada pelas avaliações das funções objetivo  $f_4$  e  $f_5$  para  $g = 70$ , Figura 41b, evidencia a piora na qualidade do torque à medida que seu valor médio é incrementado. A razão disto é que há um maior ângulo de sobreposição das fases ativas, resultando em maior torque instantâneo. Além disso, o arquivo de líderes é totalmente preenchido após  $g = 50$  gerações. Em relação à Figura 41c, as soluções  $\theta_{on}$ , cujos valores de avaliação das funções estão acima de 0,6 N.m, se concentram próximo à posição de total desalinhamento dos polos, 0 a 10° elétricos. Já as soluções relacionadas à melhora na qualidade do torque se concentram próximo ao início de alinhamento dos polos, 30 a 45° elétricos; bem como quando os ângulos de condução assumem valores menores, variando entre 95 e 110° elétricos (Figura 41d). Um comportamento semelhante é visto na busca pela maximização do torque médio, Figuras 41e e 41f.

Devido à inexistência de um controle de velocidade, a solução que apresenta o torque médio próximo a 4,8 N.m (valor obtido na Seção 6.3), situação em que as fases não são sobrepostas, será escolhida para a validação dos resultados e posterior comparação com os resultados iniciais. Desta forma, escolheu-se o vetor solução  $[x_0, x_1, x_2] = [111,71,$

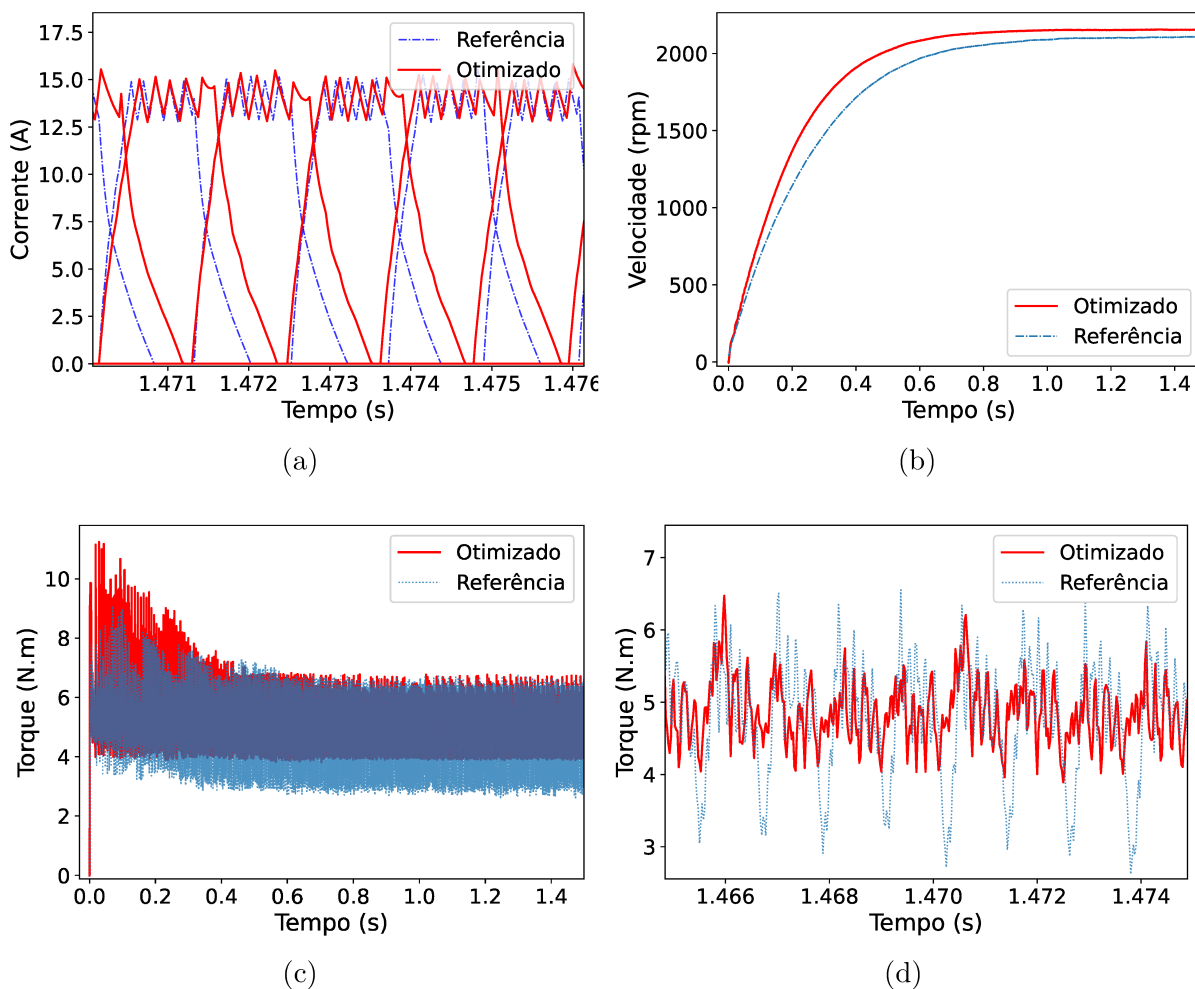
Figura 41 – Resultados da otimização multiobjetivo, caso II (max.  $T_{avg}$ , min.  $\Delta T_{rms}$ ): (a) espaço das variáveis de decisão, (b) fronteira de Pareto, (c) relação entre  $\theta_{on}$  e  $\Delta T_{rms}$ , (d) relação entre  $\varepsilon$  e  $\Delta T_{rms}$ , (e) relação entre  $\theta_{on}$  e  $T_{avg}$ , (f) relação entre  $\varepsilon$  e  $T_{avg}$



