

BRUNO SOUSA CARNEIRO DA CUNHA

**ANÁLISE DA ESTABILIDADE AEROELÁSTICA DE
PAINÉIS SANDUÍCHES VISCOELÁSTICOS EM
REGIME SUBSÔNICO EMPREGANDO O MÉTODO
DOUBLET-LATTICE NÃO PLANAR**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2022

BRUNO SOUSA CARNEIRO DA CUNHA

**ANÁLISE DA ESTABILIDADE AEROELÁSTICA DE PAINÉIS
SANDUÍCHES VISCOELÁSTICOS EM REGIME SUBSÔNICO
EMPREGANDO O MÉTODO *DOUBLET-LATTICE* NÃO PLANAR**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, com parte dos requisitos para obtenção do título de **DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima

UBERLÂNDIA-MG

2022

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

C972 Cunha, Bruno Sousa Carneiro da, 1990-
2022 Análise da estabilidade aeroelástica de painéis sanduíches viscoelásticos em regime subsônico empregando o método doublet-lattice não planar [recurso eletrônico] / Bruno Sousa Carneiro da Cunha. - 2022.

Orientador: Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima.
Tese (Doutorado)-Universidade Federal de Uberlândia,
Pós-graduação em Engenharia Mecânica.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.te.2022.616>

Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica. I. Lima, Dr. Antônio Marcos Gonçalves de, 1975-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 621

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074


UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
 Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
 Telefone: (34) 3239-4282 - www.posmecanicaufu.com.br - secposmec@mecanica.ufu.br


ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Tese de Doutorado Acadêmico, nº 342, PPGEM				
Data:	01/12/2022	Hora de início:	09:00	Hora de encerramento:	12:00
Matrícula do Discente:	11823EMC003				
Nome do Discente:	Bruno Sousa Carneiro da Cunha				
Título do Trabalho:	Análise da estabilidade aeroelástica de painéis sanduíches viscoelásticos em regime subsônico empregando o Método <i>Doublet-lattice</i> não planar				
Área de concentração:	Mecânica dos Sólidos e Vibrações				
Linha de pesquisa:	Dinâmica de Sistemas Mecânicos				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	"Métodos Eficientes de Análise de Estabilidade Aeroelástica de Painéis Sanduíches sujeitos a Grandes Deslocamentos e Incertezas Incorporando Materiais Viscoelásticos e Piezelétricos Acoplados a Circuitos Flexíveis Self-powered – Estudos Numéricos e Experimentais"				

Reuniu-se por meio de videoconferência a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Professores Doutores: Francisco José de Souza - FEMEC/UFU; Fran Sérgio Lobato - FEQUI/UFU; Roberto Gil Annes da Silva - ITA; Ramiro Gustavo Ramirez Camacho - UNIFEI; e Antonio Marcos Gonçalves de Lima - FEMEC/UFU, orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Dr. Antonio Marcos Gonçalves de Lima, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Marcos Gonçalves de Lima, Professor(a) do Magistério Superior**, em 01/12/2022, às 12:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **ROBERTO Gil Annes da SILVA, Usuário Externo**, em 01/12/2022, às 12:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francisco José de Souza, Professor(a) do Magistério Superior**, em 01/12/2022, às 12:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Fran Sergio Lobato, Professor(a) do Magistério Superior**, em 01/12/2022, às 12:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ramiro Gustavo Ramirez Camacho, Usuário Externo**, em 01/12/2022, às 12:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4100317** e o código CRC **5FA53377**.

Primeiramente agradeço a Deus pela oportunidade de estar vivo e poder finalizar o trabalho de doutorado numa época de pandemia. Em seguida, aos meus pais Lúcia e Claiton pelo amor incondicional durante minha vida, à minha irmã pela amizade verdadeira e para todas as pessoas que contribuíram de maneira direta ou indireta nessa jornada.

AGRADECIMENTOS

Eu te agradeço Deus, primeiramente, pela oportunidade de estar vivo num período conturbado de pandemia. Também, pelo fornecimento de aptidão para a finalização deste trabalho.

Aos meus pais Claiton e Lúcia pela dedicação, suporte, incentivo, carinho, amor e por fornecer o maior tesouro que é a vida e o suporte nessa eterna jornada que é a aquisição gradual de conhecimento.

À minha irmã Isabela pelo companheirismo e amizade que temos desde o início da nossa jornada nesse mundo.

A todas as pessoas que de forma direta ou indireta, mesmo em caminhos opostos, auxiliaram no processo de finalização de mais um ciclo importante na minha vida. Além disso, àquelas que desencarnaram no período de pandemia, em especial, à minha avó.

A todos os companheiros do laboratório LMEst.

Ao meu orientador Prof. Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima pelos ensinamentos, auxílio nas correções de rotas deste trabalho e dedicação ao longo do projeto mesmo em período de pandemia.

Aos órgãos de fomento CAPES e CNPQ pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento da tese.

Ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia pela oportunidade de realizar este trabalho.

“Existe apenas um bem, o saber,
e apenas um mal, a ignorância.”
Sócrates

CUNHA, B. S. C. **Análise da estabilidade aeroelástica de painéis sanduíches viscoelásticos em regime subsônico empregando o método *doublet-lattice* não planar** 2022. 120f. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

Resumo

Os engenheiros da indústria aeronáutica se deparam frequentemente com fenômenos de *flutter* de painéis em regime subsônico, uma vez que o projeto e análise de veículos aeroespaciais requerem o conhecimento de suas velocidades críticas de *flutter* para requisitos de segurança e prevenção de catástrofes. Assim, sempre que possível é importante avaliar estratégias de controle aeroelástico eficientes e de baixo custo para lidar com o problema do fenômeno do *flutter* de painel. Neste contexto, o uso de camadas viscoelásticas para controle passivo é uma alternativa interessante a ser utilizada em tais situações. No entanto, os procedimentos de modelagem estrutural e aerodinâmica de um sistema aeroviscoelástico submetido a um fluxo de ar em regime subsônico não são triviais. Na maioria dos casos, a dificuldade está relacionada ao fato do comportamento viscoelástico depender fortemente da frequência de excitação e temperatura, resultando em problemas durante o acoplamento entre os modelos estruturais e aerodinâmicos para atender o carregamento não estacionário do modelo aerodinâmico e o comportamento complexo dos materiais viscoelásticos, ocorrendo de forma simultânea. Neste estudo é proposta uma estratégia numérica para modelar sistemas aeroviscoelásticos sob escoamento em regime subsônico para supressão de *flutter* em painéis sanduíches. Utiliza-se um modelo estrutural curvilíneo com três camadas acoplado com o carregamento aerodinâmico por meio do Método *Doublet-Lattice* (DLM) não planar, sendo ambos construídos em ambiente MATLAB® denominado AEROSOLVER o qual faz interfaceamento com o software comercial ANSYS® que é responsável por fornecer as informações da modelagem de elementos finitos (FE) como: matrizes elementares e globais, condição de contorno, propriedades geométricas, sistemas de coordenadas, entre outros. Além disso, para resolver as equações resultantes do sistema aeroviscoelástico, uma versão adaptada do método PK é proposta, juntamente com a utilização da aproximação de Roger para cálculo da matriz aerodinâmica generalizada (GAM), a fim de estimar as velocidades críticas de *flutter* para painéis curvos sanduíches utilizando materiais viscoelásticos. Ademais, estuda-se a influência de parâmetros que caracterizam o desempenho do tratamento viscoelástico como temperatura e espessura de camada.

Palavras chaves: Controle aeroviscoelástico, materiais viscoelásticos, aerodinâmica não estacionária, método *Doublet-Lattice* não planar, sistema aeroviscoelástico.

CUNHA, B. S. C. **Analysis of the aeroelastic stability of viscoelastic sandwich panels in subsonic regime using the nonplanar doublet-lattice method**. 2022. 120f. Thesis, Federal University of Uberlândia, Uberlândia.

Abstract

The engineers of aeronautical industries are frequently facing with subsonic panel flutter phenomena, where the design and analyses of aerospace vehicles requires the knowledge of their critical flutter speeds for safety requirements and to avoid catastrophes. Thus, whenever possible it is important to evaluate efficient and low cost aeroelastic control strategies to deal with the problem of panel flutter phenomenon. In this context, the use of passive constraining viscoelastic layers seems to be an interesting alternative to be used in such situations. However, the structural and aerodynamic modeling procedures of an aeroviscoelastic system subjected to a subsonic airflow are not easy. In most of the cases, the difficult is related to the fact that, the viscoelastic behavior depends strongly on the excitation frequency and temperature, resulting in some difficulties during the coupling between the structural and aerodynamic models to account for the unsteady aerodynamics and complex behavior of the viscoelastic part, simultaneously. In this study, it is proposed an efficient numerical strategy to model aeroviscoelastic systems under subsonic airflows for panel flutter suppression. Here, the curved panel model of a thin three-layer sandwich panel and aerodynamic loadings using the nonplanar Doublet-Lattice method (DLM) are constructed both in MATLAB® environment code denominated AEROSOLVER that is interfacing the commercial software ANSYS® that is responsible to supply the information of the finite element (FE) modeling such as: elementary and global matrices, boundary condition, geometric properties, coordinate systems, etc. In addition, to solve the resulting equations of the aeroviscoelastic system, an adapted version of the PK method is proposed together with the using of Roger's approximation to calculate the generalized aerodynamic matrix (GAM) and estimate the critical flutter speed for curved sandwich panels using materials viscoelastic. Further, is studied the influence of parameters that characterize the performance of the viscoelastic treatment, such as temperature and layer thickness.

Keywords: Aeroviscoelastic control, viscoelastic materials, unsteady aerodynamic, nonplanar Doublet-Lattice method, aeroviscoelastic system.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Diagrama de Collar (adaptado de Hodges e Pierce, 2011).	2
Figura 1.2 – Organização de uma asa AGARD com 50 painéis aerodinâmicos.	4
Figura 1.3 – Triângulo de forças de Collar (extraído de Bisplinghoff et al., 2013).....	5
Figura 3.1 – Derivação de dipolos a partir de dois escoamentos tipo fonte iguais e opostos (extraído de Giesing, 1987).	27
Figura 3.2 – Sistemas de coordenadas globais e locais.....	28
Figura 3.3 – Superfície sustentadora dos painéis aerodinâmicos e o rearranjo elementar para o DLM.....	32
Figura 3.4 – Fluxograma das principais etapas do DLM planar.....	39
Figura 3.5 – Fluxograma das principais etapas do DLM não planar.....	40
Figura 3.6 – Fluxograma completo do DLM não planar disponível no AEROSOLVER.. ..	40
Figura 4.1 – Elemento de placa sanduíche de três camadas.	43
Figura 4.2 – Variação do módulo de armazenamento e do fator de perda com a temperatura para frequência constante (adaptado de NASHIF et al., 1985).	49
Figura 4.3 – Variação do módulo de armazenamento e do fator de perda com a frequência (adaptado de NASHIF et al., 1985).....	49
Figura 4.4 – Princípio da superposição PSFT (adaptado de LIMA et al., 2010).	50
Figura 5.1 - Ilustração das malhas aerodinâmica (2x2) e estrutural (2x2).	54
Figura 5.2 – Aproximação dos pontos de controle aerodinâmicos aos nós da estrutura.	55

Figura 5.3 – Exemplo de diagrama Vg (extraído de GARRICK; REED III, 1981).	58
Figura 5.4 – Etapas do método PK para sistemas aeroelásticos não amortecidos.	59
Figura 5.5 – Etapas do método PK modificado para sistemas aeroviscoelásticos.	59
Figura 5.6 – Etapas das partes estrutural (a) e aerodinâmica (b) do AEROSOLVER..	63
Figura 5.7 – Principais etapas do código AEROSOLVER.	64
Figura 6.1 – Comportamento da função Kernel não planar – AR=1.	66
Figura 6.2 – Comportamento da função Kernel não planar – AR=2.	67
Figura 6.3 – Comportamento da função Kernel não planar – AR=5.	67
Figura 6.4 – Comportamento das partes real (a) e imaginária (b) da função Kernel não planar para AR=10.	68
Figura 6.5 – Representação geométrica da asa Blaircraft 2100.	69
Figura 6.6 – Discretização da geometria da asa Blaircraft 2100.	70
Figura 6.7 – Distribuição de pressão da Blaircraft 2100.	70
Figura 6.8 – Etapas do interfaceamento entre o AEROSOLVER e o ANSYS®	72
Figura 6.9 – Representação do painel curvo sem tratamento viscoelástico.	72
Figura 6.10 – Análise modal do painel curvo no ANSYS® e AEROSOLVER.	74
Figura 6.11 – Diagramas VG (a) e VF (b) do painel curvo sem tratamento viscoelástico.	76
Figura 6.12 – Procedimento iterativo para a resolução do problema de autovalores complexos de sistemas aeroviscoelásticos.	77
Figura 6.13 – Representação dos dois primeiros modos de vibrar do painel curvo com tratamento viscoelástico total – ângulo de curvatura de 41,5°	78
Figura 6.14 – Diagramas VG (a) e VF (b) do painel curvo com tratamento viscoelástico total.	79
Figura 6.15 – Influência do ângulo de curvatura na velocidade de <i>flutter</i> do painel curvo sem e com tratamento viscoelástico.	80
Figura 6.16 – Influência da temperatura na estabilidade do painel curvo com tratamento viscoelástico total – ângulo de curvatura de 41,5°.	81
Figura 6.17 – Influência das espessuras das camadas restringente (a) e viscoelástica (b) na estabilidade do painel curvo com tratamento viscoelástico total – ângulo de curvatura de 41,5°.	82

Figura 6.18 – Energia de deformação modal do painel curvo no ANSYS®- ângulo de curvatura de 41,5°	83
Figura 6.19 – Diagramas VG do painel curvo com tratamento parcial (a) e total (b) – ângulo de curvatura de 41,5°	83
Figura 6.20 – Diagramas VG do painel curvo para o comportamento conservativo associado (a) dissipativo (b) – ângulo de curvatura de 41,5°	84

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Coeficientes da aproximação de Laschka para $u(1 + u^2) - 12$	31
Tabela 4.1 – Características dos materiais viscoelásticos das séries ISD, C e DYAD. .	51
Tabela 6.1 – Parâmetros do escoamento para verificar a parte real da função Kernel não planar.	66
Tabela 6.2 – Parâmetros do escoamento para verificar a parte imaginária da função Kernel não planar.	68
Tabela 6.3 – Propriedades geométricas da asa Blaircraft 2100.	69
Tabela 6.4 – Parâmetros do escoamento da asa Blaircraft 2100.	69
Tabela 6.5 – Comparação dos coeficientes complexos de sustentação.	70
Tabela 6.6 – Parâmetros do escoamento da asa Blaircraft 2100.	71
Tabela 6.7 – Comparação dos resultados do AEROSOLVER com os correspondentes obtidos pela literatura para a asa Blaircraft 2100.	71
Tabela 6.8 – Propriedades físicas do painel curvo sem tratamento viscoelástico.	73
Tabela 6.9 – Propriedades geométricas do painel curvo sem tratamento viscoelástico.	73
Tabela 6.10 – Comparação dos valores próprios dos modelos de EFs do painel sem tratamento do ANSYS® e AEROSOLVER.	74
Tabela 6.11 – Condições do escoamento para a análise de convergência de malha. .	75
Tabela 6.12 - Análise de convergência da malha para do painel curvo sem tratamento.	75
Tabela 6.13 - Propriedades geométricas do painel curvo com tratamento viscoelástico total.	76

Tabela 6.14 - Propriedades mecânicas do painel curvo com tratamento viscoelástico total.....	76
Tabela 6.15 - Frequências naturais do painel curvo sem e com tratamento viscoelástico total.....	78
Tabela 6.16 – Velocidade de flutter e peso do painel curvo sem tratamento viscoelástico, com tratamento viscoelástico total e parcial.....	83
Tabela 6.17 – Influência dos comportamentos dissipativo e conservativo associado do material viscoelástico na estabilidade do sistema aeroviscoelástico.....	84

LISTA DE SÍMBOLOS

Coordenadas:

x, y, z	: Sistema de coordenadas global
x_0, y_0, z_0	: Sistema de coordenadas fontes móveis
ξ, η, ζ	: Sistema de coordenadas do painel

Letras Latinas:

A	: Amplitude de oscilação
AIC	: Matriz dos coeficientes de influência aerodinâmica
a_n	: Termos de aproximação de Laschka
A_1, B_1, C_1, D_1, E_1	: Coeficientes da função aproximadora planar
A_2, B_2, C_2, D_2, E_2	: Coeficientes da função aproximadora não planar
b	: Semi-corda
c	: Corda
\bar{C}_{pn}	: Coeficiente de pressão adimensional
D_{rs}	: Matriz de fatores <i>downwash</i>
D_{0rs}	: Matriz de fatores <i>downwash</i> estacionários
D_{1rs}	: Matriz de fatores <i>downwash</i> planares
D_{2rs}	: Matriz de fatores <i>downwash</i> não planares
e	: Meia envergadura do painel
$E_{R,n}, E_{I,n}$: Função erro: parte real e imaginária
F_{aero}	: Força sustentadora
F_{modal}	: Força sobre a estrutura
G	: Módulo complexo
G'	: Módulo de armazenamento
G''	: Módulo de perda
h	: Deformação
h_a	: Vetor de deslocamentos modais
h_m	: Deformação plano médio
h_t	: Deformação da espessura do plano médio
h_1, h_2, h_3	: Espessuras do painel sanduíche
i	: Unidade imaginária
I_0, J_0	: Somatório finito (Eqs. 3.59)

I_1, J_1	: Integrais de aproximação (Eqs. 3.57)
k	: Frequência reduzida
K	: Função Kernel
K_e	: Rigidez elástica
K_v	: Rigidez viscoelástica
K_1	: Componente planar da função Kernel
K_2	: Componente não planar da função Kernel
K_{10}	: Componente planar da função Kernel estacionária
K_{20}	: Componente não planar da função Kernel estacionária
M	: Número de Mach
Q_j	: Matriz aerodinâmica generalizada
Q_1	: Função aproximadora planar
Q_2	: Função aproximadora não planar
q_∞	: Pressão dinâmica
r	: Distância dos pontos emissores e receptores perpendiculares ao escoamento
R	: Parâmetro da Eq. (3.55.d)
\bar{R}	: Parâmetro da Eq. (3.32.a)
s	: Variável de Laplace
S	: Vetor de áreas sustentadoras
T_{as}	: Interpolações polinomiais dos deslocamentos modais
T_1, T_2	: Parâmetro da Eqs. (3.53)
u, v, w	: Campos de deslocamentos da estrutura viscoelástica
U_∞	: Velocidade da corrente livre
\bar{w}	: <i>Downwash</i> na superfície
x_s	: Corda do painel emissor

Letras Gregas:

α	: Velocidade do som
β	: Parâmetro da Eq. (3.55.c)
β_{m-2}	: Parâmetro empírico da aproximação de Roger
γ	: Deformação de cisalhamento
ε	: Deformação longitudinal
η	: Fator de perda
θ	: Grau de liberdade rotacional
μ	: Viscosidade
ν	: Viscosidade cinemática
ρ	: Densidade específica
σ	: Tensão longitudinal
τ	: Tensão de cisalhamento
ϕ	: Velocidade potencial
Ψ	: Potencial de aceleração
ω	: Frequência

LISTA DE ABREVIações

AIC: Coeficientes de influência aerodinâmica

AR: Alongamento (*Aspect Ratio*)

CCA: Comportamento dissipativo e conservativo

CFC: Fluidodinâmica computacional (*Computational Fluid Dynamics*)

DLM: Método *Doublet-Lattice*

EFs: Elementos finitos

FRFs: Funções em resposta da frequência

GAM: Matrix aerodinâmica generalizada

GDLs: Graus de liberdade

MAC: Critério de confiança modal (*Modal Assurance Criterion*)

MEF: Método de elementos finitos

PEEV: Princípio da equivalência elástico-viscoelástico

PSFT: Princípio da superposição frequência-temperatura

VLM: Método *Vortex-Lattice*

SUMÁRIO

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	9
2.1 Modelo aerodinâmico não estacionário: Método <i>Doublet Lattice</i>	9
2.2 Materiais viscoelásticos para a supressão do fenômeno do <i>flutter</i>	14
CAPÍTULO III - MODELAGEM AERODINÂMICA	17
3.1 Formulação matemática do <i>downwash</i>	18
3.2 Formulação da função Kernel não planar	29
3.3 Método <i>Doublet Lattice</i> (DLM)	32
3.3.1 Aproximação parabólica	33
3.3.1.1 <i>Downwash</i> planar	33
3.3.1.2 <i>Downwash</i> não planar	35
3.3.2 Aproximação quártica.....	36
3.3.2.1 <i>Downwash</i> Planar	36
3.3.2.2 <i>Downwash</i> Não Planar.....	37
3.4 Fluxograma do método DLM não planar	39
CAPÍTULO IV - PLACAS SANDUÍCHES VISCOELÁSTICAS.....	42
4.1 Relações tensão-deformação	42
4.2 Discretização por elementos finitos.....	45
4.3 Matrizes elementares de massa e rigidez	46
4.4 Amortecimento viscoelástico.....	48
CAPÍTULO V - MODELAGEM DO PROBLEMA AEROVISCOELÁSTICO	52
5.1 Acoplamento entre os modelos estrutural e aerodinâmico	52
5.2 Matrizes generalizadas no domínio modal	55

5.3 Método PK adaptado para sistemas aeroviscoelásticos	56
5.4 Interpolação das matrizes aerodinâmicas generalizadas	60
5.4.1 Aproximação de Roger	60
5.5 Código AEROSOLVER	62
5.5.1 Programa aerodinâmico	62
CAPÍTULO VI - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	65
6.1 Verificação do DLM não planar	65
6.1.1 Comportamento da função Kernel	65
6.1.2 Asa Blaircraft 2100 – Discretização de 18 painéis	68
6.1.3 Asa Blaircraft 2100 – Discretização de vários painéis	70
6.2 Estratégia de interfaceamento AEROSOLVER/ANSYS®	71
6.2.1 Análise de convergência da malha	74
6.3 Análise de estabilidade do painel curvo com tratamento viscoelástico	76
6.3.1 Influência da temperatura de operação na estabilidade do sistema	80
6.3.2 Influência das espessuras das camadas na estabilidade do sistema	81
6.3.3 Influência do tratamento viscoelástico parcial	82
6.4 Efeito da dissipação do material viscoelástico na estabilidade do sistema	84
CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS	86
Resumo e contribuições	86
Perspectivas de trabalhos futuros	89
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	90

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Ao longo do desenvolvimento tecnológico da humanidade, buscou-se cada vez mais a aceleração dos meios de transporte. No século XIX, as ferrovias foram importantes para a unificação dos territórios, visto na integração da Europa e a ligação do leste ao oeste nos Estados Unidos. Nesse contexto histórico, a produção em massa de veículos desenvolvida por Henry Ford também auxiliou no aumento desse processo. Sendo assim, a busca pela redução do tempo de deslocamento se tornou desejável ao longo do século XX, o que gerou o desdobramento da aviação comercial e militar proporcionando uma nova fase de conquistas científicas e de qualidade de vida para as pessoas.

Assim, têm-se observado a tendência de realização de estruturas cada vez mais extensas e leves e com velocidades cada vez maiores de operação. Além disso, os estudos das interações entre a estrutura e as cargas aerodinâmicas tornaram-se um fator crítico ao longo dos anos, devido ao desempenho e segurança dos produtos aeronáuticos.

O estudo multifísico sobre a interação entre as áreas da mecânica dos fluidos e da dinâmica estrutural é difundido em diversos trabalhos, como exemplo têm-se a redução das vibrações induzidas por vórtices utilizando materiais viscoelásticos (CUNHA, 2016); no estudo nas áreas de construção civil como em ventos em pontes (SOUZA, 2013); em biomecânica, como no estudo do escoamento do sangue no interior de um aneurisma (FEIJÓ, 2007); na indústria petrolífera, com os *risers* de plataformas *offshores* que se movimentam pela ação das correntes marítimas (ALMEIDA, 2010); em chaminés industriais, com a redução das amplitudes das vibrações causadas por

rajadas de ventos (GRALA,2013); e o estudo de uma aeronave flexível em regime não estacionário por meio do método *Doublet-Lattice* (DLM) (GUIMARÃES-NETO, 2008).

Em particular nas indústrias aeronáutica e aeroespacial, a relação entre os campos da aerodinâmica, elasticidade e da dinâmica estrutural é conhecido como aeroelasticidade. De forma usual, os fenômenos desta área podem ser classificados como estáticos ou dinâmicos (WRIGHT; COOPER, 2007), sendo que o escoamento aerodinâmico estacionário está associado ao movimento do fluido em torno da forma do corpo, enquanto o aerodinâmico não estacionário ocorre ao redor de corpos que se movimentam durante um intervalo de tempo, gerando um deslocamento do fluido (SILVA, 2009). Uma forma didática de representação da interação entre as áreas da elasticidade, aerodinâmica e da dinâmica estrutural é por meio do diagrama de Collar ilustrado na Figura 1.1.



Figura 1.1 – Diagrama de Collar (adaptado de Hodges e Pierce, 2011).

Então, existem três teorias aerodinâmicas com maior destaque na literatura, a saber:

- 1) Teoria das Faixas: o objetivo, basicamente, é a divisão da superfície de sustentação em faixas com largura finita dispostas ao longo da envergadura. A limitação dessa teoria se dá para casos em que os efeitos tridimensionais podem ser desprezados, tais como asas de grande alongamento. As primeiras soluções para o problema da aerodinâmica não estacionária foram obtidos por (THEODORSEN, 1935; KÜSSNER; SCHWARZ, 1940);

- 2) Teoria do Pistão: este modelo foi originalmente proposto por (LIGHTHILL, 1953) e fornece uma aproximação para o campo de pressão aerodinâmico provocado por um escoamento supersônico e não estacionário que pode ser gerado por equações lineares e não-lineares, podendo ser acoplado com o método dos elementos finitos (MEF);
- 3) Método *Doublet-Lattice* (DLM): é uma extensão da metodologia *Vortex-Lattice* (VLM), entretanto, pode ser utilizado para aerodinâmica não estacionária. Baseia-se na teoria do potencial aerodinâmico e concentra-se em superfícies sustentadoras planares e não planares em fluxo subsônico. Uma limitação DLM é a desconsideração dos efeitos viscosos no equacionamento e o trabalho com ondas de choque em regime transônico e supersônico (ALBANO; RODDEN, 1969; RODDEN; GIESING; KALMAN, 1971; RODDEN; GIESING; KALMAN, 1972; RODDEN; TAYLOR; MCINTOSH, 1996; RODDEN; TAYLOR; MCINTOSH, 1998; RODDEN; TAYLOR; MCINTOSH, 1999; KALMAN et al., 1971).

De acordo com Kotikalpudi (2015), o DLM é um método de painéis baseado em escoamento potencial para a solução de um fluxo aerodinâmico não estacionário ao redor de uma superfície sustentadora, visto que a distribuição de pressão é obtida junto à estrutura a partir de uma dada condição de contorno. Em outras palavras, ele fornece a resposta em frequência específica para um dipolo de pressão junto à uma superfície. Sendo assim, deve-se levar em consideração a organização dos painéis aerodinâmicos, como ilustrado na Figura 1.2, já que os dipolos de pressão estão a $\frac{1}{4}$ da corda e, por convenção empírica, o ponto de controle da *normalwash* está a $\frac{3}{4}$ da corda.

Originalmente, o DLM propõe uma aproximação parabólica dos dipolos de pressão ao longo da envergadura de cada painel. Este tipo de aproximação se mostrou ineficiente para casos em que o alongamento dos painéis se tornava elevado, requerendo o uso de mais painéis na discretização das superfícies e o consequente aumento do custo computacional do método (ALBANO; RODDEN, 1969). Ainda hoje, com os sucessivos incrementos e aprimoramento dos computadores e dos métodos avançados de CFD (*Computational Fluid Dynamics*), o DLM é uma ferramenta poderosa de projeto, pois permite uma alta eficácia e confiabilidade nos resultados gerados com um custo computacional satisfatório. Além disso, a sua grande adaptabilidade para a utilização com técnicas de discretização como o MEF, também torná-lo muito atrativo.

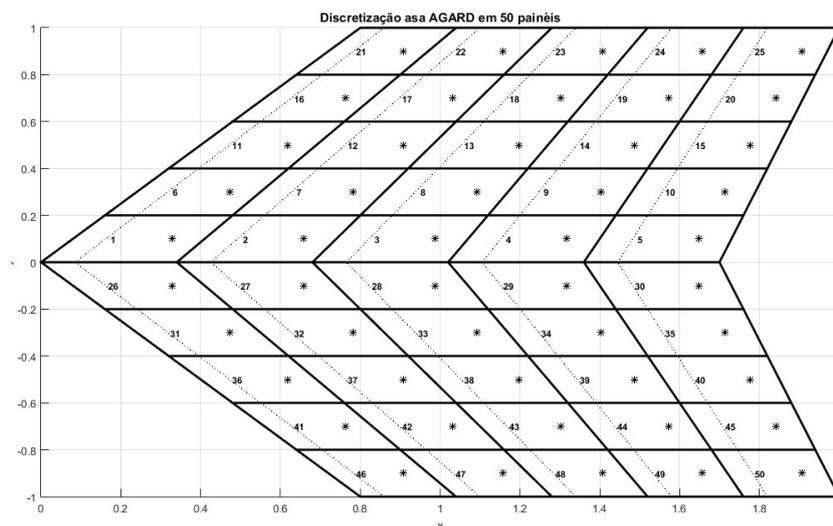


Figura 1.2 – Organização de uma asa AGARD com 50 painéis aerodinâmicos.

Uma vez que, o DLM tornou-se uma fonte padrão confiável para o cálculo do carregamento aerodinâmico para a análise dinâmica e, conseqüentemente, determinar a região de *flutter* em regime subsônico, buscou-se melhorar este método. Dessa maneira, nota-se que a utilização de uma função interpoladora de quarta ordem auxilia na redução do custo computacional envolvido nas análises, já que neste novo cenário, são necessários um número reduzido de painéis aerodinâmicos para estruturas de grande alongamento (RODDEN; TAYLOR; MCINTOSH, 1998).

Outra linha de melhoramento do DLM ocorreu por meio de correções feitas com dados provenientes de ensaios em túnel de vento ou utilizando dados provenientes de simulações com CFD. Isto foi feito para reduzir as dispersões ocasionadas pela falta de parâmetros viscosos e para números de Mach em regimes transônico e supersônico (MCCAIN, 1984; PITT; GOODMAN, 1987; ROUGHEN et al., 2001; VALENTE et al., 2016; VALENTE et al., 2017; PALACIOS et al., 2001; GUIMARÃES-NETO et al., 2014)

No diagrama de forças de Collar ilustrado na Figura 1.3, tem-se a interação entre o carregamento aerodinâmico, elástico e inercial. Para a aeroelasticidade estática, os fenômenos levam em consideração as forças elásticas e aerodinâmicas, onde L (distribuição de carga), D (divergência), R (reversão do sistema de controle), V (vibrações mecânicas) e DS (estabilidade aerodinâmica do corpo rígido), Já para a aeroelasticidade dinâmica, existem três efeitos principais: Z (resposta dinâmica do sistema), B (*buffeting* que é uma instabilidade de alta frequência) e F (*flutter*, sendo uma oscilação autoexcitada numa superfície sustentadora sofrendo deflexões que podem atingir o limite da estrutura).

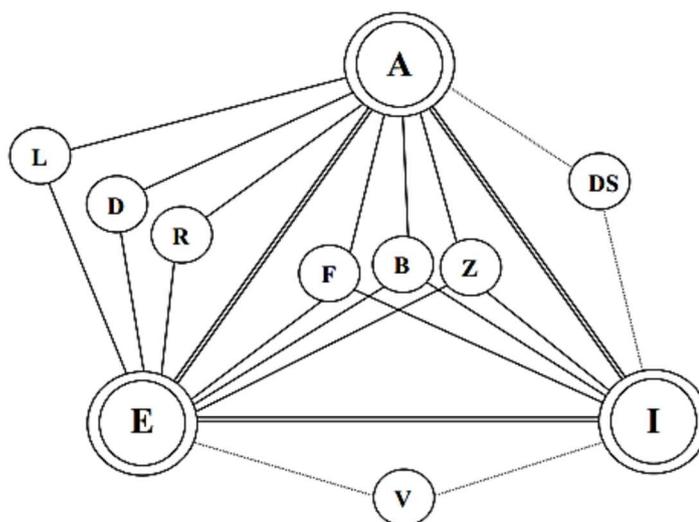


Figura 1.3 – Triângulo de forças de Collar (extraído de Bisplinghoff et al., 2013).

Neste contexto, com o desenvolvimento de aeronaves cada vez mais leves e esbeltas e com velocidades de voo cada vez maiores, o estudo do fenômeno de *flutter* se tornou primordial para mensurar os seus efeitos nas aeronaves e assegurar a melhor relação de desempenho versus segurança. No trabalho de Garrick e Reed III (1981), os autores mostraram uma visão geral de vários estudos sobre o fenômeno do *flutter* ao longo do século XX, com destaque para: a) *flutter* na ponta da asa ocasionado por insuficiente rigidez na estrutura; b) *flutter* do conjunto asa-aileron, na cauda e do estabilizador vertical; c) *flutter* na asa, hélices e rotores ocasionados por um alto ângulo de ataque; d) *flutter* na hélice, gerado pela combinação do sistema motor-hélice; e) *flutter* de painel.

Nas últimas décadas, muitas pesquisas abordaram estudos referentes a técnicas de controle de vibrações e ruído de sistemas dinâmicos, com grande potencial para a supressão do fenômeno do *flutter*. Dentre as inúmeras técnicas de controle que foram propostas por Nagahama (2013), o controle passivo via emprego dos materiais viscoelásticos é considerando uma das técnicas promissoras para este fim, tendo em vista sua grande eficiência em amplas faixas de frequência e baixo custo de aplicação e manutenção (NASHIF et al., 1985). Sendo assim, conforme apontado por Lima (2003), esses materiais estão sendo muito utilizados como estratégia de amortecimento em veículos espaciais, satélites de comunicações, robôs, compressores herméticos, automóveis e estruturas da construção civil.

