Universidade Federal de Uberlândia - UFU
Faculdade de Matemática - FAMAT
Coordenação dos Cursos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso

Cálculo Discreto, Somatórios e Progressão Aritmética de Ordem Superior

Aluno: Aloisio da Silva Teixeira

Orientadora: Profa. Dra. Ligia Laís Fêmina

Aloisio da Silva Teixeira

Cálculo Discreto, Somatórios e Progressão Aritmética de Ordem Superior

Trabalho apresentado à Faculdade de Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Matemática

Universidade Federal de Uberlândia – UFU
Faculdade de Matemática

Uberlândia-MG
2023

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

T266
2023

Teixeira, Aloisio da Silva, 1971-
Cálculo Discreto, Somatórios e Progressão Aritmética de Ordem Superior [recurso eletrônico] / Aloisio da Silva Teixeira. - 2023.

Orientadora: Ligia Laís Fêmina.
Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Uberlândia, Graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Inclui bibliografia.

1. Matemática. I. Fêmina, Ligia Laís,1983-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

Universidade Federal de Uberlândia - UFU
Faculdade de Matemática - FAMAT
Coordenação dos Cursos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática

A banca examinadora, conforme abaixo assinado, certifica a adequação deste trabalho de conclusão de curso para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Uberlândia, 25 de janeiro de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof(a). Dra. Ligia Laís Fêmina

Prof(a). Dra. Francielle Rodrigues Coelho

Prof(a). Dra. Taciana Oliveira Souza

Uberlândia-MG
2023

Agradecimentos

Agradeço ao Criador do Universo, Ciência Máxima em todas as esferas de realidade pois, na nossa concepção, somos agraciados com uma fagulha de Sua inteligência e outras qualidades necessárias para o sucesso, entre elas, saúde do corpo e da mente.

Aos meus pais, José Moacir Teixeira e Maene da Silva Teixeira, que não mediram esforços para minha educação. São exemplos definitivos para mim de dedicação, persistência e amor.

À minha esposa, Ana Paula Marques da Silva Teixeira que, depois do meu afastamento por um longo período dos estudos devido a carreira militar, me colocou no caminho certo, caminhando ao meu lado na formação acadêmica. A mesma também é estudante da UFU.

À minha orientadora Ligia Laís Fêmina, pelas orientações e pelas sugestões relativas ao presente trabalho.

A cada um dos meus professores da faculdade, pilares da minha formação, facetas marcantes e inesquecíveis de personalidade e profissionalismo cujos ingredientes disciplinares me permitem parafrasear Isaac Newton: "Se eu ver mais longe, é porque apoiei-me em ombros de doutores".

"O que sabemos é uma gota, o que ignoramos é um oceano.
Mas o que é o oceano senão um infinidade de gotas?"
Isaac Newton

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo sugerir uma teoria básica para o estudo da progressão aritmética de ordem superior. Este tipo de progressão é equivalente à uma sequência polinomial, ou seja, uma progressão aritmética de ordem p é equivalente à uma sequência polinomial de grau p. Para este tipo de abordagem, a forma canônica dos polinômios se torna inadequada em face da forma racional. Serão usadas as ferramentas de Cálculo Discreto chamadas de diferença finita e sua inversa operacional, as quais neste trabalho serão denominadas de derivada discreta e integral discreta, respectivamente. Será apresentado que a soma telescópica nada mais é do que uma integral discreta definida nos seus limites.

Palavras-chave: Cálculo Discreto, sequências, progressões, somatórios, polinômios, diferença finita.

Abstract

The present work aims to suggest a basic theory for the study of higher order arithmetic progression. This type of progression is equivalent to a polynomial sequence, that is, an arithmetic progression of order p is equivalent to a polynomial sequence of degree p. For this type of approach, the canonical form of polynomials becomes inadequate in the face of the rational form. Discrete calculation tools called finite difference and its operational inverse will be used, which in this work will be called discrete derivative and discrete integral, respectively. It will be shown that the telescopic sum is nothing more than a discrete integral defined in its limits.

Keywords: Discrete Calculus, sequences, progressions, summations, polynomials, finite difference.

Sumário

Introdução

A progressão aritmética (PA) é ensinada no ensino médio como uma sequência sem levar em conta os conceitos de diferença finita e de polinômio. Mas a PA ordinária é uma função de primeiro grau na sua variável independente, em suma, é uma função polinomial de grau um, com domínio restrito aos inteiros. Considerar uma função polinomial como uma progressão aritmética de ordem superior é outra maneira de estudarmos as propriedades destas funções.

O presente trabalho tem como objetivo sugerir uma teoria básica para o estudo da progressão aritmética de ordem superior. Este tipo de progressão é equivalente à uma sequência polinomial, ou seja, uma progressão aritimética de ordem p é equivalente à uma sequência polinomial de grau p. Para este tipo de abordagem, a forma canônica dos polinômios se torna inadequada em face da forma racional.

Serão usadas as ferramentas de Cálculo Discreto chamadas de diferença finita e sua inversa operacional. Neste trabalho, denominaremos de derivada discreta e integral discreta, respectivamente. Veremos que a chamada soma telescópica nada mais é do que uma integral discreta definida nos seus limites.

Para justificar a forma racional de uma progressão aritmética (PA) de ordem p é necessário o conceito de base de um espaço vetorial.

No **capítulo 1** temos um breve resumo da teoria básica de espaço vetorial e estabelece-se os pilares, ou base racional de uma PA de ordem p. A principal referência deste capítulo é [1].

Como o objeto de estudo do Cálculo Discreto são as sequências, um resumo sobre as principais definições e proposições sobre estas funções são fornecidas no **capítulo 2**, para maiores detalhes consulte [6] e [11].

No **capítulo 3** os operadores discretos são introduzidos, ou seja, a derivada discreta e a integral discreta. Desde o capítulo 1, a notação binomial combinativa $\binom{n}{p} = \frac{n}{p!}(n-1)(n-2)...[n-(p-1)]$ é interpretada como um polinômio de grau p na variável n. Ênfase para a integral discreta por partes. A base para o desenvolvimento deste capítulo está em [7].

No **capítulo 4** é definido a forma racional do termo geral de uma PA de ordem p, um meio para achar os coeficientes usando os $p+1$ primeiros valores desta sequência. Veremos também a soma dos n primeiros termos de uma PA de ordem p. A base para o desenvolvimento deste capítulo está em [2], [3] e [7].

E no **capítulo 5** consta uma interessante aplicação dos conceitos abordados.

Veremos o processo para achar o limite

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(n)}{A^n},$$

onde $p(n)$ é um polinômio de grau $g \geq 1$ e $|A| > 1$. As principais referências são [2], [3] e [7].

1 Espaço Vetorial

Neste capítulo, apresenta-se um resumo dos principais conceitos e elementos da Álgebra Linear. Ao final, considera-se uma nova base para o espaço vetorial dos polinômios de grau $\leq p$, mais maleável para o estudo das progressões polinomiais de diversas ordens. A principal referência é [1].

Definição 1.1. Seja V um conjunto não vazio com as seguintes operações. Adição e multiplicação por escalar. Dados $u, v \in V$, a operação adição associa cada par (u, v) à soma $u + v \in V$. E dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $t \in V$, a operação multiplicação por escalar associa cada par (α, t) ao resultado $\alpha.t \in V$. Nestas condições, V é um **espaço vetorial sobre** $\mathbb{R}$ se estas operações são regradas por oito propriedades, quatro relativos a adição (A) e quatro relativos a multiplicação por escalar (M), como se segue.

Dados $u, v, w \in V$ e $1, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos que

$A1$. $u + v = v + u$ (comutativa)

$A2$. $u + (v + w) = (u + v) + w$ (associativa)

$A3$. $\exists o \in V$, tal que $u + o = u$ (elemento neutro)

$A4$. $\exists(-u) \in V$ tal que $u + (-u) = o$ (elemento oposto)

$M1$. $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$

$M2$. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

$M3$. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

$M4$. $1u = u$

Definição 1.2. **Vetor** é um elemento do espaço vetorial.

Com as propriedades das operações, prova-se as seguintes **propriedades do espaço vetorial**.

Dados $o, u, (-u), v \in V$ e $0, 1, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos que

P1. O elemento neutro o é único em V.

Prova. Suponha que exista pelo menos um segundo elemento neutro o' em V tal que $o' \neq o$. Logo, $o = o + o' = o' + o = o'$.

P2. O elemento oposto $(-u)$ de u é único em V.

Prova. Se existisse um segundo elemento oposto $(-u)' \neq (-u)$ em V teríamos $u + (-u)' = o$ e, portanto, $(-u) = (-u) + o = (-u) + (u + (-u)') = ((-u) + u) + (-u)' = o + (-u)' = (-u)'$.

P3. $\alpha o = o$

Prova. Conforme as propriedades $A3$ e $M3$ de espaço vetorial temos que $\alpha o = \alpha(o) + o = \alpha o + \alpha o$. Somamos agora o vetor $-(\alpha o)$ a ambos os membros da igualdade da igualdade para obter $o = -(\alpha o) + \alpha o = -\alpha o + \alpha o + \alpha o = o + \alpha o = \alpha o$

P4. $0u = o$

Prova. Semelhante à anterior.

P5. $\alpha u = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $u = o$

P6. $(-\alpha)u = \alpha(-u) = -(\alpha u)$

P7. $u - v = u + (-v)$ e $(\alpha - \beta)u = \alpha u - \beta u$

P8. $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$

As demonstrações das propriedades de P5 a P8 podem ser consultadas em [1].

Exemplo 1.3. O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$.

O $\mathbb{R}^n$ é o conjunto composto por n-uplas ordenadas $(a_1, a_2, ..., a_n)$ com $a_i \in \mathbb{R}$ e $i = 1, 2, ..., n$. Cada elemento deste conjunto normalmente é chamado de ponto do $\mathbb{R}^n$.

Sejam $x = (x_1, x_2, ...x_n)$ e $y = (y_1, y_2, ...y_n)$ dois pontos do $\mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. A soma $x + y$ e o produto αx estão bem definidos em $\mathbb{R}^n$ e são expressos por

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + ... + x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n,$$
$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Como estas operações possuem todas as propriedades da definição de espaço vetorial, $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial e os pontos do $\mathbb{R}^n$ também são chamados de vetores do $\mathbb{R}^n$.

O elemento neutro do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ é $o = (0, 0, ...0)$ e dado $u = (u_1, u_2, ...u_3) \in \mathbb{R}^n$ seu elemento oposto é $-u = (-u_1, -u_2, ..., -u_n) \in \mathbb{R}^n$.

Observação 1.4. Em particular, quando $n = 1$ temos que $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre ele mesmo.

Exemplo 1.5. O conjunto das matrizes $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ de entradas reais e com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.6. O conjunto $P_p(\mathbb{R})$ dos polinômios com coeficientes reais e de grau $\leq p$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.7. O conjunto dos vetores da Geometria Analítica, ou seja, o conjunto dos segmentos orientados caracterizados por módulo, direção e sentido, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.8. O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ equivalente ao espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

Definição 1.9. Subespaço vetorial. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um subespaço vetorial de V é um subconjunto $S \subset V$, tal que

I - $o \in S$;

II - $\forall u, v \in S$, $u + v \in S$;

III - $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, e $u \in S$, $\alpha u \in S$.