Fonte: Autoria própria.

41,48, 310,3], cujos valores de avaliação das funções objetivo  $T_{avg} = 4,91$  N.m e  $\Delta T_{rms} = 0,46$  N.m. Enquanto que o vetor solução utilizado no modelo de referência foi  $[x_0, x_1, x_2] = [90, 39, 300]$ . Além disso, com o intuito de se verificar a metodologia de otimização utilizada pelo algoritmo na busca pelas soluções, uma simulação dinâmica completa,  $t = 1,5$  s, foi conduzida. Os resultados obtidos através da comparação com os resultados da Seção 6.3 são apresentados na Figura 42.

Figura 42 – Comparação entre os resultados da simulação para a solução  $[x_0, x_1, x_2] = [111,71, 41,48, 310,3]$  e os resultados para os ângulos de comutação de referência: (a) correntes de fase, (b) perfil da velocidade, (c) perfil do torque, (d) forma de onda do torque



Fonte: Autoria própria.

Em decorrência do aumento do ângulo de condução, o torque de partida sofre um aumento significativo, enquanto a oscilação do torque é reduzida em regime permanente, Figuras 42c e 42d. Adicionalmente, os dados de desempenho do motor em regime permanente, obtidos com os parâmetros de referência e otimizados são apresentados na Tabela 8. Os resultados mostram que a melhora na qualidade do torque implica no aumento do valor médio da corrente de fase, bem como as perdas no cobre, exigindo assim maior valor



médio e eficaz da corrente fornecida pela fonte. Estes aumentos se traduzem em ligeira redução no fator de potência e na eficiência do motor.

Tabela 8 – Dados comparativos de desempenho do MRV  
8/6

Parâmetro	Referência	Otimizado
Torque <i>ripple</i>	0,73	0,49
$\Delta$ torque rms (N.m)	0,80	0,43
Torque médio (N.m)	4,80	4,84
Velocidade média (rpm)	2117,1	2154,2
Corrente média de fase (A)	3,75	4,72
Corrente média de entrada (A)	4,48	4,66
Corrente rms de entrada (A)	11,68	12,71
Tensão média no retificador (V)	298,2	309,0
Potência média de entrada (W)	1337,6	1440,1
Potência média de saída (W)	864,6	879,8
Perdas no cobre (W)	29,34	37,43
Fator de potência	0,384	0,366
Eficiência (%)	64,64	61,09

Fonte: Elaborada pelo autor.

## 6.6 Considerações finais

Os problemas de otimização foram solucionados com sucesso pelos algoritmos de ED e SMPSO. Para o caso I, o aumento no fluxo concatenado e a mínima redução no volume de material magnético foram alcançados, simultaneamente, pela seguinte combinação: redução das culatras, do estator e rotor, e comprimento do entreferro; aumento do diâmetro do rotor. O diâmetro do eixo não teve nenhum impacto significativo na otimização, talvez pela baixa magnetização do aço 1020.

O algoritmo de ED mostrou uma melhor convergência na busca pela solução ótima global através da seleção de valores mais elevados para  $F$  e  $Cr$  (maior que 0,5) com o uso do *dither* após 50 gerações. Enquanto que o algoritmo SMPSO mostrou não somente bons resultados na fronteira de Pareto, mas encontrou uma solução global próxima à encontrada pelo algoritmo de ED após 100 gerações. O algoritmo SMPSO é ideal para se manter o compromisso entre múltiplas funções, priorizando a capacidade de produção de torque a um custo mínimo de material magnético, por exemplo. Além disso, ambos os algoritmos foram essenciais na solução dos problemas, sendo capazes de encontrar resultados confiáveis com uma velocidade de convergência razoável.

