



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

Comparação entre dados experimentais e teóricos de lajes maciças armadas em uma direção

Comparison between experimental and theoretical data of solid slabs reinforced in one direction

Adriano Borges Pereira Ferreira¹

Rodrigo Gustavo Delalibera²

Resumo

Neste trabalho, estudou-se o comportamento de lajes maciças submetidas à flexão simples com foco na comparação entre os valores experimentais e normativos. Nesse sentido, nove lajes, com espessuras variando entre 8, 11 e 14 cm e com armaduras variando entre somente inferior, somente superior e conjuntamente superior e inferior, foram submetidas à uma carga distribuída em uma faixa que distava 45° dos centros dos apoios, induzindo assim o rompimento das mesmas por força cortante. Foram obtidos dados de força e deslocamento dos ensaios afim de confrontar com os resultados normativos. As normas utilizadas foram a ABNT NBR6118:2014 e ACI318-19, ambas voltadas á estruturas de concreto. Realizou-se a verificação da força cortante, da punção e flexão das lajes. Ao final, quando se comparou os resultados experimentais e teóricos, observou-se que, mesmo não considerando os coeficientes de segurança nas equações, a força de ruptura foi superior ao valores normativos, verificando assim todo o amparo e segurança que as normas trazem. Conclui-se que a espessura da laje aumenta a sua resistência como um todo e o uso de armaduras inferiores é crucial nos elementos.

Palavras-chave: Lajes maciças – Concreto armado – Força cortante – Valores normativos.

¹Graduando, Faculdade de Engenharia Civil (FECIV) – Universidade Federal de Uberlândia (UFU)

²Professor Doutor da Faculdade de Engenharia Civil (FECIV) – Universidade Federal de Uberlândia (UFU)

Abstract

In this work, the behavior of solid slabs subjected to simple bending was studied, focusing on the comparison between experimental and normative values. In this sense, nine slabs, with thicknesses varying between 8, 11 and 14 cm and with reinforcement varying between only the bottom, only the top and both top and bottom, were subjected to a load distributed in a range that was 45° away from the centers of the supports, thus inducing their rupture by cutting force. Force and displacement data from the tests were obtained in order to compare with the normative results. The standards used were ABNT NBR6118:2014 and ACI318-19, both focused on concrete structures. The verification of shear force, punching and bending of the slabs was carried out. In the end, when the experimental and theoretical results were compared, it was observed that, even not considering the safety coefficients in the equations, the rupture force was higher than the normative values, thus verifying all the support and safety that the standards bring. It is concluded that the thickness of the slab increases its resistance as a whole and the use of inferior reinforcement is crucial in the elements.

Keywords: Solid slabs – Reinforced concrete – Shear force – Normative values.

1 Introdução

O uso do concreto armado em edificações se mostra uma das alternativas mais viáveis para garantir as necessidades do empreendimento, atendendo requisitos de segurança, viabilidade técnica e custo. No geral as estruturas são formadas por pórticos monolíticos que agem entre si distribuindo os esforços, sendo a laje o elemento, que no geral, recebe os carregamentos distribuídos pelo pavimento e os transfere por sua vez até as vigas, que os transmitem para os pilares até descarregar nas fundações.

Durante a concepção estrutural o engenheiro civil deve analisar o caso, entendendo quais serão as solicitações permanentes e variáveis da laje, o seu vão, e assim determinar o tipo da laje a ser utilizada no projeto.

No geral, as solicitações em lajes são momento fletor, e força cortante, sendo o foco deste estudo justamente essa última. Buscando-se aqui analisar através da variação de características, como espessura da laje e variação das armaduras, qual fator influencia positivamente e negativamente no comportamento das lajes frente à carga.

Logo, o trabalho aqui exposto buscou analisar os dados experimentais de 9 lajes de concreto armado armadas em uma direção que as alturas variaram entre 8,11 e 14 cm e com armaduras variando entre somente inferior, somente superior e conjuntamente superior e inferior. E comparar os resultados obtidos com os parâmetros de força cortante, punção e flexão que as normas ABNT NBR6118:2014 e ACI 318-19 trazem em seu escopo sobre o assunto.

Tal análise e comparação de resultados teóricos e experimentais se faz válida para trazer amparo e segurança para engenheiros, de forma a verificar o quanto o comportamento real da laje se aproxima ao comportamento previsto pelos cálculos. Podendo assim levar a estruturas mais seguras e econômicas.

2 Revisão técnica

No geral qualquer elemento estrutural pode estar submetido à ação de forças cortantes, o que muda é a forma como esse elemento reage sobre isso. Quando junto com o momento fletor atua uma força cortante, a solicitação passa a ser chamada de flexão simples. Para Schäffer (2006), na solicitação de flexão simples as tensões tangenciais produzidas pela força cortante não influem nas tensões normais produzidas pelo momento fletor. Assim, o que for estabelecido para a tensões normais na flexão pura vale também na flexão simples.

O modelo de análise de treliça, proposto por Rittler-Mörsh e melhorado ao longo dos anos, para compreender e descrever o comportamento das tensões cisalhantes em vigas se mostrou de grande contribuição para a escolha das armaduras transversais e o combate à força cortante. No modelo, é feita a associação da peça solicitada por momento fletor e força cortante à uma treliça, cujo os banzos inferiores são tracionados, banzos superiores comprimidos e diagonais comprimidas representam as bielas, e as tracionadas representam os estribos, ambos apresentam 45° de inclinação. Sendo essa inclinação, aproximadamente, a mesma das fissuras em relação à horizontal.

Nas lajes, a fissuração é menos concentrada do que nas vigas, o que dispensa o uso de armadura mínima transversal, sendo que para Fusco(2008) a ruptura da peça por força cortante se dá apenas quando surge a fissura crítica, que é a primeira fissura inclinada na peça. Furlan Jr(1995) traz que nas peças sem armadura de cisalhamento, o valor da força cortante que provoca o aparecimento da fissura diagonal é associado a ruptura.

A ruptura ocorre ao longo da fissura existente com pequeno ou nenhum aumento da abertura, exceto, quando há grande porcentagem de armadura atravessando a interface. A resistência final da interface fissurada é avaliada pela teoria atrito-cisalhamento. Por outro lado, a ruptura por cisalhamento em um plano não fissurado ocorre pela formação de inúmeras fissuras inclinadas em relação ao plano de cisalhamento. Neste caso, ocorre a ruptura pelo esmagamento das bielas comprimidas de concreto formadas paralelas às fissuras (Araújo e El Debs, 2001).

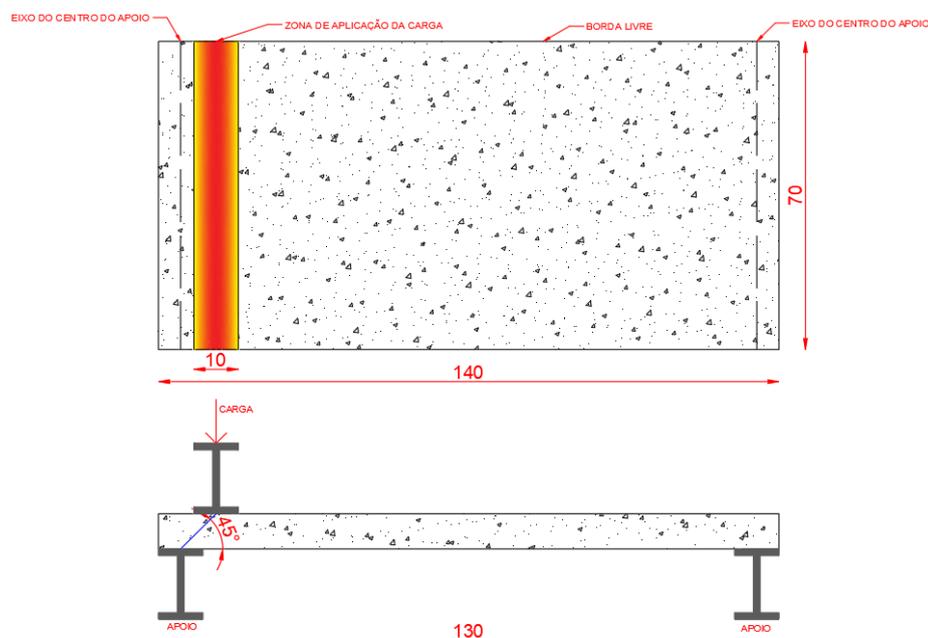
Segundo Souza (2019) o concreto sem armadura transversal transfere os esforços cisalhantes através de mecanismos de equilíbrio das forças internas e de transferência de carga para os apoios. Sendo esses mecanismos o esforço cortante resistido pelo concreto na zona do banzo comprimido não fissurado, a capacidade de transmissão dos esforços entre fissuras e contato ainda existente entre as faces do concreto e por fim que é a parcela resistida através do efeito pino, onde a armadura de flexão forma um pino de ligação entre duas fissuras permitindo a transferência de uma parcela das tensões cisalhantes.

3 Programa experimental

Os dados que serviram de base para este trabalho foram obtidos do trabalho de Péres(2022), em que em seus estudos ensaiou 9 lajes maciças armadas em uma direção, atuando de forma bi apoiada sobre duas vigas metálicas de 10cm de largura e sendo aplicada a carga numa faixa uniformemente distribuída nas lajes por meio de uma viga metálica que recebia o

carregamento. Na figura 1 é mostrado o esquema de apoios, carregamento e dimensões em planta das lajes. Todas as medidas dos desenhos esquemáticos aqui apresentados estão em centímetros.