Apenas verificados estes três itens, se pode comprovar que S é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Em qualquer espaço vetorial V existem dois subespaços vetoriais triviais ou impróprios de V que são o próprio V e o conjunto unitário $\{o\}$.

O principal exemplo de subespaço vetorial S contido em um espaço vetorial V é o conjunto das **combinações lineares** de elementos de um subconjunto $A \subset V$.

Exemplo 1.10. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ um subconjunto de V. O conjunto das combinações lineares com coeficientes reais $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ que podemos fazer com os elementos de A é indicado como

$$[A] = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n : \alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

Vamos provar que, de fato, $[A]$ é um subespaço vetorial de V conforme a definição 1.9.

I - Como $o = 0v_1 + 0v_2 + ... + 0v_n$, então $o \in [A]$.

II - Sejam $w_1, w_2 \in [A]$ tais que $w_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$ e $w_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_n v_n$. Veja que $w_1 + w_2 = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + (\alpha_2 + \beta_2)v_2 + ... + (\alpha_n + \beta_n)v_n$ também pertence à $[A]$.

III - Sejam $\gamma \in \mathbb{R}$ e $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$ em $[A]$. Segue que $\gamma w = (\gamma\alpha_1)v_1 + (\gamma\alpha_2)v_2 + ... + (\gamma\alpha_n)v_n$ também pertence a $[A]$.

Definição 1.11. Espaço vetorial finitamente gerado. Sabemos que um subespaço vetorial também é um espaço vetorial em $\mathbb{R}$. Quando um espaço vetorial V é a combinação linear de um número finito de elementos de um subconjunto S deste espaço, dizemos que V foi finitamente gerado por S e indicamos $V = [S]$.

Definição 1.12. Dependência linear. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $L = \{u_1, u_2, ..., u_n\} \subset V$. Dizemos que L é linearmente independente (L.I) se, e somente se, a igualdade

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_1 + ... + \alpha_n u_n = o$$

com os α_i em $\mathbb{R}$, só é possível com $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Em caso contrário, dizemos que L é linearmente dependente.

Definição 1.13. Base de um espaço vetorial finitamente gerado. Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Uma base de V é um subconjunto finito B de V onde se verifica:

I - $[B] = V$,

II - B é linearmente independente.

Proposição 1.14. *Todo espaço vetorial finitamente gerado admite uma base.*

Demonstração: [1].

Teorema 1.15. ***Invariância.*** *Duas bases quaisquer de um espaço vetorial finitamente gerado têm o mesmo número de vetores.*

Demonstração: [1].

Definição 1.16. Dimensão. Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Dimensão de V e indica-se por dim V é o número de vetores de uma qualquer de suas bases. No caso, dizemos que V tem **dimensão finita**.

Exemplo 1.17. Seja $(x_1, x_2, ..., x_n)$ um vetor do $\mathbb{R}^n$. Designando o vetor $(0, 0, ..., 1, ..0)$ por e_i, onde o componente 1 se encontra na i-ésima posição, com $i = 1, 2, ...n$, temos que

$$(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$$

Logo, $(x_1, x_2, ..., x_n)$ é uma combinação linear dos elementos do conjunto $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ e como abrange todo o $\mathbb{R}^n$, este conjunto L.I é uma base do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. E é conhecido como base canônica de $\mathbb{R}^n$ em face das infinitas bases que este espaço tem. Por exemplo, como $F = \{(1, 2, 3), (-1, 0, 1), (7, 7, 7)\}$ é L.I. e também gera todo o $\mathbb{R}^3$, temos que o conjunto F é outra base de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 1.18. Qualquer polinômio de grau $\leq p$ é da forma

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_p t^p$$

com $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ...p$ e para todo $t \in \mathbb{R}$.

Pelo princípio da identidade dos polinômios, $p(t)$ é idêntico ao polinômio nulo se, e somente se, $a_0 = a_1 = ... = a_p = 0$ (consulte [4]). Isso é garantia que o conjunto com $p + 1$ elementos $T = \{1, t, t^2, ..., t^p\}$ é L.I. e como a combinação linear de seus elementos generaliza todos os polinômios de grau $\leq p$, temos que, conforme a definição 1.13, T é uma base para o espaço vetorial dos polinômios reais $P_p(\mathbb{R})$.

Definição 1.19. Dados dois polinômios $p_1(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_p t^p$ e $p_2(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + ... + b_p t^p$ chama-se soma de $p_1(t)$ com $p_2(t)$ o polinômio

$$(p_1 + p_2)(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + ... + (a_p + b_p)t^p.$$

Observação 1.20. O grau de um polinômio $p(t)$, ou seja, a maior potência do último termo não nulo, será representado por $\sigma(p(t))$. Por exemplo, o grau de $p(t) = 2 - 2t + 3t^5$ é $\sigma(p(t)) = 5$.

Teorema 1.21. *Se $p_1(t)$ e $p_2(t)$ são polinômios não nulos, então o grau de $p_1(t) + p_2(t)$ é menor ou igual ao maior dos números $\sigma(p_1(t))$ e $\sigma(p_1(t))$, ou seja,*

$$\sigma(p_1(t) + p_2(t)) \leq max \{\sigma(p_1(t)), \sigma(p_2(t))\}.$$

Demonstração: [4], página 66.

Observação 1.22. Seja $i \in \{0, 1, 2, ...\}$ e $t \in \mathbb{R}$. A expressão $\frac{1}{i!}(t-1)...(t-i)$ resulta em um polinômio de grau i em t. Usaremos a notação $\binom{t-1}{i}$ para este polinômio significando $\binom{t-1}{i} = 1$ para $i = 0$ e

$$\binom{t-1}{i} = \frac{1}{i!}(t-1)(t-2)...(t-i)$$

para $i \geq 1$.

Veja que se $i \geq 1$, $\binom{t-1}{i} = 0$ para $t \in \{1, 2, ..., i\}$ e $\binom{t-1}{i} \neq 0$ para t que não pertença a $\{1, 2, ..., i\}$.

Teorema 1.23. *O conjunto*

$$R = \left\{ \binom{t-1}{0}, \binom{t-1}{1}, ..., \binom{t-1}{p} \right\}$$

é uma base para o espaço vetorial $P_p(\mathbb{R})$.

Demonstração: Conforme a definição 1.13, devemos ter

I. $[R] = P_p(\mathbb{R})$. Cada um dos $p+1$ elementos de R é um polinômio de grau distinto dos demais elementos e, com isto, $[R]$ gera o espaço vetorial dos polinômios de dimensão $p+1$.

II. T é LI. Seja $\mathbb{P}(t) = 0$ o polinômio identicamente nulo. Temos que provar que a igualdade

$$\mathbb{P}(t) = \alpha_0\binom{t-1}{0} + \alpha_1\binom{t-1}{1} + \alpha_2\binom{t-1}{2} + ... + \alpha_p\binom{t-1}{p} = 0$$

só é possível, se e somente se, $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Para isto, perceba que a igualdade anterior implica em

$$\alpha_0\binom{t-1}{0} + \alpha_1\binom{t-1}{1} + \alpha_2\binom{t-1}{2} + ... + \alpha_{p-1}\binom{t-1}{p-1} = -\alpha_p\binom{t-1}{p}.$$

Suponha $\alpha_p \neq 0$ e pelo menos um $\alpha_i \neq 0$, com $0 \leq i \leq p-1$. Ora, pelo teorema 1.21 o primeiro membro da igualdade tem grau $\leq i < p$ e o segundo membro tem grau p. Absurdo. Logo, $\alpha_i = 0$, para $0 \leq i \leq p$.

2 Sequências

Neste capítulo apresenta-se a teoria básica sobre sequências, em particular, sobre progressões. Os tipos e as principais sequências são revistas, assim como suas propriedades. As operações com sequências, como soma algébrica, multiplicação, divisão, assim como o conceito de limite com essas mesmas operações são fundamentais para a teoria posterior. As principais referências são [11] e [3].

Definição 2.1. Uma sequência é uma função $f : D \subset \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, onde D é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$.

Definição 2.2. Uma progressão é uma sequência $f : D \subset \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ com $D = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

Salvo o contrário, todas as sequências deste trabalho serão progressões.

O valor $f(n)$ chama-se o n-ésimo termo ou termo geral da sequência e é indicado também por x_n. Adotaremos esta última notação para o n-ésimo termo e a notação $(x_n) = (x_1, x_2, ...)$ para indicar a sequência de mesmo termo geral.

Exemplo 2.3. A sequência de termo geral $x_n = k$, ou **sequência constante**, com $k \in \mathbb{R}$ possui todos os termos com um mesmo valor real. Indicamos $(x_n) = (k, k, ...)$.

Exemplo 2.4. A sequência cujo termo geral é $x_n = n$ é chamada de **sequência identidade**. Ela associa cada índice n ao valor do próprio índice. Indicamos $(x_n) = (1, 2, ..., n, ...)$.

Exemplo 2.5. A sequência definida por é $x_n = (-1)^n$ ou **sequência alternada** é aquela tal que $x_n = 1$, se n for par e $x_n = -1$, se n for ímpar, ou seja, $x_n = (-1, 1, -1, 1, ...)$.

Exemplo 2.6. A sequência de termo geral $x_n = \dfrac{1}{n}$ é conhecida como **sequência inversa**, $(x_n) = (\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...)$.

Exemplo 2.7. A sequência $x_n = (a, a^2, ..., a^n, ...)$, com $a \in \mathbb{R}$ é uma das mais importantes. Também conhecida como **progressão geométrica**, ela é a base para estudos mais avançados de sequências numéricas de ordem exponencial.

Exemplo 2.8. A sequência constante dada por $x_n = 1$, a sequência identidade dada por $x_n = n$ e a sequência inversa dada por $x_n = \dfrac{1}{n}$ são casos particulares da sequência mais geral definida por $x_n = n^r$, com $r \in \mathbb{R}$. Com, $r = 3$ ou $r = \dfrac{1}{2}$, temos $x_n = (1^3, 2^3, 3^3, ...)$ ou $x_n = (\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ...)$, respectivamente.

As sequências anteriormente listadas, junto com as sequências $x_n = n!$, $x_n = log(n)$ (qualquer base), $x_n = sen(n)$, $x_n = cos(n)$, $x_n = tg(n)$ e outras básicas formam sequências mais gerais por combinação linear ou não linear, soma de funções, produto de funções ou composição de funções. Por exemplo,

$$x_n = 7.\frac{3^n}{n^2 - sen(n)} + \pi.(-1)^n tg(n),$$

com $n^2 \neq sen(n)$.

Também, pode-se definir uma sequência por duas ou mais sentenças, como no caso da sequência definida por

$$x_n = \begin{cases} n!, & \text{se } 1 \leq n \leq \ 10; \\ ln(n!), & \text{n>10.} \end{cases}$$

Exemplo 2.9. A composição da sequência exponencial com a sequência constante unitária somada com a sequência inversa nos fornece a sequência de termo geral

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

que é bem conhecida na matemática financeira e nas ciências, de modo geral.