No caso II, a otimização multiobjetivo, visando a maximização do torque médio e a minimização da medida da qualidade do torque  $\Delta T_{rms}$ , encontrou soluções cujos ângulos de comutação  $\theta_{on}$  e ângulos de condução  $\varepsilon$  se acumulam em regiões distintas para um certo nível de torque médio ou qualidade do torque. Além disso, para uma condição de

operação escolhida próxima à condição definida para o modelo de referência, os resultados mostram que o valor de  $\Delta T_{rms}$  reduziu pela metade para um toque médio equivalente em regime permanente. Ou seja, a qualidade do torque melhorou de maneira significativa.

O Capítulo 7 apresenta as conclusões acerca dos resultados obtidos por meio da metodologia proposta e as sugestões para a continuação deste trabalho.

## 7 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

O objetivo desta tese consistiu em aplicar técnicas de otimização, baseadas na AEF, no sistema de acionamento de um MRV com foco na melhoria do desempenho e na redução dos problemas relacionados ao motor elétrico. Para alcançar este objetivo, dois objetivos específicos foram satisfeitos: validou-se a ferramenta de elementos finitos através da comparação dos resultados computacionais com os dados obtidos em testes experimentais; interligou-se dois *frameworks* de otimização, os quais fornecem os códigos dos algoritmos, com os programas de elementos finitos Gmsh/GetDP/ONELAB através do módulo *onelab.py*.

Toda a teoria reunida serviu de base para a implementação dos problemas de otimização dentro do ONELAB, sendo aplicadas satisfatoriamente no sistema de acionamento de um MRV. O MRV 8/6 de quatro fases alimentado pelo conversor *half-bridge*, com uma carga mecânica acoplada ao eixo através de uma máquina CC foram modelados pelo MEF considerando-se uma seção elementar do motor através da aplicação de condições de contorno antiperiódicas e o movimento de rotação por meio da técnica da banda de movimento. O controle de corrente de histerese foi modelado dentro da rotina de resolução no domínio do tempo. Além disso, os problemas de otimização foram definidos com foco na melhora da capacidade de produção do torque mantendo-se a mesma quantidade de material magnético e na melhoria da qualidade do torque produzido pelo motor elétrico.

Para o primeiro estudo de caso, os algoritmos de ED mono-objetivo e multiobjetivo SMPSO encontraram a geometria de um motor ótimo com maior capacidade de produção de torque a um custo de manufatura equivalente ao do *design* de referência, uma vez que aumentou a densidade do fluxo magnético concatenado nas bobinas e manteve a mesma quantidade de material magnético. Além disso, o uso da técnica *dither* pelo algoritmo de ED aperfeiçoou o desempenho de busca, permitindo encontrar melhores soluções durante um número de gerações equivalente. Em contrapartida, a fronteira de Pareto construída pelo algoritmo SMPSO permite a escolha de diferentes *designs* com uma maior capacidade de torque em detrimento dos custos envolvidos na manufatura do MRV.

Para o segundo estudo de caso, o algoritmo SMPSO encontrou combinações ótimas dos ângulos de comutação e de condução que aprimoraram a qualidade do torque produzido pelo MRV para um dado ponto de operação (torque e velocidade). A redução da oscilação do torque em cerca de 50% (métrica  $\Delta T_{rms}$ ) resultou na sobreposição das correntes de fase e aumento no torque de partida, conseqüentemente, levando a um cenário em que o MRV perdeu eficiência devido à ligeira redução do fator de potência e aumento do valor médio das correntes de fase.

Desta forma, as investigações acerca dos resultados sugerem que a metodologia proposta para a solução dos problemas de otimização foi satisfeita. Em seguida, discute-se as perspectivas para possíveis trabalhos futuros.

### Trabalhos futuros

Algumas perspectivas para o desenvolvimento de trabalhos futuros são discutidas a seguir:

- A automatização da tomada de decisão conduzida através da verificação das melhores soluções pela AEF pode ser incluída no processo de otimização multiobjetivo. Tal procedimento permitiria que os vetores solução, obtidos pela fronteira de Pareto, fossem selecionados a partir de critérios específicos, como as métricas de desempenho do motor elétrico;
- A análise dos motores a relutância variável podem ser estendidas através do acoplamento multifísico, considerando as vibrações mecânicas e o aquecimento, por exemplo, e utilizando estratégias de otimização adequadas para determinar densidades de corrente ótimas e parâmetros geométricos a fim de garantir a integridade do motor elétrico em condições de operação severa;
- As perdas no ferro que ocorrem mesmo em núcleos laminados, incluindo as perdas por indução de correntes parasitas e por histerese, podem também ser incluídas na formulação do problema de otimização, bem como serem definidas como uma função objetivo com o intuito de se projetar um MRV mais eficiente em detrimento de outras características;
- Uma técnica avançada de controle de velocidade e torque, TSF, com capacidade superior de aperfeiçoamento da qualidade do torque e eficiência do motor elétrico pode ser aplicada ao sistema de acionamento disponível;
- No contexto da otimização multiobjetivo, indicadores de desempenho como o *hyper-volume*, podem ser aplicados durante a execução dos algoritmos de otimização de forma a definir um critério de parada mais eficiente.