Entretanto, uma das grandes desvantagens quanto ao emprego dos materiais viscoelásticos como forma de controle de vibrações de sistemas dinâmicos, é a forte dependência das suas propriedades mecânicas com fatores operacionais e ambientais como frequência de oscilação e temperatura de operação. Então, torna-se indispensável a busca por modelos matemáticos cada vez mais representativos para a caracterização do comportamento dinâmico de materiais viscoelásticos no domínio da frequência, principalmente em aplicações aeroelásticas como as de interesse deste trabalho.

Outra dificuldade quanto à modelagem de estruturas aeroelásticas incorporando materiais viscoelásticos para a supressão do *flutter* em regime subsônico, é o alto custo computacional envolvido as análises aeroelásticas, uma vez que, as matrizes de rigidez da subestrutura viscoelástica é dependente da frequência e da temperatura. Então, muitos esforços de pesquisa têm sido feitos para obter modelos viscoelásticos cada vez mais eficientes para lidar com sistemas dinâmicos mais complexos (BALMÈS; GERMÈS, 2002; LIMA et al., 2010; LIMA et al., 2009; ESPINDOLA, 1997; BAVASTRI, 2013). Por exemplo, após o surgimento dos primeiros modelos reologicamente simples de Maxwell, Kevin-Voigt e Zener (DROZDOV, 1998, LIMA, 2003, MAINARD, 2010), surgiram os chamados modelos modernos, como o modelo das derivadas fracionárias (MDF) (BAGLEY; TORVIK 1983, BAGLEY; TORVIK, 1985), o modelo de Golla-Hughes-McTavish (GHM) (MARTIN; INMAN, 2013) e o modelo dos campos de deslocamentos anelásticos (ADF) (GALUCIO; DEÜ; OHAYON, 2004).

Vários trabalhos mostram a aplicação dos materiais viscoelásticos para a supressão do *flutter* de painel em regime supersônico (MERRETT; HILTON, 2010; GUIMARAES et al., 2017; HASHEMINEJAD; MOTAALLEGHI, 2015; MOON; KIM, 2001). Além disso, Cunha-Filho et al. (2016) mostrou a eficiência de tratamentos viscoelásticos superficiais para o aumento da velocidade de *flutter* de um painel sujeito a um escoamento supersônico. Em função do elevado custo computacional envolvido nas análises aeroelásticas mesmo em regime supersônico, foram propostas estratégias eficientes de redução de modelos bem adaptadas aos sistemas aeroviscoelásticos (BRIEND, 2017; CUNHA-FILHO, 2019).

Portanto, neste trabalho, é proposta uma metodologia numérico-computacional para a análise de estabilidade dos sistemas aeroelásticos do tipo placas sanduíches com material viscoelástico para a supressão do *flutter* subsônico. Para tanto, é utilizado o MEF para a modelagem da estrutura sanduíche juntamente com o DLM não estacionário e não planar para a geração do carregamento aerodinâmico. A combinação dos dois modelos se dá por meio da matriz aerodinâmica generalizada (GAM).

A implementação do DLM não planar feita neste trabalho se deve em função das suas vantagens sobre outros modelos aerodinâmicos, como a capacidade de extensão para várias superfícies sustentadoras aliada ao baixo custo computacional, além da sua alta comparabilidade com outras metodologias como o CFD. Aliás, este é um dos motivos do método DLM ser extensivamente utilizado nas indústrias aeronáutica e aeroespacial em fases preliminares de projetos aerodinâmicos.

Neste ponto, vale ressaltar que esta Tese visa também desenvolver uma ferramenta numérico-computacional avançada chamada aqui de AEROSOLVER, para análise de estabilidade de sistemas aeroviscoelásticos utilizando o MEF combinado com o DLM não planar. Por fim, também será feita uma análise da influência de parâmetros físicos e geométricos na eficiência do tratamento viscoelástico superficial, além das posições ótimas do tratamento viscoelástico, levando em conta as informações das energias de deformação modal, visando aplicações práticas de interesse aeronáutico.

Além deste capítulo introdutório, essa Tese está dividida nos seguintes capítulos:

No capítulo II é apresentada uma breve revisão da literatura aberta acerca dos principais trabalhos relacionados às áreas de interesse deste trabalho para um melhor posicionamento quanto às suas contribuições.

O capítulo III descreve o modelo DLM não estacionário e não planar que foi implementado na Tese. Primeiramente, parte-se da linearização do potencial aerodinâmico para o escoamento invíscido, compressível e no regime subsônico. É mostrada toda a formulação para se chegar na *normalwash*, bem como a solução da função Kernel não planar e suas respectivas funções interpoladoras de segundo e quarto grau. Por fim, é mostrado um fluxograma das principais etapas do código AEROSOLVER.

No capítulo IV discorre sobre o modelo estrutural curvilíneo com três camadas a qual possui a intermediária preenchida com material viscoelástico. São tratadas as principais equações de interesse dessa modelagem bem como a discretização baseada em elementos finitos. Ao final, conceitua-se os principais tópicos relacionados aos materiais viscoelásticos, assim como as principais equações do modelo 3M ISD112 utilizado para a obtenção dos resultados numéricos.

O capítulo V, é focado no acoplamento entre o carregamento aerodinâmico obtido pelo DLM com o modelo MEF de uma superfície sustentadora do tipo painel curvo sanduíche de três camadas, utilizando a matriz generalizada dos coeficientes aerodinâmicos (GAM). Assim, o interesse é o estudo de fenômenos dinâmicos como a

obtenção da velocidade crítica de *flutter*. Além disso, será abordado a utilização dos coeficientes de aproximação de Roger a partir das matrizes aerodinâmicas generalizadas e, conseqüentemente, o método para o cálculo da velocidade de *flutter*, em especial o método PK que foi modificado para lidar com o problema aeroviscoelástico deste trabalho. Ademais, é mostrado o procedimento para a obtenção do modelo de uma placa curva através do interfaceamento entre o código comercial ANSYS® e o código próprio AEROSOLVER feito em ambiente MATLAB®.

No capítulo VI, primeiramente, é apresentado os principais resultados, incluindo uma parte sobre a verificação da função Kernel não planar, e a matriz dos coeficientes de influência aerodinâmicos (AIC), tendo como referência os principais trabalhos da literatura. Adiante, é verificado o fenômeno do *flutter* para diversas situações, a saber: a) com resultados para uma placa curva sem material viscoelástico; b) estudo comparativo de uma placa curva com e sem material viscoelástico; c) estudo sobre a influência da temperatura de operação do sistema e das espessuras das camadas na eficiência do tratamento viscoelásticos; d) influência do tratamento viscoelástico parcial na estabilidade do painel curvo, levando em conta as energias de deformação modal dos modos de interesse; e) o estudo da dissipação do material viscoelástico na estabilidade do sistema aeroviscoelástico.

No capítulo VII, são apresentadas as conclusões gerais do trabalho, bem como as perspectivas de trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Modelo aerodinâmico não estacionário: Método *Doublet Lattice*

Na aeroelasticidade, os fenômenos aeroelásticos são resultantes da interação entre os campos da aerodinâmica, elasticidade e da dinâmica estrutural. Este ramo da engenharia é muito importante, não apenas no projeto de aeronaves, mas em várias outras aplicações, tal como no projeto de pontes e prédios, carros de competição, turbinas eólicas e *risers* utilizados na exploração de petróleo. De uma forma geral, os fenômenos aeroelásticos podem ser classificados em dois grandes grupos: o estático, onde o carregamento aerodinâmico é considerado estacionário; e o dinâmico em que os efeitos oscilatórios do carregamento devem ser considerados, sendo mais indicado para o estudo do fenômeno do *flutter*. Com relação a este último, Henshaw et al. (2007) faz um estudo interessante sobre várias metodologias para a caracterização do fenômeno do *flutter*, utilizando tanto os métodos lineares quanto os não-lineares. O objetivo do trabalho é a aplicação dessas técnicas em ambiente industrial, além da apresentação de exemplos simples até aeronaves completas.

Conforme Wright e Cooper (2007), a natureza transiente dos esforços aerodinâmicos no fenômeno do *flutter* leva à uma dificuldade suplementar para sua análise. Nesta mesma linha de estudo, Ingram e Szwarc (1976), Yurkovich (2003) e Yan et al. (2016) realizaram vários estudos sobre estratégias a fim de melhorar a eficiência de sistemas aeroelásticos com o intuito de evitar catástrofes. Além deles, Stanford et al. (2014) e Alyanak e Pendleton (2017) investigaram os efeitos da orientação de fibras de

estruturas compósitas e a variação espacial das fibras na velocidade crítica de *flutter* de placas sanduíches.

Uma série de trabalhos podem ser encontrados na literatura aberta que tratam do problema aerodinâmico não estacionário. Como exemplo, é possível citar os trabalhos de Hassig (1971), Yurkovich (2003), Dowell et al. (2004), Wright e Cooper (2007), Fung (2008), Hodges e Pierce (2011) e Bisplinghoff et al. (2013). Benini (2002) propõe um modelo aeroelástico de asas fixas para tratar separadamente a aerodinâmica e a dinâmica estrutural e depois acoplá-las numa única equação do movimento. Neste caso, o modelo estrutural faz uso do MEF e o carregamento aerodinâmico não estacionário é obtido pelo método de malha de vórtices. Ambas as metodologias são acopladas por meio de interpolação utilizando *splines* de superfícies. Por fim, a equação do movimento do sistema aeroelástico resultante é resolvida por um método de iteração temporal preditor-corretor.

Uma das abordagens utilizadas para tratar o problema da aerodinâmica não estacionário em regime subsônico é o método DLM proposto por Albano e Rodden (1969). Ele é considerado como sendo um desdobramento do método *Vortex-Lattice* (VLM) que foi proposto por Hedman (1965) e fundamentado em escoamentos estacionários. Neste caso, há uma subdivisão dos painéis aerodinâmicos em elementos menores com linhas de dipolos dispostas a $\frac{1}{4}$ da corda, além da utilização de uma função Kernel do tipo parabólica.

De acordo com Van Zyl (1998), o DLM baseia-se no MEF, onde o objetivo é encontrar soluções oscilatórias para o campo de pressão no regime subsônico utilizando equações integrais para múltiplas superfícies. Para Kotikalpudi (2015), o DLM fornece a resposta em frequência para a distribuição do campo de pressão para um determinado escoamento numa frequência específica. Portanto, ele tem sido muito útil para fases preliminares de projetos aeroelásticos para caracterizar as velocidades *flutter*.

O estudo (RODDEN; GIESING; KALMAN, 1971) mostra os detalhes sobre a modelagem do DLM não planar em regime subsônico, onde é abordado a formulação da função Kernel não planar utilizando uma aproximação do tipo parabólica. Além disso, é mostrado dentro do painel aerodinâmico a posição da condição de contorno *normalwash* que deve estar a $\frac{3}{4}$ da corda utilizando uma função polinomial. Ademais, são apresentadas aplicações em empenagens do tipo "T" e em combinações do tipo *asa/pylon* e *asa/fuselagem*. Os autores também propuseram melhorias no cálculo da função Kernel parabólica do DLM não planar original para tratar as discontinuidades

causadas por inúmeras superfícies coplanares como, por exemplo, asa/empenagem horizontal.

Um novo trabalho (RODDEN; TAYLOR; MCINTOSH JR., 1998) aborda uma segunda forma de refinamento dos dipolos de pressão a partir do estudo da função Kernel, visto que o objetivo é sua melhoria com a utilização de um polinômio de quarto grau. Então, percebeu-se pelos resultados que essa nova técnica auxiliava na redução do número de painéis aerodinâmicos e melhorava o desempenho computacional. Vale ressaltar que Rodden e Johnson (1994) foram os responsáveis pelo desenvolvimento do manual de aeroelasticidade do MSC/NASTRAN.

Na sequência, outro artigo (RODDEN; TAYLOR; MCINTOSH JR., 1999) estudou a convergência do método com várias aplicações da função Kernel em problemas não planares, além de avaliar a influência do alongamento da estrutura para diferentes configurações de painéis. Foi feito também uma comparação qualitativa dos polinômios parabólicos e de quarta ordem.

Já no trabalho de Van Zyl (1998), foi realizado um estudo da convergência do método DLM em regime subsônico, onde foi investigada a interpolação da função Kernel do tipo parabólica e de quarta ordem. O autor também concluiu que o aumento da ordem da função interpoladora corrobora para a redução do número de painéis aerodinâmicos. Além disso, no referido trabalho, o autor propõe uma nova forma de interpolação da função kernel de ordem cúbica que é denominada de *spline*. Nota-se pelos resultados que há a necessidade de vários pontos para a função interpoladora alcançar o resultado analítico, além do aumento significativo do custo computacional. Já em 1999, Van Zyl mostra os resultados da aplicação do DLM em asas do tipo delta, onde são investigados os efeitos do alongamento deste tipo de asa, além de uma análise de convergência de malha no processo de discretização. Já em 2003, o mesmo autor avaliou a robustez do DLM para uma asa retangular de alongamento 20, asa delta delgada e uma asa delta 70°. Por fim, Van Zyl e Mathews (2011) propuseram melhorias no método DLM para o cálculo de empenagens do tipo "T", visando a predição do fenômeno do *flutter*.

Em Brock e Griffin (1975) tem-se o desenvolvimento de uma metodologia DLM planar não estacionária no regime supersônico através da utilização da função Kernel supersônica proposta por Harder e Rodden (1971). Já no trabalho de Pi et al. (1979), foi desenvolvido o DLM não estacionário para os casos de ondas de choque transônicas e estruturas não planares. Propõe-se um fator de correção (GIESING; KALMAN; RODDEN, 1976) com o objetivo de melhorar a predição da matriz dos coeficientes de influência aerodinâmica (AIC) para encontrar as velocidades críticas de *flutter*.

Mccain (1984) fez uma comparação entre os resultados práticos obtidos em túnel de vento com os correspondentes gerados com o DLM implementado pelo próprio autor. O estudo foi feito para as condições subsônica, com Mach igual a 0,6, e transônica, com Mach igual a 0,78. O autor considerou altos valores para o alongamento da estrutura, além de modificações no ângulo de ataque. Foi constatado uma divergência entre os resultados experimentais e os obtidos pela simulação numérica, visto que na formulação do método DLM não foi considerada a viscosidade e nem os efeitos transônicos.

Em termos do formalismo matemático do método DLM planar, o trabalho de Blair (1994) é, sem dúvidas, um dos mais ricos em detalhes, com destaque para o desenvolvimento das condições de contorno e da obtenção da *normalwash*, além da resolução da função Kernel usando a aproximação parabólica. Portanto, com o objetivo de verificar o código próprio implementado nesta Tese, toma-se como referência os resultados apresentados por Blair (1994).

No artigo de Pitt e Goodman (1987), foi proposto um fator de correção para o DLM baseado em CFD. No estudo, foram consideradas ondas de choque transônicas, torção de asas, ângulo de ataque, curvaturas e o formato dos aerofólios. Além disso, a matriz AIC foi modificada pela introdução deste fator de correção, e os resultados foram satisfatórios para a determinação das velocidades críticas de *flutter*.

Brendel e Sulaeman (1994) modificaram o método DLM a partir do tratamento parcial da função Kernel, onde foram consideradas as partes planar e não planar, além de uma expansão em série de Ueda e funções de Bessel. Segundo os autores, não foram verificados ganhos significativos em termos da eficiência computacional com tal alteração.

Em Roughen et al. (2001), tem-se um estudo comparativo interessante entre os resultados com DLM, CFD e experimentais obtidos em túnel de vento. Pode-se notar claramente as limitações do DLM, uma vez que ele não leva em consideração os efeitos viscosos e para ondas de choques transônicas.

Em Baker e Rodden (2001), utiliza-se de correção para o DLM a partir do ajuste da extremidade na malha aerodinâmica. Nota-se que este procedimento numérico melhora os valores da parte real da matriz AIC sem a alteração significativa da parte imaginária. Os autores recomendam essa nova adaptação junto à malha em virtude dos benefícios dos cálculos e a sua fácil implementação no DLM.

Já em Palacios et al. (2001), os autores também propõem o uso de um fator de correção linear para a modelagem CFD para o escoamento transônico não estacionário.

Isto é feito através da iteração com métodos não lineares. Um dos objetivos apontados pelos autores é o ganho em desempenho computacional do DLM.

Em Valente et al. (2016; 2017), tem-se a utilização de um fator de correção para o DLM em regime transônico para a análise de rajadas de vento. Neste caso, o autor realizou a correção da matriz AIC por meio de resultados de simulação CFD.

Um exemplo interessante do uso do DLM pode ser visto em Gangwani (1982). O autor aplica a metodologia para a determinação das vibrações indesejáveis geradas por cargas aerodinâmicas não-estacionárias em rotores de helicópteros.

Prasad e Holla (1980) propõem uma técnica numérica para melhorar a eficiência computacional do DLM em termos do cálculo da matriz AIC para carregamentos não estacionários de asas em regime subsônico. Uma vez que alguns termos da parte real da matriz AIC se repete, o algoritmo proposto pelos autores faz o cálculo somente dos pontos necessários e replica-os para os demais pontos.

Em Santos et al. (2005), tem-se uma implementação interessante do DLM para superfícies planares no domínio da frequência. Nesse artigo, os autores utilizam a predição das velocidades críticas de *flutter* a partir dos métodos PK e KE. Por fim, eles comparam os resultados obtidos com dados experimentais e com os correspondentes obtidos por CFD.

Guimarães-Neto (2008) propõe um estudo de uma aeronave flexível em regime não estacionário por meio do DLM. Neste caso, o autor consegue contemplar o atraso da resposta aerodinâmica às excitações oriundas das deformações da estrutura. O código proposto pelo autor passou a ser denominado de DLM-2008, possibilitando a simulação de configurações de asas e empenagens utilizando placas planas. O método DLM-2008 foi utilizado por Guimarães-Neto (2014) para a análise da dinâmica de voo de uma aeronave flexível no regime subsônico.

No trabalho de Guimarães-Neto et al. (2014), utilizam-se uma forma diferente para a correção dos coeficientes da matriz AIC. Os autores sugerem uma alteração dos pontos de controle, uma vez que, por regra, para o DLM, as linhas de dipolo e ponto de controle estão, respectivamente, a $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$ da corda. Assim, esta metodologia é uma ferramenta interessante para reduzir as aproximações do método DLM, visto que este não considera a viscosidade e nem os efeitos das ondas de choque transônica. Portanto, o fator de correção proposto leva a resultados comparáveis com os obtidos por CFD ou em túnel de vento.

Em Silva (2018), foi apresentado um estudo numérico sobre o uso de materiais viscoelásticos para a supressão do *flutter* de painéis retangulares em regime subsônico. Entretanto, toda a implementação foi feita via código comercial NASTRAN®. Uma das principais dificuldades apontada pela autora foi a introdução da dependência da frequência e temperatura das propriedades do viscoelástico na análise, além da falta de referências na literatura aberta para a verificação da metodologia. No trabalho de Borges (2019), foi apresentado uma metodologia de acoplamento entre o DLM planar em regime subsônico com possibilidade de inclusão de algum tipo de amortecimento externo tais como o amortecimento viscoelástico, mas utilizando modelos simplificados da parte viscoelástica. Uma das grandes contribuições do autor foi a utilização da aproximação de Roger para gerar as matrizes aerodinâmicas generalizadas e, em seguida, verificar o fenômeno de *flutter* por meio da metodologia PK.

Já no artigo de Eversman e Pitt (1991), foi proposta uma metodologia híbrida entre os métodos *doublet-lattice* e *doublet-point*, podendo ser utilizada tanto para casos planares quanto para os não planares. Dessa maneira, consegue-se uma metodologia mais eficiente do ponto de vista computacional sem perder qualidade nos resultados.

Em Chen e Bhasin (2012), é feita uma comparação entre dois métodos para o cálculo aerodinâmico não estacionário em superfícies sustentadoras: o método DLM e o ZONA6. Os autores concluíram que a grande diferença entre ambos é a parte real da matriz aerodinâmica generalizada para altos valores de frequência reduzida.

O trabalho de Murphy (2012) é apresentado também uma metodologia híbrida para o cálculo das velocidades de *flutter*, uma vez que utiliza os dados obtidos pelo carregamento aerodinâmico proveniente do DLM em conjunto com os resultados do cálculo estrutural fornecidos pela empresa Bombardier. Além disso, inclui-se os dados de CFD para a correção da matriz AIC para obter resultados mais coerentes em termos das velocidades críticas de *flutter* em regime subsônico.

2.2 Materiais viscoelásticos para a supressão do fenômeno do *flutter*

Os materiais viscoelásticos são comumente empregados no controle passivo de vibrações e ruídos de inúmeros sistemas mecânicos. O maior incentivo para a utilização desses materiais é a sua facilidade de aplicação aliado ao baixo custo de manutenção, além da sua eficiência em amplas faixas de frequência. As áreas de aplicações são inúmeras, a saber: automobilística, robótica, construção civil, aeroespacial, dentre

outras. Dessa forma, o emprego desses materiais como técnica para a supressão do *flutter* em regime subsônico ainda não é abrangente na literatura, uma vez que há dificuldade para a correta modelagem envolvendo a dependência de suas propriedades mecânicas com fatores ambientais e operacionais, o que aumenta a complexidade da integração dos modelos viscoelásticos com os modelos de sistemas aeroelásticos. Sendo superado esse obstáculo, os materiais viscoelásticos são capazes de fornecer controle passivo para a estrutura com reduzido custo de manutenção e aplicação juntamente com eficiência em relação ao amortecimento estrutural.

Um estudo abrangente do amortecimento viscoelástico com aplicações de interesse prático pode ser encontrado nos trabalhos de (NASHIF et al., 1985), (LIMA, 2007) e (LIMA et al., 2009). No trabalho de Lima (2003), pode-se destacar três modelos viscoelásticos ditos modernos para sistemas contendo esses materiais para o controle de vibração e ruído, a saber: campos de deslocamentos anelásticos (CDA), Golla-Hughes-Mctavish (GHM) e o derivadas fracionárias (MDF).

Merrett e Hilton (2010) propõem um estudo elástico-viscoelástico do fenômeno do *flutter* de um painel para uma faixa de velocidades críticas até o regime supersônico. Neste estudo, os autores aplicam o princípio da equivalência elástico-viscoelástico (PEEV) (NASHIF et al., 1985) para a construção do modelo numérico.

No trabalho de Martins (2014), analisa-se a influência do amortecimento viscoelástico na instabilidade aeroelástica que envolve o *flutter*, por meio de um modelo discreto de uma seção típica de dois e três graus de liberdade. Há a investigação de dois casos: a) considera-se os movimentos verticais e de rotação do aerofólio; b) rotação de uma superfície de controle. Neste caso, são as molas de suspensão do aerofólio que possuem propriedades viscoelásticas. Além disso, faz-se o uso dos conceitos de módulo complexo e do fator de deslocamento para o estudo paramétrico da temperatura de trabalho e frequência de excitação.

Em Cunha-Filho (2015), aplica-se o modelo GHM para a parte viscoelástica de um painel sanduíche de três camadas em regime supersônico. O objetivo foi determinar a região de *flutter* da estrutura para comprovar a eficiência do tratamento viscoelástico superficial na estabilidade de painéis aeronáuticos. Além disso, foi feito um estudo da influência de parâmetros físicos e geométricos nas velocidades críticas. Na mesma linha, Cunha-Filho et al. (2016) fez um estudo paramétrico sobre os efeitos da adição de materiais viscoelásticos num painel aeronáutico em termos da redução das amplitudes de vibração e da supressão do *flutter* em regime supersônico.

Briend (2017) desenvolveu um modelo viscoelástico novo no domínio temporal para investigar a estabilidade de sistemas aeroviscoelásticos. Ele demonstrou a grande eficiência da metodologia em termos da redução do custo computacional de cálculo para a predição do *flutter* supersônico, mesmo para sistemas aeroelásticos mais complexos formados por muitos graus de liberdade. Nesta mesma linha de ganho em eficiência para aplicações de interesse industrial, Cunha-Filho (2019) desenvolveu um método de redução de modelos para sistemas aeroviscoelásticos a fim de ser utilizado no domínio do tempo. Neste trabalho, foi utilizado a Teoria das Faixas para a modelagem de uma viga sanduíche viscoelástica submetida a um carregamento não estacionário, representando uma seção de asa. Além dos resultados numéricos, o autor buscou a validação experimental em túnel de vento dos modelos desenvolvidos.

CAPÍTULO III

MODELAGEM AERODINÂMICA

O DLM tem-se tornado uma das ferramentas mais utilizadas para o cálculo do carregamento aerodinâmico não estacionário de aeronaves, tanto na área acadêmica, quanto na indústria, principalmente nas fases preliminares de projetos aerodinâmicos. Isto se deve à sua facilidade de integração com outros métodos numéricos como o MEF, além do custo computacional aceitável quando comparado, por exemplo, com modelos CFD. O DLM planar foi proposto inicialmente por Albano e Rodden (1969) através da inclusão de fatores não estacionários aos painéis com escoamentos estacionários, sendo uma complementação dos desenvolvimentos feitos por Hedman (1965) sobre o *Vortex-Lattice Method* (VLM). Os fatores que irão compor a *downwash* podem se dar pela soma algébrica da componente estacionária e não estacionária, como será visto posteriormente no decorrer deste capítulo. Além disso, para a função Kernel, pode-se utilizar uma função interpoladora de segundo ou quarto grau, de acordo com a restrição de precisão da malha a ser trabalhada.

Portanto, este capítulo apresenta os principais desenvolvimentos matemáticos do DLM não planar o qual foi implementado em um código próprio utilizando o MATLAB para o cálculo do carregamento aerodinâmico dos sistemas aeroviscoelásticos de interesse desta Tese. Vale ressaltar que grande parte do desenvolvimento foi baseado no trabalho de Blair (1994).

3.1 Formulação matemática do DLM

Para a formulação do DLM, parte-se da linearização do potencial aerodinâmico, onde é assumido um escoamento invíscido, compressível e subsônico ao redor de um corpo sólido. Para um volume de controle qualquer, são estabelecidas as seguintes equações da continuidade e do balanço da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.2.a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.2.b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3.2.c)$$

onde (u,v,w) são os campos de velocidade do fluido, p é a pressão e ρ é a densidade do fluido, sendo todas dependentes das coordenadas cartesianas (x,y,z) e do tempo t .

Para resolver o sistema de equações com cinco variáveis iniciais, adota-se a seguinte relação isentrópica:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \quad (3.3)$$

onde γ é a razão de calores específicos e as variáveis $(p_0$ e $\rho_0)$ são valores de referência constantes para a pressão e densidade, respectivamente. Além disso, a relação (3.3) é constante para qualquer elemento do fluido.

A velocidade do som no fluido é expressa da forma:

$$\alpha^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (3.4)$$

Assumindo a condição irrotacional para o escoamento, chega-se à seguinte equação do potencial de velocidade:

$$\vec{q} = \nabla \phi \quad (3.5)$$

$$\text{onde } \nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right].$$

Dessa forma, o problema é reduzido para três equações e três incógnitas, ou seja, (ϕ, p, ρ) , onde as componentes de \vec{q} são definidas como segue:

$$\vec{q} = [u \ v \ w] \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

Tomando-se a Eq. (3.6) e utilizando a condição de escoamento irrotacional dada por $\nabla \times \vec{q} = 0$, chega-se nas seguintes relações:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} \quad (3.7.a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.7.b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.7.c)$$

Neste momento, combinando as Eqs. (3.5) e (3.6), levando-se em conta as relações (3.7), a Eq. (3.2) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \phi] + \nabla \left[\frac{q^2}{2} \right] = \frac{-\nabla p}{\rho} \quad (3.8)$$

Baseado na lei de Leibnitz (HILDEBRAND, 1962), a Eq. (3.8) pode ser reescrita como:

$$\nabla \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{q^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} \right] = 0 \quad (3.9)$$

Dessa forma, a constante de integração aparecendo na Eq. (3.9) é uma função do tempo, o que leva à seguinte equação de Kelvin, sendo considerada uma versão não estacionária da equação de Bernoulli:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{q^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = F(t) \quad (3.10)$$

O significado físico da função $F(t)$ pode ser encontrado a partir de um determinado escoamento numa região livre de perturbações, ou seja, estacionário, possuindo linhas de corrente paralelas e retas. Neste caso, o potencial de velocidade é independente do tempo, a pressão é constante e a velocidade constante e igual a, U_∞ . Assim sendo, as condições são $q^2 = U^2$, $dp = 0$ e $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$, resultando na seguinte relação:

$$F(t) = \frac{U_\infty^2}{2} \quad (3.11)$$

Então, o potencial de velocidade pode ser modificado ao acrescentar $F(t)$:

$$\phi = \Phi - \int_0^t F(t) dt = \Phi - \frac{U_\infty^2 t}{2} \quad (3.12)$$

Desta forma, chega-se à seguinte equação de Bernoulli modificada:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{q^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (3.13)$$

Portanto, a equação da continuidade Eq. (3.1) pode ser modificada a partir da Eqs. (3.3), (3.4), (3.12) e (3.13). Além disso, toma-se a condição de escoamento irrotacional, ou seja, $\nabla \times \vec{q} = 0$. Portanto, obtém-se a seguinte equação de potencial completo:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (q^2) + \nabla \phi \cdot \nabla \left[\frac{q^2}{2} \right] \right] = 0 \quad (3.14)$$

Por fim, a Eq. (3.14) pode ser reduzida a um problema de apenas uma equação e uma incógnita, visto que a velocidade do som, α , pode ser representada como sendo uma função do potencial de velocidade, ϕ , como discutido em (BLAIR, 1994).

Neste ponto, é feita a linearização da equação do potencial completo Eq. (3.14) para se chegar à formulação do DLM. Para tanto, são consideradas duas componentes, a saber: (a) estacionária; (b) pequenas perturbações dependentes do tempo. Assim, essa consideração é aplicada também para a pressão e densidade do fluido, e a

velocidade do som é considerada como sendo invariante no tempo nesse processo de linearização. Portanto, tem-se:

$$\phi(x, y, z, t) = \bar{\phi}(x, y, z) + \tilde{\phi}(x, y, z, t) \quad (3.15.a)$$

$$p(x, y, z, t) = \bar{p}(x, y, z) + \tilde{p}(x, y, z, t) \quad (3.15.b)$$

$$\rho(x, y, z, t) = \bar{\rho}(x, y, z) + \tilde{\rho}(x, y, z, t) \quad (3.15.c)$$

$$\alpha(x, y, z, t) = \bar{\alpha}(x, y, z) \quad (3.15.d)$$

Por fim, assume-se que tanto a velocidade, U_∞ , quanto a velocidade do som, α , são constantes ao longo de todo o escoamento. Pela teoria de pequenas perturbações lineares, o número de Mach, ($M = U_\infty/\alpha$), é considerado constante para o escoamento do fluido.

$$(1 - M^2)\tilde{\phi}_{xx} + \tilde{\phi}_{yy} + \tilde{\phi}_{zz} - \left(\frac{2U_\infty}{\alpha^2}\right)\tilde{\phi}_{xt} - \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)\tilde{\phi}_{tt} = 0 \quad (3.16)$$

Como tem-se o interesse em analisar o comportamento aerodinâmico por meio da distribuição de pressão, toma-se a equação de Bernoulli modificada Eq. (3.13) para desenvolver a expressão linear da pressão em função do potencial de velocidade:

$$(p - p_0) = -\rho_0(\tilde{\phi}_t + U_\infty \tilde{\phi}_x) \quad (3.17)$$

Neste ponto, a definição da condição de contorno apropriada para a resolução da Eq. (3.16) deve ser considerada para um escoamento tangente à superfície, ou seja, a componente normal à superfície é nula. Assim, chega-se na seguinte relação:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla F = 0 \quad (3.18)$$

A linearização da Eq. (3.18) é feita para caracterizar uma superfície de asa fina, visto que a função que descreve essa superfície é dada por, $F = F_w(x, y, z, t)$, conforme definido pela equação seguinte, sendo caracterizada por apresentar uma componente de deformação do plano médio, h_m , e outra na espessura do plano médio, h_t .

$$F_w(x, y, z, t) = z - h_m(x, y, t) \pm h_t(x, y, t) = 0 \quad (3.19)$$

Para a linearização do escoamento sobre um fluxo livre e uniforme, o vetor de velocidades é descrito, matematicamente, como segue:

$$\vec{V} = [(U+u) \ v \ w] \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

Portanto, substituindo as Eqs. (3.19) e (3.20) na (3.18), e definindo, $h = h_m \pm h_t$, chega-se à seguinte equação:

$$-\frac{\partial h}{\partial t} - (U+u)\frac{\partial h}{\partial x} - v\frac{\partial h}{\partial y} + w = 0 \quad (3.21)$$

O objetivo é a relação linear entre as componentes de velocidade na superfície de asa e da função, h . Neste caso, despreza-se os termos não lineares na Eq. (3.21):

$$w = \frac{\partial h}{\partial t} + U\frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.22)$$

Para asas simples, é conveniente representar as deformações planares em termos de um polinômio no espaço e por harmônicos no tempo da seguinte forma:

$$h(x,y,t) = \left[\sum_{j=0}^{n_x} \sum_{k=0}^{n_y} a_{jk} x^j y^k \right] e^{i\omega t} \quad (3.23)$$

onde n_x e n_y são os graus do polinômio nas direções x , e y , respectivamente, a_{jk} são as constantes do polinômio e ω é a frequência.