Figura 1 – Esquema do ensaio das lajes



Fonte: Autor (2023)

As dimensões em planta e o esquema geral do ensaio foi mantido para as 9 lajes, apenas fazendo a variação da altura das mesmas e a sua devida armadura, sendo utilizado um cobrimento nominal de 2,5cm. As lajes foram divididas em tipo A, B e C, sendo A para lajes com 8cm de altura, B para lajes com 11cm e C para lajes com 14cm. Além disso, se dividiu em lajes tipo 1,2 e 3, sendo 1 para lajes com armadura inferior, 2 para lajes com armadura superior e armadura de transporte inferior (que não se estendia até a zona de aplicação da carga e apoios, limitadas ao meio do vão) e 3 para lajes com armadura superior e inferior. (Tabela 1).

Tabela 1 – Características dos tipos de lajes

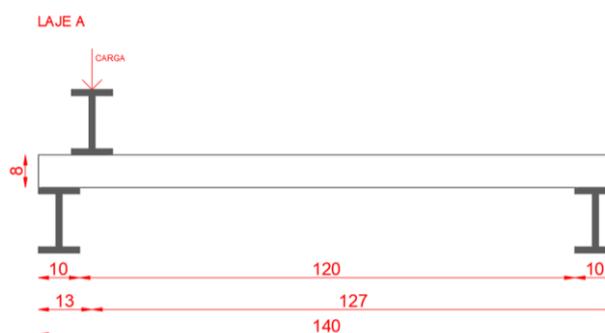
Laje	H (cm)	As,min (cm ²)	Distribuição da armadura inferior	Distribuição da armadura superior	As,efet (cm ²)
LA1	8	1,2	6 Ø 5mm c/ 13 cm	-	1,18
LA2	8	1,2	6 Ø 5mm c/ 13 cm *	6 Ø 5mm c/ 13 cm	1,18
LA3	8	1,2	6 Ø 5mm c/ 13 cm	6 Ø 5mm c/ 13 cm	2,35
LB1	11	1,65	9 Ø 5mm c/ 8 cm	-	1,77
LB2	11	1,65	9 Ø 5mm c/ 8 cm *	9 Ø 5mm c/ 8 cm	1,77
LB3	11	1,65	9 Ø 5mm c/ 8 cm	9 Ø 5mm c/ 8 cm	3,54
LC1	14	2,1	11 Ø 5mm c/ 6,5 cm	-	2,15

LC2	14	2,1	11 Ø 5mm c/ 6,5 cm *	11 Ø 5mm c/ 6,5 cm	2,15
LC3	14	2,1	11 Ø 5mm c/ 6,5 cm	11 Ø 5mm c/ 6,5 cm	4,30

Fonte: Autor (2023)

Definiu-se que a carga seria aplicada a uma distância do apoio de tal forma que o ângulo formado entre a linha central da aplicação da carga e do apoio formassem um ângulo de 45° , sendo mostrado o esquema na figura 2 para a laje tipo A.

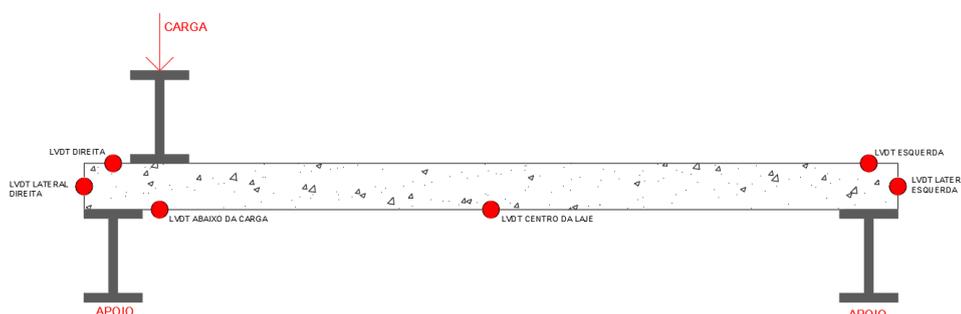
Figura 2 – Laje A



Fonte: Autor (2023)

Para manter o critério de 45° de distância, para a laje tipo B o centro médio de carga foi aplicado à 16cm da face lateral e para a laje tipo C a carga distava 19cm da face lateral. Para a coleta de dados e parâmetros durante a realização do ensaio se utilizou 6 LVDTs distribuídos pela peça (figura 3) afim de obter uma análise mais precisa do comportamento durante o ensaio, tendo assim os deslocamentos durante o carregamento.

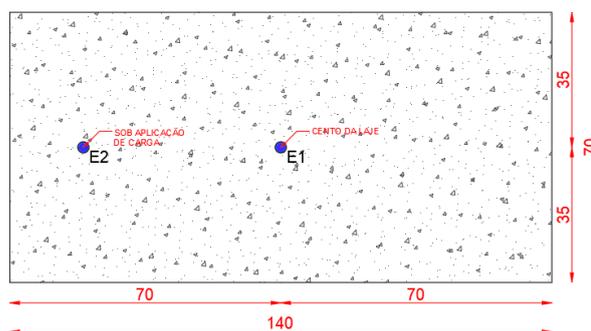
Figura 3 – posição LVDTs



Fonte: Autor (2023)

Ademais, para se medir as deformações no concreto foram utilizados extensômetros colados nas faces das lajes, sendo eles E1 e E2 (figura 4) posicionados no centro da laje e abaixo do ponto de aplicação da carga, fazendo a leitura dos pontos mais suscetíveis a deformações. O extensômetro E2 varia sua posição em função da altura da laje, visto a movimentação do centro de carga.

Figura 4 – posição extensômetros concreto

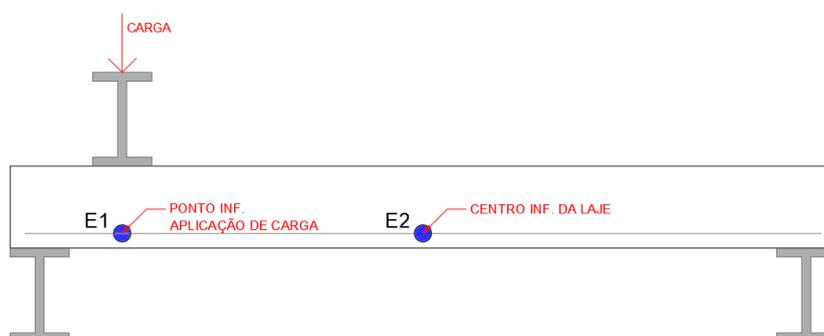


Fonte: Autor (2023)

A fim de completar os dados do ensaio e entender melhor o comportamento da peça, foram colados extensômetros nas barras de aço antes da concretagem. Quantidade e posição dos mesmos variam conforme a posição e quantidade das barras de aço nas lajes.

Para as lajes do tipo 1, são utilizados dois extensômetros E1 e E2, posicionados nas armaduras abaixo do local de aplicação de carga e no centro da laje, respectivamente, conforme mostra a figura 5. Por conta da variação da posição da aplicação da carga, a posição de E1 varia para as lajes de diferentes alturas.

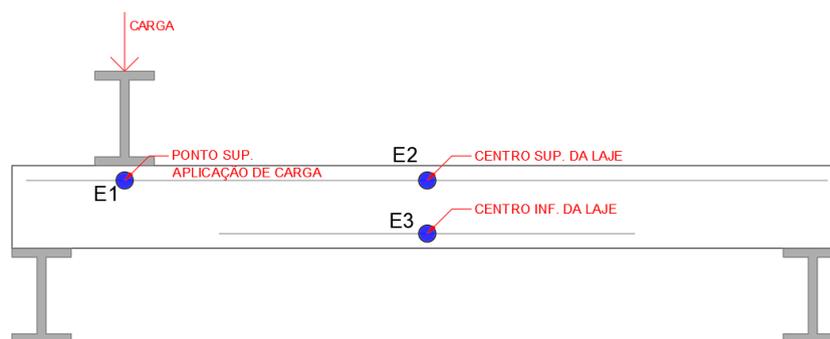
Figura 5 – posição extensômetros aço laje tipo 1



Fonte: Autor (2023)

Para as lajes tipo 2, com armadura inferior de transporte e armadura superior, três extensômetros foram instalados, E1, E2 e E3, embaixo da aplicação da carga na armadura superior, no centro da armadura superior e no centro da armadura de transporte, respectivamente (Figura 6). Em razão da diferença da distância da face lateral da peça até o ponto de aplicação da carga nas lajes de diferentes alturas, a posição do extensômetro E1 também varia.

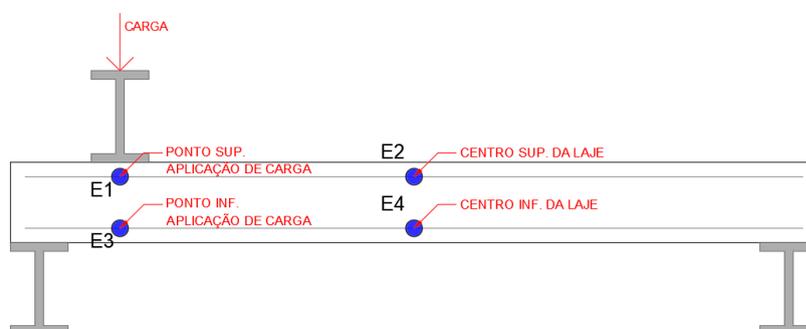
Figura 6 – posição extensômetros aço laje tipo 2



Fonte: Autor (2023)

Para as lajes do tipo 3, com armadura superior e inferior, quatro extensômetros foram fixados nas barras de aço, E1, E2, E3 e E4, sendo E1 fixado abaixo do ponto de aplicação de carga na armadura superior, E2 no meio das barras de aço superiores, E3 abaixo do ponto de aplicação da carga na armadura inferior e E4 centralizado na peça na armadura inferior, conforme figura 7. Em razão da diferença da distância da face lateral da peça até o ponto de aplicação da carga nas lajes de diferentes alturas, a posição dos extensômetros E1 e E3 também varia.