## REFERÊNCIAS

- AHMAD, M. F. *et al.* Differential evolution: A recent review based on state-of-the-art works. **Alexandria Engineering Journal**, Elsevier, v. 61, n. 5, p. 3831–3872, 2022. ISSN 1110-0168. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.aej.2021.09.013>.
- ANTUNES, R. L. C. **Modelagem pelo método de elementos finitos de servomotor CC sem escovas e seu acionamento**. 2002. 67 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002. Disponível em: <http://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/83202>.
- BALAJI, M. *et al.* Differential evolution optimization combined with chaotic sequences for optimal design of switched reluctance machine. **Journal of Theoretical and Applied Information Technology (JATIT)**, v. 27, n. 2, p. 62–67, 2011.
- BASTOS, J. P. A. **Eletromagnetismo e cálculo de campos**. 3. ed. Florianópolis: Editora da UFSC, 1996. 452 p.
- BASTOS, J. P. A. **Eletromagnetismo para engenharia: Estática e quase estática**. rev. Florianópolis: Ed. da UFSC, 2012.
- BASTOS, J. P. A.; SADOWSKI, N.; CARLSON, R. **Finite Element 2D System for Electromagnetic and Thermal Field Analysis: EFCAD-electromagnetic fields computer aided design**. [*S.l.*], 2008. Manual - Version 8.0. Disponível em: [https://grucad.paginas.ufsc.br/files/2017/04/Notice\\_EFCAD.pdf](https://grucad.paginas.ufsc.br/files/2017/04/Notice_EFCAD.pdf). Acesso em: 16 mar. 2021.
- BILGIN, B.; JIANG, J. W.; EMADI, A. **Switched reluctance motor drives: fundamentals to applications**. 1. ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1201/9780203729991>.
- BLANK, J.; DEB, K. pymoo: Multi-objective optimization in python. **IEEE Access**, IEEE, v. 8, p. 89497–89509, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2990567>.
- CORREA, D. A. P. *et al.* Control strategies applied for reducing the vibration and torque ripple of a special switched reluctance motor. **Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications (JMoe)**, SciELO Brasil, v. 10, n. 1, p. 203–216, 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S2179-10742011000100019>.
- DAWAR, D.; LUDWIG, S. A. Differential evolution with dither and annealed scale factor. *In*: **2014 IEEE Symposium on Differential Evolution (SDE)**. Orlando, FL: IEEE, 2014. p. 1–8. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/SDE.2014.7031528>.
- DELIÉGE, G. **Flexible implementation of the finite element method applied to 3D coupled problems considering convective effects**. 2003. 224 f. Tese (Doutorado em Ciências Aplicadas) — Katholieke Universiteit Leuven, Leuven-Heverlee, 2003.
- DESWAL, S.; DAHIYA, R.; JAIN, D. Application of boost converter for ride-through capability of adjustable speed drives during sag and swell conditions. **World Academy of Science, Engineering and Technology**, v. 47, 2008.

DULAR, P.; GEUZAINÉ, C. **GetDP reference manual: the documentation for GetDP, a general environment for the treatment of discrete problems**. 2022. User's Manual - Version 3.5.0. Disponível em: <http://getdp.info>. Acesso em: 28 fev. 2019.

DULAR, P. *et al.* Connection boundary conditions with different types of finite elements applied to periodicity conditions and to the moving band. **COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering**, MCB UP Ltd, v. 20, n. 1, p. 109–119, 2001. Disponível em: <https://doi.org/10.1108/03321640110359796>.

GEORGIODAKIS, M.; PLEVRIS, V. A comparative study of differential evolution variants in constrained structural optimization. **Frontiers in Built Environment**, Frontiers, v. 6, 2020. ISSN 2297-3362. Disponível em: <https://doi.org/10.3389/fbuil.2020.00102>.

GEUZAINÉ, C. **High order hybrid finite element schemes for Maxwell's equations taking thin structures and global quantities into account**. 2001. 174 f. Tese (Doutorado em Ciências Aplicadas) — University of Liège, Liège, 2001.

GEUZAINÉ, C.; REMACLE, J.-F. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 79, n. 11, p. 1309–1331, 2009. User's Manual - Version 4.11.0. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/nme.2579>. Acesso em: 28 fev. 2019.

GOCKENBACH, M. S. **Understanding and Implementing the Finite Element Method**. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006. ISBN 0-89871-614-4. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/1.9780898717846>.

GRIFFITHS, D. V.; SMITH, I. M. **Numerical methods for engineers**. 2. ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1201/9781420010244>.

GYSELINCK, J. *et al.* 2D harmonic balance FE modelling of electromagnetic devices coupled to nonlinear circuits. **COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering**, Emerald Group Publishing Limited, v. 23, n. 3, p. 800–812, 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.1108/03321640410510785>.