Por fim, substituindo a Eq. (3.23) na (3.22), obtém-se:

$$w = \left(i\omega \left[\sum_{j=0}^{n_x} \sum_{k=0}^{n_y} a_{jk} x^j y^k \right] + U \left[\sum_{j=0}^{n_x} \sum_{k=0}^{n_y} j a_{jk} x^{j-1} y^k \right] \right) e^{i\omega t} \quad (3.24)$$

onde o módulo complexo pode ser dado por:

$$w(x,y,t) = \bar{w}(x,y,\omega) e^{i\omega t} \quad (3.25)$$

A partir da Eq. (3.25), a Eq. (3.24) pode ser reescrita para a frequência reduzida como segue (ALBANO; RODDEN, 1969):

$$w(x,y,\omega) = \left[\sum_{j=0}^{n_x} \sum_{m=0}^{n_y} j a_{jm} x^{j-1} y^m \right] + \frac{ik}{b} \left[\sum_{j=0}^{n_x} \sum_{m=0}^{n_y} a_{jm} x^j y^m \right] \quad (3.26)$$

$$k = \frac{\omega b}{U_\infty} \quad (3.27)$$

onde k é a frequência reduzida e b corresponde à semi-corda.

Para encontrar a solução da equação do potencial aerodinâmico, uma técnica útil é a relação com a equação do potencial acústico. Dessa maneira, toma-se o conceito de fontes móveis e realiza-se a translação do sistema de coordenadas da forma:

$$x_0 = x - Ut \quad (3.28.a)$$

$$y_0 = y \quad (3.28.b)$$

$$z_0 = z \quad (3.28.c)$$

Portanto, deve-se encontrar uma solução elementar para o potencial acústico para auxiliar na solução do potencial aerodinâmico. Logo, o interesse é numa onda em expansão por meio de um distúrbio central, expressa como segue:

$$\bar{\phi}(r,t) = \frac{g\left[t - \frac{r}{\alpha}\right]}{r} \quad (3.29)$$

onde a função g é dependente do tempo e o termo entre parênteses designa um atraso no tempo.

Nesse momento, faz-se necessária a utilização de uma função pulsante para várias fontes em sequência. Isso representaria o mesmo efeito de uma fonte móvel única numa velocidade constante. Para tanto, uma nova transformação de coordenadas deve ser feita:

$$x_0^e = x_0^m - \xi \quad (3.30.a)$$

$$y_0^e = y_0^m - \eta \quad (3.30.b)$$

$$z_0^e = z_0^m - \zeta \quad (3.30.c)$$

onde os sobrescritos m e e indicam os sistemas móvel e estacionário, respectivamente, e (ξ, η, ζ) são termos que definem a distância a uma fonte móvel.

Portanto, a Eq. (3.29) é modificada pela alteração das coordenadas:

$$\tilde{\phi}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) = \left[\frac{1}{\bar{R}} \right] F \left[\frac{1}{\beta^2} \left[t + \frac{U_\infty(x - U_\infty t - \xi)}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \bar{R} \right] \right] \quad (3.31)$$

onde:

$$\bar{R} = ((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2)^{1/2} \quad (3.32.a)$$

$$\beta^2 = 1 - M^2 \quad (3.32.b)$$

$$\tau = \frac{-M(x - \xi) + \bar{R}}{\alpha\beta^2} \quad (3.32.c)$$

Através de manipulações matemáticas, pode-se chegar à seguinte expressão simplificada para o potencial:

$$\tilde{\phi}_s(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) = \left[\frac{1}{\bar{R}} \right] F[t - \tau] \quad (3.33)$$

A Eq. (3.33) é a solução fundamental da equação do potencial aerodinâmico dada pela Eq. (3.16). Conforme discutido por Blair (1994), uma única fonte não é capaz de gerar força, mas duas ou mais fontes conseguem gerar um diferencial de pressão. Portanto, considera-se duas fontes opostas com intensidades inversamente proporcionais.

Agora, o objetivo é a solução do potencial de aceleração. Nota-se que o dado de entrada para a resolução do sistema linear é a deformação da asa e o dado de saída é a pressão. Então, parte-se da equação do potencial aerodinâmico, Eq. (3.16), realizando a diferenciação tanto no tempo quanto no espaço:

$$\beta^2(\tilde{\phi}_t)_{xx} + (\tilde{\phi}_t)_{yy} + (\tilde{\phi}_t)_{zz} - \left(\frac{2U_\infty}{\alpha^2} \right) (\tilde{\phi}_t)_{xt} - \left(\frac{1}{\alpha^2} \right) (\tilde{\phi}_t)_{tt} = 0 \quad (3.34.a)$$

$$\beta^2(\tilde{\phi}_x)_{xx} + (\tilde{\phi}_x)_{yy} + (\tilde{\phi}_x)_{zz} - \left(\frac{2U_\infty}{\alpha^2} \right) (\tilde{\phi}_x)_{xt} - \left(\frac{1}{\alpha^2} \right) (\tilde{\phi}_x)_{tt} = 0 \quad (3.34.b)$$

Multiplicando-se a Eq. (3.34.a) por, ρ_0 , e a Eq. (3.34.b) por, $\rho_0 U_\infty$, e somando-se as duas equações resultantes, tem-se:

$$\begin{aligned} & \beta^2 \rho_0 (\tilde{\phi}_t + U_\infty \tilde{\phi}_x)_{xx} + \rho_0 (\tilde{\phi}_t + U_\infty \tilde{\phi}_x)_{yy} - \rho_0 (\tilde{\phi}_t + U_\infty \tilde{\phi}_x)_{zz} - \left(\frac{2U_\infty}{\alpha^2} \right) \rho_0 (\tilde{\phi}_t + U_\infty \tilde{\phi}_x)_{xt} \dots \\ & - \left(\frac{1}{\alpha^2} \right) \rho_0 (\tilde{\phi}_t + U_\infty \tilde{\phi}_x)_{tt} = 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Substituindo a Eq. (3.17) na (3.35), chega-se à equação do potencial de pressão:

$$\beta^2 p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} - \left(\frac{2U_\infty}{\alpha^2} \right) p_{xt} - \left(\frac{1}{\alpha^2} \right) p_{tt} = 0 \quad (3.36)$$

Portanto, a pressão poderá ser definida tanto em função da pressão quanto do potencial de pressão.

$$p = -\rho_0 (\tilde{\phi}_t + U_\infty \tilde{\phi}_x) \quad (3.37)$$

A Eq. (3.37) é matematicamente idêntica à equação do potencial aerodinâmico (3.16). Portanto, a solução elementar da equação do potencial aerodinâmico, Eq. (3.33), também é solução para a equação do potencial de pressão:

$$p_s = \left[\frac{1}{R} \right] f[t - \tau] \quad (3.38)$$

onde as Eqs. (3.32.a) e Eq. (3.32.c) são válidas para a Eq. (3.38).

Com o objetivo de otimizar o custo computacional, o problema é alterado para o domínio de uma frequência constante, uma vez que a pressão, p_s , assume a forma complexa, $p_s e^{i\omega t}$. Portanto, chega-se à seguinte expressão:

$$p_s = \left[\frac{A}{R} \right] \exp(i\omega(t - \tau)) = \left[\frac{A \exp(i\omega\tau)}{R} \right] \exp(i\omega t) = \bar{p}_s \exp(i\omega t) \quad (3.39)$$

Substituindo a Eq. (3.32.c) na (3.39), obtém-se:

$$\bar{p}_s = \frac{A}{R} \exp\left[\frac{i\omega}{\alpha_0\beta^2}(M(x-\xi) - \bar{R})\right] \quad (3.40)$$

Entretanto, não se pode utilizar diretamente a Eq. (3.40) como modelo para o cálculo da diferença de pressão, uma vez que, p_s , é uma função simétrica em relação ao plano, $z = \zeta$. Dessa maneira, diferenciando a Eq. (3.39) em relação a, z , para obter dipolos de pressão, sendo definida como potencial de aceleração, ψ , tem-se:

$$\bar{\psi}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{A}{R} \exp\left[\frac{i\omega}{\alpha_0\beta^2}(M(x-\xi) - \bar{R})\right] \right] \quad (3.41)$$

onde A é a amplitude de oscilação para uma dada frequência.

Agora, resolvendo a derivada da Eq. (3.41), obtém-se:

$$\bar{\psi}(x,y,z) = A\beta^2(z - \zeta) \left[\frac{-i\omega}{\bar{R}^2} - \frac{1}{\bar{R}^3} \right] \exp\left[\frac{i\omega}{\alpha_0\beta^2}(M(x-\xi) - \bar{R})\right] \quad (3.42)$$

Na Eq. (3.42) tem-se a descrição da pressão nas coordenadas (x, y, z) devido aos dipolos de pressão das coordenadas (ξ, η, ζ) . Então, os dipolos são contínuos no plano, $(\xi, \eta, \zeta = 0)$, e, neste caso, adota-se a integração de área, $dS = d\xi d\eta$, tendo:

$$\bar{\psi}(x,y,z) = \beta^2 z \int_S A(\xi, \eta) \left[\frac{-i\omega}{\bar{R}^2} - \frac{1}{\bar{R}^3} \right] \exp\left[\frac{i\omega}{\alpha_0\beta^2}(M(x-\xi) - \bar{R})\right] d\xi d\eta \quad (3.43)$$

A Eq. (3.43) é a solução para a fonte oscilatória em movimento harmônico, onde é introduzido o conceito de escoamento aerodinâmico elementar do tipo dipolo (*doublet*), baseado na superposição de dois escoamentos tipo fonte infinitesimais adjacentes e de intensidades iguais, mas opostos, como ilustrado na Figura 3.1.

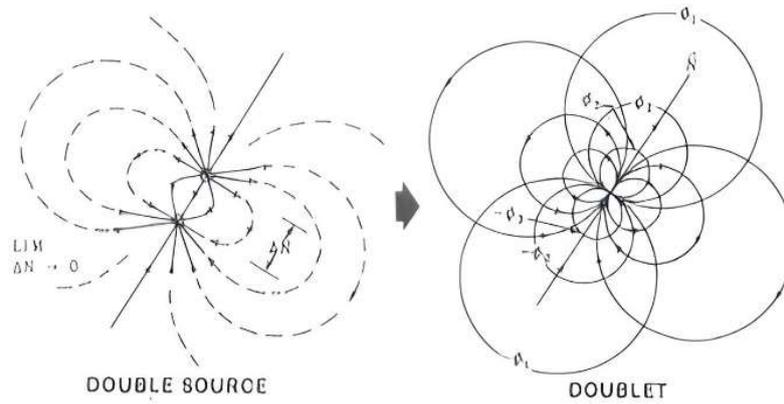


Figura 3.1 – Derivação de dipolos a partir de dois escoamentos tipo fonte iguais e opostos (extraído de Giesing, 1987).

Conforme desenvolvido por Blair (1994), a amplitude A é dada como:

$$A = \frac{\Delta \bar{p}}{4\pi\rho} \quad (3.44)$$

Como o interesse é buscar uma relação linear explícita entre o salto de pressão dos dipolos de pressão junto à condição de contorno linear que é componente normal ao escoamento, substituindo a Eq. (3.44) na (3.43), tem-se a seguinte relação:

$$\bar{\psi}(x,y,z) = \frac{\beta^2 z}{4\pi\rho} \int_S \Delta \bar{p}(\xi,\eta) \left[\frac{-i\omega}{\bar{R}^2} - \frac{1}{\bar{R}^3} \right] \exp \left[\frac{i\omega}{\alpha_0 \beta^2} (M(x-\xi) - \bar{R}) \right] d\xi d\eta \quad (3.45)$$

Neste ponto, deve-se relacionar o potencial de velocidade com o de aceleração para obter a seguinte expressão:

$$\bar{\phi}(x,y,z) = -\frac{1}{U_\infty} \exp \left[-\frac{i\omega x}{U_\infty} \right] \int_{-\infty}^x \exp \left[\frac{i\omega \alpha}{U_\infty} \right] \bar{\psi}(\alpha,y,z) d\alpha \quad (3.46)$$

Então, relaciona-se a componente, z , da velocidade com a velocidade potencial:

$$\bar{w}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}(\bar{\phi}) \quad (3.47)$$

Finalmente, substituindo a Eq. (3.46) na (3.47), tem-se a forma abreviada:

$$\bar{w}(x,y,z) = \left[-\frac{1}{4\pi\rho U_\infty} \right] \iint_S \Delta \bar{p} K((x-\xi),(y-\eta),z) d\xi d\eta \quad (3.48)$$

onde a função Kernel é definida como segue:

$$K(x_0,y_0,z_0) = \exp\left(-\frac{i\omega x_0}{U_\infty}\right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\int_{-\infty}^{x_0} \frac{1}{R} \exp\left[\frac{i\omega}{U\beta^2}(\lambda - MR)\right] d\lambda \right] \quad (3.49)$$

Por conveniência, adota-se o sistema de coordenadas relativo, (x_0, y_0, z_0) , entre os sistemas fixo e local, onde $x_0 = (x - \xi)$, $y_0 = (y - \eta)$ e $z_0 = (z - \zeta)$, como ilustrado na Figura 3.2.

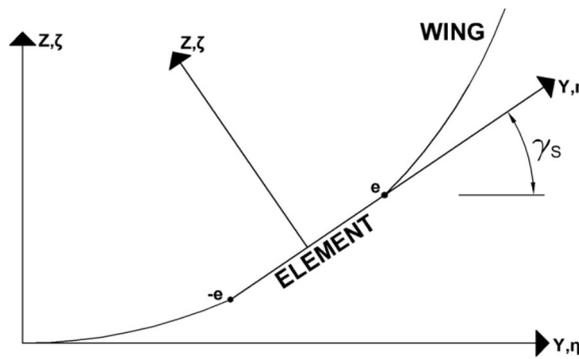


Figura 3.2 – Sistemas de coordenadas globais e locais.

Por fim, as relações adimensionais da velocidade e pressão são dadas como:

$$\bar{w}_{nd} = \frac{\bar{w}}{U_\infty} \quad (3.50.a)$$

$$\Delta \bar{c}_{pn} = \frac{2 \Delta \bar{p}}{\rho U_\infty^2} \quad (3.50.b)$$

Então, substituindo os parâmetros adimensionais na Eq. (4.48), chega-se na expressão do *downwash* numa superfície:

$$\bar{w}_n(x,y,z) = \left[-\frac{1}{8\pi} \right] \iint_S \Delta \bar{c}_p K((x-\xi),(y-\eta),z) d\xi d\eta \quad (3.51)$$

onde \bar{c}_{pn} é o coeficiente de pressão adimensional.

3.2 Formulação da função Kernel não planar

As funções Kernel são transformações algébricas para representar um domínio tridimensional com uma fonte ou um dipolo pontual não estacionário e de intensidade concentrada. Podem ser entendidas como funções que representam domínios fechados para um determinado salto de pressão, ou seja, a descontinuidade que ocorre devido à variação da intensidade do dipolo. De início, se torna muito mais prático considerar uma forma abreviada destas transformações para um caso planar, onde o vetor normal à superfície é sempre ortogonal para todo o painel. Os trabalhos notáveis que propuseram as aproximações para tais funções no caso de superfícies oscilatórias são (LANDAHL, 1967; BISMARCK-NASR, 1991).

O refinamento da função Kernel não planar realizado por Landahl (1967) foi apresentado conforme (RODDEN; GIESING; KALMAN, 1971), tem-se:

$$K = \left(\frac{K_1 T_1}{r^2} + \frac{K_2 T_2}{r^4} \right) \exp\left(-\frac{i\omega x_0}{U_\infty} \right) \quad (3.52)$$

onde K_1 e K_2 são os parâmetros relacionados às partes planar e não planar, da função Kernel, respectivamente, x_0 é a distância entre os pontos emissores e receptores paralelos ao escoamento e r é a distância dos pontos emissores e receptores os quais são perpendiculares ao escoamento. T_1 , T_2 e r são definidos como:

$$T_1 = \cos(\gamma_r - \gamma_s) \quad (3.53.a)$$

$$T_2 = (z_0 \cos \gamma_r - y_0 \sin \gamma_r)(z_0 \cos \gamma_s - y_0 \sin \gamma_s) \quad (3.53.b)$$

$$r^2 = z_0^2 + y_0^2 \quad (3.53.c)$$

onde os ângulos do diedro γ_r e γ_s são referentes aos pontos receptores e emissores.

De acordo com Landahl (1967), as partes planares e não planares são definidas pelas seguintes relações:

$$K_1 = I_1 + \left[\frac{Mr}{R} \right] \left[\frac{\exp(-iku_1)}{(1+u^2_1)^{1/2}} \right] \quad (3.54.a)$$

$$K_2 = -3I_2 - \left[\frac{iKM^2 r^2}{R^2} \right] \left[\frac{\exp(-iku_1)}{(1+u^2_1)^{1/2}} \right] - \frac{Mr}{R} \left[(1+u^2_1) \left(\frac{\beta^2 r^2}{R^2} \right) + 2 + \left(\frac{Mr u_1}{R} \right) \right] \quad (3.54.b)$$

onde:

$$u_1 = \frac{(MR - x_0)}{\beta^2 r} \quad (3.55.a)$$

$$k = \frac{\omega r}{U_\infty} \quad (3.55.b)$$

$$\beta = (1 - M^2)^{1/2} \quad (3.55.c)$$

$$R = (x_0^2 + \beta^2 r^2)^{1/2} \quad (3.55.d)$$

As soluções para I_1 e I_2 são dadas (RODDEN; GIESING; KALMAN, 1971):

$$I_1(u_1, k) = \int_{u_1}^{\infty} \frac{\exp(-ku_1)}{(1+u^2)^{3/2}} du \quad (3.56.a)$$

$$I_2(u_1, k) = \int_{u_1}^{\infty} \frac{\exp(-ku_1)}{(1+u^2)^{5/2}} du \quad (3.56.b)$$

Resolvendo as integrais acima por partes, tem-se:

$$I_1(u_1, k) = \exp(-iku_1) \left[1 - \frac{u_1}{(1+u_1^2)^{1/2}} - ikI_0(u_1, k) \right] \quad (3.57.a)$$

$$I_2(u_1, k) = \frac{\exp(-iku_1)}{3} \left\{ (2 + iku_1) \left(1 - \frac{u_1}{(1+u_1^2)^{1/2}} \right) \dots \right. \\ \left. - \frac{u_1}{(1+u_1^2)^{3/2}} - ikI_0(u_1, k) + k^2 J_0(u_1, k) \right\} \quad (3.57.b)$$

onde I_0 e J_0 são dados por:

$$I_0(u_1, k) = \exp(iku_1) \int_{u_1}^{\infty} \left(1 - \frac{u_1}{(1+u_1^2)^{1/2}} \right) \exp(-iku_1) du \quad (3.58.a)$$

$$J_0(u_1, k) = \exp(iku_1) \int_{u_1}^{\infty} u \left(1 - \frac{u_1}{(1+u_1^2)^{1/2}} \right) \exp(-iku_1) du \quad (3.58.b)$$

As integrais em (3.58) podem ser resolvidas por meio de um somatório finito, conforme apresentado por Laschka (1963) para os casos em que $u \geq 0$:

$$I_0(u_1, k) \cong \sum_{n=1}^{11} \frac{a_n \exp(-ncu_1)}{n^2 c^2 + k^2} (nc - ik) \quad (3.59.a)$$

$$J_0(u_1, k) \cong \sum_{n=1}^{11} \frac{a_n \exp(-ncu_1)}{(n^2 c^2 + k^2)^2} \{ (n^2 c^2 - k^2) + ncu_1(n^2 c^2 + k^2) \dots \\ - ik[2nc + u_1(n^2 c^2 + k^2)] \} \quad (3.59.b)$$

onde $c = 0.372$ e os coeficientes a_n da aproximação de Laschka estão definidos na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Coeficientes da aproximação de Laschka para $u(1 + u^2)^{-1/2}$.

n	a_n
1	0,24186198
2	-2,7918027
3	24,991079
4	-111,59196
5	271,43549
6	-305,75288
7	-41,183630
8	545,98537
9	-644,78155
10	328,72755
11	-64,279511

Pelo efeito da simetria, quando $u_1 < 0$, pode-se avaliar separadamente a parte real e imaginária de I_1 e I_2 . Assim:

$$I_1(u_1, k) = 2\text{Re}[I_1(0, k)] - \text{Re}[I_1(-u_1, k)] + i \text{Im}[I_1(-u_1, k)] \quad (3.60.a)$$

$$I_2(u_1, k) = 2\text{Re}[I_2(0, k)] - \text{Re}[I_2(-u_1, k)] + i \text{Im}[I_2(-u_1, k)] \quad (3.60.b)$$

Para o caso particular onde a frequência de oscilação é igual a zero, a Eq. (3.54) assume a seguinte forma (RODDEN; GIESING; KALMAN, 1971):

$$K_{10} = \lim_{\omega \rightarrow 0} K_1 = 1 + \frac{x_0}{R} \quad (3.61.a)$$

$$K_{20} = \lim_{\omega \rightarrow 0} K_2 = -2 - \left(\frac{x_0}{R} \right) \left(2 + \frac{\beta^2 r^2}{R^2} \right) \quad (3.61.b)$$

3.3 Método *Doublet Lattice* (DLM)

A proposta original do DLM para a determinação da influência da oscilação de pressão em uma superfície sustentadora é baseada na suposição da distribuição de pressão ao longo de uma linha imaginária localizada a $\frac{1}{4}$ da corda de cada painel. Desse modo, a condição de contorno prescrita pela *normalwash* é posicionada a $\frac{3}{4}$ da corda do painel e na meia envergadura, como ilustrado na Figura 3.3. Vale ressaltar que a adoção dessas medidas foi por conveniência empírica por meio dos resultados obtidos e a satisfação da condição de contorno de Kutta na borda de fuga (RODDEN; GIESING; KALMAN, 1971; HEDMAN, 1965).

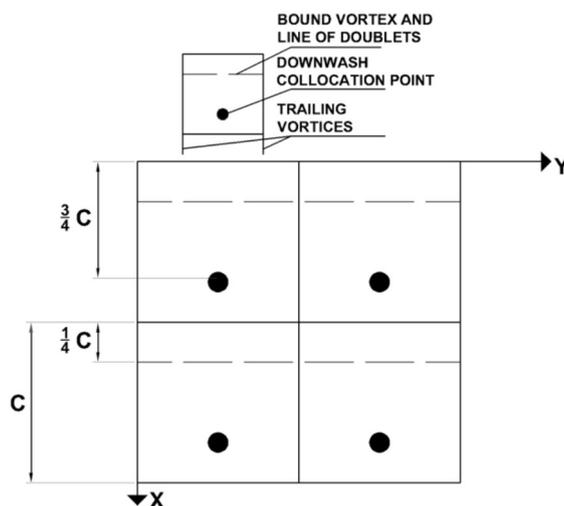


Figura 3.3 – Superfície sustentadora dos painéis aerodinâmicos e o rearranjo elementar para o DLM.

No caso do DLM e para um número finito de painéis, a Eq. (3.51) pode ser reescrita na seguinte forma matricial:

$$\{\bar{w}_n\} = [D_{rs}] \{\Delta \bar{C}_p\} \quad (3.62)$$

onde $[D_{rs}]$ é a matriz complexa que relaciona a diferença de pressão ocasionada pela *normalwash* entre cada painel.

A Eq. (3.62) pode ser reescrita sob a influência dos painéis receptores (r) e emissores (s) como segue:

$$\mathbf{D}_{rs} = \left(\frac{\Delta x_s}{8\pi} \right) \int_{-e}^{+e} K d\bar{\eta} \quad (3.63)$$

onde Δx_s representa a corda do painel emissor e e é a meia envergadura. O inverso da matriz, $[\mathbf{AIC}] = [\mathbf{D}_{rs}]^{-1}$, é usado para quantificar a distribuição de pressão oscilatória na superfície, sendo chamada de matriz de coeficientes de influência aerodinâmicos.

Por fim, a avaliação da Eq. (3.63) pode ser feita da seguinte forma (RODDEN; TAYLOR; MCINTOSH, 1998):

$$\mathbf{D}_{rs} = \left(\frac{\Delta x_s}{8\pi} \right) \int_{-e}^{+e} \left(\frac{K_1 T_1}{r^2} + \frac{K_2 T_2}{r^4} \right) \exp \left[\frac{-i \omega (x_0 - \bar{\eta} \tan \lambda_s)}{U_\infty} \right] d\bar{\eta} \quad (3.64)$$

Na sequência, a Eq. (3.64) pode ser tratada com a adição e subtração dos termos estacionários k_{10} e k_{20} . Logo, obtém-se:

$$\mathbf{D}_{rs} = \mathbf{D}_{0rs} + \mathbf{D}_{1rs} + \mathbf{D}_{2rs} \quad (3.65)$$

onde:

$$\mathbf{D}_{0rs} = \left(\frac{\Delta x_s}{8\pi} \right) \int_{-e}^{+e} \left(\frac{K_{10} T_1}{r^2} + \frac{K_{20} T_2}{r^4} \right) d\bar{\eta} \quad (3.66.a)$$

$$\mathbf{D}_{1rs} = \left(\frac{\Delta x_s}{8\pi} \right) \int_{-e}^{+e} \frac{Q_1(\bar{\eta})}{r^2} d\bar{\eta} \quad (3.66.b)$$

$$\mathbf{D}_{2rs} = \left(\frac{\Delta x_s}{8\pi} \right) \int_{-e}^{+e} \frac{Q_2(\bar{\eta})}{r^4} d\bar{\eta} \quad (3.66.c)$$

onde \mathbf{D}_{0rs} , \mathbf{D}_{1rs} e \mathbf{D}_{2rs} são, respectivamente, as componentes estacionárias, planar não estacionária e não planar não estacionária.

3.3.1 Aproximação parabólica

3.3.1.1 *Downwash* planar

Considerando a parte planar não estacionária, a avaliação incremental oscilatória é realizada sobre a linha de dipolos em cada elemento de coordenada $\bar{\eta}$ ao

longo da envergadura do painel (e). Para tanto, primeiramente, utiliza-se uma função parabólica para essa aproximação (RODDEN; GIESING; KALMAN, 1971):

$$Q_1(\bar{\eta}) = A_1 \bar{\eta}^2 + B_1 \bar{\eta} + C_1 \cong \{K_1 \exp[-i\omega(x_0 - \bar{\eta} \tan \lambda_s)/U_\infty] - K_{10}\} T_1 \quad (3.67)$$

Visto que é feita a análise ao longo da linha de dipolos tendo como entrada $Q_1(-e)$, centro $Q_1(0)$ e saída $Q_1(e)$, pode-se obter os seguintes coeficientes:

$$A_1 = \frac{[Q_1(-e) - 2Q_1(0) + Q_1(e)]}{2e^2} \quad (3.68.a)$$

$$B_1 = \frac{[Q_1(e) - Q_1(-e)]}{2e} \quad (3.68.b)$$

$$C_1 = Q_1(0) \quad (3.68.c)$$

Dessa maneira, tem-se o fator para *downwash* planar:

$$D_{1rs} = \frac{\Delta X_s}{8\pi} \left\{ [(\bar{y}^2 - \bar{z}^2)A_1 + \bar{y}B_1 + C_1]F + \left(\frac{1}{2}B_1 + \bar{y}A_1\right) \log \frac{(\bar{y}-e)^2 + \bar{z}^2}{(\bar{y}+e)^2 + \bar{z}^2} + 2eA_1 \right\} \quad (3.69)$$

onde:

$$F = \int_{-e}^{+e} \frac{d\bar{\eta}}{r^2} = \frac{1}{|\bar{z}|} \tan^{-1} \frac{2e|\bar{z}|}{\bar{y}^2 + \bar{z}^2 - e^2} \quad (3.70)$$

O valor do arco tangente é avaliado num intervalo de $-\pi$ a $+\pi$. Para um melhor comportamento da Eq. (3.70), é conveniente a introdução de um parâmetro, α :

$$F = \frac{2e}{\bar{y}^2 + \bar{z}^2 - e^2} \left(1 - \alpha \frac{\bar{z}^2}{e^2} \right) \quad (3.71)$$

onde:

$$\alpha \approx \frac{4e^4}{(\bar{y}^2 + \bar{z}^2 - e^2)^2} \sum_{n=2}^7 \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{2e\bar{z}}{\bar{y}^2 + \bar{z}^2 - e^2} \right)^{2n-4} \quad (3.72)$$

Salienta-se que a Eq. (3.72) é válida para $|2e\bar{z}/(\bar{y}^2 + \bar{z}^2 - e^2)| \leq 0,3$, quando $\bar{y}^2 + \bar{z}^2 > e^2$ (RODDEN; GIESING; KALMAN, 1971).

3.3.1.2 Downwash não planar

Agora, realiza-se a avaliação da parte não planar não estacionária da Eq. (3.65), considerando também a utilização da função parabólica. Portanto, tem-se:

$$Q_2(\bar{\eta}) = A_2\bar{\eta}^2 + B_2\bar{\eta} + C_2 \cong \left\{ K_2 \exp\left[-i\omega(x_0 - \bar{\eta}\tan\lambda_s)/U_\infty\right] - K_{20} \right\} T_2 \quad (3.73)$$

onde:

$$A_2 = \frac{[Q_2(-e) - 2Q_2(0) + Q_2(e)]}{2e^2} \quad (3.74.a)$$

$$B_2 = \frac{[Q_2(e) - Q_2(-e)]}{2e} \quad (3.74.b)$$

$$C_2 = Q_2(0) \quad (3.74.c)$$

Então, tem-se o fator para *downwash* não planar:

$$\begin{aligned} D_{2rs} = & \frac{\Delta x_s}{16\pi\bar{z}^2} \{ [(\bar{y}^2 - \bar{z}^2)A_2 + \bar{y}B_2 + C_2]F + \dots \\ & + \frac{1}{((\bar{y}+e)^2 + \bar{z}^2)} \{ [(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)\bar{y} + (\bar{y}^2 - \bar{z}^2)e]A_2 + (\bar{y}^2 + \bar{z}^2 + \bar{y}e)B_2 + (\bar{y}+e)C_2 \} - \dots \\ & - \frac{1}{((\bar{y}+e)^2 + \bar{z}^2)} \{ [(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)\bar{y} - (\bar{y}^2 - \bar{z}^2)e]A_2 + (\bar{y}^2 + \bar{z}^2 - \bar{y}e)B_2 + (\bar{y}-e)C_2 \} \} \end{aligned} \quad (3.75)$$

A Eq. (3.75) perde significância para pequenos valores de \bar{z} . Assim, introduz o fator da Eq. (3.72) na Eq. (3.75) para corrigir esse efeito.

$$\begin{aligned} D_{2rs} = & \frac{\Delta x_s}{16\pi(\bar{y}^2 + \bar{z}^2 - e^2)} \left\{ \frac{2(\bar{y}^2 + \bar{z}^2 - e^2)(e^2A_2 + C_2) + 4\bar{y}e^2B_2}{[(\bar{y}-e)^2 + \bar{z}^2]^2} - \dots \right. \\ & \left. - \frac{\alpha}{e^2} [(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)A_2 + \bar{y}B_2 + C_2] \right\} \end{aligned} \quad (3.76)$$

A Eq. (3.76) é utilizada como referência, mas deve ser substituída pela Eq. (3.75) para a condição $|(\bar{y}^2 + \bar{z}^2 - e^2)/2e\bar{z}| \leq 0,1$.

3.3.2 Aproximação quártica

Para a aproximação quártica, uma função de quarta ordem é utilizada para a interpolação da linha de dipolos. Este tipo de interpolação leva a uma maior precisão no estudo de asas com grande razão de alongamento (*aspect ratio* – AR). Isto se deve pelo fato de que a função de quarta ordem tende a incrementar o alongamento dos painéis, principalmente os mais afastados da superfície sustentadora. Além disso, afirma-se que a perda de acurácia para a interpolação parabólica pode ser contornada mantendo o AR por volta de 3 (RODDEN; TAYLOR; MCINTOSH, 1999), o que leva à necessidade de um refinamento da malha aerodinâmica. Também, relata-se que para trabalhar com altos valores de frequência reduzida, há a necessidade de maiores divisões na corda na discretização.

Portanto, uma aproximação de alta ordem do tipo quártica torna-se mais interessante para aumentar o alongamento de trabalho das estruturas, podendo chegar até AR de 15.

3.3.2.1 *Downwash* Planar

Para a aproximação quártica, tem-se:

$$Q_1(\bar{\eta}) = A_1\bar{\eta}^2 + B_1\bar{\eta} + C_1 + D_1\bar{\eta}^3 + E_1\bar{\eta}^4 \cong \{K_1 \exp[-i\omega(x_0 - \bar{\eta}\tan\lambda_s)/U_\infty] - K_{10}\}T_1 \quad (3.77)$$

A análise ao longo da linha de dipolos tem como entrada $Q_1(-e)$, entrada intermediária $Q_1(-e/2)$, centro $Q_1(0)$, saída intermediária $Q_1(e/2)$ e saída $Q_1(e)$. A partir desses valores, são avaliados os coeficientes dentro da aproximação quártica:

$$A_1 = -\frac{1}{6e^2}[Q_1(-e) - 16Q_1(-e/2) + 30Q_1(0) - 16Q_1(e/2) + Q_1(e)] \quad (3.78.a)$$

$$B_1 = \frac{1}{6e^2}[Q_1(-e) - 8Q_1(-e/2) + 8Q_1(e/2) - Q_1(e)] \quad (3.78.b)$$

$$C_1 = Q_1(0) \quad (3.78.c)$$

$$D_1 = -\frac{2}{3e^3} [Q_1(-e) - 2Q_1(-e/2) + 2Q_1(e/2) - Q_1(e)] \quad (3.78.d)$$

$$E_1 = \frac{2}{3e^4} [Q_1(-e) - 4Q_1(-e/2) + 6Q_1(0) - 4Q_1(e/2) + Q_1(e)] \quad (3.78.e)$$

O fator *downwash* planar é dado como segue:

$$\begin{aligned} D_{1rs} = & \frac{\Delta x_s}{8\pi} \{ [(\bar{y}^2 - \bar{z}^2)A_1 + \bar{y}B_1 + C_1 + \bar{y}(\bar{y}^2 - 3\bar{z}^2)D_1 + (\bar{y}^4 - 6\bar{y}^2\bar{z}^2 + \bar{z}^4)E_1]F... \\ & + [\bar{y}A_1 + \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}(3\bar{y}^2 - \bar{z}^2)D_1 + 2\bar{y}(\bar{y}^2 - \bar{z}^2)E_1] \log \frac{(\bar{y} - e)^2 + \bar{z}^2}{(\bar{y} + e)^2 + \bar{z}^2} + ... \\ & + 2e \left[A_1 + 2\bar{y}D_1 + \left(3\bar{y}^2 - \bar{z}^2 + \frac{1}{3}e^2 \right) E_1 \right] \} \end{aligned} \quad (3.79)$$

onde a avaliação de F a partir da Eq. (3.70) é feita como:

$$F = \delta_1 \frac{2e}{\bar{y}^2 + \bar{z}^2 - e^2} \left(1 - \epsilon \frac{\bar{z}^2}{e^2} \right) + \delta_2 \frac{\pi}{|\bar{z}|} \quad (3.80)$$

onde:

$$\delta_1 = 1, \delta_2 = 0 \text{ para } \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - e^2 > 0 \quad (3.81.a)$$

$$\delta_1 = 1, \delta_2 = \frac{1}{2} \text{ para } \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - e^2 = 0 \quad (3.81.b)$$

$$\delta_1 = 1, \delta_2 = 1 \text{ para } \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - e^2 < 0 \quad (3.81.c)$$

Além disso, tem-se:

$$\epsilon = \frac{e^2}{\bar{z}^2} \left[1 - \frac{\bar{y}^2 + \bar{z}^2 - e^2}{2e|\bar{z}|} \operatorname{atan} \left(\frac{2e|\bar{z}|}{\bar{y}^2 + \bar{z}^2 - e^2} \right) \right] \quad (3.82)$$

Para evitar singularidades, quando $|2e\bar{z}/(\bar{y}^2 + \bar{z}^2 - e^2)| \leq 0,3$, ϵ assume o equacionamento da Eq. (3.72).

