UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

AMANDA COUTO DA COSTA

ENSINANDO FRAÇÃO A PARTIR DA CONSTRUÇÃO DE INSTRUMENTOS MUSICAIS

Uberlândia
2022

AMANDA COUTO DA COSTA

ENSINANDO FRAÇÃO A PARTIR DA CONSTRUÇÃO DE INSTRUMENTOS MUSICAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Fabiana Fiorezi de Marco

Uberlândia
2022

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

C837 Costa, Amanda Couto da, 1997-
2022 ENSINANDO FRAÇÃO A PARTIR DA CONSTRUÇÃO DE INSTRUMENTOS MUSICAIS [recurso eletrônico] / Amanda Couto da Costa. - 2022.

Orientadora: Fabiana Fiorezi de Marco.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2022.614
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Ciência - Estudo ensino. I. Marco, Fabiana Fiorezi de,1974-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 50:37

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática
Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1A, Sala 207 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3230-9419 - www.ppgecm.ufu.br - secretaria@ppgecm.ufu.br

ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Ensino de Ciências e Matemática				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Profissional - PPGECM				
Data:	28/09/2022	Hora de início:	14h	Hora de encerramento:	[16:45]
Matrícula do Discente:	11912ECM003				
Nome do Discente:	Amanda Couto da Costa				
Título do Trabalho:	Ensinando fração a partir da construção de instrumentos musicais				
Área de concentração:	Ensino de Ciências e Matemática				
Linha de pesquisa:	Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Formação continuada de professores que ensinam matemática: um estudo sob a perspectiva histórico-cultural				

Reuniu-se por meio da Plataforma Conferência web RNP, na Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, assim composta: Profa. Dra. Cristiane Coppe de Oliveira (ICENP/UFU); Profa. Dra. Flávia Dias de Souza (UFTPR); Profa. Dra. Fabiana Fiorezi de Marco Matos (FAMAT/UFU) orientadora da candidata.

Iniciando os trabalhos a presidente da mesa, Profa. Dra. Fabiana Fiorezi de Marco Matos apresentou a Comissão Examinadora e a candidata, agradeceu a presença do público, e concedeu à Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação da Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir a senhora presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, às examinadoras, que passaram a arguir a candidata. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando a candidata:

[A]provada.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Fabiana Fiorezi de Marco Matos, Professor(a) do Magistério Superior**, em 28/09/2022, às 16:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Cristiane Coppe de Oliveira, Professor(a) do Magistério Superior**, em 28/09/2022, às 16:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **FLAVIA DIAS DE SOUZA**, **Usuário Externo**, em 28/09/2022, às 21:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3945163** e o código CRC **AA8B0418**.

Criado por goncalves, versão 3 por fabiana.marco em 28/09/2022 16:44:15.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Jesus Cristo, meu Salvador e Senhor, por todo sustento que me concedeu para a realização desta dissertação. De fato, mesmo em muitos momentos de desânimo e de cansaço, percebi seu cuidado amoroso e sua presença indo adiante de mim: "Ora, ao Rei dos séculos, imortal, invisível, ao único Deus sábio, seja honra e glória para todo o sempre. Amém." (1º Timóteo 1:17).

À querida e dedicada orientadora Prof.ª Dr.ª Fabiana Fiorezi de Marco Matos, agradeço à Deus por tê-la conduzida ao meu acolhimento, de forma a me encorajar, em meios aos desafios da pesquisa e por ter paciência e sensibilidade em relação ao meu tempo de desenvolvimento das ações propostas na pesquisa. Sou grata a Deus pela oportunidade de ser sua orientada no Mestrado.

Aos meus pais, Aparecida e Urbano, meu irmão Gustavo, minha irmã Jaqueline e por todos meus irmãos em Cristo que oraram por mim e me apoiaram a seguir sempre em frente, com meus objetivos e projetos. Sou muito grata à Deus, pelo amor constante que todos têm demonstrado através da longanimidade e benignidade.

A minha amiga e irmã em Cristo, Karol Cristal, por me auxiliar em diversos questionamentos em relação aos conceitos musicais. Ao meu namorado Elio, pelo incentivo e pela ajuda com as formatações finais da minha dissertação.

Aos meus dois alunos convidados para fazer parte da proposta dessa pesquisa. O entusiasmo e alegria de vocês me contagiaram e fizeram com que essa atividade fosse de grande proveito e significado. Grata à Deus pelo momento tão enriquecedor e coletivo.

Aos professores de minha qualificação que me auxiliaram no processo, direcionando nos questionamentos necessários para a organização da proposta.

A todos os integrantes do Grupo de Estudos e Pesquisa em Ensino de Matemática e Atividade Pedagógica (GEPEMAPe), pelas reflexões e considerações acerca dessa pesquisa. De fato, esse momento oportuno, foi de grande importância para minha formação e para o desenvolvimento desta pesquisa.

Grata às professoras que fizeram parte da minha banca de defesa, pelo tempo que disponibilizaram para leitura cuidadosa e criteriosa de minha dissertação. Sei que fizeram com esmero e dedicação!

RESUMO

O presente estudo tem como intuito responder o seguinte questionamento: *Que conhecimentos sobre fração são apresentados por alunos do Ensino Fundamental ao construírem instrumentos musicais em aulas de matemática?* O objetivo principal foi analisar quais são os conhecimentos sobre fração que dois alunos do 8º ano do Ensino Fundamental apresentam durante a construção de instrumentos musicais. O trabalho se configurou no desenvolvimento de uma proposta baseada na Resolução de Problemas, por meio de uma História em Quadrinhos, a partir da construção dos seguintes instrumentos musicais: Ganzá, Pífano, Pau de Chuva e Flauta de Pan. Mediante ao contexto da pandemia vivido nos anos 2020 e 2021, a proposta foi realizada de forma presencial, com dois alunos convidados pela pesquisadora. A análise da pesquisa foi feita a partir dos diálogos dos alunos com a pesquisadora e percebeu-se que os alunos necessitavam rever conhecimentos sobre fração e a partir da proposta que foi desenvolvida, foi possível trabalhar significados de fração como medida e divisão, além de possibilitar um diálogo acerca dos registros da fração como número decimal e como porcentagem A partir do movimento dessa pesquisa, foi elaborado, como produto educacional, uma unidade didática com propostas, que têm como objetivo explorar o conceito de fração a partir da construção de instrumentos musicais e alguns fundamentos básicos sobre música. Espera-se que esse trabalho possa incentivar outros professores a buscar formas de realizar ações ao ensinar que possibilitem a redescoberta dos elementos essenciais da fração a partir da relação com a música.

Palavras-chave: Frações, Resolução de Problemas, Música, Ensino Fundamental.

ABSTRACT

This study presents a Master's research developed in the Graduate Program in Science and Mathematics Teaching at the Federal University of Uberlândia, which aims to answer the following question: What knowledge about fraction are presented by elementary school students when building instruments musicals in math classes? The main objective was to analyze what is the knowledge about fraction that two students of the 8th year of Elementary School present during the construction of musical instruments. The work was configured in the development of a proposal based on Problem Solving, through a Comics, from the construction of the following musical instruments: Ganzá, Pífano, Pau de Chuva and Pan Flute. Given the context of the pandemic experienced in the years 2020 and 2021, the proposal was carried out in person, with two students invited by the researcher. The research analysis was based on the students' dialogues with the researcher and it was noticed that the students needed to review their knowledge about fraction and from the proposal that was developed, it was possible to work on fraction meanings such as measurement and division, in addition to enabling a dialogue about the records of the fraction as a decimal number and as a percentage Based on the movement of this research, a didactic unit was prepared as an educational product with proposals, which aim to explore the concept of fraction from the construction of musical instruments and some basics about music. It is hoped that this work can encourage other teachers to seek ways to carry out actions when teaching that allow the rediscovery of the essential elements of the fraction from the relationship with music.

Keywords: Fractions, Problem Solving, Music, Elementary School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

BNCC - Base Nacional Curricular Comum

DCM's - Diretrizes Curriculares Municipais

E.F. - Ensino Fundamental

EUA - Estados Unidos da América

HQ - Histórias em Quadrinhos

OMS - Organização Mundial de Saúde

PMU – Prefeitura Municipal de Uberlândia

PVC – Plástico com características únicas

SUMÁRIO

Introdução

Estudos e pesquisas demonstram que um dos assuntos mais discutidos na área da matemática, em relação ao ensino fundamental, são as frações. Ferreira, Forte e Rebelo (2014) alegam que os professores sentem necessidade de buscar formas de contribuir com o avanço do aprendizado dos alunos nesse conteúdo, mas muitas são as dificuldades encontradas e percebidas em sala de aula. Esses impasses encontrados são reflexos de diversas formas de ensino, segundo Oliveira e Basniak (2021), como por exemplo, um ensino voltado somente na compreensão do significado de fração como parte-todo. Para esses autores, somente essa abordagem desse significado da fração, não permite que os estudantes também compreendam a importância da determinação de uma unidade de medida além de que:

> • as regras e procedimentos sobressaem-se à compreensão dos significados (interpretações);
> • não há necessidade de determinar uma unidade de medida;
> • a introdução de frações como parte-todo (contagem) não é desvinculada das ideias e das propriedades dos números naturais, sendo desnecessária a construção do novo campo numérico - números racionais, o que dificulta a compreensão de números fracionários (BEHR *et al.,* 1983; BRASIL, 1998). (OLIVEIRA; BASNIAK, 2021, p.4).

Lopes (2008) reforça esse argumento, afirmando que a forma repetitiva e mecânica como as frações são apresentadas em sala de aula, não possibilitam uma compreensão sobre esse conteúdo. Ele apresenta o seguinte exemplo:

> A aprendizagem de frações não se dá com definições prontas, nomenclatura obsoleta e pseudo-problemas sobre pizzas e barras de chocolates. Os professores deveriam ter atenção para as complexidades que envolvem conceito tão delicado. (LOPES, 2008, p.7).

Outra crítica feita por Lopes (2008) é em relação à desatualização das contextualizações trazidas nos livros didáticos, relacionando as frações com objetos que nem mais são utilizados no dia a dia pela sociedade, como por exemplo, instrumentos de medida com ponteiros, uma vez que a sociedade atual está cada vez mais se adequando a realidade digital, que consequentemente, se utiliza mais da representação decimal. Outro fator ressaltado pelo autor acima é a associação da fração a contextos mais presentes na vida adulta do que em atividades próprias das crianças ou de adolescentes. Lopes (2008) defende, ainda, o cuidado que o professor deve ter em seu planejamento ao selecionar ou elaborar situações problemas voltadas ao conceito de fração.

> Certa vez propus uma atividade de redução de receita colocando uma restrição para a quantidade de ovos. O objetivo era que os alunos diminuíssem a quantidade de ingredientes na mesma proporção que a diminuição dos ovos.

> Comecei a receber e-mails de alunos (de 11/12 anos) questionando como poderiam calcular a terça parte de uma pitada de sal. Outros questionaram o formato das xícaras (não cilíndricas), que não tem marcas de divisão. Entendo que nestes exemplos a modelagem matemática esbarra na realidade (LOPES, 2008, p. 6, 7).

Para o autor, a dificuldade dos alunos está em não conseguirem elaborar mentalmente a imagem da ação referida. Por isso, defende a importância de serem trabalhadas as frações e seus diferentes significados, partindo de situações que sejam mais próximas do cotidiano dos estudantes.

Lopes (2008) cita as análises de Gimenez (1990), que defende 12 tipos de ideias associadas a fração e argumenta quanto é defasada a abordagem desses significados nos livros didáticos, que muitas vezes dão ênfase a fração somente como operador ou parte-todo.

Mediante aos fatos citados, essa pesquisa está inserida em um movimento que visa minimizar a dificuldade de aprendizagem dos alunos acerca do conceito de fração, a partir de uma perspectiva de ensino, que investigue os significados de frações a partir da construção de instrumentos musicais.

A escolha de uma proposta que envolva frações e música foi desencadeada a partir de motivações pessoais da pesquisadora durante seu mestrado. Durante parte do Ensino Fundamental e Médio, me[1] interessei por estudar música e me formei em um Curso Técnico em Instrumento no Conservatório da cidade de Uberlândia.

Durante a Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Uberlândia (UFU), especificamente a partir da realização dos estágios obrigatórios, percebi o grande desafio do professor na elaboração de propostas didáticas e, mediante essas reflexões, comecei a pensar sobre como poderia aliar a Música no processo de ensino de Matemática.

Após 6 meses de conclusão da graduação, iniciei o mestrado na mesma instituição e em uma das disciplinas realizadas no 1º período do programa, foi proposto um trabalho final no qual, dentre alguns livros utilizados no estudo, um me chamou atenção de modo especial. Foi o livro intitulado *"As matemáticas, o monocórdio e o número sonoro"*, de Saito e Broemberg (2002). A experiência de fazer esse trabalho na disciplina despertou-me o desejo de desenvolver uma pesquisa envolvendo a música e as frações.

A escolha da pesquisadora em organizar uma proposta utilizando a música como recurso didático, é fundamentada nos seguintes parâmetros: a) por ser a música é um importante instrumento de aprendizado, aspecto que é trazido como relevante para a área da educação, fato

[1] Utilizamos, nessa subseção, a primeira pessoa do singular por se tratar das vivências pessoais da pesquisadora.

que se comprova pela inserção da música no componente curricular, a partir da implementação da Lei 11769, que afirma que "A música deverá ser conteúdo obrigatório, mas não exclusivo, do componente curricular" (BRASIL, 2008); b) além do incentivo das Diretrizes Municipais de Uberlândia (BRASIL, 2018) na realização de propostas de ensino tendo como suporte a música, tendo em vista a importância da relação entre os saberes musicais e as diferentes áreas do conhecimento.

Outro documento que justifica a utilização da música no Ensino Fundamental é a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN), com a resolução CEB n.3, de 26 de junho de 1998, que apontam as contribuições de um trabalho feito a partir de uma perspectiva interdisciplinar:

> I - a Interdisciplinaridade, nas suas mais variadas formas, partirá do princípio de que todo conhecimento mantém um diálogo permanente com outros conhecimentos, que pode ser de questionamento, de negação, de complementação, de ampliação, de iluminação de aspectos não distinguidos;
>
> [...] V - a característica do ensino escolar, tal como indicada no inciso anterior, amplia significativamente a responsabilidade da escola para a constituição de identidades que integram conhecimentos, competências e valores que permitam o exercício pleno da cidadania e a inserção flexível no mundo do trabalho. (BRASIL, 1998 p.23).

Em busca de referenciais que pudessem subsidiar esse trabalho, foram realizadas pesquisas no Banco de Teses e Dissertações da Capes[2], dissertações voltadas para o ensino de Matemática, com abordagem para o Ensino Fundamental e que trabalhassem as frações a partir da música. As palavras chaves utilizadas na busca foram: *"música", "frações", "monocórdio", "ensino fundamental", "matemática",* sendo utilizadas de uma só vez e os critérios de refinamento foram: *tipo (dissertação de mestrado), área do conhecimento (ensino de ciências e matemática), área de concentração (ensino de matemática)*. Foram encontrados 14 resultados nessa pesquisa.

O primeiro trabalho indicado nessa plataforma tinha como objetivo analisar a estrutura e a forma de abordagem do conceito de fração nos livros didáticos, em relação ao 6º ano de ensino. O segundo trabalho tinha o foco voltado para as metodologias para o trabalho com fração. Os trabalhos restantes tinham as seguintes temáticas: Estratégias orais e escritas no contexto de resolução de problemas, especificamente no estudo da generalização de padrões; análise da matemática científica e escolar nos livros didáticos; estudos sobre a utilização do método de ensino de matemática de Georges Papy no Colégio de São Bento do Rio de Janeiro,

[2] Disponível em: https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/. Acesso em: 28 ago.2022.

estudo de fóruns para formação de professores a distância, análise de provas de cálculo, análise bibliográfica sobre as dissertações brasileiras que abordam sobre a função afim.

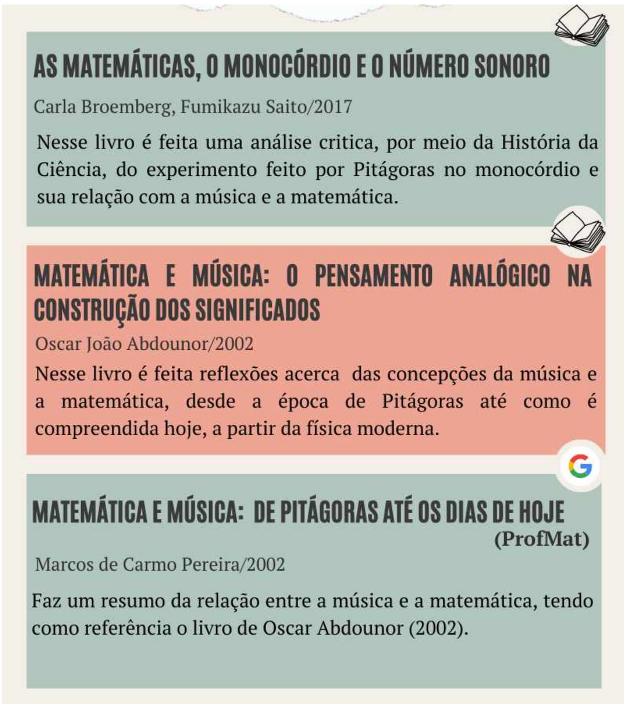
Mediante o que foi descrito, apenas 2 trabalhos abordavam o tema de frações, sem relacionar o ensino desse conceito com a música.

Devido a esse impasse, a pesquisadora decidiu pesquisar no Google Acadêmico, algumas dissertações que abordavam acerca da música e do experimento de Pitágoras com o monocórdio. Não foi utilizado nenhum critério de refinamento, apenas buscando a partir das palavras música, monocórdio, matemática.

Dentre os diversos resultados encontrados, o trabalho de Pereira (2002) serviu como base para entender algumas explicações e conceitos que não haviam ficado claros para a autora após a leitura do livro de Abdounor (2002), como por exemplo a formação das escalas pitagóricas, escala harmônica e as diferenciações com a forma atual concebida em relação aos sons e a música.

Na Figura 1, é apresentado os principais trabalhos que serviram de subsídio durante o início da pesquisa até o momento da qualificação do trabalho. Os dois primeiros livros são referenciais sugeridos por professores da mestranda e o último texto é a dissertação encontrada no Google Acadêmico. Na figura 1 é apresentada uma síntese sobre os trabalhos encontrados e analisados.

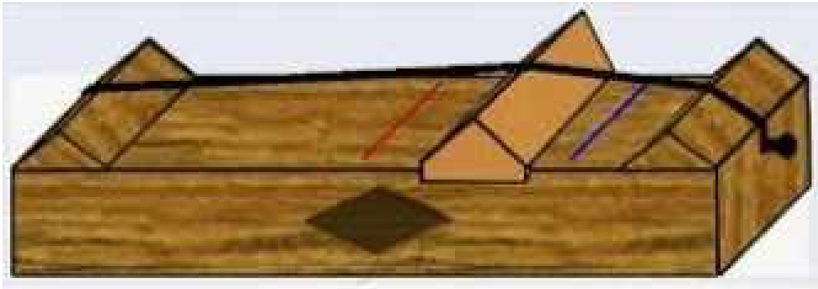
Figura 1: Relação de trabalhos com a temática: Frações e Música



Fonte: Elaborada pela autora

Como mencionado, os textos utilizados inicialmente tinham como foco o estudo das frações e a música, a partir do experimento musical de Pitágoras com o Monocórdio (Figura 2).

Figura 2: Como provavelmente era o Monocórdio



Fonte:<http://clubes.obmep.org.br/blog/aplicando-a-matematica-basica-construcao-de-um-monocordio>. Acesso em 04 ago. 2020.

Acerca do monocórdio, Broemberg (2016, p. 4) relata que:

> Lembremos que o contexto no qual está inserido o monocórdio é matemático aritmético. Neste sentido, na antiguidade clássica, o instrumento aproximava-se daqueles instrumentos matemáticos como os abacus, representando quantidades discretas. Contudo, o instrumento possuía a capacidade de replicar e demonstrar diagramas geométricos e na medida em estas quantidades fossem distâncias, na corda, as quantidades passariam a ser audíveis, conectando os objetos da aritmética aos da harmônica.

A proposta didática foi elaborada com o objetivo de explorar alguns significados da fração, fazendo uma comparação entre algumas notas musicais e o comprimento da corda. Entretanto, após o exame de qualificação desta pesquisa, o plano de ensino foi analisado, e percebeu-se que não seria possível concretizá-la tendo em vista as limitações do instrumento em estabelecer uma relação com as frações.

Assim, na continuidade dos estudos e ao investigar de forma aprofundada os indícios da fração na civilização egípcia (ROQUE, 2012) e a relação com a música naquela cultura, percebeu-se que os principais instrumentos utilizados pelos egípcios eram as flautas.

Decidiu-se então elaborar uma proposta que envolvesse a construção dos instrumentos musicais *Flauta*, *Flauta de Pan*, *Pau de Chuva* e *Ganzás*, de forma a possibilitar o diálogo entre a professora e os estudantes, abordando os seguintes significados da fração: medida, divisão, operador e razão, para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental.

A justificativa para escolha do 8º ano de ensino pautou-se no fato de a pesquisadora trabalhar há época, como contratada da Prefeitura Municipal de Uberlândia (PMU) e lecionar para este ano de ensino. Além disso, como o objetivo da professora era fazer um resgate dos significados de fração relacionando os diversos significados, era necessário que a proposta fosse elaborada para um ano de ensino que tivesse como objetivo consolidar e/ou aprofundar seus conhecimentos em relação ao conceito de fração.

No entanto, mediante o fato de a pesquisadora não conseguir renovação do seu contrato na PMU e ao contexto social da pandemia relacionada ao Covid-19 vivido em 2020 2021, a proposta foi realizada não com uma turma de 8ºano, mas com estudantes convidados, que estavam nesse ano de ensino.

A pesquisa foi orientada pela seguinte **pergunta**: *Que conhecimentos sobre fração são revelados por alunos de 8ºano do Ensino Fundamental ao construírem instrumentos musicais em aulas de matemática?*

Deste modo, essa pesquisa, tem como **objetivo geral** analisar quais são os conhecimentos sobre fração que dois alunos do 8º ano do Ensino Fundamental apresentam durante a construção de instrumentos musicais.

Os **objetivos específicos** foram organizados a partir dos seguintes aspectos: investigar e analisar se os sentidos estabelecidos por alunos sobre fração estão relacionados com os diversos significados culturalmente estabelecidos durante a história da humanidade; e, analisar e discutir os significados da fração ainda não apropriados pelos alunos.

A proposta foi estruturada por meio da resolução de problemas conforme Marco (2004), onde, os estudantes seriam desafiados a fazer análises, reflexões, elaborar estratégias e realizar sínteses para a solução das situações apresentadas pela professora. Além disso, utilizou-se de histórias em quadrinhos, Barbosa *et al.* (2004), para fazer a apresentação dos problemas que envolviam as construções dos instrumentos musicais. A autora escolheu esse gênero textual com o intuito de despertar a atenção dos estudantes, possibilitar a abordagem de diversas formas de representações, além de estimular a interpretação de dados.

A proposta foi realizada, com 2 alunos convidados, pertencentes a rede municipal de ensino, uma vez que a professora pesquisadora não estava atuando como docente naquele período em função da pandemia causada pelo vírus SARS-CoV-2 e não conseguiria uma turma para fazer o estudo empírico dessa proposta. Por ser uma proposta que envolveria, posteriormente, a aprendizagem de como tocar os instrumentos musicais que seriam construídos pelos estudantes, a sequência didática foi realizada de modo presencial, na casa da professora-pesquisadora, observando todos os protocolos de segurança que eram indicados pela Organização Mundial de Saúde (OMS) na época.

Em relação à organização, esse trabalho foi estruturado da seguinte maneira:

A seção 1 discorre acerca da resolução de problemas, traçando reflexões sobre o significado de problema e seus processos de resolução de acordo com Saviani (2000), Allevato (2005), Polya (1997) e Marco (2004).

A seção 2, apresenta um breve panorama em relação às histórias em quadrinhos, segundo Barbosa *et al.* (2004), seu desenvolvimento e contribuição com o ensino de Matemática.

A seção 3, faz uma exposição das frações em algumas civilizações antigas. Essa análise é feita a partir de referências bibliográficas que apontam as origens e os elementos essenciais do conceito de fração. Além disso, apresenta-se como a Base Nacional Curricular Comum (BRASIL, 2017) e as Diretrizes Curriculares Municipais - DCM (UBERLÂNDIA, 2018) abordam o conteúdo de frações na atualidade.

Na seção 4, é descrito o processo percorrido para a consolidação dos objetivos estabelecidos nessa pesquisa. Além disso, é apresentado a estrutura das histórias em quadrinhos elaboradas, ressaltando os objetivos de cada proposta. E a descrição acerca dos estudantes, dos recursos utilizados assim como das cenas de cada episódio da pesquisa.

Na seção 5, é feita uma descrição das cenas, de forma detalhada, como também uma análise das falas dos próprios estudantes na tentativa de entender quais conceitos de fração foram apropriados pelos estudantes a partir das situações propostas em forma de histórias em quadrinhos. Além disso, é feita a apresentação dos principais resultados encontrados.

Como produto dessa pesquisa, foi elaborado um material didático com uma proposta de ensino envolvendo fração e música, ancorada em pressupostos da resolução de problemas (MARCO, 2004),organizada sob a forma de histórias em quadrinhos (BARBOSA *et al.*, 2004), com intuito de contribuir com professores da Educação Básica em suas práticas de sala de aula e como incentivo a se colocarem no movimento de pesquisa em relação ao tema descrito neste trabalho.

1. Resolução de problemas e a Matemática

O objetivo dessa seção é trazer reflexões sobre o processo de resolução de problemas e sua relação com a aprendizagem de conceitos matemáticos. Para se alcançar esse fim, foi feito uma breve exposição acerca do processo histórico da origem e do desenvolvimento da resolução de problemas. São apresentadas diversas perspectivas sobre essa temática e suas relações com o ensino da matemática. Ao final, é estabelecida uma análise dessas perspectivas considerando suas especificidades e seus impactos nas práticas pedagógicas realizadas no coletivo pelo professor no ambiente escolar.

1.1. Concepções acerca do conceito de problema

Ao se deparar com reflexões acerca do significado do termo "problema", é do senso comum, que esse conceito seja associado com os seguintes aspectos: fazer um cálculo, descobrir algo desconhecido, dentre outras. Para analisar as diversas interpretações relacionadas a essa definição, buscou-se autores como Saviani (2000), Allevato (2005), Polya (1997) e Marco (2004).

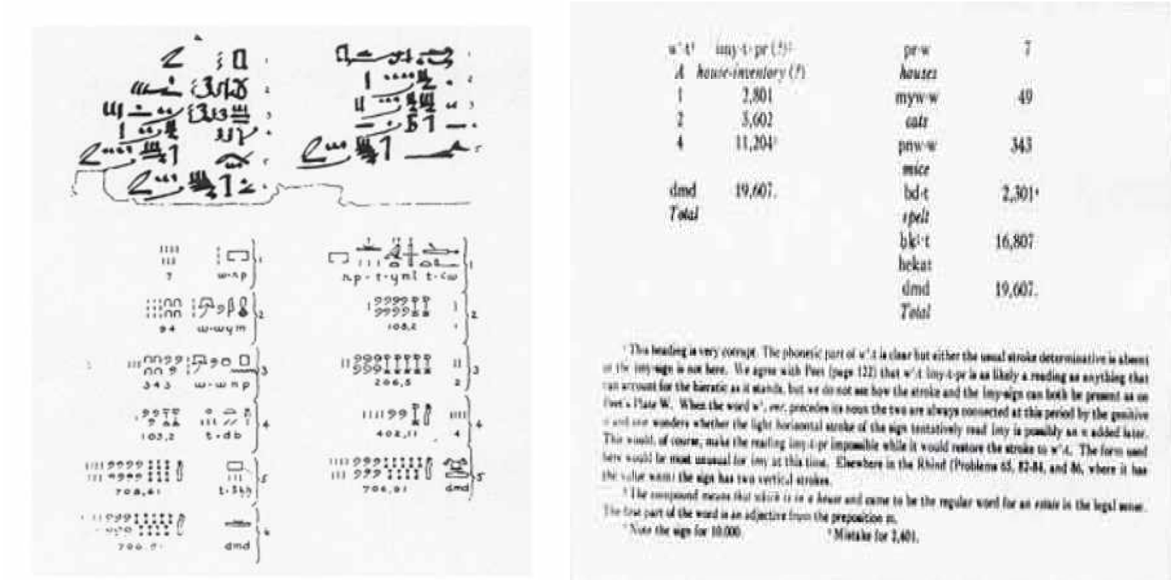
Concorda-se com Saviani (2000) que muitas pessoas fazem uma interpretação equivocada desse termo, reduzindo-o, muitas vezes, a uma resolução de exercícios.

> Com efeito se pergunto a um dos meus leitores "Quantos anos você tem?" parece claro que não estou lhe propondo uma questão e parece igualmente claro que isso não traz nenhuma conotação problemática...Não se conclua daí, todavia, que a especificidade do problema consiste no grau elevado de complexidade que uma questão comporta. (SAVIANI, 2000, p.2)

Percebe-se essa mesma redução do significado de problema até mesmo em registros relacionadas a Matemática, como Stanic e Kilpatrick (1989) demonstram:

> Num dos problemas (ver as Figuras 1 e 2), é pedido ao aluno que efectue a soma de cinco termos de uma progressão geométrica, onde o primeiro termo e a razão são ambos 7 (Chase, 1979, pp. 59, 136-137). No próprio papiro, só é dada uma forma abreviada do problema, com dois métodos de resolução e a resposta. O facto de o problema referir casas, gatos, ratos, etc., para serem adicionados, sugere que era um problema recreativo ou um puzzle (ver a Figura 1). (STANIC; KILPATRICK, 1989, p.2)

Figura 3: Imagem 1 e 2 citadas por Stanick, Kilpatrick



Fonte: Stanic e Kilpatrick (1989, p. 2)

Contrapondo essa ideia, esses mesmos autores declaram que alguns outros estudos abordam o conceito de problema como sendo algo desconhecido, como os dicionários definem “coisa inexplicável, incompreensível” (STANIC; KILPATRICK, 1989, p. 2). Entretanto, eles afirmam que mesmo essa explicação não incorpora todos os elementos essenciais que constituem o que é um problema.

> Quais os nomes de cada uma das ilhas Virgens (cerca de 53) do território do Mar das Antilhas incorporado aos Estados Unidos? Com certeza, o referido leitor não saberá responder a essas perguntas, e, mesmo é possível que nem sequer soubesse da existência das tais Ilhas Virgens. É evidente, contudo, que essa situação não se configura como uma problemática. (SAVIANI, 2000, p. 2).

Allevato (2005) traça algumas concepções apontadas pelos indivíduos para a definição do que é um problema. Para ela, os dois sentidos mais encontradas são: o problema ser reduzido a operações aritméticas ou a situações de quebra-cabeças, labirintos que envolvem o indivíduo ao desafio, a diversão e a frustração.

Allevato (2005) concorda com Onuchic (1999) quando esta defende que problema "[...] é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver" (ALLEVATO, 2005 apud ONUCHIC, 1999, p. 215). O “[...] problema não é um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória [...]". (ALLEVATO, 2005, p. 215).

Polya (1997, p. 16) destaca que "ter” um problema significa: “buscar conscientemente por alguma ação apropriada para atingir, um objetivo claramente definido, mas não imediatamente atingível, que seria fundamentado nos seguintes aspectos principais: a compreensão e a motivação pela descoberta". Complementando esse conceito, Polya (1997) afirma que: "O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver pelos seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta". (POLYA, 1997, p. 1).

Para Saviani (2000), os termos como questão, inexplicável, obstáculo, dificuldade em si mesmo não contemplam, necessariamente, uma situação problemática. Desse modo, ele reafirma a necessidade do resgate da essência do que é "problema" como produto das manifestações de necessidades humanas. "No processo de produção de sua própria existência, o homem defronta com situações ineludíveis, isto é: enfrenta necessidades cuja satisfação depende da continuidade da mesma...". (SAVIANI, 2000, p. 3).

Além disso, Saviani (2000) acredita que problema é algo que não se conhece e necessita conhecer. Ele aponta que essa necessidade precisa ter relação não somente com aspectos internos subjetivos associados com as circunstâncias externas que conduzem a percepção dessa necessidade. Esse processo é subdividido em dois aspectos: a conscientização de uma situação de necessidade (aspecto subjetivo) e como uma situação conscientizadora da necessidade (aspecto objetivo)". "Trata de uma necessidade que se impõe objetivamente e é assumida subjetivamente". (SAVIANI, 2000, p. 4).

Partindo da perspectiva que a Matemática é uma ciência em constante movimento e construída a partir de problemas históricos culturalmente relacionados às necessidades da humanidade (CARAÇA, 2000), entende-se, neste trabalho, problema conforme Marco (2004), ou seja, como um modo de "[...] envolver o aluno integralmente, em sua totalidade: a subjetividade do sujeito (consciente e inconsciente, sensações, percepções, afetividade) e intelecto." (MARCO, 2004, p. 11). Neste modo de compreender a resolução de problema há possibilidades de

> [...] ampliar a abordagem que Polya (1978) faz de resolução de problema, isto é, a ênfase dada ao aspecto cognitivo do pensamento, quando define as etapas de resolução como compreender o problema, elaborar um plano de ação, executar o plano, analisar a solução obtida para a combinação desses momentos com o anterior: o do inesperado, de não presença imediata das etapas. A combinação desse momento com o compreender o problema, sugerido por Polya, leva-nos a um novo olhar sobre os processos de pensamento dos alunos e, possivelmente, a novas metodologias de ensino. (MARCO, 2004, p.11).

Marco (2004) considera que os elementos essenciais do conceito de problema estão fundamentados em: inesperado, situação dilemática, que pode ou não ter uma solução alcançável e imediata.

> Por inesperado entendemos um momento nebuloso em que o sujeito depara-se com o problema e este passa a ser seu, ou seja, o sujeito envolve -se no problema com suas emoções e ansiedades, hesitações, alegrias, propiciando-lhe rever seus pensamentos e procurar analisá-los. (MARCO, 2004, p. 9).

Para essa autora, a situação dilemática se refere ao momento no qual as ideias se apresentam de uma forma desorganizada, necessitando de elaboração, o que vai culminar na formulação de possibilidades de solução. Trata-se de

> [...] uma manifestação de hesitação e dúvida, momento espontâneo do aluno que tem suas bases nas formas sensitivas do pensamento e surge da sua relação imediata do sujeito com o meio quando esse precisa resolver o problema e se encontra diante da escolha de possibilidades de solução. (MARCO, 2004, p. 24).

Mediante ao exposto, reafirma-se como fundamento dessa pesquisa, o problema relacionado à situação dilemática (MARCO, 2004), à inquietação, ao anseio pessoal que gera a necessidade de se colocar em um processo de tomadas de decisõese busca de soluções com objetivo pessoal. Desse modo, "[...] o problema não está elaborado cognitivamente, mas já atingiu nossas sensações, nossas emoções, em uma relação dilemática. Em outras palavras, a situação já exerceu um impacto sobre nossos sentimentos, nosso subjetivo." (MARCO, 2004, p. 9).

A partir destas reflexões, na próxima seção discute-se alguns aspectos históricos sobre a resolução de problemas na Matemática e perspectivas em torno dessa temática.

1.2. Algumas perspectivas da resolução de problemas no em ensino da matemática

Entender a resolução de problemas no âmbito do ensino da Matemática, para Onunchic e Allevato (2011), é ter um amplo olhar para a história da humanidade e suas concepções predominantes em determinado momento.

Concorda-se com as autoras acima, que as diferentes abordagens de ensino e o currículo estão diretamente relacionadas aos aspectos políticos, sociais, filosóficos e culturais em cada momento.

Stanic e Kilpatrick (1989) destacam a visão limitada, até mesmo hoje em dia, acerca da resolução de problemas que, muitas vezes, é relacionada a solucionar problemas por meio de algum tipo de técnica ou estratégia. De fato, o panorama atual é somente resultado das diversas transformações sociais e culturais que a humanidade passou durante o tempo.

> O papel da resolução de problemas na Matemática escolar é o resultado do conflito entre forças ligadas a ideias antigas e persistentes acerca das vantagens do estudo da Matemática e uma variedade de acontecimentos que

> se influenciaram uns aos outros e que ocorreram no princípio do séc. XX. (STANIC; KILPATRICK, 1989, p. 7).

Onunchic e Allevato (2011) explicam que durante o século XIX para XX, entendia-se a aprendizagem humana a partir do processo de teoria mental, onde acreditava-se que o conhecimento era transferido a partir do desenvolvimento de algumas habilidades mentais. Além disso, segundo Stanic e Kilpatrick (1989), acreditava-se que o estudo da Matemática era o potencializador para o avanço do pensamento.

> [...] desde pelo menos Platão, temos a ideia que, estudando Matemática, melhoramos as capacidades de pensar, raciocinar e resolver problemas com que nos confrontaremos no mundo real. Num certo sentido, a resolução de problemas nos currículos foi simplesmente um meio de conseguir que os alunos estudassem Matemática. Os problemas foram um elemento do currículo de Matemática que contribuiu, tal como outros elementos, para o desenvolvimento do poder de raciocinar. (STANIC; KILPATRICK, 1989, p. 8)

Com os pressupostos da época da Revolução Industrial, voltados a incentivar os indivíduos na efetividade de produções dos seus trabalhos, em sua maioria, relacionados ao modelo fordista, Onunchic e Allevato (2011) destacam que o ensino de Matemática foi reorientado nessa perspectiva, tendo como aporte a teoria do Conexionismo de Edward Lee Thorndike, que segundo Stanic e Kilpatrick (1989) não rejeitou completamente a ideia da disciplina mental, mas sim ampliou em uma nova significação.

> De acordo com essa teoria toda aprendizagem consiste de adição, eliminação, de organização de conexões... O processo de ensino dessa teoria compreende os seguintes passos: 1. Lei do efeito; 2. Lei da prontidão ou da maturidade específica; 3. Lei do exercício ou da repetição (ONUNCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 7).

Segundo Stanic e Kilpatrick (1989), a Matemática ainda era considerada uma ciência importante, entretanto, o foco se voltou para a aprendizagem de conhecimentos que seriam utilizados na vida cotidiana, "os problemas deveriam ser pensados de modo que as perguntas feitas não tivessem respostas sem sentido para a vida..." (ONUNCHIC; ALLEVATO, 2011, p.11). Além disso, para essas autoras, o ensino em sua maioria se reconfigurou de forma mecânica e repetitiva.

Entretanto, novas formas de se entender a construção do conhecimento surgiram para se contrapor a um ensino repetitivo e, dentre elas, a teoria significativa, de Brownell (ONUNCHIC; ALLEVATO, 2011). Nesse momento, segundo Stanic e Kilpatrick (1989), a resolução de problemas foi vista da perspectiva da arte, assim como defendida por Polya (1997).

Esses autores afirmam que Polya (1997) entendia que a Matemática consistia em informação e em saber fazer que a resolução de problemas era considerada como uma arte. Stanic e Kilpatrick (1989) afirmam que a visão apresentada por Polya (1997) não era baseada em estratégias de mecanização, mas em formas nas quais o professor poderia conduzir os alunos a realmente compreender todo processo de resolução de problemas. Afirmam, ainda, que Polya (1997) sugeria a utilização de problemas rotineiros para auxiliar nessas analogias e que o ideal eram "problemas não rotineiros".

Polya (1997) defendia que o papel do professor era levar para a sala de aula situações que pudessem promover a criatividade e a investigação dos alunos acerca de um determinado problema, pois a Matemática seria "[...] uma oportunidade única, que ficará evidentemente perdida se ele considerar esta matéria como uma disciplina com que precisa obter tantos créditos e a qual deverá esquecer, o mais rápido possível, assim que passar pelas provas finais." (POLYA, 1997, p. 1).

Para Polya (1997), o estudante precisa desenvolver o prazer pela resolução de problemas na Matemática e sugere que sejam apresentados problemas compatíveis, que possam estimular suas capacidades inventivas, e "[...] as motivações e procedimentos da resolução e procurando explicar a outros essas motivações e esses procedimentos [...]". (POLYA, 1997, p. 2).

Além disso, o autor acima, ressalta um aspecto importante da resolução de problemas que é: ser uma característica comum da natureza humana desencadeada por motivos interpessoais ou por situações externas do seu cotidiano.

> Resolver problemas é da própria natureza humana. Podemos caracterizar o homem como o 'animal que resolve problemas'; seus dias são preenchidos com aspirações não imediatamente alcançáveis. A maior parte de nosso pensamento consciente é sobre problemas; quando não nos entregamos a simples contemplação, ou devaneios, nossos pensamentos estão voltados para algum fim. (POLYA, 1997, p. 2).

Atualmente, a perspectiva de Allevato (2005), tem suas concepções fundamentadas no ensino da matemática através da resolução de problemas, a partir dos processos históricos científicos, conforme defende Santos (2000) e em aspectos cognitivos, segundo Schoenfeld (1989). Todos esses aspectos devem estar interligados com o objetivo de criar sentidos nas ações em relação ao desenvolvimento da aprendizagem em Matemática. Os aspectos acima, contribuíram para uma nova forma de olhar a resolução de problemas como uma metodologia de ensino que, segundo Onuchic (1999), tem como objetivo orientar a atividade de aprendizagem. Assim,

> [...] o problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. Sob esse enfoque, problemas são propostos

> ou formulados de modo a contribuir para a formação dos conceitos antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática formal (ONUCHIC, 1999, p. 207).

Allevato (2005) se identifica com Onuchic (1999) que afirma que verdadeira força da resolução de problemas não se restringe ao domínio de técnicas ou procedimentos, mas se preocupa em investigar, analisar e resgatar aos princípios da matemática assim como os processos de sua construção, seus fins e aplicações no cotidiano.

Em relação à forma como se deve desenvolver a resolução de problemas em sala de aula Allevato (2005), baseada em Campbell (1996) e em alguns pressupostos organizados por Van de Walle (2001), defende um movimento que se configura em alguns aspectos relacionados ao construtivismo.

Em trabalho anterior acerca das sugestões apresentadas por Van de Walle (2001), Allevato (2005) incentiva a se proceder da seguinte forma:

> [...] professor apresente o problema por escrito aos alunos e, durante alguns minutos, os grupos trabalhem sem nenhuma intervenção do professor; tampouco o professor lê com eles o problema (os alunos devem ser orientados, logo no início, de que esse será o procedimento adotado). Durante o tempo em que os alunos lêem e procuram interpretar e resolver o problema, o professor apenas observa. Procura perceber a forma como discutem, que dificuldades encontram, que sugestões oferecem e que procedimentos adotam. Procura também avaliar o nível de participação de cada aluno na realização da atividade. (ALLEVATO, 2005, p. 64).