Definição 2.10. Seja (x_n) uma sequência e L um número real. Define-se:

I -

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L,$$

se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica em $|x_n - L| < \epsilon$. Neste caso, diz-se que (x_n) é uma **sequência convergente** com limite L. Usamos também a notação $x_n \to L$ ou $\lim x_n = L$. Uma sequência que não é convergente é chamada de **divergente**.

II -

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty,$$

se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n > \epsilon$.

III -

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty,$$

se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n < -\epsilon$.

Exemplo 2.11. A sequência constante $x_n = a$ é convergente.

De fato, todos os seus termos são iguais a a, é fácil provar que $lim\ x_n = a$.

Exemplo 2.12. A sequência definida por $x_n = \dfrac{1}{n}$ é convergente e seu limite é zero, isto porque para todo $\epsilon > 0$ sempre existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n_0} < \epsilon$. Daí, para todo $n \geq n_0$ temos que $|x_n - 0| = \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n_0} < \epsilon$.

Exemplo 2.13. A sequência alternada de termo geral $x_n = (-1)^n$ é divergente. Suponha que esta sequência não seja divergente e que $L \in \mathbb{R}$ seja seu limite. Tome $0 < \epsilon < 1$ e veja que no intervalo $(L - \epsilon, L + \epsilon)$ ou não contém 1 ou não contém -1 ou ambos.

Exemplo 2.14. Seja (x_n) definida recursivamente por $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, com $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$. Seus primeiros termos constam entre parênteses no segundo membro de $(x_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...)$. Esta é a **sequência de Fibonacci**, cujo nome é uma homenagem ao matemático italiano Leonardo Fibonacci $(1170 - 1250)$. Como (x_n) é definida com x_n igual a soma de dois termos anteriores que sempre são positivos, segue que o valor de cada termo cresce indefinidamente. Logo, $lim\ x_n = +\infty$. A sequência é divergente.

Teorema 2.15. *O limite de uma sequência é único, caso exista.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência e suponha $x_n \to L_1$ e $x_n \to L_2$, com $L_1 \neq L_2$. Portanto, $|L_1 - L_2| > 0$ e existem naturais n_1 e n_2 tais que

$$n > n_1 \Rightarrow |x_n - L_1| < \frac{|L_1 - L_2|}{2},$$

$$n > n_2 \Rightarrow |x_n - L_2| < \frac{|L_1 - L_2|}{2}.$$

Assim, para $n > max\{n_1, n_2\}$ temos que

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - x_n + x_n - L_2| \leq |L_1 - x_n| + |x_n - L_2| < |L_1 - L_2|$$

e chegamos em uma desigualdade absurda. Logo, $L_1 = L_2$.

Teorema 2.16. *Sejam (x_n) e (y_n) sequências com $x_n \to a \in \mathbb{R}$ e $y_n \to b \in \mathbb{R}$, respectivamente. Então,*

(a) $lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$;

(b) $lim(x_n . y_n) = a.b$;

(c) Se $y_n \neq 0$ e $b \neq 0$, temos que $lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$;

(d) Para todo $x_n > 0$, temos que $a \geq 0$;

(e) Se $x_n \leq z_n \leq y_n$ para todo n e se $a = b$, segue que $lim z_n = a$.

Demonstração. Como uma sequência é uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, a demonstração é análoga as feitas para as propriedades aritméticas dos limites de funções abordados no Cálculo I.

Exemplo 2.17. Calcular $\lim(x_n + y_n)$, com $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 8$ e $y_n = e^{\frac{1}{n}}$. Veja que $\lim x_n = 8$ e $\lim y_n = 1$. Logo, pelo teorema 2.16 (a), temos que $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n = 8 + 1 = 9$.

Exemplo 2.18. Calcular $\lim x_n$, com

$$x_n = \frac{n^3 - n^2}{7n^3 + 2n^2 + n - 1111}.$$

Observe que, com $y_n = n^3 - n^2$, $w_n = 7n^3 + 2n^2 + n - 1111$ e $x_n = y_n/w_n$, não podemos utilizar o teorema 2.16 (c), pois os limites das sequências (y_n) e (w_n) não existem tendo em vista que os valores dos termos de ambas crescem indefinidamente. Então precisamos utilizar um artifício algébrico para calcular o limite de (x_n). Primeiramente, observe que com $n \neq 0$ para todo n, temos que

$$x_n = \frac{n^3 - n^2}{7n^3 + 2n^2 + n - 1111} = \frac{n^3(1 - \frac{1}{n})}{n^3(7 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1111}{n^3})} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{7 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1111}{n^3}}.$$

Logo, $\lim x_n = \dfrac{1}{7}$.

Definição 2.19. Chama-se sequência crescente a sequência (x_n) tal que $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.20. Chama-se sequência decrescente a sequência (x_n) tal que $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.21. Chama-se sequência **monótona** a sequência (x_n) que é crescente ou decrescente.

Exemplo 2.22. Sejam os reais $p, q, r, t > 0$. Vamos analisar a sequência de termo geral $x_n = \dfrac{pn + q}{rn + t}$. Observe que

$$x_{n+1} - x_n = \frac{p(n+1) + q}{r(n+1) + t} - \frac{pn + q}{rn + t} = \frac{pt - qr}{(rn + t)(rn + r + t)}.$$

Assim, fica claro que, como $(rn + t)(rn + r + t) > 0$ para todo n, temos que (x_n) é monótona crescente, se $pt - qr > 0$, (x_n) é monótona decrescente, se $pt - qr < 0$ e (x_n) não é monótona, se $pt - qr = 0$.

Exemplo 2.23. A sequência definida por $x_n = e^n$ é monótona crescente enquanto a sequências dada por $y_n = 1/e^n$ é monótona decrescente.

Exemplo 2.24. A sequência de termo geral $x_n = cos(n)$ não é monótona. De fato, pois considerando o ciclo trigonométrico, x_n é positivo no primeiro e quarto quadrantes e x_n é negativo no segundo e terceiro quadrantes.

Definição 2.25. Uma sequência (x_n) é dita **limitada** se existe $K \geq 0$ tal que $|x_n| < K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.26. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente com $x_n \to a$. Tome $\epsilon = 1$. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ temos

$$|x_n - a| < \epsilon = 1 \Rightarrow -1 < x_n - a < 1 \Rightarrow a - 1 < x_n < a + 1.$$

Ao considerar p o maior e q o menor dos elementos do conjunto assim formado $X = \{x_1, x_2, ..., x_{n_0}, a-1, a+1\}$, percebemos que $q \leq x_n \leq p$ para todo n. Portanto, a sequência (x_n) é limitada.

Definição 2.27. Uma **subsequência** (x_{n_k}) de uma sequência (x_{n_k}) é a restrição desta função a um subconjunto $\mathbf{N}' = \{n_1, n_2, ..., n_k, ...\}$ de $\mathbb{N}$. Para subsequência, usamos a notação

$$(x_{n_k}) = (x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...)$$

e para o termo geral da subsequência usamos x_{n_k}.

Exemplo 2.28. Seja $x_n = 2^n$. É subsequência de (x_n) a sequência definida por $x_{n_k} = 2^{k^2}$ ou por $x_{n_k} = 2^{k+3}$.

Exemplo 2.29. Na sequência alternada $(x_n) = (a, b, a, b, a, ...)$ é nítido a existência de duas subsequências cujos termos gerais são $x_{n_k} = a$ e $y_{m_k} = b$. No primeiro caso, temos $n_k = 2k - 1$ e, no segundo caso, $m_k = 2k$, com $k \in \{1, 2, 3, ...\}$.

Teorema 2.30. *Toda subsequência de uma sequência convergente é convergente e converge para o mesmo valor.*

Demonstração. Sejam $x_n \to L$ e (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n). Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L| < \epsilon$, para todo $n \geq n_0$. Tome $n_{k_0} \geq n_0$ e temos que $|x_{n_k} - L| < \epsilon$, para todo $n_k \geq n_{k_0} \geq n_0$. Logo, $x_{n_k} \to L$.

Corolário 2.31. *Se* $\lim x_n = a$*, então, para todo* $k \in \mathbb{N}$*,* $\lim x_{n+k} = a$*.*

Demostração. De fato, pois (x_{n+k}) é uma subsequência de (x_n).

Exemplo 2.32. Seja a sequência (x_n), com $x_n \to L$. Sabendo que $x_{n+1} = 1 - x_n$, vamos calcular o valor de L. Pelo teorema 2.30, se $x_n \to L$, então também $x_{n+1} \to L$. Daí, temos

$$L = \lim x_{n+1} = \lim(1 - x_n) = 1 - \lim x_n = 1 - L \Rightarrow L = 1 - L \Rightarrow L = \frac{1}{2}.$$

Observação 2.33. A sequência do exemplo 2.29 é divergente, pois nela constam duas subsequências, onde uma converge para a enquanto a outra converge para b.

Exemplo 2.34. Considere a sequência definida por $x_n = cos(\pi n)$. Para n ímpar temos que $x_n = -1$ e para n par, $x_n = 0$. São duas subsequências de $(cos(\pi n))_n$ que convergem para valores distintos. Logo, x_n é divergente.

Exemplo 2.35. A sequência (y_n) cujo termo genérico é dado por

$$y_n = \sum_{m=1}^{n} x_m$$

onde (x_m) é outra sequência, é a soma parcial dos termos desta última sequência. Uma condição necessária para que (y_n) seja convergente é que se tenha $\lim x_m \to 0$. Isto é verificado da seguinte forma. Suponha $y_n \to S$. Como $x_n = y_n - y_{n-1}$, temos

$$\lim x_n = \lim(y_n - y_{n-1}) = \lim y_n - \lim y_{n-1} = S - S = 0.$$

Proposição 2.36. *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Ver [6].

Definição 2.37. $(x_n)_n$ é uma **sequência de Cauchy** quando para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \epsilon$.

Teorema 2.38. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração. Seja $(x_n)_n$ uma sequência com $x_n \to L$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > n_0 \Rightarrow |x_m - L| < \epsilon/2$$

e $n > n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \epsilon/2$.

Segue que

$$m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| \leq |x_m - L| + |x_n - L| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Proposição 2.39. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Considere $(x_n)_n$ uma sequência de Cauchy. Tome $\epsilon = 1$ e temos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < 1.$$

Agora, para $n > n_0$ temos $|x_{n_0+1} - a_n| < 1$, ou seja,

$$n > n_0 \Rightarrow a_n \in (x_{n_0+1} - 1, x_{n_0+1} + 1).$$

Ao considerar p o maior e q o menor dos elementos do conjunto assim formado $X = \{x_1, x_2, ..., x_{n_0+1} - 1, x_{n_0+1} + 1\}$, percebemos que $q \leq x_n \leq p$ para todo n. Portanto, a sequência (x_n), que é de Cauchy é limitada.

Proposição 2.40. *Se uma sequência de Cauchy possui uma subsequência convergindo para L, então a própria sequência converge para L.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy com uma subsequência de limite L. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \epsilon/2.$$

Por outro lado, existem $n_1 > n_0$ tal que $|a_{n_1} - L| < \epsilon/2$.