Figura 7 – posição extensômetros aço laje tipo 3



Fonte: Autor (2023)

4 Caracterização dos materiais

No que diz respeito aos materiais utilizados nas lajes, foi utilizado na concretagem um concreto de resistência estimada de 20 MPa e Slump Teste 10 ± 2 cm. Na concretagem moldou-se nove corpos de prova, sendo eles ensaiados a compressão, tração por compressão diametral e módulo de elasticidade na data de ensaio das lajes.

Foram reservados também amostras das barras de aço CA-50 Ø5mm utilizadas nas peças para posterior ensaio de caracterização, afim de reproduzir a real situação das peças a serem

ensaiadas. Na tabela 2 é demonstrado os valores médios que caracterizam os materiais das lajes, obtidos a partir dos ensaios.

Tabela 2 – Resultados médios materiais

Ensaio	Valor médio
Resistência à compressão do concreto (MPa)	29,47
Resistência à tração do concreto (MPa)	1,59
Módulo de elasticidade do concreto– E_c (GPa)	34,83
Tensão de ruptura no aço (MPa)	536,08
Resistência ao escoamento no aço (MPa)	492,07
Deformação no aço (%)	2,55

Fonte: Péres(2022)

Tais dados se mostram cruciais para que nas equações analíticas de verificação se utilize valores do que realmente representa a laje, e não simplesmente valores padronizados, trazendo assim maior fidelidade ao estado real das peças.

5 Resultados dos ensaios

Neste tópico serão apresentados os dados e resultados obtidos durante os ensaios das lajes e as devidas análises sobre os vários itens.

5.1 Valores de deslocamentos

Durante a aplicação de carga nas lajes foi feita a leitura dos dados de deslocamento nos LVDTs espalhados pela peça, na tabela 3 são apresentados os valores de deslocamento máximos correspondentes à força última das lajes.

Tabela 3 – Deslocamentos máximos

LAJE	F exp (kN)	LVDT Direita (mm)	LVDT Esquerda (mm)	LVDT Embaixo da Laje (mm)	LVDT Lateral Direita (mm)	LVDT Lateral Esquerda (mm)	LVDT Embaixo da Carga (mm)
LA1	99,8	0,42	2,98	4,78	1,64	2,49	6,77
LA2	41,36	0,42	1,53	1,43	0,81	2,05	3,52
LA3	122,77	0,92	1,74	6,97	3,45	0,99	5,64
LB1	111,1	0,96	2,75	6,35	3,18	1,45	7,36
LB2	44,13	0,76	0,36	0,77	0,35	0,8	0
LB3	134	1,18	3,33	6,07	2,6	2,16	7,04
LC1	138,34	1,38	0,98	4,37	0,73	3,28	5,17
LC2	56,7	0,38	0,43	0,77	0,52	0,01	0,74

LC3	198,25	0,77	1,26	5,13	4,53	1,83	-
-----	--------	------	------	------	------	------	---

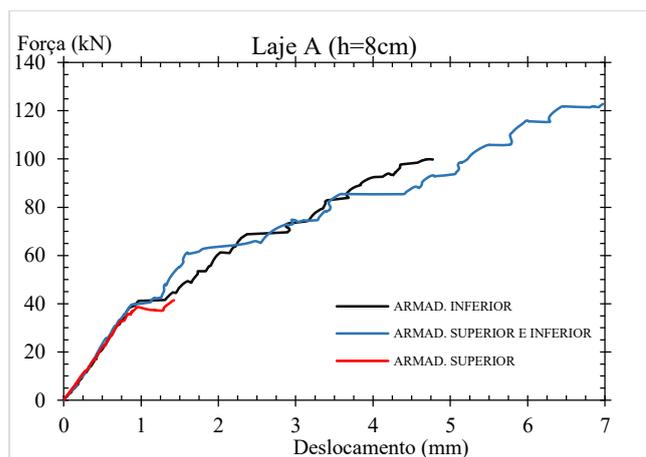
Fonte: Autor (2023)

O LVDT embaixo da carga da laje LC3 está sem valor pois foi a primeira laje a ser ensaiada e não havia se posicionado o sensor no local, sendo notado a necessidade de fazê-lo nas outras lajes, a partir da análise visual do deslocamento que aconteceu no local.

Dos dados coletados, pode se perceber que apenas nas lajes LA3, LB2 e LC2 o deslocamento no meio da laje foi maior que logo embaixo da carga. Sendo que as lajes do tipo 2 analisadas contavam apenas com armadura superior, indicando que a laje sofreu a ruptura sem sofrer deslocamento como um todo, comportamento esperado visto a ausência de armadura de tração inferior e a fragilidade do concreto para força de tração. Sendo uma situação crítica em uma situação de serviço, visto a ruptura frágil apresentada.

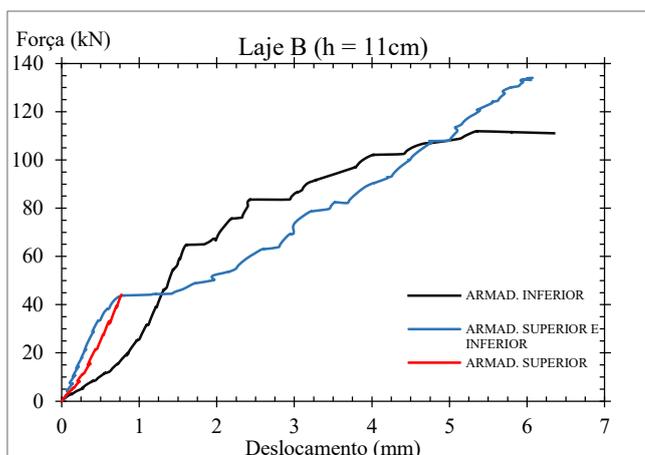
Para uma melhor visualização e interpretação dos resultados foi elaborado um conjunto de três gráficos que trazem a relação Força X Deslocamento no meio da laje, sendo esse o LVDT escolhido para resultados mais abrangentes. Tais gráficos estão separados por tipo de laje (A, B ou C) e com os dados de deslocamento conforme o tipo de armação de cada laje. Nos gráficos 1, 2 e 3 a seguir são apresentados os resultados referentes as lajes do tipo A, B e C respectivamente.

Gráfico 1 – Força X Desloc. Centro Laje A



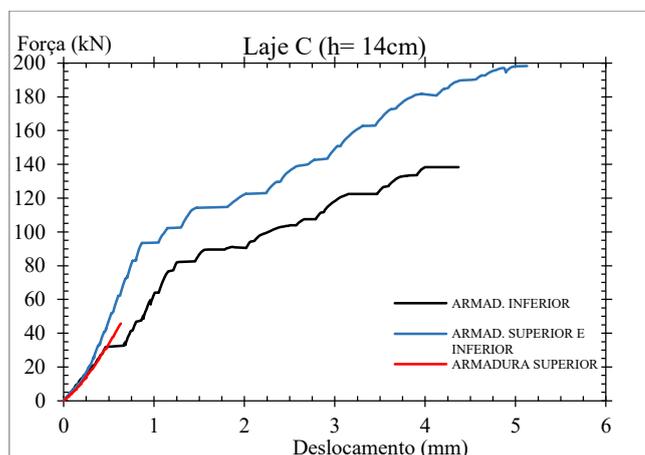
Fonte: Autor (2023)

Gráfico 2 – Força X Desloc. Centro Laje B



Fonte: Autor (2023)

Gráfico 3 – Força X Desloc. Centro Laje C



Fonte: Autor (2023)

Logo se percebe o quanto a armadura inferior influencia nos ganhos de capacidade de carga e deformação. A laje que conta apenas com armadura superior se mostrou bem inferior as demais no que diz respeito à carga de ruptura, sendo essa carga da ordem de duas a três vezes menor quando comparada às lajes tipo 1 e tipo 3, respectivamente

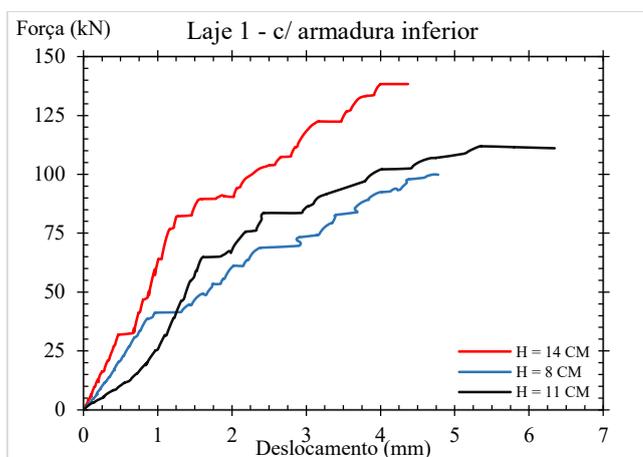
Isso se deve ao fato de que a laje não está submetida a tensão cisalhante pura, também ocorre solicitação por momento fletor. Tal esforço gera tração nas fibras inferiores da laje, por não contar com armadura em tal posição e pelo concreto apresentar uma resistência menor a esse tipo de esforço, sua ruptura se dá de forma mais precoce.

Ademais, as lajes que contam com armadura superior e inferior mostraram um deslocamento relativamente menor para uma mesma carga quando se compara com as lajes que tem apenas armadura inferior, com exceção para a laje tipo B entre 40 e 100kN de carga. Mas no geral, para forças mais baixas, o comportamento se mostrou similar entre as lajes. Entretanto,

a diferença das barras de aço adicionais que levam ao dobro da área de aço se mostra em forças mais altas, permitindo que as lajes do tipo C possam absorver maiores cargas, mesmo que para isso experimentem maiores deslocamentos, entretanto, antes de serem levadas à ruptura.