GYSELINCK, J. *et al.* Two-dimensional harmonic balance finite element modelling of electrical machines taking motion into account. **COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering**, MCB UP Ltd, v. 22, n. 4, p. 1021–1036, 2003. Disponível em: <https://doi.org/10.1108/03321640310482977>.

HADKA, D. **platypus: Multiobjective optimization in Python**. 2017. Version 1.1.0. Disponível em: <https://github.com/Project-Platypus/Platypus.git>. Acesso em: 17 abr. 2022.

KENNEDY, J. Particle swarm optimization. *In*: SAMMUT, CLAUDE AND WEBB, GEOFFREY I. **Encyclopedia of Machine Learning**. Boston, MA: Springer US, 2010. p. 760–766. ISBN 978-0-387-30164-8. Disponível em: [https://doi.org/10.1007/978-0-387-30164-8\\_630](https://doi.org/10.1007/978-0-387-30164-8_630).

- KENNEDY, J.; EBERHART, R. Particle swarm optimization. *In: Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks*. Perth, WA: IEEE, 1995. v. 4, p. 1942–1948. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/ICNN.1995.488968>.
- KENNEDY, J.; EBERHART, R. C.; SHI, Y. **Swarm intelligence**. 1. ed. San Diego, CA: Academic Press, 2001. (Evolutionary Computation). Disponível em: <https://doi.org/10.1016/B978-1-55860-595-4.X5000-1>.
- KERÄNEN, J.; MANNINEN, A.; PIPPURI, J. **Multi-physics simulations for electrical machine development**. Finland: VTT Technical Research Centre of Finland, 2015. (VTT Research Report). Project code: 100553.
- KOLMBAUER, M. **The multiharmonic finite element and boundary element method for simulation and control of eddy current problems**. 2012. 183 f. Tese (Doutorado em Ciências Técnicas) — Johannes Kepler University Linz, Linz, 2012.
- KRANTZ, S. G. **Essentials of Topology with Applications**. 1. ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2009. 420 p. ISBN 978-1-4200-8975-2. Disponível em: <https://doi.org/10.1201/b12333>.
- KRANTZ, S. G. **A guide to functional analysis**. Washington, D.C: The Mathematical Association of America, 2013. v. 49. ISBN 978-1-61444-213-4.
- KRISHNAN, R. **Switched reluctance motor drives: modeling, simulation, analysis, design, and applications**. 1. ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2017. 416 p. (Industrial Electronics). ISBN 0-8493-0838-0. Disponível em: <https://doi.org/10.1201/9781420041644>.
- KUCI, E. **Shape and topology optimization for electro-mechanical energy converters**. 2018. 152 f. Tese (Doutorado em Ciências da Engenharia) — Aerospace and Mechanical Engineering Department, University of Liège, Liège, 2018. Disponível em: <https://hdl.handle.net/2268/222685>.
- KUMAR, R.; SAXENA, R. Simulation and analysis of switched reluctance motor drives for electric vehicle applications using matlab. *In: 2019 4th International Conference on Electrical, Electronics, Communication, Computer Technologies and Optimization Techniques (ICEECCOT)*. Mysuru, India: IEEE, 2019. p. 23–28. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/ICEECCOT46775.2019.9114630>.
- LACHHEB, A.; AMRAOUI, L. E.; KHEDIRI, J. Dynamic modeling of switched reluctance linear motor. *In: 2016 7th International Conference on Sciences of Electronics, Technologies of Information and Telecommunications (SETIT)*. Hammamet: IEEE, 2016. p. 177–183. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/SETIT.2016.7939862>.
- LI, S.; CHEN, T.; FAHIMI, B. On the occurrence of nonlinear dynamic phenomena in the hysteresis-controlled switched reluctance motor drive. *In: IECON 2018 - 44th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*. Washington, DC, USA: IEEE, 2018. p. 5710–5715. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/IECON.2018.8591180>.
- LIMA, E. L. **Curso de Análise**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1999. v. 2. 557 p. (Projeto Euclides, 2). ISBN 85-244-0108-7.

LUZ, M. V. F. da. **Desenvolvimento de um software para cálculo de campos eletromagnéticos 3D utilizando elementos de aresta, levando em conta o movimento e o circuito de alimentação**. 2003. 91 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003. Disponível em: <http://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/86095>.

LUZ, M. V. F. da *et al.* Analysis of a permanent magnet generator with dual formulations using periodicity conditions and moving band. **IEEE Transactions on Magnetics**, IEEE, v. 38, n. 2, p. 961–964, 2002. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/20.996247>.

MACHADO, K. D. **Teoria do eletromagnetismo**. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2002. v. 2. 899 p. ISBN 85-86941-26-3.