Mediante o exposto, é importante reconhecer a relevância que Polya (1997) teve no processo de desenvolvimento das ideias sobre resolução de problemas, como também os avanços que Allevato (2005) defende em relação ao aspecto da resolução de problemas como uma metodologia.

Para Allevato (2005), a resolução de problemas é uma abordagem que possibilita a conexão com a Matemática, uma vez que esta é uma manifestação humana decorrente das necessidades encontradas em diversas situações do dia a dia, e por isso uma linguagem universal. Ela ainda compara os problemas como um processo dinâmico assim como foi a elaboração dos conceitos matemáticos.

Marco (2004) afirma que a resolução de problema decorre do movimento do sujeito em um processo de problematização, que decorre a partir de situações de incerteza gerada por uma necessidade pessoal ou coletiva. A autora esclarece que é nesse momento que o sujeito se coloca na ação de buscar, analisar e traçar estratégias tendo um objetivo definido e, entende estratégia como "[...] o processo de movimento do pensamento que envolve a análise de variáveis encontradas em um problema ou jogo, estabelecendo relações entre elas de modo a traduzir-se em uma jogada." (MARCO, 2004, p. 9).

A autora defende que a resolução de problemas é uma manifestação a partir de um conjunto de fatores internos e externos em harmonia, analogamente se compara a um corpo no qual todos os membros são essenciais para seu funcionamento e têm influências um ao outro.

Para Marco (2004), esses fatores internos e externos são:

a) Uma situação de hesitação e impasse que necessita de conhecimentos diversos (matemáticos ou não).

b) Estabelecimento, por parte do aluno, de reflexões e investigações na busca da criação de processos próprios de resolução.

c) Ampliação de novos conhecimentos pelo sujeito.

Acerca da construção das situações dilemáticas, Marco (2004) aponta a necessidade que essas possuam como objetivo elementos que possam desencadear no sujeito o desenvolvimento da criatividade, reconstrução de conceitos e reordenação lógica, sendo o professor o organizador da proposta e o estudante, o investigador.

> A resolução de problema, nessa perspectiva, é vista como uma situação na qual o problema é desencadeador do processo de aprendizagem, uma vez que o aluno está inserido em um movimento de pensamento e elaboração de conhecimentos, visando resolver o problema enfrentado, por meio da utilização de conceitos matemáticos. (MARCO, 2004, p. 2)

Nesse sentido, para o processo de resolução de problemas, Marco (2004) afirma ser importante que o estudante reavalie constantemente suas estratégias, analisando e avaliando seus possíveis erros.

Essa mesma autora também afirma que o contexto não deve ser entendido à parte do sujeito e vice e versa, mas em uma organização conjunta onde situações dilemáticas conduzam o estudante a se conscientizar da sua necessidade de estar naquele movimento, de participar e de solucionar aquele problema. Assim, "[...] não são todas as necessidades sentidas pelo aluno que se caracterizam por problemas, mas sim aquelas que causam desafio e despertam interesse em querer resolvê-las e que, ao resolvê-las, sente-se prazer e realização, como ao vencer um jogo." (CORBALÁN, 1994 apud MARCO, 2004, p. 21).

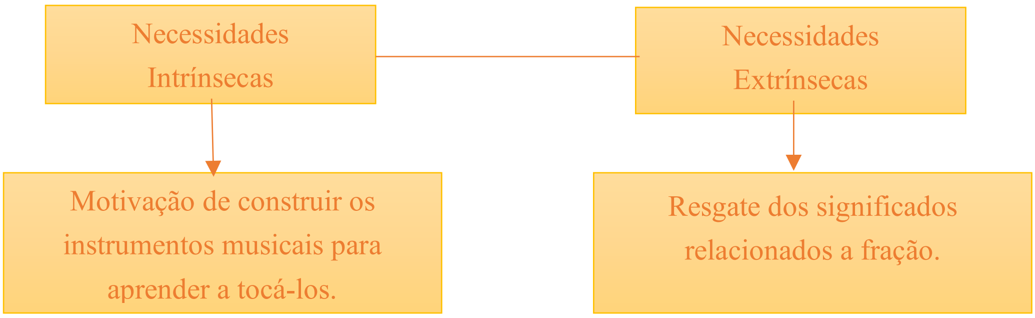
Mediante a exposição apresentada em relação a resolução de problemas, percebe-se que Polya (1997) apresenta o foco nas estratégias e nos desafios propostos, Allevato (2005) considera o problema como disparador dos conceitos matemáticos, enquanto Marco (2004) amplia essas perspectivas considerando que, para a resolução de problemas de fato se efetive, é necessário que o olhar do professor esteja pautado nas necessidades individuais e coletivas de seus alunos para que o processo se desenvolva para uma aprendizagem rica em significados.

Pode-se inferir que Marco (2004) e Poyla (1997) entendem que a resolução de problemas tem como uma de suas características a natureza humana desencadeada por motivos interpessoais ou por situações externas do seu cotidiano.

Allevato (2005) aponta a importância da relação entre o sujeito com o objeto, entretanto, seu foco está voltado em analisar os sentidos construídos a partir da resolução de problemas.

Diante do exposto, esta pesquisa fundamenta-se nas ideias de Marco (2004) acerca de resolução de problemas, tendo em vista que essa perspectiva considera questões intrínsecas, ou seja, anseios e motivações pessoais aliado as necessidades extrínsecas, ou seja, externas do próprio contexto social. Assim, sintetizamos estas ideias por meio da figura 4:

Figura 4: Fatores que motivaram a resolução de problemas dessa pesquisa



Fonte: Elaborado pela autora

Conforme mostrado na figura 4, as necessidades que mobilizaram o processo da resolução de problemas nessa pesquisa foram a proposição pela pesquisadora de problemas que viessem ao encontro com desejos pessoais dos estudantes, como o de aprender a tocar algum instrumento musical, e o resgate de significados do conceito de fração.

Além disso, escolheu-se trazer os problemas organizados na forma de história em quadrinhos, por sua estrutura permitir aliar a linguagem textual e visual de modo que pode despertar dos estudantes o interesse e a imaginação, além de contribuir para a interpretação das situações descritas na narrativa das HQ's.

Além disso, a estruturação das histórias em quadrinhos nessa pesquisa teve como objetivo construir uma narrativa que pudesse refletir um pouco do processo que seria desencadeado, posteriormente, com os estudantes na construção de instrumentos musicais e discutir alguns elementos essenciais do conceito de fração: medida, divisão, razão e operador.

Dessa forma, justifica-se a importância da próxima seção, a qual tem como objetivo discorrer sobre a História em Quadrinhos fundamentada em Barbosa *et al*. (2004) e sua importância no processo de ensino e aprendizagem em sala de aula.

2. História em Quadrinhos

O objetivo dessa seção é traçar algumas reflexões teóricas acerca das histórias em quadrinhos e sua utilização no ensino, especificamente no de Matemática. Para isso, será feito uma revisão trazendo clareza sobre as diferenças entre as terminologias charges e cartuns, além do aprofundamento de aspectos em relação à história em quadrinhos e sua configuração até o formato atual. Além disso, será discorrido sobre as circunstâncias e os desafios enfrentados na utilização desse recurso no processo de ensino e aprendizagem, tendo como base os relatos históricos, além de apontar algumas considerações para o uso das histórias em quadrinhos nas aulas de Matemática.

2.1. Reflexões acerca do desenvolvimento das histórias em quadrinhos

Tendo como objetivo traçar considerações acerca do significado da história em quadrinhos, buscou-se referenciais teóricos que pudessem auxiliar no esclarecimento das características desse gênero literário, uma vez que muitas vezes é associada como sendo charges, cartuns e quadrinhos. Apesar de possuir algumas características semelhantes com os termos anteriores, faz-se necessário averiguar suas distinções e objetivos diferentes que cada um possui dentro das manifestações culturais humanas. Para esse fim, foi selecionado Campos e Pietry (2018), Silva (2006) para a realização dos estudos.

Em relação às charges, Campos e Pietry (2018), propõe a sátira como elemento fundamental e obrigatório, de forma a integrar a situação e os indivíduos. Ampliando essa explicação, Silva (2006) afirma que o exagero na charge é uma forma de ter o poder de criar e destruir ícones nas áreas política, religiosa, esportiva, social etc. A charge impõe uma “opinião”, interpretando os fatos em imagens, misturando pessoas (parte social) e a situação (cenário).

Segundo (CAMPOS; PIETRY, 2018) esse gênero foi influenciado a partir do surgimento da caricatura que possuía como foco no sujeito, com objetivo de evidenciar de forma exagerada, expressões humanas, com o objetivo de comunicar, o riso, ou outros humores.

> Uma charge trata, portanto, de acontecimentos cotidianos com personagens conhecidos, a partir de traços que desejam ironizar atitudes, questionar ideias e comportamentos que de maneira geral partem da esfera pública da sociedade e alcançam significação no âmbito privado, porque invocam posicionamentos e apreendem relações desenvolvidas em diferentes cenários de um mesmo tempo, o presente. (CAMPOS; PIETRY, 2018, p. 123).

Além disso, esses mesmos autores, citados anteriormente, apresentam que tanto as charges como as caricaturas têm a seguinte dimensão temporal: o presente!

Ampliando essa discussão, Campos e Pietry (2018) indicam uma expressão gráfica de humor mais ampla que reuniria não somente sujeitos e situações, mas também uma narrativa de uma história de forma cômica: os cartuns. Nesse gênero, pode-se haver a fusão do presente e passado na representação da narrativa.

> [...] cartum provém do inglês "cartoon", papelão duro, cartão (pequeno projeto em escala, desenhado em cartão para ser produzido depois em mural ou tapeçaria). Esse termo surgiu talvez devido a um projeto, sob forma de cartão, encomendado pelo príncipe Albert, em 1841, para os novos murais do Palácio de Westminster. (SILVA, 2006, p. 4)

Silva (2006) complementa as características do cartum, apontando que além de ser uma narrativa humorística, de uma cena apenas ou uma sequência de cenas, pode ter alguns elementos das histórias em quadrinhos como balões, onomatopeias, títulos etc.

Tendo todos esses gêneros listados acima, compreende-se que:

> [...] consideramos que toda a produção gráfica de humor "interage com o processo histórico em que se constitui. Ela é dinâmica, sendo sempre reiterada e atualizada"28 pelo contexto e práticas dos sujeitos que a envolvem e a ela estão circunscritos, tornando-se, portanto, um meio de tradução cultural e representação sobre a história. (CAMPOS; PIETRY, 2018, p. 131).

Em relação às histórias em quadrinhos, Silva (2006) as define como uma sequência de uma narrativa formada de um conjunto de uma linguagem verbal com a não verbal, com personagens fixos. Pode ser feita numa tira, numa página ou em duas, ou em várias páginas (revista ou álbum). Pode ser atemporal, temporal, regional, científica, entre outros.

Concorda-se com Barbosa *et al.* (2004) que as histórias em quadrinhos possuem na atualidade, um grande alcance popular, que demonstra as seguintes características: a) facilidade financeira; b) linguagem mais próxima ao cotidiano; e, c) facilidade da reprodução desse gênero textual.

Todos esses avanços tiveram como influências, a globalização, movimento humano gerado pela necessidade do descobrimento de novas terras e outras culturas que proporcionou a aproximação com diversos conhecimentos e pessoas assim como estreitou as relações de comunicação com indivíduos de outras localidades, em conjunto com o desenvolvimento das tecnologias.

Como demonstrado por Barbosa *et al.* (2004), a partir dos registros históricos da humanidade, alguns desafios ainda encontrados no dia a dia, na utilização desse recurso no ensino escolar como também na vida cotidiana, se devem ao fato de algumas ideologias construídas historicamente.

> Pais e mestres desconfiavam das aventuras fantasiosas das páginas multicoloridas das HQs, supondo que elas poderiam afastar crianças e jovens de leituras "mais profundas", desviando-os assim de um amadurecimento "sadio e responsável". Daí, a entrada dos quadrinhos em sala de aula encontrou severas restrições, acabando por serem banidos, muitas vezes de forma até violenta, do ambiente escolar. (BARBOSA *et al.*, 2004, s/p.)

As necessidades humanas que conduziram a necessidade da criação da história em quadrinhos, têm como princípio, segundo o autor acima, a comunicação a partir da imagem gráfica. Além disso, os autores também afirmam que a expressão da comunicação a partir de imagens se remontam aos tempos primitivos, através das pinturas rupestres.

Figura 5: Pintura rupestre registrando uma caçada

Fonte: https://tconline.com.br/mais-antigas-pinturas-rupestres-feitas-pelo-homo-sapiens-sao-achadas-na-indonesia/. Acesso em 07/04/2022.

Tendo em vista a necessidade humana de registrar os acontecimentos do seu cotidiano, como as caçadas, como também registrar suas percepções, se utilizava da arte como forma de manifestar o que era para si mais relevante e traria mais satisfação pessoal.

> Assim, quando o homem das cavernas gravava duas imagens, uma dele mesmo, sozinho, e outra incluindo um animal abatido, poderia estar, na realidade, vangloriando-se por uma caçada vitoriosa, mas também registrando a primeira história contada por uma sucessão de imagens. (BARBOSA *et al.*, 2004, s/p.)

Destaca-se que essa manifestação humana, não se limita aos tempos da antiguidade, mas mesmo atualmente é parte da natureza humana transmitir suas impressões do mundo a partir de desenhos ou pinturas, como o autor acima exemplifica o fato das crianças começarem desde muito cedo a fazer rabiscos na tentativa de representar seus pais, seus irmãos e seus amigos buscando assim, estabelecer uma forma de comunicação.

Conforme o avanço e o estabelecimento de alguns povos em conviver como nômades, sem um lugar fixo de estabelecimento, Barbosa *et al.* (2004) afirmam que surgiu a necessidade de gravar esses registros não em cavernas, mas em algum tipo de material que fosse de fácil deslocamento como por exemplo o papiro, peles de animal ou pergaminhos. Além disso, a partir do rearranjo dos indivíduos em sociedades, houve a necessidade do desenvolvimento da expressão dos pensamentos a partir também da forma escrita, ficando a comunicação visual como recurso secundário.

> [...] nível de abstração entre o objeto e seu símbolo representou um avanço extraordinário para a humanidade, pois o novo sistema permitiu ampliar quase que ao infinito as possibilidades de composição e transmissão de mensagens e atingir um grau de comunicação que o desenho, isoladamente, não conseguia atingir. (BARBOSA *et al.,* 2004, s/p)

Deve-se ressaltar que, segundo Barbosa *et al.* (2004), apesar de a escrita assumir grande importância na sociedade, tanto o processo de aprendizagem da leitura como o ensino da escrita ocorreram de modo gradual, devido ao fato da elite ser a classe que tinha mais o acesso inicialmente. Com isso, a maior parte da população por um tempo, utilizou a imagem como principal elemento de comunicação e ainda é possível se perceber sua relevância na atualidade.

A comunicação, por meio da reprodução da escrita, era feita de forma limitada, cujo acesso era restrito a pequenos grupos de pessoas, geralmente escribas e, de certa forma, eram modos mais simples de realização do processo de impressão. O desenvolvimento da imprensa, como se conhece hoje, surgiu a partir da criação de Johann Gutenberg (século XIX), com a criação de um dispositivo técnico permitia a cópia de textos com maior facilidade e dessa forma contribuiu para a impressão de diversos livros, tendo como destaque na história, o primeiro livro impresso: a Bíblia.

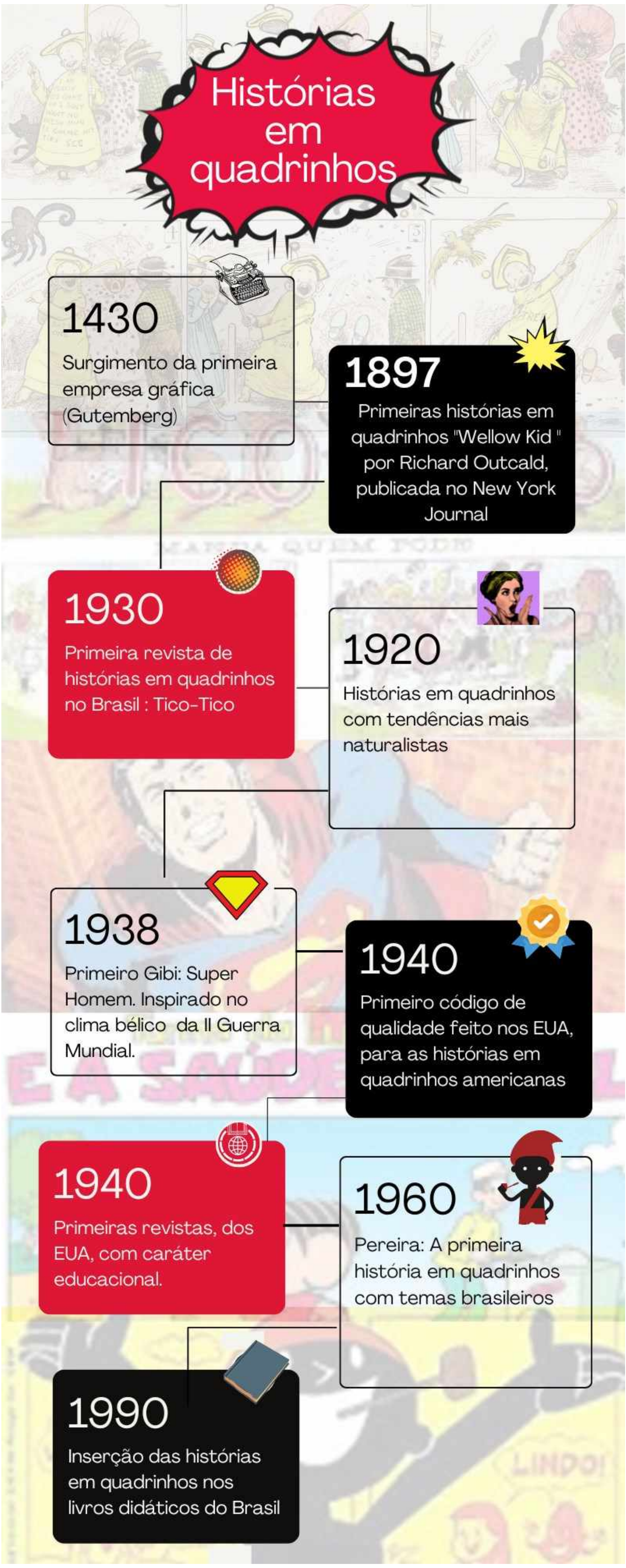
Barbosa *et al.* (2004) complementam esse aspecto, apontando que o fato da imprensa ter um papel relevante na sociedade, não impediu que a imagem gráfica ainda não tivesse um papel considerável na comunicação humana.

A Figura 5 foi elaborada pela autora com base no infográfico[3], que aponta, segundo as análises feitas, os principais marcos ou acontecimentos importantes em relação às Histórias em Quadrinhos.

---

[3] Infográfico é um conteúdo explicativo que une informações verbais e visuais, transmitindo dados e conceitos de forma fácil. Isso garante o entendimento do leitor mesmo em temas complexos. Fonte: https://rockcontent.com/br/blog/infografico/#:~:text=Infogr%C3%A1fico%20%C3%A9%20um%20conte%C3%BAdo%20explicativo,de%20m%C3%ADdia%20em%20sua%20produ%C3%A7%C3%A3o. Acesso em 28 ago. 2022.

Figura 6: O desenvolvimento das Histórias em Quadrinhos



Fonte: Elaborado pela autora

Para Barbosa *et al.* (2004), outro fator importante para o surgimento da história em quadrinhos foram as comunicações de notícias veiculadas a partir do jornalismo e, nos Estados Unidos, devido ao desenvolvimento tecnológico e social avançados.

Em relação à forma, Barbosa *et al.* (2004) apontam a evolução do designer gráfico, no qual as histórias em quadrinhos passaram a ser representações cada vez mais fiéis à realidade.

Concorda-se com os autores que as histórias em quadrinhos, assim como outros gêneros textuais, refletem ideologias e concepções que podem influenciar vários indivíduos da sociedade. Um exemplo demonstrado pelos autores, se refere às histórias em quadrinhos que eram publicadas nos EUA e incentivaram o estilo de vida americano.

Em relação às histórias em quadrinhos no Brasil, estudos apontam o desenvolvimento de charges e cartuns desde 1837. Entretanto, o destaque principal apontado por Barbosa *et al.* (2004), foi a partir da publicação da revista "Tico-tico" por Renato de Castro.

Figura 7: Revista Tico-tico

Fonte: https://www.bn.gov.br/explore/curiosidades/acervo-tico-tico-mais-importante-revista-voltada-publico. Acesso em 09 abr. 2022.

De acordo com Novel[4] (s/d) a primeira revista em quadrinhos com personagens e temas brasileiros surgiu 10 anos depois chamada: Pererê.

[4] Disponível em: https://darkside.blog.br/mais-de-150-anos-das-historias-em-quadrinhos-no-brasil/#:~:text=No%20Brasil%2C%20a%20primeira%20hist%C3%B3ria,na%20revista%20semanal%20Vida%20Fluminense. Acesso em 10 jul. 2022.

Figura8: Revista Pererê

Fonte: http://www.guiadosquadrinhos.com/edicao/turma-do-perere-a-n-1/tpr0031/12494. Acesso 09 abr. 2022.

Destaca-se um pouco da história em quadrinhos no Brasil, devido a importância de fazermos referência à literatura nacional e seu desenvolvimento é importante na cultura brasileira.

Outro evento de extrema importância, que influenciou nas temáticas das histórias em quadrinhos, foram a Segunda Guerra Mundial e a Guerra Fria, conforme apresenta Barbosa *et al.* (2004).

> A Segunda Guerra Mundial ajudou a multiplicar essa popularidade, com o engajamento fictício dos heróis no conflito bélico e seu consumo massivo por grande parte dos adolescentes norte-americanos. (BARBOSA *et al.,* 2004, s/p).

Figura 9: Exemplo de histórias em quadrinhos baseada na II Guerra Mundial

Fonte: https://historiaemrede.medium.com/os-super-her%C3%B3is-como-propaganda-de-guerra-os-quadrinhos-e-a-segunda-guerra-mundial-d5f8ec91d94. Acesso em 08 abr. 2022.

Além disso, segundo o autor, outro impacto importante nas histórias em quadrinhos dessa época, eram que temáticas de gostos duvidosos traziam representações extremamente realistas que atraiam os adolescentes e jovens fazendo alguns defenderem que esse gênero trazia efeitos maléficos à juventude norte-americana. Um exemplo disso, segundo Barbosa *et al.* (2004), era as campanhas que Fredric Wertham, psiquiatra alemão, fazia nos EUA.

> [...] utilizando-se de exemplos escolhidos a dedo e com rigor científico questionável, o psiquiatra tentava provar como as crianças que recebiam influência dos quadrinhos apresentavam as mais variadas anomalias de comportamento, tornando-se cidadãos desajustados na sociedade. (BARBOSA *et al.,* 2004, s/p).

Por causa de fatores como esse, os autores afirmam que os produtos da indústria de quadrinhos passaram a ser vistos por uma "vigilância rigorosa" por parte da sociedade, além de acreditar que "[...] sua leitura afastava as crianças de "objetivos mais nobres" – como o conhecimento do "mundo dos livros" e o estudo de "assuntos sérios" –, que causava prejuízos ao rendimento escolar." (BARBOSA *et al.,* 2004, s/p).

Esses tipos de concepções acerca da história em quadrinhos começaram, segundo Barbosa *et al.* (2004), a trazer uma visão distorcida em relação a sua funcionalidade para o ensino e aprendizagem como o embotamento do raciocínio lógico, dificuldade para apreensão de ideias abstratas e o mergulho em um ambiente imaginativo prejudicial ao relacionamento social e afetivo de seus leitores.

Dessa forma, a *Comics Magazine Association of América* começou a elaborar um código mais detalhado, de forma a garantir a qualidade interna. Dessa mesma maneira, Barbosa *et al.* (2004) afirmam que o Brasil criou um código próprio e aplicou às revistas, como a mencionada pelos autores.

> 9. São proibidas pragas, obscenidades, pornografias, vulgaridades ou palavras e símbolos que adquiram sentido dúbio e inconfessável (BARBOSA *et al.,* 2004, s/p)

Concorda-se com Barbosa *et al.* (2004) acerca das interpretações equivocadas acerca das histórias em quadrinhos, baseada em fundamentos que não foram muito analisadas na época, pois:

> [...] entendeu-se que grande parte da resistência que existia em relação a elas, principalmente por parte de pais e educadores, era desprovida de fundamento, sustentada muito mais em afirmações preconceituosas em relação a um meio sobre o qual, na realidade, se tinha muito pouco conhecimento. (BARBOSA *et al.,* 2004, s/p).

Entretanto, não se pode descartar, que até mesmo na época atual existe em todos os gêneros textuais, algumas publicações que não possuem tanta preocupação com os aspectos morais.

Defende-se, neste estudo que, independentemente de qual fim as histórias em quadrinhos tenham (educacional, lazer...) é preciso haver uma preocupação com a questão ética e moral e pela experiência da própria pesquisadora até o presente momento, a maioria das histórias em quadrinhos abordadas no ensino tem esse cuidado no seu processo de elaboração. O gênero textual em si não possui nenhum malefício, o grande problema é o ser humano que muitas vezes elabora narrativas apelativas e que ferem a questão moral.

Voltando ao processo de inclusão das histórias em quadrinhos no âmbito educacional, Barbosa *et al.* (2004) apontam que o desenvolvimento das ciências da comunicação no século XX, fez com que os meios de comunicação fossem analisados a partir de suas características singulares de modo a compreender melhor seu impacto na sociedade, e dessa forma, as histórias em quadrinhos passaram a ser vistas com um novo olhar ampliado para as possibilidades desse recurso auxiliar o professor na elaboração de propostas de ensino e aprendizagem.

Segundo esses autores, dentre os aspectos pedagógicos utilizados acerca das histórias em quadrinhos, pode-se destacar: a) a aplicabilidade em temáticas voltadas à educação, retratando vidas exemplares; b) como instrumento de transmissão de ideologias; c) como recurso didático para o treinamento dos militares; e, d) abordagens de temas escolares de forma lúdica.

A maneira como iniciou a inserção das histórias em quadrinhos na educação, segundo Barbosa *et al.* (2004), foi inicialmente para ilustrar aspectos textuais dos livros didáticos. Entretanto, conforme o tempo foi passando os professores começaram a utilizar as histórias em quadrinhos para abordagem, discussão e análise de conteúdos em sala de aula.

Foi a partir desse movimento, segundo os autores mencionados anteriormente, que muitos órgãos oficiais da educação começaram a reconhecer a importância da história em quadrinhos no ensino, como por exemplo, nos seguintes documentos brasileiros: Lei de Diretrizes e Bases da Educação Básica (BRASIL, 1996), Parâmetros Nacionais Curriculares (BRASIL, 1998) e Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018).

> Conhecimento e competência de leitura das formas visuais em diversos meios de comunicação da imagem: fotografia, cartaz, televisão, vídeo, histórias em quadrinhos, telas de computador, publicações, publicidade, design, desenho animado etc. (BRASIL, 1998, p. 67).

> (EF15LP14) Construir o sentido de histórias em quadrinhos e tirinhas, relacionando imagens e palavras e interpretando recursos gráficos (tipos de balões, de letras, onomatopeias). (BRASIL, 2018, p. 99).

Diante do exposto, no próximo tópico será discorrido acerca da do uso das histórias em quadrinhos no ensino, mas especificamente na matemática.

2.2. As histórias em quadrinhos no ensino

Muitos estudos e pesquisas, tratam acerca de que maneira pode-se abordar a história em quadrinhos no ensino. De acordo com Barbosa *et al.* (2004), não existem regras definidas para a utilização das histórias em quadrinhos em sala de aula. Entretanto, eles apontam alguns cuidados que o professor deverá tomar ao utilizar esse recurso.

Concorda-se com esses autores que o primeiro aspecto relevante para essa prática deve ser a iniciativa do professor em estabelecer objetivos específicos em relação ao ensino e aprendizagem.

Acerca de em quais momentos da aula, as histórias em quadrinhos, podem ser utilizadas, Barbosa *et al.* (2004) sugerem:

> [...] tanto podem ser utilizados para introduzir um tema que será depois desenvolvido por outros meios, para aprofundar um conceito já apresentado, para gerar uma discussão a respeito de um assunto, para ilustrar uma ideia, como uma forma lúdica para tratamento de um tema árido ou como contraposição ao enfoque dado por outro meio de comunicação. (BARBOSA *et al.,* 2004, s/p).

Complementando essas considerações, os autores também apontam a necessidade de no seu planejamento, o professor considerar as características da faixa etária, do conhecimento e da compreensão do curso, podendo esse gênero textual ser utilizado alternadamente com alguns outros recursos didáticos.

Entretanto, Barbosa *et al.* (2004) não apoiam o uso das histórias em quadrinhos como apenas uma atividade de relaxamento, podendo-se comparar com a mesma sugestão apresentada por Grando (2000), de que os jogos não devem ser utilizados somente com uma intencionalidade do "jogar por jogar", mas com objetivos voltados para contribuir no desenvolvimento da aprendizagem dos estudantes.

Outra ressalva importante feita por Barbosa *et al.* (2004) é de não haver uma:

> [...] valorização excessiva das histórias em quadrinhos pelo professor, principalmente no momento de sua utilização – como se elas dessem a resposta desejada para todas as dúvidas e necessidades do processo de ensino –, também acaba sendo pouco produtiva, pois coloca o meio em uma posição

desconfortável frente às outras formas de comunicação. (BARBOSA *et al.,* 2004, s/p).

Para os autores, é importante a seleção dos materiais considerando os aspectos do desenvolvimento intelectual dos estudantes. Eles destacam algumas informações importantes acerca desse aspecto.

a) Fase pré-escolar: os alunos se encontram nas primeiras iniciativas de representação especialmente da linguagem. Nesse momento, a relação dos alunos com as histórias em quadrinhos é primordialmente lúdica.
b) Nível Fundamental (1º a 5º anos): a criança vai deixando de ver a si mesma como o centro do mundo e tem mais a socialização do que antes.

> [...] começa aos poucos a identificar características específicas de grupos e pessoas, podendo ser apresentada a diferentes títulos ou revistas de quadrinhos, bem como ser instada a realizar trabalhos progressivamente mais elaborados, que incorporem os elementos da linguagem dos quadrinhos de uma forma mais intensa. (BARBOSA *et al.,* 2004, s/p)

c) Nível Fundamental (anos finais): os alunos possuem mais consciência em relação ao seu papel na sociedade. Por causa disso, eles possuem mais facilidade de identificar detalhes nos quadrinhos e fazendo relações com suas vivências sociais e individuais.
d) Nível Médio: Nesse momento, os estudantes são mais críticos em relação ao que é proposto em aula e nas próprias criações, buscam criar personagens mais próximos da realidade, com articulações, movimentos e detalhes de roupas que acompanham o que veem ao seu redor.

Barbosa *et al.* (2004) fazem referências a outros aspectos para a utilização das histórias em quadrinhos como: narrativas sem erros gramaticais, tema do interesse do grupo e que corresponda aos objetivos do conteúdo a ser ensinado, material de uma boa qualidade gráfica etc.

Em relação ao uso das histórias em quadrinhos no ensino de Matemática, Viana *et al.* (2021) defendem que a mesma pode contribuir para diminuir algumas dificuldades encontradas pelos estudantes nessa disciplina, devido ao fato que possibilitam a sintetização de diversos processos cognitivos.

> Assim, ao utilizar as HQ na sala de aula, o professor deixa de ser tão somente o transmissor de conhecimentos, e passa a assumir uma posição de mediador, que inova a sua prática pedagógica, pois essa metodologia colabora para que os estudantes, como afirmam Onuchic e Allevato (2004), levantem ideias matemáticas, estabeleçam relações entre elas, saibam se comunicar ao escrever e falar sobre as mesmas, desenvolvam formas de raciocínio e

> estabeleçam conexões entre temas matemáticos como os que estão fora da matemática. (VIANA *et al.,* 2021, s/p).

Segundo Barbosa *et al.* (2004), muitas dificuldades dos estudantes estão ligadas a forma como o professor de matemática aborda o assunto e sua metodologia e se utiliza dos recursos didáticos. Eles defendem também a proposição de atividades que possibilitem os alunos a fazerem relações com situações onde a matemática não é tão evidente, e uma forma é desenvolvendo propostas interdisciplinares, as quais são bem incentivadas por diversos documentos da educação.

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência. (BRASIL, 2000, p. 43).

Em relação a forma de se trabalhar com as histórias em quadrinhos nas aulas de Matemática, Viana *et al.* (2021) sugerem algumas maneiras como criação das histórias em quadrinhos pelos próprios estudantes de forma a incentivar a pesquisar conteúdos novos ou que tenham dificuldade.

> [...] por esse viés é que, ao criarem suas próprias histórias em quadrinhos, os estudantes compreendem melhor os conteúdos, por meio de questionamentos e pesquisas, colaborando para quebra de preconceitos em relação à utilização desse recurso em matemática. (VIANA *et al.,* 2021, s/p).

Eles ainda apontam que a utilização desse recurso pode favorecer o desenvolvimento do raciocínio lógico e da criatividade.

Mediante aos argumentos citados acima, percebe-se que a história em quadrinhos pode proporcionar ao ensino da Matemática, uma contribuição nos aspectos da interpretação de textos, na relação com diversos outros conceitos, assim como pode propiciar o desenvolvimento da criatividade e do raciocínio lógico como Vergueiro (2005) aponta:

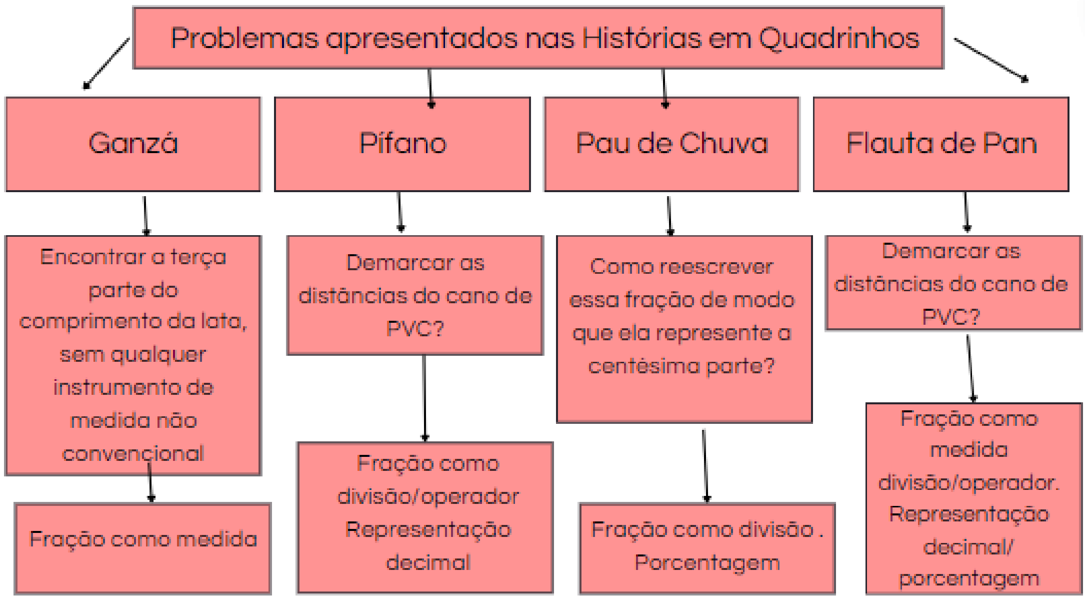
> Sendo uma narrativa com linguagem fixa, a constituição de uma história em quadrinhos implica na seleção de momentos-chave da história para utilização expressa na narrativa gráfica, deixando-se outros momentos a cargo da imaginação do leitor. Desta forma, os estudantes, pela leitura de quadrinhos, são constantemente instados a exercitar o seu pensamento, complementando em sua mente os momentos que não foram expressos graficamente, desta forma desenvolvendo o pensamento lógico. (VERGUEIRO, 2005, p. 24)

Nesse sentido, concorda-se com Justo (2013), que as HQs podem ser utilizadas como recurso didático planejado e organizado pelo professor, para oportunizar momentos de reflexões e criações que contribuem para a aprendizagem de Matemática e o desenvolvimento do raciocínio lógico.

Como o objetivo da pesquisa era analisar quais são os conhecimentos sobre fração que dois alunos do 8º ano do Ensino Fundamental apresentam durante a construção de instrumentos musicais, organizou-se histórias em quadrinhos que continham problemas envolvendo a construção de alguns instrumentos musicais.

Dessa mesma forma, a pesquisadora estruturou, intencionalmente, histórias em quadrinhos, que apresentavam problemas, que tinham como propósito principal trazer discussões e reflexões acerca de alguns significados em relação ao conceito de fração (Figura 10):

Figura 10: Possíveis significados de fração a serem investigados a partir da Histórias em Quadrinhos



Fonte: Elaborado pela autora

Os significados do conceito de fração, podem ser aqui entendidos analisando o desenvolvimento do conceito de fração, nas civilizações antigas conforme as reflexões feitas a partir da história da matemática. Por isso, é apresentado na próxima seção algumas ideias sobre o desenvolvimento do conceito de fração em algumas civilizações.

3. As frações em algumas civilizações

Nesta seção, é discorrido acerca dos indícios da origem do conceito de fração. Além disso, é analisada a abordagem do conceito de fração na Base Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017) e o incentivo das Diretrizes Curriculares Municipais de Uberlândia (DCM) (BRASIL, 2018) para o ensino da matemática e da música.

3.1. As frações na história da humanidade

Moreira e Campos (2014) defendem que a linguagem matemática utilizada no tempo atual não é a mesma da antiguidade clássica. Eles apontam que a matemática se originou e se desenvolveu a partir de situações do cotidiano da humanidade e, assim, os significados dos conceitos foram se modificando como sua representação escrita.

> Por estarmos habituados à linguagem atual, não é incomum, para facilitar nossa compreensão de alguma sentença da matemática clássica, tentarmos traduzi-la para a notação algébrica moderna. No entanto, esse procedimento pode gerar interpretações equivocadas a respeito da estrutura conceitual subjacente aos enunciados da matemática antiga (MOREIRA; CAMPOS, 2014, p. 1).

Na história da formação dos números, por exemplo, Roque (2012) indica que é possível perceber a ampliação do seu significado de acordo com as necessidades da humanidade. Essa autora defende que nas sociedades antigas, a contagem de animais ou objetos levou as pessoas a fazerem a correspondência entre grupos.

> Tal correspondência é exatamente do mesmo tipo daquela que empregamos ao "contar nos dedos". Pode-se associar, por exemplo, cada carneiro a um dedo da mão e concluir que em uma dada coleção de carneiros há a mesma quantidade de carneiros do que de dedos nas mãos... Efetuar uma correspondência entre essas duas coleções de seres é "contar". (ROQUE, 2012, p. 68).

A autora ainda menciona que a emergência de registrar como de ampliar o processo da contagem para grandes quantidades motivou a abstração do conceito de número. Como explicado por essa autora:

> A abstração torna possível um conceito de número que poderá, então, receber um nome e ser representado por um símbolo. Assim, em diferentes processos de contagem, ainda que o estabelecimento de correspondências seja equivalente, os nomes dos números podem diferir. Conforme dito no início deste capítulo, antes do fim do quarto milênio a.E.C., os povos da Mesopotâmia desenhavam símbolos em argila. No entanto, inicialmente, estes eram distintos para coisas distintas; e, para representar uma quantidade, bastava repeti-los um certo número de vezes. Sendo assim, cinco recipientes

> contendo grãos podiam ser representados por cinco marcas para grãos; e cinco jarros de água, por cinco marcas para jarros de água. Em resumo: os números escritos dependiam dos objetos contados. (ROQUE, 2012, p. 68-69).

Outro autor, Brolezzi (1996) afirma que para uma compreensão rica e ampliada do conceito de número é necessário associar seu surgimento à questão da necessidade da medida. Para esse autor a ideia de medida está relacionada com a comparação de duas quantidades ou medidas diferentes de modo a estabelecer uma ordem.

> O homem teria, assim, se deparado muito cedo com a noção de maior e menor, de antes e depois (em ordem crescente ou decrescente), e através disso começou a comparar conjuntos com quantidades idênticas. É nesse sentido que podemos afirmar que o duplo aspecto da contagem e da medida está presente desde a origem da ideia de número. Um aspecto da realidade auxilia o outro, e não há uma relação de antecedência clara para nenhum deles. (BROLEZZI, 1996, p. 6)

Oliveira e Basniak (2021) complementam esse fato, descrevendo que assim como o senso numérico exige a habilidade de aproximar o tamanho dos números, essa mesma relação de magnitude é também necessária para os números fracionários.

Sobre magnitude, Powell (2019, p. 3) alega que [...] magnitude ou magnitude absoluta é o tamanho ou extensão de um objeto sem considerar uma comparação ou medida e a magnitude relativa é o tamanho de um objeto sujeito a comparação com um outro objeto ou medição com uma unidade de medida.

Em relação a ampliação do significado do conceito de número para a inclusão das representações fracionárias, Brolezzi (1996) concorda que a origem das frações está ligada à medida. Segundo esse autor, o desenvolvimento dos números inteiros para os fracionários tem relação com a continuidade. O autor ainda complementa que "Para o ensino, é preciso o cuidado de não limitar apenas à *definição*, com base na *ideia do discreto*, do número racional, é preciso trabalhar com a origem histórica, com base na *continuidade*, dos números fracionários." (BROLEZZI, 1996, p. 53).

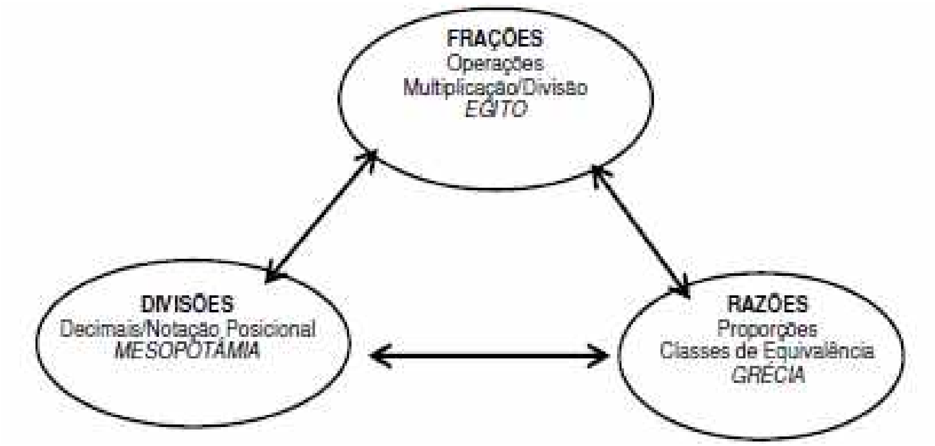
Este autor ainda afirma que estudos antropológicos, como do autor Crump, sobre a origem dos números demonstram a dualidade dos números discretos e da medida contínua

> Os estudos de Crump mostram essa pluralidade de utilização primitiva das noções numéricas, indo além dos cardinais. O homem primitivo tanto contava quanto media, e podemos dizer que não fazia uma coisa sem fazer também a outra. Crump busca a origem dos números nas linguagens referentes às medidas (cap. 6), ao tempo (cap. 7), à música (cap. 8). Os números não surgem só como inteiros, mas através de uma rede conceitual formada pelo seu uso para lidar com trocas, para o reconhecimento da dança e do ritmo, nos jogos, nas leis e costumes sociais, nas artes e na arquitetura, nas abordagens religiosas e nas visões cosmológicas, nas tentativas de

> descrição da vida e dos objetos. Em muitos desses empregos da noção numérica, a ideia de ordenação parece estar bem próxima da origem do número, e não só a ideia de correspondência um-a-um. (BROLEZZI, 1996, p. 6).