3.3.2.2 Downwash Não Planar

Considerando a aproximação quártica, tem-se:

$$Q_2(\bar{\eta}) = A_2\bar{\eta}^2 + B_2\bar{\eta} + C_2 + D_2\bar{\eta}^3 + E_2\bar{\eta}^4 \cong \left\{ K_2 \exp\left[-i\omega(x_0 - \bar{\eta}\tan\lambda_s)/U_\infty\right] - K_{20} \right\} T_2 \quad (3.83)$$

A avaliação da interpolação de quarta ordem ao longo da linha de dipolos é realizada de forma análogo ao realizado na Seção 3.3.2.1:

$$A_2 = -\frac{1}{6e^2} [Q_2(-e) - 16Q_2(-e/2) + 30Q_2(0) - 16Q_2(e/2) + Q_2(e)] \quad (3.84.a)$$

$$B_2 = \frac{1}{6e^2} [Q_2(-e) - 8Q_2(-e/2) + 8Q_2(e/2) - Q_2(e)] \quad (3.84.b)$$

$$C_2 = Q_2(0) \quad (3.84.c)$$

$$D_2 = -\frac{2}{3e^3} [Q_2(-e) - 2Q_2(-e/2) + 2Q_2(e/2) - Q_2(e)] \quad (3.84.d)$$

$$E_2 = \frac{2}{3e^4} [Q_2(-e) - 4Q_2(-e/2) + 6Q_2(0) - 4Q_2(e/2) + Q_2(e)] \quad (3.84.e)$$

O fator *downwash* não planar é utilizado quando $|(\bar{y}^2 + \bar{z}^2 - e^2)/2e\bar{z}| \leq 0,1$:

$$\begin{aligned} D_{2rs} = & \frac{\Delta x_s}{16\pi\bar{z}^2} \left\{ [(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)A_2 + \bar{y}B_2 + C_2 + \bar{y}(\bar{y}^2 + 3\bar{z}^2)D_2 + (\bar{y}^4 + 6\bar{y}^2\bar{z}^2 - \bar{z}^4)E_2]F... \right. \\ & + \frac{1}{(\bar{y}+e)^2 + \bar{z}^2} \left\{ [(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)\bar{y} + (\bar{y}^2 + \bar{z}^2)e]A_2 + (\bar{y}^2 + \bar{z}^2 + \bar{y}e)B_2 + (\bar{y}+e)C_2... \right. \\ & + [\bar{y}^4 - \bar{z}^4 + (\bar{y}^2 - 3\bar{z}^2)\bar{y}e]D_2 + [(\bar{y}^4 - 2\bar{y}^2\bar{z}^2 - 3\bar{z}^4)\bar{y} + (\bar{y}^4 - 6\bar{y}^2\bar{z}^2 + \bar{z}^4)e]E_2 \left. \right\}... \\ & - \frac{1}{(\bar{y}-e)^2 + \bar{z}^2} \left\{ [(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)\bar{y} - (\bar{y}^2 - \bar{z}^2)e]A_2 + (\bar{y}^2 + \bar{z}^2 - \bar{y}e)B_2 + (\bar{y}-e)C_2... \right. \\ & + [\bar{y}^4 - \bar{z}^4 - (\bar{y}^2 - 3\bar{z}^2)\bar{y}e]D_2 + [(\bar{y}^4 - 2\bar{y}^2\bar{z}^2 - 3\bar{z}^4)\bar{y} - (\bar{y}^4 - 6\bar{y}^2\bar{z}^2 + \bar{z}^4)e]E_2 \left. \right\} \\ & \left. + \left[\bar{z}^2 \log \frac{(\bar{y}-e)^2 + \bar{z}^2}{(\bar{y}+e)^2 + \bar{z}^2} \right] D_2 + 4\bar{z}^2 \left[e + \bar{y} \log \frac{(\bar{y}-e)^2 + \bar{z}^2}{(\bar{y}+e)^2 + \bar{z}^2} \right] E_2 \right\} \quad (3.85) \end{aligned}$$

Para os casos restantes:

$$\begin{aligned} D_{2rs} = & \frac{e\Delta x_s}{8\pi(\bar{y}^2 + \bar{z}^2 - e^2)} \left\{ \frac{1}{[(\bar{y}+e)^2 + \bar{z}^2][(\bar{y}-e)^2 + \bar{z}^2]} \dots \right. \\ & \times \{ 2(\bar{y}^2 + \bar{z}^2 + e^2)(e^2A_2 + C_2) + 4\bar{y}e^2B_2 + 2\bar{y}(\bar{y}^4 - 2e^2\bar{y}^2 + 2\bar{y}^2\bar{z}^2 + 3e^4 + 2e^2\bar{z}^2 + \bar{y}^4)D_2... \\ & + 2(3\bar{y}^6 - 7e^2\bar{y}^4 + 5\bar{y}^4\bar{z}^2 + 6e^4\bar{y}^2 + 6e^2\bar{y}^2\bar{z}^2 - 3e^2\bar{z}^4 - \bar{z}^6 + \bar{y}^2\bar{z}^4 - 2e^4\bar{z}^2)E_2 \left. \right\}... \\ & - \frac{(\delta_1\epsilon + \Delta)}{e^2} [(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)A_2 + \bar{y}B_2 + C_2 + \bar{y}(\bar{y}^2 + 3\bar{z}^2)D_2 + (\bar{y}^4 + 6\bar{y}^2\bar{z}^2 - 3\bar{z}^4)E_2] \left. \right\}... \\ & + \frac{\Delta x_s}{8\pi} \left\{ \left[\frac{D_2}{2} \log \frac{(\bar{y}-e)^2 + \bar{z}^2}{(\bar{y}+e)^2 + \bar{z}^2} \right] + 2 \left[e + \bar{y} \log \frac{(\bar{y}-e)^2 + \bar{z}^2}{(\bar{y}+e)^2 + \bar{z}^2} \right] E_2 \right\} \quad (3.86) \end{aligned}$$

onde:

$$\Delta = \left(\frac{e}{|\bar{z}|}\right)^2 \left\{ 1 - \delta_1 - \delta_2 \frac{\pi}{|\bar{z}|} \left(\frac{\bar{y}^2 + \bar{z}^2 - e^2}{2e} \right) \right\} \quad (3.87)$$

3.4 Fluxograma do método DLM não planar

Nesta seção, é apresentado um fluxograma das principais etapas do procedimento numérico-computacional do DLM não planar que foi implementado neste trabalho e introduzido no código próprio de nome AEROSOLVER desenvolvido em ambiente de programação MATLAB. A Figura 3.4 mostra as principais etapas do DLM planar, visto que, primeiramente, calcula-se as variáveis iniciais β, r, T_1, R e k_1 , utilizando as Eqs. (3.55.c), (3.53.c), (3.53.a), (3.55.d) e (3.55.b). Em seguida, é verificada uma condição de truncamento do código para o cálculo de, r . Se essa condição for menor que 10^{-10} , é feita a avaliação de, x_0 , para o cálculo da velocidade, u_1 . Se ela for maior que 10^{-10} , deve-se efetuar a seguinte análise da velocidade u_1 através da Eq. (3.55.a): se $u_1 > 0$ ou $u_1 = 0$, utiliza-se as Eqs. (3.59.a) e (3.57.a) para o cálculo de I_0 e I_1 , respectivamente. Se $u_1 < 0$, I_0 e I_1 devem ser calculadas via Eqs. (3.59.a) e (3.60.a), respectivamente. Na sequência, seleciona-se a função Kernel (parabólica ou quártica) e calcula-se K_1 utilizando a Eq. (3.54.a). Neste caso, os coeficientes de segunda ordem fazem uso da Eq. (3.68), e para os de quarta ordem, usa-se a Eq. (3.78). Por fim, de acordo com a função interpoladora, institui-se o equacionamento para F e D_{1rs} , Eqs. (3.71) e (3.69) (parabólica) ou Eqs. (3.80) e (3.79) (quártica).

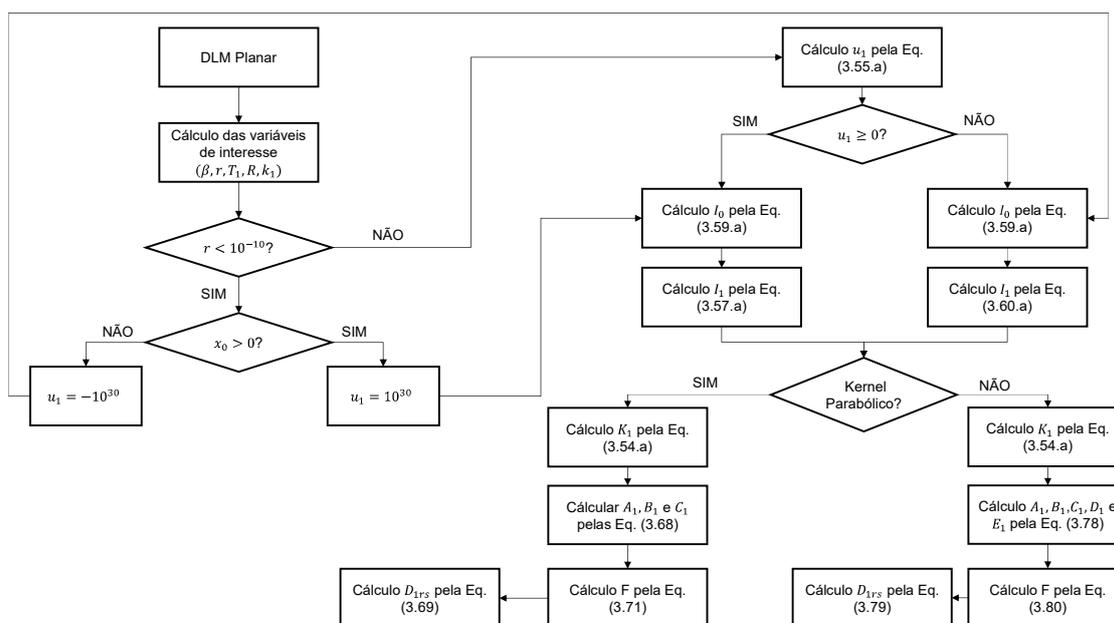


Figura 3.4 – Fluxograma das principais etapas do DLM planar.

Já a Figura 3.5 mostra as etapas do DLM não planar. Neste caso, são utilizadas as mesmas equações iniciais das etapas vistas na Figura 3.4, com exceção da variável T_2 que é calculada pela Eq. (3.53.b). Em seguida, a lógica da condição de truncamento do código para $r < 0$ é semelhante à do DLM planar. Novamente, se a condição de $r < 10^{-10}$, avalia-se a velocidade u_1 pela Eq. (3.55.a), e se for maior ou igual a zero, utiliza-se as Eqs. (3.59.a), (3.59.b) e (3.57.b), respectivamente, para o cálculo de I_0 , J_0 e I_2 . Já para $u_1 < 0$, utilizam-se as Eqs. (3.59.a), (3.59.b) e (3.60.b) para o cálculo de I_0 , J_0 e I_2 . Na sequência, tem-se a função aproximadora (parabólica ou quártica) e o cálculo de K_1 pela Eq. (3.54.b). Finalmente, conforme o Kernel escolhido, é calculado F e D_{2rs} utilizando as Eqs. (3.71) e (3.75) ou (3.76) (parabólica) ou (3.80) e (3.85) ou (3.86) (quártica). É importante destacar que a equação escolhida para D_{2rs} independe da interpolação adotada para a função Kernel, subordinando-se ao módulo da relação $|(\bar{y}^2 + \bar{z}^2 - e^2)/2e\bar{z}| \leq 0,1$.

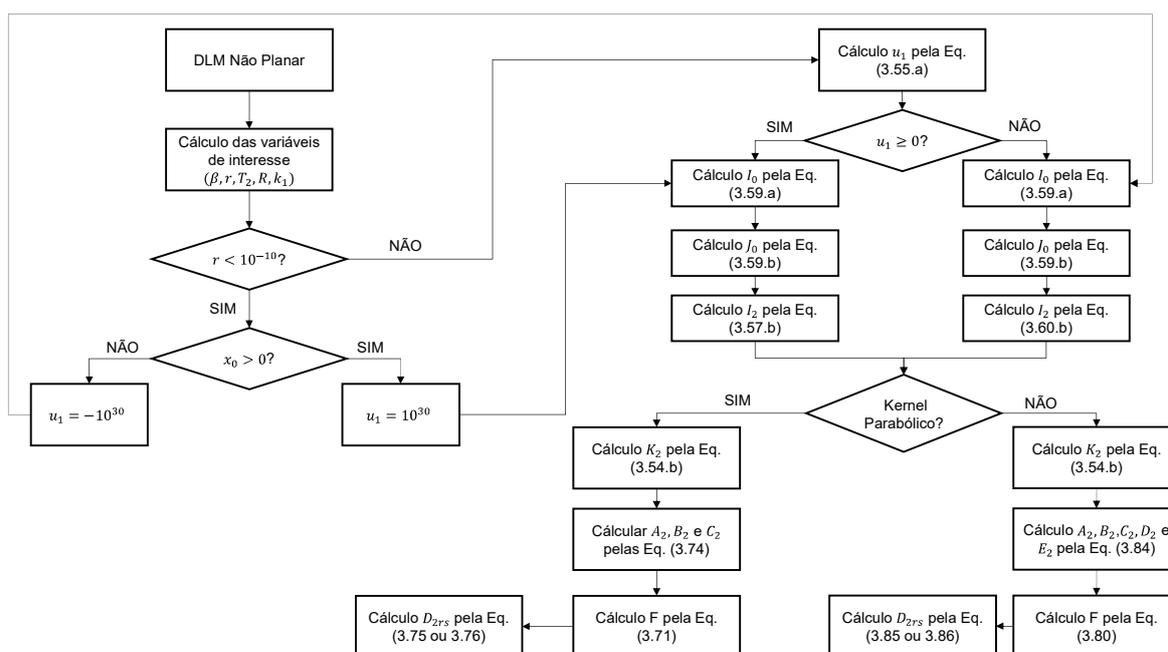


Figura 3.5 – Fluxograma das principais etapas do DLM não planar.

Por fim, a Figura 3.6 mostra o fluxograma da metodologia completa do DLM não planar disponível no código AEROSOLVER. Salienta-se que uma das vantagens da implementação que foi feita aqui é o fato de poder calcular a interação aerodinâmica sobre qualquer estrutura utilizando a discretização planar ou não planar, dependendo da aplicação e interesse do usuário. Primeiramente, inicializa-se o programa por meio das condições iniciais como número de Mach, M , frequência reduzida, k , semi-corda do painel, b , e o fator beta, β , dado pela Eq. (3.55.c). Em seguida, é identificado o grau de

interpolação da função Kernel e, após obter as informações sobre as coordenadas cartesianas e o número de elementos do painel, uma sub-rotina é utilizada para a discretização da geometria de interesse. Logo após, calcula-se a *downwash*, D_{rs} , para a frequência reduzida nula. Nesta etapa, é importante destacar as operações relativas aos painéis receptores e emissores, ou seja, para cada ponto receptor do painel (localizado a 3/4 da corda) deve-se fazer a leitura da influência de cada ponto emissor (posicionado a 1/4 da corda). Essa lógica físico-computacional é tomada para todas as sub-rotinas: (a) DLM estacionário; (b) DLM planar; e (c) DLM não planar. Portanto, a matriz D final é calculada como sendo o somatório das três partes de interesse, ou seja, $D_{rs} = D_{0rs} + D_{1rs} + D_{2rs}$.

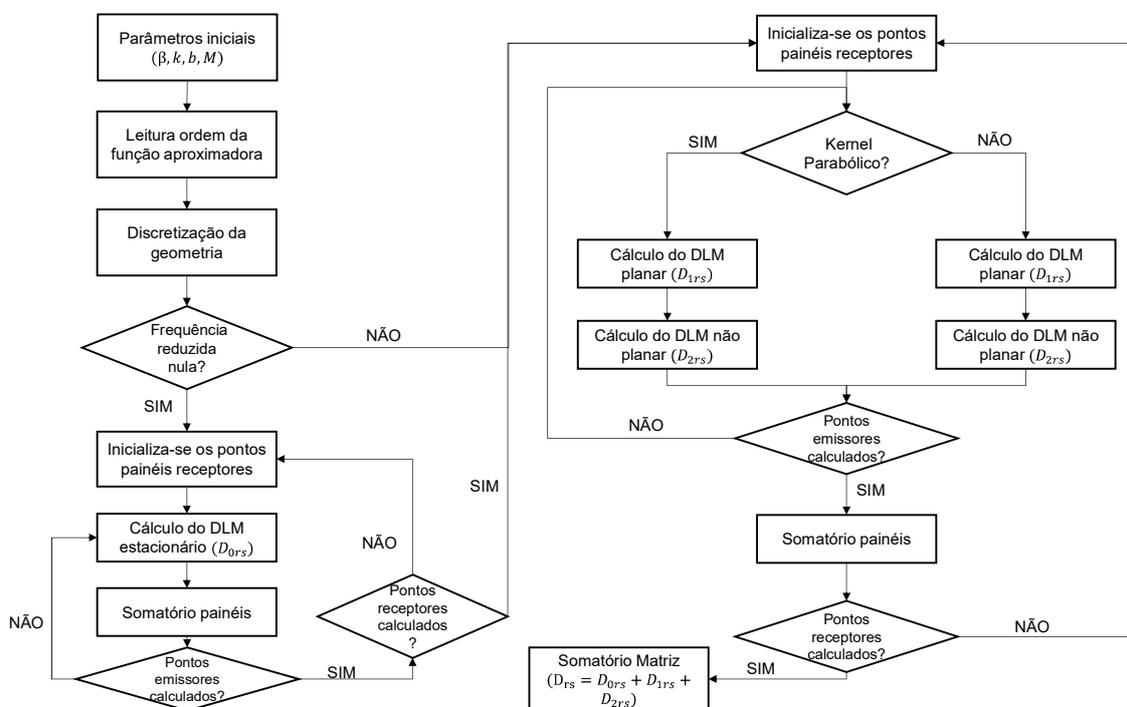


Figura 3.6 – Fluxograma completo do DLM não planar disponível no AEROSOLVER.

CAPÍTULO IV

PLACAS SANDUÍCHES VISCOELÁSTICAS

Este capítulo apresenta a modelagem por elementos finitos do modelo estrutural de uma placa sanduíche viscoelástica formada por três camadas. Maiores detalhes da modelagem MEF de placas multicamadas podem ser encontrados nos trabalhos de (LIMA, 2007; LIMA; FARIA; RADE, 2010). Um aspecto importante que diz respeito à construção da matriz de rigidez da subestrutura viscoelástica de tais sistemas é o uso do Princípio da Equivalência Elástico-Viscoelástico (PEEV) combinado com o conceito de módulo complexo e frequência reduzida. Além disso, visando diminuir o custo computacional para a realização das análises aeroelásticas, as matrizes elementares de massa e rigidez da parte estrutural foram todas parametrizadas.

4.1 Relações tensão-deformação

A Figura 4.1 mostra o elemento finito formado pela camada base (1), um núcleo viscoelástico (2) e uma camada restringente (3), sendo todas isotrópicas. Para as faces elásticas (1) e (3) é considerado as deformações de extensão e de flexão, e para a camada viscoelástica (2), além dessas, é assumido ainda o cisalhamento transversal. O campo de deslocamento transversal, w , e as rotações, θ_x e θ_y , são comuns para todas as camadas, assumindo-se que as camadas estão perfeitamente coladas. Nesta mesma figura, nota-se que u_1 e u_3 são os deslocamentos longitudinais médios na direção x das faces elásticas, e v_1 e v_3 , são os correspondentes na direção y . Por fim, supõem-se de forma igualitária que o deslocamento transversal e as rotações são comuns a todas as camadas elásticas do modelo.

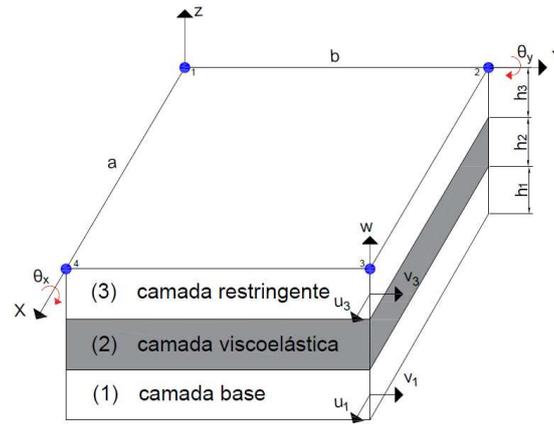


Figura 4.1 – Elemento do painel sanduíche de três camadas.

Conforme os desenvolvimentos (LIMA; FARIA; RADE, 2010), os campos de deslocamentos das camadas são dados como:

$$u^{(1)} = u_1 - z_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_1 \quad (4.1.a)$$

$$v^{(1)} = v_1 - z_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_1 \quad (4.1.b)$$

$$u^{(2)} = u_2 + z_2 \left[\frac{u_3 - u_1}{h_2} + \left(\frac{h_3 + h_1}{2h_2} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \quad (4.1.c)$$

$$v^{(2)} = v_2 + z_2 \left[\frac{v_3 - v_1}{h_2} + \left(\frac{h_3 + h_1}{2h_2} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \quad (4.1.d)$$

$$u^{(3)} = u_3 - z_3 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_3 \quad (4.1.e)$$

$$v^{(3)} = v_3 - z_3 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_3 \quad (4.1.f)$$

Conforme discutido anteriormente, para as faces elásticas, tem-se as seguintes deformações, $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$, e para a parte viscoelástica, tem-se ainda as deformações devidas ao cisalhamento transversal, $\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$ e $\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$. Portanto, a partir das relações cinemáticas (4.1), chega-se às seguintes relações para as deformações de cada camada:

- Faces elásticas (1) e (3)

$$\epsilon_x^{(1)} = \frac{\partial u_1}{\partial x} - z_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4.2.a)$$

$$\epsilon_y^{(1)} = \frac{\partial v_1}{\partial y} - z_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (4.2.b)$$

$$\gamma_{xy}^{(1)} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} - 2z_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4.2.c)$$

$$\epsilon_x^{(3)} = \frac{\partial u_3}{\partial x} - z_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4.2.d)$$

$$\epsilon_y^{(3)} = \frac{\partial v_3}{\partial y} - z_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (4.2.e)$$

$$\gamma_{xy}^{(3)} = \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial x} - 2z_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4.2.f)$$

- Camada viscoelástica (2)

$$\epsilon_x^{(2)} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{z_2}{h_2} \left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \left(\frac{h_3 + h_1}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (4.3.a)$$

$$\epsilon_y^{(2)} = \frac{\partial v^{(2)}}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{z_2}{h_2} \left[\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + \left(\frac{h_3 + h_1}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (4.3.b)$$

$$\gamma_{xy}^{(2)} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{z_2}{h_2} \left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + (h_3 + h_1) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (4.3.c)$$

$$\gamma_{xz}^{(2)} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z_2} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{h_2} \left[u_3 - u_1 + \left(\frac{h_3 + h_1}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (4.3.d)$$

$$\gamma_{yz}^{(2)} = \frac{\partial v^{(2)}}{\partial z_2} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{h_2} \left[v_3 - v_1 + \left(\frac{h_3 + h_1}{2} + h_2 \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (4.3.e)$$

Combinando a Lei de Hooke com as relações anteriores, chega-se na seguinte relação matricial entre as tensões e as deformações de cada camada do sanduíche:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = \mathbf{E}^{(i)} \boldsymbol{\epsilon}^{(i)} \quad (4.4)$$

onde:

$$i = 1,3 \quad \boldsymbol{\sigma}^{(i)} = \begin{Bmatrix} \sigma_x^{(i)} \\ \sigma_y^{(i)} \\ \tau_{xy}^{(i)} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\epsilon}^{(i)} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^{(i)} \\ \epsilon_y^{(i)} \\ \gamma_{xy}^{(i)} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{E}^{(i)} = \begin{bmatrix} \frac{E^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}} & \frac{E^{(i)}\nu^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}} & 0 \\ \frac{E^{(i)}\nu^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}} & \frac{E^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}} & 0 \\ 0 & 0 & G^{(i)} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$i = 2 \quad \boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \begin{Bmatrix} \sigma_x^{(2)} \\ \sigma_y^{(2)} \\ \tau_{xy}^{(2)} \\ \tau_{xz}^{(2)} \\ \tau_{yz}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\epsilon}^{(2)} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^{(2)} \\ \epsilon_y^{(2)} \\ \gamma_{xy}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \\ \gamma_{yz}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{E}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{E^{(2)}}{1-\nu^{(2)2}} & \frac{E^{(2)}\nu^{(2)}}{1-\nu^{(2)2}} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{E^{(2)}}{1-\nu^{(2)2}} & 0 & 0 & 0 \\ & & G^{(2)} & 0 & 0 \\ & & & G^{(2)} & 0 \\ \text{sym.} & & & & G^{(2)} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Neste ponto, é importante destacar que os módulos $\mathbf{E}^{(2)}$ e $\mathbf{G}^{(2)}$ são dependentes da frequência e da temperatura de operação do material viscoelástico.

4.2 Discretização por elementos finitos

Para a discretização do modelo de placa sanduíche de três camadas é escolhido um EF retangular plano de quatro nós e sete graus de liberdade (gdl) por nó. Neste caso, o deslocamento transversal, w , é interpolado por uma função cúbica em x e y , e os deslocamentos longitudinais u e v são aproximados por funções bilineares em x e y .

Aplicando as condições de contorno nodais do elemento finito da Figura 4.1 de dimensões a e b nas aproximações dos campos de deslocamentos e rotações, chega-se à seguinte relação entre os campos de deslocamentos e o vetor dos gdl:

$$\mathbf{U}(x,y) = \mathbf{N}(x,y)\boldsymbol{\delta}_{(e)}(t) \quad 0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b \quad (4.7)$$

onde $\mathbf{U}(x,y) = [u_1 \ v_1 \ u_3 \ v_3 \ w \ \theta_x \ \theta_y]^T$, $\mathbf{N}(x,y) = [N_{u_1} \ N_{v_1} \ N_{u_3} \ N_{v_3} \ N_w \ N_{\theta_x} \ N_{\theta_y}]^T$ é a matriz contendo as funções de forma do modelo e $\boldsymbol{\delta}_{(e)}(t) = [\delta_{(e)1} \ \delta_{(e)2} \ \delta_{(e)3} \ \delta_{(e)4}]^T$ com $\boldsymbol{\delta}_{(e)j}(t) = [u_{1j} \ v_{1j} \ u_{2j} \ v_{2j} \ \dots \ u_{nj} \ v_{nj} \ w_j \ \theta_{xj} \ u_{vj}]^T$; $j = 1, \dots, 4$. Detalhes das funções de forma do modelo podem ser encontrados em Lima (2007).

Portanto, combinando as relações (4.2) e (4.3) com a equação do campo de deslocamento (4.7), chega-se no vetor das deformações:

$$\boldsymbol{\epsilon}(x,y,t) = \mathbf{D}(x,y)\boldsymbol{\delta}_{(e)}(t) \quad (4.8)$$

onde $\mathbf{D}(x,y)$ é a matriz contendo os operadores diferenciais das relações (4.2) e (4.3) aplicados na matriz das funções de forma $\mathbf{N}(x,y)$.

4.3 Matrizes elementares de massa e rigidez

Neste caso, será utilizado as equações de Lagrange para obter as equações do movimento a nível elementar do modelo de EF de placa sanduíche. Para tanto, deve-se formular as energias cinética e de deformação do modelo obtidas a partir das energias de cada camada. Por exemplo, para a energia de deformação total, tem-se:

$$\mathbf{U} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{U}^{(k)} \quad (4.9)$$

onde $\mathbf{U}^{(i)} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\epsilon}^{(i)T} \mathbf{E}^{(i)} \boldsymbol{\epsilon}^{(i)} dV$ e, a partir da Eq. (4.8), pode-se obter a expressão da energia de deformação da i -ésima camada:

$$\mathbf{U}^{(i)} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}_{(e)}^T \left(\int_V \mathbf{D}^{(i)T} \mathbf{E}^{(i)} \mathbf{D}^{(i)} dV \right) \boldsymbol{\delta}_{(e)} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}_{(e)}^T \mathbf{K}^{(i)} \boldsymbol{\delta}_{(e)} \quad (4.10)$$

onde $\mathbf{K}^{(i)} = \int_V \mathbf{D}^{(i)T} \mathbf{E}^{(i)} \mathbf{D}^{(i)} dV$ é a contribuição da i -ésima rigidez do elemento de placa.

Conforme os desenvolvimentos de Lima (2007), após algumas manipulações matemáticas, pode-se chegar à seguinte expressão para a matriz de rigidez elementar das faces elásticas, $i = 1$ e 3 , onde os subscritos m , f e mf , designam, respectivamente, aos efeitos de membrana, flexão e de acoplamento membrana-flexão:

$$\mathbf{K}^{(i)} = \mathbf{K}_{mm}^{(i)} + \mathbf{K}_{ff}^{(i)} + 2\mathbf{K}_{mf}^{(i)} \quad (4.11)$$

onde $\mathbf{K}_{mm}^{(i)} = \int_V \mathbf{D}_m^{(i)T} \mathbf{E}^{(i)} \mathbf{D}_m^{(i)} dV$, $\mathbf{K}_{ff}^{(i)} = \int_V \mathbf{D}_f^{(i)T} \mathbf{E}^{(i)} \mathbf{D}_f^{(i)} dV$ e $\mathbf{K}_{mf}^{(i)} = \int_V \mathbf{D}_m^{(i)T} \mathbf{E}^{(i)} \mathbf{D}_f^{(i)} dV$.

De maneira análoga, considerando a camada viscoelástica, a matriz de rigidez elementar possui a seguinte forma, onde c designa o efeito de cisalhamento:

$$\mathbf{K}^{(2)} = \mathbf{K}_{mm}^{(2)} + \mathbf{K}_{ff}^{(2)} + \mathbf{K}_{cc}^{(2)} + 2\mathbf{K}_{mf}^{(2)} + 2\mathbf{K}_{mc}^{(2)} + 2\mathbf{K}_{fc}^{(2)} \quad (4.12)$$

onde $\mathbf{K}_{mm}^{(2)} = \int_V \mathbf{D}_m^{(2)T} \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{D}_m^{(2)} dV$, $\mathbf{K}_{ff}^{(2)} = \int_V \mathbf{D}_f^{(2)T} \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{D}_f^{(2)} dV$, $\mathbf{K}_{cc}^{(2)} = \int_V \mathbf{D}_c^{(2)T} \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{D}_c^{(2)} dV$,
 $\mathbf{K}_{mf}^{(2)} = \int_V \mathbf{D}_m^{(2)T} \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{D}_f^{(2)} dV$, $\mathbf{K}_{mc}^{(2)} = \int_V \mathbf{D}_m^{(2)T} \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{D}_c^{(2)} dV$ e $\mathbf{K}_{fc}^{(2)} = \int_V \mathbf{D}_f^{(2)T} \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{D}_c^{(2)} dV$.

Então, a matriz de rigidez do elemento finito é obtida pela soma das matrizes de rigidez de cada camada:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{K}^{(i)} \quad (4.13)$$

Para a energia cinética, tem-se:

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{T}^{(i)} \quad (4.14)$$

onde $\mathbf{T}^{(i)} = \frac{\rho_i h_i}{2} \left(\int_A \dot{\mathbf{u}}^{(i)T} \dot{\mathbf{u}}^{(i)} dA + \int_A \dot{\mathbf{v}}^{(i)T} \dot{\mathbf{v}}^{(i)} dA + \int_A \dot{\mathbf{w}}^{(i)T} \dot{\mathbf{w}}^{(i)} dA \right)$ e, a partir da Eq. (4.7) pode-se obter expressão da energia cinética da i -ésima camada:

$$\mathbf{T}^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \dot{\boldsymbol{\delta}}^T \left(\rho_i h_i \int_A (\mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w + \mathbf{N}_{uk}^T \mathbf{N}_{uk} + \mathbf{N}_{vk}^T \mathbf{N}_{vk}) dA \right) \dot{\boldsymbol{\delta}} \quad \text{ou} \quad \mathbf{T}^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \dot{\boldsymbol{\delta}}^T \mathbf{M}^{(i)} \dot{\boldsymbol{\delta}} \quad (4.15)$$

onde $\mathbf{M}^{(i)} = \rho_i h_i \int_A (\mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w + \mathbf{N}_{uk}^T \mathbf{N}_{uk} + \mathbf{N}_{vk}^T \mathbf{N}_{vk}) dA$ é a contribuição da i -ésima matriz de massa do elemento de placa, e \mathbf{N}_w , \mathbf{N}_{uk} e \mathbf{N}_{vk} são as matrizes contendo as funções de forma. h_i e ρ_i são a espessura e a densidade da i -ésima camada, respectivamente. Maiores detalhes dos desenvolvimentos para a obtenção das matrizes elementares de massa e rigidez de placas multicamadas são apresentados em Lima (2007).