MALAGOLI, J. A. **Otimização multiobjetivo aplicada aos motores de indução validada via elementos finitos**. 2016. 150 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.14393/ufu.te.2016.22>.

MALAGOLI, J. A.; CAMACHO, J. R.; LUZ, M. V. F. da. Optimal electromagnetic torque of the induction motor generated automatically with gmsh/getdp software. **International Transactions on Electrical Energy Systems**, John Wiley & Sons, v. 31, n. 3, p. e12773, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/2050-7038.12773>.

MAMEDE, A. C. F.; CAMACHO, J. R.; ANDRADE, D. A. Design procedures and analysis for single-phase variable reluctance motors. **Renewable Energy and Power Quality Journal (RE&PQJ)**, International Conference on Renewable Energies and Power Quality (ICREPQ'16), Madrid, v. 1, p. 216–221, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.24084/repqj14.273>.

MEEKER, D. **Finite Element Method Magnetics**. 2020. User's Manual - Version 4.2. Disponível em: <https://www.femm.info/wiki/HomePage>. Acesso em: 27 nov. 2019.

MENDES, F. B. R. *et al.* Comparison and combination of techniques for determining the parameters of a magnetic hysteresis model. **Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications**, SciELO Brasil, v. 18, n. 3, p. 408–426, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/2179-10742019v18i31513>.

MILLER, T. J. E. **Switched reluctance motors and their control**. Hillsboro: Magna physics publishing and clarendon press, 1993. (Monographs in electrical and electronic engineering).

MIRANDA, B. B. **Contribuições ao projeto do motor linear a relutância variável**. 2017. 101 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2017. Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2017.432>.

MIRANDA, B. B.; MALAGOLI, J. A.; CAMACHO, J. R. Optimization techniques and mathematical modeling applied to reluctance motors. **Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications (JMoe)**, SciELO Brasil, v. 21, n. 3, p. 368–391, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/2179-10742022v21i3261941>.



MORAES FILHO, M. J. de. **Desenvolvimento de plataforma de acionamento digital para motor a relutância variável 8/6**. 2017. 80 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2017. Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2017.305>.

MORAES FILHO, M. J. de *et al.* Projeto de máquina a relutância variável 8/6 e impacto do ângulo do polo do rotor em seu desempenho. *In: XXI Congresso Brasileiro de Automática-CBA*. Vitória: SBA, 2016. p. 1644–1649.

MUNKRES, J. R. **Topology**. 2. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, Inc., 2000. ISBN 0131816292.

NEBRO, A. J. *et al.* Smpso: A new pso-based metaheuristic for multi-objective optimization. *In: 2009 IEEE Symposium on computational intelligence in multi-criteria decision-making (MCDM)*. Nashville, TN: IEEE, 2009. p. 66–73. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/MCDM.2009.4938830>.

NSHIMIYIMANA, J. d. D. *et al.* High order relaxation methods for co-simulation of finite element and circuit solvers. **Advanced Electromagnetics**, v. 9, n. 1, p. 49–58, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.7716/aem.v9i1.1245>.

NUNES, A. S. **Modelagem de dispositivos eletromagnéticos utilizando uma abordagem híbrida entre o Método de Rede de Relutâncias (MRR) e o Método de Elementos Finitos de Face (MEFF)**. 2018. 159 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2018. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/193640>.

OLIVEIRA, A. M. de. **Análise de dispositivos eletromagnéticos trifásicos modelados por elementos finitos 2D conectados aos seus circuitos externos de alimentação**. 2000. 81 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000. Disponível em: <http://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/78211>.

ONCU, S.; TUNCER, U.; KOYUNCU, S. Modeling and simulation of external rotor 6/8 switched reluctance motor for e-bike. *In: 2022 10th International Conference on Smart Grid (icSmartGrid)*. Istanbul, Turkey: IEEE, 2022. p. 351–355. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/icSmartGrid55722.2022.9848688>.

ONELAB, Open Numerical Engineering LABoratory. 2022. Disponível em: <http://onelab.info>. Acesso em: 28 mar. 2019.

PARREIRAS, R. O. **Algoritmos evolucionários e técnicas de tomada de decisão em análise multicritério**. 2006. 165 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Escola de Engenharia da UFMG, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006. Disponível em: <http://hdl.handle.net/1843/BUOS-8CBN3V>.

PENG, W.; GYSELINCK, J. Combined magnetic-equivalent-circuit and finite-element modelling of switched reluctance machines. *In: 2016 IEEE International Energy Conference (ENERGYCON)*. Leuven, Belgium: IEEE, 2016. p. 1–6. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/ENERGYCON.2016.7513966>.