Brolezzi (1996) sugere, ainda, que o significado dos números racionais pode ser compreendido por meio de 3 conceitos básicos: ***Frações, Divisões e Racionais.***

Figura 11: Triângulo de Significado do Número Racional



Fonte: Brolezzi (1996, p. 56)

> Utilizando o triângulo de significado do número racional, trabalhamos a relação entre o discreto e o contínuo sem fazer opções radicais por um ou outro aspecto. Mesmo porque na Mesopotâmia e no Egito Antigo não havia ainda a preocupação por essa distinção, e os gregos, responsáveis pelas primeiras categorias dentro da Matemática, irão trabalhar diretamente com a Álgebra Geométrica, evitando também uma opção, mas lidando com grandezas discretas e contínuas. (BROLEZZI, 1996, p. 6).

Segundo esse autor a correlação de todos estes campos permitem que os alunos tenham uma compreensão mais abrangente dos significados do conceito de fração, aspecto que apresentamos a seguir abrangendo alguns significados e indícios deste conceito encontrados na história da matemática. A relevância desse tópico para a pesquisa é o fato desses significados serem trazidos à discussão com alunos por meio da proposta de ensino elaborada pela pesquisadora.

3.1.1. Fração como Medida

Sobre o conceito de medida, Caraça (1951, p. 29, itálico no original) defende que medir está relacionado à "[...] comparar grandezas de mesma espécie - dois comprimentos, dois pesos, dois volumes, etc..." e que está baseada, em resumo, nos seguintes fundamentos*:*

a) Estabelecimento do "estalão" único de comparação (uma unidade de medida).

b) Expressão, em uma linguagem matemática, quantas vezes é maior, menor ou igual o objeto é em relação à unidade estabelecida.

c) Expressão do resultado dessa comparação por um número.

Oliveira e Basniak (2021) reforçam que para medir é necessário a comparação, ordenação e a necessidade de uma unidade de medida, e como exemplo prático aponta: "Medir o comprimento de uma folha de papel e expressar essa medida com representação fracionária, utilizando um lápis como unidade de medida." (p. 16). Esses mesmos autores, defendem que o ensino do conceito de fração deve começar com a medida pois:

> • coincide com a gênese histórica das frações, que surgiu da necessidade de medir quantidades contínuas;
> • a magnitude numérica é considerada;
> • há necessidade de determinar uma unidade de medida;
> • há ruptura com a ideia e propriedades dos números naturais, sendo necessário um novo campo numérico dos números racionais, favorecendo a compreensão dos números fracionários. (OLIVEIRA; BASNIAK, 2021, p. 17).

Oliveira e Basniak (2021) indicam que muitos autores consideram o "medir" e a relação "parte-todo" como equivalentes, outros autores como Behr *et al.* (1983), apresentam a noção de parte-todo da fração como sendo um resultado do processo da medição, como Escolano (2007) demonstra:

> [...] *relação parte-todo* aparece como consequência de um processo gradual de abandono do significado da medida com objetos reais, que inicialmente se manifesta no fato de os autores dos textos escolares optarem por evocar a medida (medida evocada) e, posteriormente, usar de maneira encoberta a magnitude de superfície, e com a ajuda de gráficos bidimensionais, perguntar "que parte de uma região é outra região" (medição aparente) ou aparecimento de interferências no ensino do sistema métrico decimal (ESCOLANO, 2007, p. 81 apud OLIVEIRA; BASNIAK, 2021, pp. 13-14, grifos do original).

A ideia primitiva das representações fracionárias, conforme alega Roque (2012), tem origem em indícios encontrados nos livros de História de Heródoto (V a.C). Esses registros apontam que o faraó dividia a terra igualmente entre todos os egípcios e cobrava um imposto com base nessa repartição. Quando as enchentes no Nilo ocorriam, e alguns lotes eram perdidos, era necessário fazer uma **nova medição** da terra a fim de recalcular o pagamento do imposto devido.

Em relação à unidade de medida padrão utilizada para a cobrança de impostos pelo faraó, Rodrigues (2015) e Marco e Rodrigues (2020) afirmam que era utilizado o cúbito egípcio, representado pela medida do cotovelo até a ponta do dedo maior do faraó (524 mm).

Segundo Moreira (s/d[5]), a necessidade de representar as sobras dos pedaços que não tinham como serem medidos com o cúbito inteiro, deu origem às representações fracionárias.

> Os responsáveis por essa marcação eram os chamados estiradores de corda, pois mediam os terrenos com cordas nas quais uma unidade de medida estava marcada. Essas cordas eram esticadas e se verificava quantas vezes a tal unidade de medida cabia no terreno, nem sempre cabia à unidade de medida inteira. Por essa necessidade surgiu o uso do número fracionário. (MOREIRA, s/d, p. 1).

Acerca da maneira como os egípcios registravam as frações, Pereira, Silva, Nogueira e Alves (2015), analisando o *Papiro de Rhind*, apontam que as frações eram escritas em hieróglifos e:

> [...] indicadas pela colocação do sinal acima do número ou ao lado, representando uma boca e, foneticamente, a letra r, que significava parte ou porção neste contexto, por exemplo, fração $\overline{3}$ representava ($\frac{1}{3}$) e $\overline{\overline{3}}$ representava ($\frac{2}{3}$). Os egípcios utilizavam frações com numeradores iguais a 1, e as demais frações (exceto a fração $\frac{2}{3}$) eram denotadas como soma de frações unitárias. (PEREIRA; SILVA; NOGUEIRA; ALVES, 2015, p. 249).

Ainda acerca dos registros das frações, Roque (2012) complementa informando que no sistema egípcio, os números fracionários eram representados de duas formas: **a)** por símbolos próprios (hieróglifos); **b)** por sinal oval alongado sobre o denominador. As frações mais utilizadas no cotidiano dos egípcios eram as unitárias, mais especificamente, $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ e, por isso, tinham desenhos próprios. Acerca desse fato, Brolezzi (1996) complementa que a utilização de frações unitárias demonstra que a civilização egípcia concebia os números não somente a partir de uma correspondência um a um, mas também como medida, pois a partir das frações é constatado

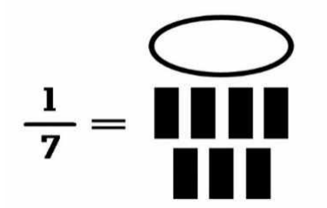
> [...] o uso frequente de noções numéricas para as medidas as quais não poderiam se aplicar aos números inteiros. Fixando o numerador em um, os egípcios poderiam trabalhar com as medidas de forma intuitivamente palpável pois podiam considerar frações como representações de pedaços inteiros cuja a divisão é determinada pelo denominador. (BROLEZZI, 1996, p. 12).

As outras frações eram simbolizadas com um sinal oval acima do denominador. Um exemplo disso é a fração $\frac{1}{7}$ representada na Figura 9:

---

5 Disponível em: http://www.jornalolince.com.br/2009/jan/pages/historia-origem-necessidade-numeros-fracionarios-jornalolince.com.br_edicao025. Acesso: 11 set. 2020.

Figura 12: Representação de uma fração na linguagem egípcia antiga

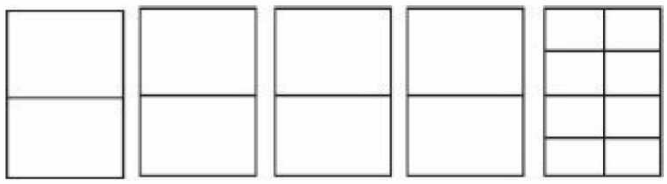


Fonte: Roque (2012, p. 74) adaptado pela autora.

A autora ainda expõe que nesse tipo de notação, o "numerador" tinha o significado diferente do que é usado hoje (parte do todo). Naquele caso, o "numerador" correspondia à tomada da última parte da subdivisão feita e "[...] configura-se certo abuso de linguagem dizer que, na representação egípcia, as frações possuem "numerador 1". Seria mais adequado dizer que essas frações egípcias representam os inversos dos números." (ROQUE, 2012, p. 74), ou seja, que se relacionavam com a questão ordinal, diferente dos significados atualmente. De fato, havia uma diferença entre o sentido das frações de hoje e a existente no contexto da sociedade egípcia:

> Suponhamos que uma pessoa deseje repartir a quantidade de grãos contida em cinco sacos de cevada por oito pessoas. Começamos por imaginar que, se tivéssemos quatro sacos, cada pessoa deveria receber a metade de cada saco. Sendo assim, como são cinco sacos, cada pessoa deve receber, no mínimo, a metade de cada saco, ou seja, ½. Fazendo isso, sobrará um saco, que pode ser dividido pelas oito pessoas, cada uma recebendo mais desse saco, [...]. Podemos dizer, então, que o resultado da divisão de 5 por 8 é $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$. Logo, esse resultado, enunciado como uma soma de frações de numerador 1, expressa o modo como à divisão foi realizada. (ROQUE, 2012, p. 75).

Figura 43: Uma representação da divisão dos 5 sacos de grãos para 8 pessoas



Fonte: Roque (2012, p. 75)

Transpondo para a atualidade, seria necessário que todos os sacos fossem divididos na mesma quantidade de partes, ou seja, em oito partes. Dessa forma, na nossa representação, essa representação equivaleria a $\frac{5}{8}$. "Isso significa que cada meio saco deve ser dividido em quatro, com o único objetivo de que a adição de frações seja homogênea, isto é, para que somemos frações de mesmo denominador." (ROQUE, 2012, p. 75).

A partir do exposto, percebe-se que o processo histórico envolvido dos indícios da fração como medida foi a partir da necessidade de comparação de partes de mesma medida.

3.1.2. Fração como Divisão/ Quociente

Para Lamom (2012), para a compreensão do conceito de fração como divisão é fundamental considerar os seguintes aspectos: divisão partitiva (igualitária) e a divisão por cota (taxa).

Segundo os PCN (BRASIL, 1998, p.102):

> Outra interpretação do número racional como quociente de um inteiro por outro (a : b = a/b , b≠0). Para o aluno, ela se diferencia da interpretação anterior, pois dividir uma unidade em 3 partes e tomar 2 dessas partes é uma situação diferente daquela em que é preciso dividir 2 unidades em 3 partes iguais. No entanto, nos dois casos, o resultado é dado pelo mesmo número: $\frac{2}{3}$. (BRASIL, 1998, p. 102).

Acerca da interpretação da fração como divisão nas civilizações antigas, Pieterzack (2000) descreve que:

> Nos povos comumente denominados de babilônios, no período de 2000 até aproximadamente 600 a.C., na antiga Mesopotâmia o sistema decimal, comum às civilizações tanto antigas quanto modernas, tinha sido submerso da Mesopotâmia sob uma notação que dava a base sessenta como fundamental. (PIETERZACK, 2000, p. 79).

Brolezzi (1996) aponta alguns dos indícios para que a civilização babilônica se utilizasse da base 60, foi devido a praticidade oferecida em relação aos divisores inteiros. O autor afirma que esse povo tinha uma maneira sofisticada em lidar com o contínuo e com o discreto, vindo de encontro com que Pieterzack (2000) também indica sobre a facilidade nesse sistema da subdivisão em ***metades, terços, quartos, quintos, sextos, décimos, doze avos, quinze avos, vigésimos*** e ***trigésimos***.

Esse fato aponta para a necessidade que os babilônios tinham em relacionar as frações a partir de uma divisão, mediante as necessidades da própria ação da medição do tempo.

A questão principal era que o sistema na base 60 permitia escrever mais frações sexagimais finitas conforme Brolezzi (1996) relata, e também pelo fato deste sistema ser posicional, sendo uma das primeiras civilizações a manifestar o indício de um sistema composto dessa maneira (PADRÃO, 2008).

Segundo Padrão (2008), o funcionamento desse sistema era o seguinte: “Os números de 1 a 59 eram representados de maneira aditiva, utilizando dois símbolos um “cravo” vertical representando a unidade e uma “asna” representando 10 unidades... A partir do número 60, o sistema passava a ser posicional.” (PADRÃO, 2008, p. 44-45).

A autora ainda afirma que essa civilização não tinha um símbolo para indicar uma posição vazia, mas para resolver esse problema deixavam um espaço para representar a passagem de uma ordem para outra. Apesar disso, Moreira (s/d) afirma que a questão de eles terem um sistema posicional, influenciou para uma ampliação do significado das frações relacionando-as como uma representação de números decimais.

> [...] através de sua numeração de posição com base sessenta, foram os primeiros a atribuir às frações uma notação racional convertendo-as em frações sexagesimais, cujo denominador é igual a uma potência de sessenta e exprimindo-as mais ou menos como se exprime as frações de horas em minutos e segundos. (MOREIRA, s/d, p. 2).

Brolezzi (1996) afirma que o sistema ser de base 60 juntamente com a característica do sistema ser posicional, possibilitou uma abordagem mais numérica e mais fácil de lidar com medidas contínuas, uma vez que para os babilônicos tinham a concepção de número baseada no aspecto da medida.

Percebe-se que a ampliação dos significados de fração como uma divisão teve como elemento desencadeador a criação de um sistema posicional que permitiu representar unidades não inteiras na forma decimal.

3.1.3. Fração como Razão

O conceito de fração como razão tem suas bases, como Roque (2012) afirma na Grécia Antiga.

Autores como Oliveira e Bashiak (2021, p. 8) defendem a razão como sendo uma “[...] comparação entre duas quantidades de mesma grandeza ou natureza”.

Entretanto, esses mesmos autores afirmam que outros estudiosos relacionam o conceito de razão com taxa ou proporção.

Sendo a parte-todo, uma das consequências ou representações do significado de fração como medida, Oliveira e Bashiak (2019) apontam que Kieren (1980) defende como um caso particular de olhar a fração como razão que em “[...] relações parte-todo, o todo é dividido em partes iguais e destaca-se a ideia de equivalência, as relações de razão ressaltam comparações quantitativas de duas qualidades.” (OLIVEIRA; BASHIAK 2019, p. 9).

Um dos exemplos disso, citado por Oliveira e Basniak (2021, p. 16) são: i. “[...] em uma sala de aula de 20 meninas e 10 meninos, podemos afirmar que a razão do número de meninas para o número de meninos é $\frac{2}{1}$ ou 2:1” e “ii. [...] a velocidade que normalmente é expressa em quilômetro por hora ou metro por segundo.”

Roque (2012) afirma que os pitagóricos não concebiam os números como ***"entidades abstratas"***[6] ou como Brolezzi (1996, p. 19) define "entidade de existência real, constituída por unidades". Um exemplo disso, segundo Roque (2012), eram os números 1, 2, 3 e 4 que eram relacionados com pedrinhas dispostas em uma determinada organização. O autor ainda afirma que nem o zero, nem outras representações fracionárias eram consideradas pelos pitagóricos como sendo números.

Para Moreira e Campos (2014) a transformação do significado de razão para o sentido a qual utilizamos hoje veio da seguinte forma:

> A possibilidade de representação decimal dos números, utilizando os algarismos indoarábicos, introduzidos na Europa no século XIII, é um dos elementos que contribuiu para a consolidação da ideia de tomarmos razões como números. Além disso, a formalização do conceito de número real, concebida na segunda metade do século XIX, a partir da noção de corte no conjunto dos números racionais, veio instituir a caracterização formal e rigorosa daqueles números que expressam as razões entre incomensuráveis – os números irracionais. (MOREIRA; CAMPOS, 2014, p. 7).

Estes autores complementam que:

> [...] a necessidade de comparar apenas grandezas de mesma espécie (homogeneidade de grandezas) imposta pela noção de medida presente nos pressupostos da matemática antiga cedeu lugar à possibilidade de comparar grandezas de natureza diferente, através do uso de uma unidade abstrata. (MOREIRA; CAMPOS, 2014, p. 8).

Moreira e Campos (2014) ainda indicam que a ***razão passa a ser vista*** a partir da formação do conceito de ***número real***: **a)** racionais (aqueles que expressam as razões entre dois inteiros); **b)** irracionais (aqueles que não são racionais, que não expressam uma razão entre inteiros, mas a razão entre incomensuráveis).

Percebe-se que foi apresentado que a ampliação dos significados de fração como uma razão teve como elemento desencadeador a ampliação do conceito de número concreto para o número real, conforme Brollezi (1996), com a investigação de medidas que não podiam ser mensuradas.

3.1.4. Fração como Operador

Segundo Graça, Ponte e Guerreiro (2021) ao analisar a fração como operador é associá-la a diversas transformações, relacionando-as com as operações de multiplicação de divisão.

> Por exemplo, ^{3} como $3\times^{1}$ (de uma unidade) – associado à função esticar/ encolher, cuja transformação resulta no mesmo número de unidades de diferentes grandezas; ou $^{1}\times 3$ unidades – associado à função

[6] Termo usado por Roque.

> duplicar/particionar, cuja transformação provoca um número diferentes de unidades da mesma grandeza; e (ii) compreender que multiplicar uma quantidade por ^{3} envolve dividir a quantidade por quatro e multiplicar o resultado por três. (GRAÇA; PONTE; GUERREIRO, 2021, p. 689).

Oliveira e Basniak (2021) entendem que a fração como operador vem da compreensão de multiplicação de números racionais como elementos da Álgebra de funções, do tipo $f(x) = a\ b\ x$, com $b \neq 0$.

David e Fonseca (1997, p. 1) fazem relação desse significado com o seguinte exemplo: “[...] ao aplicarmos o operador $\frac{2}{3}$ ao número de formandos em Pedagogia, obteremos o número de formandos que ingressaram na carreira do magistério. Para o caso de 96 formandos, o cálculo seria 96 x 2 : 3.”

Rodrigues (2015), ao discutir a fração como operador, afirma a importância de considerar a fração e suas relações de ampliação e redução, de multiplicador e divisor.

Neste mesmo sentido, Oliveira e Basniak (2021, p. 16) ao exemplificar esta ideia indicam que “Ao calcular $\frac{2}{5}$ do número 30, aplicamos uma redução do número 30. Se calcularmos $\frac{5}{2}$ do número 30, o efeito é de ampliação.” Percebe-se que a quantidade final no caso de calcular $\frac{2}{5}$ de 30 representa, obter uma parte menor que o total, já no caso de $\frac{5}{2}$ de 30, obtém-se uma quantidade maior que a inicial.

Neste estudo, entende-se que todos esses significados de fração precisam ser compreendidos em sua totalidade e não como conceitos isolados.

Diante destas ideias, ressalta-se que a porcentagem não é um significado do conceito de fração, mas um resultado importante desse processo, uma forma de escrita de algumas frações. Esta ideia e contemplada na história em quadrinhos, da proposta didática que compõe o produto educacional originado a partir desta pesquisa, e trazem o desafio de fazer a representação de algumas frações em porcentagem e como números decimais.

Esses problemas podem mobilizar os estudantes a buscarem estratégias de resolução, além de possibilitar ações relacionadas ao conceito da fração como divisão. Por exemplo, a ação de realizar uma repartição de forma igualitária conduz o estudante, a relembrar algumas características do sistema de numeração decimal como: os agrupamentos e/ou subdivisões em 10, o valor posicional de cada algarismo assim por diante.

3.2 Porcentagem

Historiadores sugerem, segundo Coelho (2018), que a utilização da porcentagem teve início nas transações financeiras de leilões e impostos sobre as mercadorias vendidas na época do Imperador Augusto.

> O termo por cento (para toda centena) como o nome para frações com denominador 100 começou com a aritmética comercial dos séculos XV e XVI, quando era comum citar taxas de juros de centésimo. Tais costumes persistiram nos negócios, reforçados nos Estados Unidos por um sistema monetário baseado em dólares e centavos (centésimos de dólares). Isso garantiu a continuação do uso das porcentagens como um ramo especial da aritmética decimal. (BERLINGHOFF, 2008, p. 90-91).

Segundo essa autora, o símbolo (%) utilizado hoje sofreu algumas modificações com o tempo, tendo em vista as necessidades dos franceses e ingleses em buscar outro tipo forma mais abreviada da representação das frações percentuais, que eram muito utilizadas no comércio da época. No Quadro 1, elaborado por Coelho (2018), temos o registro desse movimento na história da matemática.

Quadro 1: História da Porcentagem

Autor	Surgimento	Necessidade	Base 100	Símbolo	Curiosidades
Contador (2012)	Imperador Romano Augusto	Imposto de 1/100 sobre a venda de escravos	Século XV	Manuscrito italiano em 1425: P → 1650: per $\frac{o}{o}$ → $\frac{o}{o}$ Hoje: %	No século XV, esse símbolo passou a ser utilizado em operações comerciais para o cálculo de juros, impostos, lucros, entre outros.
Lima et al. (2005)	Não encontramos.	Não encontramos.	Não encontramos.	Resultou de sucessivas abreviações e deformações da expressão "por cento", usada por comerciantes venezianos e genoveses.	Muitas vezes não faz sentido falar em porcentagens superiores a 100%.
Berlinghoff (2008)	Império Romano Augusto (27 a.C. a 476 d.C.)	Taxa de 1/100 sobre negócios realizados em leilões.	Começou com a aritmética comercial dos séculos XV e XVI	Abreviação à mão para "por 100" em cerca de 1430, e gradualmente sendo transformado em "por 0/0" em cerca de 1650, a seguir simplesmente para "0/0" e, finalmente, para o sinal "%", que usamos atualmente.	Tais costumes persistiram nos negócios, reforçados nos Estados Unidos por um sistema monetário baseado em dólares e centavos (centésimos de dólares).

Fonte: Coelho (2018, p.36)

Percebemos que foi, a partir das necessidades do comércio do dia a dia, que especificamente as frações centesimais "ganharam" um novo simbolismo e significado. Dessa forma, o motivo para considerarmos as frações e uma representação em porcentagem é devido sua importância desde os primórdios até os dias atuais na sociedade.

Com o intuito de organizar as ideias elaboradas a partir de nossos estudos, elaboramos a figura 12, com os significados encontrados.

Figura 54: Alguns elementos do conceito de fração

Fonte: Elaborado pela autora

A partir da figura 12, percebe-se a relação entre o desenvolvimento dos significados das frações com o desenvolvimento e as necessidades da humanidade descritas na história. Entende-se que a representação fracionária se originou a partir de problemas relacionados a medida, tendo indícios dessa forma de conceber a fração, na civilização egípcia, a partir das questões surgidas pela inundação das terras às margens do rio Nilo (RODRIGUES, 2015). O avanço do sistema de numeração decimal em relação a questão posicional, o surgimento do algarismo 0 nas civilizações babilônicas e indianas proporcionaram o avanço do processo da relação fração como uma divisão e, consequentemente, suas representações decimais e percentuais. Em relação à fração como uma razão, tem-se como reflexo e influência as concepções dos pitagóricos acerca da matemática. Com o desenvolvimento da matemática e sua forma sistemática, as frações tiveram suas funções ampliadas para ser um operador.

Por esse motivo, entende-se ser importante que o professor faça associações entre esses diversos conceitos, buscando desenvolver situações que abordem os elementos essenciais da fração como medida, operador, quociente, divisão... a partir de problemas nos quais os alunos possam se envolver e participar do processo de apropriação de cada um desses significados.

Mas, o que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017) e as Diretrizes Curriculares Municipais (DCM) (UBERLÂNDIA, 2018), propõem para os professores em relação ao ensino das frações? Essa discussão é feita a seguir.

3.3. Reflexões acerca das frações e da música em documentos oficiais, estudos e livros didáticos

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017) é um documento de caráter normativo da Educação Básica do Brasil. Em relação ao ensino das frações, a BNCC sugere que os professores desenvolvam tarefas baseadas em "[...] medições, nas quais os números naturais não são suficientes para resolvê-las, indicando a necessidade dos números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária." (BRASIL, 2017, p. 269).

Ainda, segundo esse mesmo documento, o objetivo do ensino das frações é que os alunos possam adquirir habilidades como:

> **(EF04MA09)** Reconhecer as frações unitárias mais usuais ($\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ e $\frac{1}{100}$) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso. (p.216)
> **(EF06MA07)** Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes. (p.216)
> **(EF06MA08)** Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica. (p.301)
> **(EF06MA09)** Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora. (p.301)
> **(EF07MA08)** Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. (p.307)
> **(EF07MA09)** Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza. (BRASIL, 2017, p. 307).

Percebe-se nas habilidades apresentadas pela BNCC (BRASIL, 2017), que o documento indica aos docentes o trabalho com alguns elementos do conceito de fração como razão, operador, divisão. Entretanto, a associação com as necessidades de elaboração de conceitos, não são citadas, mas entende-se ser preciso haver uma abordagem das necessidades perpassadas pela humanidade para a elaboração dos significados de um determinado conceito para que alunos se apropriem deste.

Para exemplificar como o ensino de frações têm se apresentado nos livros didáticos, selecionou-se alguns para análise, atualizados de acordo com a BNCC (BRASIL, 2017). É apresentado nos quadros 2 e 3, a descrição dos livros e as reflexões em relação aos significados da fração presentes nos livros.

Quadro 2: Livros Didáticos Analisados

Título	Autor(es)	Editora	Ano da publicação
A Conquista da Matemática: 6ºano: Ensino Fundamental: anos finais	JUNIOR, José Ruy Giovanni CASTRO, Benedicto	Benedicto Castrucci	2018
Trilhas da Matemática: 6ºano: Ensino Fundamental: anos finais	SAMPAIO, Fausto Arnaud	Saraiva	2018
Matemática: Realidade e Tecnologia 6ºano: Ensino Fundamental: anos finais	SOUZA, Joamir Roberto	FTD	2018
Matemática: Geração Alpha 6ºano: Ensino Fundamental: anos finais	OLIVEIRA, Carlos N. C.	Andressa Guarsoni Rocha	2018

Fonte: Elaborado pela autora

O objetivo em estudar a forma como os livros didáticos abordam os significados das frações tem em vista analisar se há uma preocupação em trazer clareza em relação a esses aspectos e, consequentemente, essas reflexões servirão de auxílio como contraexemplo ou não, da maneira de como pode ser trabalhado os significados das frações.

No Quadro 3, estão organizadas as reflexões realizadas pela pesquisadora:

Quadro 3: Análises dos livros didáticos

Título	Organização do conteúdo	Introdução do capítulo	Significados da fração
A Conquista da Matemática: 6ºano: Ensino Fundamental: anos finais	- Ideia de fração - Problemas envolvendo frações - Comparando frações - Obtendo frações equivalentes - Adição e subtração de frações - A forma mista - Frações e a porcentagem	Como introdução, é descrito acerca do processo das frações no Egito Antigo. Entretanto, não foi proposto nenhum problema para que os estudantes investigassem acerca do processo da fração como medida. Logo em seguida, é apresentado a ideia de fração como parte-todo.	Parte-todo
Trilhas da Matemática: 6ºano: Ensino Fundamental: anos finais	- Ideias relacionadas a frações - Forma mista e tipos de fração - Comparação de frações - Adição e subtração de frações - Problemas envolvendo repartições desiguais - Porcentagem	Nesse livro, percebe-se a preocupação do autor em trazer a ideia da fração como medida. É sugerido ao professor que relembre aos estudantes a importância de adotar uma referência para fazer a medição. A situação apresentada para esse diálogo foi o enchimento de uma lata de tinta maior com o conteúdo de latas de tinta menores. Nesse sentido, aborda-se a questão de medida relacionada com a grandeza: volume. Em relação a fração como operador, o autor demonstra preocupação em seus comentários, em relação ao professor não se utilizar de uma estratégia mecânica para tratar esse significado. Entretanto, não se descreve o “como fazer”, de forma aprofundada. É trazido como comentários ao professor a importância de fazer a diferenciação em relação a fração como divisão (partilha) e na fração como razão.	Medida Operador Divisão Razão

Matemática: Realidade e Tecnologia 6ºano: Ensino Fundamental: anos finais	- Os números racionais na forma de fração. - Fração de uma quantidade - Frações equivalentes e simplificação de fração - Comparação de frações - Adição e subtração de frações	Como introdução ao conceito de frações, é apresentado uma situação-problema na qual está relacionada a quantidade de água total do planeta em relação a superfície da terra, dessa forma estabelecendo a fração a partir da parte-todo. Em relação ao conceito de razão, é apresentada a seguinte situação: "... 6 em cada 10 pessoas não tinha saneamento básico" (p.148). Não se especifica, o que significaria ser propriamente uma razão e suas particularidades. Em relação a quociente ou divisão, é feito a discussão a partir da seguinte situação: Divisão de 3 placas para 2 grupos, de forma igualitária. Não é investigado o processo do ato de se realizar uma divisão. Outro questionamento, é que as contextualizações não são próximas às realidades dos estudantes. Em relação a fração como operador, é exposto um exemplo sobre a quantidade de pessoas que moram no Nordeste. Entretanto, sugere-se questionamentos em relação ao processo de operar uma fração, no sentido de aumentar ou reduzir determinadas quantidades.	Parte-todo Operador Razão Quociente ou Divisão
Matemática: Geração Alpha 6ºano: Ensino Fundamental: anos finais	- Números racionais na forma fracionária (leitura e escrita) - Tipos de fração - Números mistos - Fração de um número - Frações equivalentes - Simplificação de frações - Comparação de frações	A ideia de fração é apresentada a partir do entendimento de parte-todo. É feita a representação das frações na reta numérica. Como informação, é trazida uma descrição sobre as frações na Grécia e na Mesopotâmia.	Parte-todo

Fonte: Elaborado pela autora

A partir dessas reflexões, percebe-se que na maioria dos casos, a concentração nos livros didáticos para introdução da fração é a partir da relação parte-todo. Na maioria dos casos, não houve uma preocupação em abordar primeiramente a gênese do conceito da fração, ou seja, sua relação com a medida. Entende-se que seria importante que outros significados da fração – operador, divisão/quociente ou razão – deveriam ser abordados em um processo que permita ao estudante refletir e compreender os aspectos essenciais da fração.

Outro documento em que se apoia a presente pesquisa em relação ao trabalho com frações e música são as Diretrizes Municipais de Uberlândia (UBERLÂNDIA, 2018) que consistem em um direcionamento teórico e metodológico do currículo para a Rede Municipal de ensino de Uberlândia.

Em relação à utilização da música na aprendizagem, esse documento indica que esta "[...] exerce função relevante no incentivo das relações sociais de todos os sujeitos envolvidos nos mais distintos processos de ensino e aprendizagem." (UBERLÂNDIA, 2018, p. 103). Além disso, esse mesmo documento ressalta as possibilidades da articulação da música com outras áreas do conhecimento como a Matemática. Esse fato é demonstrado na história, como por exemplo, pelo matemático "Pitágoras (571/0-497/6 a.C.) estabeleceu as bases matemáticas nas quais a música se assentava. Platão (429-348 a.C.) compreendia a educação musical como parte das aspirações pedagógicas indispensáveis à formação moral e política." (UBERLÂNDIA, 2018, p. 125).

No século VI. a.C, segundo Abdounur (2002), os primeiros indícios da relação entre a Matemática e a Música, surgiram a partir dos experimentos feitos pelo matemático Pitágoras, em um instrumento chamado monocórdio, "[...] um instrumento composto por uma única corda estendida entre dois cavaletes fixos sobre uma prancha ou mesa possuindo, ainda, um cavalete móvel colocado sobre a corda para dividi-la em duas seções." (ABDOUNUR, 2002, p. 4).

O objetivo de Pitágoras, segundo Abdounur (2002), era descobrir porque os sons consonantes, só eram ouvidos no monocórdio, se fosse pressionado um ponto que tinha seu comprimento em relação à origem, representado por **uma fração composta somente por números inteiros de 1 a 4.**

> Pitágoras deu continuidade a seus experimentos investigando a relação entre o comprimento de uma corda vibrante e o tom musical produzido por ela. Caracterizando a primeira lei descoberta empiricamente, o experimento de Pitágoras e ainda a primeira experiência registrada na

> história da ciência, no sentido de isolar algum dispositivo para observar fenômenos de forma artificial. (ABDOUNUR, 2002, p. 5).

Os números inteiros de 1 a 4, eram chamados pelos pitagóricos de **números perfeitos** e eram objetos de estudos dessa escola, pois “[...] acreditavam que todo conhecimento reduzir-se-ia a relações numéricas posicionando-as como fundamento da ciência natural.” (ABDOUNUR, 2002, p. 7-8).

Surge, então, o interesse dos pitagóricos em saber a coincidência de frações compostas por números perfeitos, com sons agradáveis ao ouvido humano.

Para facilitar a compreensão do leitor acerca da explicação que será feita abaixo, considere um conjunto com **apenas** de 8 sons (notas), sendo respectivamente nessa sequência: **dó ré mi fá sol lá si dó,** sendo **dó** a corda solta[7]. O processo da análise do monocórdio, segundo Abdounur (2002, p. 5) se deu da seguinte forma:

> Em seu experimento, Pitágoras observou que pressionando um ponto $\frac{3}{4}$ do comprimento da corda em relação a sua extremidade - o que equivale a reduzi-la $\frac{3}{4}$ do seu tamanho original - e tocando a seguir, ouvia-se uma quarta acima do tom emitido pela corda inteira.

Dessa forma, Abdounur (2002), aponta que Pitágoras chegou às seguintes conclusões:

a) Se fosse apertada a corda no ponto situado a $\frac{1}{2}$ do comprimento da corda original em relação a sua extremidade, seria ouvido o mesmo som da corda solta, só que mais agudo **(oitava do som original)**.
b) Se a corda solta for o **dó** à **oitava nota** logo após o primeiro dó será outro **dó (mais agudo)**.
c) b) Se fosse apertada a corda no ponto situado a $\frac{2}{3}$ do comprimento da corda original em relação a sua extremidade, seria ouvido uma quinta acima do som da corda solta.
d) Se a corda solta for o **dó** à **quinta nota** logo após o primeiro dó será o **sol**.

Apesar das situações elaboradas para essa pesquisa não envolverem a questão do experimento do monocórdio de Pitágoras, discorre-se sobre esses fatos para conhecimento dos leitores e para incentivar outros docentes a pesquisarem sobre esse tema.

[7] Corda solta significa quando tocamos uma corda no violão sem pressionar em algum ponto dela.

4. Desenvolvimento da Pesquisa

As frações têm sido um dos conceitos matemáticos mais estudados devido ainda aos problemas relacionados ao ensino de frações que

> [...] pode ser constatado questionando a um estudante do Ensino Fundamental, Médio e até mesmo do Ensino Superior, sobre, por exemplo, por que, na soma de frações com denominadores iguais repete-se o denominador e soma-se os numeradores, enquanto na soma de frações com denominadores diferentes, recorre-se ao mínimo múltiplo comum? A resposta é: *Porque é a regra*! (OLIVEIRA; BASNIAK, 2021, p. 9).

Dentre as dificuldades apresentadas pelos estudantes atualmente, se encontra a dificuldade de compreender as frações e seus diversos significados. Para Oliveira e Bashiak (2021, p. 8) recorrendo a Kieren (1976), alegam que o estudo das diferentes formas de interpretações das frações é um momento oportuno para "[...] compreender adequadamente os aspectos algébricos que são inerentes aos conceitos de números racionais."

A partir de levantamentos bibliográficos realizados ao longo do desenvolvimento deste estudo e apresentado anteriormente, percebeu-se a grande escassez de pesquisas voltadas a abordar o significado das frações a partir de situações relacionadas à construção de instrumentos musicais, especialmente em relação ao Ensino Fundamental II.

Outro aspecto que conduziu aos objetivos deste estudo foi o interesse da pesquisadora na elaboração dessa proposta, que se fundamentou em dois aspectos pessoais: a elaboração da dissertação e o desejo pessoal de ensinar o conteúdo de frações aliado à música.

Mediante os fatores mencionados acima, elaborou-se a seguinte **questão de pesquisa**: *Que conhecimentos sobre fração são revelados por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental ao construírem instrumentos musicais em aulas de matemática?*

Com o intuito de responder à questão de investigação, tem-se como **objetivo principal** deste estudo analisar quais são os conhecimentos sobre fração que dois alunos do 8º ano do Ensino Fundamental apresentam durante a construção de instrumentos musicais e, como **objetivos específicos** tem-se: investigar e analisar se os sentidos estabelecidos por alunos sobre fração estão relacionados com os diversos significados culturalmente estabelecidos durante a história da humanidade; e, analisar e discutir os significados da fração ainda não apropriados pelos alunos.

Assim, para desenvolver esse estudo, buscou-se compreender os significados de fração como medida (CARAÇA, 1951; ROQUE, 2012), divisão (PIETERZACK, 2000); razão (OLIVEIRA, BASHIAK 2021); operador (MOREIRA; CAMPOS, 2010), tendo em vista a perspectiva de considerar o desenvolvimento do conceito de fração como um dos elementos para se compreender seus significados. Foi também abordado, a exploração da representação decimal e a e a porcentagem (COELHO, 2018) tendo em vista sua importância no contexto da sociedade atual.

O propósito de se observar os significados que os estudantes possuem em relação ao conceito de fração vem ao encontro do entendimento da Matemática não como uma ciência pronta e acabada, mas fruto das manifestações humanas (CARAÇA, 1951), estando assim em constante transformação.

Para se alcançar o objetivo de pesquisa, foram elaboradas, pela pesquisadora, situações que se configuraram a partir de uma história em quadrinhos (BARBOSA *et al.,* 2004), tendo como contexto a construção dos seguintes instrumentos musicais: Ganzá, Pau de chuva, Pífano e Flauta de Pan.

Devido ao fato de a pesquisadora não atuar, à época, em nenhuma rede de ensino em função da pandemia causada pelo vírus Sars-Cov 2, foram convidados uma aluna e um aluno para participarem desta pesquisa. Para preservar a identidade dos alunos foram adotados os nomes fictícios Maria e João. Assim, este estudo caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa, com 2 estudantes do 8º ano da rede municipal de ensino de Uberlândia, MG.

Para a obtenção do material para análise, optou-se por gravações de vídeos pelo celular, já que a pesquisadora não dispunha de uma boa filmadora ou notebook para realizar a gravação. Todas as transcrições foram realizadas pela pesquisadora e registradas em um arquivo no Canva[8]. Recorreu-se também aos registros feitos pelos estudantes e analisou-se as falas dos estudantes que expunham suas tentativas em expressar seus registros. Dessa forma, buscou-se por meio do diálogo e do registo escrito, analisar o pensamento em relação a compreensão dos estudantes sobre o conceito de fração. A justificativa para fazer o armazenamento dos dados nesse aplicativo é devido a sua praticidade e por permitir salvar automaticamente alterações que são realizadas no arquivo.

[8] "Lançado em 2013, o Canva é uma ferramenta online que tem a missão de garantir que qualquer pessoa no mundo possa criar qualquer design para publicar em qualquer lugar". Disponível em: <https://www.canva.com/pt_br/about/Canva>. Acesso em 05 ago. 2022.

Para a realização das aulas durante a pesquisa empírica mesmo mediante ao contexto da pandemia do Covid-19, as situações de ensino elaboradas pela pesquisadora foram realizadas com os alunos presencialmente em sua casa, respeitando os protocolos de segurança sanitária vigentes em julho de 2021, prescritas pela Organização Mundial de Saúde (OMS) como a utilização das máscaras e local bem amplo e arejado. A escolha de realizar a atividade de forma presencial, ocorreu devido ao fato de a forma remota dificultar a manipulação de objetos sonoros e uma boa captação do som em tempo real, por causa das intercorrências que podem ocorrer devido ao sinal da internet.

As aulas foram realizadas às segundas-feiras, à tarde, nos meses de Junho e Julho de 2021, pois esse dia era propício para os estudantes e para a pesquisadora. Cada encontro teve a duração de 2 horas.

4.3. Os participantes

Os estudantes convidados para participar deste estudo são chamados pelos nomes fictícios Maria e João com o intuito de preservar suas identificações.

A aluna Maria, há época com 13 anos e estava matriculada no 8º ano do Ensino Fundamental. Era colega de João, pois estudavam na mesma escola. Não fizeram o sétimo ano juntos, pois estudaram em turnos separados. Gostava de matemática, tinha conhecimento musical e estudava no conservatório da cidade há 1 ano e meio. Tocava os instrumentos musicais piano e violão.

O aluno João tinha, há época com 13 anos e estava no 8º ano do Ensino Fundamental. Era amigo de Maria e havia sido aluno da pesquisadora no sexto ano, momento em que foi ministrado o conteúdo de frações. Tinha um pouco de dificuldade em matemática e havia iniciado seus estudos musicais com violão, mas no momento da pesquisa havia parado. Não tinha conhecimento da parte teórica musical.

4.4. A proposta

Para uma melhor compreensão das situações elaboradas e propostas apresenta-se os instrumentos musicais Ganzá, Pífano, Pau de Chuva e Flauta de Pan.

4.4.1. Ganzá

O Ganzá (Figura 13) é um instrumento musical de percussão parecido com o chocalho. É feito de um tubo de metal ou plástico em formato cilíndrico, preenchido com areia ou grãos de cereais. Por meio de pequenos giros, o músico é capaz de controlar a maneira como os grãos se movimentam dentro do tubo, permitindo a variação de intensidade de acordo com os tempos fortes e fracos do ritmo[9]. A sua construção, neste estudo, teve por objetivo explorar o significado de fração como medida. Os materiais necessários para esta construção foram 2 latas de milho, grãos de arroz, pedras pequenas, fita adesiva, tinta spray, folha sulfite.

Figura 15: Um tipo de Ganzá

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ganz%C3%A1. Acesso em 09 abr. 2021.

4.4.2. Pífano

O Pífano (Figura 14) é um instrumento musical conhecido como uma pequena flauta transversal com um som mais intenso. Originalmente, eram feitos de materiais encontrados nas matas como bambu, taquara, taboca e até ossos. Normalmente, possuem sete furos, sendo um para o sopro e seis para as notas. Estudiosos atribuem sua origem a povos indígenas e outros na Suíça[10]. A sua construção, neste estudo, teve por objetivo explorar o significado de fração como divisão e quociente. Os materiais necessários para esta construção foram: cano de PVC, pincel preto, tinta spray.