Logo,

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - L| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1} - L| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Teorema 2.41. *Toda sequência de Cauchy (de números reais) é convergente.*

Demonstração. Seja $(x_n)_n$ uma sequência de Cauchy de números reais. Pela proposição 2.39, $(x_n)_n$ é limitada. Pela proposição 2.36, $(x_n)_n$ possui uma subsequência convergente. Logo, pela proposição 2.40, $(x_n)_n$ converge.

3 Operadores discretos

São definidos derivada discreta e integral discreta, as bases do Cálculo Discreto. Estes conceitos são mais conhecidos por diferença finita e sua inversa, respectivamente. Existe uma relação entre integral discreta com limites e somatório que nada mais é do que uma versão sofisticada do conceito de soma telescópica [11]. Com a ferramenta de integral discreta definida, veremos que somatórios tão distintos, seja de natureza polinomial, exponencial ou trigonométrica, são todos somas telescópicas. As principais referências são [7], [10], [11], [3].

Definição 3.1. Derivada discreta, aplicada em uma sequência (x_n), é uma segunda sequência $(x_n^{(1)})$, com termo geral $x_n^{(1)} = x_{n+1} - x_n$.

Definição 3.2. Derivada discreta de segunda ordem, aplicada em uma sequência $(x_n^{(1)})$, é uma segunda sequência $(x_n^{(2)})$, com termo geral $x_n^{(2)} = x_{n+1}^{(1)} - x_n^{(1)}$.

Definição 3.3. Definido $(x_n^0) = (x_n)$, com $x_n^0 = x_n$ e com $i = 1, 2, ...$, derivada discreta de i-ésima ordem, aplicada em uma sequência $(x_n^{(i-1)})$, é uma segunda sequência $(x_n^{(i)})$, com termo geral $x_n^{(i)} = x_{n+1}^{(i-1)} - x_n^{(i-1)}$.

Definição 3.4. Seja (X_n) e (x_n) tais que $X_n^{(1)} = x_n$. A sequência (X_n) é chamada de integral discreta de (x_n). Notação:

$$(x_n^{(-1)}) = (X_n)$$

$$x_n^{(-1)} = X_n$$

Definição 3.5. Seja (x_n) uma sequência. A sequência (S_n) cujo termo genérico é

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + ... + x_n$$

é chamada de sequência das somas parciais da sequência (x_n) e S_n de soma dos n primeiros termos de (x_n).

Proposição 3.6. *As sequências (S_n), (x_n) e $(x_n^{(-1)}) = (X_n)$ estão relacionadas conforme a seguinte igualdade:*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \left[x_n^{(-1)}\right]_1^{n+1} = [X_n]_1^{n+1} = X_{n+1} - X_1$$

Demonstração. $x_n = X_n^{(1)} = X_{n+1} - X_n$, logo

$$S_n = x_n + x_{n-1} + x_{n-2} + ... + x_3 + x_2 + x_1$$

$$= (X_{n+1} - X_n) + (X_n - X_{n-1}) + (X_{n-1} - X_{n-2}) + ... + (X_4 - X_3) + (X_3 - X_2) + (X_2 - X_1).$$

Como todos os termos do segundo membro desta igualdade se cancelam, com exceção do primeiro e do último, temos que $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = X_{n+1} - X_1$.

Exemplo 3.7. A sequência definida por $x_n = aq^{n-1}$, com $a \neq 0$ e $q \neq 1$ é conhecida como progressão geométrica. Veja que

$$x_n = aq^{n-1} = aq^{n-1}.\frac{q-1}{q-1} = \frac{aq^n}{q-1} - \frac{aq^{n-1}}{q-1}.$$

Portanto, com $X_n = \dfrac{aq^{n-1}}{q-1}$, temos $X_n^{(1)} = X_{n+1} - X_n = aq^{n-1} = x_n$, ou seja, $x_n^{(-1)} = X_n = \dfrac{aq^{n-1}}{q-1}$. Logo,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \left[x_n^{(-1)}\right]_1^{n+1} = \left[\frac{aq^{n-1}}{q-1}\right]_1^{n+1} = \frac{aq^n}{q-1} - \frac{a}{q-1} = \frac{a(q^n-1)}{q-1}.$$

Proposição 3.8. *Sejam* (x_n),(y_n),(X_n),(Y_n) *sequências tais que* $X_n^{(1)} = x_n$, $Y_n^{(1)} = y_n$ *e seja* $A \in \mathbb{R}$. *As seguintes propriedades se verificam:*

(a) Se $x_n = A$, *então* $x_n^{(1)} = 0$.

A derivada da sequência constante é zero.

(b) Se $x_n = n$, *então* $x_n^{(1)} = 1$.

A derivada discreta da sequência identidade é a unidade.

(c) Se $x_n = A.y_n$, *então* $x_n^{(1)} = A.[y_n^{(1)}]$.

A derivada discreta da sequência definida por uma constante vezes uma segunda sequência é a constante vezes a derivada discreta da segunda sequência.

(d) Se $z_n = x_n + y_n$, *então* $z_n^{(1)} = x_n^{(1)} + y_n^{(1)}$.

A derivada discreta de uma soma de sequências é a soma das derivadas discretas das sequências.

(e) $x_n^{-1} = X_n + D$, *para todo* $D \in \mathbb{R}$.

Uma sequência tem infinitas integrais discretas diferindo-as por uma constante real D *que chamaremos de* ***constante de integração discreta****. Chamaremos* (X_n) *de* ***sequência primitiva*** *de* (x_n).

(f) Se $x_n = Ay_n$*, então* $x_n^{(-1)} = A.[y_n^{(-1)}]$.

A integral discreta da sequência definida por uma constante vezes uma segunda sequência é a constante vezes a integral discreta da segunda sequência.

(g) Se $z_n = x_n + y_n$*, então* $z_n^{(-1)} = x_n^{(-1)} + y_n^{(-1)}$.

A integral discreta de uma soma de sequências é a soma das integrais discretas das sequências.

Demonstração. Sugestão: [10].

Para a proposição seguinte, usaremos a seguinte notação.

Observação 3.9.

$$\binom{n}{p} = \frac{1}{p!}n.(n-1)...[n-(p-1)],$$

com $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \{0, 1, 2, ...\}$.

Observação 3.10. Veja que $\binom{n}{1} = n$. Para futuros resultados, é importante convencionar $\binom{n}{0} = 1$, de forma que $\binom{n}{0}^{(1)} = 0$.

Proposição 3.11. *Seja* (x_n) *definida por* $x_n = \binom{n}{p}$*, então*

(a) $x_n^{(1)} = \binom{n}{p-1}$,

(b) $x_n^{(-1)} = \binom{n}{p+1}$,

(c) $S_n = \binom{n+1}{p+1}$.

Demonstração. (a) Seja $x_n = \binom{n}{p}$ e $N = \dfrac{1}{p!}n(n-1)(n-2)...[n-(p-2)]$. Portanto,

$$x_n^{(1)} = x_{n+1} - x_n = \binom{n+1}{p} - \binom{n}{p}$$

$$= \frac{1}{p!}(n+1)n(n-1)...[n-(p-2)] - \frac{1}{p!}n(n-1)...[n-(p-2)][n-(p-1)]$$

$$= (n+1).N - N.[n-(p-1)]$$

$$= N.((n+1) - [n-(p-1)])$$

$$= \frac{p}{p!}n(n-1)(n-2)...[n-(p-2)]$$

$$= \frac{1}{(p-1)!}n(n-1)(n-2)...[n-((p-1)-1)]$$

$$= \binom{n}{p-1}.$$

(b) Seja $y_n = \binom{n}{p+1}$. Por (a), temos que $y_n^{(1)} = \binom{n}{p} = x_n$. Logo $x_n^{(-1)} = y_n = \binom{n}{p+1}$.

(c)Conforme a proposição 3.6,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \left[x_n^{(-1)}\right]_1^{n+1} = X_{n+1} - X_1.$$

Logo, com $x_n = \binom{n}{p}$ e usando (b), temos

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{p} = \left[\binom{n}{p+1}\right]_1^{n+1} = \binom{n+1}{p+1} - \binom{1}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} - 0 = \binom{n+1}{p+1}.$$

Veremos adiante um método para calcular a derivada discreta e a integral discreta da sequência de termo genérico $x_n = n^p$ usando uma combinação linear de sequências dadas por $y_n = \binom{n}{i}$, com $0 \leq i \leq p$. O seguinte lema nos ajudará a provar uma proposição útil para tal finalidade.

Lema 3.12. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $p \in \{0, 1, 2, ...\}$. Então*

$$n\binom{n-1}{s} = (s+1)\binom{n}{s+1}.$$

Demonstração.

$$n\binom{n-1}{s} = n.\frac{1}{s!}(n-1)(n-2)...(n-s) =$$

$$= \frac{s+1}{(s+1)s!}n(n-1)(n-2)...\{n-[(s+1)-1]\} =$$

$$= (s+1)\binom{n}{s+1}.$$

Proposição 3.13. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $p \in \{0, 1, 2, ...\}$ e $\binom{n}{p} = \frac{n}{p!}(n-1)(n-2)...[n-(p-1)]$. Então*

$$n\binom{n}{p} = p\binom{n}{p} + (p+1)\binom{n}{p+1}.$$

Demonstração. Seja a sequência (x_n), com $x_n = \binom{n-1}{p}$. Assim, $x_n^{(1)} = \binom{n-1}{p-1}$, ou seja,

$$x_{n+1} - x_n = x_n^{(1)}$$

$$\Rightarrow \binom{n}{p} - \binom{n-1}{p} = \binom{n-1}{p-1}$$

$$\Rightarrow \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

$$\Rightarrow n\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1} + n\binom{n-1}{p}.$$

Logo, pelo lema 3.12, temos

$$n\binom{n}{p} = p\binom{n}{p} + (p+1)\binom{n}{p+1}.$$

Exemplo 3.14. Calcular a derivada discreta, a integral discreta e a soma dos n primeiros termos da sequência dada por $x_n = n^3$.

Primeiro observamos que $n = \binom{n}{1}$. Segue que $n^2 = n.n = n\binom{n}{1}$ e pelo teorema anteriormente demonstrado, $n^2 = 1.\binom{n}{1} + 2.\binom{n}{2}$. Por sua vez,

$$n^3 = n.n^2 = n.\left[\binom{n}{1} + 2.\binom{n}{2}\right] = n\binom{n}{1} + 2n\binom{n}{2} =$$

$$= \binom{n}{1} + 2.\binom{n}{2} + 2\left[2\binom{n}{2} + 3.\binom{n}{3}\right]$$

$$\Rightarrow x_n = n^3 = \binom{n}{1} + 6\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3}.$$

Logo, pelas proposições 3.8 e 3.11,

$$x_n^{(1)} = \binom{n}{0} + 6\binom{n}{1} + 6\binom{n}{2},$$

$$x_n^{(-1)} = \binom{n}{2} + 6\binom{n}{3} + 6\binom{n}{4},$$

$$S_n = \binom{n+1}{2} + 6\binom{n+1}{3} + 6\binom{n+1}{4}.$$

Exemplo 3.15. Analisemos agora a técnica para achar a soma dos n primeiro termos da sequência, cujo termo geral é $x_n = sen(an+b)$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Aqui podemos considerar n em qualquer unidade angular. Com $y_n = g(n)$, utilizaremos a notação $y_n^{(\pm 1)} = (f(n))^{(\pm 1)}$ para indicar a derivada discreta e a integral discreta de uma sequência. Por exemplo, com $y_n = e^n - n^2$, temos $y_n^{(1)} = (e^n - n^2)^{(1)}$ e $y_n^{(-1)} = (e^n - n^2)^{(-1)}$.