- PENG, W. *et al.* Magnetic equivalent circuit modelling of reluctance machines. *In: 2016 Eleventh International Conference on Ecological Vehicles and Renewable Energies (EVER)*. Monte Carlo, Monaco: IEEE, 2016. p. 1–7. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/EVER.2016.7476429>.
- PENG, W. *et al.* Switched reluctance machine drives for electrical vehicle propulsion - optimal control with regard to the losses in machine and converter. *In: 2015 Tenth International Conference on Ecological Vehicles and Renewable Energies (EVER)*. Monte Carlo, Monaco: IEEE, 2015. p. 1–10. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/EVER.2015.7112946>.
- POLI, R. Analysis of the publications on the applications of particle swarm optimisation. *Journal of Artificial Evolution and Applications*, Hindawi Publishing Corporation, v. 2008, p. 10, 01 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.1155/2008/685175>.
- PREETHISHRI, R.; ROSELINE, J. Switched reluctance motor (SRM) development by using Matlab-Simulink. *In: 2019 2nd International Conference on Power and Embedded Drive Control (ICPEDC)*. Chennai, India: IEEE, 2019. p. 152–157. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/ICPEDC47771.2019.9036644>.
- PRICE, K. V.; STORN, R. M.; LAMPINEN, J. A. **Differential evolution: a practical approach to global optimization**. 1. ed. Berlin, Heidelberg: Springer, 2005. (Natural Computing Series). Disponível em: <https://doi.org/10.1007/3-540-31306-0>.
- RENGIFO, J.; ROMERO, J.; ALLER, J. M. Efficiency evaluation of induction motors supplied by vfds. *In: 2018 IEEE Third Ecuador Technical Chapters Meeting (ETCM)*. Cuenca, Ecuador: IEEE, 2018. p. 1–6. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/ETCM.2018.8580273>.
- ROEL O., J. L. **Método de elementos finitos na simulação de dispositivos eletromagnéticos acoplados a conversores estáticos com laço de controle**. 2002. 133 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002. Disponível em: <http://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/83566>.
- ROEL O., J. L. *et al.* Acoplamento de conversores estáticos com malha de controle e dispositivos eletromagnéticos não-lineares. **Controle & Automação**, Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica, Campinas, v. 13, n. 1, p. 77–83, 2002. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S0103-17592002000100009>.
- SADIKU, M. N. **Numerical Techniques in Electromagnetics**. 2. ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2000. Disponível em: <https://doi.org/10.1201/9781420058277>.
- SHCHUCHKIN, D. A.; KHOROSHEV, A. S.; PAVLENKO, A. V. Application of GMSH+ GetDP software suite for calculation of non-stationary electromagnetic fields of electrical devices. *In: 2017 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM)*. St. Petersburg, Russia: IEEE, 2017. p. 1–4. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/ICIEAM.2017.8076409>.
- SIERRA, M. R.; COELLO COELLO, C. A. Improving PSO-based multi-objective optimization using crowding, mutation and  $\epsilon$ -dominance. *In: COELLO COELLO, C. A.; HERNÁNDEZ AGUIRRE, A.; ZITZLER, E. (ed.). Evolutionary Multi-criterion*

**Optimization**. Berlin, Heidelberg: Springer, 2005. v. 3410, p. 505–519. Disponível em: [https://doi.org/10.1007/978-3-540-31880-4\\_35](https://doi.org/10.1007/978-3-540-31880-4_35).

SILVEIRA, A. W. F. V. da. **Controle de tensão na carga para motor/gerador a relutância variável de três fases**. 2012. 202 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.14393/ufu.te.2012.10>.

SLOWIK, A.; KWASNICKA, H. Nature inspired methods and their industry applications—swarm intelligence algorithms. **IEEE Transactions on Industrial Informatics**, IEEE, v. 14, n. 3, p. 1004–1015, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/TII.2017.2786782>.

SLOWIK, A.; KWASNICKA, H. Evolutionary algorithms and their applications to engineering problems. **Neural Computing and Applications**, Springer, v. 32, n. 16, p. 12363–12379, 08 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00521-020-04832-8>.

STORN, R.; PRICE, K. Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. **Journal of global optimization**, Springer, v. 11, n. 4, p. 341–359, 1997. Disponível em: <https://doi.org/10.1023/A:1008202821328>.

WANG, D.; TAN, D.; LIU, L. Particle swarm optimization algorithm: an overview. **Soft Computing**, Springer, v. 22, n. 2, p. 387–408, 01 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00500-016-2474-6>.

WANG, S.; YANG, Z.; GU, L. Core loss analysis for switched reluctance motor under hysteresis current control and single pulse modes. *In*: **2016 IEEE Transportation Electrification Conference and Expo (ITEC)**. Dearborn, MI: IEEE, 2016. p. 1–6. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/ITEC.2016.7520196>.

WENGERKIEVICZ, C. A. C. *et al.* Estimation of three-phase induction motor equivalent circuit parameters from manufacturer catalog data. **Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications**, SciELO Brasil, v. 16, p. 90–107, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/2179-10742017v16i1873>.