[9] https://www.policiamilitar.mg.gov.br/portal-pm/deeas/conteudo.action?conteudo=229516&tipoConteudo=noticia#:~:text=Ganz%C3%A1%20%C3%A9%20um%20instrumento%20musical,de%20cereais%20ou%20pequenas%20contas. Acesso em 11 jul. 2022.
[10]http://www.arte.seed.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=131#:~:text=Independente%20de%20sua%20origem%20ser,para%20animar%20festas%20e%20eventos. Acesso em 11 jul. 2022.

Figura 66: Pífano

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/P%C3%ADfano. Acesso em 09 abr. 2021

4.4.3. Pau de Chuva

O Pau de Chuva (Figura 15) é um instrumento musical que, assim como o Pífano, se assemelha a uma flauta, cujo o nome dado por seu som ser semelhante ao cair da chuva. É de origem chilena e de fácil manuseio[11]. Sua construção, neste estudo, teve por objetivo explorar o significado de fração como porcentagem. Os materiais necessários para sua construção foram: rolo do papel alumínio ou cano de PVC de 32 cm ou embalagem do jogo de varetas, pregos e arroz.

Figura17: Pau de Chuva

Fonte: produto.mercadolivre.com.br/MLB-1308564701-pau-de-chuva-efeito-de-percusso-instrumento-musical-1-metro-_JM. Acesso em 11 jul. 2022.

[11] Disponível em: https://museuvale.com/paginas/4/42. Acesso em 11 jul. 2022.

4.4.4. Flauta de Pan

A Flauta de Pan (Figura 16) é um instrumento musical de origem indígena e, segundo estudiosos, composto de canos abertos em uma extremidade e fechados na outra, dispostos verticalmente em uma ou duas fileiras, todos de diferentes comprimentos e diâmetros, o que determina o som e o tipo de cada um deles[12]. Sua construção, neste estudo, teve por objetivo explorar o significado de fração como medida, razão, divisão, quociente e porcentagem. Os materiais necessários para esta construção foram canudos médios, fita adesiva, massinha de modelar e papel cartão.

Figura 78: Flauta de Pan

Fonte: Arquivo da autora

Apresentados os instrumentos musicais escolhidos para construção, apresenta-se a história em quadrinhos elaborada para a proposta e que se constitui no produto educacional desta pesquisa.

4.5. A história em quadrinhos

Será feita uma exposição acerca da história em quadrinhos elaborada pela pesquisadora com objetivo de orientar a construção de instrumentos musicais. É importante ressaltar que apesar dos quadrinhos estarem apresentados na sequência em que estão, a construção de cada instrumento musical, permite o diálogo em relação a um aspecto da

---

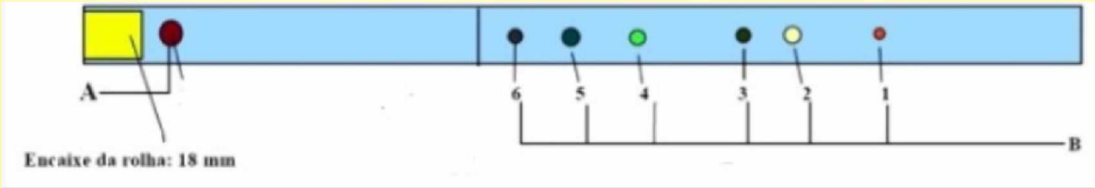
[12] Disponível em: https://www.ostiposde.com/tipos-de-flauta-de-pan/#:~:text=A%20flauta%20de%20p%C3%A3%20ou,cultura%20Huari%2C%20localizada%20no%20Peru . Acesso em 12 jul. 2022.

fração, podendo assim, conforme os objetivos do professor, ser feita somente a utilização de uma parte da história em quadrinhos ou fazer a apresentação dos quadrinhos em outra ordem.

Figura 8: História em Quadrinhos


APÓS ESSAS PESQUISAS, OS ALUNOS PASSARAM A CONSTRUIR OS INSTRUMENTOS COMEÇANDO PELO GANZÁ.
PARA ISSO, OS ALUNOS PRECISARAM DE GRÃOS DE ARROZ, PEDRAS PEQUENAS, MOEDAS, AREIA, FITA E DUAS LATINHAS DE MILHO.
A PROFESSORA ENTÃO DISSE...
PARA CONSTRUIR O GANZÁ, VOCÊS PRECISARÃO COLOCAR TODOS OBJETOS DENTRO DA LATA QUE TROUXERAM DE FORMA A PREENCHER A TERÇA PARTE DA LATA.
NESSE MOMENTO, UM DOS ALUNOS QUESTIONOU:
PROFESSORA, ESQUECEMOS A RÉGUA. COMO FAREMOS A MEDIÇÃO?
Se vocês estivessem no lugar dos estudantes, como vocês fariam para resolver esse problema?

NO OUTRO DIA, OS ALUNOS LEMBRARAM DE TRAZER A RÉGUA E A PROFESSORA SOLICITOU QUE OS ESTUDANTES COLETIVAMENTE, CONSTRUÍSSEM O PÍFANO COM UM CANO DE PVC DE MEIA QUE TINHA 32 CM DE COMPRIMENTO. ELA ENTREGOU A SEGUINTE IMAGEM PARA OS ESTUDANTES:



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=_wthF880qmU (adaptada) Acesso em 28/04/2021

E UMA FOLHA COM AS SEGUINTES MEDIDAS...

Distância do ponto B até os furos:

Furo 1: $\frac{11}{2}$

Furo 2: $\frac{84}{10}$

Furo 3: $10\ cm$

Furo 4: $12\ \frac{4}{5}$

Furo 5: $\frac{64}{5}$

Furo 6: $17{,}1\ cm$

Distância do ponto a até os furos: $\frac{7}{2}$

Diâmetro dos furos:

Furo 1: $\frac{6}{10}\ cm$

Furo 2: $\frac{8}{10}\ cm$

Furo 3: $0{,}6\ cm$

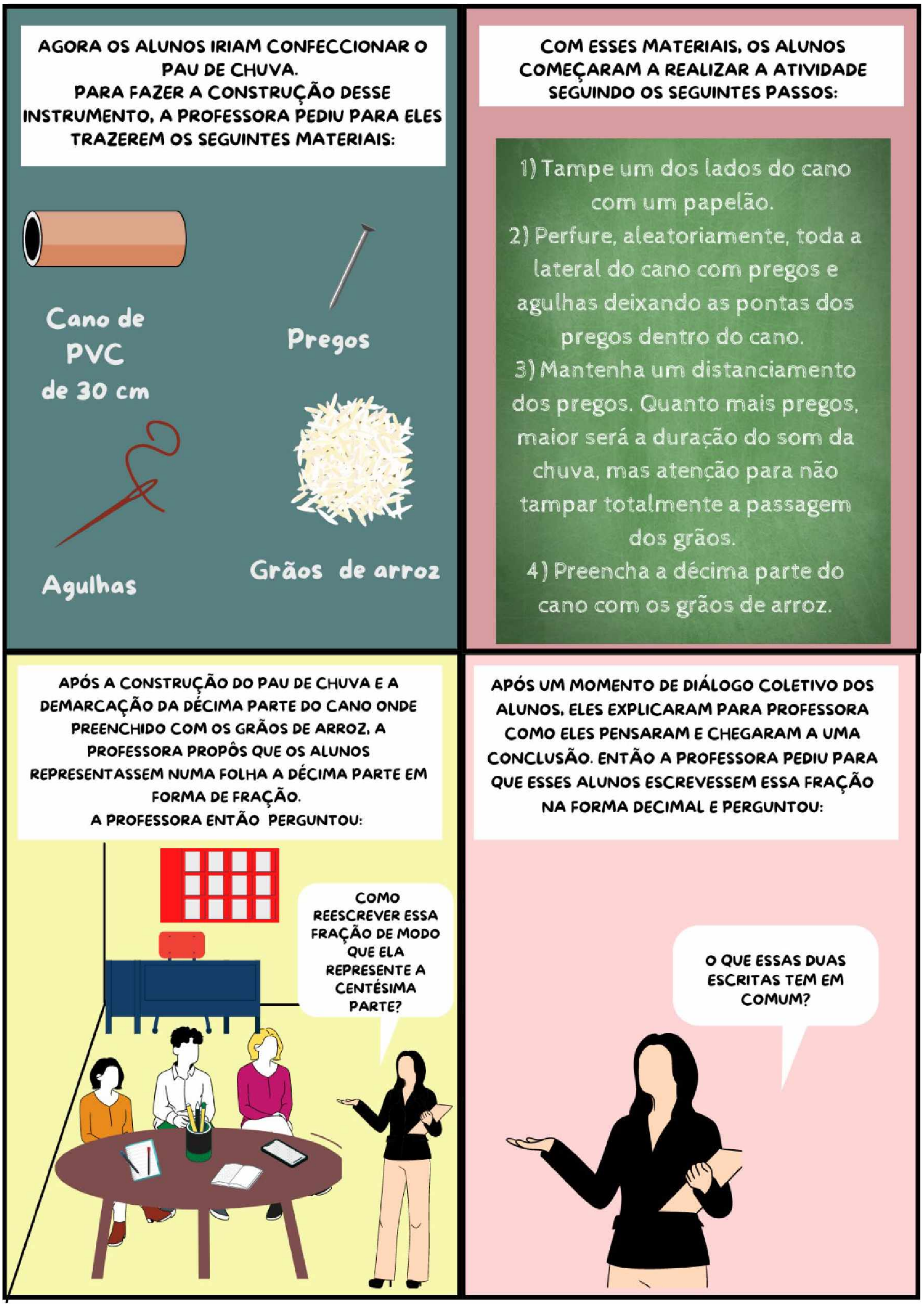
Furo 4: $0{,}8\ cm$

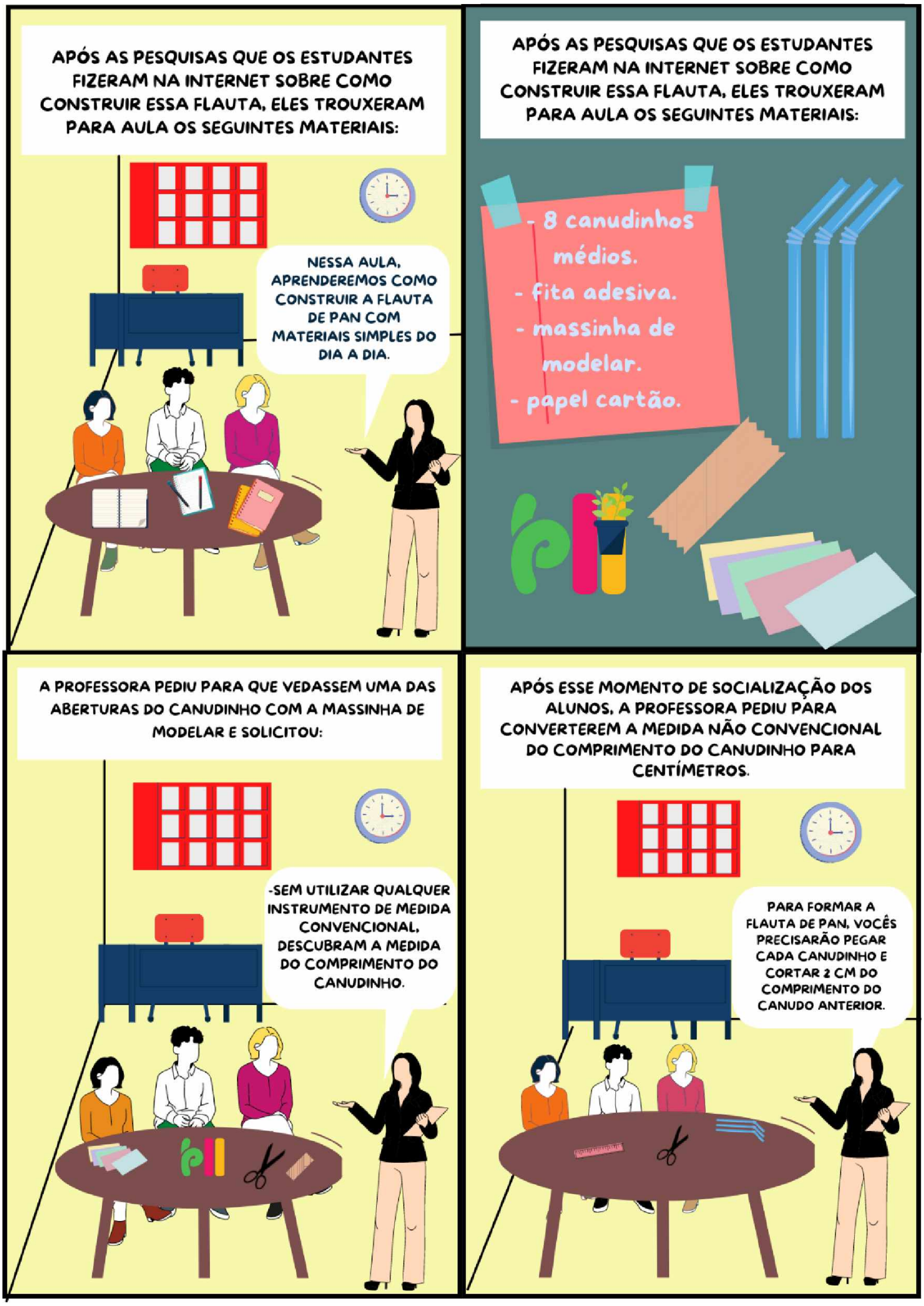
Furo 5: $\frac{17}{2}\ cm$

Furo 6: $0{,}9\ cm$

Furo do sopro: $\frac{9}{10}\ cm$

Se vocês estivessem no lugar dos alunos da história, como vocês fariam para demarcar as distâncias no cano de PVC?


AGORA OS ALUNOS IRIAM CONFECCIONAR O PAU DE CHUVA.
PARA FAZER A CONSTRUÇÃO DESSE INSTRUMENTO, A PROFESSORA PEDIU PARA ELES TRAZEREM OS SEGUINTES MATERIAIS:
Cano de PVC de 30 cm
Pregos
Agulhas
Grãos de arroz
COM ESSES MATERIAIS, OS ALUNOS COMEÇARAM A REALIZAR A ATIVIDADE SEGUINDO OS SEGUINTES PASSOS:
1) Tampe um dos lados do cano com um papelão.
2) Perfure, aleatoriamente, toda a lateral do cano com pregos e agulhas deixando as pontas dos pregos dentro do cano.
3) Mantenha um distanciamento dos pregos. Quanto mais pregos, maior será a duração do som da chuva, mas atenção para não tampar totalmente a passagem dos grãos.
4) Preencha a décima parte do cano com os grãos de arroz.
APÓS A CONSTRUÇÃO DO PAU DE CHUVA E A DEMARCAÇÃO DA DÉCIMA PARTE DO CANO ONDE PREENCHIDO COM OS GRÃOS DE ARROZ, A PROFESSORA PROPÔS QUE OS ALUNOS REPRESENTASSEM NUMA FOLHA A DÉCIMA PARTE EM FORMA DE FRAÇÃO.
A PROFESSORA ENTÃO PERGUNTOU:
COMO REESCREVER ESSA FRAÇÃO DE MODO QUE ELA REPRESENTE A CENTÉSIMA PARTE?
APÓS UM MOMENTO DE DIÁLOGO COLETIVO DOS ALUNOS, ELES EXPLICARAM PARA PROFESSORA COMO ELES PENSARAM E CHEGARAM A UMA CONCLUSÃO. ENTÃO A PROFESSORA PEDIU PARA QUE ESSES ALUNOS ESCREVESSEM ESSA FRAÇÃO NA FORMA DECIMAL E PERGUNTOU:
O QUE ESSAS DUAS ESCRITAS TEM EM COMUM?


APÓS AS PESQUISAS QUE OS ESTUDANTES FIZERAM NA INTERNET SOBRE COMO CONSTRUIR ESSA FLAUTA, ELES TROUXERAM PARA AULA OS SEGUINTES MATERIAIS:
NESSA AULA, APRENDEREMOS COMO CONSTRUIR A FLAUTA DE PAN COM MATERIAIS SIMPLES DO DIA A DIA.
APÓS AS PESQUISAS QUE OS ESTUDANTES FIZERAM NA INTERNET SOBRE COMO CONSTRUIR ESSA FLAUTA, ELES TROUXERAM PARA AULA OS SEGUINTES MATERIAIS:
- 8 canudinhos médios.
- fita adesiva.
- massinha de modelar.
- papel cartão.
A PROFESSORA PEDIU PARA QUE VEDASSEM UMA DAS ABERTURAS DO CANUDINHO COM A MASSINHA DE MODELAR E SOLICITOU:
-SEM UTILIZAR QUALQUER INSTRUMENTO DE MEDIDA CONVENCIONAL, DESCUBRAM A MEDIDA DO COMPRIMENTO DO CANUDINHO.
APÓS ESSE MOMENTO DE SOCIALIZAÇÃO DOS ALUNOS, A PROFESSORA PEDIU PARA CONVERTEREM A MEDIDA NÃO CONVENCIONAL DO COMPRIMENTO DO CANUDINHO PARA CENTÍMETROS.
PARA FORMAR A FLAUTA DE PAN, VOCÊS PRECISARÃO PEGAR CADA CANUDINHO E CORTAR 2 CM DO COMPRIMENTO DO CANUDO ANTERIOR.

Fonte: Elaborado pela autora

Após a leitura da história em quadrinhos, a pesquisadora explicou aos estudantes que eles fariam a construção do Ganzá com a utilização de duas latinhas e alguns objetos para colocar dentro delas como arroz, pedras etc. Para a confecção desse instrumento, é necessário encher a terceira parte do comprimento total das duas latinhas juntas.

Vale lembrar que, segundo as pesquisas feitas até o presente momento, a quantidade de grãos colocada no ganzá não influencia na questão sonora, pois o aspecto do som está relacionado com a frequência das moléculas de ar. A seleção da terça parte do comprimento da latinha ocorreu em função das orientações encontradas para a construção do Ganzá[13].

Já para a realização da construção do Pífano, foi entregue para cada estudante um cano de PVC de 32 cm e uma régua. O objetivo seria a demarcação de cada furo do instrumento, considerando as distâncias estabelecidas. Como as distâncias de cada furo, estavam escritas na forma de fração, seria necessário estabelecer estratégias para conseguirem realizar as demarcações.

Em relação a construção do Pau de Chuva, solicitou-se aos alunos que preenchessem a décima parte do cano com arroz e fizessem a demarcação dessa distância. O intuito é utilizar desse momento oportuno, para trabalhar ações que possibilitem explorar a escrita decimal como porcentagem.

Na Flauta de Pan, utilizou-se canudinhos para realizar a construção. Nesse momento, objetivo foi revisar os significados de fração, além da escrita decimal e percentual. Após a leitura da história em quadrinhos foram entregues os materiais para a realização da proposta que foi organizada da seguinte forma:

-Encontrar a medida do comprimento dos canudos, que eram de mesma medida, sem nenhum instrumento de medida não convencional.

- Fazer a conversão dessa medida para centímetros.

- Cortar cada um dos canudinhos e fazer uma comparação do tamanho de cada um com o comprimento total.

- Fazer essa representação da comparação por meio de porcentagem.

É importante ressaltar que os principais conceitos investigados a partir da exploração da Flauta de Pan e do Pau de Chuva não se referiam aos significados da fração, mas sim a outras formas de representação da escrita fracionária, que de fato são resultados decorrentes do processo da fração como divisão. Tendo em vista, a relevância da forma de escrita

[13] Disponível em: https://www.jam.mus.br/construcao-de-instrumentos-musicais-em-casa/. Acesso em 11 jul. 2022.

percentual e decimal para a sociedade atual é que foram elaborados problemas que possibilitassem a exploração dessas representações. Entretanto, para as análises nesta pesquisa a atenção voltou-se apenas para a construção do Ganzá e do Pífano, sendo esses momentos os de maior relevância para os objetivos da mesma.

Outro aspecto importante a pontuar é que a presente pesquisa não tem como intuito relacionar os sons com as frações, mas sim investigar significados de fração a partir da construção dos instrumentos musicais com materiais recicláveis.

4.6. Organização do material empírico

Para análise do material obtido na pesquisa empírica, buscou-se organizá-lo por meio de episódios e cenas (MOURA, 1996; 2004):

> Os episódios poderão ser frases escritas ou faladas, gestos e ações que constituem cenas que podem revelar interdependência entre os elementos de ação formadora. Assim, os episódios não são definidos a partir de um conjunto de ações lineares. Pode ser que uma afirmação de um participante de uma atividade não tenha impacto imediato sobre os outros sujeitos da coletividade. Esse impacto poderá estar revelado em um outro momento em que o sujeito foi solicitado a utilizar-se de algum conhecimento para participar de uma ação no coletivo (MOURA, 2004, p. 276).

Figura 20: Episódios da proposta da pesquisa

Fonte: Elaborado pela autora

As cenas, para esse mesmo autor, fazem parte dos episódios e permitem ao pesquisador fazer uma análise sobre o processo de reflexão da pesquisa. É importante ressaltar, que a proposta foi subdividida em 3 momentos, mas apenas o primeiro deles volta-se para a construção dos instrumentos musicais. Nesse primeiro momento, foram propostas as 4 construções dos instrumentos já apresentados, entretanto foram escolhidos somente o Ganzá e o Pífano para análise neste estudo. Tal escolha decorre do fato destes serem os instrumentos que indicavam a abordagem das frações e seus significados e, os demais instrumentos tinham o intuito de explorar as características da representação por porcentagem e fazer uma recapitulação da fração como medida.

Dessa forma, os episódios e as cenas que emergiram da análise do material empírico para este estudo foram:

Episódio 1: Construindo o Ganzá

Cena 1: Instrumentos de medida não convencionais

Cena 2: O que é medir?

Cena 3: O que fazer com a sobra?

Episódio 2: Construindo o Pífano

Cena 1: O que significa fração como operador?

Cena 2: Iniciando o diálogo sobre fração como divisão a partir da medida.

Cena 3: Recordando elementos essenciais da fração como divisão a partir da tentativa de representar a fração como um número decimal

Apresentado o modo de organização do material empírico, passa-se à sua análise na seção seguinte.

5. Análises e Reflexões

A partir da organização inicial do material empírico mencionado anteriormente, esta seção tem como objetivo analisar os significados apropriados pelos estudantes em relação ao conceito de fração a partir da construção de instrumentos musicais.

5.1 Episódio 1 - Construindo o Ganzá

Neste episódio, analisamos algumas cenas que revelam, por meio das ações dos estudantes, a necessidade que eles tiveram de estabelecer seus objetivos e ações para resolver o problema da situação proposta que era, inicialmente, descobrir uma unidade de medida padrão.

5.1.1 Cena 1: Instrumentos de medida não convencionais

Esta cena tem seu início com a solicitação da pesquisadora para que os alunos, sem qualquer instrumento de medida convencional, encontrassem a terceira parte do comprimento da junção das duas latinhas e colocassem os grãos de arroz na parte encontrada.

Figura 91: Registro desse momento

Fonte: Elaborado pela autora

A escolha por realizar uma proposta que proporcione em sua prática a discussão dos significados da fração como medida encontra fundamento em Saito (2017, p. 919), quando alega que "[...] não devemos ensinar matemática por meio da história, nem repetir o percurso histórico na formação de um conceito matemático, mas [...] buscar no processo histórico o movimento do pensamento no contexto de formação deste conceito". Neste sentido, a discussão ocorrida nesta cena foi provocada pelo seguinte problema: *Como preencher a* *terceira parte do comprimento das latinhas, sem a utilização de qualquer instrumento de medida não convencional?*". Tal provocação da professora-pesquisadora gerou o seguinte diálogo:

> **Maria-** Pode medir com o lápis?
> **Professora-** Vocês irão fazer do jeito que vocês quiserem. Aqui está uma folha para vocês fazerem algumas anotações.
> **João-** Vou usar meu dedo, 15 cm.
> **Professora-** Como você tem certeza que são 15 cm?
> **Maria-** Esse tamanho da latinha é igual a um palmo meu. [Maria comparando as latinhas com seu palmo].
> **Professora-** Lembrando que queremos encontrar a terceira parte gente!
> **Maria-** Você quer a terça parte de uma ou das duas latinhas?
> **Professora-** Das duas juntas.

Mesmo os alunos sendo questionados a buscarem uma unidade de medida padrão não convencional, ainda estavam presos à questão da utilização da unidade de medida centímetros e parecem não compreender o significado de medida como uma comparação entre dois objetos (CARAÇA, 1951) e que a modificação do objeto utilizado como padrão influencia uma nova forma de registrar a representação do comprimento em forma numérica, como ocorre no seguinte diálogo:

> **João-** Eu na minha opinião acho que é 5. Então eu acho que tudo mede 15 cm e um terço é 5cm.
> **Professora-** Se vocês tivessem a régua, como vocês iriam pensar?
> **Maria-** Eu ia medir em centímetros e dividir por 3!
> **Professora-** Mas, vocês não têm a régua. Qual é a primeira coisa que vocês deveriam fazer?
> **João-** Saber a medida!
> **Professora-** Mas a régua é o que para vocês?
> **João-** O dedo!
> **Maria-** O palmo.
> **Professora-** O palmo é o que?
> **Maria-** Um instrumento de medição.
> **Professora-** O que então vocês vão escolher para medir o objeto? Seu dedo?
> **Maria-** Meu dedo.
> **João-** Pode ser o celular ou uma caneta.

Na tentativa de encontrarem uma unidade de medida não padronizada, os alunos buscaram diversos tipos de objetos que pudessem auxiliar na satisfação da necessidade promovida pela situação proposta.

Maria escolheu utilizar seu dedo como unidade de medida. Essa ação reflete uma estratégia muito comum vivenciada pela humanidade, que em meio às situações do cotidiano, utilizavam partes do corpo humano como unidade de medida (ROQUE, 2012).

O aluno João estava indeciso sobre qual instrumento escolher para utilizar como unidade de medida: celular, caneta etc., mas decidiu utilizar o instrumento pífano.

Tendo em vista que este objeto tinha o comprimento maior do que a latinha, a decisão do estudante contribuiu para desencadear um novo diálogo para a discussão do significado de medir. Mediante a dificuldade apresentada pelos estudantes em refletir sobre o conceito *medir*, a pesquisadora orientou a discussão propondo que observassem a ação de Maria ao associar seu dedo com o comprimento das latinhas, chegando à conclusão sobre um dos elementos fundamentais da medição: a comparação entre duas grandezas tendo estabelecimento de uma unidade padrão (CARAÇA, 1951).

Maria sugeriu ao seu colega, que escolhesse a embalagem de um chocolate - prestígio - para realizar a medição, pois ela tinha o comprimento de sua largura ou de sua altura menor que o comprimento total das latinhas.

A essa dificuldade dos alunos em relação à medição como uma comparação de grandezas, Araújo (2013) revela que pode estar associada a fatores como:

> [...] a falta de trabalho com as grandezas e as medidas em situações que estão ao redor do aluno, não apresentando ocasiões de comparar, classificar, ordenar os objetos impossibilita que os alunos entendam conceitos básicos neste âmbito, já que até os livros apresentam atividades que envolvem apenas operação com números-medidas, neste caso, trabalhando apenas a aritmética ao invés dos exercícios que abranjam as grandezas e medidas. (ARAUJO, 2013, p. 24).

Concorda-se com o autor, pois a abordagem dos conceitos matemáticos como a medida, geralmente é feita de uma forma mais manipulativa e aritmética e, muitas vezes, como Fiorentini (1994) afirma, o modo trabalhado em sala de aula tem como influência a maneira como quem ensina concebe a Matemática. De fato, esse tipo de concepção, impede que sejam exploradas situações que abordem a gênese do conceito, os quais segundo Moura *et al*. (2010), são frutos das ações e necessidades mediadas pelo coletivo.

Outro aspecto que pode ser percebido durante esse momento e que contempla um dos elementos históricos, como descrito por Roque (2012), é a decisão de Maria ao escolher o seu dedo como unidade de medida. Essa ação reflete uma estratégia muito comum vivenciada pela humanidade, que em meio às situações do cotidiano, utilizava-se do corpo humano como unidade de medida.

> Nos tempos antigos, cada região possuía seu próprio sistema de medidas, estabelecidas de forma arbitrária e imprecisa, e na maioria das vezes baseadas no corpo humano: palmo, pé, polegada, jarda, côvado. Neste caso, tratava-se de um período em que as noções de medida são

> antropométricas e por isso, Kula (1980) o denomina como um período antropométrico. (MOURA *et al.*, 2019, p. 7-8)

O fato de Maria se colocar no movimento de investigação de uma situação inesperada - não poder utilizar instrumentos de medida não convencionais -, vem demonstrar de forma prática o que Marco (2004) defende sobre a resolução de problemas ser orientada a partir de situações que façam emergir necessidades ao indivíduo conduzindo-o a buscar processos próprios de resolução.

Um aspecto interessante a se atentar foi a decisão de João em escolher o pífano como instrumento de comparação, pois possibilitou um momento oportuno para a investigação do significado da ação de *medir*, uma vez que os estudantes tiveram dificuldade em como estabelecer uma associação entre o comprimento da latinha e o comprimento do pífano.

5.1.2 Cena 2: O que é medir?

Nesta cena analisamos o momento em que João escolheu o Pífano para ser utilizado como unidade de medida. A partir desta escolha, ocorreu o seguinte diálogo:

> **Professora-** João, por que você escolheu um objeto maior que a latinha? Sua unidade é essa? Quando eu tenho uma unidade para medir alguma coisa, o que eu estou fazendo? Quando Maria escolheu o dedo, o que ela estava tentando fazer?
> **João-** Medir a latinha?
> **Professora-** O que é medir?
> **João-** Medir é medir...
> **Professora-** Maria, o que você está fazendo com o tamanho do seu dedo e o comprimento da latinha?
> **João-** Uma conta?
> **Maria-** Completando...
> **Professora-** Fale mais.... Por exemplo, se eu colasse vocês dois de costas e fosse tentar descobrir a altura de vocês o que eu estaria fazendo?
> **Maria-** Comparando...
> **Professora-** O que você está fazendo com o dedo?
> **Maria e João-** Comparando o dedo com a latinha...
> **Professora-** Isso, estamos chegando lá. Nós estamos fazendo uma comparação. Mas como nós não temos a régua, a gente está comparando com outro objeto. João escolha um objeto de sua preferência para medir... Você queria usar o pífano, certo?
> **João-** Isso!
> **Professora-** Mas isso não é maior que o comprimento da latinha? Como você vai fazer essa comparação?
> **João-** Deixa eu escolher outra coisa mais simples, pois como é que vou escrever isso né?
> **Maria-** Já sei... Pega a embalagem de prestígio que você ganhou e faz com o prestígio... eu acho um pouco menor...

A decisão de João em utilizar um objeto maior que a latinha para realizar a medição, proporcionou oportunidade para que a professora direcionasse os alunos a pensarem sobre o significado da ação de medir, ou seja, a pensar sobre a ação de comparação de elementos de uma mesma grandeza (CARAÇA, 1951). João percebeu que o objeto que ele escolheu para a comparação deixaria o processo um pouco mais complexo, uma vez que a medida do comprimento da latinha que estava contido no comprimento do pífano. Apesar das sugestões da professora nesse sentido, João decidiu procurar outro objeto para estabelecer a comparação, tendo em vista a sugestão feita por Maria para que ele escolhesse um objeto que fosse menor que o tamanho da latinha - a embalagem do prestígio, por exemplo.

Pode-se dizer que essa tomada de decisão teve influências do coletivo e, conforme palavras de Moura *et al.* (2010, p. 225), a aprendizagem deve ser "[...] realizada na coletividade. Isso se dá quando aos indivíduos são proporcionadas situações que exijam o compartilhamento das ações na resolução de uma determinada situação [...]". Além disso, refletir sobre os aspectos relacionados à ação de Maria ao fazer a associação do seu dedo com o comprimento das latinhas possibilitou que os estudantes chegassem a inferir que o processo de medição é, na sua essência, uma comparação de elementos de mesma grandeza e que para isso ocorrer é necessário o estabelecimento de uma unidade de medida padrão. Percebe-se, também que, antes desse momento, os alunos não tinham clareza sobre esse aspecto da medição e isso pode ser demonstrado pela fala de João ao dizer que medir é "fazer uma conta".

Essa ação oportunizou um momento para que os estudantes dialogassem, a partir das sugestões da pesquisadora, qual seria a melhor forma de fazer a comparação em relação à disposição do papel de prestígio, ou seja, a forma como eles colocaram a embalagem (na vertical ou na horizontal) para a comparação necessária e qual seria a consequência para todo processo. Em concordância, a decisão tomada pelos estudantes foi a de que seria interessante utilizar o comprimento correspondente à largura da embalagem; começaram a medir e chegaram a um novo problema: O que fazer com parte do comprimento que não cabia a embalagem inteira do prestígio? Ou seja: **O que fazer com a sobra?**

Para resolver esse problema, os estudantes decidiram fazer dobras na embalagem de prestígio. Nesse momento, a pesquisadora trouxe para reflexão a importância de se analisar a melhor disposição do papel antes de fazer as dobras, uma vez que se fosse alterada a disposição da embalagem, influenciaria diretamente no modo como expressar a medida estabelecida como unidade padrão.

No diálogo a seguir estão presentes tais reflexões:

> **Professora-** Vamos lá João! Você usou a embalagem na horizontal ou na vertical?
> **João-** Na horizontal e depois na vertical.
> **Maria-** Se você começa medir com a embalagem na horizontal você não deveria continuar nessa mesma disposição?
> **João-** Não necessariamente...
> **Professora-** Por que não?
> **João-** Eu peguei 1 inteiro esticado para cima, depois e peguei a embalagem deitada e dobrei e medi... Posso escrever isso...
> **Professora-** Mas você concorda comigo que vai ser diferente? Medir com a embalagem considerando a largura e depois considerando o comprimento não é a mesma coisa, pois não representa a mesma unidade, o mesmo tamanho...
> **João-** Então vamos medir de novo...
> **Maria-** Não, João! Tem que ser tudo na mesma posição...
> **João-** Ah! Entendi! Tem que ser tudo na mesma medida...
> **Maria-** Se você dobrar a embalagem na horizontal, a sobra vai dar meio pacotinho.

Figura 102: Momento de escolha da disposição da embalagem do prestígio

Fonte:
https://www.bing.com/images/search?view=detailV2&ccid=VJoUPON0&id=6181AE2810599D62B95217C03EA1F7F65371F616&thid=OIP.VJoUPON0wG7LbfBslS8RTQHaHa&mediaurl=https%3a%2f%2fhttp2.mlstatic.com%2fkit-25-chocolate-nestle-prestigio-D_NQ_NP_996339-MLB26579473295_122. Acesso em 30 nov. 2021.

Os estudantes perceberam que ao fazer a comparação, houve uma sobra que não cabia uma embalagem inteira do prestígio. Portanto, essa situação dilemática (MARCO, 2004) proporcionou novas indagações aos estudantes sobre como utilizar a embalagem para medir a parte do comprimento que faltava. Essas reflexões, se assemelham ou rememoram de certa forma, os mesmos questionamentos surgidos segundo Moreira (s/d[14]), a partir da inundação

[14] Disponível em: http://www.jornalolince.com.br/2009/jan/pages/historia-origem-necessidade-numeros-fracionarios-jornalolince.com.br_edicao025. Acesso: 11 set. 2020.

das enchentes do rio Nilo onde se fazia necessária uma nova repartição igualitária e uma maneira de representar as sobras dos terrenos.

Voltando a questão do problema das sobras da medição com a embalagem de prestígio, para resolver o impasse no qual se encontravam, houve o seguinte diálogo:

> **Professora**- E esse pedacinho que sobrou? O que fazer com a embalagem para caber nesse pedaço que sobrou?
> **Maria**- cortar, tirar...
> **João**- dobrar até chegar na medida...

As ações coletivas dos estudantes em decidir pegar o papel e dobrar para caber no comprimento que faltava, revelou uma participação ativa como sujeitos do processo e, concordando com Moura (2010), isso contribuiu para que eles se sentissem

> [...] indivíduos portadores de conhecimentos, valores e afetividade que estarão presentes no modo como realizarão as ações que têm por objetivo um conhecimento de qualidade nova. Tomar consciência de que sujeitos em atividade são indivíduos é primordial para considerar a Atividade Orientadora de Ensino como um processo de aproximação constante do objeto: o conhecimento de qualidade nova. (MOURA *et al*., 2010, p.217)

O fato dos alunos buscarem realizar as dobras do mesmo tamanho, aponta para o fato que Roque (2012) defende que as repartições de terra no Egito, berço das frações, deveriam ser de forma justa e igualitária, considerando o fundamento da igualdade para todos.

Outro momento importante nessa análise foi o questionamento trazido pela pesquisadora que a forma do registro havia ficado diferente apesar de tanto a latinhas de João quanto as latinhas de Maria possuírem visualmente o mesmo comprimento. Mediante essa análise, João decidiu medir sua latinha com o seu polegar, mas percebeu que isso não resolveria o problema, pois o tamanho dos seus dedos era diferente aos da Maria. Essa ação reflete a necessidade, também apontada na história da matemática, conforme Roque (2012) demonstra, do estabelecimento de uma unidade de medida padrão, para assim possibilitar uma relação justa entre as diversas atividades coletivas como o comércio. Dias (1998) apud Sarmento (2019) faz a seguinte reflexão acerca desse aspecto:

> A universalização das medidas não surgiu como consequência dos debates humanistas ou das necessidades metrológicas do cotidiano e do comércio interno imediato, mas da expansão do comércio internacional e da dificuldade de lidar com muitos padrões de medida. (SARMENTO, 2019, p. 64).

A pesquisadora também solicitou aos estudantes que fizessem o registro, em um quadro, da medida do comprimento total da latinha para que depois fossem analisados os resultados encontrados.

Quadro 4: Registro da medida do comprimento total da latinha

Estudante	Instrumento de medida	Comprimento total da latinha
Maria	Seu polegar	3 polegares e meio polegar
João	Embalagem de prestígio	1 prestígio e 10 dobras

Fonte: Elaborado pela autora

Após esse registro, a pesquisadora questionou o motivo de os registros das medidas serem diferentes, uma vez que ambos tinham latinhas com comprimentos iguais. Os alunos explicaram que era devido ao fato de terem escolhido unidades de medidas diferentes. A pesquisadora lembrou que na história da humanidade, diversas civilizações também não tinham a mesma unidade de medida: no Egito usavam o cúbito do faraó, outras civilizações o palmo, o polegar, o côvado etc (ROQUE, 2012).

Analisando o fato que, tanto Maria como João após o processo de medição, encontraram medidas diferentes, a professora-pesquisadora conduziu os estudantes a refletirem que se somente um indivíduo tivesse o registro da escrita da medida do comprimento das latinhas, não seria possível identificar se os instrumentos musicais deles tinham comprimentos iguais ou diferentes. Esse fato, conduziu os estudantes a buscarem um único objeto como unidade de medida padrão.

5.1.3 Cena 3: A escolha da unidade de Medida Padrão

João e Maria decidiram utilizar a borracha de Maria como instrumento de medida padrão. Um dos grandes dilemas para os estudantes era a disposição espacial, ou seja, se eles iriam utilizar como parâmetro de medida o comprimento da borracha ou sua largura. Para facilitar o manuseio dos estudantes, a pesquisadora sugeriu que os alunos construíssem um instrumento de medida que fosse do tamanho da borracha de Maria e que fosse flexível. Os estudantes decidiram utilizar papel com o tamanho da borracha para que pudessem realizar novamente as medições e as dobras necessárias, caso houvesse sobras no comprimento das latinhas. De fato, essa estratégia foi adotada pela pesquisadora com o intuito de orientar os estudantes a relacionarem as quantidades de papéis inteiros em relação às suas dobras, ou seja, geometricamente. Essa ação vem ao encontro do que é proposto por Lanner de Moura (1995) quando afirma que:

> [...] a história revela a interdependência entre medida e a geometria, já nas suas origens. O que leva a crer que o controle das variações das dimensões do espaço, as representações que o homem elabora dele e as relações entre elas tiveram em suas origens o mesmo tipo de necessidade prática. (LANNER DE MOURA, 1995, p. 55)

A partir novamente do processo de medição, João e Maria encontraram sobras, ou seja, perceberam que haveria a necessidade de dobrar o papel para encontrar a parte que faltava do comprimento das latinhas. O processo foi conduzido pela pesquisadora de forma que os estudantes realizassem a escrita das medidas encontradas, primeiramente por extenso e depois convertendo para a linguagem simbólica.

> **Maria-** um, dois... deu quatro e alguma coisa?
> **Professora-** Quanto essa coisa?
> **João-** Vamos dobrar o papel... dá metade.
> **Maria-** Dá mais que a metade...
> **Professora-** Vocês precisam dobrar para ver.
> **João-** deu 4 dobras...
> **Professora-** Vamos fazer o registro disso na folha... Como ficaria?
> **João-** 6 borrachas e 4 dobras
> **Maria-** Um quarto.
> **Professora-** O que significa $\frac{1}{4}$?
> **João-** Seria o papel dobrado 4 vezes...
> **Professora-** Então vamos pensar: das quatro partes dobradas, uma delas coube aqui na sobra. Então, na verdade, estamos fazendo uma comparação. Vamos tentar simplificar mais essa escrita...
> **Maria-** Seis borrachas inteiras e um quarto da borracha.
> **Professora-** Mas eu quero tudo escrito matematicamente. Como podemos simplificar isso?
> **Maria-** Poderíamos escrever $6 + \frac{1}{4}$.
> *João leu $\frac{1}{4}$ como sendo $\frac{4}{1}$.*
> **Professora-** João qual é a diferença de $\frac{1}{4}$ e $\frac{4}{1}$?
> **João-** Nenhuma.

Percebe-se, pelo diálogo acima, que João ainda não havia se apropriado do significado da escrita $\frac{1}{4}$, atribuindo o mesmo significado a fração $\frac{4}{1}$. A proposta da pesquisadora foi refletir sobre essa ação colocando sobre as mesas os papéis que representavam cada uma das frações e questionando qual seria a principal diferença observada por eles.

> **Professora-** Vamos olhar a unidade de medida [papel] de novo. Esse papel representa o tamanho da borracha inteira que usamos para medir a latinha. Você dobrou em 4 partes e utilizou uma dessas partes para medir. Essa parte do papel utilizada para medir a sobra representa 1 papel inteiro?
> **João-** Não!
> **Professora-** Agora se fosse $\frac{4}{1}$. Seria 1 parte das 4 dobradas ou 4 papeizinhos inteiros?
> **Maria-** Seria papeizinhos inteiros.
> **João-** Entendi!
> **Professora-** $\frac{1}{4}$ é uma parte menor que o inteiro. $\frac{4}{1}$ seria maior que um inteiro. Seria eu pegar a unidade do papel, 4 vezes. Encontramos, então, que em relação ao comprimento da latinha cabem 6 borrachas inteiras e $\frac{1}{4}$ da borracha. O que é $\frac{1}{4}$, João?
> **João-** 1 das quatro partes dobradas do papel.
> **Professora-** Essa parte é maior ou menor que o inteiro?
> **João-** Menor.
> **Professora-** E qual seria a diferença para $\frac{4}{1}$?
> **João-** Seriam 4 papeizinhos desses colocados um do lado do outro.