Por fim, a matriz de massa total é dada como segue:

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{M}^{(i)} \quad (4.16)$$

A partir das matrizes elementares e de procedimentos de montagem clássicos de elementos finitos via conectividade de nós, pode-se obter as equações do movimento do sistema no domínio do tempo:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + (\mathbf{K}_e + G\bar{\mathbf{K}}_v)\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (4.17)$$

onde \mathbf{M} e $(\mathbf{K}_e + G\bar{\mathbf{K}}_v)$ são, respectivamente, as matrizes de massa e rigidez complexa do sistema viscoelástico, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^N$ e $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^N$ são os vetores de deslocamentos e forças externas.

Para uma excitação harmônica do tipo, $\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}e^{i\omega t}$ e $\mathbf{f}(t) = \mathbf{U}e^{i\omega t}$, a Eq. (4.17) pode ser reescrita no domínio da frequência da seguinte maneira:

$$\mathbf{Z}(\omega, T)\mathbf{U}(\omega, T) = \mathbf{F}(\omega) \quad (4.18)$$

onde $\mathbf{Z}(\omega, T) = \mathbf{K}_e + G(\omega, T)\bar{\mathbf{K}}_v - \omega^2\mathbf{M}$ é a matriz de rigidez dinâmica complexa do sistema viscoelástico, \mathbf{K}_e é a matriz rigidez das partes elásticas e $\mathbf{K}_v(\omega, T) = G(\omega, T)\bar{\mathbf{K}}_v$ é a matriz de rigidez da parte viscoelástica, sendo dependente da frequência e da temperatura conforme o módulo complexo, $G(\omega, T) = G'(\omega, T) + iG''(\omega, T) = G'(\omega, T)(1 + i\eta(\omega, T))$, onde $G'(\omega, T)$ é o módulo de armazenamento, $G''(\omega, T)$ é o módulo de perda, e $\eta(\omega, T)$ é o fator de perda que define a eficiência do material viscoelástico.

4.4 Amortecimento viscoelástico

De acordo com Nashif et al. (1985) e Rao (2003), as propriedades dinâmicas dos materiais viscoelásticos são fortemente influenciadas pelas condições ambientais e operacionais como, por exemplo, temperatura ambiente, frequência de excitação, pré-carga estática, umidade, entre outras. Assim, o estudo paramétrico acerca da influência desses fatores no comportamento dinâmico de sistemas mecânicos incorporando tais materiais é imperativo para melhorar a eficiência deles em aplicações práticas.

Segundo Lima (2003), a temperatura é o parâmetro que possui maior influência nas propriedades dos materiais viscoelásticos. A título de ilustração, a Figura 4.2 mostra a variação do módulo de armazenamento e do fator de perda em função da temperatura para uma frequência fixa. Percebe-se quatro regiões: a vítrea (I), a de transição (II), a de borracha (III) e a fluido (IV). Portanto, é imprescindível considerar as variações de temperatura durante a modelagem de sistemas com materiais viscoelásticos.

No contexto da atenuação de vibrações, a região (II) é mais interessante, uma vez que possui o maior valor para o fator de perda, resultando em maior quantidade de

amortecimento. Entretanto, as propriedades variam muito com a temperatura e, neste caso, a maioria das aplicações práticas dos viscoelásticos envolvem o projeto desses materiais na região de borracha (III).

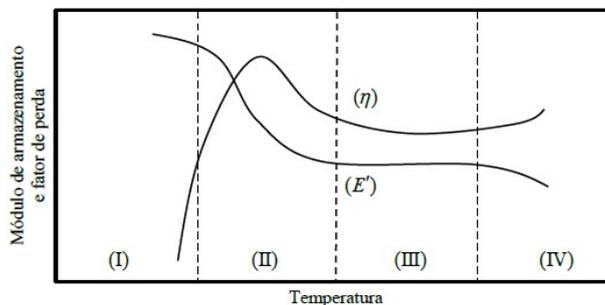


Figura 4.2 – Variação do módulo de armazenamento e do fator de perda com a temperatura para frequência constante (adaptado de NASHIF et al., 1985).

De acordo com Nashif et al. (1985), a frequência é o parâmetro que leva a um aumento do módulo de armazenamento dos viscoelásticos, como visto pela Figura 4.3.

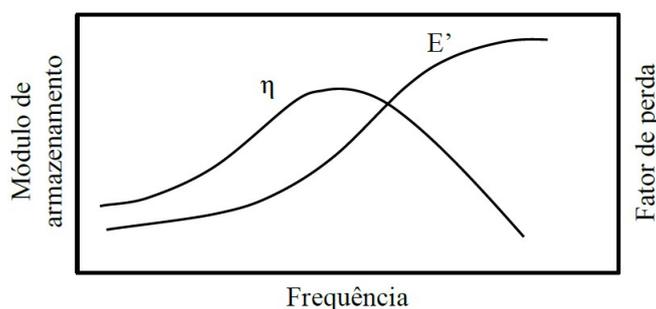


Figura 4.3 – Variação do módulo de armazenamento e do fator de perda com a frequência (adaptado de NASHIF et al., 1985).

Uma análise qualitativa das Figuras 4.2 e 4.3 permite concluir que a influência exercida pela frequência é, qualitativamente, o inverso do efeito da temperatura, mas em uma escala menor, ou seja, a variação na frequência de algumas décadas reflete a mesma influência de alguns poucos graus na temperatura. Isto é a base para o Princípio da Superposição Temperatura-Frequência (PSFT) que indica que as características viscoelásticas em diferentes temperaturas podem ser associadas entre si através de mudanças horizontais (deslocamentos) na frequência da excitação. Simbolicamente, o PSFT é possível expressá-lo da seguinte forma:

$$G(\omega_r, T_0) = E(\alpha_T \omega, T_0) \quad (4.19.a)$$

$$\eta(\omega_r, T_0) = \eta(\alpha_T \omega, T_0) \quad (4.19.b)$$

onde $\omega_T = \alpha_T(T)\omega$ é a frequência reduzida, ω é a frequência de excitação, $\alpha_T(T_v)$ é o fator de deslocamento dependente da temperatura de operação, e T_0 é a temperatura de referência.

A Figura 4.4 ilustra uma curva do PSFT para um material viscoelástico arbitrário, para valores de temperatura T_{-1} , T_0 e T_1 . Se deslocamentos horizontais segundo o eixo da frequência são aplicados nestas curvas, elas podem ser combinadas numa única curva mestre e, na sequência, utilizar ajustes de curvas de modelos para encontrar a função do módulo complexo.

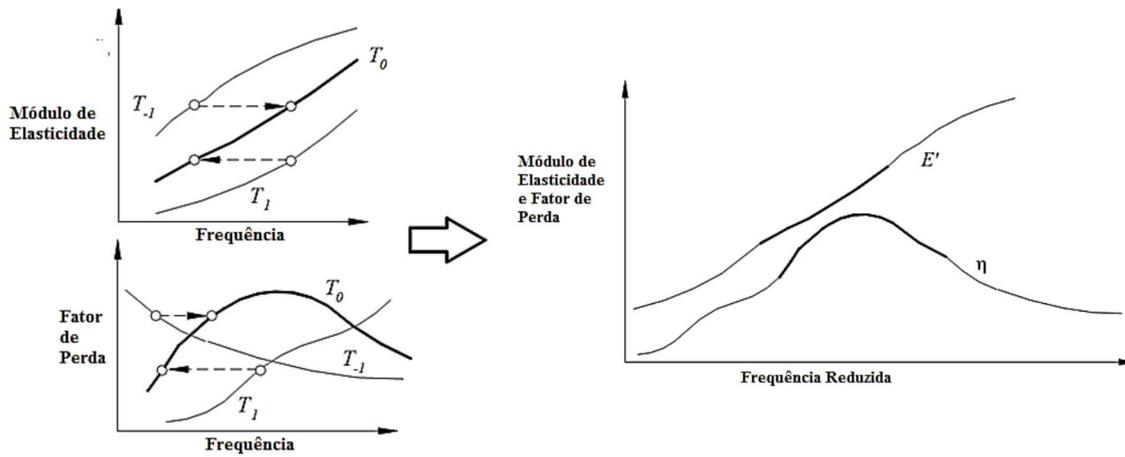


Figura 4.4 – Princípio da superposição PSFT (adaptado de LIMA et al., 2010).

O material viscoelástico utilizado nesta Tese para as análises aeroelásticas é o ISD112 fabricado pela 3M. Para este material, os desenvolvimentos feitos por Drake e Soovere (1984) e Lima (2007), permitem obter a seguinte expressão para o módulo complexo combinado com a frequência reduzida:

$$G(\omega_r, T_v) = 0,4307 + \frac{1200}{1 + 3,24 \left(\frac{i\omega_r}{1543000} \right)^{-0,18} + \left(\frac{i\omega_r}{1543000} \right)^{-0,6847}} [\text{MPa}] \quad (4.20)$$

onde $\alpha(T_v) = 10^{\left[-3758,4 \left(\frac{1}{T_v} - 0,00345 \right) - 225,06 \log(0,00345 T_v) + 0,23273(T_v - 290) \right]}$ é o fator de deslocamento, T_v é a temperatura de operação e $\omega_r = \alpha(T_v)\omega$ é a frequência reduzida.

Na literatura há diversos materiais viscoelásticos para aplicação industrial, tais como: a) série ISD fabricado pela 3M; b) série C fabricado pela EAR e c) série DYAD fabricado pela SOUNDCOAT. Na Tabela 4.1 são apresentadas características de alguns desses materiais (BAZ, 2019).

Tabela 4.1 – Características dos materiais viscoelásticos das séries ISD, C e DYAD.

Material viscoelástico	Faixa de operação da Temperatura [°C]	Fator de perda máximo (η_{max})	Módulo de armazenamento em η_{max} [MPa]	Coefficiente de Poisson	Densidade [kg/m³]
ISD-110	40 a 105	1,20	0,12	0,49	950
ISD-112	-20 a 65	1,10	0,15	0,49	950
ISD-113	-40 a 20	1,20	0,40	0,49	950
C-1002	13 a 41	1,02	20	0,49	1286
C-2003	27 a 54	1,00	150	0,49	1286
DYAD-601	-10 a 40	1,00	5	0,49	1210
DYAD-606	10 a 80	1,05	10	0,49	1210
DYAD-609	0 a 50	0,60	20	0,49	1210

CAPÍTULO V

MODELAGEM DO PROBLEMA AEROVISCOELÁSTICO

Este capítulo apresenta a estratégia de acoplamento entre os modelos estrutural amortecido e aerodinâmico para a construção do modelo aeroviscoelástico de interesse deste trabalho. Para tanto, foi utilizada a aproximação de Roger para o cálculo das matrizes aerodinâmicas generalizadas do sistema aeroviscoelástico e o método PK adaptado para determinar as velocidades de *flutter* de tais sistemas para a verificação da eficiência do tratamento viscoelástico superficial para a supressão do *flutter* em regime subsônico.

5.1 Acoplamento entre os modelos estrutural e aerodinâmico

Por meio do acoplamento dos modelos aerodinâmico e estrutural multicamadas, pode-se avaliar estruturas do tipo asas e painéis sanduíches viscoelásticos. Neste caso, o DLM fornece a distribuição da força aerodinâmica ao longo dos painéis para uma dada frequência reduzida, dando origem ao modelo aerodinâmico que deve interagir com o modelo de EFs do sistema amortecido. Para o acoplamento dos modelos, será utilizado interpolações do tipo *splines* (KOTIKALPUDI; PFIFER; BALAS, 2015; HARDER; DESMARAIS, 1972), e as equações do movimento do sistema Eq. (4.17) devem ser avaliadas para obter os deslocamentos e acelerações dos nós:

$$\mathbf{F}_{\text{modal}} = \mathbf{M}_s \ddot{\boldsymbol{\eta}} + (\mathbf{K}_e + \mathbf{G}\bar{\mathbf{K}}_v)_s \boldsymbol{\eta} \quad (5.1)$$

onde a deformação elástica para o i -ésimo nó da estrutura é dada da forma:

$$\delta_i = \sum_j^n \phi_j \eta_i \quad (5.2)$$

onde ϕ_j é o j-ésimo modo de vibração da estrutura e η são os deslocamentos nodais

Estando a frequência harmônica, ω , relacionada com a frequência reduzida, k , pode-se definir o seguinte vetor dos esforços aerodinâmicos atuantes sobre o ponto de controle do painel:

$$\mathbf{F}_{\text{aero}} = q_\infty \mathbf{S} \mathbf{w}_N \mathbf{AIC} \mathbf{h}_a^T \quad (5.3)$$

onde \mathbf{AIC} é a matriz de influência dos coeficientes aerodinâmicos, \mathbf{h}_a é o vetor de deslocamentos modais dos pontos de controle dos painéis, \mathbf{S} representa o vetor de áreas e q_∞ é a pressão dinâmica.

A partir da Eq. (3.22), pode-se obter o *downwash* e, conseqüentemente, os deslocamentos nos pontos de controle:

$$\mathbf{w}_N = \frac{\partial \mathbf{h}_a}{\partial t} + U \frac{\partial \mathbf{h}_a}{\partial x} \quad (5.4)$$

O vetor dos esforços aerodinâmicos é então calculado a partir das deformações modais da estrutura amortecida, as quais consideram interpolações polinomiais para os seus deslocamentos nodais. Neste caso, a seguinte relação é levada em consideração (KOTIKALPUDI; PFIFER; BALAS, 2015):

$$\mathbf{T}_{\text{as}} = \mathbf{T}_{\text{interp}} \mathbf{T}_{\text{spline}} \quad (5.5)$$

Dessa maneira, a deformação nos pontos de controle para a malha aerodinâmica é obtida da seguinte forma:

$$\mathbf{h}_a(x_a, y_a) = \mathbf{T}_{\text{as}} \mathbf{h}_{\text{modal}} \quad (5.6)$$

Visto que se pode assumir:

$$\mathbf{T}_{\text{interp}} = \sum_{j=0}^{n_x} \sum_{k=0}^{n_y} \alpha_{jk} \mathbf{x}_\alpha^j \mathbf{y}_\alpha^k \quad (5.7)$$

onde as constantes de aproximação das formas modais, α_{jk} , são obtidas através da matriz de interpolação da deformação, $\mathbf{T}_{\text{spline}}$, dos nós da malha estrutural, assumindo um plano médio:

$$\alpha_{jk} = \mathbf{T}_{\text{spline}}^{-1} \mathbf{h}_{\text{modal}} \quad (5.8)$$

onde:

$$\mathbf{T}_{\text{interp}}(x,y) = \sum_{j=0}^{n_x} \sum_{k=0}^{n_y} \mathbf{x}^j \mathbf{y}^k \quad (5.9)$$

A título de ilustração do procedimento de acoplamento entre as malhas estrutural e aerodinâmica, tem-se uma superfície com quatro painéis (malha aerodinâmica) e quatro elementos finitos (malha estrutural), como ilustrada na Figura 5.1.

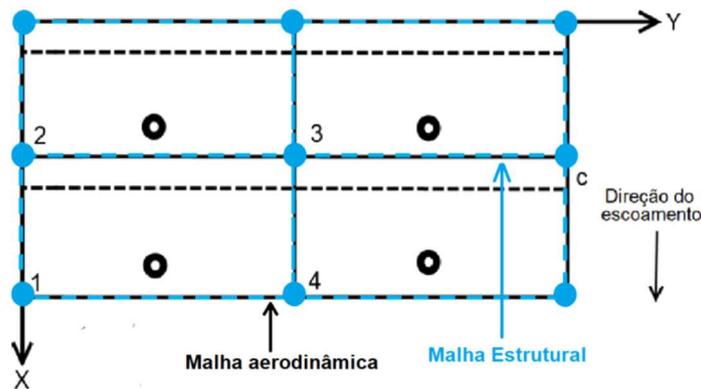


Figura 5.1 - Ilustração das malhas aerodinâmica (2x2) e estrutural (2x2).

A Figura 5.2 mostra a conexão de interpolação dos deslocamentos dos nós da malha estrutural com os respectivos pontos de controle da malha aerodinâmica, assumindo uma função interpoladora para os pontos nodais da estrutura caracterizados pela matriz de *splines*, $\mathbf{T}_{\text{spline}}$. Além disso, considera-se rígida cada uma das conexões vermelhas da malha *spline*, visto que o objetivo dessa é a transformação do movimento de todos os graus de liberdade de um nó da malha estrutural (azul) em um movimento

de elevação dos nós da *spline* anexados ao ponto de controle da malha aerodinâmica (KOTIKALPUDI; PFIFER; BALAS, 2015).

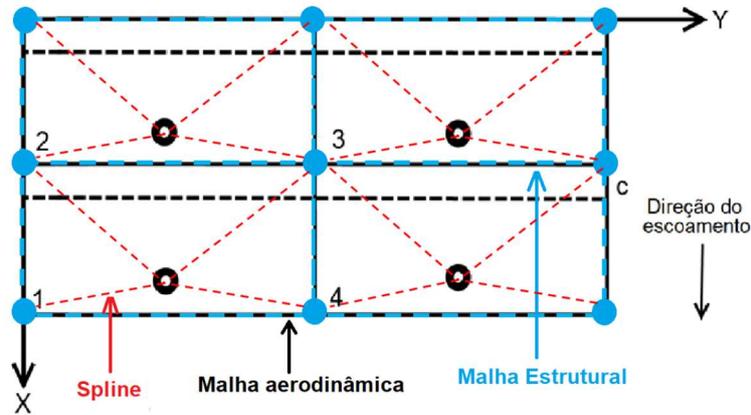


Figura 5.2 – Aproximação dos pontos de controle aerodinâmicos aos nós da estrutura.

5.2 Matrizes generalizadas no domínio modal

Para o estudo do fenômeno do *flutter* dos sistemas aeroviscoelásticos de interesse deste trabalho, é conveniente resolver as equações do movimento no domínio modal. Neste caso, introduz-se a Eq. (5.6) na (5.3) para gerar o vetor do carregamento aerodinâmico nos pontos de controle da malha aerodinâmica:

$$\mathbf{F}_{\text{aero}} = q_{\infty} \mathbf{T}_{\text{as}}^T \mathbf{S} \mathbf{w}_N \mathbf{AIC} \mathbf{T}_{\text{as}} \mathbf{h}_{\text{modal}} \quad (5.10)$$

Tem-se então o vetor de força externa do modelo estrutural dado pela Eq. (5.1), e a distribuição de força aerodinâmica nos pontos de controle dos painéis definida pela Eq. (5.10). Portanto, faz-se necessária a transformação de matrizes \mathbf{T}_{as} e ϕ para correlacionar a modelagem estrutural e aerodinâmica.

$$\mathbf{F}_{\text{modal}} = \phi^T \mathbf{T}_{\text{as}}^T \mathbf{F}_{\text{aero}} \quad (5.11)$$

Combinando as Eqs. (5.10) e (5.11), tem-se a matriz aerodinâmica generalizada (GAM), \mathbf{Q}_j , para a j -ésima base modal:

$$\mathbf{Q}_j = \phi_j^T \mathbf{T}_{\text{as}}^T \mathbf{S} \mathbf{w}_N \mathbf{AIC} \mathbf{T}_{\text{as}} \mathbf{h}_{\text{modal}} \phi_j \quad (5.12)$$

Uma vez que a distribuição da força aerodinâmica ao longo da estrutura no domínio modal é dada pela seguinte relação,

$$\mathbf{F}_{\text{modal}} = q_{\infty} \mathbf{Q}_j \boldsymbol{\eta}, \quad (5.13)$$

onde:

$$q_{\infty} = \frac{1}{2} \rho_{ar} U_{\infty}^2 \quad (5.14)$$

A Eq. (5.1) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$[-\omega^2 \mathbf{M} + (\mathbf{K}_e + \mathbf{G}\bar{\mathbf{K}}_v)]\{\boldsymbol{\eta}\} = \frac{1}{2} \rho_{ar} U_{\infty}^2 [\mathbf{Q}_j] \{\boldsymbol{\eta}\} \quad (5.15)$$

Nota-se que a matriz GAM é função do número de Mach e da frequência reduzida, além da transformação para o domínio modal para a realização de análises aeroelásticas. Neste caso, deve-se usar métodos iterativos para a resolução da Eq. (5.15) e obter os autovalores para identificar a condição de estabilidade ou instabilidade. Por exemplo, quando a parte imaginária do autovalor assumir valores positivos, tem-se uma condição de instabilidade do sistema (SANTOS et al., 2005).

Existem vários métodos iterativos bem consolidados na literatura para a resolução da Eq. (5.15), como, por exemplo, os métodos P, K e PK. Uma vez que esses métodos possuem uma boa acurácia para determinar as velocidades de *flutter*, eles diferenciam-se basicamente quanto ao comportamento da velocidade subcrítica (HASSIG, 1971; WRIGHT; COOPER, 2007).

5.3 Método PK adaptado para sistemas aeroviscoelásticos

De uma forma geral, os métodos de resolução de problemas aeroelásticos para determinar as velocidades de *flutter* podem ser divididos em duas categorias, a saber: os do domínio do tempo, como em Benini (2002), ou no domínio da frequência, como iniciado por Theodorsen (1935). Entretanto, o domínio da frequência é mais vantajoso para este trabalho, tendo em vista a dependência em frequência e temperatura da parte

viscoelástica (módulo complexo) e a redução do custo computacional envolvido nas análises de estabilidade através a resolução do problema de autovalores complexos.

Neste trabalho, é utilizado uma versão adaptada do método PK para lidar com sistemas aeroviscoelásticos, uma vez que é considerado superior em regiões próximas ao *flutter*. Dessa maneira, ele possui as vantagens dos métodos P (precisão) e K (eficiente) ao mesmo tempo. Entretanto, uma desvantagem é seu custo computacional um pouco mais elevado devido ao procedimento iterativo para cada grau de liberdade (HASSIG, 1971; TAVARES, 2009).

O método PK parte do seguinte equacionamento (BORGES, 2019):

$$\left[p^2 \mathbf{M} + (\mathbf{K}_e + G\bar{\mathbf{K}}_v) - \frac{\rho_{ar} U_\infty^2}{2} \mathbf{Q}(k) \right] \{\eta\} = 0 \quad (5.16)$$

Então, para a solução não trivial, avalia-se o determinante de *flutter*, sendo:

$$\left| p^2 \mathbf{I} + \mathbf{M}^{-1} \left[(\mathbf{K}_e + G\bar{\mathbf{K}}_v) - \frac{\rho_{ar} U_\infty^2}{2} \mathbf{Q}(k) \right] \right| = 0 \quad (5.17)$$

Dessa forma, a Eq. (5.17) possui duas incógnitas a serem determinadas, p e k , sendo necessária mais uma equação para a resolução do sistema. Uma vez que p^2 é um autovalor da relação, $\mathbf{M}^{-1} \left[(\mathbf{K}_e + G\bar{\mathbf{K}}_v) - \frac{\rho_{ar} U_\infty^2}{2} \mathbf{Q}(k) \right]$, e a parte imaginária do autovalor a frequência, têm-se o segundo equacionamento:

$$\text{Im}(p) = k \frac{U_\infty}{b} \quad (5.18)$$

Por fim, reescreve-se a equação no espaço de estados como segue:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \left[(\mathbf{K}_e + G\bar{\mathbf{K}}_v) - \frac{\rho_{ar} U_\infty^2 \text{Re}(\mathbf{Q})}{2} \right] & -\mathbf{M}^{-1} \left(-\frac{\rho_{ar} b U_\infty \text{Im}(\mathbf{Q})}{4k} \right) \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Os autovalores da Eq. (5.19) são definidos como:

$$p = \omega \left(\frac{g}{2} \pm i \right) \quad (5.20)$$

onde $\omega = \text{Im}(p)$ é a frequência e $g = \frac{2\text{Re}(g)}{\text{Im}(p)}$ é o amortecimento.

Neste método, a convergência para a frequência reduzida deve atender ao seguinte critério de parada:

$$|k_s^{(j)} - k_s^{(j-1)}| < \epsilon \rightarrow k_s^{(j-1)} < 1 \quad (5.21.a)$$

$$|k_s^{(j)} - k_s^{(j-1)}| < \epsilon k_s^{(j-1)} \rightarrow k_s^{(j-1)} \geq 1 \quad (5.21.b)$$

onde o sobrescrito j representa a j -ésima iteração, o subscrito s é a frequência reduzida para o modo em questão, e ϵ é a tolerância, normalmente igual a 0,001 (RODDEN; JOHNSON, 1994).

Para determinar a velocidade de *flutter* de um determinado modo, basta plotar o diagrama Vg e verificar em qual velocidade do escoamento o fator de amortecimento do respectivo modo cruza o eixo das abscissas, como ilustrado na Figura 5.3 (SILVA, 2018).

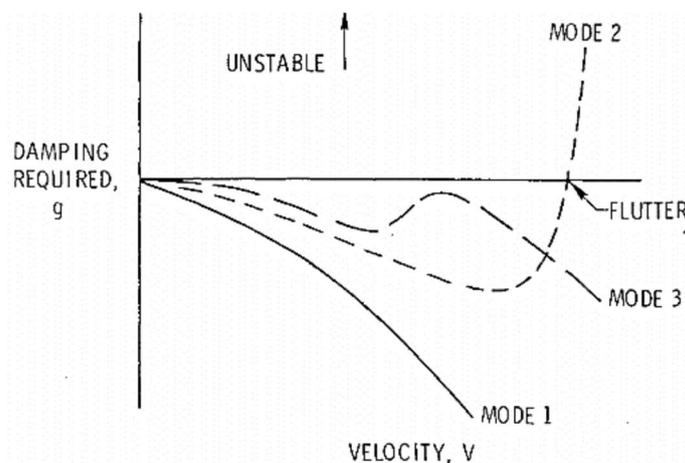


Figura 5.3 – Exemplo de diagrama Vg (extraído de GARRICK; REED III, 1981).

As etapas do método PK para um sistema aeroelástico não amortecido é mostrado na Figura 5.4. Já para sistemas aeroviscoelásticos, modificações devem ser feitas no PK clássico através da introdução de uma rotina suplementar que leva em consideração o efeito da frequência, já que as matrizes de rigidez da parte viscoelástica é dependente da frequência e da temperatura. A Figura 5.5 mostra as etapas do método PK modificado proposto neste trabalho.

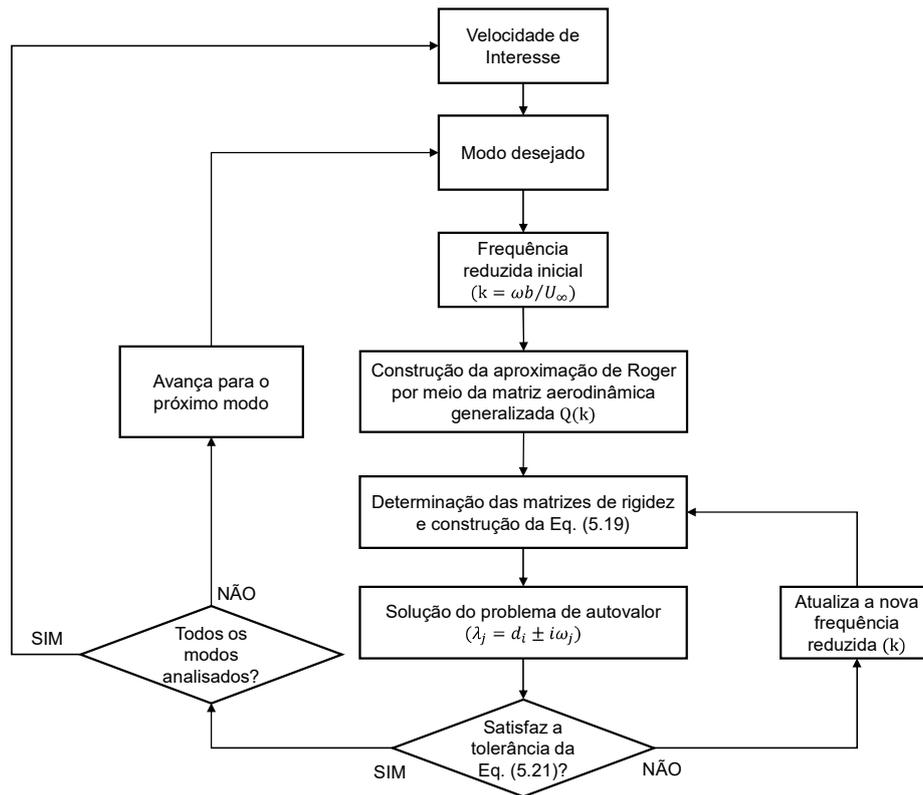


Figura 5.4 – Etapas do método PK para sistemas aeroelásticos não amortecidos.

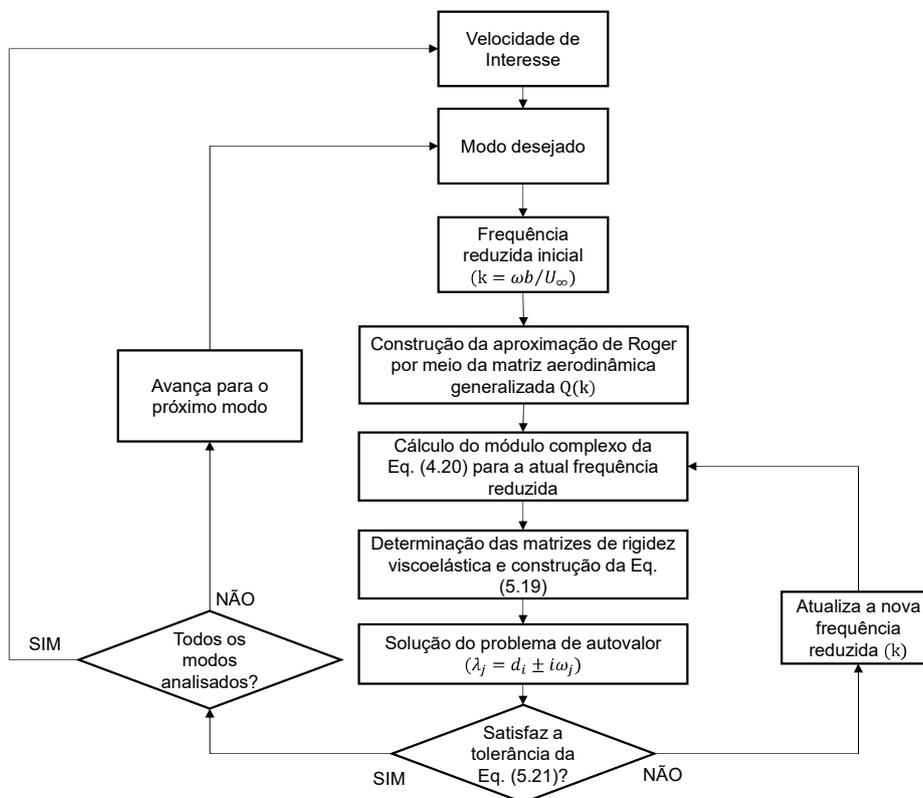


Figura 5.5 – Etapas do método PK modificado para sistemas aeroviscoelásticos.

5.4 Interpolação das matrizes aerodinâmicas generalizadas

O cálculo das matrizes aerodinâmicas generalizadas requer um grande esforço computacional, principalmente para sistemas aeroviscoelásticos. Uma alternativa para melhorar o desempenho do código próprio desenvolvido neste trabalho, foi a utilização de uma interpolação para as matrizes aerodinâmicas no domínio temporal através da utilização da aproximação de Roger. Essa aproximação tem sua utilização difundida para análises aeroelásticas envolvendo controle ativo em asas e empenagens, com a mudança de domínio para determinar o atraso aerodinâmico da resposta do sistema usando o método de mínimos quadrados (ROGER, 1977; BORGES, 2019).

5.4.1 Aproximação de Roger

Partindo-se do fato de que as forças aerodinâmicas são calculadas para um determinado conjunto de frequências reduzidas, k_n , e os respectivos números de Mach, as quais são transformadas para o domínio temporal por meio de uma função de transferência e expressões polinomiais via variável de Laplace, s , tem-se a seguinte expressão para a matriz aerodinâmica generalizada:

$$Q(k_n) = A_0 + A_1(ik_n) + A_2(ik_n)^2 + \sum_{m=3}^6 \frac{A_m(ik_n)^m}{(ik_n + \beta_{m-2})} \quad (5.22)$$

onde as partes real e imaginária e as suas respectivas funções de erro são expressas, respectivamente, pelas seguintes relações:

$$Q_R(k_n) = A_0 - A_2 k_n^2 + \frac{A_3 k_n^2}{k_n^2 + \beta_1^2} + \frac{A_4 k_n^2}{k_n^2 + \beta_2^2} + \frac{A_5 k_n^2}{k_n^2 + \beta_3^2} + \frac{A_6 k_n^2}{k_n^2 + \beta_4^2} \quad (5.23.a)$$

$$Q_I(k_n) = A_1 k_n + \frac{\beta_1 A_3 k_n}{k_n^2 + \beta_1^2} + \frac{\beta_2 A_4 k_n}{k_n^2 + \beta_2^2} + \frac{\beta_3 A_5 k_n}{k_n^2 + \beta_3^2} + \frac{\beta_4 A_6 k_n}{k_n^2 + \beta_4^2} \quad (5.23.b)$$

$$E_{R,n} = Q_{R,n} + [B_{R,n}]\{C\} \quad (5.24.a)$$

$$E_{I,n} = Q_{I,n} + [B_{I,n}]\{C\} \quad (5.24.b)$$

onde:

$$[B_{R,n}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & k_n^2 & \frac{-k_n^2}{k_n^2 + \beta_1^2} & \frac{-k_n^2}{k_n^2 + \beta_2^2} & \frac{-k_n^2}{k_n^2 + \beta_3^2} & \frac{-k_n^2}{k_n^2 + \beta_4^2} \end{bmatrix} \quad (5.25.a)$$

$$[B_{I,n}] = \begin{bmatrix} 0 & -k_n & 0 & \frac{-\beta_1 k_n}{k_n^2 + \beta_1^2} & \frac{-\beta_2 k_n}{k_n^2 + \beta_2^2} & \frac{-\beta_3 k_n}{k_n^2 + \beta_3^2} & \frac{-\beta_4 k_n}{k_n^2 + \beta_4^2} \end{bmatrix} \quad (5.25.b)$$

$$\{C\} = \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_6 \end{Bmatrix} \quad (5.25.c)$$

Dessa maneira, pode-se definir a seguinte expressão do erro complexo:

$$E_n = E_{R,n} + iE_{I,n} \quad (5.26)$$

Visto que se faz um ajuste através dos mínimos quadrados para o conjunto N de frequências reduzidas, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial C} \sum_{n=1}^N (E_n \times \bar{E}_n) \quad (5.27)$$

onde \bar{E}_n é o complexo conjugado de E_n .