Considere a sequência auxiliar dada por $y_n = cos(an+t)$, com $a, t \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Portanto, a derivada discreta de y_n é

$$y_n^{(1)} = cos[a(n+1)+t] - cos(an+t).$$

Com $p = a(n+1)+t$ e $q = an+t$, obtemos $\dfrac{p+q}{2} = an + a/2 + t$ e $\dfrac{p-q}{2} = a/2$ e usando a identidade $cos(p) - cos(q) = -2sen(\dfrac{p+q}{2})sen(\dfrac{p-q}{2})$ que pode ser consultada em [2], temos que

$$y_n^{(1)} = -2sen(an + a/2 + t)sen(a/2).$$

Em seguida, fazendo

$$a/2 + t = b \Rightarrow t = b - a/2,$$

chegamos a

$$(cos(an + b - a/2))^{(1)} = -2sen(an + b)sen(a/2)$$
$$\Rightarrow (sen(an + b))^{(-1)} = \frac{-1}{2sen(a/2)}cos(an + b - a/2).$$

Logo, a soma S_n dos n primeiros termos da sequência de termo geral $x_n = sen(an+b)$ é processada como se segue.

$$S_n = [(sen(an + b))^{(-1)}]_1^{n+1} = \left[\frac{-1}{2sen(a/2)}cos(an + b - a/2)\right]_1^{n+1} =$$

$$= \frac{-1}{2sen(a/2)} \{cos[a(n + 1) + b - a/2] - cos(a + b - a/2)]\} .$$

Com $p = a(n + 1) + b - a/2 = an/2 + a/2 + b$ e $q = a + b - a/2 = a/2 + b$, obtemos $\frac{p+q}{2} = an/2 + a/2 + b$ e $\frac{p-q}{2} = an/2$ e usando novamente a identidade $cos(p) - cos(q) = -2sen(\frac{p-q}{2})sen(\frac{p+q}{2})$ temos que

$$S_n = \frac{sen(an/2)sen(an/2 + a/2 + b)}{sen(a/2)}. \tag{3.1}$$

Exemplo 3.16. Com a sequência de termo geral $x_n = cos(an + b)$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, trabalhamos da mesma forma que a sequência anterior para calcular $x_n^{(-1)}$ e S_n. Para isso, se utiliza a sequência auxiliar $(y_n) = (sen(an + t))_n$ e a identidade $sen(p) - sen(q) = 2cos(\frac{p+q}{2})sen(\frac{p-q}{2})$, a qual pode ser consultada em [2], para chegar nos seguintes resultados.

Primeiramente,

$$(cos(an + b))^{(-1)} = \frac{1}{2sen(a/2)}sen(an + b - a/2).$$

$$S_n = \frac{sen(an/2)cos(an/2 + a/2 + b)}{sen(a/2)}. \tag{3.2}$$

Os resultados vistos para $x_n = sen(an + b)$ e $y_n = cos(an + b)$ produzem somatórios interessantes como se segue.

Utilizando (3.1) com $a = 1$ e $b = 0$, temos

$$\sum_{k=1}^{n} sen(k) = \frac{sen(n/2)sen[(n + 1)/2]}{sen(1/2)}. \tag{3.3}$$

Na equação (3.2), fazendo $a = 1$ e $b = 0$, temos

$$\sum_{k=1}^{n} cos(k) = \frac{sen(n/2)cos[(n+1)/2]}{sen(1/2)}. \tag{3.4}$$

Utilizando (3.1) com $a = 2$ e $b = 0$, temos

$$\sum_{k=1}^{n} sen(2k) = \frac{sen(n)sen(n+1)}{sen(1)}. \tag{3.5}$$

Considerando (3.2) com $a = 2$ e $b = 0$, temos

$$\sum_{k=1}^{n} cos(2k) = \frac{sen(n)cos(n+1)}{sen(1)}. \tag{3.6}$$

Utilizando (3.1) com $a = 2$ e $b = -1$, temos

$$\sum_{k=1}^{n} sen(2k-1) = \frac{sen^2(n)}{sen(1)}. \tag{3.7}$$

Considerando (3.2) com $a = 2$ e $b = -1$, temos

$$\sum_{k=1}^{n} cos(2k-1) = \frac{sen(2n)}{2sen(1)}. \tag{3.8}$$

Finalmente, dividindo (3.7) por (3.8) e lembrando que $sen(2n) = 2sen(n)cos(n)$, obtemos

$$\frac{sen(1) + sen(3) + sen(5) + ... + sen(2n-1)}{cos(1) + cos(3) + cos(5) + ... + cos(2n-1)} = tg(n).$$

Exemplo 3.17. Seja $x_n = a^n$, com $a \neq 0$ e $a \neq 1$. Esta é a definição da sequência exponencial cuja derivada discreta é dada por $x_n^{(1)} = a^{n+1} - a^n$, ou seja, $x_n^{(1)} = (a-1)a^n$.

Portanto, uma sequência que não se altera com a derivada discreta é aquela dada por $z_n = 2^n$, pois $z_n^{(1)} = (2-1)2^n = 2^n$.

Seja agora, a sequência definida por, $y_n = \dfrac{a^n}{a-1}$, com $a \neq 0$ e $a \neq 1$. Como $y_n^{(1)} = \left(\dfrac{a^n}{a-1}\right)^{(1)} = \dfrac{1}{a-1}(a^n)^{(1)} = \dfrac{1}{a-1}.(a-1)a^n = a^n = x_n$, segue que $x_n^{(-1)} = \dfrac{a^n}{a-1}$.

Portanto, com $x_n = a^n$, temos

$$S_n = \left[(a^n)^{(-1)}\right]_1^{n+1} = \left[\frac{a^n}{a-1}\right]_1^{n+1} = \frac{a^{n+1}}{a-1} - \frac{a}{a-1} = \frac{a(a^n-1)}{a-1}.$$

Proposição 3.18. ***Integração discreta por partes***. *Sejam as sequências* $(f(n))_n$ *e* $(g(n))_n$ *de termos genéricos* $f(n)$ *e* $g(n)$*, respectivamente. Se* $\Delta f = f(n)^{(1)}$ *e* $\Delta g = g(n)^{(1)}$*, então*

$$(f(n)\Delta g)^{(-1)} = f(n)g(n) - (g(n)\Delta f)^{(-1)} - (\Delta f \Delta g)^{(-1)}.$$

Demonstração. Considere a sequência $(h(n))_n$ tal que $h(n) = f(n)g(n)$. Assim,

$$z(n)^{(1)} = (f(n)g(n))^{(1)} = f(n+1)g(n+1) - f(n)g(n)$$

e como

$$\Delta f = f(n+1) - f(n) \Rightarrow f(n+1) = f(n) + \Delta f,$$

$$\Delta g = g(n+1) - g(n) \Rightarrow g(n+1) = g(n) + \Delta g,$$

temos que

$$(f(n)g(n))^{(1)} = (f(n) + \Delta f)(g(n) + \Delta g) - f(n)g(n) = f(n)\Delta g + g(n)\Delta f + \Delta f \Delta g$$

$$\Rightarrow f(n)\Delta g = (f(n)g(n))^{(1)} - g(n)\Delta f - \Delta f \Delta g$$

$$\Rightarrow (f(n)\Delta g)^{(-1)} = f(n)g(n) - (g(n)\Delta f)^{(-1)} - (\Delta f \Delta g)^{(-1)}.$$

Corolário 3.19. *Seja* $(f(n))_n$ *uma sequência qualquer e* $(\Delta g(n))_n$ *uma sequência de termo genérico* $(\Delta g(n)) = b^n = \Delta g$*, com* $b \in \mathbb{R}$*,* $b \neq 0$ *e* $b \neq 1$*. Então,*

$$(f(n)b^n)^{(-1)} = f(n).\frac{b^n}{b-1} - \frac{b}{b-1}(f(n)^{(1)}b^n)^{(-1)}.$$

Demonstração. É aplicação direta do teorema anterior. Em

$$(f(n)\Delta g)^{(-1)} = f(n)g(n) - (g(n)\Delta f)^{(-1)} - (\Delta f(n)\Delta g)^{(-1)},$$

faça $\Delta g = b^n \Rightarrow g(n) = \frac{b^n}{b-1}$, ou seja,

$$(f(n)b^n)^{(-1)} = f(n)\frac{b^n}{b-1} - \left(\frac{b^n}{b-1}f(n)^{(1)}\right)^{(-1)} - (b^n f(n)^{(1)})^{(-1)} =$$

$$= f(n)\frac{b^n}{b-1} - \frac{1}{b-1}(b^n f(n)^{(1)})^{(-1)} - (b^n f(n)^{(1)})^{(-1)} =$$

$$= f(n)\frac{b^n}{b-1} - \frac{b}{b-1}(b^n f(n)^{(1)})^{(-1)}.$$

Exemplo 3.20. Calcular
$$\sum_{k=1}^{n} k2^k.$$
Seja $x_n = n2^n$. Assim, $S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$ e, conforme a proposição 3.6, temos
$$S_n = \left[x_n^{(-1)}\right]_1^{n+1}.$$
Vamos calcular $x_n^{(-1)}$ por integração discreta por partes utilizando o corolário 3.19. No resultado
$$(f(n)b^n)^{(-1)} = f(n)\frac{b^n}{b-1} - \frac{b}{b-1}(b^n f(n)^{(1)})^{(-1)},$$
substitua $f(n) = n \Rightarrow f(n)^{(1)} = 1$ e $b = 2$. Desta forma,
$$(n2^n)^{(-1)} = n\frac{2^n}{2-1} - \frac{2}{2-1}(2^n.1)^{(-1)} = 2^n(n-2).$$

Logo,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k = \left[x_n^{(-1)}\right]_1^{n+1} = \left[(n2^n)^{(-1)}\right]_1^{n+1} = [2^n(n-2)]_1^{n+1} = 2^{n+1}(n+1-2) - 2(1-2)$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k2^k = 2^{n+1}(n-1) + 2.$$

Proposição 3.21. *Seja $h(n)$ uma sequência e $h(n)^{(j)}$ a derivada discreta de j-ésima ordem de $h(n)$. Seja $b \in \mathbb{R}$, com $b \neq 0$ e $b \neq 1$. Então*
$$(h(n)b^n)^{(-1)} = \sum_{j=0}^{\alpha}(-1)^j \frac{h(n)^{(j)}b^{n+j}}{(b-1)^{j+1}} + (-1)^{\alpha+1}\frac{b^{\alpha+1}}{(b-1)^{\alpha+1}}(h(n)^{(\alpha+1)}b^n)^{(-1)}.$$

Demonstração. Será por indução sobre α. Veja que o teorema é verdadeiro para $\alpha = 0$, pois, conforme o corolário 3.19, temos
$$(h(n)b^n)^{(-1)} = h(n).\frac{b^n}{b-1} - \frac{b}{b-1}(h(n)^{(1)}b^n)^{(-1)}.$$

Suponha que o teorema seja válido para algum $\alpha \geq 0$. Provaremos que o mesmo é válido para $\alpha + 1$.