Percebe-se que João ainda não havia compreendido totalmente o significado da representação $\frac{1}{4}$ e, por isso, necessitou que tanto a professora quanto sua colega mediassem o diálogo numa tentativa de estabelecer comparações para que ele pudesse entender melhor.

A intenção da pesquisadora era que João percebesse a diferença entre o papel dobrado que foi utilizado na comparação em relação a unidade inteira, ou seja, que o papel dobrado representava partes menores que o inteiro. Para isso, ela dispôs os papéis na mesa de forma a esclarecer aos estudantes as diferenças indagando, primeiramente, quais eram suas percepções e depois fazendo as devidas ressalvas e considerações.

Após encontrarem a medida do comprimento da latinha que era 6 inteiros e $\frac{1}{4}$ da medida da borracha, os estudantes precisavam descobrir a terça parte desta medida. Foi questionado pela pesquisadora como os estudantes conseguiriam encontrar a terceira parte de 6. Maria e João responderam que pensariam na divisão por 3. A partir dessa consideração, foi sugerido que os estudantes utilizassem esse princípio em relação a representação fracionária e registraram em papel $\frac{6}{3}$ $\frac{\frac{1}{4}}{3}$.

Os próprios estudantes começaram a registrar seus cálculos e também afirmavam que, ao realizar a divisão obtinham um número decimal, mas não sabiam explicar o significado do número decimal. Ao tentarem fazer os cálculos no papel, realizavam processos mecânicos sem compreender o significado em relação à fração como uma divisão, pois verbalizaram frases como "*eu pego 1 e divido por 3 como não dá coloco o 0 e a vírgula, acrescento o 0 e realizo a divisão*". Este fato foi percebido durante as explicações dos alunos para os cálculos de divisão que tinham realizado utilizando o algoritmo usual.

Entende-se que a compreensão e as representações das frações pelos alunos apresentaram alguns equívocos durante todo o processo e que não podem ser descartados, pois conforme Picolo, Teixeira, Vitório (2010):

> O erro é uma das etapas fundamentais do processo de aprendizagem. Ao negá-lo, privamos o aluno do seu direito a buscar o conhecimento. Portanto, o erro deve ser encarado pelo professor como um momento do processo de construção de aprendizagem, visando sua superação e o alcance dos objetivos propostos. (PICOLO, TEIXEIRA, VITÓRIO, 2010, p. 228)

Ao resgatar os processos realizados pelos estudantes acerca da maneira como foram utilizados os papéis da medição das latinhas, resgatou-se também um processo muito importante acerca da unidade de medida padrão. As reflexões feitas demonstraram que a consideração da medida do comprimento em relação a grandeza ou largura ou altura poderia influenciar no processo final de forma que as dobras deveriam ser feitas considerando-se o estabelecimento da grandeza que foi definida pelos estudantes: o comprimento da largura do papel.

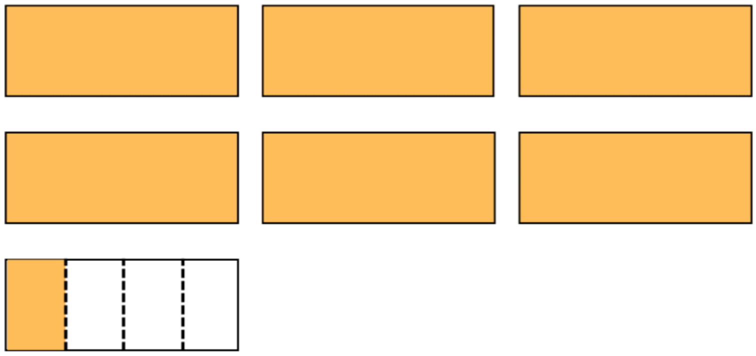
Para Moura *et al.* (2018, p. 5), "Ao eleger o que vamos medir em um objeto estamos destacando uma grandeza a ser medida. Portanto, quando pensou em medir o objeto, você pode ter escolhido uma dessas grandezas: comprimento, massa, volume, capacidade, área, entre outras.".

Ainda, segundo os autores, a medição é uma forma de expressão humana da qualidade do objeto ou fenômeno e por isso, as características essenciais dentro desse movimento são: **a)** Identificação da grandeza; **b)** Encontrar um objeto que possuía a mesma grandeza para ser realizada a comparação; e, **c)** Estabelecer o resultado dessa comparação numericamente.

No caso da proposta realizada, os estudantes decidiram escolher a largura do comprimento do papel para realizar a medição, portanto, ao final, a análise feita das partes menores que o inteiro deveria ser a mesma. Entretanto, a medição realizada pelos estudantes não considerou a questão de que os papéis dos estudantes não estavam subdivididos na mesma quantidade de partes, logo o princípio da igualdade para realizar a comparação não se realizaria.

Para investigar o equívoco obtido nesse processo, a pesquisadora entregou aos estudantes 6 papéis inteiros e 1 papel dobrado que correspondia à fração $\frac{1}{4}$, como apresentado na figura a seguir (Figura 23):

Figura 113: Representação dos papéis utilizados pelos estudantes



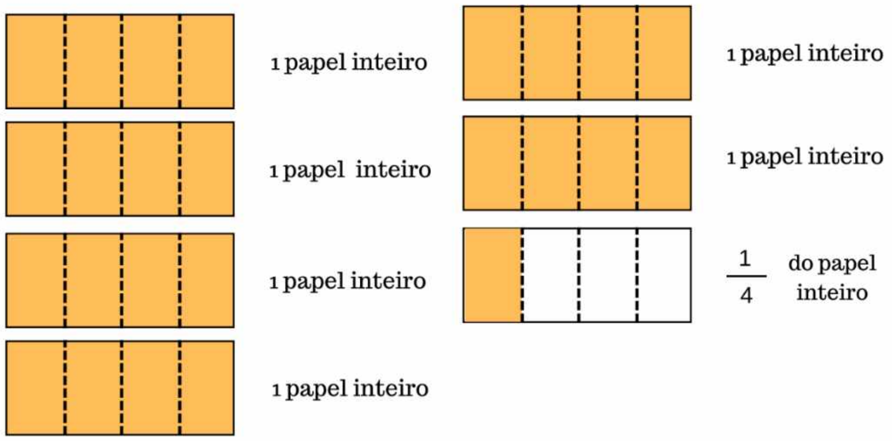
Fonte: Elaborado pela autora

A partir da observação do material entregue, procedeu-se o seguinte diálogo:

> **Professora-** O que não deu certo antes? Quando encontramos a medida do comprimento da latinha e fomos medir a terça parte, tínhamos que analisar que o papelzinho inteiro estava igual a $\frac{1}{4}$?
> **Maria e João-** Não. Porque os primeiros 6 papéis inteiros não estavam dobrados e o papel do $\frac{1}{4}$ estava. Logo, antes de dividir por 3, temos que igualar as partes que vamos fazer a comparação para depois fazer a divisão por 3.
> **João-** Ah esquecemos de fazer isso!

A partir do diálogo acima, os estudantes perceberam que antes de dividirem por 3, eles precisavam representar os papéis inteiros na mesma subdivisão que os papéis que estavam dobrados em 4 partes para, ao final, realizarem a comparação. Os estudantes perceberam, então, a necessidade que para realizar a comparação, era necessário considerar as partes menores que tinham sido formadas e analisar os papéis inteiros considerando essas partes menores. Para isso, a pesquisadora solicitou que os estudantes dobrassem os papéis inteiros na mesma quantidade de partes que o papel que representaria a fração $\frac{1}{4}$ (Figura 24).

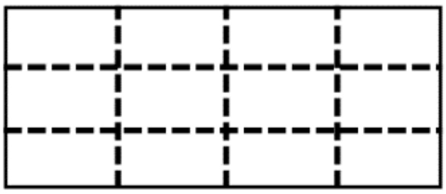
Figura 124: Papéis inteiros divididos em 4 partes



Fonte: Elaborado pela autora

Dessa forma, os estudantes foram incentivados pela pesquisadora a dobrar cada um dos papéis acima, de acordo com a nova configuração estabelecida, em função das partes menores obtidas pelas dobras (Figura 25).

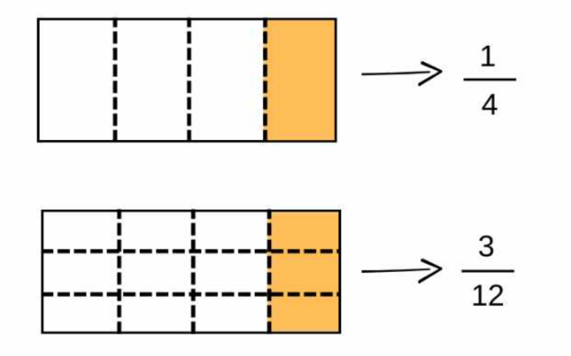
Figura 135: Subdivisão dos papéis



Fonte: Elaborado pela autora

Os estudantes observaram que ao fazer as dobras obtiveram, ao final, 12 partes menores e que juntando os 6 papeizinhos teríamos 12x6=72 partes no total. E em relação a fração $\frac{1}{4}$, os estudantes perceberam que apesar de o papel inteiro estar dividido em 12 partes, apenas 3 partes menores compunham a medida $\frac{1}{4}$. Nessa comparação, os estudantes chegaram a algumas considerações (Figura 26):

Figura 146: Subdivisão de $\frac{1}{4}$ por 3 partes



Fonte: Elaborado pela autora

Os estudantes perceberam que nessa nova configuração, $\frac{3}{12}$ estava representada a mesma parte do papel que $\frac{1}{4}$. Da mesma forma, 6 inteiros poderiam ser escritos como $\frac{72}{12}$. Como as frações estavam subdivididas na mesma repartição, juntaram $\frac{3}{12}+\frac{72}{12}$ para encontrarem a porção resultante $\frac{75}{12}$.

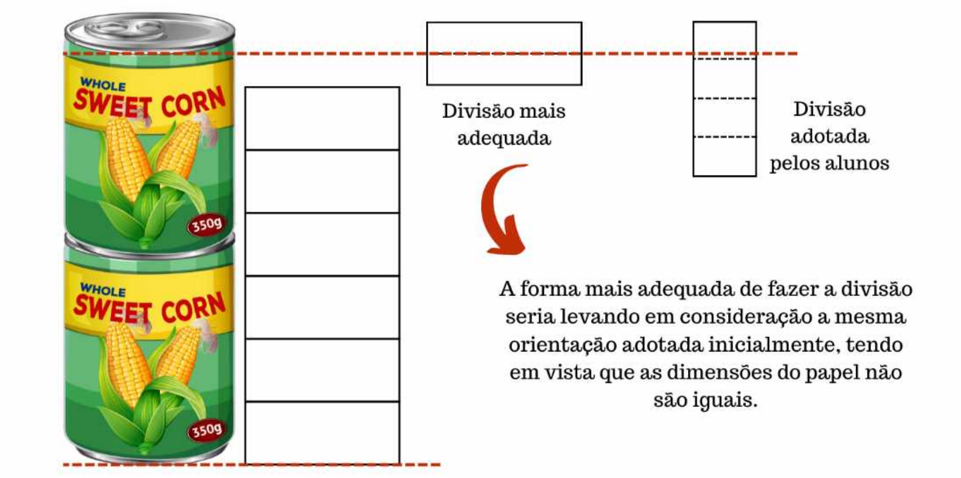
Após toda esta discussão, foi percebido pela pesquisadora um equívoco: os estudantes utilizaram o papel disposto de duas formas distintas (na vertical e na horizontal) para a comparação que era solicitada.

A pesquisadora entregou novamente para os estudantes o papel do tamanho da borracha e solicitou que medissem o comprimento total desse objeto:

> Para ajudar o João, a professora pegou a latinha e o papelzinho e pediu para ele ajudar a demarcar cada vez que a professora utilizava o papelzinho.
> **Professora:** Um, dois, três, quatro, cinco, seis... Agora para terminar de medir a gente teria que dobrar o papel certo? Só que quando vocês foram medir o resto ($\frac{1}{4}$) vocês viraram o papelzinho antes de dobrar.
> **João:** Só que a gente virou a papel na vertical para medir por isso ficou errado.
> **Professora:** Exatamente! Se a gente utilizar o papelzinho da maneira certa, dá quanto?
> **João:** Dá meio!
> **Professora:** Isso!! Dá metade, não um quarto. A gente tinha feito essa discussão nas aulas anteriores, que deveríamos medir com o papel na horizontal para medir a sobra também o papelzinho teria que estar no mesmo sentido, horizontal. Então a medida da latinha seria seis e meio.

A questão que havia passado despercebida era a disposição do papel que foi utilizado para fazer a comparação, pois os estudantes tinham definido que iriam utilizar o papel na horizontal para fazer a medição da latinha. Entretanto, no momento de medir o espaço que havia sobrado, os estudantes mudaram a posição do papel para encontrarem as dobras. (Figura 27).

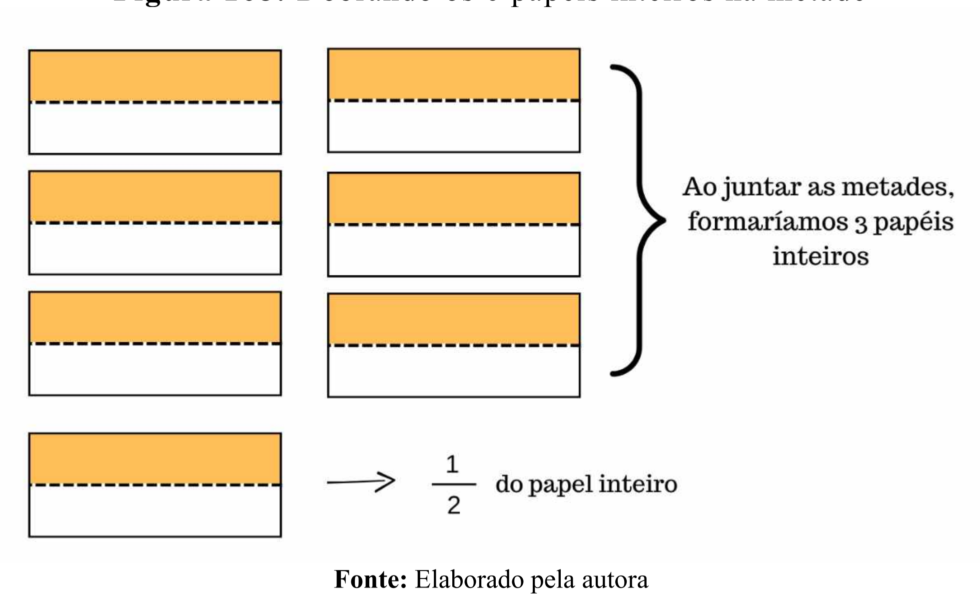
Figura 157: Representação do erro no processo de medição das latas.



Fonte: Elaborado pela autora

A partir desse entendimento, os estudantes descobriram que a medida do comprimento da latinha seria 6 papéis inteiros e $\frac{1}{2}$ papel. Os alunos continuaram o processo, e antes de descobrirem a terceira parte, eles subdividiram os papéis na mesma partição. Um aspecto analisado pelos alunos a partir do manuseio dos papéis foi que a quantidade de vezes para dobrar o papel não é a mesma para obter a quantidade de partes desejada. Por exemplo, para se obter duas partes menores, foi preciso que os alunos dobrassem o papel apenas uma vez. A partir dessas ações, os papéis ficaram subdivididos da seguinte maneira (Figura 28).

Figura 168: Dobrando os 6 papéis inteiros na metade



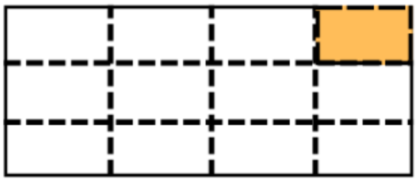
Fonte: Elaborado pela autora

Como o objetivo era encontrar a terceira parte, os alunos dobraram mais uma vez os papéis de forma a subdividir em 3 partes.

> **Professora-** Agora que igualamos todos os papéis, vamos dividir por 3 certo?
> **João e Maria-** Certo!
> **Professora-** E então, vamos pegar 3 papéis e dividir por 3. Como vai ficar essa representação nos papeizinhos?
> **João-** Vamos obter 6 partes, pois já tínhamos 2 partes mais 3 dobras obteremos 6 partes no final.

A conclusão feita pelos alunos é que ao final cada papelzinho teria 6 partes menores que o inteiro (Figura 29).

Figura 179: Representação da terça parte de 1 papel inteiro



Fonte: Elaborado pela autora

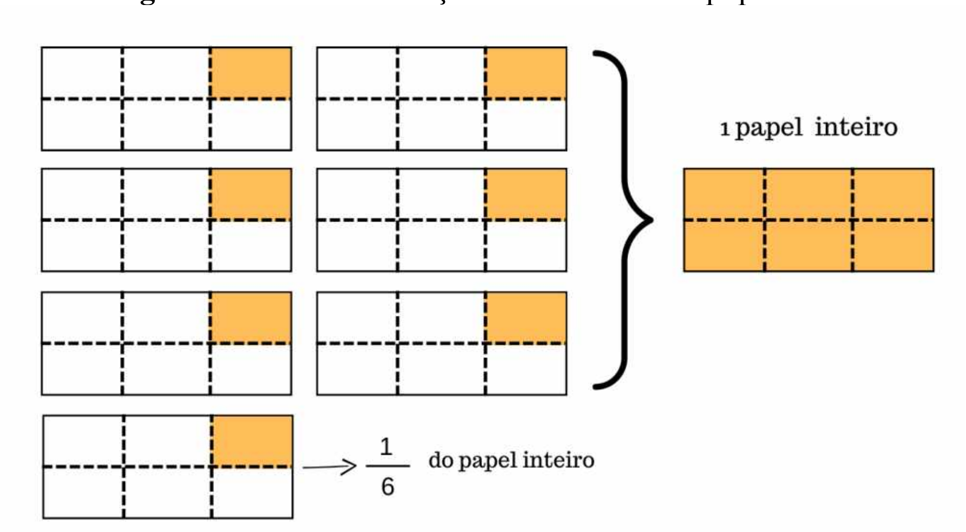
Foi nesse momento de diálogo, que houve elementos disparadores para a pesquisadora poder comentar o principal equívoco do processo anterior. Não houve por parte da pesquisadora, a devida ênfase em lembrar aos alunos que estava sendo utilizado o comprimento da largura do papel para medir as latas. Entretanto, quando foram dobrar os papéis, fizeram as dobras desconsiderando o fato de que era a largura do papel a unidade de medida padrão.

É perceptível que durante o processo de medição não houve, por parte dos estudantes, atenção e cuidado em cada passo para perceber se estava sendo feita a comparação corretamente das grandezas, como havia sido discutido. Analisa-se que o fato ocorrido foi importante uma vez que propiciou aos estudantes viver e dialogar sobre a ação equivocada e rever o caminho a ser seguido.

> **Professora-** Vamos analisar o significado disso no papelzinho. Quando medimos a latinha, medimos quanto cabe ou o comprimento?
> **João-** O comprimento!
> **Professora-** Após as dobras, quando foi feita a análise final dos papéis que foram utilizados na medição, foi analisado a área de cada papel. Entretanto, no processo de medição das latas, na verdade estávamos fazendo a comparação utilizando a medida da largura desses papéis. Então, olhando

para nosso papelzinho, quantos quadradinhos corresponderiam a medida da largura desse papel?
João- dois!
Professora- Isso, são dois porque não estamos medindo na vertical. Se estivéssemos medindo na vertical daria quanto?
João- três quadradinhos.
Professora- Então, nós vamos analisar somente os quadradinhos que correspondem a largura do papel. Como a gente poderia fazer esse desenho em forma de fração?
Maria- $\frac{1}{6}$?
João- $\frac{2}{6}$ na minha opinião, pois nesses 3 papeizinhos temos que 2 quadrados correspondem a largura do papel.
Professora- Quando a gente dobrou a primeira vez, dobramos na metade. Analisando os quadradinhos menores, se juntarmos, quantos papéis inteiros seriam formados?
João e Maria- 3 papéis inteiros.
Professora- Isso! O que estamos fazendo é uma composição, ou seja, pegando as partes menores que um inteiro e agrupando-as para ver se juntas equivalem à do papel inteiro, que é o que eu tinha no início e foi a unidade escolhida de comparação.

Figura 30: Reestruturação das sobras dos papéis



Fonte: Elaborado pela autora

Diante do exposto, concorda-se com Moura *et al*. (2010, p. 216) que "Para que a aprendizagem se concretize para os estudantes e se constitua efetivamente como atividade, a atuação do professor é fundamental ao mediar a relação dos estudantes com o objeto do conhecimento, orientando e organizando o ensino".

A partir da mediação feita pela pesquisadora, os estudantes perceberam a necessidade que tinham de agrupar as partes menores que o inteiro, para visualizarem se era possível formar uma unidade. Infere-se que as problematizações realizadas pela pesquisadora acerca do instrumento - papel - utilizado, puderam auxiliar a melhor compreensão dos alunos sobre as ideias de medida e grandeza consideradas na apropriação do conceito de fração. Nesse episódio, pode-se fazer um resumo das seguintes considerações:

Figura 181: Análise geral da construção do Ganzá

Fonte: Elaborado pela autora

Será discorrido no próximo episódio, acerca de alguns outros significados relacionados a fração.

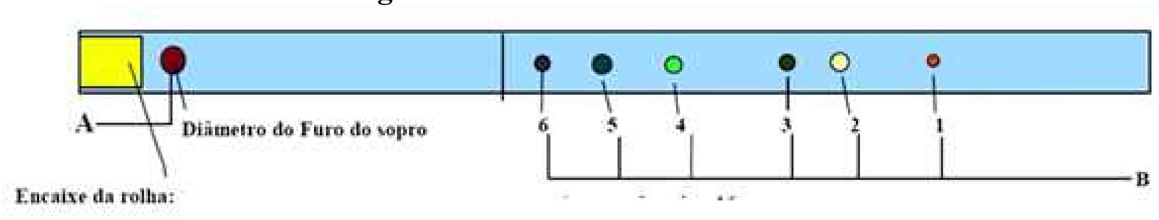
5.2 Episódio 2: Construindo o Pífano

Neste episódio, analisa-se algumas cenas que revelam, por meio das ações dos estudantes, a necessidade que eles tiveram de estabelecer seus objetivos e ações para resolver o problema da situação proposta que era, inicialmente, descobrir uma forma fazer uma ordenação de cada uma das frações correspondentes a distâncias dos furos do pífano.

5.2.1 Cena 1: O que significa fração como operador?

Após a leitura da história em quadrinhos, a professora entregou para cada participante um cano de PVC de 32 cm. O objetivo era demarcar no cano as distâncias entre cada furo como também o tamanho do diâmetro, conforme demonstrado abaixo (Figura 32):

Figura 192: Dimensões do Pífano



Distância do ponto B até os furos:

Furo 1: $\frac{11}{2}$

Furo 2: $\frac{84}{10}$

Furo 3: $10\ cm$

Furo 4: $12\ \frac{4}{5}$

Furo 5: $\frac{64}{5}$

Furo 6: $17{,}1\ cm$

Distância do ponto a até os furos: $\frac{7}{2}$

Diâmetro dos furos:

Furo 1: $\frac{6}{10}\ cm$

Furo 2: $\frac{8}{10}\ cm$

Furo 3: $0{,}6\ cm$

Furo 4: $0{,}8\ cm$

Furo 5: $\frac{17}{2}\ cm$

Furo 6: $0{,}9\ cm$

Furo do sopro: $\frac{9}{10}\ cm$

Fonte: Imagem adaptada de https://www.youtube.com/watch?v=_wthF880qmU. Acesso em 28 abr. 2021

Os estudantes começaram a calcular as distâncias entre cada furo até ao ponto B, que representa uma das extremidades no pífano. Algumas dessas distâncias estavam representadas a partir de frações. Os alunos precisavam descobrir a distância entre cada um dos furos, e para isso precisavam encontrar o número correspondente a cada fração. A distância do primeiro furo até o ponto B, era $\frac{11}{2}$ do comprimento total do pífano. Como então calcular essa medida? Observe o diálogo abaixo:

> **Professora-** Então a distância do primeiro furo é onze meios de 32 centímetros. Como vocês pensariam em resolver isso?
> **João-** Eu esqueci como faz essa conta!
> **Maria-** Ahhh é 32 dividido por 2 vezes 11, ou é 11 vezes 32?

A fala de Maria retrata indícios da tentativa de se utilizar da fração como operador. Entretanto, a dúvida da estudante em multiplicar 32 vezes 11 ou fazer a divisão de 32 por 11, demonstra a falta de compreensão da fração como operador, de forma que $\frac{11}{2}$ de 32 cm significa dividir o comprimento na metade e depois aumentar essa medida 11 vezes. Como resultado final, teríamos a ampliação da medida de 32 cm. Esse momento formativo, vem para reafirmar o valor importante, conforme defende Rodrigues (2015), de aprofundar discussões em torno do significado da fração como operador e não somente limitar a utilização da fração como operador, fato percebido a partir das seguintes falas dos estudantes:

> **Maria-** Eu dividi por 2 e multipliquei por 11. Pera, o meu deu 17,6.
> **João-** Deu o mesmo que o meu!
> **Professora-** Por que, Maria, você dividiu por 2?
> **Maria-** Por causa da técnica que te falei... aí fiz tudo e deu 17,6.
> **Professora-** Mas por que podemos fazer isso?
> **João-** Porque aprendemos no 5ºano!

As falas *"por causa da técnica que falei"* e *"porque aprendemos no 5º ano"* revelam apenas a execução de um procedimento matemático, mas não a essência do significado da fração como operador. Esse fato, vem ao encontro com o fato que Lopes (2008) descreve como sendo o processo mecanizado no ensino em relação ao conceito de fração.

Devido à dificuldade apresentada pelos estudantes, a pesquisadora pediu para que eles fizessem a representação da fração $\frac{11}{2}$ geometricamente. A intenção da pesquisadora ao fazer essa recomendação baseou-se na ideia de que, talvez, os estudantes tivessem mais facilidades se pensassem na fração como divisão para depois fazer uma investigação mais detalhada acerca do processo da fração como operador. Essa escolha, justifica-se pelo fato de que a noção de fração como operador, segundo Oliveira e Basniak (2021), ter relação com a composição de duas operações importantes: a multiplicação e a divisão.

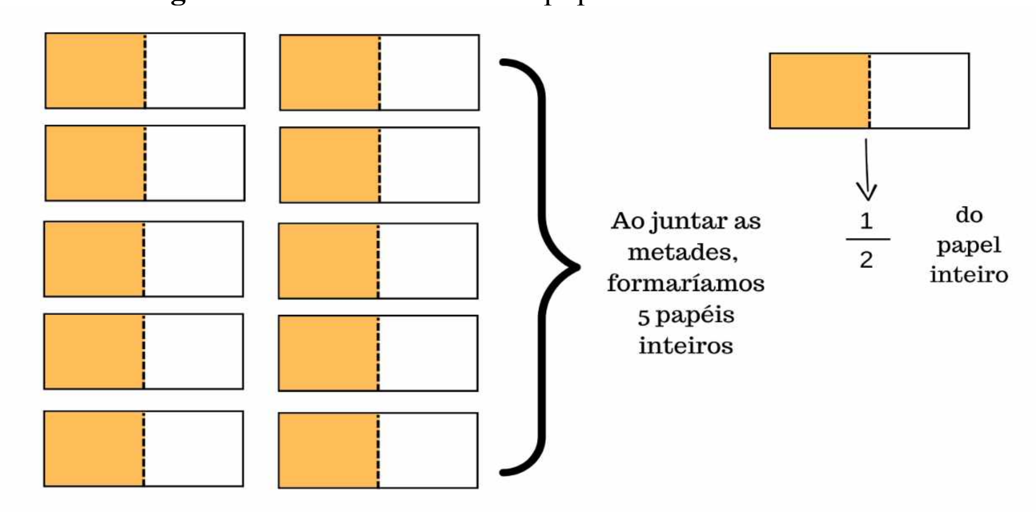
5.2.2 Cena 2: Iniciando o diálogo sobre fração como divisão a partir da medida

Mediante os impasses encontrados pelos estudantes na cena anterior, a pesquisadora solicitou que os estudantes fizessem a representação da fração $\frac{11}{2}$ geometricamente. Partindo dos significados que os estudantes já tinham naquele momento da fração como medida, a pesquisadora decidiu fazer o processo inverso: solicitar que os estudantes fizessem algumas dobras em papéis e os comparassem a partir da unidade de medida padrão. Essa ação demonstra uma das formas de se olhar a fração das suas partes para o todo, sendo essa maneira uma consequência resultante do processo de medição, conforme defende Escolano (2007). Observe como foi a descrição desse momento:

> **Professora-** Vamos desenhar geometricamente isso. Desenhe 11 papéis inteiros na folha. Depois disso, vamos recortar cada um e dobrar na metade de cada um.
> **João-** Isso significa dividir por 2.
> **Professora-** João, porque no seu desenho você só dividiu um papel em duas partes iguais?

João- Lembrei, tem que dividir todos os papéis inteiros na mesma quantidade, de forma igualitária.

Figura 203: Subdivisão dos papéis inteiros na metade



Fonte: Elaborado pela autora

O estudante João reconheceu que a ação de dobrar os papéis na metade representava uma repartição igualitária, denominada por Lamon (2012) como uma divisão partitiva, e o fato que comprova que as partes obtidas são de mesma medida foi em função da estratégia dos estudantes em realizar as dobras sobrepondo os papéis, de forma a obter duas partes de mesma medida. Observe como ocorreu o diálogo entre a pesquisadora e os estudantes:

Professora- Se juntarmos cada uma das metades que foram repartidas igualmente, teríamos a composição de quantos inteiros?
Maria- Ahh, deu 5 inteiros e meio, olha, igual a conta e deu o resultado aqui...
Professora- Explique mais Maria...
Maria- É porque assim João, a gente vai usar só metade do papel. Então metade com metade formaria 1 papel inteiro, metade com mais metade, um inteiro.... até dar o resultado...
João- Ah! Verdade!

A partir dos agrupamentos de cada uma das partes, os estudantes chegaram à conclusão que formaria 5 papéis inteiros mais $\frac{1}{2}$ de outro papel. Os estudantes realizaram a divisão da fração que correspondia a metade, encontrando sua representação decimal. Logo, concluíram que $5+\frac{1}{2}$ poderia ser escrito como 5+0,5=5,5. A pesquisadora recapitulou a importância desse processo de resolução desse problema:

Professora- Então isso é muito importante... No processo de composição nós temos nossa unidade inteira. Quando dividimos, é importante

pegarmos as partes menores que são obtidas da divisão e fazer agrupamentos a fim de formar...
João- o inteiro!

Sabendo que a fração $\frac{11}{2} = 5{,}5$, os estudantes calcularam a 5,5 de 32 cm fazendo a multiplicação, encontrando que a distância do ponto B ao primeiro furo era de aproximadamente 17,6 cm.

As ações dos estudantes nesse momento de investigação, foram orientadas considerando os aspectos das partes em relação à unidade inteira, se utilizando de algumas estratégias recorrentes do processo de medição (BRASIL, 1998).

5.2.3 Cena 3: Recordando elementos essenciais da fração como divisão a partir da tentativa de representar a fração como um número decimal

O próximo passo era encontrar a distância do terceiro furo ao ponto B. Pela experiência anterior, os estudantes decidiram utilizar a operação da divisão como uma forma mais rápida de encontrar sua representação decimal, possibilitando a descoberta da medida da distância do 2º furo. Os diálogos a seguir, demonstram o processo de resolução de problemas em relação a ampliação da compreensão da fração não somente em relação à parte-todo, mas também da fração como uma divisão da unidade inteira.

João- Eu peguei 84, fiz a divisão e transformei em número decimal!
Professora- O que é número decimal?
João- é um número depois da vírgula.

A fala de João *" Eu peguei 84, fiz a divisão e transformei em um número decimal*", revela a falta de clareza em relação a alguns elementos essenciais em relação ao processo de divisão, dentre os quais podemos citar: agrupamentos de 10 em 10, processo de reagrupamento das quantidades, princípio da conservação da quantidade original, sistema posicional. O número decimal é apenas uma outra forma de representação do resultado da divisão, não indica o significado do conceito da divisão. Tendo como objetivo, trazer clareza dessas questões, buscou-se fazer um diálogo em relação ao financeiro, com intuito de poder discutir o significado dos elementos citados acima.

Professora- Para que serve a vírgula? Vamos pensar no dinheiro real e centavos. O que é o real?
João- Inteiro.
Maria- Unidade!
Professora- Isso é nossa unidade. Se fossemos aos EUA qual seria a nossa unidade do dinheiro?

> **João-** dólar!
> **Professora-** Pensando nessa questão, qual seria a necessidade de nos jornais expressar os ajustes do valor da nossa moeda (real) em relação ao dólar?
> **Maria-** Porque no Brasil a nossa unidade no dinheiro é diferente!
> **Professora-** Temos então que o real é nossa unidade monetária e os centavos são as quantidades menores que o nosso real.

A estratégia da professora em recorrer a outras exemplificações de formas de unidades, vem ao encontro de que o sistema monetário é um dos recursos mais utilizados no cotidiano. O intuito era utilizar-se de algo mais próximo a realidade dos estudantes para que pudessem discutir algumas questões sobre frações.

A resposta de Maria *"Porque no Brasil a nossa unidade no dinheiro é diferente"* revela uma compreensão da necessidade de estabelecer comparações entre unidades diferentes.

O sistema monetário, possui diversas formas de fazer a representação de quantidades, e nem todos os casos poderia se considerar os agrupamentos sendo feitos de 10 em 10, como por exemplo, se tivermos uma moeda de 1 real, basta apenas um conjunto de 2 moedas de 1 real, para eu ter a quantidade de RS 2. Para o professor utilizar dessa associação com o sistema financeiro, em relação aos agrupamentos feitos em nosso sistema de numeração decimal, é importante lembrar de se utilizar de exemplos de trocas no dinheiro que tenham relação com agrupamentos de 10.

Com o objetivo de recordar com os estudantes algumas características em relação ao Sistema de Numeração Decimal, a pesquisadora fez o seguinte questionamento:

> **Professora-** Se eu tivesse 10 centavos. Quantos centavos eu precisaria para formar 1 real?
> **Maria e João-** 10 ...
> **João-** 10 moedas de 10 centavos. 10 vezes 10
> **Professora-** Isso! Na minha época tinha as moedas de 1 centavo. Vocês já viram a moeda de 1 centavo? Então 10 moedas de 1 centavo, formavam 10 centavos. Como 1 centavo perdeu o valor, os 10 centavos passaram a representar 10 moedas de 1 centavo.

Nesse diálogo, foi-se analisado um caso particular, onde há a composição de 10 centavos para ter-se R$1 real, sendo este um agrupamento de 10 moedas. A partir das discussões percebeu-se que a composição de 10 moedas de 10 centavos e sua troca por uma moeda de R$1, não alterou a quantidade de dinheiro, somente reorganizou uma outra forma. Utilizando-se desses princípios que foram expressos nesse caso, a professora recordou esses mesmos aspectos considerando as ordens estabelecidas no Sistema de Numeração Decimal!

A transformação de 10 centavos em 1 real é um caso particular de um agrupamento de 10, onde se percebe que a quantidade do dinheiro não se alterou, somente foi reorganizada e representada de uma outra forma.

> **Professora-** O que é dezena?
> **Maria-** 10... um conjunto de unidades.
> **Professora-** Um conjunto de quantas unidades?
> **João e Maria-** 10 unidades.
> **Professora-** Então dezena é um grupo de 10 unidades. Se tivermos 20 unidades, conseguimos formar quantos grupos de 10 unidades?
> Maria e João- dois grupos!
> **Professora-** Como chamamos esses 2 grupos de 10 unidades na matemática?
> **João e Maria-** Dezena!
> **Professora-** Quando formamos grupos de 100 unidades, como chamamos na matemática?
> **João-** Centena...
> **Professora-** Isso!
> **João-** Unidade, dezena, centena... Lembrei.

O diálogo acima revela o início de um resgate de algumas características em relação ao processo da composição das ordens no Sistema de Numeração Decimal. A fala de Maria "10... Um conjunto de 10 unidades" revela um entendimento da necessidade dos agrupamentos para formação de cada ordem. Após esse momento, o objetivo era relembrar que a unidade poderia ser agrupada e também ser dividida igualmente. Observe o diálogo abaixo:

> **Pesquisadora-** Então vimos que podemos fazer agrupamentos com a unidade. E quando nós não fazemos agrupamentos? Qual o sentido oposto de agrupamento?
> **João-** Desagrupar...
> **Professora-** Se eu pensasse numa régua, o que seria desagrupar uma régua?
> **Maria-** Desfazer.
> **Professora-** Como isso seria feito em uma régua?
> **João-** Dobrando, cortando....
> **Professora-** Isso, mas nosso sistema é de 10 em 10, então nosso primeiro corte teria que ser feito em quantas partes?
> **João-** 10 partes!

Ressalta-se a importância deste momento formativo, uma vez que se pensar nas ações humanas em uma determinada situação, permite apontar indícios para algumas estratégias no processo de resolução de problemas. Nesse caso, entender que o sistema de numeração decimal, possui agrupamentos e desagrupamentos a partir da base 10, remete ao processo lógico-histórico também desenvolvido na história da humanidade sobre a formação do conceito de número.

Portanto, compreender o significado da divisão é também compreender as estruturas em relação ao processo envolto na ação de realizar uma divisão, que é uma repartição igualitária, conforme defende Lamon (2012).

A pesquisadora lembrou aos estudantes que, assim como nos agrupamentos em que 10 unidades formam uma dezena, a divisão da unidade em 10 partes menores, seria o décimo. Os estudantes perceberam que a fração $\frac{84}{10}$ representava 84 décimos e foram desafiados a descobrir quantas unidades seriam formadas ao agrupar 84 décimos. A conclusão foi que 84 décimos formariam 8 inteiros e sobrariam 4 décimos. Maria afirmou que uma forma de escrever esse resultado seria utilizando a vírgula para separar a parte inteira da decimal, da seguinte forma: 8,4. Após isso, os estudantes calcularam 8,4 de 32 cm para descobrirem a distância do 2º furo ao ponto B. Para os restantes furos, foi utilizado a mesma estratégia pelos estudantes. Nesse episódio, pode-se fazer um resumo das seguintes considerações:

Figura 214: Análise geral da construção do Pífano

Fonte: Elaborado pela autora

O objetivo de os estudantes encontrarem o número decimal que correspondesse a cada fração exigiria uma relação da fração como uma divisão e isso possibilitaria a pesquisadora mediar questionamentos em relação ao processo da divisão considerando os aspectos do nosso Sistema de Numeração Decimal, como foi mostrado na descrição acima.

Ressalta-se ainda que esse não é o único caminho para chegar ao objetivo desejado. Abordando a fração como operador os alunos conseguiriam encontrar as distâncias relacionadas a cada furo. Seria outra maneira formativa para os estudantes.

É importante mencionar que nesse momento poderia ter sido melhor investigado a questão da fração como operador, demonstrando a facilidade da multiplicação por números racionais do que a partir da escrita decimal. Sugere-se essa abordagem na realização nessa proposta da construção do Pífano.

6. Considerações finais

A presente pesquisa se insere em um movimento de diversas transformações. Sua proposta inicial era trabalhar com as frações e a música a partir do experimento do monocórdio de Pitágoras. Entretanto, no processo de qualificação percebeu-se que o planejamento da atividade proposta associava algumas razões musicais a alguns comprimentos da corda do monocórdio, e essa relação não trazia uma noção em relação ao significado próprio do som, como indicado na física. Tendo em vista, a preocupação da pesquisadora, em não trazer nenhum equívoco seja em relação aos conceitos matemáticos como também em relação ao significado dos conceitos musicais, a proposta foi reconfigurada para abordar as frações a partir da construção dos seguintes instrumentos musicais: Ganzá, Pífano, Flauta de Pan, e Pau de Chuva. Dessa forma, foi organizado o material didático dessa pesquisa.

O produto dessa pesquisa foi estruturado da seguinte maneira: *a) Construindo alguns instrumentos musicais, b) Investigando o sistema de notação musical* e *c) Elaborando uma composição musical.* Na primeira parte, o objetivo era fazer o resgate de alguns significados do conceito de fração, assim como abordar a escrita decimal e a porcentagem. Na segunda parte, o objetivo era abordar o significado de alguns instrumentos musicais e partir da introdução da teoria inicial sobre a notação musical, explorar a adição, multiplicação e divisão de frações. A terceira parte, teria como enfoque a elaboração de uma pequena composição musical, tendo como objetivo a execução dos instrumentos musicais construídos pelos estudantes. Todos esses momentos foram realizados com os estudantes participantes dessa pesquisa, entretanto, para as análises, somente foi abordada uma parte do item a) *Construindo alguns instrumentos musicais,* tendo em vista que foi nesse momento que os significados da fração afloraram.

Em relação ao episódio *"Construindo alguns instrumentos musicais",* o objetivo inicial, apesar da proposta ser subdividida em 3 momentos diferentes, percebeu-se que apenas dois contemplaram, em suas discussões, os significados de fração como medida e como divisão. As cenas relativas ao Pau de Chuva e à Flauta de Pan apresentaram discussões acerca da escrita fracionária como porcentagem e revisão do conceito de medida.

É importante ressaltar que a porcentagem e os números decimais são diferentes formas de representação de frações. Apesar de na sua forma escrita, aparentemente, não possuírem relação com algum significado de fração, o processo das ações dos estudantes para fazer o registro de alguma dessas formas possibilita a reflexão acerca dos significados de fração como divisão e como operador.

Em relação a cena *"Construindo o Ganzá"* encontra-se indícios da variedade de conceitos relacionados ao significado da fração: como medida, como a necessidade do estabelecimento de uma medida padrão, como relação entre grandezas, como partes que compõem o inteiro. O "erro" apontado na cena do Ganzá revelou-se um momento oportuno para que tanto os estudantes assim como a pesquisadora, refletissem acerca das análises e do processo ao qual estavam vivendo.

É perceptível que depois dessa proposta, tanto a pesquisadora quanto os estudantes convidados tiveram um novo olhar para o conceito de fração e sobre seu significado. Da parte da pesquisadora, houve um novo olhar a partir desse movimento, pois pode se apropriar de forma mais profunda de relações das frações que antes não se percebia e, dessa forma, contribuiu para seu amadurecimento nas discussões e nas mediações em relação a esse conceito.

Acerca do problema disparador pela construção do Ganzá, percebe-se que apesar de ser proposto encontrar a terceira parte a partir do comprimento das latas, pode ser explorado outras formas de análise como, por exemplo, a grandeza volume. É deixado como desafio para outros docentes, pensar em outras formas de ampliar ou complementar essa atividade.