Neste ponto, deve-se realizar a diferenciação das Eqs. (5.25) para encontrar a seguinte relação:

$$C = \left[\sum_{n=1}^N (\{B_{R,n}\}[B_{R,n}] + \{B_{I,n}\}[B_{I,n}]) \right]^{-1} \sum_{n=1}^N (Q_{R,n}[B_{R,n}] + Q_{I,n}[B_{I,n}]) \quad (5.28)$$

Como, $k = \omega b/U_\infty$, $s = i\omega$ e $ik = s(b/U_\infty)$, a substituição desses parâmetros na Eq. (5.22) leva à seguinte equação da aproximação de Roger da matriz aerodinâmica generalizada, sendo utilizada neste trabalho uma expansão até a quarta ordem:

$$Q(k_n) = A_0 + A_1 \left(\frac{b}{U_\infty} \right) s + A_2 \left(\frac{b}{U_\infty} \right)^2 s^2 + \sum_{m=3}^6 \frac{A_m s}{\left(s + \frac{U_\infty}{b} \beta_{m-2} \right)} \quad (5.29)$$

onde $\beta_{m-2} = -1,7k_{max} \frac{n}{(n+1)^2}$ é um parâmetro obtido empiricamente para uma dada frequência desejada.

5.5 Código AEROSOLVER

O objetivo desta seção é apresentar, ainda que de forma resumida, as lógicas de programação que foram introduzidas no código próprio AEROSOLVER que foi desenvolvido para realizar as análises de estabilidade de sistemas aeroelásticos e aeroviscoelásticos em regime subsônico. Esta versão atual do código desenvolvido em MATLAB® é capaz de simular painéis planos ou curvos submetidos a um escoamento aerodinâmico não estacionário e não planar, além de estar apto para verificar análises aeroelásticas e aeroviscoelásticas. Além disso, visando aplicações mais complexas de engenharia, foram desenvolvidas rotinas em MATLAB® para o interfaceamento com os modelos de EFs advindos do ANSYS®. Por fim, a determinação das velocidades de *flutter* é feita através do método PK modificado para sistemas aeroelásticos amortecidos viscoelasticamente, fazendo-se uso dos coeficientes de aproximação de Roger obtidos por meio das matrizes generalizadas aerodinâmicas.

5.5.1 Programa aerodinâmico

A Figura 5.6 apresenta as principais etapas da estrutura do código aerodinâmico que foi implementado. A Figura 5.6(a) mostra o cálculo do deslocamento transversal da estrutura para cada ponto de controle do painel aerodinâmico situado a $\frac{3}{4}$ da corda. Dessa forma, as informações do modelo estrutural como matrizes elementares, matrizes globais e condições de contorno, são disponibilizadas no arquivo STRUCT_INFO.mat. Na sequência, o campo de deslocamento transversal a nível nodal é identificado para realização da interpolação de cada ponto de controle do painel aerodinâmico. Salienta-se que isto é feito para cada EF da malha estrutural. Já a Figura 5.6(b) mostra o cálculo da matriz aerodinâmica generalizada (GAM), iniciando-se pelas informações estruturais adquiridas pelo arquivo STRUCT_INFO.mat. Nota-se que são calculadas as matrizes com a *normalwash*, AIC e a interpolação do deslocamento transversal. Na sequência, a GAM é calculada para cada painel aerodinâmico e, por fim, realiza-se a determinação dos coeficientes de aproximação de Roger para a estimativa das velocidades de *flutter* pelo método PK modificado.

A Figura 5.7 apresenta as principais etapas do código que foi implementado neste trabalho. Parte-se da leitura das propriedades mecânicas da estrutura, condições

de escoamento, propriedades aerodinâmicas e número dos modos de vibração de interesse. Na sequência, é realizado uma discretização dos painéis aerodinâmicos para calcular as interpolações dos painéis aerodinâmicos (ver Figura 5.6(a)). Logo depois, deve-se avaliar a matriz AIC não planar, uma vez que, nesse caso, ocorre a varredura para toda a faixa de frequência reduzida (k) selecionada. Posteriormente, calcula-se o parâmetro Beta para a aproximação de Roger. Por fim, calcula-se a GAM conforme o procedimento da Figura 5.6(b), além da matriz contendo os coeficientes da aproximação de Roger.

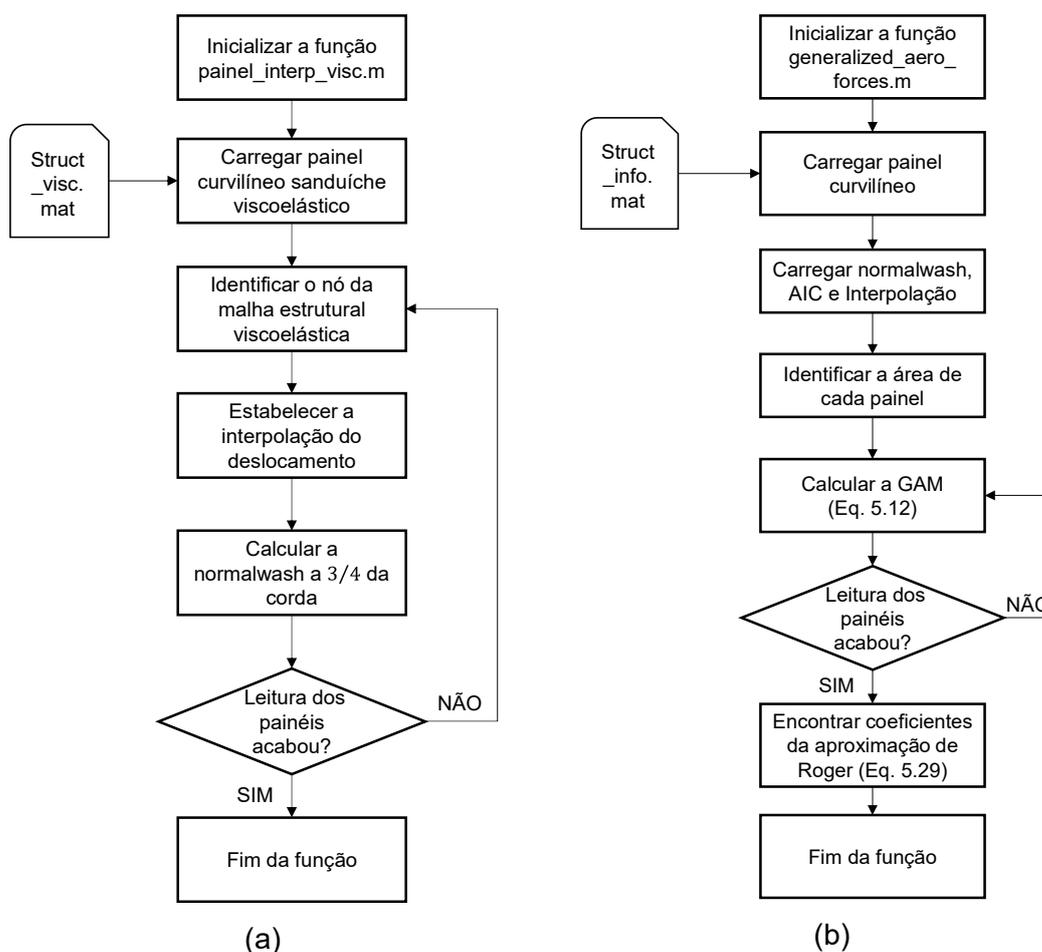


Figura 5.6 – Etapas das partes estrutural (a) e aerodinâmica (b) do AEROSOLVER.

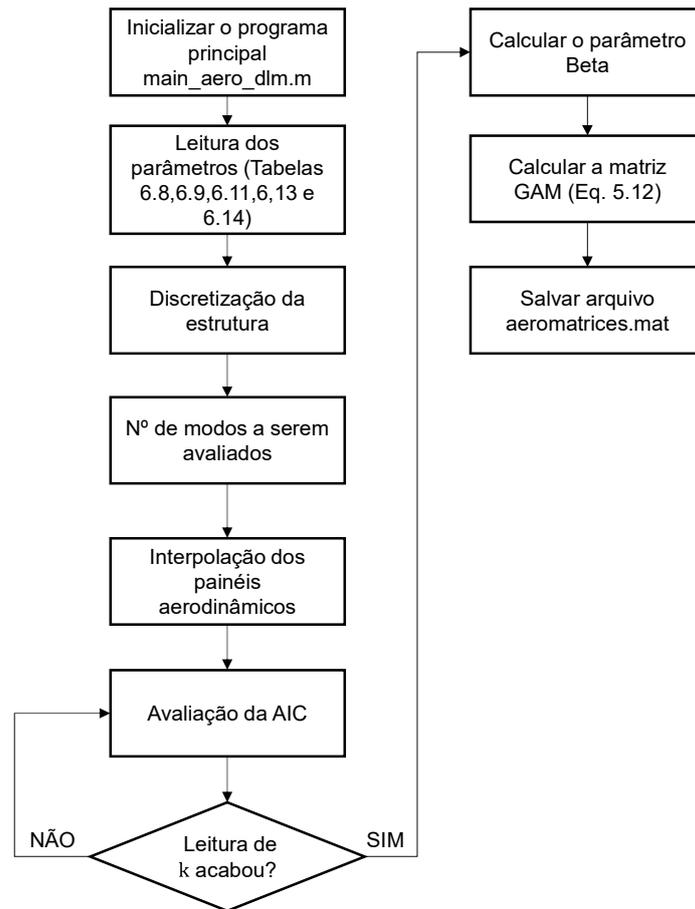


Figura 5.7 – Principais etapas do código AEROSOLVER.

CAPÍTULO VI

SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Este capítulo apresenta os resultados das simulações que foram realizadas para demonstrar os procedimentos de modelagem de sistemas aeroviscoelásticos em regime subsônico para a supressão do fenômeno do *flutter*. Inicialmente, é feita uma verificação dos resultados do código DLM para sistemas aeroelásticos sem amortecimento com resultados disponíveis da literatura aberta. Para tanto, são analisadas a função Kernel não planar e a matriz AIC com os resultados disponíveis em Blair (1994). Por fim, são mostrados os resultados da análise de estabilidade de um painel curvo com tratamento viscoelástico superficial, onde é investigado a influência da temperatura de operação do sistema, das espessuras das camadas e da posição do tratamento viscoelástico na velocidade de *flutter*.

6.1 Verificação do DLM não planar

6.1.1 Comportamento da função Kernel

Para verificar a função Kernel não planar descrita na Seção 3.2, é utilizado um painel unitário para analisar os pontos emissores e receptores. O objetivo é confrontar os resultados apresentados por Rodden et al. (1996) com os correspondentes gerados pelo código AEROSOLVER, considerando os seguintes valores de alongamento $AR=1$, $AR=2$ e $AR=5$, e para uma corda fixa igual a 1. A Tabela 6.1 define os parâmetros do escoamento adotados nas simulações.

Nas Figuras 6.1 a 6.3 tem-se uma comparação direta entre as partes reais da função Kernel obtidas por Rodden et al. (1996) com as correspondentes geradas pelo AEROSOLVER, para as funções quártica e parabólica. Nota-se uma boa correlação entre os resultados obtidos, o que permite validar a etapa de implementação da função Kernel. Além disso, percebe-se que a função quártica leva a um erro menor do que a parabólica, uma vez que, se aproxima mais da solução exata. Isto diminui a exigência de refinamento dos painéis aerodinâmicos e a consequente redução do esforço computacional. Portanto, nas simulações envolvendo a análise de estabilidade de painéis sanduíches viscoelásticos em regime subsônico será adotada a função quártica.

Tabela 6.1 – Parâmetros do escoamento para verificar a parte real da função Kernel não planar.

Variáveis	Valores	Descrição
M	0,8	Número de Mach
k	1,0	Frequência reduzida
b	0,5	Comprimento de referência

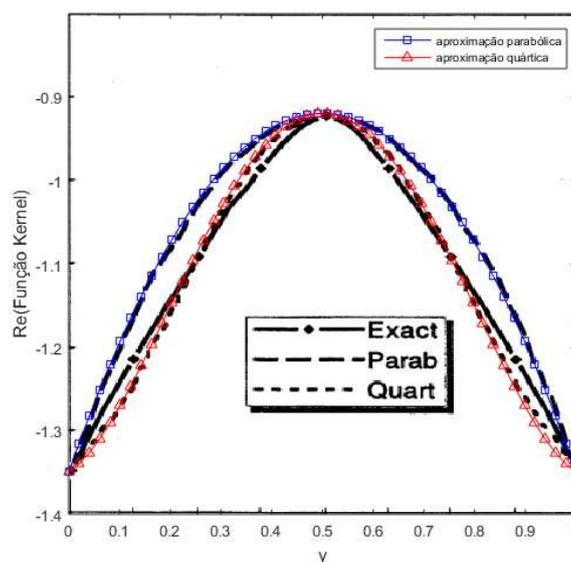


Figura 6.1 – Comportamento da função Kernel não planar – AR=1.

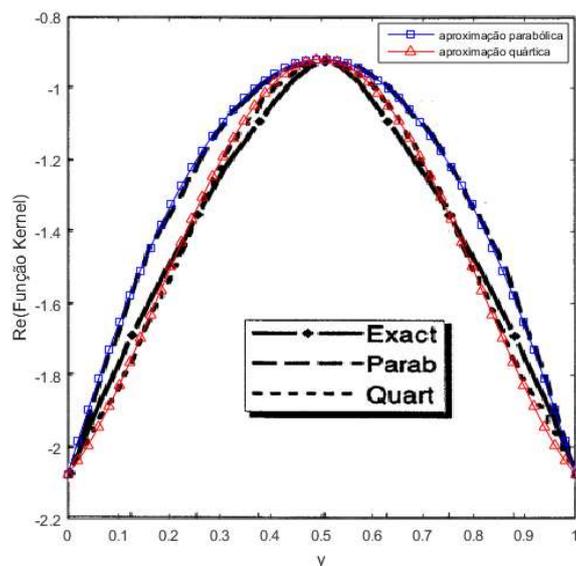


Figura 6.2 – Comportamento da função Kernel não planar – AR=2.

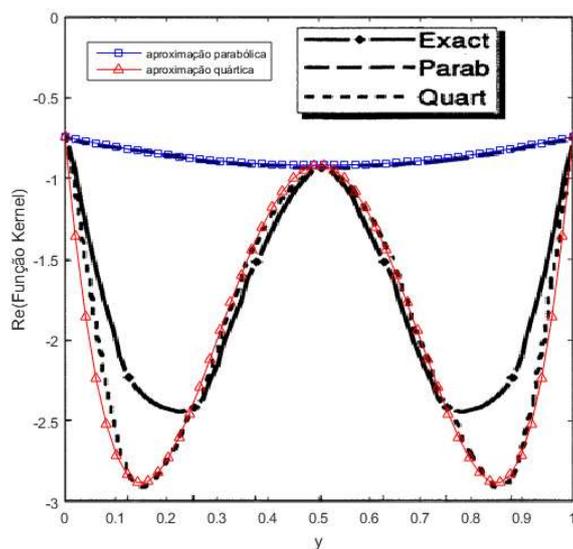


Figura 6.3 – Comportamento da função Kernel não planar – AR=5.

Com relação à verificação da parte imaginária da função Kernel, toma-se como referência os resultados apresentados em Rodden et al. (1999). Neste caso, para as condições definidas na Tabela 6.2 e para um painel unitário com alongamento AR=10 e 9 pontos para avaliação, a Figura 6.4 permite validar os resultados obtidos pelo código próprio para a parte imaginária da função Kernel não planar.

Tabela 6.2 – Parâmetros do escoamento para verificar a parte imaginária da função Kernel não planar.

Variáveis	Valores	Descrição
M	0,8	Número de Mach
k	2,0	Frequência Reduzida
b	3,5	Comprimento de Referência

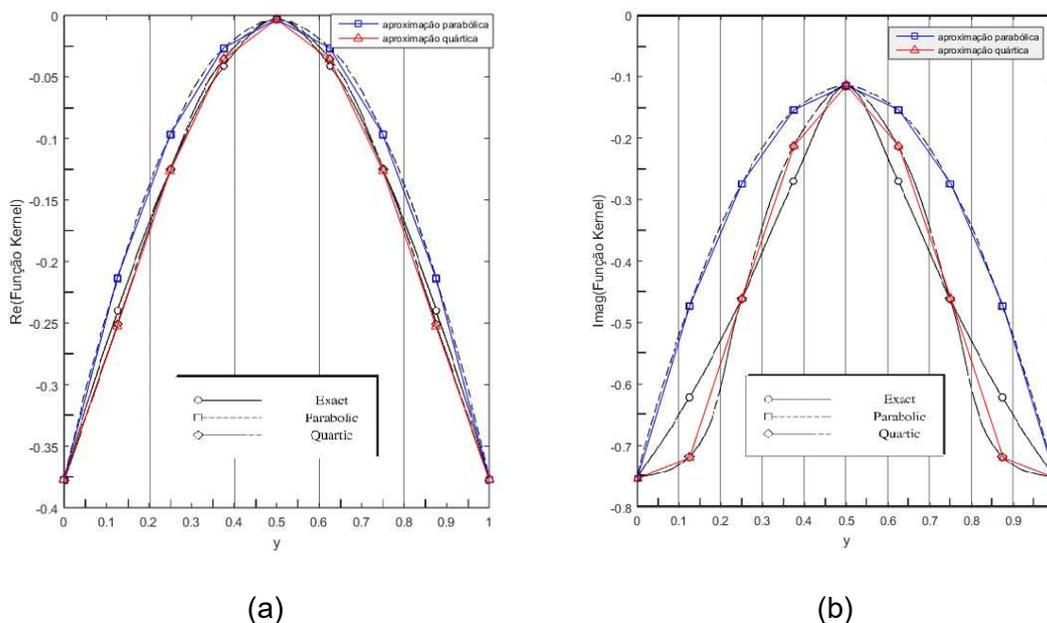


Figura 6.4 – Comportamento das partes real (a) e imaginária (b) da função Kernel não planar para AR=10.

6.1.2 Asa Blaircraft 2100 – Discretização de 18 painéis

Nesta seção, o interesse é verificar a matriz AIC para uma asa retangular de alongamento igual a 2 que foi discretizada em 18 painéis, sendo 3 na direção da corda, e 6 ao longo da envergadura, como visto na Figura 6.5. As propriedades geométricas e os parâmetros do escoamento estão definidos nas Tabelas 6.3 e 6.4, respectivamente.

De acordo com Blair (1994), a condição de contorno é considerada oscilatória em *plunge* com magnitude unitária.

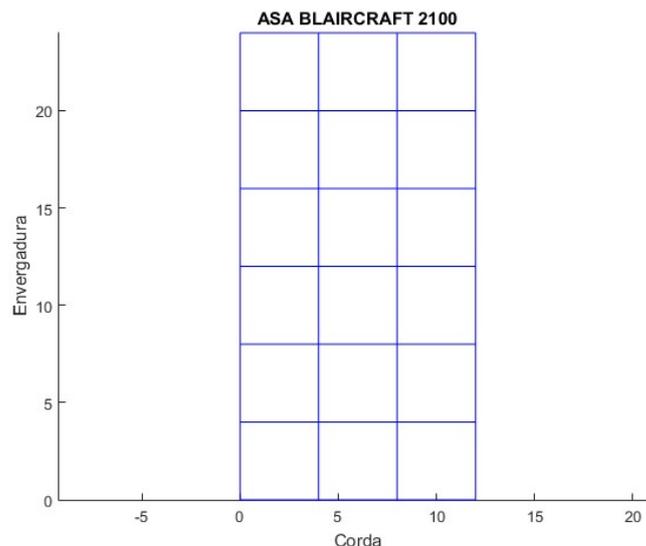


Figura 6.5 – Representação geométrica da asa Blaircraft 2100.

Tabela 6.3 – Propriedades geométricas da asa Blaircraft 2100.

Variáveis	Valores	Descrição
C[m]	12	Corda
AR	2	Alongamento
b	6	Comprimento de Referência
S	4	Superfície de Referência

Tabela 6.4 – Parâmetros do escoamento da asa Blaircraft 2100.

Variáveis	Valores	Descrição
M	0,5	Número de Mach
k	1	Frequência Reduzida

A Tabela 6.5 compara os coeficientes de sustentação complexos obtidos pelo código próprio com os correspondentes obtidos por Blair (1994), para o DLM planar com uma função parabólica. Para a amplitude, nota-se uma dispersão máxima de 3,9% para o caso parabólico e 7,2% para a função quártica em relação aos resultados de Blair (1994). Já para a fase, o erro foi de 0,6% para o parabólico e 0,3% para o caso quártico.

A título de ilustração, a Figura 6.6 mostra os 18 painéis aerodinâmicos para a asa retangular de Blaircraft 2100 com o ponto de controle de cada elemento, e a Figura 6.7 mostra a distribuição de pressão gerada pelo AEROSOLVER.

Tabela 6.5 – Comparação dos coeficientes complexos de sustentação.

C_L Blair (1994)	Aerosolver			
	C_L Parabólico	Erro [%]	C_L Quártico	Erro [%]
$-2,5038+2,8453i$	$-2,3703+2,7666i$	-	$-2,3092+2,6550i$	-
Amplitude=3,7901	Amplitude=3,6431	3,90	Amplitude=3,5187	7,20
fase=131,3471°	fase=130,5887°	0,60	fase=131,0154°	0,25

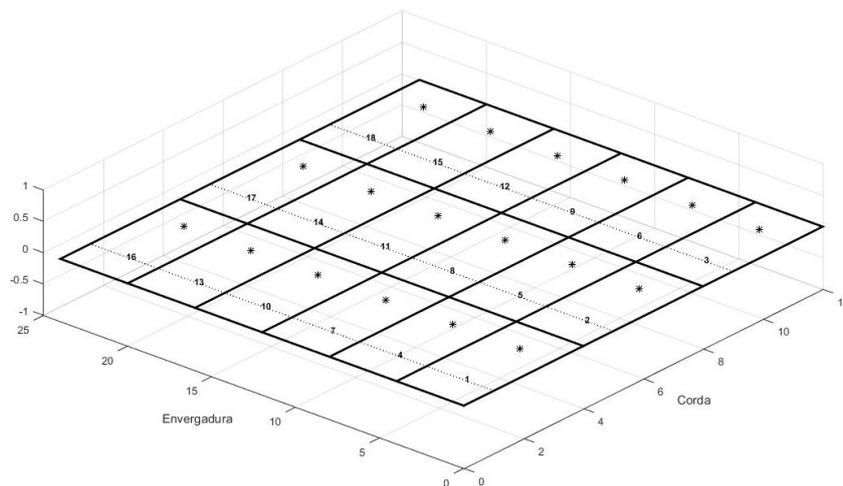


Figura 6.6 – Discretização da geometria da asa Blaircraft 2100.

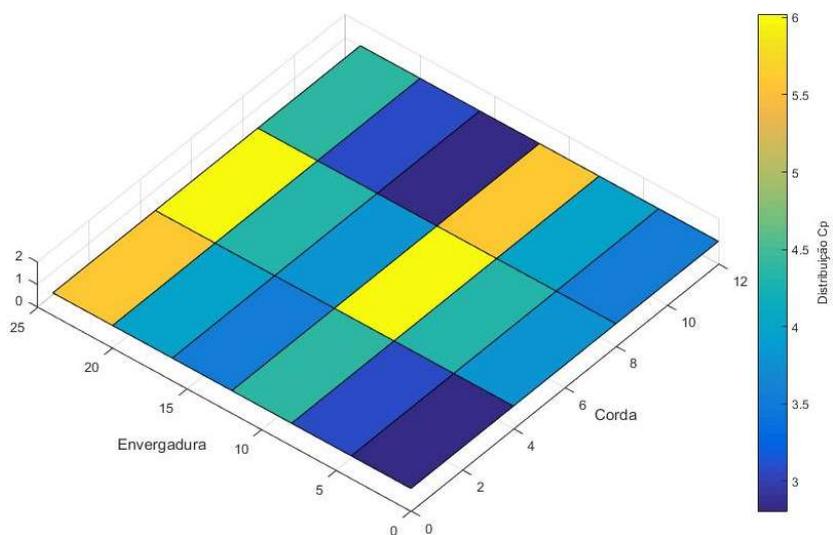


Figura 6.7 – Distribuição de pressão da Blaircraft 2100.

6.1.3 Asa Blaircraft 2100 – Discretização de vários painéis

Nesta aplicação, é considerado a mesma asa da seção anterior com as mesmas propriedades definidas na Tabela 6.3. Entretanto, são consideradas 5 divisões ao longo

da corda e 10 divisões ao longo da envergadura, para o escoamento definido na Tabela 6.6. A condição de contorno para este problema é definida como (GUIMARÃES-NETO, 2008):

$$\widehat{w}_j = ik \frac{\widehat{h}_j}{b} + \frac{\partial \widehat{h}_j}{\partial x} \quad (6.1)$$

onde $h = h(x, y, t)$ é dado pelo movimento harmônico, $h = (-x)e^{i\omega t}$, com $\widehat{h} = -x$.

Para o caso estacionário ($k = 0$), essa condição de contorno corresponderá ao cálculo da inclinação da curva de coeficiente de sustentação por radiano de ângulo de ataque. Para o caso não estacionário, a asa estará em arfagem em torno do bordo de ataque ($x = 0$) a uma frequência $k = 1,4$. A Tabela 6.7 mostra os resultados satisfatórios obtidos pelo AEROSOLVER para ambos os casos estacionário e não estacionário, quando comparados com os obtidos pela literatura.

Tabela 6.6 – Parâmetros do escoamento da asa Blircraft 2100.

Variáveis	Valores	Descrição
M	0,5	Número de Mach
k	0 e 1.4	Frequência Reduzida

Tabela 6.7 – Comparação dos resultados do AEROSOLVER com os correspondentes obtidos pela literatura para a asa Blircraft 2100.

Discretização	Programa	K=0	K=1,4	
			CL: Magnitude	Ângulo de fase[°]
5x10	WL-TR-95-3022	2,8322	10,337	93,5661
	WL-TR-92-3028	2,8322	10,337	93,5661
	H7WC	2,8030	9,960	93,8300
	LATIS	2,8040	9,956	93,8338
	DLM-2008	2,8040	9,953	93,8700
	AEROSOLVER	2,8040	9,955	93,8550

6.2 Estratégia de interfaceamento AEROSOLVER/ANSYS®

Como um dos objetivos deste trabalho é o desenvolvimento de uma ferramenta numérico-computacional para a análise de estabilidade de sistemas aeroviscoelásticos de geometrias mais complexas de interesse prático, propõe-se uma estratégia de interfaceamento entre o AEROSOLVER e o ANSYS®. A Figura 6.8 mostra as principais etapas da estratégia proposta, onde, através de inúmeras rotinas desenvolvidas em

MATLAB® que foram integradas no AEROSOLVER, é possível ler e processar todas as informações de modelos de EFs feitos no ANSYS®, tais como, matrizes elementares e globais, condições de contorno, propriedades geométricas, sistemas de coordenadas, entre outros. Portanto, uma vez disponível o modelo da estrutura complexa no AEROSOLVER, é possível modificar e/ou substituir elementos do modelo que foi confeccionado no ANSYS® pelo elemento de placa sanduíche de três camadas apresentado no Capítulo 4. Na sequência, pode-se então introduzir o amortecimento viscoelástico utilizando a função módulo complexo combinado com o conceito de frequência reduzida e realizar as análises de estabilidade do sistema tratado no programa AEROSOLVER.

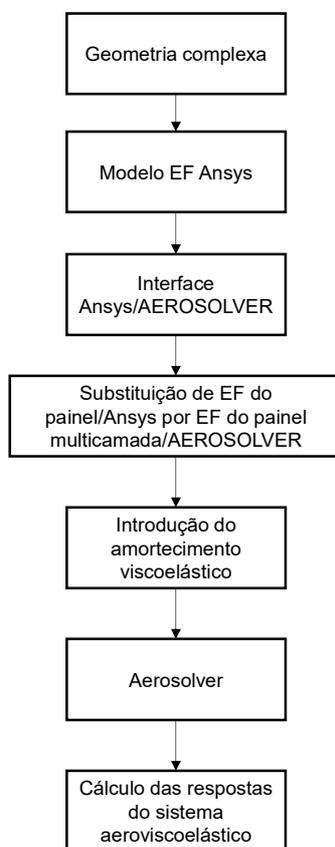


Figura 6.8 – Etapas do interfaceamento entre o AEROSOLVER e o ANSYS®.

Para verificar o procedimento de interfaceamento e substituição proposto neste trabalho, considera-se o painel curvo sem tratamento viscoelástico mostrado na Figura 6.9, com propriedades geométricas e físicas definidas, respectivamente, nas Tabelas 6.9 e 6.8. Neste caso, é feita uma comparação entre as cinco primeiras frequências naturais e o número de MAC (*Modal Assurance Criterion*) do sistema para duas situações, a saber: a primeira, que é considerada como referência de cálculo, consiste

em utilizar o elemento de placa simples SHELL63 do ANSYS®; na segunda, utiliza-se o AEROSOLVER para fazer a leitura e a substituição do elemento do ANSYS® pelo elemento de placa sanduíche implementado neste trabalho, considerando somente a camada base.

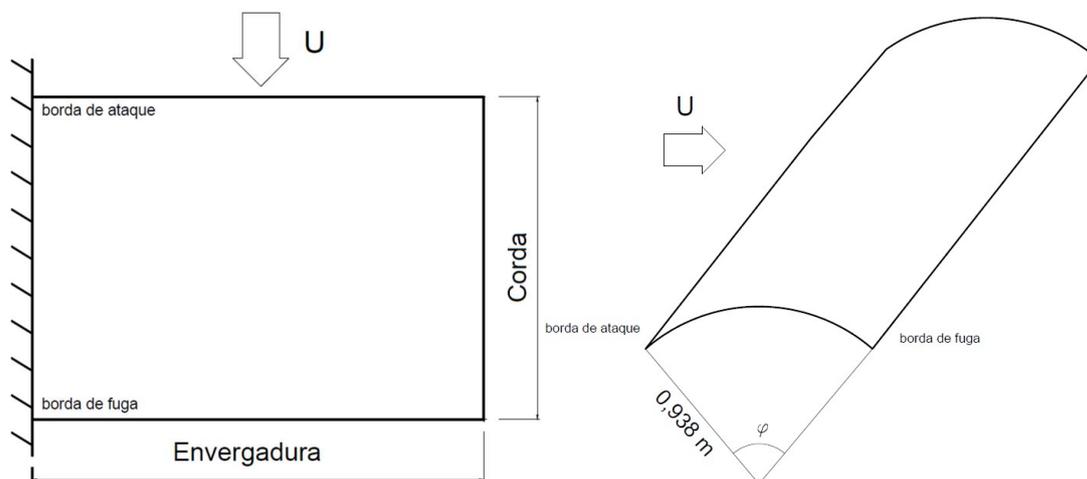


Figura 6.9 – Representação do painel curvo sem tratamento viscoelástico.

Tabela 6.8 – Propriedades físicas do painel curvo sem tratamento viscoelástico.

Propriedades mecânicas do aço		
Variáveis	Valores	Descrição
E	210[GPa]	Módulo de Young
ρ	7800[kg/m ³]	Densidade
ν	0,30	Coefficiente de Poisson

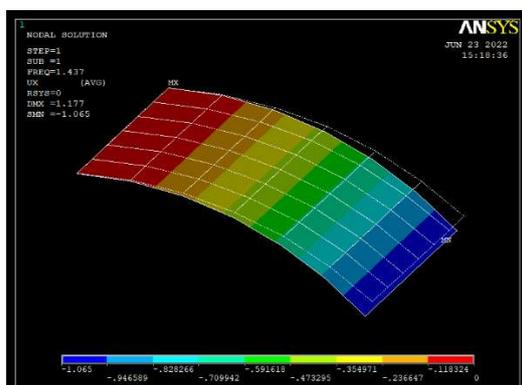
Tabela 6.9 – Propriedades geométricas do painel curvo sem tratamento viscoelástico.

Propriedades geométricas	
Variáveis	Valores
Envergadura	$r \sin(\varphi)$ [m]
Corda	0,720 [m]
Ângulo placa [φ]	41,5 [°]
Raio de curvatura [r]	0,938 [m]

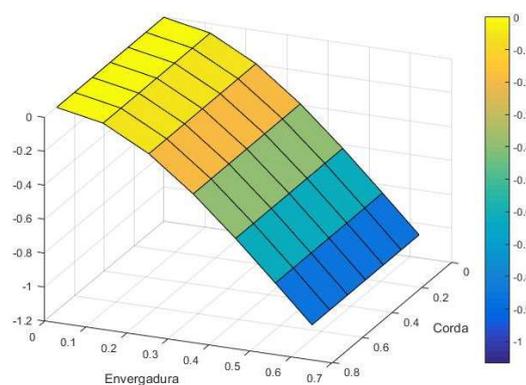
Pela análise da Tabela 6.10, pode-se concluir sobre a proximidade entre os dois modelos, conforme os baixos valores dos erros obtidos para as frequências naturais na faixa analisada, e os correspondentes valores do MAC que são próximos de 100%. A título de ilustração, a Figura 6.10 mostra as formas modais dos dois primeiros modos do painel curvo sem tratamento viscoelástico geradas pelos dois códigos.