De fato, ainda pelo corolário 3.19, temos
$$(h(n)^{(\alpha+1)}b^n)^{(-1)} = h(n)^{(\alpha+1)}.\frac{b^n}{b-1} - \frac{b}{b-1}(h(n)^{(\alpha+2)}b^n))^{(-1)},$$
e fazendo esta substituição na expressão do somatório, temos que
$$(h(n)b^n)^{(-1)} = \sum_{j=0}^{\alpha}(-1)^j \frac{h(n)^{(j)}b^{n+j}}{(b-1)^{j+1}} + (-1)^{\alpha+1}\frac{b^{\alpha+1}}{(b-1)^{\alpha+1}}\left[h(n)^{(\alpha+1)}.\frac{b^n}{b-1} - \frac{b}{b-1}(h(n)^{(\alpha+2)}b^n))^{(-1)}\right] =$$
$$= \sum_{j=0}^{\alpha}(-1)^j \frac{h(n)^{(j)}b^{n+j}}{(b-1)^{j+1}} + (-1)^{\alpha+1}h(n)^{\alpha+1}\frac{b^{n+\alpha+1}}{(b-1)^{\alpha+2}} - (-1)^{\alpha+1}\frac{b^{\alpha+2}}{(b-1)^{\alpha+2}}(h(n)^{(\alpha+2)}b^n)^{(-1)} =$$
$$= \sum_{j=0}^{\alpha+1}(-1)^j \frac{h(n)^{(j)}b^{n+j}}{(b-1)^{j+1}} + (-1)^{\alpha+2}\frac{b^{\alpha+2}}{(b-1)^{\alpha+2}}(h(n)^{(\alpha+2)}b^n)^{(-1)}.$$

Exemplo 3.22. Dado a sequência (y_n), com $y_n = n^3 + 8n^2 - n + 3$, $y_n^{(1)} = 3n^2 + 19n + 8$, $y_n^{(2)} = 6n + 22$ e $y_n^{(3)} = 6$, calcular a integral discreta da sequência definida por $x_n = y_n 5^n$.

Como $y_n^{(3)} = 6$, segue que $y_n^{(i)} = 0$ para todo $i > 3$. Portanto, é somente necessário aplicar a proposição 3.21 para $\alpha = 3$, ou seja

$$(y_n 5^n)^{(-1)} = \sum_{j=0}^{3} y_n^{(j)} \frac{5^{n+j}}{4^{j+1}} + (-1)^3 \frac{5^3}{4^3} (y_n^{(4)} 5^n)^{(-1)},$$

onde o termo $(-1)^3 \dfrac{5^3}{4^3} (y_n^{(4)} 5^n)^{(-1)}$ se anula devido a $y_n^{(4)} = 0$.
Assim, lembrando que $y_n^0 = y_n$, temos

$$(y_n 5^n)^{(-1)} = y_n \frac{5^n}{4} - y_n^{(1)} \frac{5^{n+1}}{4^2} + y_n^{(2)} \frac{5^{n+2}}{4^3} - y_n^{(3)} \frac{5^{n+3}}{4^4} =$$
$$= (n^3 + 8n^2 - n + 3)\frac{5^n}{4} - (3n^2 + 19n + 8)\frac{5^{n+1}}{4^2} + (6n + 22)\frac{5^{n+2}}{4^3} - 6\frac{5^{n+3}}{4^4},$$

ou seja,

$$(y_n 5^n)^{(-1)} = \frac{5^n}{128}(32n^3 + 136n^2 - 492n + 501).$$

4 Progressão Aritmética de ordem p

A progressão artimética de ordem p é definida simplesmente como uma sequência polinomial de grau p. Mas aqui a representação do termo genérico desta sequência, no lugar de se utilizar a base canônica do espaço vetorial dos polinômios de grau $\leq p$, é utilizada uma base alternativa, onde cada componente é um polinômio binomial, mais maleável em face dos operadores discretos. Saber achar de modo direto as coordenadas ou razões desta nova representação assume vital importância quando se quer uma mudança de base ou quando se quer a soma dos n primeiros termos da PA de ordem p, utilizando integral discreta. As principais referências são [7] e [3].

Definição 4.1. Dado $a_i \in \mathbb{R}$, com $i \in \{0, 1, 2, ..., p\}$, chama-se **progressão aritmética(PA) de ordem** p uma sequência (p_n) tal que $p_n = p(n)$, com

$$p(n) = a_0 + a_1 n + ... + a_p n^p,$$

com $a_p \neq 0$, ou seja, o termo genérico de uma PA um polinômio $p(n)$ de p-ésimo grau em n.

Exemplo 4.2. Progressão aritmética de ordem $p = 0$ é a sequência constante dada por $p(n) = a_0$. Neste caso $p(n)^{(1)} = 0$.

Exemplo 4.3. Progressão aritmética de ordem $p = 1$ é a sequência dada por

$$p(n) = a_0 + a_1 n,$$

com $a_1 \neq 0$.

No caso $p = 1$, a derivada discreta de (p_n) é dada por

$$p(n)^{(1)} = p(n+1) - p(n) = a_0 + a_1(n+1) - a_0 - a_1 n = a_1$$

e como $p(1)^{(0)} = p(1) = a_0 + a_1$ e $p(n)^{(1)} = a_1$, para todo n, em particular $p(1)^{(1)} = a_1$, temos que $p(n)$ pode ser também expresso por

$$p(n) = a_0 + a_1 + a_1(n-1) = p(1) + p(1)^{(1)}(n-1)$$

$$\Rightarrow p(n) = p(1)^{(0)} + p(1)^{(1)}\binom{n-1}{1}.$$

Esta última forma de expressar $p(n)$ é interessante, pois evidencia o primeiro termo de (p_n), ou seja, $p(1) = p(1)^{(0)}$ e a derivada discreta de primeira ondem de (p_n) para $n = 1$. Além disso, sabemos que o conjunto

$$R = \left\{\binom{n-1}{0} = 1, \binom{n-1}{1}, ..., \binom{n-1}{p}\right\}$$

é uma base para o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a p, conforme foi visto no teorema 1.23. Chamaremos R de base racional destes polinômios. Desta forma, existem reais A_0,A_1,...,A_p tais que, se $p(n)$ é um polinômio de grau p, então

$$p(n) = A_0 + A_1\binom{n-1}{1} + A_2\binom{n-1}{2}... + A_p\binom{n-1}{p}.$$

Adotaremos esta última expressão para definir uma sequência polinomial de grau p e a chamaremos de **forma racional** da lei de definição desta sequência. A vantagem de utilizar a forma racional é que, como $\binom{n-1}{i}^{(1)} = \binom{n-1}{i-1}$ os teoremas que envolvem sequências com polinômios podem ser provados com relativa facilidade, sem necessidade de se utilizar o binômio de Newton. Além disso, como veremos adiante, os coeficientes A_0, A_1,...,A_p assumem valores especiais.

Proposição 4.4. *A derivada discreta de uma PA de ordem p é uma PA de ordem $p-1$.*

Demonstração. Dado $A_p \neq 0$, seja uma PA cujo termo genérico é

$$p(n) = A_0 + A_1\binom{n-1}{1} + A_2\binom{n-1}{2}... + A_p\binom{n-1}{p}$$

e de acordo com as proposições 3.8 e 3.11 temos

$$p(n)^{(1)} = A_0^{(1)} + A_1\binom{n-1}{1}^{(1)} + A_2\binom{n-1}{2}^{(1)}... + A_p\binom{n-1}{p}^{(1)}$$
$$\Rightarrow p(n)^{(1)} = A_1 + A_2\binom{n-1}{1} + A_3\binom{n-1}{2} + ... + A_p\binom{n-1}{p-1}.$$

Logo, como $A_p \neq 0$, temos que $p(n)^{(1)}$ define uma PA de ordem $p-1$.

Corolário 4.5. *Se $p_n = p(n)$ define uma PA de ordem p, então $p(n)^{(i)} = 0$, para $i > p$.*

Demonstração. $p(n)^{(1)}$ tem ordem $p-1$, $p(n)^{(2)}$ tem ordem $p-2$,...,$p(n)^{(i)}$ tem ordem $p-i$, logo $p(n)^{(p)}$ tem ordem $p-p=0$, ou seja, $p(n)^{(p)}$ define um polinômio constante.

Proposição 4.6. *A integral discreta de uma PA de ordem p é uma PA de ordem $p+1$.*

Demonstração. Dado $A_p \neq 0$, seja uma PA cujo termo genérico é

$$p(n) = A_0\binom{n-1}{0} + A_1\binom{n-1}{1} + A_2\binom{n-1}{2} ... + A_p\binom{n-1}{p}$$

e conforme as proposições 3.8 e 3.11 segue que

$$p(n)^{(-1)} = A_0\binom{n-1}{0}^{(-1)} + A_1\binom{n-1}{1}^{(-1)} + A_2\binom{n-1}{2}^{(-1)} ... + A_p\binom{n-1}{p}^{(-1)}$$

$$\Rightarrow p(n)^{(1)} = A_0\binom{n-1}{1} + A_1\binom{n-1}{2} + A_2\binom{n-1}{3} + ... + A_p\binom{n-1}{p+1}.$$

Logo, como $A_p \neq 0$, temos que $p(n)^{(-1)}$ define uma PA de ordem $p+1$.

Proposição 4.7. *Seja (p_n) uma PA de ordem p de termo genérico*

$$p(n) = A_0 + A_1\binom{n-1}{1} + A_2\binom{n-1}{2} + ... + A_p\binom{n-1}{p}.$$

Então $A_i = p(1)^{(i)}$, com $0 \leq i \leq p$.