Em relação à cena *"Construindo o Pífano",* a atividade proposta pode oportunizar momentos de diálogo em relação a fração como operador, entretanto, não foi feito o resgate deste aspecto nesse momento devido ao fato da pesquisadora não ter aproveitado as falas dos estudantes e orientado a discussão somente para análise da fração como divisão.

Ao iniciar os diálogos do instrumento Pífano, algumas frações que foram apresentadas correspondiam ao diâmetro dos furos sendo necessária a discussão acerca do significado desse conceito, pois os estudantes não possuíam clareza do que significava o diâmetro, e tendo em vista que os estudantes posteriormente iriam confeccionar seu próprio pífano, necessitavam entender acerca desse conceito. Os diálogos ocorridos neste momento não foram descritos neste texto por não serem partes dos objetivos específicos da pesquisa. Apesar disso, considera-se importante que o docente tenha consciência que mesmo depois de todo planejamento, poderá ser necessário fazer relação com outros conceitos matemáticos que não estavam previstos, mas é preciso que o docente se sensibilize e aproveite esse momento oportuno e enriquecedor no ensino de Matemática.

A estruturação das atividades em forma de Histórias em Quadrinhos, proporcionou um vasto aprendizado para a pesquisadora que fez a elaboração para os estudantes no sentido de incentivá-los a fazer interpretações e possuírem um contato com um registro que permitiria diversas representações, além de ser visualmente mais atrativo.

A elaboração dos problemas na História em Quadrinhos foi de autoria da pesquisadora e considera-se que sua estrutura atendeu aos objetivos previamente estabelecidos: a elaboração de problemas que contribuíssem com seu processo de resolução, o resgate e a discussão de alguns significados de frações, apontadas na História da Matemática como: fração como medida, operador, divisão e razão. Destaca-se que o fato de nem todos esses significados terem sido analisados nesta pesquisa, decorre da falta de mediações da pesquisadora, e não pelo fato da proposta não possibilitar esse diálogo.

Em relação ao processo de Resolução de Problemas, infere-se que a motivação dos estudantes para construir o Ganzá gerou a necessidade de participarem do processo de resolução de problemas. Dessa forma, considera-se que a construção deste instrumento se configurou em uma situação dilemática tendo por base os seguintes aspectos: a) os anseios dos estudantes para tocarem os instrumentos e, b) a situação inesperada: não possuíram um instrumento de medida convencional para encontrarem o comprimento da terça parte das latas.

Percebe-se também nesse momento, que os estudantes não possuíam muita clareza ao buscar estratégias para resolver o problema, entretanto mediante aos diálogos e as sugestões da professora, o processo foi ganhando significado, buscando aproximação ao objetivo estabelecido: resgatar alguns significados do conceito de fração.

Além disso, considera-se que houve uma ampliação dos conceitos, uma vez que a fração assumiu um novo significado para os estudantes em meio aos procedimentos estabelecidos realizados por eles para a construção dos instrumentos musicais. Em relação a fração como medida, destaca-se que eles puderam compreender a importância do estabelecimento de uma unidade padrão e acerca dos aspectos de grandeza e das suas comparações. Em relação a divisão, os estudantes puderam não só relembrar essa relação, mas compreender os elementos essenciais envolvidos no processo da ação de dividir.

Sendo a pergunta inicial da nossa pesquisa: *Que conhecimentos sobre fração são apresentados por alunos do Ensino Fundamental ao construírem instrumentos musicais em aulas de matemática?,* verificou-se que os conhecimentos que os estudantes tinham em relação a fração como medida e divisão não era uma compreensão profunda, pois demonstravam somente conhecimento de técnicas operatórias em relação a fração. Com a proposta desenvolvida, percebe-se que houve um resgate dos significados de fração como medida e divisão, entretanto faltou a discussão sobre a fração como operador e razão.

No contexto da docência, espera-se que esse trabalho possa contribuir para que o professor possa explorar a proposta aqui apresentada em sala de aula, além de situações que evidenciem os principais significados da fração, elencados neste trabalho. Além disso, espera-se incentivar a criação de mais propostas voltadas para a música e as frações.

Outros resultados obtidos no desenvolvimento dessa pesquisa serão publicados, posteriormente, em artigos com objetivo de também contribuir para o acervo de trabalhos voltados para a temática.

Referências

ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência.** Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2005.

ARAÚJO, Leandro da Luiz. **Erros cometidos por estudantes dos anos iniciais quando lidam com noções de medidas e grandezas.** Monografia apresentada ao curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), Vitória da Conquista, BA, 2013. Disponível em: http://www2.uesb.br/cursos/matematica/matematicavca/wp-content/uploads/monografia_Leandro-final.pdf. Acesso em: 28 de jul.2022.

ARISTÓSTELES. **Metafísica.** Coleção "Os pensadores". Vol. IV. 1ª ed. Trad. de Vincenzo Cocco. Abril Cultural, São Paulo, SP, 1973.

BARBOSA, Alexandre; VERGUEIRO, Waldomiro; RAMA, Angela; RAMOS, Paulo. VILELA, Túlio. **Como usar as histórias em quadrinhos na sala de aula**. Editora Contexto, São Paulo, SP, 2006. (versão kindle).

BERLINGHOFF, William P. **A Matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas.** William P. Berlinghoff; Fernando Q. Gouvêa. Tradução Elza Gomide, Helena Castro. São Paulo: Edgard Blücher, 2008.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Ensino Médio e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacional para o ensino médio (PCNEM):** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília. MEC, 2000.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Básica**. Brasília, 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em 10 jul. 2022.

BRASIL. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC/SEF, Brasília, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov/wpcontent/uploads/2018/02/bncc-20dez-site. Acesso em: 14 jun. 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, Brasília, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matemática.pdf. Acesso em 05 ago. 2020.

BRASIL. Secretaria Municipal de Educação. **Diretrizes Curriculares Municipais de Uberlândia.** Ensino Fundamental II, Volume IV, Uberlândia, MG, 2018. Disponível em: https://www.uberlandia.mg.gov.br/prefeitura/secretarias/educacao/diretrizes-curriculares-municipais/. Acesso em 05 ago. 2020.

BROEMBERG, Carla. O Monocórdio na complexa relação entre aritmética, geometria e física na música. **Anais...** Eletrônicos do 15º Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia, Florianópolis, Santa Catarina, 2016. Disponível em: https://www.15snhct.sbhc.org.br/resources/anais/12/1472480954_ARQUIVO_OMonocordio.pdf. Acesso em 09 jul. 2022.

BROEMBERG, Carla; SAITO, Fumikazu. **As matemáticas, o monocórdio e o número sonoro.** Editora Livraria da Física, 2002.

BROLEZZI, Carlos Antônio. **A tensão entre o discreto e o contínuo na matemática**. Tese (doutorado). Ensino de Ciências e Matemática, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo- SP, 1996.

CAMPOS, Emerson César; PETRY, Michele Bete. Histórias desenhadas: os usos das expressões gráficas de humor como fontes para a História. **Revista Catarinense de História**, Florianópolis, n.17, p.117- 135, 2018; Disponível em: https://periodicos.uffs.edu.br/index.php/FRCH/article/view/8175/5329. Acesso em: 28 de jul. 2022.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática.** 1ª edição. Lisboa, 1951.

COELHO, Anielle Glória Vaz. **Contribuições das atividades de ensino para a compreensão do conceito de porcentagem.** Dissertação (mestrado Profissional) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Uberlândia, MG, 2018.

COSTA, Amanda Couto. **Algumas possibilidades para o ensino da área do círculo.** Trabalho de Conclusão de Curso (Faculdade de Matemática), Universidade Federal de Uberlândia, 2014.

DAVID, Maria Manuela Martins Soares; FONSECA, Maria da Conceição Ferreira Reis. Sobre o conceito de número racional e a representação fracionária. **Presença Pedagógica.** Belo Horizonte, v.3, nº 14, mar./abr. p.55-p.67, 1997. Disponível em: http://mdmat.mat.ufrgs.br/PEAD/livros/leituras/numero_racional/06_numero_racional.htm . Acesso em 11 jul. 2022.

DIAS, José Luciano de Mattos. **Medidas, Normalização e Qualidade**: aspectos da metrologia no Brasil. Rio de Janeiro: Ilustrações, 1998.

ESCOLANO, Rafael Vizcarra. **Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria:** un estudio desde modelos de medida y cociente. Tese (Doutorado em Matemática), Universidad de Zaragoza, 2007. Disponível em: https://core.ac.uk/download/pdf/289999831.pdf. Acesso em: 05 de ago.2022.

FERREIRA, Dores; FORTE, Fábia; REBELO, Paula. Frações e outras representações. In: **Jornal das Primeiras Matemáticas**, Lisboa, Nº 2, pp. 3–8. Disponível em: <http://jpm.ludus-opuscula.org/PDF_Files/JPM_Numero2_Junho_2014_low.pdf>. Acesso em 09 jul. 2022.

GRAÇA, Sofia; PONTE, João Pedro da; GUERREIRO, António. Quando as frações não são apenas partes de um todo. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 23, n. 1, p.683-712, São Paulo, SP, 2021.

JUSTO, Ana Olívia Ramos Pires. **O uso de HQs no ensino da Matemática**. Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo. São Paulo, SP, 2013. Disponível em: https://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/7462/mod_resource/content/0/TCC_Ana%20Olivia.pdf. Acesso em 11 jul. 2022.

LAMON, Susan. **Teaching fractions and ratios for understanding** – essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 3. ed. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers Mahwah, 2012.

LANNER DE MOURA, Ana Regina. **A medida e a criança pré-escolar.** Universidade Estadual de Campinas – Unicamp, Faculdade de Educação. 1995.

LOPES, Antonio José. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Revista Bolema**, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, p. 1 a 22, 2008. Disponível em: https://www.redalyc.org/pdf/2912/291221883002.pdf. Acesso em: 09 de jul.2022.

MARCO, Fabiana Fiorezi de; RODRIGUES, Carolina Innocente. Ensino de frações com estudantes do 6º ano do ensino fundamental: um episódio no Egito antigo. **ACTIO:** Docência em Ciências, v. 5, p. 1-23, 2020. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12457. Acesso em 07 ago. 2022.

MARCO, Fabiana Fiorezi de. **Estudo dos processos de resolução de problema mediante a construção de jogos computacionais de matemática no ensino fundamental.** Dissertação (Mestrado em Educação: Educação Matemática) — Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2004. 141p. DOI: https://doi.org/10.47749/T/UNICAMP.2004.302209. Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/Acervo/Detalhe/302209. Acesso em: 28 ago. 2022.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; CAMPOS, Dilhermando Ferreira**. O papel da comparação entre grandezas na geometria clássica.** Anais Eletrônicos do 14º Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia – 14º SNHCT. Belo Horizonte, Campus Pampulha da Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG 08 a 11 de outubro de 2014. Disponível em: file:///C:/Users/amand/Downloads/Dilhermando%20Ferreira%20Campos.pdf. Acesso em: 11 jul. 2022.

MOREIRA, Sílvia Mendes. **Origem da necessidade de números fracionários!** Sem data. Disponível em: http://www.jornalolince.com.br/2009/jan/pages/historia-origem-necessidade-numeros-fracionarios-jornalolince.com.br_edicao025. Acesso em: 04 ago. 2020.

MOURA, Manoel Orisvaldo de. Atividade Orientadora de Ensino: unidade entre ensino e aprendizagem. In: **Revista Diálogo Educ.,** Curitiba, v.10, n. 29, p.205-229, jan./abr.2010.

MOURA, Manoel Orisvaldo; LOPES, Anemari Roesler Luersen Vieira; ARAÚJO, Elaine Sampaio; CEDRO, Welligton Lima. Atividades para o ensino de matemática nos anos iniciais da Educação Básica. Volume II: Medidas, 2018. Disponível em: http://www.labeduc.fe.usp.br/wp-content/uploads/2018.2-obeduc-e-book_livro2-Medidas.pdf. Acesso em: 28 de jul.2022.

OLIVEIRA, Vania Sara Doneda de; BASNIAK, Maria Ivete. Frações e suas múltiplas interpretações: reflexões sobre o ensino e a aprendizagem. In: **HISTEMAT, SBHMat**, v.7, p.1-20, 2021. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/29450/1/Doneda2021Fra%C3%A7%C3%B5es.pdf. Acesso em: 09 jul. 2022.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. Disponível em: BICUDO, M. A. V.(Org.). **Pesquisa em Educação Matemática.** São Paulo: Editora UNESP, 1999.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Boletim de Educação Matemática,** Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

PADRÃO, Darice Lascala. **A origem do zero.** Dissertação de Mestrado (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC), São Paulo, 2000. Disponível em: https://repositorio.pucsp.br/bitstream/handle/11332/1/Darice%20Lascala%20Padrao.pdf. Acesso em: 11 jul. 2022

PEREIRA, Ana Carolina Costa; SILVA, Isabel Coelho da; NOGUEIRA, Raniele Sampaio; ALVES, Francisco Regis Vieira. Sobre o uso de fontes na disciplina de História da Matemática: Problema 26 do Papiro de Rhind. Revista REVMAT, volume 10, número 2, p.243-257, Florionópolis, SC, 2015. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/318482471_Sobre_o_uso_de_fontes_na_disciplina_de_Historia_da_Matematica_Problema_56_do_Papiro_de_Rhind. Acesso em: 28 de jul.2022.

PICOLO, Kátia Luzia; VITÓRIO, Sônia Maria; TEIXEIRA, Thaise Bússolo. Considerações sobre práticas pedagógicas com ênfase no ensino da Geometria. **Revista de Iniciação Científica**, volume 5, nº1, Universidade do Extremo Sul Catarinense (UNESC), 2010. Disponível em: https://periodicos.unesc.net/ojs/index.php/iniciacaocientifica/article/view/168/173. Acesso em: 28 de jul.2022.

PIETERZACK, Mauricio Donizetti**.** Números reais. **Revista da Olimpíada**, nº 1, Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística Goiânia, GO, 2000. Disponível em: https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/1170/o/NumerosReais.pdf. Acesso em: 11 jul. 2022.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas.** Interciência, 2 ed., Rio de Janeiro, 1997.

POWELL, Arthur Belford. Aprimorando o Conhecimento dos Estudantes sobre a Magnitude da Fração: um Estudo Preliminar com Alunos nos Anos Inicias. **XIII Encontro Nacional de Educação Matemática**, Brasil, junho, Cuiabá, MT, 2019. Disponível em: https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/paper/view/1258/1834. Acesso em: 11 jul. 2022.

RODRIGUES, Carolina Inocente. **Uma proposta de ensino de frações no 6º ano do ensino fundamental a partir da perspectiva histórico-cultural.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Federal de Uberlândia, 2015. Disponível em: https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/17773.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática:** Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Editora Zahar, 2012.

SAITO, Fumikazu. A reconstrução de antigos instrumentos matemáticos dirigida para formação de professores. **Revista Educação:** Teoria e Prática, v.29, n.62, p. 571-589, Rio Claro, SP, 2019. DOI: https://doi.org/10.18675/1981-8106.vol29.n62.p571-589. Acesso em: 28 de jul.2022.

SARMENTO, Alan Kardec Carvalho. O desenvolvimento lógico histórico do conceito de medida e o processo de significação na atividade pedagógica. **Tese** (Doutorado- Programa de Pós-Graduação, Educação Científica, Matemática e Tecnológica), Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo (USP), 2019. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-10122019-094300/publico/ALAN_KARDEC_CARVALHO_SARMENTO_rev.pdf. Acesso em: 28 de jul.2022.

SAVIANI, Dermeval. A filosofia na formação do educador. Publicado na Revista **D/doto,** nº l, janeiro de 2000. Disponível em; http://www.scribd.com/doc/7298667/Demerval-Saviani-Do-Senso-Comum-Cons-Ciencia-Filosofica. Acesso em: 09 jul. 2022.

SILVA, Diva Lea Batista da. **Do real à imagem:** a crítica nas charges. 2006. Disponível em: https://www.academia.edu/9460426/Do_real_%C3%A0_imagem_a_cr%C3%ADtica_nas_charges_Diva_Lea_Batista_da_SILVA_IMESA_FEMA_Assis_SP_. Acesso em: 28 jul. 2022.

SILVA, Maria José Ferreira da**. Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série.** Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2005. 302 f. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10923. Acesso em: 28 jul. 2022.

SILVA, Maria José Ferreira da; AG ALMOULOUD, Saddo. As operações com números racionais e seus significados a partir da concepção parte-todo. **Boletim de Educação Matemática**, vol. 21, núm. 31, pp. 55-78. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Rio Claro, 2008.

STANIC, George Milan Alexander; KILPATRICK, Jeremy. **Perspectivas históricas sobre resolução de problemas no currículo de matemática.** Em RI Charles, & EA Silver (Eds.), The Teaching and Assessment of Mathematical Problem Solving (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM/Lawerance Erlbaum Associates. 1989. Disponível em: https://docplayer.com.br/43504016-Perspectivas-historicas-da-resolucao-de-problemas-no-curriculo-de-matematica-1.html. Acesso em: 28 jul. 2022.

VERGUEIRO, Waldomiro de Castro Santos. **Como usar as histórias em quadrinhos na sala de aula**. 2.ed. São Paulo: Contexto, 2005.

VIANA, Suzana Nery; CAVALCANTE, Maria Suely Viana; CORREIA, Fernando Luís de Sousa. Histórias em quadrinhos na aprendizagem matemática e sua importância como instrumento de inovação pedagógica. In: **Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento.** Ano 06, Ed. 03, Vol. 09, pp. 141-159. Março de 2021. Disponível em: https://www.nucleodoconhecimento.com.br/educacao/inovacao-pedagogica. Acesso em 11 jul. 2022.

AMANDA COUTO DA COSTA

FABIANA FIOREZI DE MARCO

Universidade Federal de Uberlândia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Amanda Couto da Costa
Fabiana Fiorezi de Marco

Fração e música: uma proposta de ensino

Uberlândia - MG
2022

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

C837
2022

Costa, Amanda Couto da, 1997-
Fração e Música: uma proposta de ensino [recurso eletrônico] / Amanda Couto da Costa. - 2022.

Orientadora: Fabiana Fiorezi de Marco.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2022.634
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Ciência - Estudo ensino. I. Marco, Fabiana Fiorezi de,1974-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 50:37

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática
Universidade Federal de Uberlândia
Avenida João Naves de Ávila, 2121
Campus Santa Mônica - Bloco 1A - Sala 207A CEP: 38400-902
Uberlândia, Minas Gerais

Telefone: (34) 3230-9419.
E-mail: coordenador@ppgecm.ufu.br
Site: http://www.ppgecm.ufu.br

Comissão Científica
Dra. Fabiana Fiorezi de Marco – UFU
Dra. Cristiane Coppe de Oliveira – UFU
Dra. Flávia Dias Ribeiro - UTFPR

Editoração Eletrônica e Capa
Amanda Couto da Costa

Produção e Divulgação
Programa PPGECM - UFU

APRESENTAÇÃO

Caro professor(a),

Este material constitui-se no Produto Educacional originado da dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, intitulada "Ensinando fração a partir da construção de instrumentos musicais".

O estudo foi desenvolvido na Linha de Pesquisa Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática e contou com a orientação da Profa. Dra. Fabiana Fiorezi de Marco.

Desejamos que tenha uma boa leitura e que sirva de inspiração para novas criações.

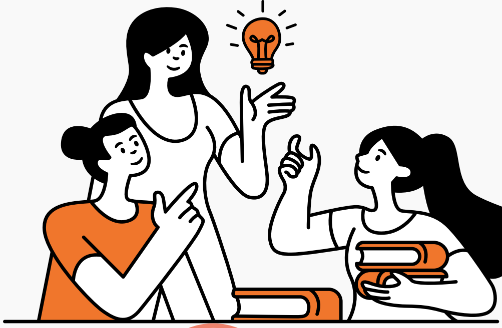
Sobre as autoras

Amanda Couto da Costa

Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pela UFU. Atuou na rede municipal de ensino de Uberlândia e, atualmente, trabalha como professora na Escola de Educação Básica (ESEBA), de Uberlândia. Possui Curso Técnico em instrumento pelo Conservatório Estadual Cora Pavan Caparelli, Uberlândia, MG. Membro do Grupo de Estudos e Pesquisa em Ensino de Matemática e Atividade Pedagógica (GEPEMAPe).

Fabiana Fiorezi de Marco

Pós-Doutora em Educação, área de concentração em Ensino de Ciências e Matemática pela FE/USP. Doutora e Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Campinas; Especialista em Matemática Aplicada, em Educação Matemática e Licenciada em Matemática pela Universidade de Franca. Docente na Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia. Membro do corpo docente permanente nos Programas de Pós-Graduação em Educação e em Ensino de Ciências e Matemática. Editora-chefe da revista Ensino em Re-Vista e membro da diretoria da Revista Obutchénie: Revista de Didática e Psicologia Pedagógica. Coordenadora do Grupo de Estudos e Pesquisa em Ensino de Matemática e Atividade Pedagógica (GEPEMAPe); membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Atividade Pedagógica (GEPAPe/USP/SP).



Sumário

1. UM BREVE DIÁLOGO COM OS EDUCADORES

Este produto educacional é fruto da dissertação "Ensinando fração a partir da construção de instrumentos musicais", desenvolvida do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática – Mestrado Profissional – da Universidade Federal de Uberlândia. A pesquisa foi realizada por mim, Amanda Couto da Costa, sob a orientação da Profª Drª Fabiana Fiorezi de Marco.

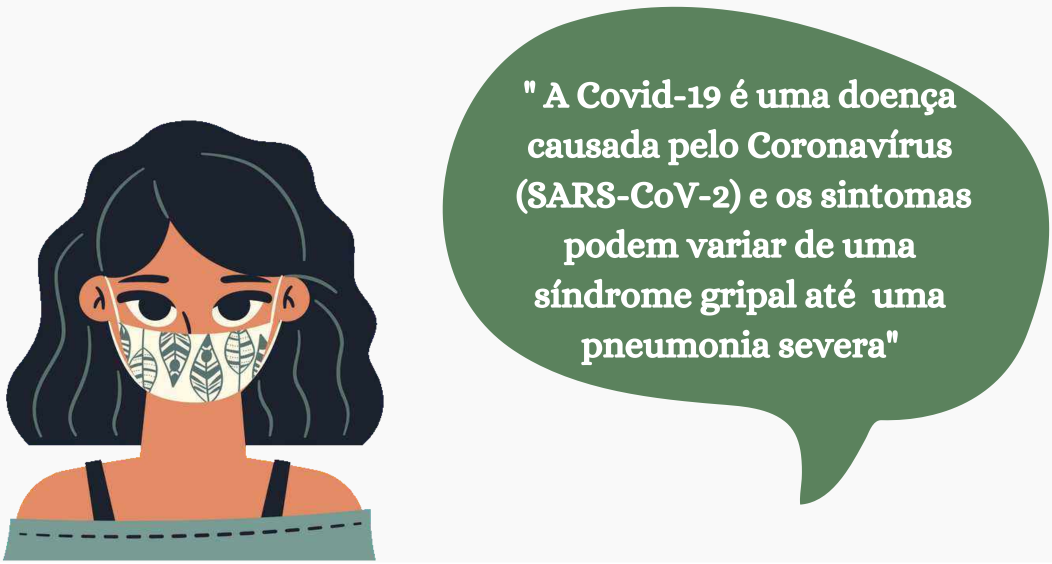
Essa proposta didática foi elaborada com intuito de trabalhar alguns elementos essenciais do conceito de fração, sendo fundamentada na perspectiva da resolução de problemas desenvolvida por Marco (2004) que considera anseios e motivações pessoais aliados às necessidades extrínsecas do estudante, ou seja, próprias contexto social.

As necessidades que mobilizaram o processo da resolução de problemas nessa pesquisa, foi a proposição pela professora-pesquisadora de problemas que viessem ao encontro com desejos pessoais dos estudantes, como por exemplo, aprender a tocar algum instrumento musical. Aproveitando esse momento, para possibilitar um momento formativo e pedagógico, foi realizado o resgate de alguns significados do conceito de fração.

Além disso, escolheu-se trazer os problemas relacionados à proposta didática organizada na forma de história em quadrinhos (HQ's), por sua estrutura permitir aliar a linguagem textual e visual, de modo que pode despertar nos estudantes, o interesse, a imaginação e contribuir para a interpretação das situações descritas na narrativa das HQ’s (BARBOSA et al., 2004)

A história em quadrinhos, na pesquisa, teve como objetivo constiruir-se uma narrativa que pudesse convidar os estudantes para a construção de instrumentos musicais, visando discutir alguns elementos essenciais do conceito de fração: medida, divisão, razão e operador. Além disso, possibilitar a discussão sobre a representação decimal e percentual da fração, tendo em vista sua relevância prática na sociedade atual.

A versão apresentada aqui passou por diversas modificações desde o início da sua elaboração em função das necessidades da própria autora, como: o término do seu contrato como professora da rede municipal de ensino de Uberlândia, em dezembro de 2020, a realização do ensino remoto pelo aumento dos casos do Covid-19 no Brasil e no mundo.



Mediante a experiência do ensino remoto vivida no tempo de pandemia, percebeu-se a grande dificuldade, tanto para professores quanto para estudantes, em se adequarem a essa modalidade de trabalho e, muitos estudantes se apresentavam desanimados em aprender. Por essa razão, pensou-se em utilizar a música para relembrar conceitos de frações de forma a estimular os alunos para a aprendizagem e, ao mesmo tempo, envolvê-los em uma atividade cultural que, se desejarem, pode, posteriormente, ser parte de suas rotinas.

Para a organização da turma, sugere-se, ao professor e à professora, que essa proposta seja realizada em um trabalho colaborativo com uma professora de música, se possível.

Para este produto educacional, a proposta didática foi organizada em 3 partes:

Figura 1 - Organização da proposta didática

Fonte: Elaborado pela autora

A primeira parte da proposta didática, "Construindo alguns instrumentos musicais", teve como intuito atribuir nova qualidade ao conceito de fração, a partir da resolução de problemas, envolvendo a confecção de alguns instrumentos musicais.

Na Figura 2, apresenta-se a organização deste momento da proposta.

Figura 2 - Organização da 1ª parte da proposta

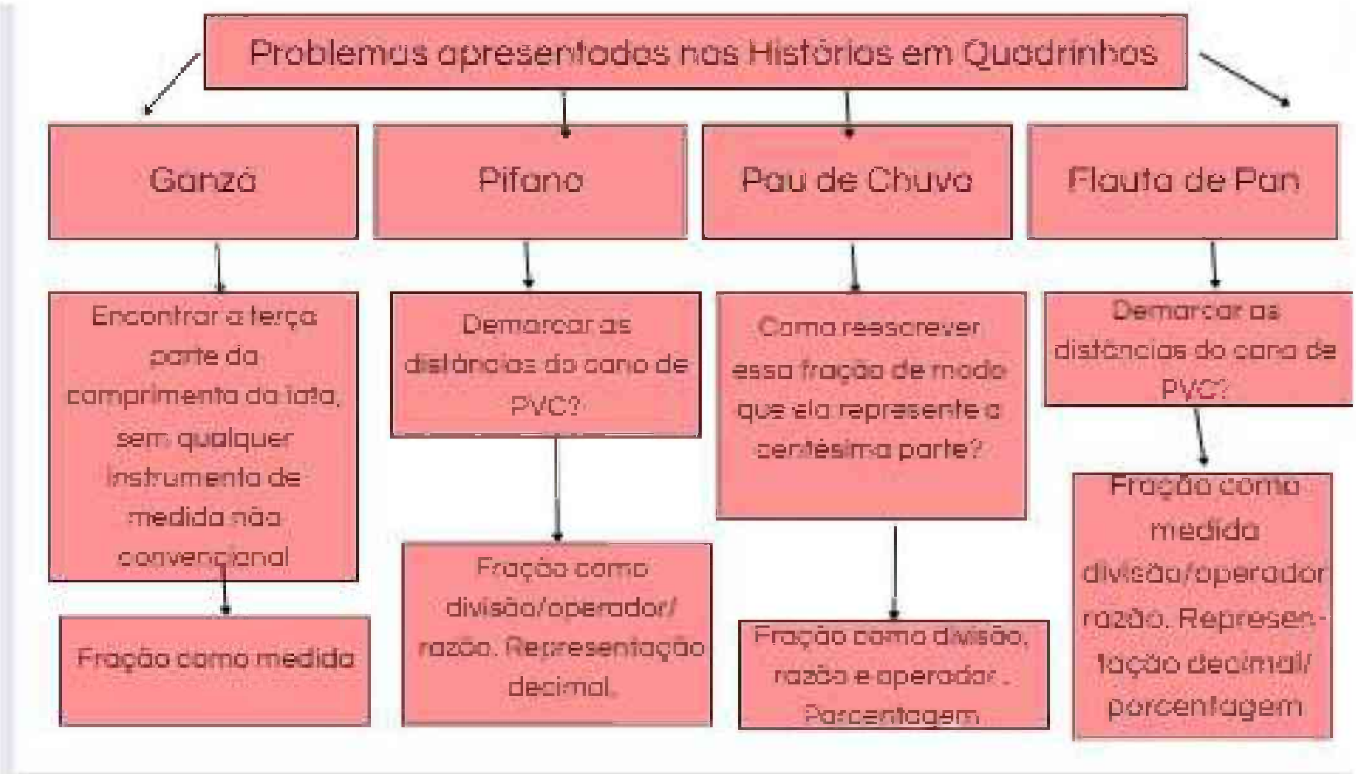
Fonte: Elaborado pela autora

A proposta está organizada segundo um encadeamento da construção de cada instrumento musical de acordo com a origem dos significados da fração ao longo da história da humanidade. Para cada instrumento a ser construído, a proposta sempre parte de um problema a ser resolvido enfocando um significado de fração.

Dessa forma, com o primeiro instrumento, o Ganzá, tem-se como objetivo trabalhar o significado de fração como medida, um vez que, pelos estudos históricos realizados, esse foi o elemento primordial para o surgimento do conceito de fração. No segundo instrumento, aborda-se a ideia de fração como divisão, operador e razão, além de explorar a representação decimal.

Com o terceiro instrumento reforça-se os significados de fração como quociente, operador, razão, mas o foco é abordar a porcentagem tendo em vista a relevância dessa representação na sociedade atual. Como última construção, no quarto instrumento, tem-se como objetivo abordar todos os elementos em um contexto de síntese do processo.

Figura 3- Problemas referentes a 1ª parte da proposta



Fonte: Elaborado pela autora

Na segunda parte da proposta, "Investigando o Sistema de Escrita Musical", aborda-se a utilização das frações na parte teórica da estrutura musical, no sistema tonal tradicional. O objetivo desse momento é, de forma prática, utilizar os conhecimentos sobre fração elaborados na primeira parte do trabalho e os alunos os utilizarem nas situações musicais envolvendo o tempo e as figuras rítmicas.

A terceira parte da proposta, "Elaborando uma composição musical", tem como intuito que os alunos criem uma melodia que possa ser tocada por eles utilizando os instrumentos construídos.

É importante ressaltar que, caso o professor ou a professora não tenha conhecimtnos musicais e não consiga estabelecer parcerias com professores de música nas escolas, o trabalho não fica impossibilitado podendo ser realizada a primeira parte do trabalho apenas.

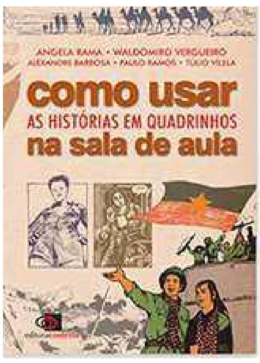
Espera-se que esse produto possa ajudar docentes a organizarem planos de aula que auxiliem os alunos a melhor compreenderem elementos essenciais do conceito de fração utilizando a música.

Dica

Deixamos aqui, o acesso a sugestões de leituras e materiais que podem ajudar o professor e a professora a entender melhor sobre Resolução de Problemas, Histórias em Quadrinhos e o significado de fração.

Resolução de Problemas

MARCO, Fabiana Fiorezi de. Estudo dos processos de resolução de problema mediante a construção de jogos computacionais de matemática no ensino fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação: Educação Matemática) — Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2004. 141p.

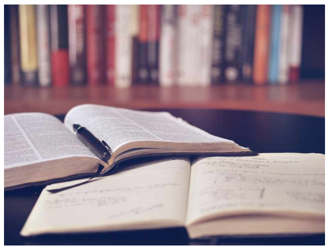


História em Quadrinhos

BARBOSA, Alexandre; VERGUEIRO, Waldomiro; RAMA, Angela; RAMOS, Paulo. VILELA, Túlio. Como usar as histórias em quadrinhos na sala de aula. Editora Contexto, São Paulo, SP, 2006. (versão kindle).

COMO FAZER TIRINHAS NO CANVA?
Fonte: https://www.canva.com/pt_br/criar/tirinhas/. Acesso em 07/11/2022.

Fração e seus significados



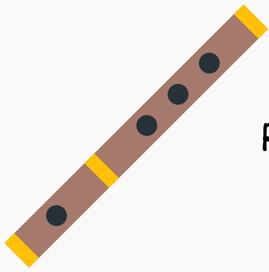
OLIVEIRA, Vania Sara Doneda de; BASNIAK, Maria Ivete. FRAÇÕES E SUAS MÚLTIPLAS INTERPRETAÇÕES: reflexões sobre o ensino e a aprendizagem. HISTEMAT, SBHMat, v.7, p.1-20, 2021.

Fonte:http://funes.uniandes.edu.co/29450/1/Doneda2021Fra%C3%A7%C3%B5es.pdf. Acesso em: 09 jul. 2022.

2. CONSTRUINDO ALGUNS INSTRUMENTOS MUSICAIS

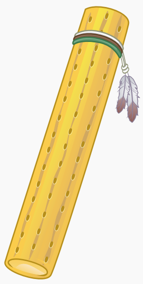
Tempo Estimado: 6 aulas de 50 minutos

Ganzá



Pífano

Flauta de Pan



Pau de Chuva

A partir de uma história em quadrinhos é abordado um problema envolvendo a construção dos instrumentos musicais Ganzá, Pífano, Flauta de Pan e Pau de Chuva. Espera-se que essa história possa servir como elemento disparador para o envolvimento dos alunos na proposta.

IMPORTANTE

O surgimento dos instrumentos musicais, conforme será visto na narração das histórias em quadrinhos, é baseado nos seguinte sites abaixo:

Pífano

Fonte: http://www.arte.seed.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=131 (Acesso em 07/11/2022)

Ganzá

Fonte: http://www.ccta.ufpb.br/labeet/contents/acervos/categorias/idiofones/ganza#:~:text=Sua%20origem%20f%C3%ADsica%20e%20morfol%C3%B3gica,do%20Congo%20(%C3%81frica).%E2%80%9D (Acesso em 07/11/2022)

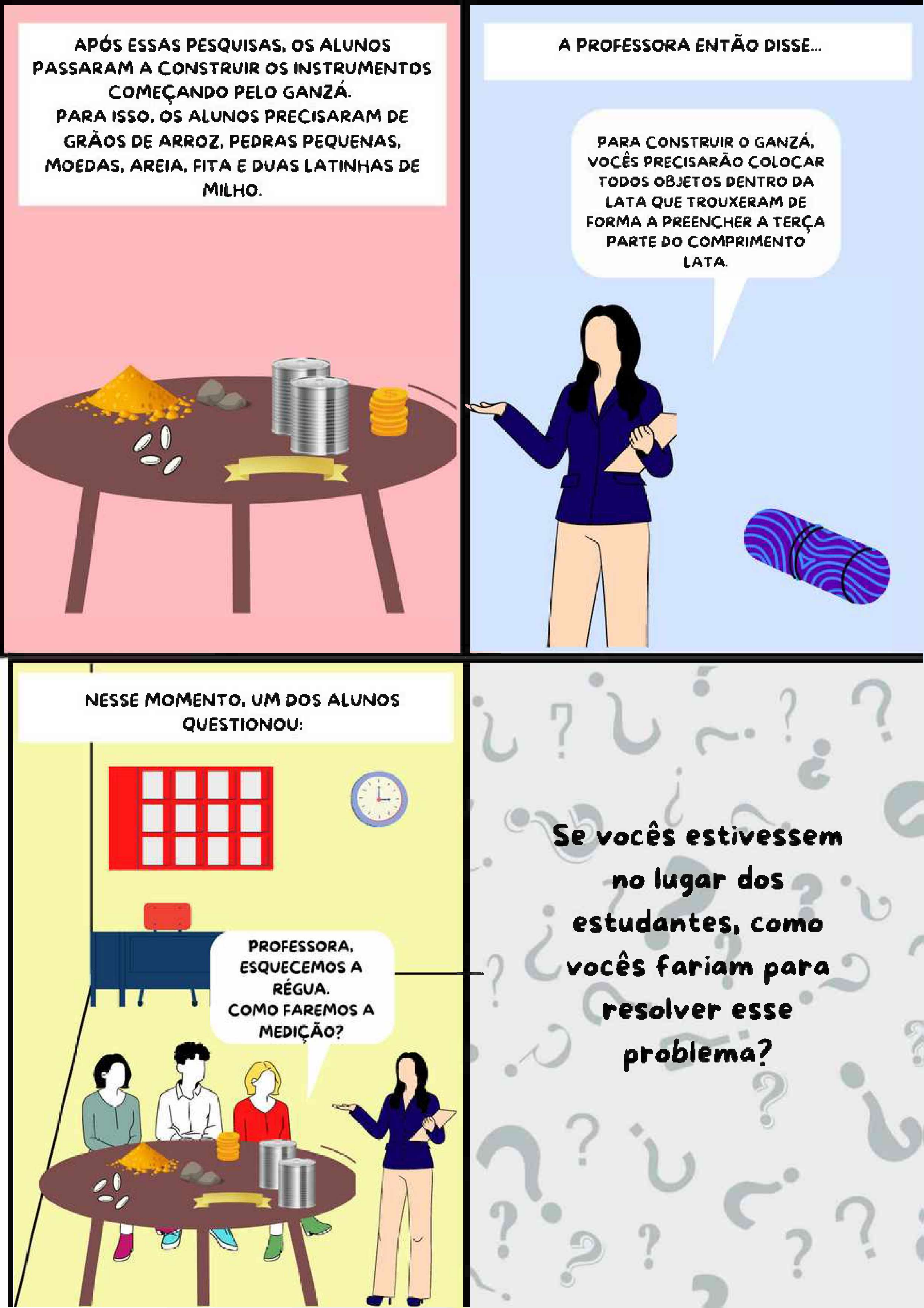
Pau de Chuva

Fonte: https://www.salaomusical.com/pt/412-paus-de-chuva (Acesso em 07/11/2022)

Flauta de Pan

Fonte: https://www.worldhistory.org/trans/pt/1-11070/a-flauta-de-pa/ (Acesso em 07/11/2022)

Uma aula de Matemática diferente


APÓS ESSAS PESQUISAS, OS ALUNOS PASSARAM A CONSTRUIR OS INSTRUMENTOS COMEÇANDO PELO GANZÁ.
PARA ISSO, OS ALUNOS PRECISARAM DE GRÃOS DE ARROZ, PEDRAS PEQUENAS, MOEDAS, AREIA, FITA E DUAS LATINHAS DE MILHO.
A PROFESSORA ENTÃO DISSE...
PARA CONSTRUIR O GANZÁ, VOCÊS PRECISARÃO COLOCAR TODOS OBJETOS DENTRO DA LATA QUE TROUXERAM DE FORMA A PREENCHER A TERÇA PARTE DO COMPRIMENTO LATA.
NESSE MOMENTO, UM DOS ALUNOS QUESTIONOU:
PROFESSORA, ESQUECEMOS A RÉGUA. COMO FAREMOS A MEDIÇÃO?
Se vocês estivessem no lugar dos estudantes, como vocês fariam para resolver esse problema?

Ganzá

Objetivo: Resgatar o significado de fração como medida.

Figura 4 - Ganzá artesanal

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ganz%C3%A1
(Acesso em 09 abr. 2021)

Como fazer um Ganzá:
https://www.jam.mus.br/construcao-de-instrumentos-musicais-em-casa/
(Acesso em 25 fev. 2021)

Sugestões para o(a) Prpfessor(a)

Após a leitura da história, o professor (a), simulará com os alunos, a confecção do Ganzá.

Durante a construção do instrumento, os alunos podem utilizar seus conhecimentos matemáticos para demarcar a fração que corresponde à terça parte do comprimento da caixa.

Após o momento das discussões, o professor ou a professora poderá analisar com os alunos as seguintes questões:

O que é medir?

As demarcações sobre a terça parte do instrumento foram iguais?

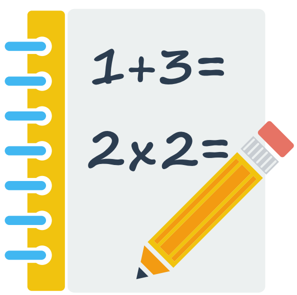
O que foi utilizado para realizar a medição?

Provavelmente, existirá diferenças na escolha da unidade de medida pelos alunos. As perguntas acima, podem auxiliar na reflexão da turma para que seja estabelecida uma unidade de medida padrão.

Após isso, o professor ou a professora pode solicitar aos alunos que façam a comparação e registrem a medida "terça parte" de 3 formas diferentes:

TIPOS DE REGISTROS

Escrito



Matemático

Desenho

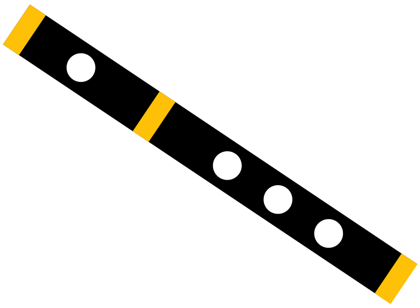
Nos documentos relacionados a História da Matemática, temos registros da necessidade do ser humano na transformação da linguagem retórica (por extenso) para a linguagem sincopada, até a formação de um registro matemático, a linguagem simbólica (matemática).

Esse é o objetivo nesse momento da aula!

Primeiramente, solicite aos alunos que registrem no papel, de forma retórica, a medida encontrada. Peça para que façam um desenho representando geometricamente o tamanho dessa medida. Oriente os alunos a transformar esses registros para a linguagem simbólica, até sua forma mais simplificada.

Lembre-se de dialogar com a turma sobre as diferentes formas de registro que possam ter surgido.