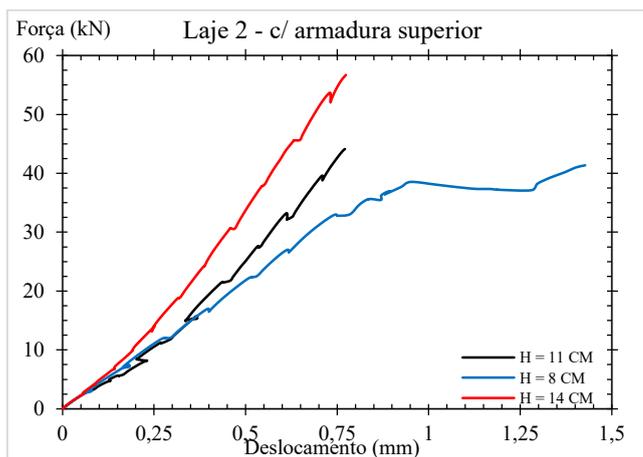
Afim de aprofundar as análises, nos gráficos 4, 5 e 6 será apresentado as curvas de Força X Deslocamento no meio da laje, porém se fixando o tipo da laje a partir da armadura (tipo 1, 2 ou 3) e analisando as curvas afim de se entender a influência da variação de altura da laje nos resultados.

Gráfico 4 – Força x Desloc. Centro Laje 1



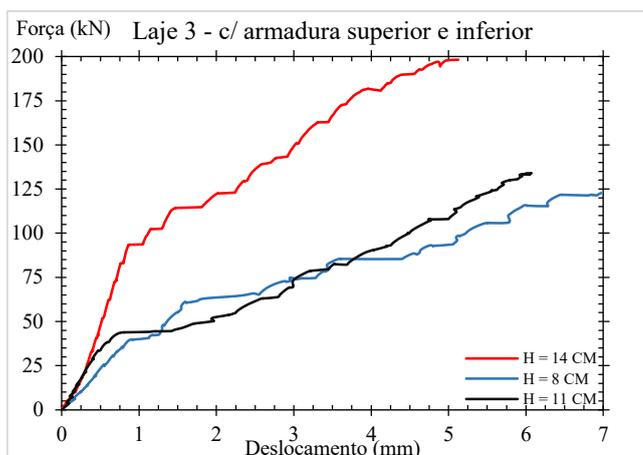
Fonte: Autor (2023)

Gráfico 5 – Força x Desloc. Centro Laje 2



Fonte: Autor (2023)

Gráfico 6 – Força x Desloc. Centro Laje 3



Fonte: Autor (2023)

As lajes apresentam um comportamento relativamente homogêneo entre si, sendo que apenas a laje do tipo 1 com $h=11\text{cm}$ se deslocou mais que a laje de $h=8\text{cm}$. Nas demais, a laje de menor espessura, independentemente da armadura, se deslocou mais quando comparada as outras, além de absorver menor carga. Isso mostra que as lajes com espessura maior ($h=14\text{cm}$) se apresentam mais rígidas, e mesmo que absorvam maiores cargas, seu deslocamento permanece menor que as demais. Nas lajes tipo B, se percebe um ganho de resistência, mas no geral seu comportamento se aproxima mais das lajes tipo A do que tipo C, mesmo estando em um valor de espessura intermediário. A diferença da altura da laje na carga final de ruptura se mostra mais pronunciada nas lajes tipo 3, em que a laje de $h=14\text{cm}$ apresenta uma carga muito superior às demais.

6 Resultados analíticos VS experimentais

Afim de se consolidar os resultados e identificar os modos de ruptura das lajes, foi apresentado neste item os cálculos, comparações e discussões baseados em normas técnicas e equações analíticas feitas com dados extraídos dos ensaios. Os cálculos se amparam na ABNT NBR 6118:2014 e no ACI 318-19. Durante as verificações não se utilizou os coeficientes de segurança das normas, afim de representar a situação real de ruptura, e não a situação de dimensionamento.

Os dados gerais e comuns entre lajes no que diz respeito aos materiais são apresentados na tabela 2 do item 4. Também na tabela 4 é apresentado valores individuais de cada laje e os esforços solicitantes últimos.

Tabela 4 – dados das lajes e esforços solicitantes

Laje	h (cm)	d (cm)	As (cm ²)	ρ (%)	F exp (kN)	Vs esq, exp (kN)	Vs dir, exp. (kN)	M. max, exp (kN.m)
LA1	8	5,25	1,2	0,21%	99,8	93,66	6,14	7,57
LA2	8	8	1,2	0,21%	41,36	38,81	2,55	3,18
LA3	8	5,25	2,35	0,42%	122,77	115,21	7,56	9,29
LB1	11	8,25	1,76	0,23%	111,1	101,70	9,40	11,32
LB2	11	11	1,76	0,23%	44,13	40,40	3,73	4,58
LB3	11	8,25	3,53	0,46%	134	122,66	11,34	13,63
LC1	14	11,25	2,16	0,22%	138,34	123,44	14,90	17,50
LC2	14	14	2,16	0,22%	56,7	50,59	6,11	7,31
LC3	14	11,25	4,31	0,44%	198,25	176,90	21,35	24,99

Fonte: Autor (2023)

Os dados de força cortante pela esquerda e direita, referentes as reações de apoio, e momento máximo foram obtidos pelo programa FTOOL, considerando a ação da carga de ruptura e peso próprio das peças. Nas lajes do tipo 2, o valor de d é coincidente com h, pois devido a ausência de armadura inferior, considerou toda a altura útil da laje nos cálculos. Ademais, a seguir são apresentados alguns parâmetros utilizados nos cálculos e necessários aos entendimentos:

- $b_w = 70\text{cm}$
- $\varnothing \text{ long} = 5\text{mm}$
- $E_s = 210\text{ GPa}$
- nas células das tabelas que contém “Verificação” valores em amarelo indicam que a força resistente foi maior que a solicitante.
- vão = 130 cm (eixo a eixo dos apoios)
- $c_n = 2,5\text{ cm}$
- $\gamma_c = 25\text{ kN/m}^3$
- nas células das tabelas que contém “Verificação” valores em vermelho indicam que a força resistente foi menor que a solicitante.

6.1 NBR 6118:2014

A norma brasileira de concreto armado irá amparar as verificações aqui feitas a respeito do cisalhamento, puncionamento e flexão das lajes. Inicialmente se calcula parcela resistente do concreto a tração pela eq. 1.

$$f_{ctk,inf} = 0,21 * f_{ck}^{\frac{2}{3}} = 0,21 * 29,47^{\frac{2}{3}} = 2,00\text{ MPa (item 8.2.5)} \quad (1)$$

Em que,

- $f_{ctk,inf} = 0,7 * f_{ct,m}$
- $f_{ct,m} = 0,3 * f_{ck}^{2/3}$ onde f_{ck} é a resistência característica à compressão do concreto

6.1.1 Cisalhamento

Verificação baseada no item 19.4.1 da norma, que é atribuída a lajes sem armadura para força cortante. Todo o equacionamento e resoluções são apresentados no Apêndice A, sendo aqui apresentado na tabela 5 o resumo dos resultados para se discutir.

Tabela 5 – Verificação força cortante NBR 6118:2014

Laje	F exp (kN)	V anali. (kN)	Verificação	F exp / V anali
LA1	99,8	40,3	V anali < F exp	2,47
LA2	41,4	25,6	V anali < F exp	1,61
LA3	122,8	40,3	V anali < F exp	3,04
LB1	111,1	63,4	V anali < F exp	1,75
LB2	44,1	36,1	V anali < F exp	1,22
LB3	134,0	63,4	V anali < F exp	2,11
LC1	138,3	86,1	V anali < F exp	1,61
LC2	56,7	47,1	V anali < F exp	1,20
LC3	198,3	86,1	V anali < F exp	2,30

Fonte: Autor (2023)

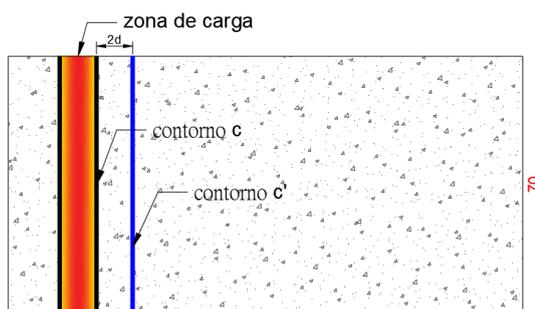
Observou-se em todas as lajes, independente da armadura e altura, a força resistente analítica foi inferior a força cortante experimental, indicando que todas elas sofreram ruptura devido à ação da cortante. Isso, em parte, traz segurança para usuários da norma, pois demonstra que de fato os cálculos apontam que a laje não suporta aquela força, levando assim a um dimensionamento seguro.

Na coluna “ F_{exp}/V_{anali} ” tem a razão entre a força resistente e solicitante, demonstrando que conforme se aumenta a espessura da laje, tende a se aumentar a resistência, e se aproxima mais dos valores que levaram a ruptura. No que diz respeito à variação de armadura, as lajes tipo 3, nessa verificação, tiveram percentualmente uma menor força resistente frente à solicitação, ficando nítido quando se compara com o percentual das lajes tipo 1.

6.1.2 Puncionamento

Também se verificou o puncionamento das lajes, ou seja, o cisalhamento em duas superfícies críticas definidas em torno da área de aplicação das forças, sendo dado no item 19.5 da ANBT NBR6118:2014. Tal verificação se dá visto o possível surgimento do cone de punção na seção transversal de aplicação da carga. A primeira superfície crítica é chamada de contorno C, e diz respeito ao perímetro da aplicação da carga, verificando indiretamente a tensão de compressão diagonal do concreto. A segunda superfície é definida como contorno C', afastada $2d$ da carga associada à resistência à tração diagonal. Na figura 8 é definida as superfícies críticas.