Demonstração. Como $\binom{n-1}{k} = \dfrac{1}{k!}(n-1)(n-2)...(n-k)$, segue que, para $n = 1$, temos que $\binom{n-1}{k} = 0$, logo $p(1) = p(1)^0 = A_0$. Além disso, conforme a proposição 4.4 , temos que

$$p(n)^{(1)} = A_1 + A_2\binom{n-1}{1} + A_3\binom{n-1}{2} + ... + A_p\binom{n-1}{p-1}$$
$$\Rightarrow p(1)^{(1)} = A_1.$$

$$p(n)^{(2)} = A_2 + A_3\binom{n-1}{1} + A_3\binom{n-1}{2} + ... + A_p\binom{n-1}{p-2}$$
$$\Rightarrow p(1)^{(2)} = A_2.$$

....

$$p(n)^{(i)} = A_i + A_{i+1}\binom{n-1}{1} + A_{i+2}\binom{n-1}{2} + ... + A_p\binom{n-1}{p-i}$$
$$\Rightarrow p(1)^{(i)} = A_i.$$

....

$$p(n)^{(p)} = A_p\binom{n-1}{p-p} = A_p\binom{n-1}{0} = A_p.1, \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow p(1)^{(p)} = A_p.$$

A partir de agora, vamos expressar o termo genérico de uma PA de ordem p com os coeficientes substituídos como se segue:

$$p(n) = p(1) + p(1)^{(1)}\binom{n-1}{1} + p(1)^{(2)}\binom{n-1}{2} + ... + p(1)^{(p)}\binom{n-1}{p}.$$

Proposição 4.8. *Sejam $p(1)$, $p(2)$,...,$p(i+1)$, com $0 \leq i \leq p$, os $i+1$ primeiros termos de uma PA de ordem p. Então*

$$p(1)^{(i)} = \sum_{k=0}^{i}(-1)^k p(i-k+1)\binom{i}{k}$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre i. Veja que a proposição é verdadeira para $i = 0$, pois

$$\sum_{k=0}^{0}(-1)^0 p(0-0+1)\binom{0}{0} = p(1).1 = p(1) = p(1)^{(0)}$$

Seja $g(n) = p(n+1)$ um polinômio de mesmo grau que $p(n)$. Por hipótese de indução, temos que

$$p(1)^{(i)} = \sum_{k=0}^{i}(-1)^k p(i-k+1)\binom{i}{k},$$
$$g(1)^{(i)} = \sum_{k=0}^{i}(-1)^k g(i-k+1)\binom{i}{k}$$

$$\Rightarrow p(2)^{(i)} = \sum_{k=0}^{i}(-1)^k p(i-k+2)\binom{i}{k}$$

Segue que, pela definição de derivada discreta de ordem $i+1$, temos

$$p(n)^{(i+1)} = p(n+1)^{(i)} - p(n)^{(i)}$$
$$\Rightarrow p(1)^{(i+1)} = p(2)^{(i)} - p(1)^{(i)}$$

$$= \sum_{k=0}^{i}(-1)^k p(i-k+2)\binom{i}{k} - \sum_{k=0}^{i}(-1)^k p(i-k+1)\binom{i}{k}$$

$$= p(i+2)\binom{i}{0} + \sum_{k=1}^{i}(-1)^k p(i-k+2)\binom{i}{k} - \sum_{k=0}^{i-1}(-1)^k p(i-k+1)\binom{i}{k} - (-1)^i p(1)\binom{i}{i}.$$

Façamos agora as seguintes substituições: $\binom{i}{0} = \binom{i+1}{0} = 1$ e $\binom{i}{i} = \binom{i+1}{i+1} = 1$. Além disto, vamos ajustar o limite do segundo somatório de forma que k seja equivalente a $k-1$.

$$p(1)^{(i+1)} = p(i+2)\binom{i+1}{0} + \sum_{k=1}^{i}(-1)^k p(i-k+2)\binom{i}{k}$$
$$- \sum_{k-1=0}^{i}(-1)^{k-1} p(i-k+2)\binom{i}{k-1} - (-1)^i p(1)\binom{i+1}{i+1}$$

$$\Rightarrow p(1)^{(i+1)} = p(i+2)\binom{i+1}{0} + \sum_{k=1}^{i}(-1)^k p(i-k+2)\binom{i}{k}$$
$$+ \sum_{k=1}^{i}(-1)^k p(i-k+2)\binom{i}{k-1} + (-1)^{(i+1)} p(1)\binom{i+1}{i+1}$$

$$\Rightarrow p(1)^{(i+1)} =$$
$$p(i+2)\binom{i+1}{0} +$$
$$\sum_{k=1}^{i}(-1)^k p(i-k+2)\left(\binom{i}{k} + \binom{i}{k-1}\right)$$
$$+(-1)^{(i+1)} p(1)\binom{i+1}{i+1}.$$

Veja que se temos uma sequência (x_i) tal que $x_i = \binom{i}{k}$, então $x_i^{(1)} = \binom{i}{k-1}$, ou seja, $x_i^{(1)} = x_{i+1} - x_i = \binom{i+1}{k} - \binom{i}{k} = \binom{i}{k-1}$, de forma que $\binom{i}{k} + \binom{i}{k-1} = \binom{i+1}{k}$. Logo,

$$\Rightarrow p(1)^{(i+1)} =$$
$$p(i+2)\binom{i+1}{0} +$$
$$\sum_{k=1}^{i}(-1)^k p(i-k+2)\binom{i+1}{k}$$
$$+(-1)^{(i+1)} p(1)\binom{i+1}{i+1}.$$

$$\Rightarrow p(1)^{(i+1)} = \sum_{k=0}^{i+1}(-1)^k p((i+1)-k+1)\binom{i+1}{k}.$$

Exemplo 4.9. Colocar na forma racional o termo genérico da PA de ordem 4 dado por $p(n) = n^4 + 5n^3 - 10n + 7$.

Temos $0 \leq i \leq 4$, assim precisamos dos $p+1 = 5$ primeiros termos da sequência que são $P(1) = 3$, $P(2) = 43$, $P(3) = 193$, $P(4) = 543$ e $P(5) = 1207$. De primeira sabemos que $p(1)^0 = p(1) = 3$. Para os outros valores de $p(1)^{(i)}$ aplicamos a fórmula

$$p(1)^{(i)} = \sum_{k=0}^{i} (-1)^k p(i-k+1) \binom{i}{k}$$

conforme a seguir:

$$\begin{aligned} p(1)^{(1)} &= \sum_{k=0}^{1} (-1)^k p(2-k) \binom{1}{k} \\ &= (-1)^0 p(2) \binom{1}{0} + (-1)^1 p(1) \binom{1}{1} \\ &= (43).1 - (3).1 = 40, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(1)^{(2)} &= \sum_{k=0}^{2} (-1)^k p(3-k) \binom{2}{k} \\ &= (-1)^0 p(3) \binom{2}{0} + (-1)^1 p(2) \binom{2}{1} + (-1)^2 p(1) \binom{2}{2} \\ &= (193).1 - (43).2 + (3).1 = 110, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(1)^{(3)} &= \sum_{k=0}^{3} (-1)^k p(4-k) \binom{3}{k} \\ &= (-1)^0 p(4) \binom{3}{0} + (-1)^1 p(3) \binom{3}{1} + (-1)^2 p(2) \binom{3}{2} + (-1)^3 p(1) \binom{3}{3} \\ &= (543).1 - (193).3 + (43).3 - (3).1 = 90, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(1)^{(4)} &= \sum_{k=0}^{4} (-1)^k p(5-k) \binom{4}{k} \\ &= (-1)^0 p(5) \binom{4}{0} + (-1)^1 p(4) \binom{4}{1} + (-1)^2 p(3) \binom{4}{2} + (-1)^3 p(2) \binom{4}{3} + (-1)^4 p(1) \binom{4}{4} \\ &= (1207).1 - (543).4 + (193).6 - (43).4 + (3).1 = 24. \end{aligned}$$

Portanto, $p(n) = n^4 + 5n^3 - 10n + 7$ na forma racional é

$$p(n) = 3 + 40\binom{n-1}{1} + 90\binom{n-1}{2} + 110\binom{n-1}{3} + 24\binom{n-1}{4}.$$

Proposição 4.10. *Se $p(n)$ é o termo genérico de uma PA de ordem p, então a soma S_n dos n primeiros termos de $p(n)$ é*

$$S_n = p(1)\binom{n}{1} + p(1)^{(1)}\binom{n}{2} + ... + p(1)^{(p)}\binom{n}{p+1}.$$

Demonstração. Seja (p_n) uma progressão aritmética de ordem p. Pelas proposições 3.6, 3.8 e 3.11 temos que

$$p(n) = p(1) + p(1)^{(1)}\binom{n-1}{1} + p(1)^{(2)}\binom{n-1}{2} + ... + p(1)^{(p)}\binom{n-1}{p}$$

$$\Rightarrow S_n = \left[p(1)\binom{n-1}{1}\right]_1^{(n+1)} + \left[p(1)^{(1)}\binom{n-1}{2}\right]_1^{(n+1)} + ... + \left[p(1)^{(p)}\binom{n-1}{p+1}\right]_1^{(n+1)}$$

$$\Rightarrow S_n = p(1)\binom{n}{1} + p(1)^{(1)}\binom{n}{2} + ... + p(1)^{(p)}\binom{n}{p+1}.$$

Exemplo 4.11. Calcular a fórmula da soma dos n primeiros termos da PA de termo geral $p(n) = n$.

Como $p(1)^{(0)} = p(1) = 1$ e $p(1)^{(1)} = p(2) - p(1) = 1$ e

$$p(n) = p(1)^{(0)}\binom{n-1}{0} + p(1)^{(1)}\binom{n-1}{1} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1},$$

trata-se uma uma PA de ordem $p = 1$. Logo,

$$S_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = n + n\frac{(n-1)}{2} = n\frac{(n+1)}{2}.$$

Exemplo 4.12. Calcular a soma dos 75 primeiros termos da PA de ordem $p = 5$ dada por $p(n) = 3n^5 + 2n^4 - 7n^3 + n^2 - 10n - 17$.

Primeiramente, temos que calcular os $p + 1 = 6$ coeficientes da forma racional que são $p(1)^{(0)}, p(1)^{(1)}, p(1)^{(2)}, ..., p(1)^{(p)}$. E, para isto, vamos precisar dos primeiros $p + 1 = 6$ valores de $(p(n))$, ou seja, $p(1) = -28$, $p(2) = 39$, $p(3) = 664$, $p(4) = 3095$, $p(5) = 9708$ e $p(6) = 24367$. Segue que

$$p(1)^{(0)} = \sum_{k=0}^{0}(-1)^k p(1-k)\binom{0}{k} = (-28).1 = -28,$$

$$p(1)^{(1)} = \sum_{k=0}^{1}(-1)^k p(2-k)\binom{1}{k} = (39).1 - (-28).1 = 67,$$

$$p(1)^{(2)} = \sum_{k=0}^{2}(-1)^k p(3-k)\binom{2}{k} = (664).1 - (39).2 + (-28).1 = 558,$$

$$p(1)^{(3)} = \sum_{k=0}^{3}(-1)^k p(4-k)\binom{3}{k} = (3095).1 - (664).3 + (39).3 - (-28).1 = 1248,$$

$$p(1)^{(4)} = \sum_{k=0}^{4}(-1)^k p(5-k)\binom{4}{k} = (9708).1 - (3095).4 + (664).6 - (39).4 + (-28).1 = 1128,$$

$$p(1)^{(5)} = \sum_{k=0}^{5}(-1)^k p(6-k)\binom{5}{k} = 1.(24367) - 5(9708) + 10(3095) - 10(664) + 5(39) - 1(-28) = 360,$$

Logo,

$$S_n = -28\binom{n}{1} + 67\binom{n}{2} + 558\binom{n}{3} + 1248\binom{n}{4} + 1128\binom{n}{5} + 360\binom{n}{6}$$

$$\Rightarrow S_{75} = -28\binom{75}{1} + 67\binom{75}{2} + 558\binom{75}{3} + 1248\binom{75}{4} + 1128\binom{75}{5} + 360\binom{75}{6} = 93512774295.$$

5 Um Somatório Infinito Especial

No presente capítulo, veremos uma belíssima aplicação de integral discreta definida. Prova-se que o somatório infinito $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(n)}{A^n}$ é uma combinação linear dos coeficientes $p(1)^{(0)}$, $p(1)^{(1)}$,...,$p(1)^{(g)}$ da forma racional de um polinômio de grau $\leq g$. A principal referência deste capítulo é [7].