Pífano



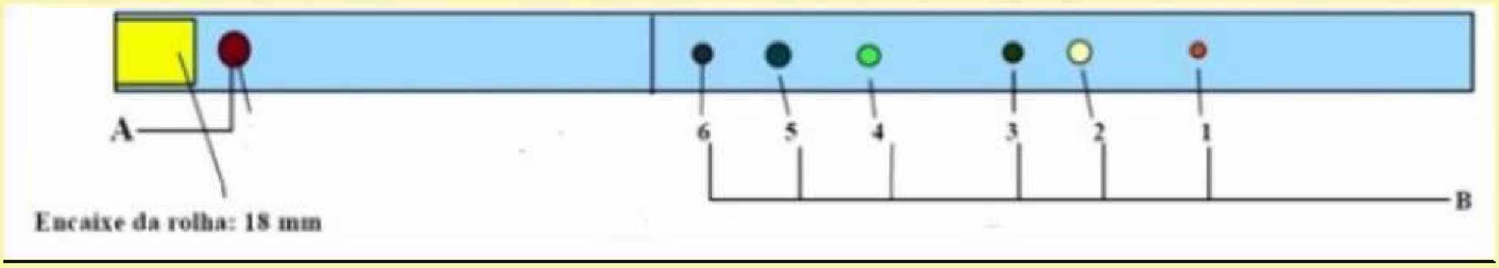
Objetivo: Resgatar o significado de fração como divisão e quociente.

Figura 5 - Pífano

Fonte: **https://pt.wikipedia.org/wiki/P%C3%ADfano**
(Acesso em 23 abr. 2021)

A seguir, é apresentada a continuação da história e outros problemas que os alunos podem encontrar na construção da flauta pífano.

NO OUTRO DIA, OS ALUNOS LEMBRARAM DE TRAZER A RÉGUA E A PROFESSORA SOLICITOU QUE OS ESTUDANTES COLETIVAMENTE, CONSTRUÍSSEM O PÍFANO COM UM CANO DE PVC DE MEIA QUE TINHA 32 CM DE COMPRIMENTO. ELA ENTREGOU A SEGUINTE IMAGEM PARA OS ESTUDANTES:



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=_wthF880qmU (adaptada) Acesso em 28/04/2021

E UMA FOLHA COM AS SEGUINTES MEDIDAS...

Distância do ponto B até os furos:

Furo 1: $\frac{11}{2}$

Furo 2: $\frac{84}{10}$

Furo 3: $10\ cm$

Furo 4: $12\ \frac{4}{5}$

Furo 5: $\frac{64}{5}$

Furo 6: $17{,}1\ cm$

Distância do ponto a até os furos: $\frac{7}{2}$

Diâmetro dos furos:

Furo 1: $\frac{6}{10}\ cm$

Furo 2: $\frac{8}{10}\ cm$

Furo 3: $0{,}6\ cm$

Furo 4: $0{,}8\ cm$

Furo 5: $\frac{17}{2}\ cm$

Furo 6: $0{,}9\ cm$

Furo do sopro: $\frac{9}{10}\ cm$

Se vocês estivessem no lugar dos alunos da história, como vocês fariam para demarcar as distâncias no cano de PVC?

Sugestões para o(a) Professor(a)

P ara a construção da flauta, sugerimos assistir ao vídeo abaixo:

Acesso em 20 maio 2021.

Com uma régua e um lápis, peça para os alunos desenharem em um papel, um segmento de 32 cm de comprimento. Peça, também, para que eles marquem cada uma das 32 unidades inteiras. Questione os alunos onde estaria localizado, no segmento de 32 cm, a fração $\frac{4}{5}$

Como os alunos poderiam pensar em resolver essa questão?

Analisando um dos significados da fração, os alunos podem pensar que $\frac{4}{5}$ significa subdividir o segmento de 32 cm em 5 partes e considerar 4 partes apenas.
Uma outra forma de abordar esta questão é orientar os alunos a pensarem nas características do Sistema de Numeração Decimal, para que assim busquem outro significado para a fração: a Divisão.

Sistema de Numeração Decimal

Representar uma infinidade de quantidades (concretas ou abstratas).

Formação de grupos de 10 unidades. Criação de 10 símbolos (os algarismos).

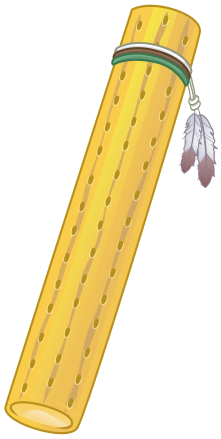
Escrita na forma posicional, onde cada algarismo dependendo da sua posição possui um significado.

Dica

O professor ou a professora pode analisar com os alunos que uma possibilidade para solucionar esta situação seria fazer a divisão de 4 por cinco e, posteriormente, multiplicar por 32.
Nesse caso, poderia ser relembrado como proceder em divisões com quocientes decimais (4 : 5 = 6,4) e, também, como multiplicar um número natural por um decimal (6,4 x 32 = 25,6).

Outra maneira é os alunos buscarem analisar a partir do significado da fração $\frac{4}{5}$ como operador, ou seja, de 32 unidades.

Pau de Chuva

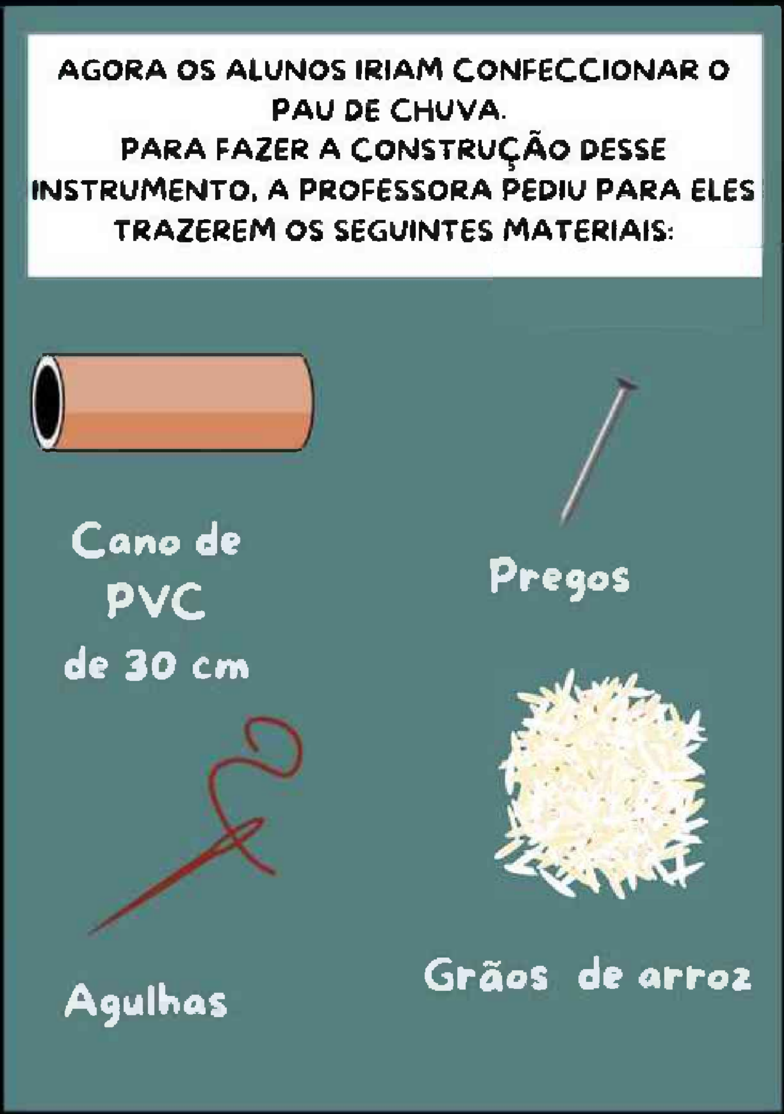


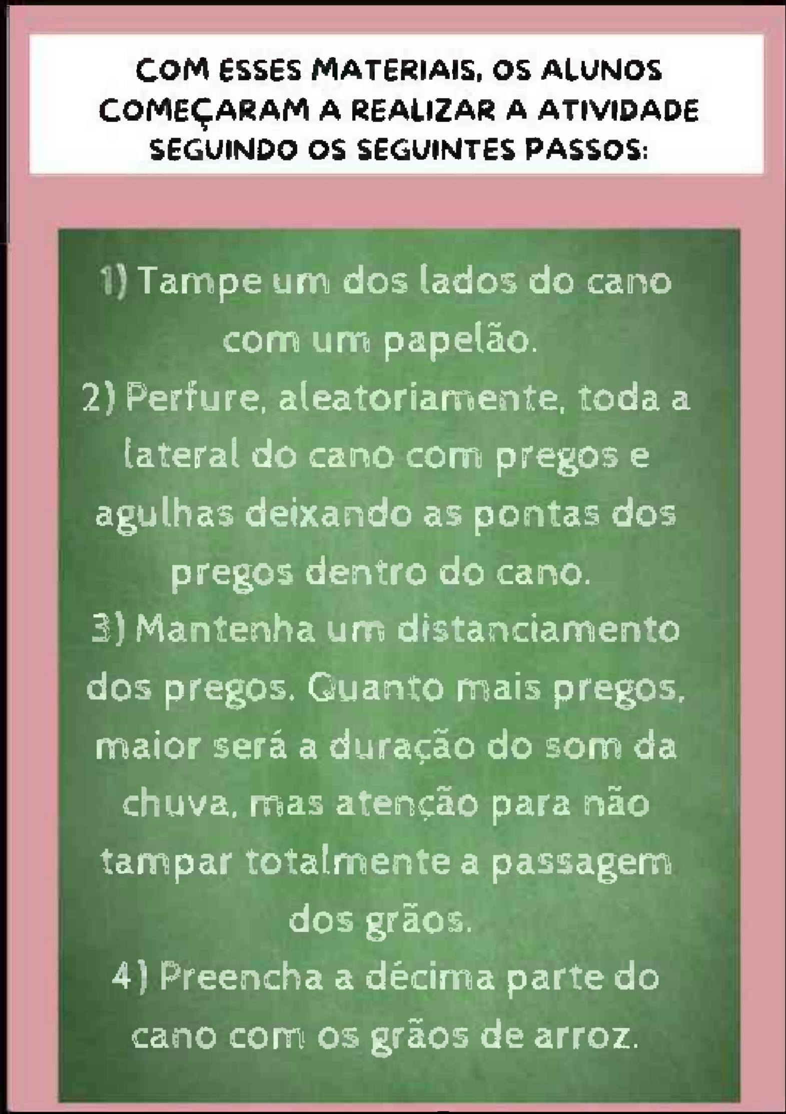
Objetivo: Resgatar o significado de fração como divisão e quociente.

Figura 6- Pau de Chuva

Fonte: https://produto.mercadolivre.com.br/MLB-1308564701-pau-de-chuva-efeito-de-percusso-instrumento-musical-1-metro-_JM#reco_item_pos=4&reco_backend=machinalis-v2p-pdp-boost-v2-tracksv2&reco_backend_type=low_level&reco_client=vip-v2p&reco_id=c3229467-161b-48e5-b62d-b29a5316a444.

Como fazer o Pau de Chuva: https://www.jam.mus.br/construcao-de-instrumentos-musicais-em-casa/ (Acesso em 25 fev. 2021)

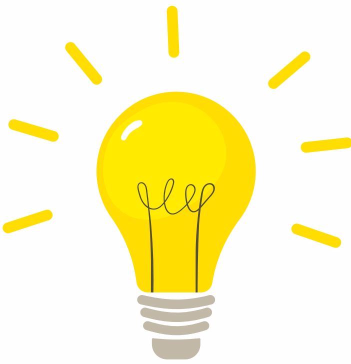

AGORA OS ALUNOS IRIAM CONFECCIONAR O PAU DE CHUVA.
PARA FAZER A CONSTRUÇÃO DESSE INSTRUMENTO, A PROFESSORA PEDIU PARA ELES TRAZEREM OS SEGUINTES MATERIAIS:
Cano de PVC de 30 cm
Pregos
Agulhas
Grãos de arroz


COM ESSES MATERIAIS, OS ALUNOS COMEÇARAM A REALIZAR A ATIVIDADE SEGUINDO OS SEGUINTES PASSOS:
1) Tampe um dos lados do cano com um papelão.
2) Perfure, aleatoriamente, toda a lateral do cano com pregos e agulhas deixando as pontas dos pregos dentro do cano.
3) Mantenha um distanciamento dos pregos. Quanto mais pregos, maior será a duração do som da chuva, mas atenção para não tampar totalmente a passagem dos grãos.
4) Preencha a décima parte do cano com os grãos de arroz.


APÓS A CONSTRUÇÃO DO PAU DE CHUVA E A DEMARCAÇÃO DA DÉCIMA PARTE DO CANO ONDE PREENCHIDO COM OS GRÃOS DE ARROZ, A PROFESSORA PROPÔS QUE OS ALUNOS REPRESENTASSEM NUMA FOLHA A DÉCIMA PARTE EM FORMA DE FRAÇÃO.
A PROFESSORA ENTÃO PERGUNTOU:
COMO REESCREVER ESSA FRAÇÃO DE MODO QUE ELA REPRESENTE A CENTÉSIMA PARTE?


APÓS UM MOMENTO DE DIÁLOGO COLETIVO DOS ALUNOS, ELES EXPLICARAM PARA PROFESSORA COMO ELES PENSARAM E CHEGARAM A UMA CONCLUSÃO. ENTÃO A PROFESSORA PEDIU PARA QUE ESSES ALUNOS ESCREVESSEM ESSA FRAÇÃO NA FORMA DECIMAL E PERGUNTOU:
O QUE ESSAS DUAS ESCRITAS TEM EM COMUM?

Dica



O intuito é que os alunos encontrem uma forma de transformar a fração de forma que o denominador seja 100.
Encontrar frações equivalentes.
Uma das maneiras fazer isso a partir de uma operação numérica ou por tentativa através da análise geométrica.

Você pode conduzir seus alunos a perceberem que a fração centésima e sua representação decimal são duas formas diferentes de representar uma mesma quantidade.
Após isso, pode sugerir aos alunos que encontrem um símbolo para representar esse tipo de fração.
O objetivo é, ao final, apresentar a notação da porcentagem.

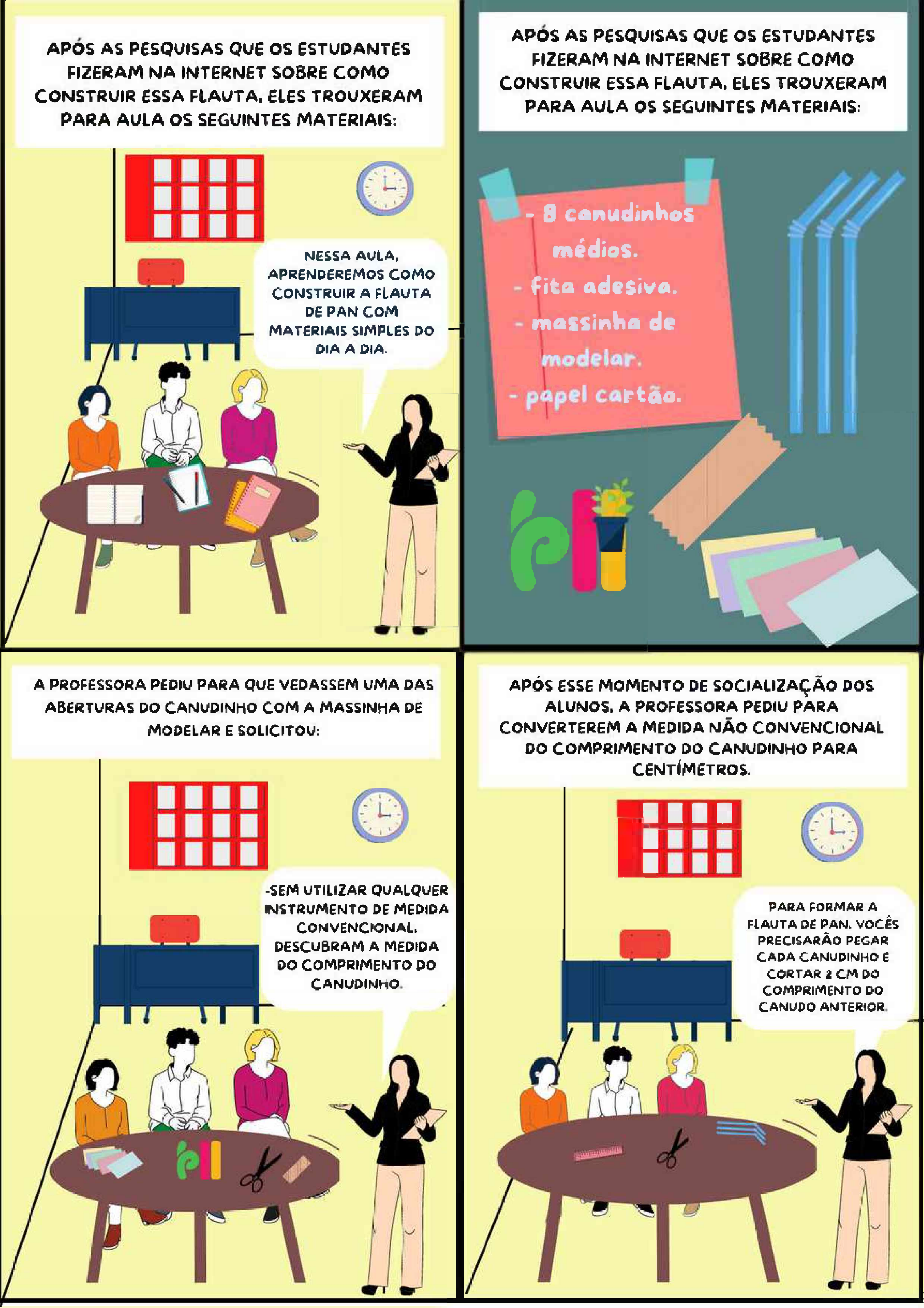
Flauta de Pan

Objetivo: Abordar o significado de fração como medida, razão, divisão, quociente e porcentagem.

Figura 7- Flauta de Canudinhos

Fonte: Confeccionado pela autora

Teremos a continuação da história envolvendo a construção da Flauta de Pan.


APÓS AS PESQUISAS QUE OS ESTUDANTES FIZERAM NA INTERNET SOBRE COMO CONSTRUIR ESSA FLAUTA, ELES TROUXERAM PARA AULA OS SEGUINTES MATERIAIS:
NESSA AULA, APRENDEREMOS COMO CONSTRUIR A FLAUTA DE PAN COM MATERIAIS SIMPLES DO DIA A DIA.
APÓS AS PESQUISAS QUE OS ESTUDANTES FIZERAM NA INTERNET SOBRE COMO CONSTRUIR ESSA FLAUTA, ELES TROUXERAM PARA AULA OS SEGUINTES MATERIAIS:
- 8 canudinhos médios.
- fita adesiva.
- massinha de modelar.
- papel cartão.
A PROFESSORA PEDIU PARA QUE VEDASSEM UMA DAS ABERTURAS DO CANUDINHO COM A MASSINHA DE MODELAR E SOLICITOU:
-SEM UTILIZAR QUALQUER INSTRUMENTO DE MEDIDA CONVENCIONAL, DESCUBRAM A MEDIDA DO COMPRIMENTO DO CANUDINHO.
APÓS ESSE MOMENTO DE SOCIALIZAÇÃO DOS ALUNOS, A PROFESSORA PEDIU PARA CONVERTEREM A MEDIDA NÃO CONVENCIONAL DO COMPRIMENTO DO CANUDINHO PARA CENTÍMETROS.
PARA FORMAR A FLAUTA DE PAN, VOCÊS PRECISARÃO PEGAR CADA CANUDINHO E CORTAR 2 CM DO COMPRIMENTO DO CANUDO ANTERIOR.

Dica

a) Solicitar que cada aluno escreva no seu caderno como pensou e registre a medida encontrada.

b) Pedir para que os alunos façam uma comparação em relação ao tamanho dos canudinhos uns dos outros. O intuito desse momento, é que eles percebam a necessidade de se estabelecer uma unidade padrão.

Estabelecida a unidade padrão, solicite que os alunos registrem essa medida de duas maneiras:
a) Por extenso.
b) Em linguagem simbólica (matemática).

Estas são algumas sugestões de questionamentos que você pode levar para sala de aula para desencadear as discussões com os os alunos.

Dica

Provavelmente, nesse momento, a medida do canudinho pode não ser um valor inteiro, necessitando que os alunos se utilizem da representação fracionária.

Suponha que o aluno tenha feito as comparações com seu polegar. Então:

Unidade de medida: polegar

Comprimento do Canudinho: oito polegares e a terça parte do polegar;

Transcrevendo para linguagem matemática:

$$8\frac{1}{3} \text{ p (polegar)}$$

A PROFESSORA ENTREGOU PARA OS ALUNOS UMA TABELA COMO A QUE TEMOS A SEGUIR E PEDIU PARA REGISTRAREM O COMPRIMENTO DE CADA CANUDINHO APÓS O CORTE:

Canudos	Comprimento

APÓS O MOMENTO DE DIÁLOGO DOS ALUNOS E DE APRESENTAÇÃO DAS SOLUÇÕES, A PROFESSORA SOLICITOU QUE RESPONDESSEM OS SEGUINTES QUESTIONAMENTOS:

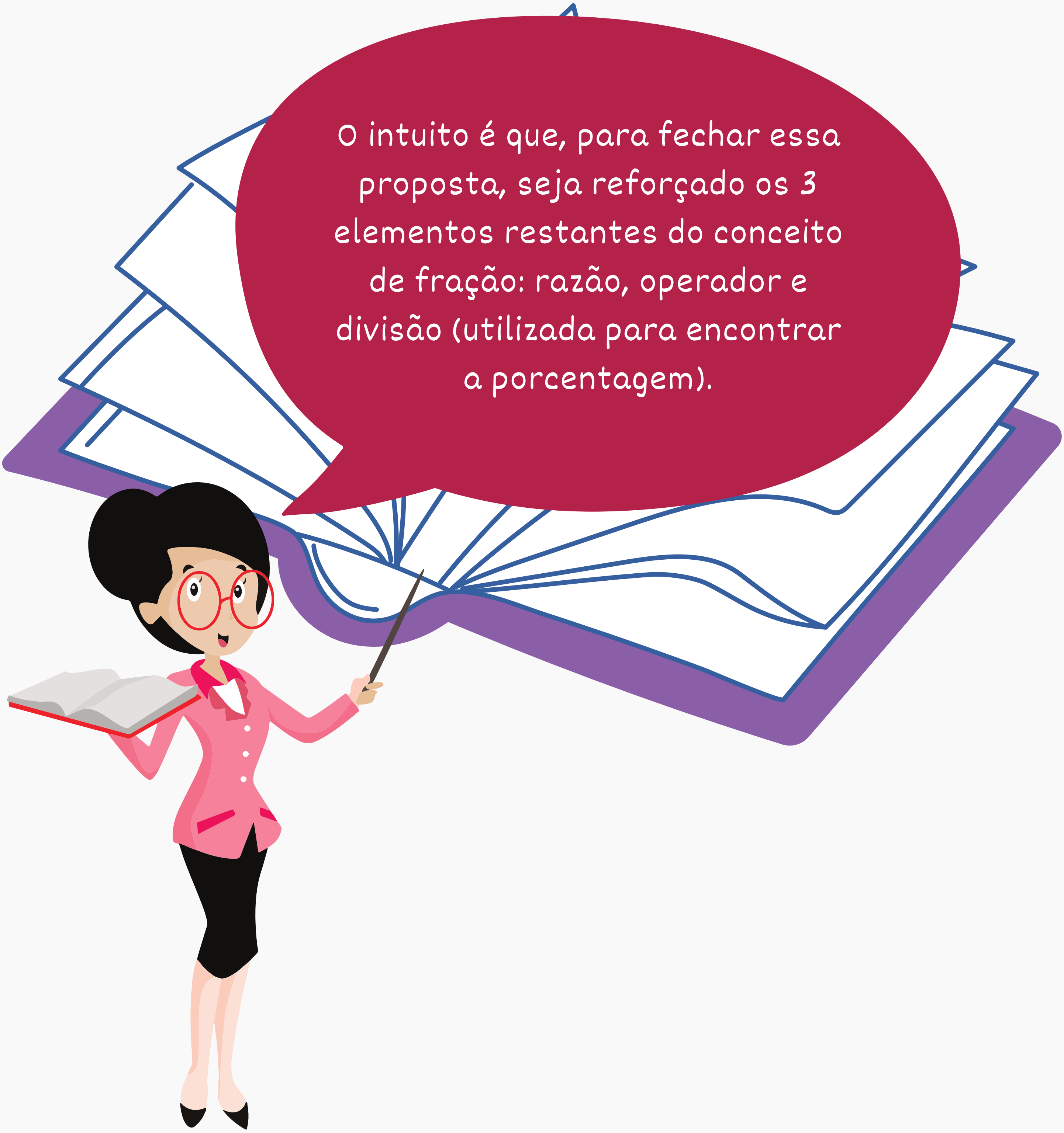
a) Represente o comprimento de cada canudinho em forma de razão.

b) Como averiguação, calcule o valor de cada fração em relação ao comprimento total.

c) Quantos por cento do comprimento total cada canudinho representa?

Se vocês estivessem no lugar dos alunos da história, como vocês fariam para demarcar as distâncias no cano de PVC?

Dica


O intuito é que, para fechar essa proposta, seja reforçado os 3 elementos restantes do conceito de fração: razão, operador e divisão (utilizada para encontrar a porcentagem).

Para o desenvolvimento dessa parte da proposta, é interessante o trabalho colaborativo com uma professora ou um professor de música, caso o docente não tenha conhecimento musical.

Conceitos Iniciais de Música

Objetivo: Trabalhar os seguintes elementos essenciais do som: Intensidade, Duração, Altura, Timbre.

A PROFESSORA, NESTE DIA, PEDIU PARA OS ALUNOS FORMAREM UMA RODA DE CONVERSA E PROPÔS O SEGUINTE DESAFIO:
PARA CADA UM DE VOCÊS, FOI ENTREGUE UM OBJETO. O MEU DESAFIO É QUE VOCÊS TENTEM PRODUZIR ALGUM SOM.
OS OBJETOS ENTREGUES FORAM;
Violão
Flauta de Pan
Ganzá
APÓS OS ALUNOS TEREM CONSEGUIDO REALIZAR A ATIVIDADE, A PROFESSORA QUESTIONOU:
O QUE É SOM? O QUE É MÚSICA?
YGOR COMENTOU:
PARA MIM, SOM É TUDO AQUILO QUE OUVIMOS. E MÚSICA É AQUELA TOCADA NOS INSTRUMENTOS.
?
A afirmação de Ygor está correta?

Sugestões para o(a) Professor(a)

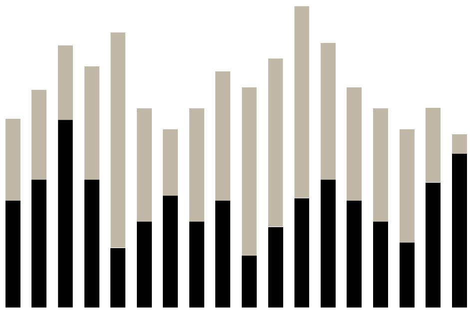
Quando batemos com uma colher em um copo com água, o que acontece com a água?

O intuito é que os alunos percebam que ao emitir o som, a água se agita por causa das vibrações que o som produz.

Pode-se, também, tocar o violão e os alunos perceberem que o som resulta de vibrações que, na verdade, o que está vibrando são as partículas de ar.

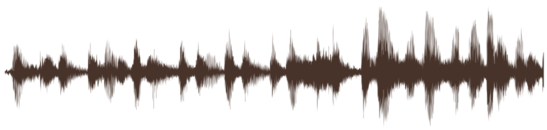
Será que conseguimos escutar todos os tipos de som?

Pode ser interessante que você sugira que os alunos façam essas investigações na internet. O objetivo final é que os alunos percebam a fragilidade do corpo humano que não consegue identificar alguns tipos de som.



Após as discussões, pode-se apresentar aos alunos que o som pode ser definido como sendo:

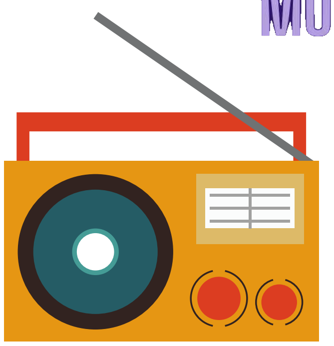
" SOM SÃO ONDAS QUE SÃO PRODUZIDAS A PARTIR DA VIBRAÇÃO
DAS PARTÍCULAS DE AR."



Para as discussões do conceito de música, pode-se pedir aos alunos que ouçam dois sons: o ruído do rádio quando muda de faixa e uma música instrumental.

A discussão será direcionada para que os alunos analisem quais dos sons podem ser considerados como uma música.

"MÚSICA- UM CONJUNTO ORDENADO DE SONS"



Os ruídos não são considerados músicas, pois são sons considerados "desordenados" .

Vamos ouvir o som que foi ouvido pelos estudantes. Qual conclusão vocês chegariam no lugar dos alunos da história ?

Sugestões para o(a) Professor(a)

Pode-se pedir que os alunos ouçam o som que se encontra no QR Code a seguir:

Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=kcT-i9xzC-8&t=15s
(Acesso em 21/05/2021)

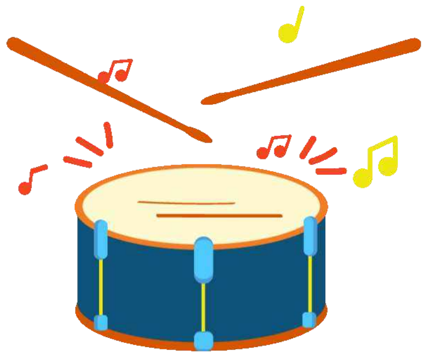
Após a discussão, espera-se que os estudantes percebam que:

A intensidade do som está relacionada com o volume do som (forte ou fraco).

CONTINUANDO A ATIVIDADE, A PROFESSORA COLOCOU OS DOIS SONS ABAIXO PARA OS ALUNOS OUVIREM E, A PARTIR DISSO, DEFINISSEM O QUE SERIA DURAÇÃO NA MÚSICA.

Em relação aos sons anteriores, qual outra característica que vocês perceberam nos sons que ouviram?

Sugestões para o(a) Professor(a)



O professor deve pedir para os alunos ouvirem os seguintes sons:

Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=VBl-_kW7Icg&feature=emb_title (Acesso em 21/05/2021)

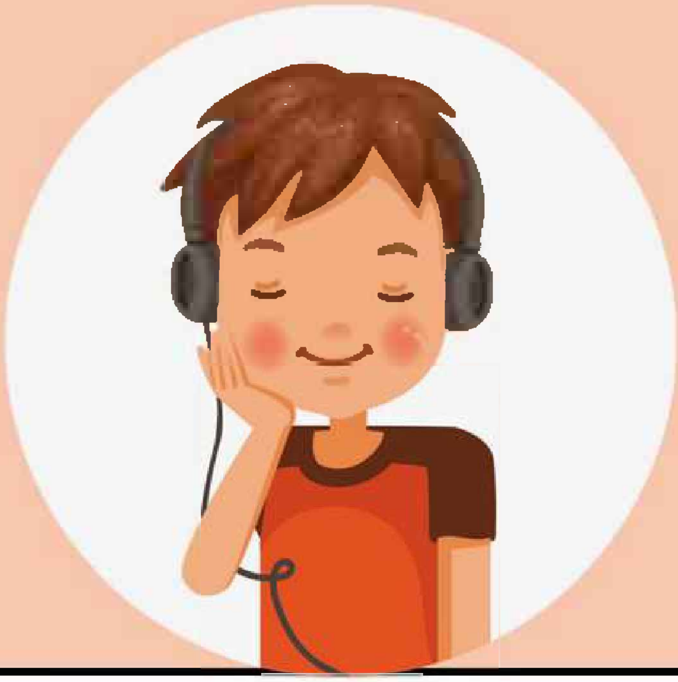
Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=W_lUyW_SJ8o (Acesso em 21/05/2021)

Após a discussão, espera-se que os estudantes percebam que:

Ao ouvir os sons acima, percebemos que, no primeiro, os sons eram mais curtos e no segundo, os sons eram mais prolongados. O tempo de produção do som são chamados na música de duração.

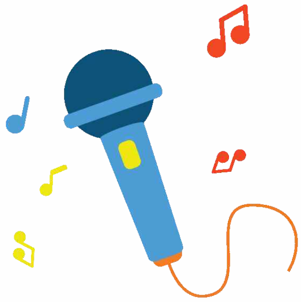
A PROFESSORA SOLICITOU QUE OS ALUNOS OUVISSEM OS SEGUINTES SONS ABAIXO:

Vamos ouvir o som que foi ouvido pelos estudantes. Qual a conclusão vocês chegariam no lugar dos alunos da história ?



Pode-se pedir para os alunos ouvirem os sons abaixo:

Fonte: https://youtu.be/33YcYLumEDk
(Acesso em 21/05/2021)

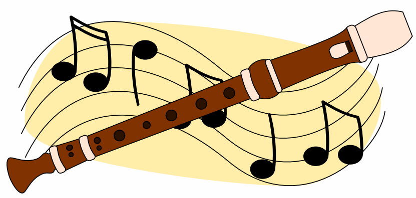


Fonte: https://youtu.be/tmsnVeefAy8
(Acesso em 21/05/2021)

Fonte: https://youtu.be/tFdlhlmQ-ek
(Acesso em 21/05/2021)

Fonte: https://youtu.be/HSgN5EWKi9Y
(Acesso em 21/05/2021)

Fonte: https://youtu.be/Ui91xOcFVmk
(Acesso em 21/05/2021)



Após a discussão, espera-se que os alunos percebam que:

A diferença nos sons acima é que cada som foi produzido por um instrumento diferente. Um veio do violão, outro do violino, outro do piano e outro da voz. Na música este aspecto é chamado de Timbre.

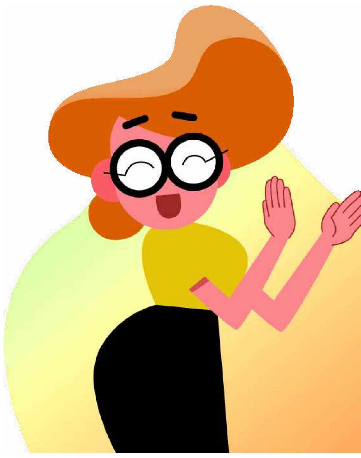
Elementos Essenciais da Música

Objetivo: Trabalhar os seguintes elementos essenciais da música: pulsação, ritmo, melodia.

A seguir, é apresentada a continuação da história em quadrinhos e outras considerações acerca dos conceitos pulsação, ritmo e melodia.


CONTINUANDO A INVESTIGAÇÃO SOBRE A MÚSICA...
NESSA AULA, ABORDAREMOS ALGUNS ELEMENTOS ESSENCIAIS DE MÚSICA. O PRIMEIRO DELES É A PULSAÇÃO.
A PROFESSORA COMENTOU:
PODEMOS COMPARAR A IDEIA DE PULSAÇÃO COM AS BATIDAS DO CORAÇÃO OU DE UM RELÓGIO DE PAREDE.
PULSAÇÃO É UM RITMO CONSTANTE A QUAL NOSSO CORPO NATURALMENTE SE IDENTIFICA!
CONTINUANDO A INVESTIGAÇÃO SOBRE A MÚSICA...
AO BATERMOS PALMAS JUNTAMENTE COM AS PESSOAS EM UM PARABÉNS, NOSSO CORPO FAZ ISSO REAGINDO AO PULSO DA MÚSICA. QUE TAL FAZERMOS UM TESTE?
HAPPY BIRTHDAY
Ouça os áudios propostos pela professora aos alunos da história e descubra a pulsação de cada música.

Sugestões para o(a) Professor(a)



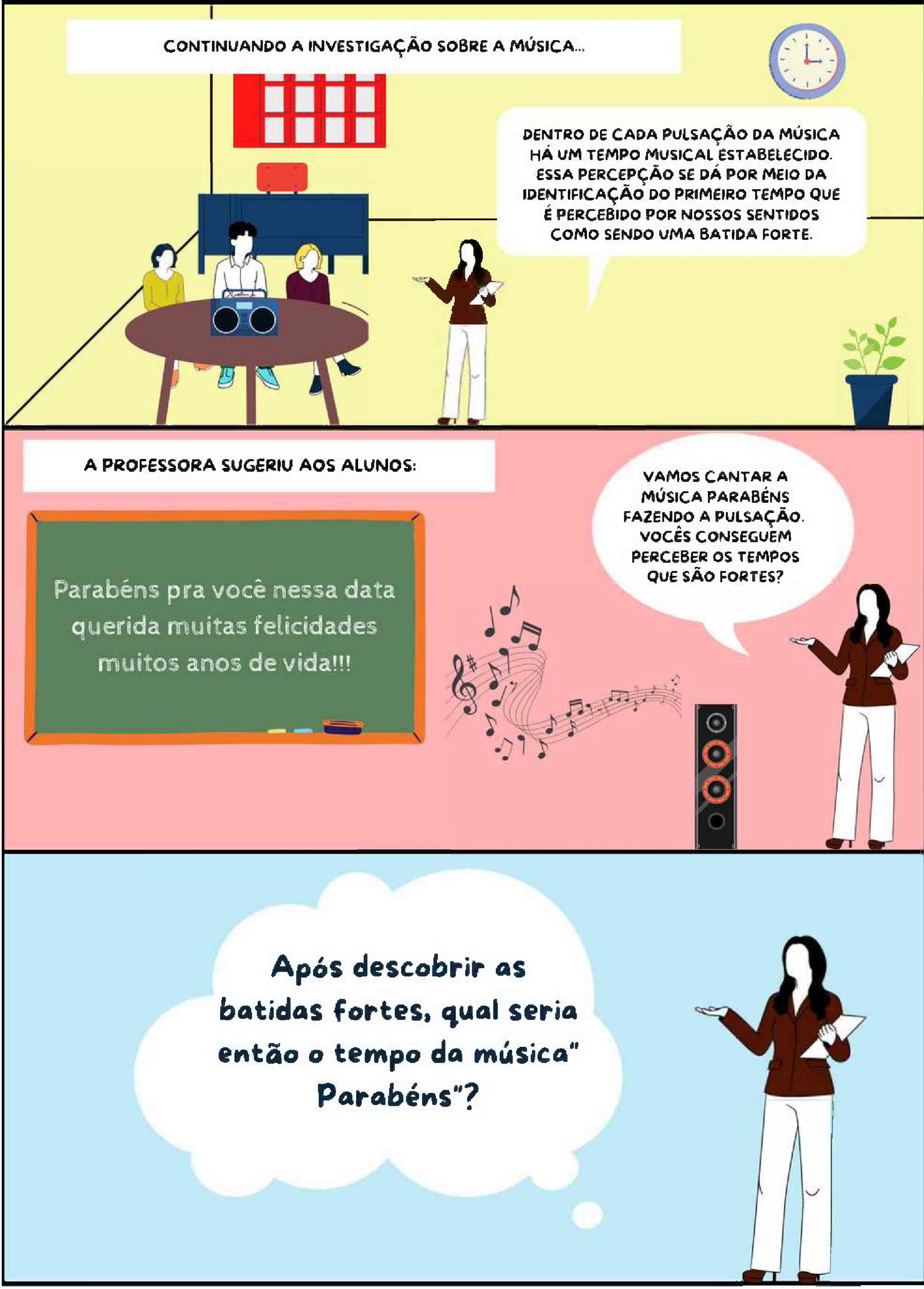
Pode-se pedir que os alunos ouçam as músicas abaixo e, com o pé, busquem uma sintonia do seu corpo com a música. Esse ritmo constante será a pulsação.

Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=WuenyQ4NCQE
(Acesso em 21/05/2021)

Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=v-emXsgCfNE
(Acesso em 21/05/2021)

Vídeo: Explicando a pulsação

Fonte: https://youtu.be/1qLHCYUX4eo
(Acesso em 21/05/2021)



CONTINUANDO A INVESTIGAÇÃO SOBRE A MÚSICA...
DENTRO DE CADA PULSAÇÃO DA MÚSICA HÁ UM TEMPO MUSICAL ESTABELECIDO. ESSA PERCEPÇÃO SE DÁ POR MEIO DA IDENTIFICAÇÃO DO PRIMEIRO TEMPO QUE É PERCEBIDO POR NOSSOS SENTIDOS COMO SENDO UMA BATIDA FORTE.
A PROFESSORA SUGERIU AOS ALUNOS:
Parabéns pra você nessa data querida muitas felicidades muitos anos de vida!!!
VAMOS CANTAR A MÚSICA PARABÉNS FAZENDO A PULSAÇÃO. VOCÊS CONSEGUEM PERCEBER OS TEMPOS QUE SÃO FORTES?
Após descobrir as batidas fortes, qual seria então o tempo da música" Parabéns"?

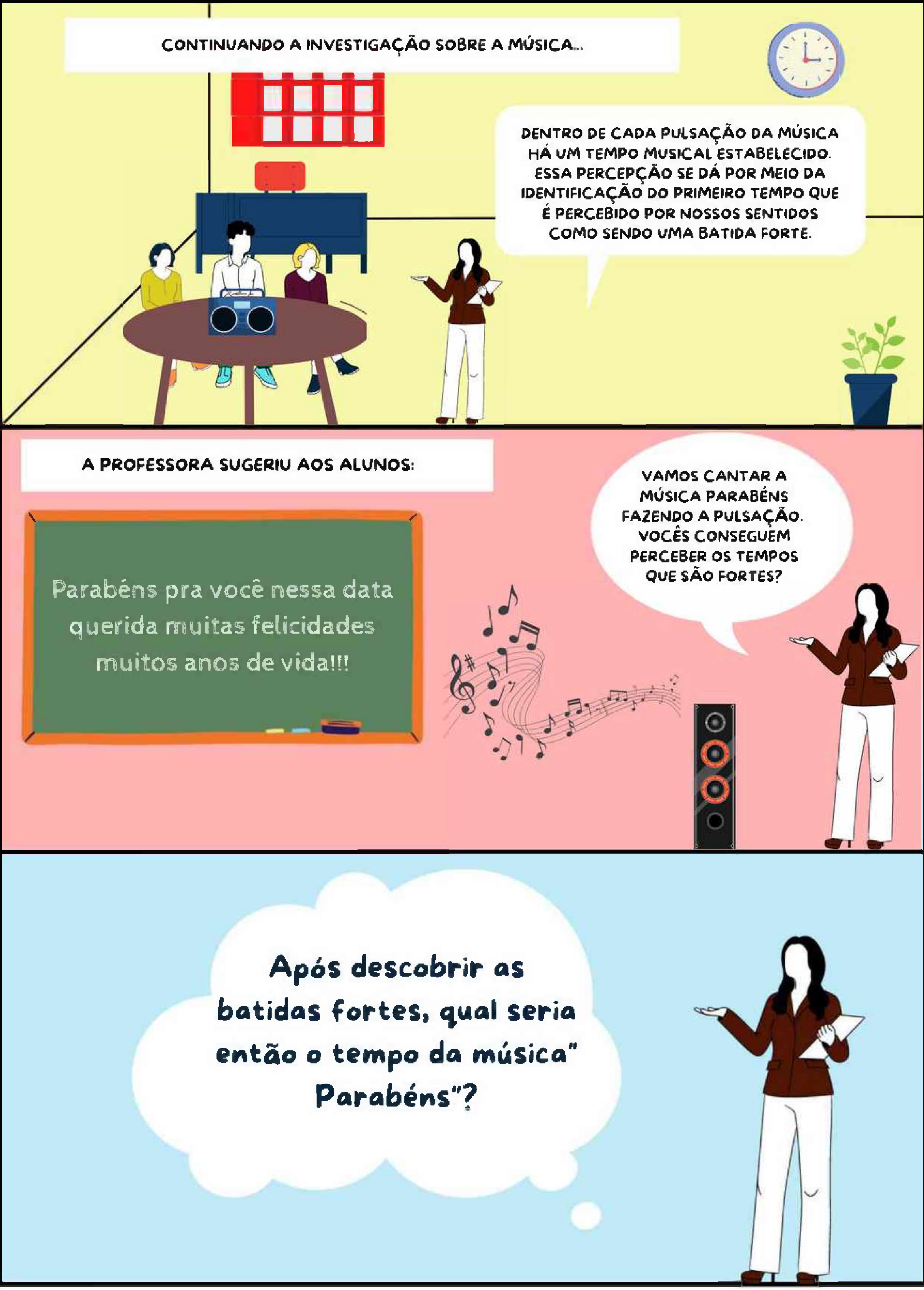
Dica

Pode-se apresentar aos alunos a música "Parabéns pra Você" e conduzi-los para encontrar a pulsação. Em seguida, pode-se pedir que ressaltem na pulsação o tempo forte.