Tabela 6.10 – Comparação dos valores próprios dos modelos de EFs do painel sem tratamento do ANSYS® e AEROSOLVER.

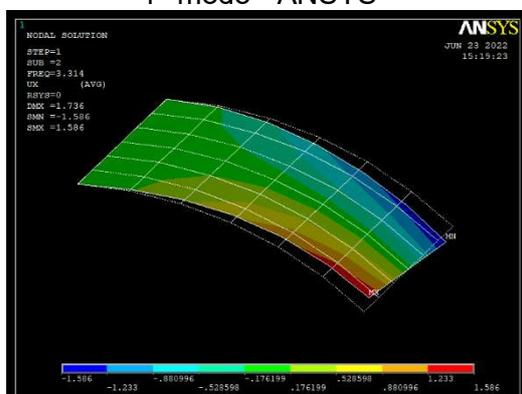
Frequências [Hz]		Diferença	
ANSYS®	AEROSOLVER	Frequências [%]	MAC
1,4375	1,4375	---	99,63
3,3137	3,3175	0,11	99,35
8,3987	8,3987	---	99,58
11,1790	11,1780	0,01	99,68
24,2540	24,2542	0,01	99,72



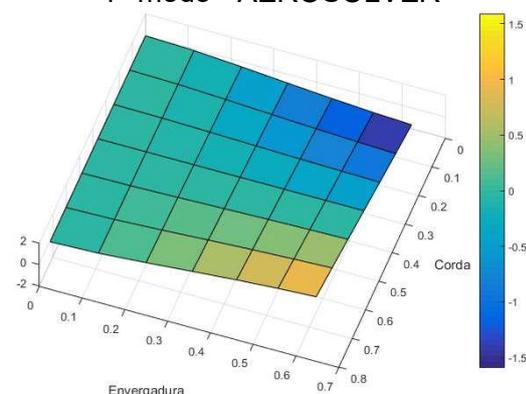
1° modo - ANSYS®



1° modo - AEROSOLVER



2° modo - ANSYS®



2° modo - AEROSOLVER

Figura 6.10 – Análise modal do painel curvo no ANSYS® e AEROSOLVER.

6.2.1 Análise de convergência da malha

O objetivo dessa subseção é determinar o número mínimo de EFs das malhas estrutural e aerodinâmica do painel curvo anterior que leva a uma convergência em termos das frequências naturais e da primeira velocidade crítica em regime subsônico, para as condições do escoamento definidas na Tabela 6.11.

Tabela 6.11 – Condições do escoamento para a análise de convergência de malha.

Propriedades aerodinâmicas	
N° de painéis (corda)	6
N° de painéis (envergadura)	6
Mach	0,25
Densidade	1,1839 [kg/m ³]
Temperatura	25°
Frequência reduzida	0-3,6
Método de resolução	PK

A Tabela 6.12 mostra que a utilização de uma malha estrutural com 36 EFs leva a uma convergência da quinta frequência natural do sistema sem tratamento. O mesmo pode ser verificado para a convergência da primeira velocidade crítica do sistema. Portanto, para as simulações que seguem envolvendo os sistemas aeroelásticos sem e com tratamento viscoelástico superficial será adotado a malha de 6x6.

Tabela 6.12 - Análise de convergência da malha para do painel curvo sem tratamento.

Malha	5° Frequência natural [Hz]	1ª Velocidade crítica [m/s]
2x2	14,19	1
4x4	24,05	28
6x6	24,25	27
8x8	24,31	27
10x10	24,33	27
15x15	24,37	27
17x17	24,37	27

Vale ressaltar que para a análise da estabilidade do painel curvo sem tratamento viscoelástico o carregamento aerodinâmico não estacionário é calculado pelo método DLM não planar implementado no AEROSOLVER, conforme os desenvolvimentos apresentados no Capítulo 3. Além disso, para determinar as velocidades de *flutter*, é definida uma faixa de frequências reduzidas para calcular a matriz AIC e através da função interpoladora dos deslocamentos da estrutura é calculada a GAM utilizando a aproximação de Roger.

A título de ilustração, a Figura 6.11(a) mostra o diagrama VG (velocidade x amortecimento estrutural artificial) do sistema sem tratamento obtido pelo método PK. Pode-se notar a velocidade crítica de aproximadamente 27 m/s na faixa de velocidades de 0 a 30 m/s. Conforme mostrado no diagrama VF (velocidade x frequência) da Figura 6.11(b), é o segundo modo de vibração do painel que leva à condição de instabilidade do sistema. Entretanto, para esse exemplo, pelo diagrama VF constata-se que o fenômeno estático de divergência, também denominado pela literatura como *flutter* na

frequência zero (WRIGHT; COOPER, 2007), ocorreu na velocidade de 23 m/s e no primeiro modo de vibração, ou seja, antes da ocorrência do fenômeno de *flutter*.

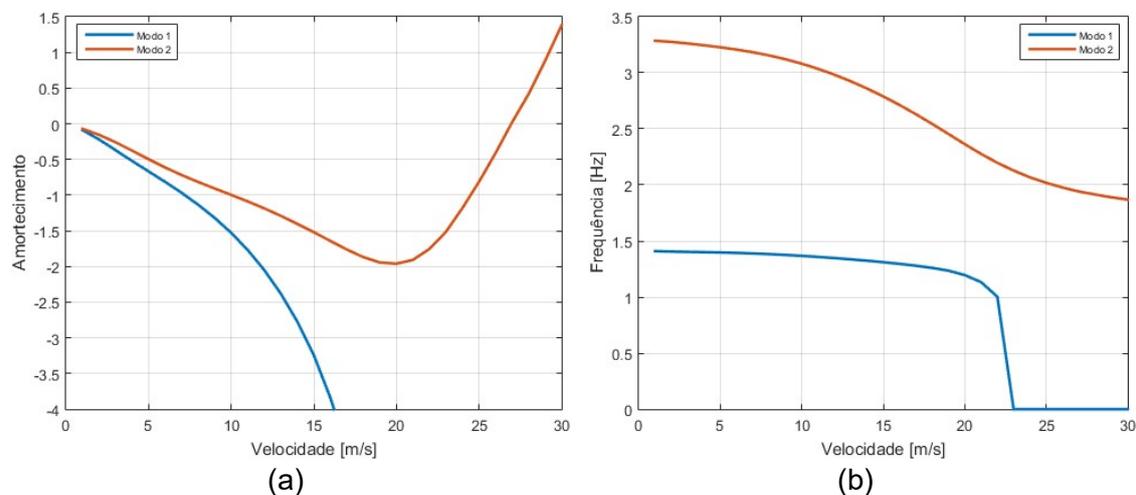


Figura 6.11 – Diagramas VG (a) e VF (b) do painel curvo sem tratamento viscoelástico.

6.3 Análise de estabilidade do painel curvo com tratamento viscoelástico

O interesse aqui é verificar a metodologia de análise de estabilidade de sistemas aeroelásticos contendo tratamento viscoelástico para a supressão do *flutter* em regime subsônico, utilizando o painel curvo da seção anterior. As Tabelas 6.13 e 6.14 definem as propriedades que serão utilizadas nas simulações para uma malha de 6x6 EFs para ambos os modelos estrutural e aerodinâmico. Primeiramente, será considerado que o painel está completamente tratado com camada restrita passiva.

Tabela 6.13 - Propriedades geométricas do painel curvo com tratamento viscoelástico total.

Camada	Corda [mm]	Envergadura [mm]	Espessura [mm]
Base	720	$r \sin(\varphi)$	1,5
Viscoelástica	720	$r \sin(\varphi)$	0,0254
Restringente	720	$r \sin(\varphi)$	0,5

Tabela 6.14 - Propriedades mecânicas do painel curvo com tratamento viscoelástico total.

Camada	Módulo de elasticidade [GPa]	Coefficiente de Poisson	Densidade [kg/m³]
Base	210	0,30	7800
Viscoelástica	Eq. (4.20)	0,49	950
Restringente	210	0,30	7800

Além disso, assume-se que o sistema aeroviscoelástico está operando a uma temperatura constante de 25°C, já que as propriedades do material viscoelástico são fortemente dependentes da temperatura de operação do sistema e da frequência da oscilação, conforme discutido na Seção 4.4, Capítulo 4. Neste sentido, é proposto aqui um procedimento iterativo para a resolução do problema de autovalores complexo do sistema aeroviscoelástico, como visto na Figura 6.12. Primeiramente, deve-se encontrar a resposta harmônica do sistema viscoelástico para determinar as funções de resposta em frequência (FRFs) e os correspondentes picos de ressonância e as suas frequências. Na sequência, faz-se a análise modal para cada uma das frequências encontradas, sintonizando o módulo complexo com a frequência de operação até que seja atingido um erro estabelecido *a priori* pelo usuário.

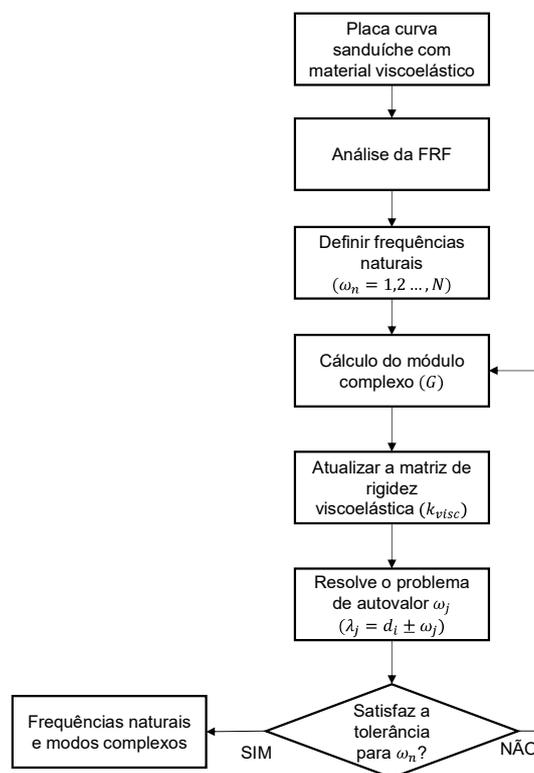


Figura 6.12 – Procedimento iterativo para a resolução do problema de autovalores complexos de sistemas aeroviscoelásticos.

A Figura 6.13 apresenta as partes reais e imaginárias dos dois primeiros modos de vibração do painel curvo com tratamento viscoelástico total. Neste caso, em função da natureza complexa do comportamento do sistema aeroviscoelástico, o procedimento de interpolação da estrutura no ponto de controle passa a conter uma parte imaginária,

visto que esse fato ocorria apenas para a matriz AIC e a *normalwash*. Além disso, como esperado, o acréscimo de massa e rigidez à estrutura base pelo tratamento viscoelástico superficial leva à uma alteração das frequências naturais do sistema, conforme visto na Tabela 6.15.

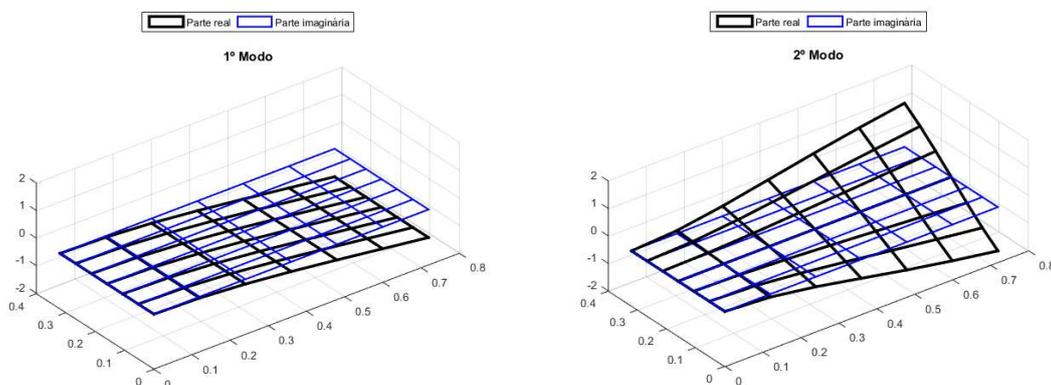


Figura 6.13 – Representação dos dois primeiros modos de vibrar do painel curvo com tratamento viscoelástico total – ângulo de curvatura de $41,5^\circ$.

Tabela 6.15 - Frequências naturais do painel curvo sem e com tratamento viscoelástico total.

Com viscoelástico		Sem viscoelástico	
Modo	Frequência [Hz]	Modo	Frequência [Hz]
1	2,6706	1	1,4375
2	7,6635	2	3,3175

A Figura 6.14 representa os diagramas VG e VF do sistema aeroviscoelástico operando à 25°C e na faixa de velocidade de 0 e 100 m/s. De imediato, pode-se notar que houve um ganho bastante significativo em termos da estabilidade do sistema tratado comparado com a do sistema sem tratamento que foi apresentado na Figura 6.11. Pela análise da Figura 6.14, nota-se uma velocidade crítica do sistema tratado de 87 m/s comparado com a de 27 m/s do sistema sem tratamento. Isto demonstra a eficiência do tratamento viscoelástico para a supressão do *flutter* de sistemas aeroelásticos também em regime subsônico. Além disso, o fenômeno estático de divergência ocorreu na velocidade de 97 m/s por causa do acréscimo da rigidez elástica do painel curvo sanduíche. Portanto, isto mostra a potencialidade da metodologia proposta para a modelagem de sistemas aeroviscoelásticos de geometrias complexas utilizando o método MEF-DLM não planar que foi implementado no código AEROSOLVER.

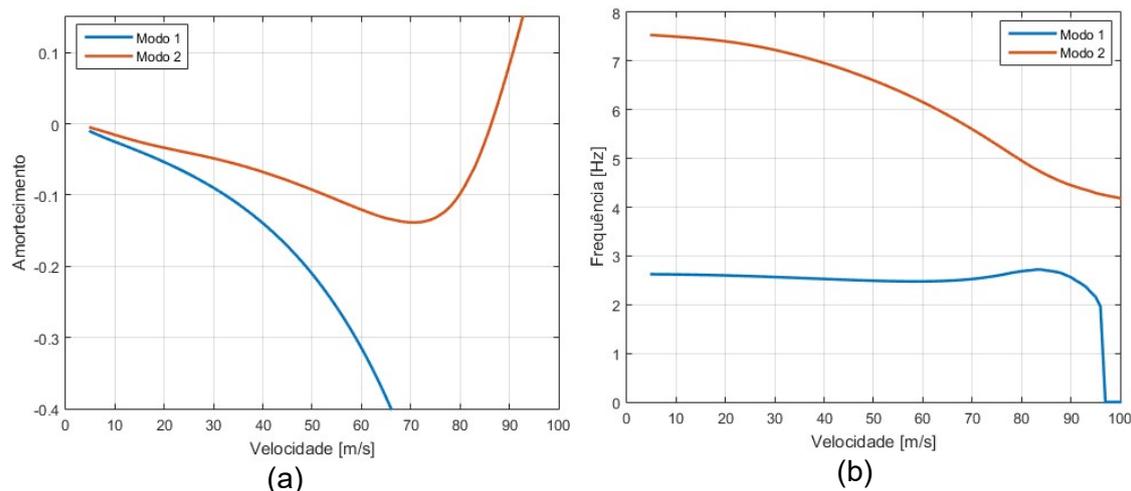


Figura 6.14 – Diagramas VG (a) e VF (b) do painel curvo com tratamento viscoelástico total.

Com o intuito de verificar a capacidade da metodologia de lidar com diferentes geometrias do painel, a Figura 6.15 mostra a influência do ângulo de curvatura do painel na velocidade de *flutter* para ambos os casos sem e com tratamento viscoelástico total. Nota-se que as configurações mais planas levam aos maiores valores de velocidades críticas, portanto, maior estabilidade ao sistema, como esperado, já que o modo responsável pela instabilidade é o primeiro modo de torção. Além disso, há um ganho significativo de estabilidade do sistema com a presença do tratamento viscoelástico para todas as configurações de curvatura analisadas, principalmente para as configurações mais planas do painel, uma vez que, tais configurações levam a maiores deformações cisalhantes à camada viscoelástica intermediária no modelo de placa sanduíche de três camadas e, portanto, maiores energias de dissipação do núcleo viscoelástico.

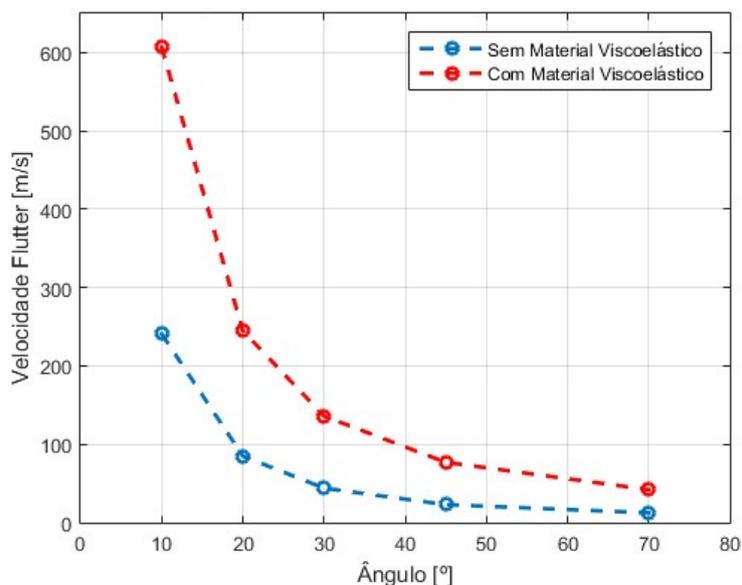


Figura 6.15 – Influência do ângulo de curvatura na velocidade de *flutter* do painel curvo sem e com tratamento viscoelástico.

6.3.1 Influência da temperatura de operação na estabilidade do sistema

Como foi discutido na Seção 4.4, Capítulo 4, as propriedades dos materiais viscoelásticos são fortemente afetadas por fatores ambientais e operacionais, tais como temperatura e frequência. Conseqüentemente, isto afeta o desempenho dos materiais viscoelásticos em termos de sua capacidade de amortecimento. Portanto, torna-se importante analisar a influência da temperatura de operação na estabilidade de sistemas aeroviscoelásticos em regime subsônico. Neste caso, considera-se as mesmas propriedades físicas e geométricas do painel curvo com tratamento viscoelástico da seção anterior para o ângulo de curvatura de $41,5^\circ$.

A Figura 6.16 mostra a influência da temperatura na estabilidade do sistema. Pode-se notar claramente que o aumento de temperatura leva à perda de eficiência do sistema aeroviscoelástico representado pela diminuição na sua velocidade de *flutter*. Neste caso, vale ressaltar que, na prática, uma das estratégias para minimizar os efeitos da temperatura em projetos de engenharia é projetar os sistemas viscoelásticos para atuarem na região de borracha, que é menos sensível às variações de temperatura, mas, com uma melhor eficiência dos materiais viscoelásticos.

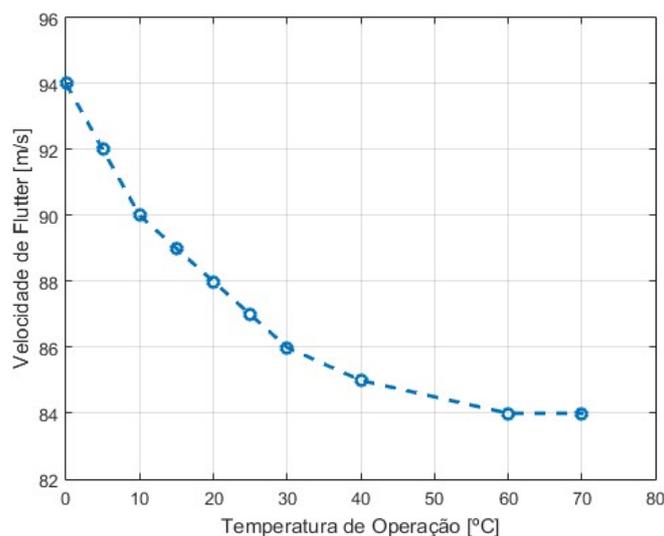


Figura 6.16 – Influência da temperatura na estabilidade do painel curvo com tratamento viscoelástico total – ângulo de curvatura de $41,5^\circ$.

6.3.2 Influência das espessuras das camadas na estabilidade do sistema

Outro parâmetro que afeta significativamente o desempenho dos tratamentos superficiais é a espessura das camadas. Dessa maneira, foram feitas simulações numéricas para diferentes espessuras das camadas restrigente e viscoelástica, respectivamente, entre as faixas de 0,5 mm e 2 mm, e 0,0254 mm e 2 mm.

Pela análise da Figura 6.17(a), nota-se que o aumento da espessura da camada restrigente leva a um aumento significativo de 196% na velocidade de *flutter* que passa de 87 m/s para 171 m/s. Esse fato ocorre porque a função da camada restrigente é a de induzir deformações cisalhantes na camada viscoelástica durante a flexão do painel curvo devido aos esforços aerodinâmicos. Portanto, isto leva a maiores dissipações da camada viscoelástica e, portanto, num aumento da capacidade de amortecimento. Por outro lado, a Figura 6.18(b) mostra que o aumento da espessura do núcleo viscoelástico resulta num incremento da velocidade crítica de somente 17% que passa de 87 m/s para 102 m/s. Portanto, a alteração da espessura da camada restrigente de tratamentos viscoelásticos por camadas restritas passivas leva a uma maior eficiência do sistema aeroviscoelástico. Entretanto, em projetos aeronáuticos de interesse prático, deve atentar-se ao acréscimo de massa ao sistema, uma vez que, neste ramo, o acréscimo de peso às estruturas é considerado um fator crítico de projeto.

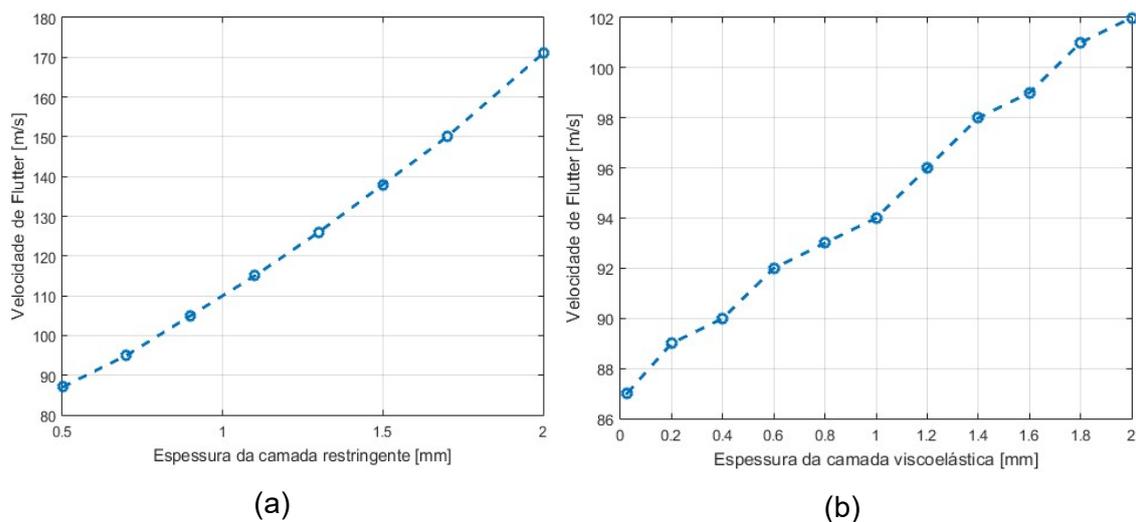


Figura 6.17 – Influência das espessuras das camadas restrigente (a) e viscoelástica (b) na estabilidade do painel curvo com tratamento viscoelástico total – ângulo de curvatura de $41,5^\circ$.

6.3.3 Influência do tratamento viscoelástico parcial

Com o objetivo de investigar a influência do tratamento viscoelástico parcial na estabilidade do sistema, a Figura 6.18 mostra as energias de deformação do painel para os dois modos de interesse. Nota-se claramente as regiões críticas do sistema, sendo estas, um indicativo das posições a serem tratadas com camada restrita passiva, sendo responsáveis pelas maiores energias de deformação na camada viscoelástica. Uma das grandes vantagens desta estratégia é, sem dúvidas, a redução da massa ao sistema aliada à eficiência do tratamento viscoelástico para a supressão do *flutter*.

O painel curvo sem tratamento apresentou uma velocidade de *flutter* de 27 m/s com um peso total de 3,49 Kg. Já o painel curvo com tratamento viscoelástico parcial apenas nas regiões críticas alcançou uma velocidade de *flutter* de 43 m/s com um peso total de 4,66 Kg, ou seja, um acréscimo de massa de 33,5% para um ganho na estabilidade de 59%. Por fim, o painel curvo totalmente tratado apresentou uma velocidade de *flutter* de 87 m/s com um peso total de 7,09 Kg, ou seja, um aumento de 203,2% de massa para um ganho de 322% para a velocidade de *flutter*. Dessa maneira, com essa análise é possível dar ao projetista aeronáutico uma possibilidade de tratar apenas as regiões críticas do sistema e obter um ganho ainda satisfatório em termos de estabilidade aeroelástica, tendo em vista as restrições de peso ao sistema.

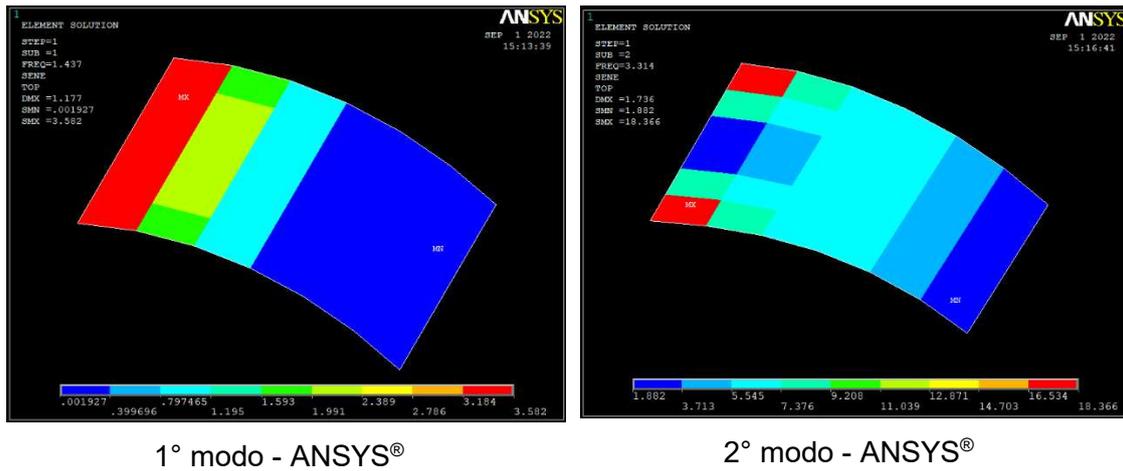


Figura 6.18 – Energia de deformação modal do painel curvo no ANSYS®- ângulo de curvatura de 41,5°.

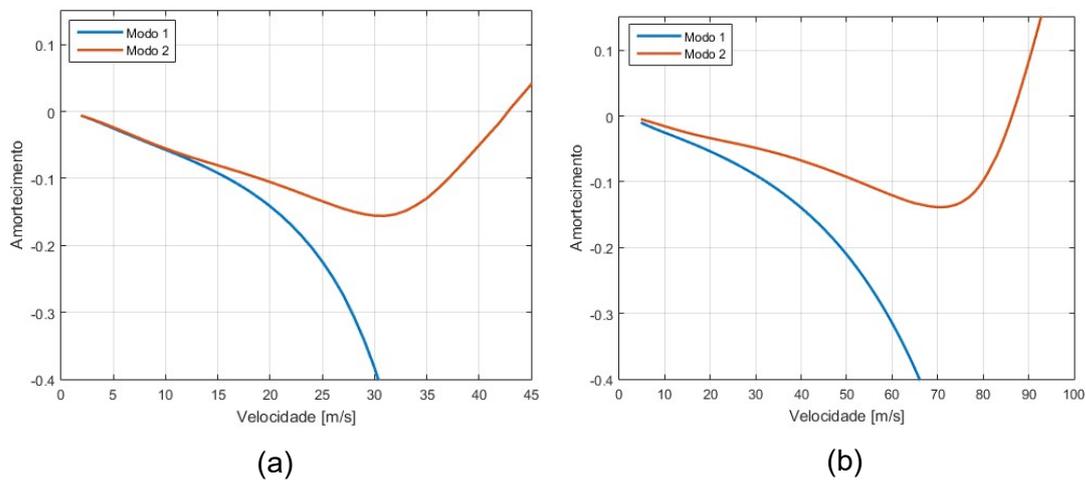


Figura 6.19 – Diagramas VG do painel curvo com tratamento parcial (a) e total (b) – ângulo de curvatura de 41,5°.

Tabela 6.16 – Velocidade de flutter e peso do painel curvo sem tratamento viscoelástico, com tratamento viscoelástico total e parcial.

Painel curvo	V_f [m/s]	Incremento de massa [%]
Sem tratamento	27	---
Tratamento parcial	43	33,5
Tratamento total	87	203,2

6.4 Efeito da dissipação do material viscoelástico na estabilidade do sistema

Tabela 6.17 – Influência dos comportamentos dissipativo e conservativo associado do material viscoelástico na estabilidade do sistema aeroviscoelástico.

Sem tratamento	CCA	Dissipativo
27 m/s	85	87

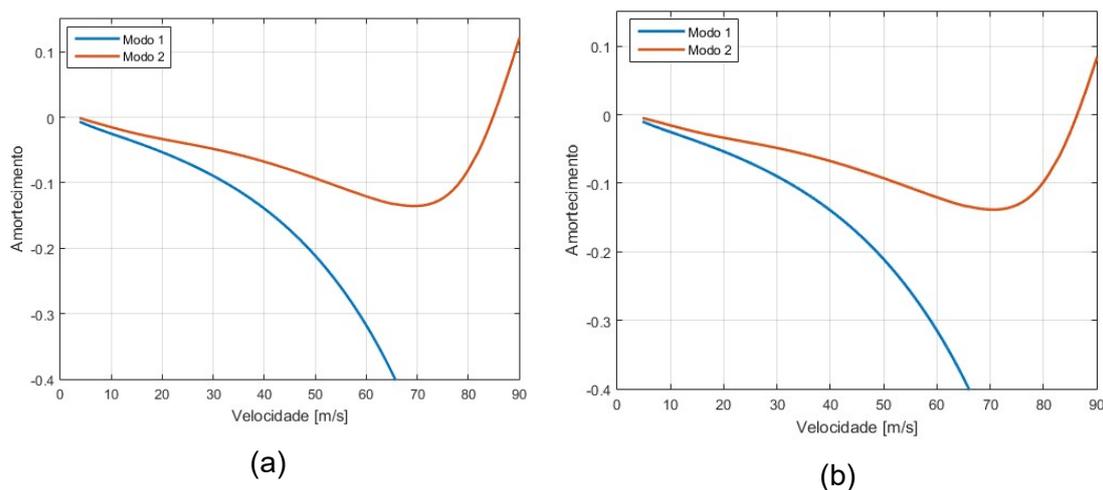


Figura 6.20 – Diagramas VG do painel curvo para o comportamento conservativo associado (a) dissipativo (b) – ângulo de curvatura de $41,5^\circ$.

Com o interesse de investigar o desempenho da parte dissipativa do tratamento viscoelástico superficial na estabilidade do sistema em regime subsônico, considera-se o comportamento estático do material viscoelástico à baixa frequência. Uma vez que, a resposta estática do material viscoelástico é representada pela matriz de rigidez $G_0 \bar{K}_V$. Dessa maneira, será investigado dois casos: no primeiro, o mecanismo de dissipação é removido com a utilização do comportamento conservativo associado (CCA) do material viscoelástico; no segundo caso, o mecanismo de dissipação é considerado pelo módulo complexo, dando origem à matriz de rigidez $G(\omega, T) \bar{K}_V$. Nessas análises, são adotadas as mesmas propriedades das seções anteriores para o painel curvo com tratamento viscoelástico e ângulo de curvatura de $41,5^\circ$.

Comparando os resultados da velocidade de *flutter* dos dois casos estudados com o painel curvo sem tratamento viscoelástico, constata-se que houve ganho na supressão do *flutter* para ambos os estudos. Além disso, nota-se que houve um pequeno ganho dissipativo para a velocidade de *flutter*, uma vez que para o caso do CCA a velocidade crítica foi de 85 m/s e para o caso dissipativo a velocidade foi de 87 m/s. Esse pequeno ganho é explicado porque o *flutter* ocorre no primeiro modo de

torção do painel curvo (ver Figura 6.15). Neste caso, notou-se que o aumento do ângulo da estrutura favorece a ocorrência do fenômeno de *flutter* e a redução da dissipação de energia pelo material viscoelástico. Por outro lado, para ângulos mais planos o material viscoelástico tem maior capacidade de dissipação de energia e, com isso, melhora a sua eficiência em termos da supressão do *flutter* subsônico.

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS

Resumo e contribuições

Este trabalho representa uma continuidade das atividades de pesquisa que vêm sendo realizadas no LMEst/UFU no contexto da modelagem numérica e implementação computacional de sistemas aeroelásticos incorporando materiais viscoelásticos para a supressão do *flutter* empregando os métodos DLM e MEF.