Figura 8 – contornos críticos de punção



Fonte: Autor (2023)

Para o cálculo da tensão solicitante foi necessário definir o perímetro de punção, nesse caso, por a laje não ter continuidade em uma das direções da carga, se definiu os contornos conforme a imagem 8, totalizando 140cm para o contorno C e 70cm para o contorno C'. Para o contorno C' definiu esse valor pois ao se distanciar 2d do centro da carga, se invade o apoio, interferindo assim nos resultados

Os cálculos detalhados são apresentados no Apêndice B, sendo a tabela 6 a seguir apenas um resumo dos resultados obtidos, em que a comparação entre experimental e teórico é baseada na força resistente e solicitante, tendo assim um dado comum em todas as verificações e facilitando a visualização entre elas.

Tabela 6 – Verificação punção NBR 6118:2014

Laje	F exp (kN)	Contorno C			Contorno C'		
		V anali. (kN)	Verificação	F exp/ V anali	V anali. (kN)	Verificação	F exp/ V anali
LA1	99,80	584,83	V anali > F exp	0,17	25,92	V anali < F exp	3,85
LA2	41,36	891,17	V anali > F exp	0,05	24,04	V anali < F exp	1,72
LA3	122,77	584,83	V anali > F exp	0,21	25,92	V anali < F exp	4,74
LB1	111,10	919,02	V anali > F exp	0,12	36,32	V anali < F exp	3,06
LB2	44,13	1225,36	V anali > F exp	0,04	33,06	V anali < F exp	1,33
LB3	134,00	919,02	V anali > F exp	0,15	36,32	V anali < F exp	3,69
LC1	138,34	1253,21	V anali > F exp	0,11	44,5	V anali < F exp	3,11
LC2	56,70	1559,55	V anali > F exp	0,04	42,07	V anali < F exp	1,35
LC3	198,25	1253,21	V anali > F exp	0,16	44,5	V anali < F exp	4,46

Fonte: Autor (2023)

Se percebe que no contorno crítico C, ou seja, no perímetro de aplicação da carga, não houve rompimento por punção, sendo que a força resistente se mostra muito superior à força aplicada. Sendo nítido o aumento na resistência à medida que se aumenta a espessura da laje

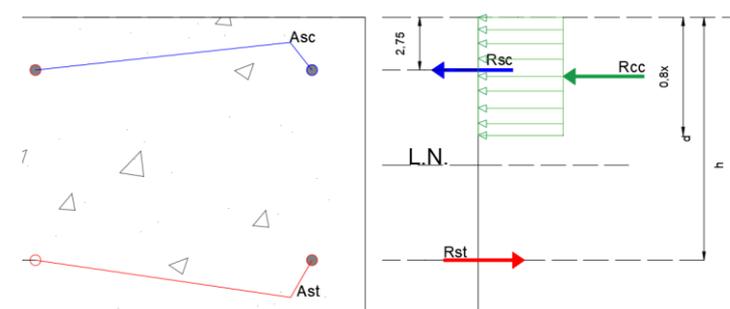
Já no contorno C', se nota que em todas as lajes a força resistente não conseguiu superar a solicitante, sendo esse fator agravado pela diminuição do perímetro do contorno crítico, indicando uma tensão mais alta de solicitação. Se nota também que para o equacionamento da

norma, o fato das lajes tipo 3 terem armadura superior e inferior é indiferente, sendo considerado nos cálculos apenas a inferior, o que leva a resultados de resistência iguais aos da laje tipo 1, que também tendem a aumentar a resistência conforme se aumenta a espessura da laje.

6.1.3 Flexão

Por se tratar de um modelo com dimensões pequenas e condições de ensaio específicas, o cálculo da parcela resistente à flexão dessas lajes se deu de forma analítica, analisando as forças dos componentes da seção transversal. Na Figura 9 é apresentado um esquema geral das parcelas consideradas. As equações e metodologia dos cálculos estão no Apêndice C, sendo baseadas na NBR6118:2014, principalmente no que diz respeito aos domínios de deformação e estádios de comportamento.

Figura 9 – esquema de forças das lajes



Fonte: Autor (2023)

Na tabela 7 é apresentado um resumo do momento resistente analítico, do momento solicitante experimental e a verificação do mesmo. As tabelas 13,14 e 15 estão no apêndice C, mostrando os valores utilizados para chegar no resultado aqui exposto.

Tabela 7 – momentos fletores nas lajes NBR 6118:2014

Laje	h (cm)	M, analítico(kN.cm)	M, exp (kN.cm)	Verificação	Exp./analit.
LA1	8	260	757	M, analit<M,exp	2,9
LA2	8	119	318	M, analit<M,exp	2,7
LA3	8	268	929	M, analit<M,exp	3,5
LB1	11	598	1132	M, analit<M,exp	1,9
LB2	11	226	458	M, analit<M,exp	2,0
LB3	11	649	1363	M, analit<M,exp	2,1
LC1	14	1001	1750	M, analit<M,exp	1,7
LC2	14	367	731	M, analit<M,exp	2,0
LC3	14	1013	2499	M, analit<M,exp	2,5

Fonte: Autor (2023)

Com os resultados acima se percebe que todas as lajes não apresentaram capacidade de resistir ao momento fletor referente a carga aplicada. Isso reforça o que foi dito em 5.1, de que

a laje não está sendo solicitada puramente à tensão cisalhante, mesmo aplicando a carga de forma a induzir a ruptura por força cortante, também é gerado momento fletor, cujo os cálculos indicam um valor bem alto de solicitação.

As lajes do tipo 2 se mostram mais vulneráveis à atuação do momento fletor, visto a ausência de armadura inferior. Sendo nítido também que aumentar a espessura da laje resulta em ganhos de resistência, além de se perceber que as lajes do tipo 3 apresentaram uma resistência superior às demais, demonstrando assim a boa atuação conjunta das armaduras superiores e inferiores no combate à flexão. Pela coluna *Exp./analit.* se demonstra que conforme se aumenta a espessura da laje, tende a se aumentar a resistência, e se aproxima mais dos valores que levaram a ruptura.

6.2 ACI 318-19

O presente item traz a verificação de cisalhamento e puncionamento das lajes, mas dessa vez se baseia na norma estadunidense ACI 318-19 de construções de concreto estrutural. Lembrando que devido ao fato dessa norma considerar corpos de prova cúbicos, foi feita a correção do valor do f_{ck} do concreto, que foi obtido a partir de moldes cilíndricos, multiplicando por 0,8 (Delalibera, 2020). Ademais, a norma se baseia no sistema estadunidense de medidas, entretanto no apêndice C da mesma, há a conversão de valores e equações para o SI.

6.2.1 Cisalhamento

A norma americana dividiu o cálculo da resistência à força cortante em diversas formas: elementos submetidos à força cortante e flexão combinados, elementos com compressão axial, entre outros mais específicos. Esta verificação se baseou no item 22.5.5.1 da norma. A tabela 8 apresenta os dados resumo dos resultados apresentados no Apêndice D

Tabela 8 – Verificação força cortante ACI 318-19

+	F exp (kN)	V anali. (kN)	Verificação	F exp / V anali
LA1	99,8	18,5	V anali < F exp	5,4
LA2	41,4	17,6	V anali < F exp	2,4
LA3	122,8	18,5	V anali < F exp	6,6
LB1	111,1	29,4	V anali < F exp	3,8
LB2	44,1	27,1	V anali < F exp	1,6
LB3	134,0	29,4	V anali < F exp	4,6
LC1	138,3	39,5	V anali < F exp	3,5
LC2	56,7	37,0	V anali < F exp	1,5
LC3	198,3	39,5	V anali < F exp	5,0

Fonte: Autor (2023)

Como esperado, a norma americana trouxe resultados com a brasileira, porém valores mais conservadores, em que todas as lajes apresentaram ruptura por cortante e o comportamento de também aumentar a resistência conforme se aumenta a espessura da laje, e com as lajes mais espessas os valores teóricos tendem a se aproximar do experimental. Ademais, as lajes tipo 2 tem uma ressalva, o equacionamento utilizado se determina que deve ter uma armadura mínima inferior, foi feito o cálculo considerando isso, logo, na realidade, a força resistente seria ainda menor, visto a não existência dessas barras.

6.2.2 Puncionamento

Para se verificar a punção em lajes segundo o ACI deve se seguir o item 22.6.5, sendo a superfície crítica definida em 22.6.4.1 como o perímetro que dista $d/2$ da aplicação da carga. Sendo que por não conter armadura destinada a combater o puncionamento, a norma estabelece que é necessário verificar apenas esta superfície crítica. Nesse caso, ela não avança sobre o apoio, como aconteceu no contorno C' definido pela NBR6118:2014. A tabela 9 traz o resumo das forças resistentes e solicitantes, os cálculos referentes estão no Apêndice E

Tabela 9 – Verificação punção ACI 318-19

Laje	F exp (kN)	V anali. (kN)	Verificação	F exp/ V anali
LA1	99,80	78,00	V anali < F exp	1,3
LA2	41,36	118,86	V anali > F exp	0,3
LA3	122,77	78,00	V anali < F exp	1,6
LB1	111,10	122,58	V anali > F exp	0,9
LB2	44,13	163,44	V anali > F exp	0,3
LB3	134,00	122,58	V anali < F exp	1,1
LC1	138,34	167,15	V anali > F exp	0,8
LC2	56,70	208,01	V anali > F exp	0,3
LC3	198,25	167,15	V anali < F exp	1,2

Fonte: Autor (2023)

A tabela 9 demonstra que algumas lajes apresentaram valor resistente maior que o solicitante, e outras a solicitação foi maior que a parcela resistiva. Tal análise se faz interessante pelo fato de que a superfície crítica aqui definida fica entre o contorno C e C' da norma brasileira. O que pode levar a entender o caminhamento das tensões e crer que, realmente o comportamento parte da não ruptura próximo ao ponto de aplicação da carga e conforme se afasta tende ao rompimento, que seria o contorno C', e intermediário entre eles temos o contorno $d/2$ aqui analisado, onde parte rompeu e parte não rompeu.