ZAGLMAYR, S. **High Order Finite Element Methods for Electromagnetic Field Computation**. 2006. 177 f. Tese (Doutorado em Ciências Técnicas) — Johannes Kepler University Linz, Linz, 2006. Disponível em: <http://www.numerik.math.tugraz.at/~zaglmayr/pub/szthesis.pdf>.

ZAHARIE, D. Influence of crossover on the behavior of differential evolution algorithms. **Applied Soft Computing**, Elsevier, v. 9, n. 3, p. 1126–1138, 2009. ISSN 1568-4946. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2009.02.012>.

ZHANG, Q.; CEN, S. 2 - physics coupling phenomena and formulations. *In*: ZHANG, Q.; CEN, S. (ed.). **Multiphysics Modeling: Numerical Methods and Engineering Applications**. 1. ed. Oxford: Academic Press, 2016, (Elsevier and Tsinghua University Press Computational Mechanics Series). p. 97–124. ISBN 978-0-12-407709-6. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-407709-6.00002-X>.



## APÊNDICES



## APÊNDICE A – CÓDIGO PARCIAL PARA OS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO (LINGUAGEM *PYTHON*)

```

# import the onelab python module
import onelab
# import oct2py and numpy
from oct2py import octave
import numpy as np

# get Gmsh location from Gmsh options
def getPathGmsh(): # escape string if path contains white
    space
    mygmsh = c.getString('General.ExecutableFileName')
    return mygmsh

    .
    .
    .

def mesh(): # run gmsh as a subclient
    machine_geo, machine_msh, machine_pro = getModelFileNames(
        machine)
    c.runSubClient('myGmsh', getPathGmsh() + ' '
        + machine_geo
        + ' -2 -v 2 -clscale 2.5')

def fem(): # run getdp as a subclient
    machine_geo, machine_msh, machine_pro = getModelFileNames(
        machine)
    c.runSubClient('myGetDP', getPathGetDP() + ' '
        + machine_pro
        + ' -msh '
        + machine_msh
        + ' -solve Analysis -v 3 -v2 ')

def analysis(dc_voltage, start_angle, angulo_conducao, theta_on):
    c.setNumber('Input/4Coil Parameters/1Voltage (rms) [V]',
        value=dc_voltage)

```

```

c.setNumber('Input/14Start rotor angle [deg]', value=
    start_angle)
c.setNumber('Input/16Angulo de conducao [deg]', value=
    angulo_conducao)
c.setNumber('Input/17Theta_ON [deg]', value=theta_on)
c.setNumber('Input/19Type of analysis', value=1) #Time
    Domain

getProject()
mesh()
fem()

P=octave.importdata('P.dat');
# Calculus for plotting mechanical revolutions in time
deg_to_rad=np.pi/180 # Degrees to radians
a = np.floor(P[:,1]/(60*deg_to_rad)) # round to smallest
    integer (number of mechanical revolutions)
b = a*(60*deg_to_rad)
theta = P[:,1] - b # mechanical angle [rad] in range [0,
    60] degrees

# Calculus for computation in one electrical cycle
cc = a[len(a)-1] # second-to-last mechanical revolution
theta2 = cc*(60*deg_to_rad) # Virtual positions
theta1 = theta2 - (60*deg_to_rad)

.
.
.

torque=octave.importdata('Tr.dat');
torque_med_one_cycle=octave.mean(torque[idx1:idx2,1])
torque_max_one_cycle=octave.max(torque[idx1:idx2,1])
torque_min_one_cycle=octave.min(torque[idx1:idx2,1])
torque_ripple_one_cycle=(torque_max_one_cycle-
    torque_min_one_cycle)/torque_med_one_cycle
delta_torque_rms=octave.rms(torque[idx1:idx2,1]-
    torque_med_one_cycle)

```



```

Tmec = c.getNumber('Input/32Mechanical torque [Nm]')

return delta_torque_rms, torque_med_one_cycle,
       torque_ripple_one_cycle, P_cu
.
.
.

from platypus import SMPSO, Problem, Real, nondominated

class Schaffer(Problem):

    def __init__(self):
        super(Schaffer, self).__init__(3, 2, 1) # Decision
            variables, objectives and constraints
        self.types[:] = [Real(1, 25), Real(0, 15), Real(250,
            350)]
        self.constraints[:] = "<=0"

    def evaluate(self, solution):
        angulo_conducao = solution.variables[0]
        theta_on = solution.variables[1]
        dc_voltage = solution.variables[2]

        start_angle = 0
        delta_torque, torque_med, torque_ripple, P_cu = analysis
            (dc_voltage, start_angle, angulo_conducao, theta_on)

        solution.objectives[:] = [-torque_med, delta_torque]
        solution.constraints[:] = [torque_ripple*(torque_ripple
            -3.0)]

```