Primeiramente, no Capítulo 1 foi feita uma revisão bibliográfica das principais referências dedicadas ao DLM não estacionário planar e não planar com aplicações. Nota-se que ele é uma ferramenta bastante utilizada nas fases preliminares de projetos aeronáuticos, principalmente na indústria. Isto se deve pelo seu custo computacional relativamente aceitável comparado, por exemplo, com a metodologia CFD. A literatura aberta aponta a boa resposta para a análise de estabilidade de sistemas aeroelásticos em regime subsônico utilizando o método DLM. Porém, para regimes transônicos e supersônicos, há divergência nos resultados obtidos em túnel de vento ou CFD, sendo utilizado em muitos trabalhos um fator de correção para o DLM a fim de corrigir esta disparidade.

Na sequência, no Capítulo 2 faz-se uma revisão sobre a modelagem de sistemas dinâmicos tratados com materiais viscoelásticos para o controle passivo de vibrações e ruído. A maior vantagem desses materiais é a sua grande eficiência em uma ampla faixa de frequência aliada ao baixo custo de aplicação e manutenção. Entretanto, a forte dependência de suas propriedades mecânicas com fatores ambientais e operacionais impõe dificuldades na modelagem de sistemas dinâmicos com materiais viscoelásticos, principalmente os aeroelásticos em regime subsônico como os de interesse deste trabalho.

A principal dificuldade apresentada no estudo da aerodinâmica não estacionária e não planar está na sua correta caracterização dos modelos matemáticos. Assim, o Capítulo 3 apresenta toda a modelagem numérica e implementação computacional do DLM que foi implementado no código próprio AEROSOLVER, desde as equações iniciais e suas considerações e aproximações, caracterização da discretização dos painéis aerodinâmicos e equacionamento final da *downwash*. Além disso, apresenta-se os fluxogramas das principais etapas das implementações disponíveis no código próprio AEROSOLVER, incluindo a validação da função Kernel não planar e a matriz AIC.

No Capítulo 4 é feita uma revisão da modelagem em EFs de placas sanduíches viscoelásticas de três camadas. É mostrado também a influência da temperatura de operação de tais sistemas e da frequência da oscilação na eficiência desses materiais, além da função módulo complexo utilizada neste trabalho combinada com o conceito de frequência reduzida para a modelagem dos sistemas aeroviscoelásticos em regime subsônico descritos neste trabalho.

No Capítulo 5 é apresentado a implementação da solução aeroelástica por meio do acoplamento dos modelos aerodinâmicos e estrutural utilizando o DLM e MEF. Neste caso, as matrizes aerodinâmicas generalizadas são utilizadas para obter os coeficientes da aproximação de Roger necessários para o cálculo da velocidade de *flutter* por meio do método PK modificado para lidar com os sistemas aeroviscoelásticos.

O Capítulo 6 mostra os principais resultados das inúmeras simulações numéricas realizadas para a verificação da metodologia proposta para a análise de estabilidade de sistemas aeroelásticos contendo materiais viscoelásticos para a supressão do *flutter*. Além disso, apresenta-se aqui a estratégia de interfaceamento entre os códigos ANSYS® e AEROSOLVER, visando aplicações mais complexas de interesse industrial.

Diante dos resultados obtidos para placas curvas sanduíches com amortecimento viscoelástico em regime subsônico, pode-se concluir sobre a viabilidade dessa técnica de controle para aumentar a estabilidade de sistemas aeroelásticos em regime subsônico. Entretanto, foi verificado que à medida que a temperatura de operação do sistema aeroviscoelástico aumenta, tem-se uma redução na velocidade de *flutter* do sistema. Isto pode ser explicado pela perda de desempenho do material viscoelástico ISD112 a altas temperaturas, conforme discutido no Capítulo 2.

Levando em consideração as restrições de acréscimo de peso em projetos práticos de interesse aeronáutico, foi feito um estudo sobre o aumento de massa na estrutura versus o ganho em estabilidade. Verificou-se que todas as configurações da placa sanduíche viscoelástica foram capazes de retardar a ocorrência do *flutter*. Em

seguida, nota-se que algumas configurações específicas foram capazes de aumentar a velocidade crítica de *flutter* em pelo menos 80%. Portanto, de posse dessas considerações, o projetista aeronáutico dispõe de uma ferramenta capaz de otimizar a aplicação do tratamento viscoelástico tendo em vista a restrição de peso e ganho aeroelástico.

Além disso, verificou-se que a velocidade de *flutter* sofre maior incremento quando se aumenta a espessura da camada restringente do que o aumento da camada viscoelástica. Isto ocorre porque a camada restringente auxilia nas deformações de cisalhamento para o núcleo viscoelástico durante as deformações de flexão da placa curva, conseqüentemente, aumenta o efeito dissipativo para esse tipo de material.

Ademais, para projetos aeronáuticos, o retardamento da velocidade de *flutter* juntamente com o menor peso possível é desejável. Dessa forma, na subseção 6.3.3 pode-se observar o estudo do tratamento parcial com uma estrutura mista, o qual foi capaz de aumentar a velocidade de *flutter* em 59% para um ganho de massa de 33,5%. Uma vez que, para a placa completamente tratada com elemento sanduíche obteve-se um ganho na velocidade de *flutter* de 322%, entretanto um ganho de massa de 202,3%. Assim, essa metodologia de tratamento parcial auxilia o projetista aeronáutico a tomar a melhor decisão quando há a necessidade de redução de massa e supressão da velocidade de flutter.

Por fim, verificou-se o efeito da dissipação do material viscoelástico; primeiramente, estudou-se o comportamento conservativo associado (ACS) a baixa frequência com a velocidade de *flutter* em 85 m/s; e em seguida, o efeito do mecanismo de dissipação do material viscoelástico com 87 m/s. Dessa maneira, notou-se um pequeno incremento da velocidade de *flutter*, que ocorreu no primeiro modo de torção do painel curvo e o aumento do ângulo da estrutura favoreceu a ocorrência do fenômeno de *flutter* e, conseqüentemente, a redução da dissipação de energia pelo material viscoelástico.

Neste ponto, deve-se mencionar algumas dificuldades que foram encontradas para a execução desse trabalho, como a não linearidade do sistema aeroviscoelástico, pois tanto o carregamento aerodinâmico quanto as matrizes do modelo estrutural sofrem forte influência da frequência e da temperatura de operação através de uma função módulo complexo. Neste caso, foram necessárias várias rotinas iterativas para a resolução do problema aeroviscoelástico final e a conseqüente determinação das velocidades de *flutter*. Por último, vale ressaltar o custo computacional associado para a avaliação das várias frequências reduzidas para o método DLM não estacionário e

não planar, além da modificação do método PK original para a resolução do problema de autovalores complexos do sistema aeroviscoelástico.

Perspectivas de trabalhos futuros

O presente trabalho apresenta a possibilidade para algumas perspectivas futuras de pesquisa para essa linha de estudo, como:

- Implementação de correções para a matriz AIC através da utilização de dados em túneis de ventos ou CFD, visando a diminuir as distorções do DLM para regimes transônicos e supersônicos, além da inclusão dos efeitos viscosos na modelagem;
- Estudar formas de correções no carregamento aerodinâmico com o objetivo de viabilizar aplicações como rajadas ou diferentes condições de voo, como decolagem ou pouso;
- Usar otimização para aplicação de tratamentos viscoelásticos parciais levando-se em conta as energias de deformação modal, as restrições de peso e a eficiência aeroelástica;
- Visando projetos robustos de sistemas aeroviscoelásticos em regime subsônico, deve-se propor o uso dos elementos finitos estocásticos para levar em conta as incertezas paramétricas associadas à parte estrutural e ao carregamento aerodinâmico;
- Realização de experimentos com estruturas sanduíches viscoelásticas para verificar as técnicas de modelagem propostas neste trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABEL, I. An analytical technique for predicting the characteristics of a flexible wing equipped with an active flutter-suppression system and comparison with wind-tunnel data. **NASA Technical Paper** 1367, 1979.

ALBANO, E.; RODDEN, W. P. A doublet-lattice method for calculating lift distributions on oscillating surfaces in subsonic flows. **AIAA journal**, v. 7, n. 2, pp. 279-285, 1969.

<https://doi.org/10.2514/3.5086>

ALMEIDA, C. T. **Análise de vibrações induzidas por vórtices em um riser de perfuração**. 2010. 80f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

ALYANAK E. J.; PENDLETON E. Aeroelastic tailoring and active aeroelastic wing impact on a lambda wing configuration. **Journal of Aircraft**, v. 54, pp. 11-19, 2017.

<https://doi.org/10.2514/1.C033040>

ASHLEY, H. On making things the best-aeronautical uses of optimization. **Journal of Aircraft**, v. 19, n. 1, pp. 5-28, 1982. <https://doi.org/10.2514/3.57350>

BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J. A. Fractional calculus – A different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. **AIAA Journal**, v. 21, n. 5, pp. 741-748, 1983. <https://doi.org/10.2514/3.8142>

BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J. A. Fractional calculus in the transient analysis of viscoelastically damped structures. **The American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal**. v. 23, n. 6, p. 918-925, 1985. <https://doi.org/10.2514/3.9007>

BAKER, M. L.; RODDEN, W. P. Improving the convergence of the doublet-lattice method through tip corrections. **Journal of Aircraft**, v. 38, n.4, pp. 772–776. 2001. <https://doi.org/10.2514/2.2831>

BALMÈS, E.; GERMÈS, S. Tools for viscoelastic damping treatment design: Application to an automotive floor panel. International Conference on Noise and Vibration

Engineering. **Proceedings of the 28th International Seminar on Modal Analysis**. 2002 Leuven, Bélgica.

BARKANOV, E. Transient response analysis of structures made from viscoelastic materials. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. v. 44, n.3, p.393- 403, jan 1999.

[https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19990130\)44:3<393::AID-NME511>3.0.CO;2-P](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19990130)44:3<393::AID-NME511>3.0.CO;2-P)

BATHE, K.-J. **Finite Element Procedures**. 1.ed. Prentice Hall, 1996. 1037p.

BAVASTRI, C.; FEBBO, M.; GONÇALVES, V.; LOPES, E. Optimum viscoelastic absorbers for cubic nonlinear systems. **Journal of Vibration and Control**, v. 20, n. 10, pp. 1464–1474. 2013. <https://doi.org/10.1177/1077546312473322>

BAZ, A. M. **Active and Passive Vibration Damping**. John Wiley and Sons Ltd, 2019. 736p.

BENINI, G. R. **Modelo numérico para simulação da resposta aeroelástica de asas fixas**. 2002. 97f. Dissertação de Mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.

BERTIN, J. J.; SMITH, M. L. **Aerodynamics for engineers**. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1998.

BISMARCK-NASR M. N. Kernel function occurring in subsonic unsteady potential flow, **AIAA Journal**, v. 29, n. 6, pp. 878–879, 1991. <https://doi.org/10.2514/3.10673>

BISPLINGHOFF, R. L.; ASHLEY, H.; HALFMAN, R.L. **Aeroelasticity**. Courier Corporation, 2013.

BLAIR, MAX. A compilation of the mathematics leading to the doublet-lattice method. **Airforce Wright Laboratory**. Final Report, Ohio 45433-7542, Nov. 1994.

BORGES, D. M. **Desenvolvimento e implementação do método doublet lattice para análises aeroelásticas e controle passivo de vibrações**. 2019. 127 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil.

<https://doi.org/10.14393/ufu.di.2019.2374>

BOTEZ, R. M.; DOIN, A.; BISKRI, D. E.; COTOI, I.; HAMZA, D.; PARVU, P. Method for flutter aero-servoelastic open loop analysis. **Canadian Aeronautics and Space Journal**, v. 49, n. 4, pp. 179-190. 2003. <https://doi.org/10.1115/IMECE2002-33623>

BRENDEL, M.; SULAEMAN, E. Improved doublet lattice formulation for calculating aerodynamic loads on lifting surfaces in unsteady subsonic flow. **12th Applied Aerodynamics Conference**.1994. <https://doi.org/10.2514/6.1994-1890>

- BRIEND, Y. P. J. **Contribuição aos métodos de redução de modelos aplicados a sistemas aeroviscoelásticos**. 2017. 157 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil. <https://doi.org/10.14393/ufu.di.2017.72>
- BROCK, B.; GRIFFIN, J. Jr. The supersonic doublet-lattice method - a comparison of two approaches. **16th Structural Dynamics, and Materials Conference**. 1975. <https://doi.org/10.2514/6.1975-760>
- CHEN, P. C.; BHASIN, S. ZONA6 versus the doublet-lattice method for unsteady aerodynamics on lifting surfaces. **Journal of Aircraft**, v. 49, n. 3, pp. 966–968. 2012. <https://doi.org/10.2514/1.c031648>
- CHRISTENSEN, R. M. **Theory of Viscoelasticity: An Introduction**, Academic Press, Inc., New York, 2nd Edition, 1982.
- CUNHA, B. S. C. **Controle passivo de vibrações induzidas por vórtices utilizando materiais viscoelásticos**. 2016. 104 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil. <https://doi.org/10.14393/ufu.di.2016.553>
- CUNHA FILHO, A. G. **Abordagem transiente sobre os efeitos do amortecimento viscoelástico na estabilidade aeroelástica de estruturas aeronáuticas**. 2019. 212 f. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil. <http://doi.org/10.14393/ufu.te.2019.2208>
- CUNHA FILHO, A. G. **A influência do amortecimento viscoelástico na estabilidade aeroelástica de painéis aeronáuticos**. 2015. 107 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil. <https://doi.org/10.14393/ufu.di.2015.460>
- CUNHA-FILHO, A. G.; LIMA, A. M. G.; DONADON, M. V.; LEÃO, L. S. Flutter suppression of plates using passive constrained viscoelastic layers. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 79, pp. 99-111, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2016.02.025>
- DESMARAIS, R. N. An accurate method for evaluating the kernel of the integral equation relating lift to downwash in unsteady potential flow. **23th AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics and Materials Conference**. New Orleans, LA. 1982.
- DIACENCO, A. A. **Modelagem por elementos finitos de materiais compósitos estruturais incorporando material viscoelástico para o controle passivo de vibração e ruído**. 2010. 81 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, MG, Brasil.
- DOWELL, E.H.; CLARK, R.; COX, D.; CURTISS, H.C.; EDWARDS, J.W.; HALL, K.C.; PETERS, D.A.; SCANLON, R.; SIMIU, E.; SISTO, F; STRGANAC, T.W. **A modern**

course in aeroelasticity – solid mechanics and its applications, 4th revised and enlarged ed., Springer, 2004.

DRAKE, M. L., SOOVERE, J. **A design guide for damping of aerospace structures**. In AFWAL Vibration Damping Workshop Proceedings 3, 1984.

DROZDOV, A. D. **Viscoelastic structures: mechanics of growth and aging**. 1.ed. San Diego, Academic Press, 1998. 596p.

DUNNING, P. D.; STANFORD, B. K.; KIM, H. A.; JUTTE, C. V. Aeroelastic tailoring of a plate wing with functionally graded materials. **Journal of Fluids and Structures**, v. 51, pp. 292-312, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2014.09.008>

ESPÍNDOLA J.J.; BAVASTRI C.A. Viscoelastic neutralizers in vibration abatement: a nonlinear optimization approach. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences**, v. 19, n. 2, pp. 154-163. 1997.

EVERSMAN, W.; PITT, D. M. Hybrid doublet lattice/doublet point method for lifting surfaces in subsonic flow. **Journal of Aircraft**, v. 28, n. 9, pp. 572–578. 1991.

<https://doi.org/10.2514/3.46066>

FEIJÓ, V. **Modelagem do fluxo sanguíneo na aorta abdominal utilizando interação fluido-estrutura**. 2007. 75 f. Dissertação de Mestrado – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, SP, Brasil.

FELIPPE, W. N. **Aplicação de modelos teórico-computacionais para simulação do comportamento dinâmico de estruturas amortecidas através de materiais viscoelásticos**. 2012. 90 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG, Brasil.

FONSECA, L. A. Jr. **Modelagem numérico-computacional de vigas sanduíches viscoelásticas sujeitas a grandes deslocamentos na presença de incertezas paramétricas**. 2020. 128 f. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil. <http://doi.org/10.14393/ufu.te.2020.645>

FREITAS, T. C. **Desenvolvimento de metodologias para projeto de estruturas com camada sanduíche amortecedoras**. 2018. 97 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG, Brasil.

FUNG, Y. C. **An introduction to the theory of aeroelasticity**. Courier Dover Publications, 2008.

GALUCIO, A.C.; DEÜ, J.F.; OHAYON, R. Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators. **Computational Mechanics**, v.33, pp. 282-291, 2004. <https://doi.org/10.1007/s00466-003-0529-x>

GANGWANI, S. T. A doublet lattice method for the determination of rotor induced empennage vibration airloads. **Analysis description and program documentation**. 1982.

GARRICK, I. E.; REED, W.H. Historical development of aircraft flutter. **Journal of Aircraft**, v.18, n.11, pp. 897-912, 1981. <https://doi.org/10.2514/3.57579>

GIESING, J. P. Basic principles and double lattice applications in potential aerodynamics. **Computational Methods in Potential Aerodynamics**. Springer-Verlag, Computational Mechanics Centre, Southampton, 1987.

GIESING, J. P.; KALMAN, T. P.; AND RODDEN, W. P.; **Correction factor techniques for improving aerodynamic prediction methods**. NASA-CR-144967, 1976.

GONÇALVES, L. K. S. **Análise de fadiga de sistemas estocásticos incorporando materiais viscoelásticos**. 2018. 110 f. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil. <http://doi.org/10.14393/ufu.te.2018.817>

GRALA, P. **Chaminés industriais: soluções para atenuação de vibrações induzidas por desprendimento de vórtices**. 2013. 94f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, RS, Brasil.

GUARALDO NETO, B. **Modelagem por Elementos Finitos de Sistemas Dinâmicos Combinando Materiais Viscoelásticos e Materiais com Memória de Forma para o Controle Passivo de Vibrações e Ruído**. 2012. 94f. Dissertação de Mestrado-Engenharia Mecânica - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil.

GUIMARÃES NETO, A. B. **Dinâmica e controle de aeronaves flexíveis com modelagem aerodinâmica pelo método doublet-lattice**. 2008. 176 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP, Brasil.

GUIMARÃES NETO, A. B. **Flight dynamics of flexible aircraft using general body axes: a theoretical and computational study**. 2014. 450 f. Tese de Doutorado – Instituto Tecnológico da Aeronáutica, São José dos Campos, SP, Brasil.

GUIMARÃES NETO, A. B.; DA SILVA, R. G. A.; PAGLIONE, P. Control-point-placement method for the aerodynamic correction of the vortex- and the doublet-lattice methods. **Aerospace Science and Technology**, v. 37, pp. 117–129, 2014.

<https://doi:10.1016/j.ast.2014.05.007>

GUIMARÃES, T. A.; CASTRO, S. G.; RADE, D. A.; CESNIK, C. E. Panel flutter analysis and optimization of composite tow steered plates. **58th AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference**, pp. 1118, 2017. <https://doi.org/10.2514/6.2017-1118>

- GUO, L.; WANG, Z.; NODA, N. A fracture mechanics model for a crack problem of functionally graded materials with stochastic mechanical properties. **Proceedings Of Royal Society. A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 468, n. 2146, pp. 2939-2961, 2012. <https://doi.org/10.1098/rspa.2012.0156>
- HARDER, R. L.; DESMARAIS, R. N. Interpolation using surface splines. **Journal of Aircraft**, v. 9, n. 2, pp. 189–191. 1972. <https://doi.org/10.2514/3.44330>
- HARDER, R. L.; RODDEN, W. P. Kernel function for nonplanar oscillating surfaces in supersonic flow. **Journal of Aircraft**, v. 8, n. 8, pp. 677–679. 1971. <https://doi.org/10.2514/3.44292>
- HASHEMINEJAD S. M.; MOTAALEGHI M. A., Aeroelastic analysis and active flutter suppression of an electro-rheological sandwich cylindrical panel under yawed supersonic flow. **Aerospace Science and Technology**, v. 42, pp. 118-127. 2015. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2015.01.004>
- HASSIG, H. J. An approximate true damping solution of the flutter equation by determinate iteration. **Journal of Aircraft**, v. 8, n.11, pp. 885-889, 1971. <https://doi.org/10.2514/3.44311>
- HEDMAN, S. G. Vortex lattice method for calculation of quasi steady state loadings on thin elastic wings in subsonic flow. **Aeronautical Research Institute of Sweden**, v. 105, 1965.
- HENSHAW, M. J. DE C.; BADCOCK, K. J.; VIO, G. A.; ALLEN, C. B.; CHAMBERLAIN, J.; KAYNES, I.; DENLEY, C. J. Non-linear aeroelastic prediction for aircraft applications. **Progress in Aerospace Sciences**, v. 43, n. 4, pp. 65–137. 2007. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2007.05.002>
- HILDEBRAND, F. B. **Advanced calculus for applications**. 1962.
- HODGES, D.H; PIERCE, G.A. **Introduction to structural dynamics and aeroelasticity**, Cambridge University Press, 2011.
- INGRAM C. W.; SZWARC W. J. Passive flutter suppression. **Journal of Aircraft**, v. 13, n.7, pp. 542-543.1976. <https://doi.org/10.2514/3.44544>
- JONES, D. I. G. Viscoelastic Vibration Damping. [S.l.]: **John & Wiley Sons LTD.**, 2001.
- KALMAN, T. P.; RODDEN, WILLIAM P.; GIESING, J. P. Application of the doublet-lattice method to nonplanar configurations in subsonic flow. **Journal of Aircraft**, v. 8, n. 6, p. 406-413, 1971. <https://doi.org/10.2514/3.59117>
- KOTIKALPUDI, A.; PFIPER, H.; BALAS, G. J. Unsteady aerodynamics modeling for a flexible unmanned air vehicle. **AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference**, pp. 2854, 2015. <https://doi.org/10.2514/6.2015-2854>

KÜSSNER, H. G.; SCHWARZ, I. **The oscillating wing with aerodynamically balanced elevator.** [S.l.], 1940.

LANDAHL, M. T. Kernel function for nonplanar oscillating surfaces in a subsonic flow, **AIAA Journal**, v. 5, n. 5, pp. 1045-1046, 1967. <https://doi.org/10.2514/3.55319>

LASCHKA, B. The pressure, lift and moment distributions on a harmonically oscillating sweptback wing of low aspect ratio at low subsonic speeds; comparison between theory and measurements. **Proc. of International Council of the Aeronautical Sciences, fourth congress**, pp. 295-313, Paris, 1967.

LASCHKA, B. **Zur Theorie der harmonischen Schwingen den tragen den Fläche bei Unterschallanströmung.** 1963.

LIGHTHILL, M. Oscillating airfoils at high mach number. **Journal of Aeronautical Sciences**, v. 20, pp. 402-406. 1953. <https://doi.org/10.2514/8.2657>

LIMA, A.M.G. **Modelagem Numérica e Avaliação Experimental de Materiais Viscoelásticos Aplicados ao Controle Passivo de Vibrações Mecânicas.** 2003. 118 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil.

LIMA, A.M.G. **Modélisation et Optimisation Robuste de l'amortissement Viscoélastique de Systèmes Mécaniques.** 2007. 198 f. Tese Doutorado em Engenharia Mecânica — Université de Franche, Comté.

LIMA, A.M.G. **Notas de aula da disciplina de Métodos de Elementos Finitos,** 2017.

LIMA, A. M. G.; FARIA, A. W.; RADE, D. A. Sensitivity analysis of frequency response functions of composite sandwich plates containing viscoelastic layers. **Composite Structures**, v. 92, n. 2, pp. 364-376, 2010.

<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.08.017>

LIMA, A. M. G.; RADE, D. A.; LÉPORE NETO, F. P. An efficient modeling methodology of structural systems containing viscoelastic dampers based on frequency response function substructuring. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 23, n. 4, pp. 1272–1281. 2009. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2008.09.005>

MAINARD, F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models. **1 ed. World Scientific Publishing**, 2010. 368p.

MARTIN, L. A.; INMAN, D. J. A novel viscoelastic material modulus function for modifying the golla-hughes-mctavish method. **Journal of Acoustics and Vibration**. v. 18, n. 3, pp. 102-108, 2013.

<https://doi.org/10.20855/ijav.2013.18.3325>

- MARTINS, P.C.O. **Estudo da influência do amortecimento viscoelástico no fenômeno aeroelástico de flutter**. 2014. 148 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil. <https://doi.org/10.14393/ufu.di.2014.186>
- MCCAIN, W. E.: Comparison of measured and calculated airloads on an energy efficient transport wing model equipped with oscillating control surfaces. **22nd Aerospace Sciences Meeting**, 1984. <https://doi.org/10.2514/6.1984-301>
- MERRETT C. G.; HILTON H. H. Elastic and viscoelastic panel flutter in incompressible, subsonic and compressible flows. **Journal of Aeroelasticity and Structural Dynamics**, v. 2, n. 1 .2010.
- MOON S. H., KIM S. J., Active and passive suppressions of nonlinear panel flutter using finite element method. **AIAA journal**, v. 39, n.11, pp. 2042-2050. 2001. <https://doi.org/10.2514/2.1217>
- MURPHY, Q. **Improved unsteady aerodynamic influence coefficients for dynamic aeroelastic response**. 2012. 99 f. Dissertação de Mestrado – McGill University, Montréal, Canada.
- NAGAHAMA, C. V. **Análise numérica e modelagem computacional de um sistema estrutural com controle semiativo de vibração do tipo amortecedor magnetoreológico**. 2013. 97 f. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG, Brasil.
- NASHIF, A.; JONES, D.; HANDERSON, J. **Vibration Damping**. John Wiley and Sons Ltd, 1985.
- PALACIOS, R; CLIMENT, H.; KARLSSON, A.; WINZELL, B. Assessment of strategies for correcting linear unsteady aerodynamics using CFD or experimental results. **International Forum of Aeroelasticity and Structural Dynamics**, 2001, Madrid, Espanha.
- PERSOZ, B. **Introduction a Létude de La Rhéologie**. Dunod: [s.n.], 1987.
- PI, W.; KELLY, P.; LIU, D. A transonic doublet lattice method for unsteady flow calculations. **17th Aerospace Sciences Meeting**. 1979. <https://doi.org/10.2514/6.1979-78>
- PITT, D. M.; GOODMAN, C. B. Flutter calculations using doublet lattice aerodynamics modified by the full potential equations. **28th AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics and Materials Conference**. Monterrey, CA. 1987. <https://doi.org/10.2514/6.1987-882>
- PRASAD, D. S. S.; HOLLA, V. S. Doublet lattice method - schemes for CPU time reduction. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 23, n. 1, pp. 59-65, 1980. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(80\)90078-X](https://doi.org/10.1016/0045-7825(80)90078-X)

- RAO, M. D. Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial airplanes. **Journal of Sound and Vibration**, v. 262, n. 3, pp. 457-474, 2003. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00106-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00106-8)
- RODDEN, W.P.; GIESING, J.P; KALMAN, T.P. New developments and applications of the subsonic doublet-lattice method for nonplanar configurations, **AGARD Conference Proceedings**, CP-80-71, Part II, No 4, 1971. <https://doi.org/10.2514/3.59117>
- RODDEN, W. P.; GIESING, J. P.; KALMAN, T. P. Refinement of the nonplanar aspects of the subsonic doublet-lattice lifting surface method. **Journal of Aircraft**, v. 9, n. 1, p. 69-73, 1972. <https://doi.org/10.2514/3.44322>
- RODDEN, W. P.; GIESING, J. P.; KALMAN, T. P. Subsonic unsteady aerodynamics for general configurations. **Airforce Wright Flight Dynamics Laboratory**. Ohio, Vol. I, Part. I, AFFDL-TR-71-5, Nov, 1971. <https://doi.org/10.2514/6.1972-26>
- RODDEN, W. P., JOHNSON, E. H. **MSC/NASTRAN Handbook for Aeroelastic Analysis, Version 68**, MacNeal-Schwendler Corp., Los Angeles, CA, 1994.
- RODDEN, W. P.; TAYLOR, P. F.; MCINTOSH, S. C. Further refinement of the nonplanar aspects of the subsonic doublet-lattice lifting surface method. In: **ICAS PROCEEDINGS**. pp. 1786-1799. 1996.
- RODDEN, W. P.; TAYLOR, P. F.; MCINTOSH, S. C. Further refinement of the subsonic doublet-lattice method. **Journal of Aircraft**. v. 35, N. 5, pp. 720-727, 1998. <https://doi.org/10.2514/2.2382>
- RODDEN, W. P.; TAYLOR, P. F., MCINTOSH, S. C. Improvements to the Doublet-Lattice Method in MCS/NASTRAN. **MacNeal-Schwendler Corp.**, Technical Rept., Los Angeles, 1999.
- RODEMICH, E. R.; ANDREW, L. V. Unsteady aerodynamics for advanced configurations. Part 2. A transonic box method for planar lifting surfaces. **North American Aviation Inc Downey CA Space and Information Systems Div**, 1965.
- RODOVALHO, L. F. F. **Caracterização numérica e avaliação experimental da fuga térmica em dispositivos amortecedores viscoelásticos sujeitos a carregamentos dinâmicos e pré-cargas estáticas**. 2018. 170 f. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil.
- ROGER, K. Airplane math modeling methods for active control design. **AGARD Conference Proceedings**, No 228, pp.1-11, 1977.
- ROUGHEN, K. M.; BAKER, M. L.; FOGARTY, T. Computational fluid dynamics and doublet-lattice calculation of unsteady control surface aerodynamics. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**. v. 24, n. 1, pp. 160–166. 2001.

<https://doi.org/10.2514/2.4697>

SANTOS, L. A.; SILVA, R. G. A.; CASTRO, B. M.; MARTO, A. G.; ALONSO, A. C. P. A planar doublet-lattice code for teaching and research in aeroelasticity. 18TH INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, 18, 2005, Ouro Preto. **Anais**.

SCHMIT, L. A. Structural synthesis- its genesis and development. **AIAA Journal**, v. 19, n. 10, pp. 1249-1263, 1981. <https://doi.org/10.2514/3.7859>

SHIRK, M. H.; HERTZ, T. J.; WEISSHAAR, T. A. Aeroelastic tailoring-theory, practice, and promise. **Journal of Aircraft**. v. 23, n. 1, pp. 6-18, 1986.

<https://doi.org/10.2514/3.45260>

SILVA, L. A. **Modelagem aeroviscoelástica de painéis sanduíches planos via método dos painéis**. 2018. 107 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil. <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2019.2357>

SILVA, R. G. A. **O método Doublet Lattice**. Notas de aula da disciplina de aerodinâmica não estacionária (AA-220). Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2009.

SOUZA, F. C. S. **Desprendimento de vórtices em pontes: vibrações transversais induzidas no tabuleiro**. 2013. 92f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, RS, Brasil.

STANFORD B. K.; JUTTE C. V.; WU K. C. Aeroelastic benefits of tow steering for composite plates. **Composite Structures**, v. 118, pp. 416-422. 2014.

<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.08.007>

TAVARES, E. J. **Modelo experimental para ensaios de flutter de uma seção típica Aeroelástica**. 2009. 101 f. Dissertação de Mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.

THEODORSEN, T. General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter. NACA Technical Report, n. 496, Jan, 1935.

TIFFANY, S. H.; ADAMS, W. M. Jr. Nonlinear programming extensions to rational function approximation methods for unsteady aerodynamic forces. **NASA TP-2776**, 1988.

VALENTE, C.; JONES, D.; GAITONDE, A.; COOPER, J. E.; LEMMENS, Y. Doublet-lattice method correction by means of linearized frequency domain solver analysis. **15th Dynamics Specialists Conference**. 2016. <https://doi.org/10.2514/6.2016-1575>

VALENTE, C.; LEMMENS, Y.; WALES, C.; JONES, D.; GAITONDE, A.; COOPER, J. E. A doublet-lattice method correction approach for high fidelity gust loads analysis. **58th**

- AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference.** pp. 0632. 2017. <https://doi.org/10.2514/6.2017-0632>
- VAN ZYL, L. H. Application of the subsonic doublet lattice method to delta wings. **Journal of Aircraft**, v. 36, n. 3, pp. 609-610.1999.<https://doi.org/10.2514/2.2480>
- VAN ZYL, L. H. Arbitrary accuracy integration scheme for the subsonic doublet lattice method. **Journal of Aircraft**, v. 35, n. 6, pp. 975–977. 1998
<https://doi.org/10.2514/2.2397>
- VAN ZYL, L. H. Convergence of the subsonic doublet lattice method. **Journal of Aircraft**, v.35, n. 6, pp. 977-979. 1998. <https://doi.org/10.2514/2.2398>
- VAN ZYL, L. H. Robustness of the subsonic doublet lattice method. **The Aeronautical Journal** , v. 107, n. 1071, pp. 257-262. 2003.
<https://doi.org/10.1017/S0001924000013324>
- VAN ZYL, L. H.; MATHEWS, E. H. Aeroelastic analysis of t-tails using an enhanced doublet lattice method. **Journal of Aircraft**, v. 48, n. 3, pp. 823–831. 2011.
<https://doi.org/10.2514/1.C001000>
- VIVIAN, H. T.; ANDREW, L. V. **Unsteady aerodynamics for advanced configurations. Part I. Application of the subsonic kernel function to nonplanar lifting surfaces.** Airforce Flight Dynamics Laboratory. Ohio, Part. I, FDL-TDR-64-152, Jul., 1965.
- WRIGHT, J.R.; COOPER, J.E. **Introduction to aircraft aeroelasticity and loads.** John Wiley and Sons Ltd, 2007. 559p
- YAN Z., RAGAB S. A.; HAJJ M. R. Nonlinear passive control strategies for suppression on transonic flutter. **Structural Dynamics and Materials Conference**, 4-8 January, San Diego, California. 2016. <https://doi.org/10.2514/6.2016-1225>
- YURKOVICH R. Status of unsteady aerodynamic prediction for flutter of high performance aircraft. **Journal of Aircraft**, v. 40, n. 5, pp. 832-842. 2003.
<https://doi.org/10.2514/2.6874>