7 Conclusões

Apesar de serem três fontes para comparar, sendo elas a ANBT NBR 6118:2014 o ACI 318-19 e os resultados experimentais, pode se perceber uma certa coerência entre todos eles. A

seguir é apresentado a tabela 10 com as forças de cortante resistente provenientes de cada cálculo feito anteriormente, sendo feito assim um comparativo entre todos os resultados obtidos ao longo desse trabalho.

Tabela 10 – Resumo de forças

Laje	F exp (kN)	<i>Vrd1</i>	<i>Vc ACI</i>	<i>Punção</i>	<i>Punção</i>	<i>Punção</i>	<i>Flexão</i>
		<i>NBR6118</i>	<i>318-19</i>	<i>Contorno C</i>	<i>Contorno C'</i>	<i>ACI</i>	
		V anali 1 (kN)	V anali 2 (kN)	V anali 3 (kN)	V anali 4 (kN)	V anali 5 (kN)	V anali 6 (kN)
LA1	99,80	40,30	18,50	584,83	25,92	78,00	34,58
LA2	41,36	25,60	17,60	891,17	24,04	118,86	15,89
LA3	122,77	40,30	18,50	584,83	25,92	78,00	35,63
LB1	111,10	63,40	29,40	919,02	36,32	122,58	59,42
LB2	44,13	36,10	27,10	1225,36	33,06	163,44	22,45
LB3	134,00	63,40	29,40	919,02	36,32	122,58	64,48
LC1	138,34	86,10	39,50	1253,21	44,50	167,15	80,16
LC2	56,70	47,10	37,00	1559,55	42,07	208,01	29,35
LC3	198,25	86,10	39,50	1253,21	44,50	167,15	81,13

Fonte: Autor (2023)

Se percebe que no geral as lajes romperam por força cortante, visto que as menores forças resistentes são dessa parcela, o que valida o foco principal deste trabalho. Sendo que a norma americana se mostrou bem mais conservadora que a brasileira. Ademais, se percebe que o momento fletor caminha quase que paralelo com a força cortante, indicando assim que a segunda principal solicitação foi dele, reforçando ainda mais a conclusão sobre o uso imprescindível das armaduras inferiores nas lajes, se mostrando o principal fator de ganho de resistência quando se compara às demais variações. Sendo o momento fletor a causa de ruptura nas lajes tipo 2.

A adição da armadura superior nas lajes tipo 3, nos cálculos, não indicou uma grande diferença quando comparado ao que foi obtido experimentalmente, mostrando uma certa segurança que as normas trazem em seu equacionamento, de não incluir essa parcela resistiva. E se percebe que apenas na verificação de punção, as lajes tipo 2 apresentaram vantagem, mas isso se deve ao fato da consideração de altura útil igual à altura total da laje, mas como a laje não é puramente solicitada à punção, não se mostrou viável o uso de apenas armaduras superiores.

Falando de punção se percebe o caminhamento da resistência ao longo da peça, com a maior resistência próximo à aplicação da carga, que os cálculos indicaram que não rompeu, e conforme se afasta do ponto de carga, a resistência se diminui e sucumbe à solicitação.

O aumento da espessura da laje também se mostrou importante nos ganhos das parcelas resistivas, onde podem absorver maiores cargas com deslocamentos menores, visto a sua maior

rigidez. Fator importante esse quando se busca contornar algum problema real de alta deslocabilidade, ou de carga acentuada.

Referências Bibliográficas

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE ACI COMMITTEE 318. **Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-2019) and Commentary** - Farmington Hills, MI, 2019

ARAÚJO, D. L.; EL DEBS, M. K. **Cisalhamento na interface entre concreto pré-moldado e concreto moldado no local em vigas submetidas à flexão**. Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, n. 17, p. 1-27, 2001.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de Estruturas de Concreto** - Procedimento. Rio de Janeiro. 2014.

DELALIBERA, Rodrigo Gustavo. **Propriedades mecânicas do concreto endurecido - Estruturas de Concreto I – FECIV 41061**. Notas de aula, Universidade Federal de Uberlândia, 2020.

FURLAN JÚNIOR, Sydney. **Vigas de concreto com taxas reduzidas de armadura de cisalhamento: Influência do emprego de CEB-FIPras curtas e de protensão**. Tese de Doutorado-Universidade de São Paulo, 386 f, 1995

FUSCO, P. B. **Estruturas de concreto: Solicitações tangenciais**. São Paulo: Editora Pini, Ltda, 324p., 2008.

PÉRES, Mayuma de Oliveira. **Influência das armaduras longitudinais inferiores e superiores na resistência à força cortante em lajes**. Pós-graduação em Engenharia Civil-Universidade Federal de Uberlândia. 2022

SCHÄFFER, Almir. **Concreto armado II flexão simples**. Faculdade de engenharia - Pontifícia Universidade Católica Do Rio Grande Do Sul, 2006.

SOUZA, Diego Ferreira. **Cisalhamento em vigas de concreto armado com armadura transversal interna contínua**. Pós-Graduação em Engenharia de Infraestrutura e Desenvolvimento Energético - Universidade Federal Do Pará, 2019.

APÊNDICE A – CÁLCULO DA FORÇA CORTANTE NBR6118:2014

A verificação de força cortante em lajes sem armadura de cisalhamento é dada pelo item 19.4.1 da ABNT NBR618:2014. Sendo que para dimensionamento, a força cortante solicitante deve ser menor ou igual à V_{rd1} . Aqui será chamado de “ V_{rk1} ” por se tratar de cálculos com valores característicos. A equação 2 traz o valor da força cortante resistente:

$$V_{rk1} = [\tau_{rd} * k * (1,2 + 40 \rho_1)] * b_w * d \quad (2)$$

Em que:

$\tau_{rd} = 0,25 * f_{ctk}$, sendo ele a tensão resistente do concreto ao cisalhamento;

$k = |1,6 - d| \geq 1$ coeficiente;

$\rho_1 = \frac{A_{s1}}{b_w * d} \leq 0,02$, sendo A_{s1} referente á armadura de tração na laje;

b_w é a largura mínima da seção ao longo da altura útil d ;

d é a altura útil da peça;

Aqui entram duas particularidades das lajes ensaiadas, nas lajes tipo 2, por não ter armadura inferior, o valor de altura útil foi igual à altura total da laje. E também por isso, o valor de ρ_1 é igual à zero nas equações. Logo, essas lajes foram enquadradas como concreto simples, sendo a tensão resistente dada pelo item 24.5.2.4, expressa na equação 3

$$\tau_{rk} = 0,3 * f_{ctk} \quad (3)$$

O item 8.2.5 traz que $f_{ctk} = 0,9 * f_{ct,sp}$, sendo que esse valor é dado na tabela 2, pelo ensaio de tração por compressão diametral no concreto, em que é igual a 1,59 MPa. Logo, para se ter o valor da parcela resistiva em termos de força, basta multiplicar o valor da tensão pela área da seção transversal, dada por $b_w * d$. Onde a equação 4 mostra o resultado final aplicado do que foi chamado de V_{rk} para essas lajes.

$$V_{rk} = 0,3 * 0,9 * f_{ct,exp} * b_w * d \quad (4)$$

Na tabela 11 é apresentado o resumo dos valores obtidos a partir da aplicação destas equações. Sendo que os valores de V_{rk1} são da cortante no apoio, e na tabela 5, os valores apresentados chamados de V_{anali} dizem respeito à força na laje que geraria tal reação de apoio, sendo calculadas para estarem na mesma posição da força experimental aplicada e assim poder comparar os dados.

Tabela 11 – Cálculos verificação força cortante NBR6118:2014

Laje	H (cm)	d (cm)	k	ρ_1	V_{rk1} (kN)	V_{rk} (kN)	V_{rk1} final (kN)
LA1	8,00	5,25	1,5475	0,0032	27,03	*	27,0
LA2	8,00	8	1,0000	0,0000	33,66	24,04	24,0
LA3	8,00	5,25	1,5475	0,0032	37,84	*	37,8

LB1	11,00	8,25	1,5175	0,0031	58,06	*	58,1
LB2	11,00	11	1,0000	0,0000	46,28	33,06	33,1
LB3	11,00	8,25	1,5175	0,0031	58,06	*	58,1
LC1	14,00	11,25	1,4875	0,0027	76,82	*	76,8
LC2	14,00	14	1,0000	0,0000	58,91	42,07	42,1
LC3	14,00	11,25	1,4875	0,0027	76,82	*	76,8

Fonte: Autor (2023)

APÊNDICE B – CÁLCULO DA PUNÇÃO NBR6118:2014

A tensão solicitante em ambos os contornos é dada pelo item 19.5.2.1 da NBR6118:2014, demonstrada na equação 5.

$$\tau_{Sk} = \frac{Fsk}{u * d} \quad (5)$$

Em que:

Fsk é a força aplicada característica na laje;

d é a altura útil da laje ao longo do contorno crítico;

u é o perímetro do contorno crítico.

Já a parcela resistente é determinada pelo item 19.5.3.1 (equação 6) e item 19.3.5.2 (equação 7), para os contornos C e C', respectivamente.

$$\tau_{Rk2} = 0,27 * \alpha v * fck, \text{ o coeficiente de segurança } \alpha v \text{ não será aplicado} \quad (6)$$

$$\tau_{Rk1} = 0,13 * \left(1 + \sqrt{20/d}\right) * (100 * \rho * fck)^{2/3} \quad (7)$$

Em que ρ é a taxa geométrica da armadura de flexão, logo nas lajes tipo 2 esse valor é zero. Sendo essas lajes foram enquadradas como concreto simples, sendo a tensão resistente dada pelo item 24.5.2.6, expressa na equação 8

$$\tau_{rk} = 0,3 * fctk \quad (8)$$

O item 8.2.5 traz que $fctk=0,9*fct,sp$, sendo que esse valor é dado na tabela 2, pelo ensaio de tração por compressão diametral no concreto, em que é igual a 1,59 MPa. Logo a tensão resistente a punção nesse contorno é definida com os valores acima, sendo o valor de força resistente dado na tabela 6 expresso na equação 9.

$$V_{rk} = 0,3 * 0,9 * fct,exp * bw * d \quad (9)$$

Na tabela 12 é apresentado os cálculos e resultados obtidos sobre o funcionamento das lajes. Na tabela 6, os valores de tensão τ_{rk} são convertidos para força V_{anali} , para fazer comparação com os valores experimentais.