Temos agora ferramentas suficientes para calcular o somatório infinito $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(n)}{A^n}$ onde $p(n)$ é um polinômio de grau $g \geq 1$ ou **PA** de ordem $g \geq 1$ e A^n define o termo genérico de uma sequência exponencial simples de base real $|A| > 1$. Para isto, utilizaremos o cálculo discreto por partes, especificamente a proposição 3.21. Na solução do referido somatório, claramente surgirão os coeficientes de $p(n)$ da forma racional.

Definição 5.1. Dado o número real b com $b \neq 0$ e $b \neq 1$ e $p(n)$ um polinômio de grau $g \geq 1$, sequência mista simples é a sequência $(x_n)_n$ cujo termo genérico é

$$x_n = p(n)b^n.$$

Nos interessa o caso em que $|b| < 1$, ou seja, $b = 1/A$, com A real e $|A| > 1$. Considere x_n desta forma e temos

$$x_n = \frac{p(n)}{A^n}.$$

Sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{A^n} = 0,$$

mas o que podemos dizer do somatório

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(n)}{A^n}?$$

A proposição 3.21 nos auxiliará na resposta. A mesma diz que se $h(n)$ é o termo genérico de uma sequência qualquer, $h(n)^{(j)}$ é a derivada discreta de j-ésima ordem de $h(n)$ e dado $b \in \mathbb{R}$, com $b \neq 0$ e $b \neq 1$, então

$$(h(n)b^n)^{(-1)} = \sum_{j=0}^{\alpha}(-1)^j \frac{h(n)^{(j)}b^{n+j}}{(b-1)^{j+1}} + (-1)^{\alpha+1}\frac{b^{\alpha+1}}{(b-1)^{\alpha+1}}(h^{(\alpha+1)}b^n)^{(-1)}$$

Isto, é claro, é a integral discreta de $x_n = h(n)b^n$ dada em função de $h(n)^{(0)}$,$h(n)^{(1)}$,...,$h(n)^{(\alpha+1)}$. Aqui temos um resultado imediato se $h(n) = p(n)$ for um polinômio de grau $g \geq 1$ e o limite superior do somatório é $\alpha = g$. Vamos estabelecer este resultado como um corolário neste capítulo.

Corolário 5.2. *Se $p(n)$ é um polinômio de grau g, então*

$$(p(n)b^n)^{(-1)} = \sum_{j=0}^{g}(-1)^j \frac{p(n)^{(j)}b^{n+j}}{(b-1)^{j+1}}.$$

Demonstração. De fato pois, conforme a proposição 3.21 temos

$$(p(n)b^n)^{(-1)} = \sum_{j=0}^{\alpha}(-1)^j \frac{p(n)^{(j)}b^{n+j}}{(b-1)^{j+1}} + (-1)^{g+1}\frac{b^{g+1}}{(b-1)^{g+1}}(p(n)^{(g+1)}b^n)^{(-1)}$$

mas como $p(n)$ é um polinômio de grau $g \geq 1$ e $p^{(j)}(n) = 0, \forall j > g$. Segue que

$$(-1)^{g+1}\frac{b^{g+1}}{(b-1)^{g+1}}(p(n)^{(g+1)}b^n)^{(-1)} = 0, \forall n.$$

Procederemos agora ao cálculo de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(n)}{A^n}$.

Seja o somatório

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} p(n)b^n$$

com $|b| < 1$ e $p(n)$ é um polinômio de grau g. Deste somatório, considere a soma parcial

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} p(k)b^k.$$

Mas, conforme a proposição 3.6, também temos

$$S_n = \left[(p(n)b^n)^{(-1)}\right]_1^{n+1}.$$

Segue que, pelo corolário 5.2, obtemos

$$S_n = \left[\sum_{j=0}^{g}(-1)^j \frac{p(n)^{(j)}b^{n+j}}{(b-1)^{j+1}}\right]_1^{n+1}.$$

Logo,

$$Z = \lim_{n\to\infty} S_n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{j=0}^{g}(-1)^j \frac{p(n)^{(j)}b^{n+j}}{(b-1)^{j+1}}\right]_1^{n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{g}(-1)^j \frac{p(n+1)^{(j)}b^{n+j+1}}{(b-1)^{j+1}} - \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{g}(-1)^j \frac{p(1)^{(j)}b^{j+1}}{(b-1)^{j+1}}.$$

Como $|b| < 1$, temos

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{g}(-1)^j \frac{p(n+1)^{(j)}b^{n+j+1}}{(b-1)^{j+1}} = \sum_{j=0}^{g}(-1)^j \lim_{n\to\infty}\frac{p(n+1)^{(j)}b^{n+j+1}}{(b-1)^{j+1}} = \sum_{j=0}^{g}(-1)^j 0 = 0$$

Portanto,

$$Z = -\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{g}(-1)^j\frac{p(1)^{(j)}b^{j+1}}{(b-1)^{j+1}} = -\sum_{j=0}^{g}(-1)^j\frac{p(1)^{(j)}b^{j+1}}{(b-1)^{j+1}} = \sum_{j=0}^{g}(-1)^{j+1}p(1)^{(j)}\left(\frac{b}{b-1}\right)^{j+1}.$$

Por fim, com $A > 1$ façamos $b = \dfrac{1}{A} \Rightarrow \dfrac{b}{b-1} = -\dfrac{1}{A-1}$. Logo,

$$Z = \sum_{j=0}^{g}(-1)^{j+1}(-1)^{j+1}\frac{p(1)^{(j)}}{(A-1)^{(j+1)}}$$

$$\Rightarrow Z = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(n)}{A^n} = \sum_{j=0}^{g}\frac{p(1)^{(j)}}{(A-1)^{(j+1)}},$$

onde $p(1)^{(j)}$, com $0 \leq j \leq g$, são os coeficientes de $p(n)$ da forma racional. Vejam que, se $A = 2$, temos o seguinte resultado

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(n)}{2^n} = \sum_{j=0}^{g}p(1)^{(j)}.$$

Exemplo 5.3. Calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}.$$

Temos $p(n) = n$, de grau $g = 1$. Vejam que

$$p(n) = n = 1 + 1.(n-1) = 1.\binom{n-1}{0} + 1.\binom{n-1}{1}.$$

Portanto, os coeficientes da forma racional de $p(n)$ são $p(1)^{(0)} = 1$ e $p(1)^{(1)} = 1$. Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(n)}{2^n} = \sum_{j=0}^{g}p(1)^{(j)}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} = \sum_{j=0}^{1}p(1)^{(j)} = p(1)^{(0)} + p(1)^{(1)} = 1 + 1 = 2.$$

Exemplo 5.4. Calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}.$$

Desta vez, $p(n) = n^3$, de grau $g = 3$. Segue que, com $0 \leq i \leq g = 3$, os $g + 1 = 3 + 1 = 4$ coeficientes da forma racional de $p(n)$ podem ser calculados diretamente pela fórmula a seguir, conforme a proposição 4.8. Deste modo,

$$p(1)^i = \sum_{k=0}^{i}(-1)^k p(i-k+1)\binom{i}{k}.$$

Assim, utilizando os $g + 1 = 3 + 1 = 4$ primeiros termos de $p(n) = n^3$, ou seja, $p(1) = 1^3 = 1$, $p(2) = 2^3 = 8$, $p(3) = 3^3 = 27$ e $p(4) = n^4 = 64$, temos

$$p(1)^{(0)} = p(1) = 1,$$

$$p(1)^{(1)} = p(2) - p(1) = 7,$$

$$p(1)^{(2)} = p(3) - 2p(2) + p(1) = 12,$$

$$p(1)^{(3)} = p(4) - 3p(3) + 3p(3) - p(1) = 6,$$

Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(n)}{2^n} = \sum_{j=0}^{g} p(1)^{(j)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} = \sum_{j=0}^{3} p(1)^{(j)} = p(1)^{(0)} + ... + p(1)^{(3)} = 1 + 7 + 12 + 6 = 26.$$

Exemplo 5.5. Calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 5n + 6}{5^n}.$$

Temos $p(n) = n^2 - 5n + 6$, de grau $g = 2$ e $A = 5$. Tendo em vista que $p(1) = 2$, $p(2) = 0$, $p(3) = 0$ e utilizando a proposição 4.8, temos

$$p(1)^{(0)} = p(1) = 2,$$

$$p(1)^{(1)} = p(2) - p(1) = -2,$$

$$p(1)^{(2)} = p(3) - 2p(2) + p(1) = 2.$$

Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(n)}{A^n} = \sum_{j=0}^{g} \frac{p(1)^{(j)}}{(A-1)^{(j+1)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 5n + 6}{5^n} = \sum_{j=0}^{2} \frac{p(1)^{(j)}}{4^{(j+1)}} = \frac{p(1)^{(0)}}{4^1} + \frac{p(1)^{(1)}}{4^2} + \frac{p(1)^{(2)}}{4^3} = \frac{2}{4} - \frac{2}{16} + \frac{2}{64} = \frac{13}{32}.$$

♣

Referências

[1] Callioli,C. A.; Domingues, H.H; Costa,R.C.F. *Álgebra Linear e Aplicações*. São Paulo: Editora Atual, 1998.

[2] Iezzi, G. *Fundamentos de Matemática Elementar:Trigonometria*. Volume 3. São Paulo: Editora Atual, 2019.

[3] Iezzi, G. *Fundamentos de Matemática Elementar: Sequências,Matrizes, Determinantes, Sistemas*. Volume 4. São Paulo: Editora Atual, 2019.

[4] Iezzi,G. *Fundamentos de Matemática Elementar: Complexos, Polinômios, Equações*. Volume 6. São Paulo: Editora Atual, 2019.

[5] Lang, S. *Álgebra Linear*. São Paulo: Editora Ciência Moderna, 2003.

[6] Lima, E. *Análise Real, Funções de uma Variável*. Volume 1. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2006.

[7] Lima, R. *Anotações sobre Somatórios*.Rio de Janeiro: Universidade Federal Fluminense, 2000.

[8] Lucas, D.; Franca, I. *Sequências e Séries: Um processo Infinito*. Porto Alegre: Simplíssimo, 2019.

[9] Steinbruch, A.; Winterle, P. *Álgebra Linear*.Pearson Makron Books, 1987.

[10] Stewart, J. *Cálculo*. Volume 1. São Paulo: Editora Pioneira - Thomson Learning, 2009.

[11] Stewart, J. *Cálculo*. Volume 2. São Paulo: Editora Pioneira - Thomson Learning, Cengage Learning, 2009.