Tabela 12 – cálculo punção nas lajes NBR6118:2014

Laje	h (cm)	d (cm)	Contorno C			Contorno C'				
			U (Cm)	$\tau_{sk\ exp}$ (kN/cm ²)	τ_{rk2} (kN/cm ²)	U (Cm)	$\tau_{sk\ exp}$ (kN/cm ²)	τ_{rk1} (kN/cm ²)	τ_{rk} (kN/cm ²)	$\tau_{rk\ 1\ final}$ (kN/cm ²)
LA1	8	5,25	140	0,136	0,796	70	0,272	0,0705	*	0,0705
LA2	8	8	140	0,037	0,796	70	0,074	0,0000	0,043	0,0429
LA3	8	5,25	140	0,167	0,796	70	0,334	0,0705	*	0,0705
LB1	11	8,25	140	0,096	0,796	70	0,192	0,0629	*	0,0629
LB2	11	11	140	0,029	0,796	70	0,057	0,0000	0,043	0,0429
LB3	11	8,25	140	0,116	0,796	70	0,232	0,0629	*	0,0629
LC1	14	11,25	140	0,088	0,796	70	0,176	0,0565	*	0,0565
LC2	14	14	140	0,029	0,796	70	0,058	0,0000	0,043	0,0429
LC3	14	11,25	140	0,126	0,796	70	0,252	0,0565	*	0,0565

Fonte: Autor (2023)

APÊNDICE C – CÁLCULO DO MOMENTO FLETOR RESISTENTE

1 Laje LA1

Os cálculos desse tópico foram desenvolvidos para a laje LA1, sendo análogos para as lajes LB1 e LC1, mudando apenas os valores de altura e armadura.

Se tem que:

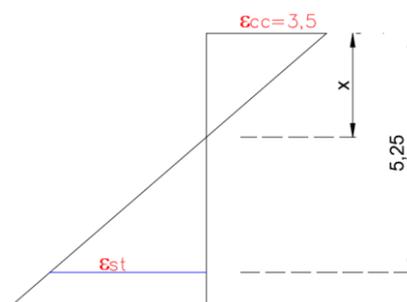
$$A_{st} = 1,2\text{cm}^2$$

Admitindo essa armadura sendo levada a ruptura, sua tensão é de 536,08 MPa, logo:

$$R_{st} = 1,2 * 53,608 = 64,33\text{ kN}$$

Admitindo que a peça está no limite entre domínio 3 e 4 de deformação, o concreto tem uma deformação de 3,5‰ e um limite na tensão de 29,47 MPa, logo temos a imagem 10 a seguir

Figura 10 – deformação da seção LA1



Admitindo essa armadura sendo levada a ruptura, sua tensão é de 536,08 MPa, logo:

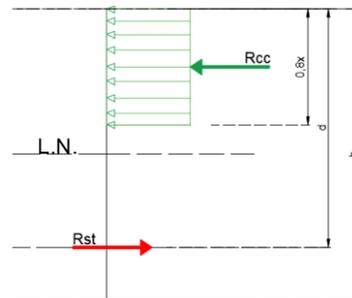
$$\epsilon_{st} = \epsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} = \frac{53,608}{21000} * 10^3 = 2,55\text{‰}$$

Fazendo uma semelhança de triângulos temos a posição da linha neutra:

$$\frac{3,5\text{‰}}{x} = \frac{2,55\text{‰} + 3,5\text{‰}}{5,25} \rightarrow x = 3,04\text{cm}$$

Com todos os parâmetros da figura 11 sendo conhecidos, pode se calcular o momento fletor por meio de equilíbrio de forças.

Figura 11 – forças na seção LA1



Fazendo o momento fletor em relação à componente resistida pelo concreto:

$$R_{cc} = f_c * 0,8 * x * b_w = 2,947 * 0,8 * 3,04 * 70 = 501,00 \text{ kN}$$

$$M_{r_{R_{cc}}} = R_{cc} * \left(d - \frac{0,8 * x}{2} \right) = 501,00 * \left(5,25 - \frac{0,8 * 3,04}{2} \right) = 2021,89 \text{ kN.cm}$$

Fazendo o momento fletor em relação à componente resistida pelo aço:

$$M_{r_{R_{st}}} = R_{st} * \left(d - \frac{0,8 * x}{2} \right) = 64,33 * \left(5,25 - \frac{0,8 * 3,04}{2} \right) = 259,61 \text{ kN.cm}$$

O momento fletor resistente analítico é dado pelo menor dos dois valores, logo:

$$\therefore M_{analítico} = 2,596 \text{ kN.m}$$

2 Laje LA2

Os cálculos desse tópico foram desenvolvidos para a laje LA2, sendo análogos para as lajes LB2 e LC2, mudando apenas os valores de altura e armadura. A peça foi verificada pelos critérios do estágio II.

Inicialmente é feita a homogeneização da seção, simulando que a área de aço fosse feita de concreto. Para isso é necessário a relação entre os módulos de elasticidade entre aço e concreto.

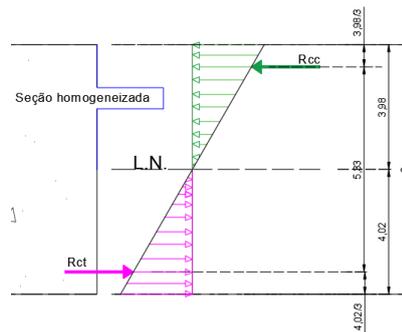
$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cs}} = \frac{210000}{34830} = 6,03$$

Calculando agora a posição da linha neutra da peça, considerando $A_{st}=0$ e $A_{sc}=1,2 \text{ cm}^2$.

$$\begin{aligned} \frac{b_w * x^2}{2} + \alpha_e * A_{sc} * (x - d) - \frac{b_w}{2} * (h - x)^2 &= 0 \\ \frac{70 * x^2}{2} + 6,03 * 1,2 * (x - 2,75) - \frac{70}{2} * (8 - x)^2 &= 0 \\ \therefore x &= 3,98 \text{ cm} \end{aligned}$$

Na figura 12 tem-se o balanço de forças da seção transversal.

Figura 12-forças na seção LA2



Sendo a força R_{ct} dada pela resistência a tração do concreto:

$$f_{ct} = 1,59 \text{ MPa}$$

$$R_{ct} = \frac{f_{ct} * bw * (h - x)}{2} = \frac{1,59 * 4,02 * 0,159}{2} = 22,37 \text{ kN}$$

O momento fletor resistente analítico vai estar relacionado a parcela R_{ct} do balanço de forças, visto que a resistência a tração do concreto é bem inferior à compressão. Logo:

$$M, \text{ analítico} = 22,37 * 5,33 = 119,24 \text{ kN}$$

3 Laje LA3

Os cálculos desse tópico foram desenvolvidos para a laje LA3, sendo análogos para as lajes LB3 e LC3, mudando apenas os valores de altura e armadura. A peça foi verificada pelos critérios do limite entre o domínio 3 e 4.

Se tem que:

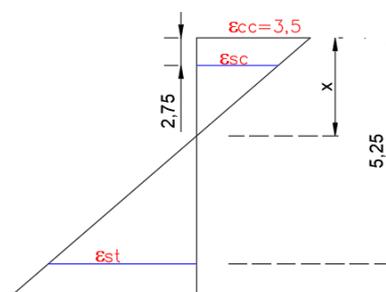
$$A_{st} = 1,2 \text{ cm}^2 \text{ e } A_{sc} = 1,2 \text{ cm}^2$$

Admitindo essa armadura sendo levada a ruptura, sua tensão é de 536,08 MPa, logo:

$$R_{st} = 1,2 * 53,608 = 64,33 \text{ kN}$$

Admitindo que a peça está no limite entre o domínio 3 e 4 de deformação, o concreto tem uma deformação de 3,5‰ e um limite na tensão de 29,47 MPa, logo temos a imagem 13 a seguir

Figura 13 – deformação da seção LA3



Admitindo essa armadura sendo levada a ruptura, sua tensão é de 536,08 MPa, logo:

$$\epsilon_{st} = \epsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} = \frac{53,608}{21000} * 10^3 = 2,55\text{‰}$$

Fazendo uma semelhança de triângulos temos a posição da linha neutra:

$$\frac{3,5\text{‰}}{x} = \frac{2,55\text{‰} + 3,5\text{‰}}{5,25} \rightarrow x = 3,04\text{cm}$$

Com outra semelhança de triângulos temos o valor da deformação da armadura de superior:

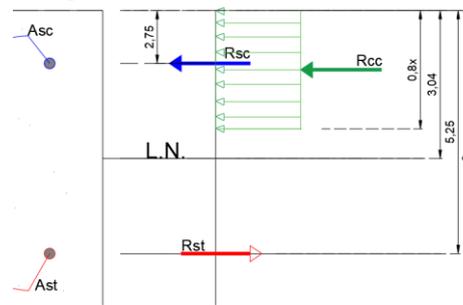
$$\frac{3,5\text{‰}}{3,04} = \frac{\varepsilon_{sc}}{3,04 - 2,75} \rightarrow \varepsilon_{sc} = 0,33\text{‰}$$

A deformação de escoamento do aço foi de 2,55‰, e por se tratar do trecho elástico linear, a obtenção da tensão no aço a partir da deformação ε_{sc} é simples. Nesse caso o valor de $f_{yc} = 63,6$ MPa. Logo:

$$R_{sc} = 6,36 * 1,2 = 7,47 \text{ kN}$$

Na figura 14 tem se

Figura 14 – forças na seção LA3



Fazendo o momento fletor em relação à componente resistida pelo concreto:

$$R_{cc} = f_c * 0,8 * x * b_w = 2,947 * 0,8 * 3,04 * 70 = 501,00 \text{ kN}$$

$$M_{r_{R_{cc}}} = R_{cc} * \left(d - \frac{0,8 * x}{2} \right) + R_{sc} * (d - d')$$

$$M_{r_{R_{cc}}} = 501,00 * \left(5,25 - \frac{0,8 * 3,04}{2} \right) + 8,32 * (5,25 - 2,75) = 2040,572 \text{ kN.cm}$$

Fazendo o momento fletor em relação à componente resistida pelo aço:

$$M_{r_{R_{st}}} = R_{st} * \left(d - \frac{0,8 * x}{2} \right) + R_{sc} * \left(d' - \frac{0,8 * x}{2} \right)$$

$$M_{r_{R_{st}}} = 64,33 * \left(5,25 - \frac{0,8 * 3,04}{2} \right) = 265,678 \text{ kN.cm}$$

O momento fletor analítico resistente é dado pelo menor dos dois valores, logo:

$$\therefore M_{analítico} = 2,657 \text{ kN.m}$$

As tabelas 13,14 e 15 trazem os valores dos cálculos feitos para as lajes.

Tabela 13 – momento fletor em laje tipo 1

Laje	h (cm)	Ast (cm ²)	Rst (kN)	εcc(‰)	εst(‰)	x (cm)	Mr ast (kN.cm)	Rcc (kN)	Mr Rcc (kN.cm)	M, analítico(kN.cm)	M, exp (kN.cm)	Verificação
LA1	8	1,18	63,26	3,5	2,553	3,04	255,3	501,0	2021,9	255,3	756,5	M, analit<M,exp
LB1	11	1,77	94,89	3,5	2,553	4,77	601,7	787,3	4992,8	601,7	1132,5	M, analit<M,exp
LC1	14	2,15	115,26	3,5	2,553	6,51	996,7	1073,6	9284,2	996,7	1750,5	M, analit<M,exp

Fonte: Autor (2023)

Tabela 14 – momento fletor em laje tipo 2

Laje	h (cm)	Asc (cm ²)	x (cm)	Rct (kN)	Mr ret (kN.cm)	M, exp (kN.cm)	Verificação
LA2	8	1,18	<u>3,98</u>	22,4	119,3	317,8	M, analit<M,exp
LB2	11	1,77	<u>5,46</u>	30,8	226,1	458,1	M, analit<M,exp
LC2	14	2,15	<u>6,94</u>	39,3	366,7	730,6	M, analit<M,exp

Fonte: Autor (2023)

Tabela 15 – momento fletor em laje tipo 3

Laje	h (cm)	Ast (cm ²)	Asc (cm ²)	Rst (kN)	εcc(‰)	εst(‰)	x (cm)	εsc(‰)	σ Rsc (kN/cm ²)	Rsc (kN)	Mr ast (kN.cm)	Rcc (kN)	Mr Rcc (kN.cm)	M, analítico (kN.cm)	M, exp (kN.cm)	Verificação
LA3	8	1,2	1,2	63,26	3,5	2,553	3,04	0,330	6,4	7,5	266,8	501,0	2040,7	266,8	929,0	M, analit<M,exp
LB3	11	1,8	1,8	94,89	3,5	2,553	4,77	1,482	28,6	50,6	644,4	787,3	5271,3	644,4	1363,0	M, analit<M,exp
LC3	14	2,2	2,2	115,26	3,5	2,553	6,51	2,020	39,0	83,8	1009,1	1073,6	9996,7	1009,1	2498,9	M, analit<M,exp

Fonte: Autor (2023)

APÊNDICE D – CÁLCULO DA FORÇA CORTANTE ACI 318-19

O cálculo da força cortante resistente nas lajes é dado pelo item 22.5.5.1, cuja as equações estão na figura 15.

Figura 15 – equações para cortante ACI318-19

Criteria	V_c		
$A_v \geq A_{v,min}$	Either of:	$\left[2\lambda\sqrt{f'_c} + \frac{N_u}{6A_g} \right] b_w d$	(a)
		$\left[8\lambda(\rho_w)^{1/3} \sqrt{f'_c} + \frac{N_u}{6A_g} \right] b_w d$	(b)
$A_v < A_{v,min}$		$\left[8\lambda\lambda(\rho_w)^{1/3} \sqrt{f'_c} + \frac{N_u}{6A_g} \right] b_w d$	(c)

Fonte: ACI (2019)

Em que:

$\lambda = 1$, fator redutor para concreto leve;

$f'_c = 0,8 * 29,47 = 23,58 \text{ MPa}$, correção necessária visto a mudança dos corpos de prova;

$\frac{N_u}{6A_g}$ será desconsiderada, por se tratar de força axial, e não termos essa força na laje;

$\lambda_s = \sqrt{\frac{2}{1+d/10}} \leq 1$, é chamado de fator de forma, item 22.5.5.1.3;

$\rho_w = \frac{A_s}{b_w * d}$, taxa de armadura efetiva;

b_w é a largura da seção transversal e d é a altura útil da seção.

Ademais, ela traz como critério a área de aço de tração da peça, sendo o mínimo dado pela equação 10:

$$A_s, \min = 0,0018 * A_g, \text{ item 8.6.1.1 da norma} \quad (10)$$

O parâmetro de área de aço mínima determina qual equação usar, e principalmente para as lajes tipo 2, em que, por não terem armadura inferior efetiva, se considerou o mínimo da norma para termos parâmetros de comparação. Sendo assim, o valor de d aqui é diferente de h . Como todas as peças apresentaram área de aço maior ou igual à mínima, a equação 22.5.5.1.c, não foi utilizada. Na tabela 16 é apresentada os resultados gerais de cálculo. Sendo que os valores de $V_c \text{ final}$ são da cortante no apoio, e na tabela 8, os valores apresentados chamados de $V \text{ anali}$ dizem respeito à força na laje que geraria tal reação de apoio.

Tabela 16 – Cálculos verificação força cortante ACI318-19

Laje	H (m)	As,min (cm ²)	As, real (cm ²)	As, calc (cm ²)	d (m)	ρ_w	λ_s	Vc (kN) eq. 22.5.5.1a	Vc (kN) eq. 22.5.5.1.b	Vc final(kN)
LA1	0,08	1,0	1,2	1,2	0,0525	0,0032	1	30,335	17,374	17,374

LA2	0,08	1,0	0,0	1,0	0,0525	0,0027	1	30,335	16,486	16,486
LA3	0,08	1,0	1,2	1,2	0,0525	0,0032	1	30,335	17,374	17,374
LB1	0,11	1,4	1,8	1,8	0,0825	0,0031	1	47,669	26,883	26,883
LB2	0,11	1,4	0,0	1,4	0,0825	0,0024	1	47,669	24,778	24,778
LB3	0,11	1,4	1,8	1,8	0,0825	0,0031	1	47,669	26,883	26,883
LC1	0,14	1,8	2,2	2,2	0,1125	0,0027	1	65,003	35,272	35,272
LC2	0,14	1,8	0,0	1,8	0,1125	0,0022	1	65,003	33,020	33,020
LC3	0,14	1,8	2,2	2,2	0,1125	0,0027	1	65,003	35,272	35,272

Fonte: Autor (2023)

APÊNDICE E – CÁLCULO DA PUNÇÃO ACI 318-19

O cálculo da força cortante resistente nas lajes é dado pelo item 22.6.5.2, cuja as equações estão na figura 16.

Figura 16 – equações para punção ACI

v_c		
Least of (a), (b), and (c):	$4\lambda_s\lambda\sqrt{f'_c}$	(a)
	$\left(2 + \frac{4}{\beta}\right)\lambda_s\lambda\sqrt{f'_c}$	(b)
	$\left(2 + \frac{\alpha_s d}{b_o}\right)\lambda_s\lambda\sqrt{f'_c}$	(c)

Fonte: ACI (2019)

O valor da tensão resistente é o menor entre os resultados da tabela acima. Os parâmetros λ , λ_s , f'_c são os mesmo que foram definidos no Apêndice D. Ademais:

$\alpha = 30$, definido como valor para extremidade;

β = Relação entre maior e menor lado de pilar retangular.

b_o : Perímetro de punção

Na tabela 17 são apresentados os resultados do equacionamento dessa verificação. Na tabela 9, os valores de tensão v_c final são convertidos para força V anali, para fazer comparação com os valores experimentais.

Tabela 17 – cálculo punção nas lajes ACI318-19

Laje	H (m)	d (m)	vu (MPa)	λ_s	eq. 22.6.5.2.a	eq. 22.6.5.2.b	eq. 22.6.5.2.c	Final
					vc (MPa)	vc (MPa)	vc (MPa)	vc (MPa)
LA1	0,08	0,0525	1,358	1	1,602	1,061	1,259	1,061
LA2	0,08	0,08	0,369	1	1,602	1,061	1,497	1,061
LA3	0,08	0,0525	1,670	1	1,602	1,061	1,259	1,061
LB1	0,11	0,0825	0,962	1	1,602	1,061	1,518	1,061
LB2	0,11	0,11	0,287	1	1,602	1,061	1,756	1,061
LB3	0,11	0,0825	1,160	1	1,602	1,061	1,518	1,061
LC1	0,14	0,1125	0,878	1	1,602	1,061	1,778	1,061
LC2	0,14	0,14	0,289	1	1,602	1,061	2,015	1,061
LC3	0,14	0,1125	1,259	1	1,602	1,061	1,778	1,061

Fonte: Autor (2023)

Sendo a tensão solicitante dada pela equação 11:

$$vu = Vd/b_{os} * d, \text{ onde, } Vd \text{ é a força solicitante, } d \text{ é a altura útil e } b_{os} \text{ o subperímetro de punção.} \quad (11)$$