Música "Parabéns pra você": https://youtu.be/osKLrBxqkuA

Assista ao vídeo:

Fonte: https://youtu.be/EkF-hkxVy1w
(Acesso em 21/05/2021)


CONTINUANDO A INVESTIGAÇÃO SOBRE A MÚSICA...
DENTRO DE CADA PULSAÇÃO DA MÚSICA HÁ UM TEMPO MUSICAL ESTABELECIDO. ESSA PERCEPÇÃO SE DÁ POR MEIO DA IDENTIFICAÇÃO DO PRIMEIRO TEMPO QUE É PERCEBIDO POR NOSSOS SENTIDOS COMO SENDO UMA BATIDA FORTE.
A PROFESSORA SUGERIU AOS ALUNOS:
Parabéns pra você nessa data querida muitas felicidades muitos anos de vida!!!
VAMOS CANTAR A MÚSICA PARABÉNS FAZENDO A PULSAÇÃO. VOCÊS CONSEGUEM PERCEBER OS TEMPOS QUE SÃO FORTES?
Após descobrir as batidas fortes, qual seria então o tempo da música" Parabéns"?

Sugestões para o(a) Professor(a)

O Metrônomo é um instrumento musical que marca determinadas pulsações e é possível baixá-lo pelo Playstore. Após definir uma pulsação, peça aos alunos acompanharem com o pé. E, depois, para criarem um ritmo em cima da pulsação.

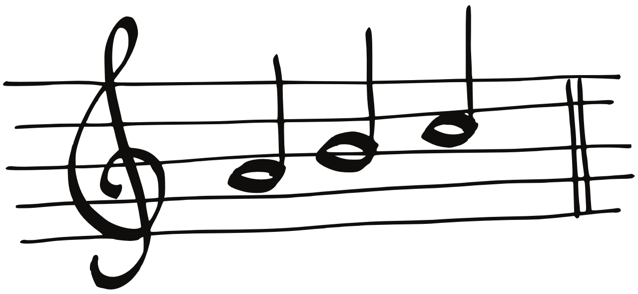
Em seguida, que assistam ao vídeo abaixo que explica sobre esse assunto.

Fonte: https://youtu.be/h4wLbgWpmPc

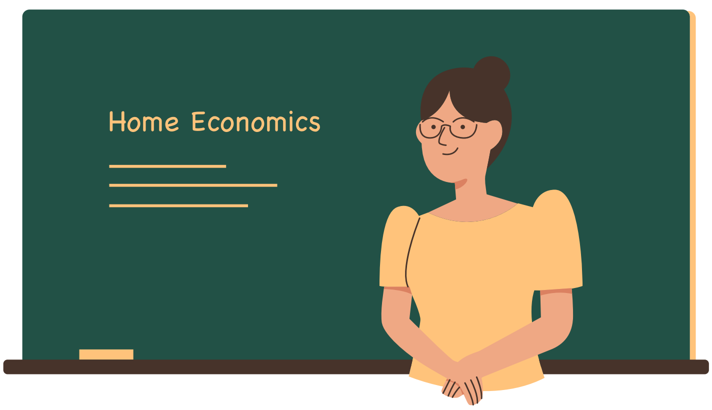
(Acesso em 21/05/2021)

NOTAÇÕES MUSICAIS

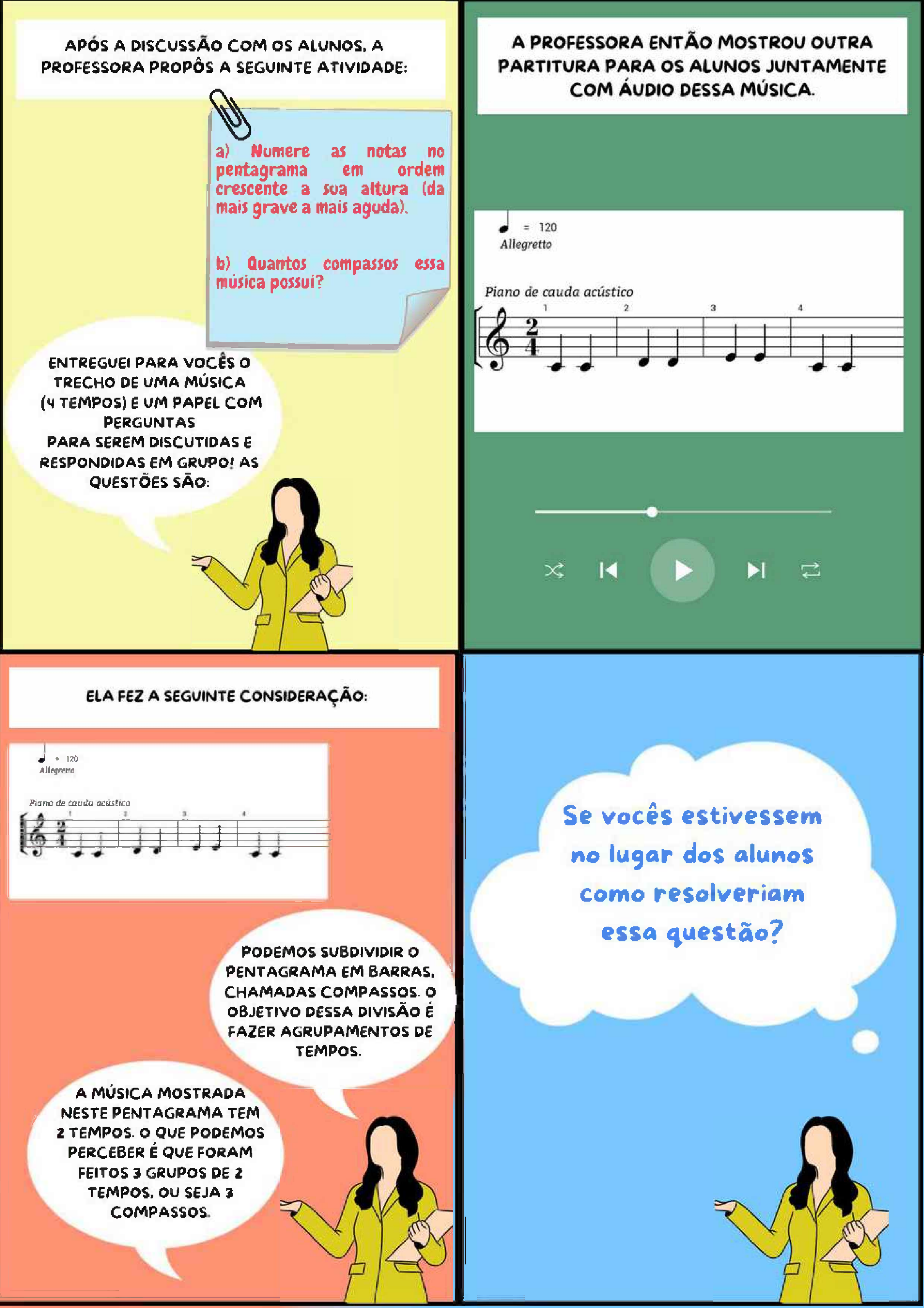
Objetivo: Trabalhar as notações musicais: figuras musicais, fórmula de compasso., pentagrama, notas musicais.



A seguir, é apresentada a continuação da história em quadrinhos e outras considerações acerca dos conceitos figuras musicais, fórmulas de compasso, pentagrama e notas musicais.




A PARTIR DE TODOS OS CONHECIMENTOS MUSICAIS DISCUTIDO COM OS ALUNOS NAS AULAS ANTERIORES, A PROFESSORA CONTINUOU OS ESTUDOS ABORDANDO AS REPRESENTAÇÕES DA ESCRITA DESSES ELEMENTOS.
ESTUDAMOS NAS ÚLTIMAS AULAS ALGUNS ELEMENTOS ESSENCIAIS DA MÚSICA: PULSAÇÃO, TEMPO, RITMO E NOTAS MUSICAIS. NESSA AULA VAMOS ESTUDAR O REGISTRO ESCRITO DESSES ELEMENTOS.
FOI MOSTRADO NO QUADRO PELA PROFESSORA O SEGUINTE ESQUEMA:
Pentagrama: Conjunto de 5 linhas e 4 espaços.
ESTUDAMOS NA ÚLTIMA AULA QUE AS NOTAS BÁSICAS DA MÚSICA SÃO: DÓ RÉ MI FÁ SOL LÁ SI. O REGISTRO ESCRITO DESSAS NOTAS É FEITO A PARTIR DE UM PENTAGRAMA.
FOI MOSTRADO NO QUADRO PELA PROFESSORA A SEGUINTE IMAGEM:
nota mais aguda
nota mais grave
AS NOTAS MAIS GRAVES SÃO ESCRITAS EM BAIXO E AS NOTAS MAIS AGUDAS SÃO ESCRITAS ACIMA.
O CONJUNTO DE PENTAGRAMAS FORMAM O QUE CHAMAMOS NA MÚSICA DE PARTITURA. A PROFESSORA ENTREGOU PARA OS ALUNOS, A SEGUINTE PARTITURA ABAIXO:
= 120
Allegretto
Piano de cauda acústico
1
2
3

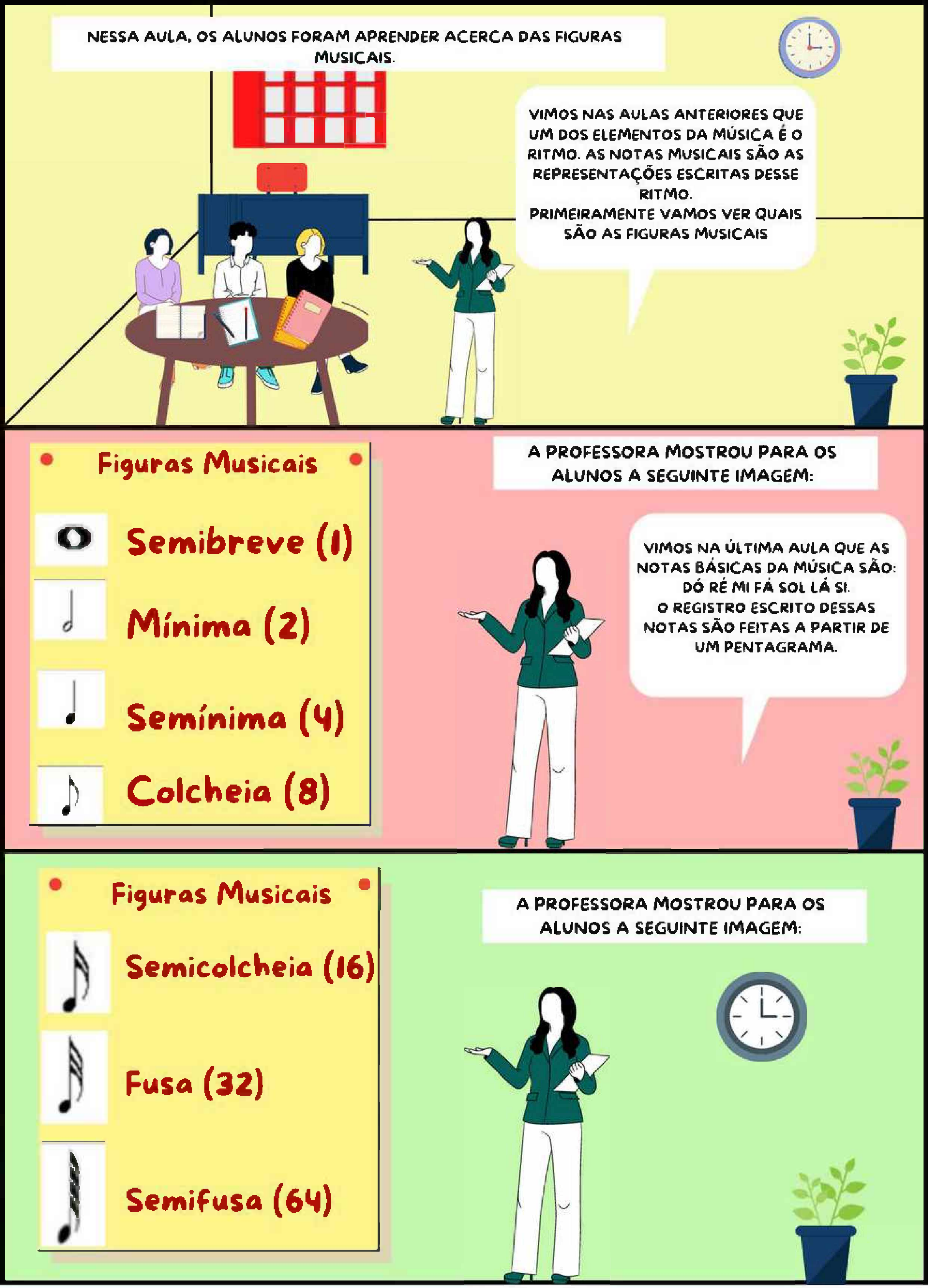

APÓS A DISCUSSÃO COM OS ALUNOS, A PROFESSORA PROPÔS A SEGUINTE ATIVIDADE:
a) Numere as notas no pentagrama em ordem crescente a sua altura (da mais grave a mais aguda).
b) Quantos compassos essa música possui?
ENTREGUEI PARA VOCÊS O TRECHO DE UMA MÚSICA (4 TEMPOS) E UM PAPEL COM PERGUNTAS PARA SEREM DISCUTIDAS E RESPONDIDAS EM GRUPO! AS QUESTÕES SÃO:
A PROFESSORA ENTÃO MOSTROU OUTRA PARTITURA PARA OS ALUNOS JUNTAMENTE COM ÁUDIO DESSA MÚSICA.
= 120
Allegretto
Piano de cauda acústico
1
2
3
4
ELA FEZ A SEGUINTE CONSIDERAÇÃO:
= 120
Allegretto
Piano de cauda acústico
1
2
3
4
PODEMOS SUBDIVIDIR O PENTAGRAMA EM BARRAS, CHAMADAS COMPASSOS. O OBJETIVO DESSA DIVISÃO É FAZER AGRUPAMENTOS DE TEMPOS.
A MÚSICA MOSTRADA NESTE PENTAGRAMA TEM 2 TEMPOS. O QUE PODEMOS PERCEBER É QUE FORAM FEITOS 3 GRUPOS DE 2 TEMPOS, OU SEJA 3 COMPASSOS.
Se vocês estivessem no lugar dos alunos como resolveriam essa questão?

Sugestões para o(a) Professor(a)

Para resolver essa questão, pode-se orientar aos alunos a olharem quantas barras tem-se nessa música.

Isso significará a quantidade de compassos totais na música. Nesse caso temos 3 compassos, ou seja, 3 grupos de 4 tempos.

Em relação as notas musicais, é preciso atentar que quando mais alto a nota for escrita, significa que mais agudo é seu som.


NESSA AULA, OS ALUNOS FORAM APRENDER ACERCA DAS FIGURAS MUSICAIS.
VIMOS NAS AULAS ANTERIORES QUE UM DOS ELEMENTOS DA MÚSICA É O RITMO. AS NOTAS MUSICAIS SÃO AS REPRESENTAÇÕES ESCRITAS DESSE RITMO.
PRIMEIRAMENTE VAMOS VER QUAIS SÃO AS FIGURAS MUSICAIS
Figuras Musicais
Semibreve (1)
Mínima (2)
Semínima (4)
Colcheia (8)
A PROFESSORA MOSTROU PARA OS ALUNOS A SEGUINTE IMAGEM:
VIMOS NA ÚLTIMA AULA QUE AS NOTAS BÁSICAS DA MÚSICA SÃO: DÓ RÉ MI FÁ SOL LÁ SI.
O REGISTRO ESCRITO DESSAS NOTAS SÃO FEITAS A PARTIR DE UM PENTAGRAMA.
Figuras Musicais
Semicolcheia (16)
Fusa (32)
Semifusa (64)
A PROFESSORA MOSTROU PARA OS ALUNOS A SEGUINTE IMAGEM:


A PROFESSORA CONTINUOU A EXPLICAÇÃO...
Variações...
= 120
Allegretto
Amanda Couto da Cost
Piano de cauda acústico
A UNIDADE MUSICAL É A FIGURA RITMICA QUE VALE 1 TEMPO. POR EXEMPLO, NA MÚSICA NO QUADRO
A PROFESSORA MOSTROU PARA OS ALUNOS A SEGUINTE IMAGEM:
...A DURAÇÃO DA MÚSICA É DE 4 TEMPOS. A FIGURA QUE VALE 1 TEMPO É A SEMÍNIMA, LOGO ELA É A UNIDADE MUSICAL. MAS COMO PODEMOS SABER ISSO?
Semínima
MAS ANTES DA PROFESSORA EXPLICAR O TEMPO DE CADA FIGURA MUSICAL FEZ AS SEGUINTES CONSIDERAÇÕES:
ASSIM COMO PARA REALIZAR UMA MEDIÇÃO PRECISAMOS ESTABELECER UMA UNIDADE PADRÃO DE MEDIDA, COMO FOI NO EGITO PARA DEMARCAÇÃO DAS TERRAS, TAMBÉM NA MÚSICA PRECISAMOS ESTABELECER UMA FIGURA MUSICAL COMO UNIDADE DE MEDIDA


E CONTINUOU...
E ISSO DESCOBRIMOS POR MEIO DA FÓRMULA DE COMPASSO, POIS OS MÚSICOS ELABORARAM UMA ESCRITA QUE REPRESENTARIA O TEMPO DA MÚSICA E A SUA UNIDADE MUSICAL.
A PROFESSORA ESCREVEU NO QUADRO O SEGUINTE:
Fórmula de Compasso
Ex:
4 / 4 ou 4 / ♩
4 Indica o tempo da música
4 É o código da figura rítmica que representa a unidade de tempo
NA FÓRMULA DE COMPASSO O NÚMERO DE CIMA, REPRESENTA QUANTOS TEMPOS A MÚSICA POSSUI.
O NÚMERO DEBAIXO É O CÓDIGO DA FIGURA MUSICAL QUE VALE 1 TEMPO?
APÓS A EXPLICAÇÃO, A PROFESSORA PROPÔS O SEGUINTE DESAFIO PARA OS ALUNOS:
Para cada fórmula de compasso ao lado:
a) Encontrar figura que vale 1 tempo.
b) Escrever o nome da figura e fazer o desenho dela.
c) Identificar qual é o tempo da música.
6 / 8
2 / 2
5 / 32

Sugestões para o(a) Professor(a)

Para os alunos encontrarem a figura musical que vale 1 tempo é preciso que eles analisem o número embaixo da fórmula de compasso. Esse número é o código da figura musical.

Por exemplo, no compasso 6 por 8, (8) é o código que representa a figura colcheia. Logo, a colcheia é a figura de 1 tempo. Nesse exemplo, o tempo musical de cada compasso é 6 tempos.

A importância de descobrir a figura que equivale 1 tempo é para descobrir a duração das outras notas musicais e assim, a partir disso, formar o ritmo da música.

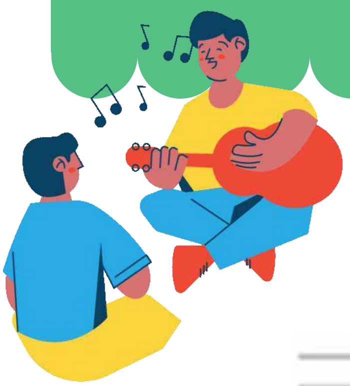

NO DIA SEGUINTE...
NA AULA ANTERIOR, ESTUDAMOS QUAIS SÃO AS FIGURAS MUSICAIS E O SIGNIFICADO DA FÓRMULA DE COMPASSO. HOJE INVESTIGAREMOS A RESPEITO DA DURAÇÃO DE CADA UMA DAS FIGURAS MUSICAIS.


A PROFESSORA CONTINUOU A EXPLICAÇÃO...
PARA DESCOBRIRMOS O VALOR DE CADA FIGURA MUSICAL, PRECISAMOS IDENTIFICAR PRIMEIRO A FIGURA QUE REPRESENTA A UNIDADE DE TEMPO.


ELA CONTINUOU...
1 tempo
POR EXEMPLO, NA FÓRMULA DE COMPASSO 4 POR 4, SABEMOS QUE A FIGURA QUE VALE 1 TEMPO É A SEMÍNIMA..


Dobro de 2 tempos:
4 tempos
Dobro de 1 tempo:
2 tempos
1 tempo
...
CONTINUAÇÃO...
CADA FIGURA ACIMA DA SEMÍNIMA (UNIDADE DE TEMPO) SERÁ O DOBRO DA ANTERIOR. E CADA FIGURA ABAIXO DA SEMÍNIMA SERÁ A METADE DA ANTERIOR. OBSERVE O ESQUEMA AO LADO:
4 tempos
2 tempos
1 tempo
$\frac{1}{2}$ tempo
?
?
?
A PROFESSORA PROPÔS, ENTÃO, O SEGUINTE DESAFIO PARA OS ESTUDANTES:
A PARTIR DA RELAÇÃO QUE FOI EXPLICADA ACIMA DESCUBRAM O TEMPO DAS OUTRAS FIGURAS MUSICAIS.
Se vocês estivessem no lugar dos estudantes como vocês resolveriam esse desafio?

Ao analisar a fórmula de compasso mostrada na história, percebemos que a semínima é a unidade de tempo.
A relação da duração das figuras musicais em relação a unidade (figura de 1 tempo) pode ser descrito da seguinte forma:



dobro do dobro da unidade

dobro da unidade

1 tempo (unidade)

metade da anterior

metade da metade da unidade

metade da metade da metade da unidade

metade da metade da metade da metade da unidade

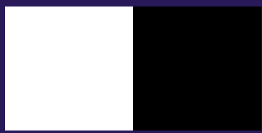
A partir das relações acima, a duração de cada figura musical seria:

Nome	Semibreve	Mínima	Semínima	Colcheia	Semicolcheia	Fusa	Semifusa
Figuras musicais	𝅝	𝅗𝅥	♩	♪	𝅘𝅥𝅯	𝅘𝅥𝅰	𝅘𝅥𝅱
Duração	2*2=4 tempos	2* 1=2 tempos	1 tempo	$\frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

Fonte: Elaborado pela autora

A dificuldade dos alunos, possivelmente, será calcular o tempo da semicolcheia, fusa e semifusa, pois exige que eles lembrem divisão de frações. Assim, pode-se propor o seguinte problema:
"Como podemos resolver a operação?"
Pode-se dialogar com os alunos que, para efetuar uma divisão, a divisão tem que ser em partes iguais. Pode-se, ainda, questionar os alunos se, nesse caso, as duas frações estão subdivididas ou particionadas na mesma quantidade.

Para resolver esse problema, pode ser sugerido que os alunos busquem representar na forma geométrica.

$\frac{1}{2}$ 

$\frac{2}{1}$ 

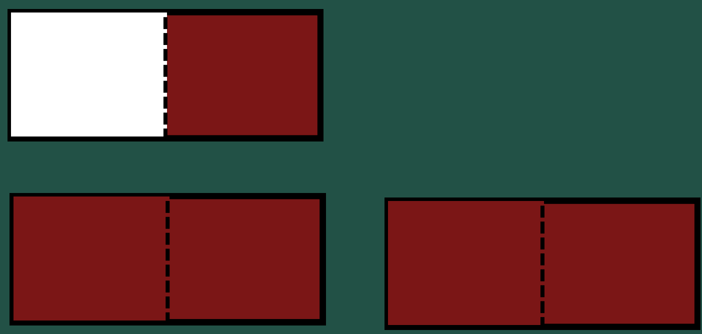
O problema seria, então, encontrar um número comum de forma que as partes ficassem divididas na mesma quantidade e no mesmo tamanho. Ou seja, encontrar uma fração equivalente a 2. Uma das formas que os alunos poderiam pensar era analisando os múltiplos de 1 e 2 ou fazendo tentativas de subdivisões por meio de desenho.

Múltiplos de 1- 1, 2, 3, 4,5...

Múltiplos de 2- 2, 4, 6, 8,...

Uma das possibilidades é encontrar uma fração equivalente a 2 e a representação ficaria:

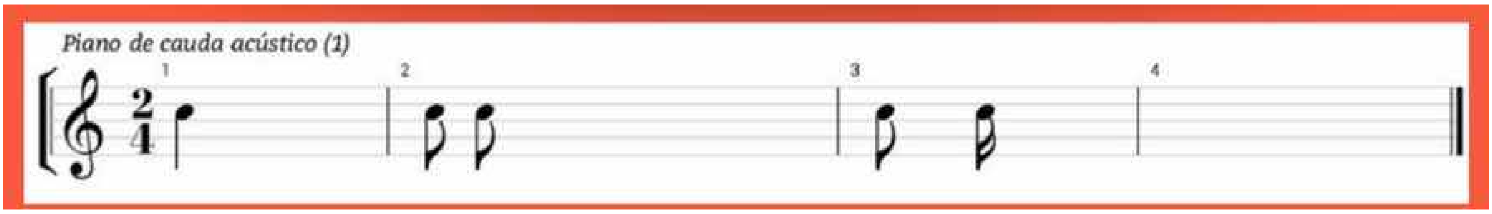
$$\frac{1}{2}$$



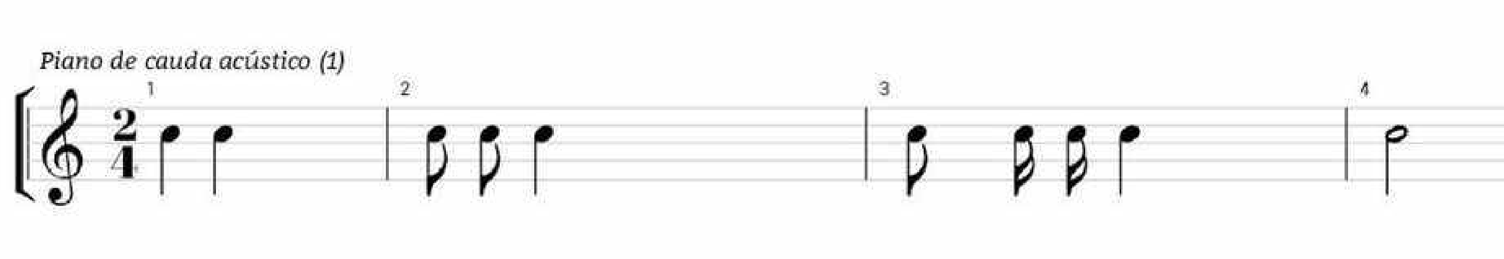
$$\frac{4}{2}$$

Nessa nova escrita, os alunos podem perceber que é possível fazer a divisão, pois dividindo o numerador e o denominador por 2 o resultado seria $\frac{1}{4}$


NA CONTINUAÇÃO DA AULA, A PROFESSORA TAMBÉM PROPÔS O SEGUINTE EXERCÍCIO...
Piano de cauda acústico (1)
1
2
3
4
COMPLETEM CADA COMPASSO ACIMA, COM FIGURAS MUSICAIS, DE FORMA A PREENCHER O TEMPO MUSICAL DE CADA COMPASSO.
AO FINAL UTILIZE O GANZÁ, PARA TOCAR A SEQUÊNCIA RÍTMICA DESSE TRECHO MUSICAL.
Se vocês estivessem no lugar dos estudantes como vocês resolveriam esse desafio?



Pode-se orientar os alunos a perceberem que o tempo de cada compasso pela fórmula de compasso, é 2 tempos. O objetivo é que os alunos desenhem em cada compasso uma quantidade de figuras musicais nas quais a soma dê 2 tempos. Uma das possibilidades seria:



1 semínima+ 1 semínima= 2 tempos
1 colcheia+1 colcheia+1 semínima= 1/2 tempo+1/2 tempo+1 tempo= 2 tempos

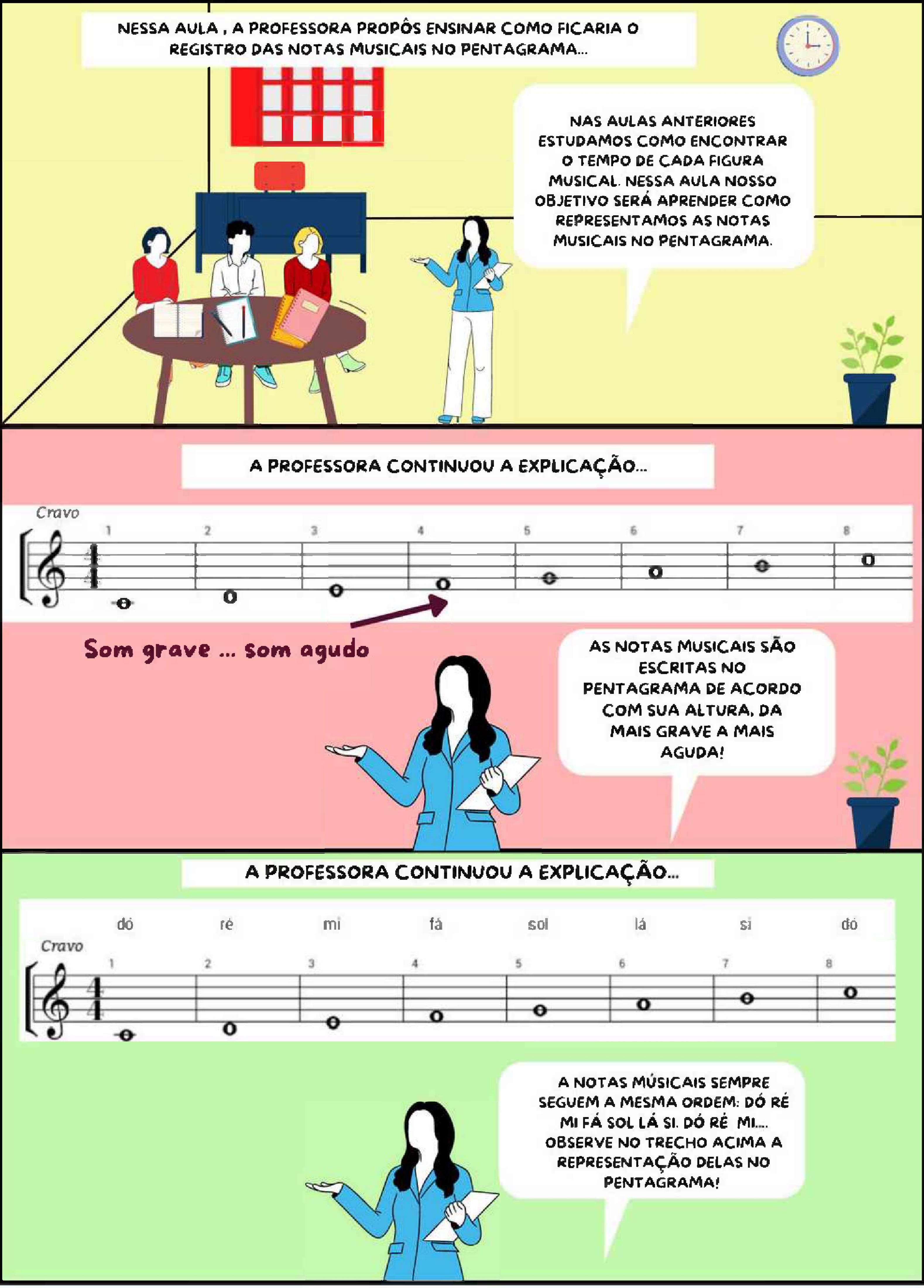
CONSTRUINDO UMA COMPOSIÇÃO MUSICAL

Objetivos:

- Compreender quais são as notas musicais básicas na música clássica.

- Aprender a tocar a Flauta de Pan e o Pífano.

- Elaborar uma composição musical com os alunos.


NESSA AULA , A PROFESSORA PROPÔS ENSINAR COMO FICARIA O REGISTRO DAS NOTAS MUSICAIS NO PENTAGRAMA...
NAS AULAS ANTERIORES ESTUDAMOS COMO ENCONTRAR O TEMPO DE CADA FIGURA MUSICAL. NESSA AULA NOSSO OBJETIVO SERÁ APRENDER COMO REPRESENTAMOS AS NOTAS MUSICAIS NO PENTAGRAMA.
A PROFESSORA CONTINUOU A EXPLICAÇÃO...
Cravo
1 2 3 4 5 6 7 8
Som grave ... som agudo
AS NOTAS MUSICAIS SÃO ESCRITAS NO PENTAGRAMA DE ACORDO COM SUA ALTURA, DA MAIS GRAVE A MAIS AGUDA!
A PROFESSORA CONTINUOU A EXPLICAÇÃO...
dó ré mi fá sol lá si dó
Cravo
1 2 3 4 5 6 7 8
A NOTAS MÚSICAIS SEMPRE SEGUEM A MESMA ORDEM: DÓ RÉ MI FÁ SOL LÁ SI. DÓ RÉ MI.... OBSERVE NO TRECHO ACIMA A REPRESENTAÇÃO DELAS NO PENTAGRAMA!

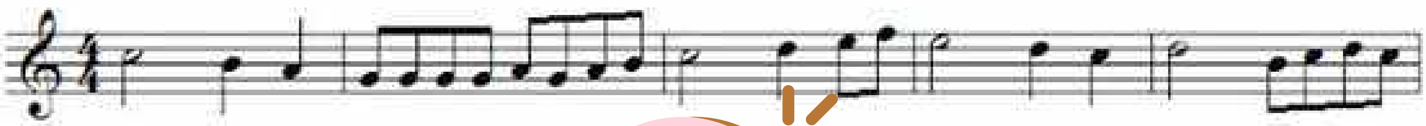
A PROFESSORA ENTÃO APRESENTOU O SEGUINTE TRECHO MUSICAL PARA OS ESTUDANTES...

a) Escreva no pentagrama acima o nome de cada nota musical.
b) Qual é a figura musical que representa a unidade de compasso?
c) Qual é o tempo de cada compasso?
d) Crie uma melodia para um compasso extra.

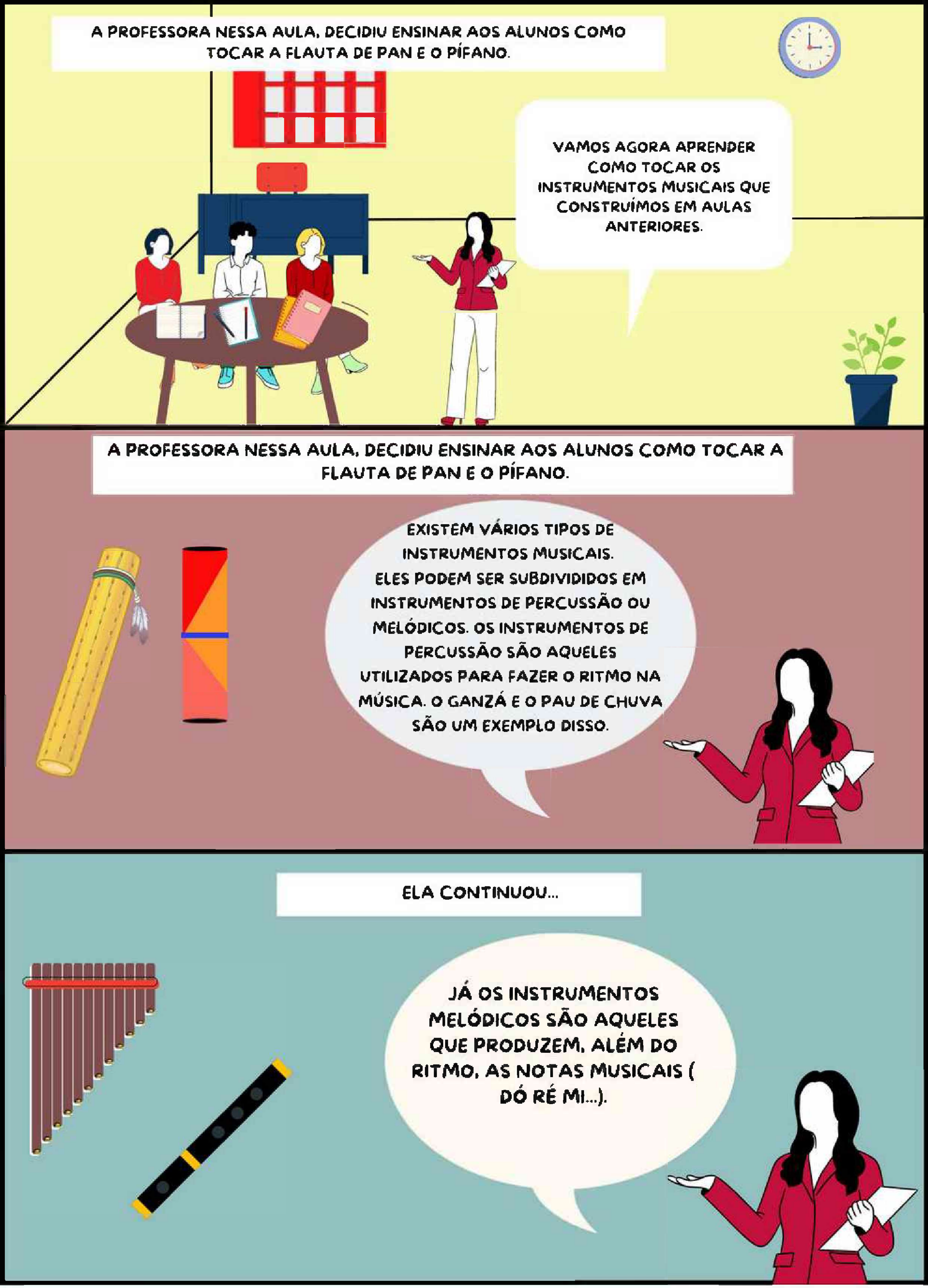
Se vocês estivessem no lugar dos alunos como resolveriam esse exercício?

Dica

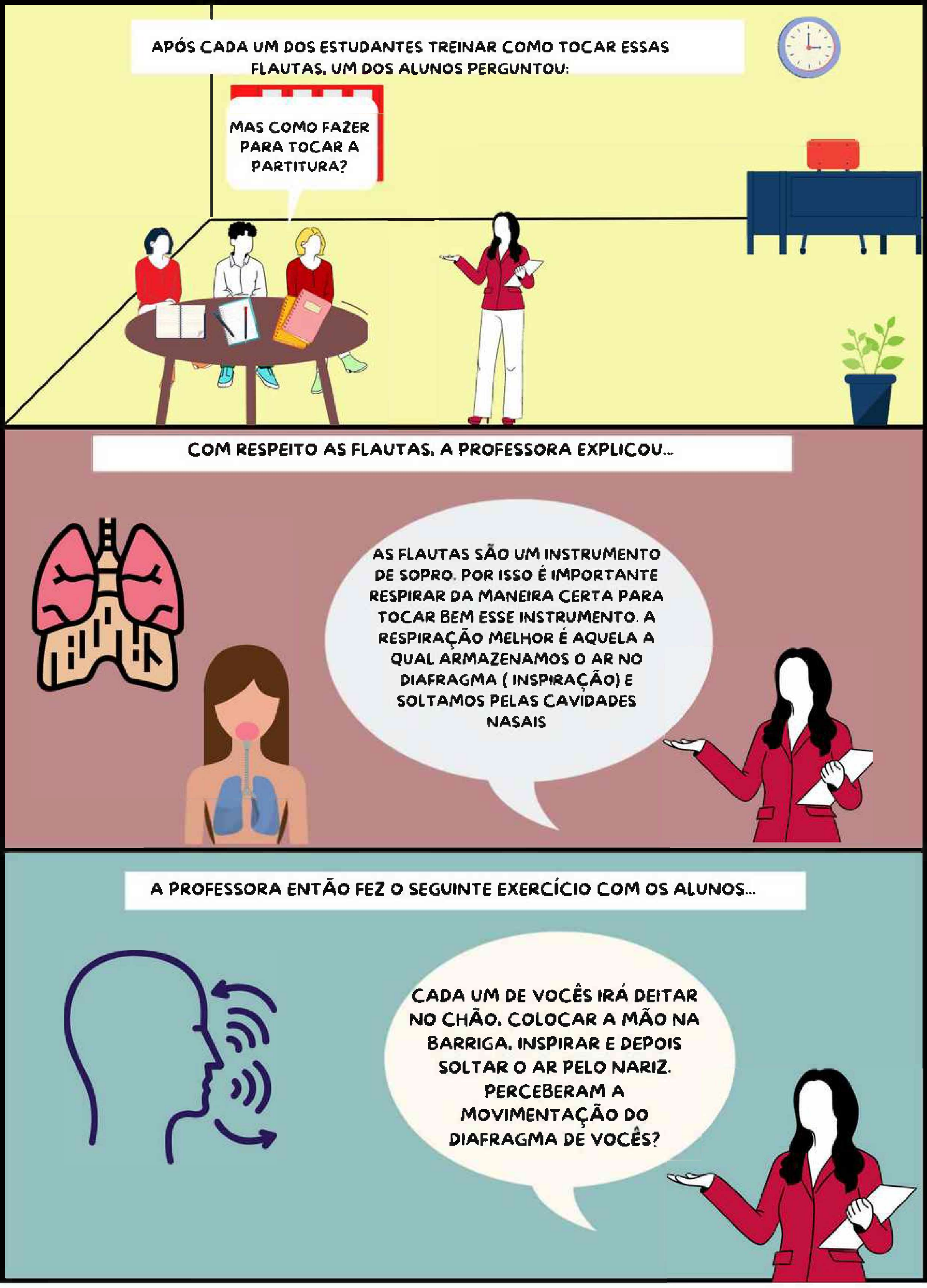
Orientar os alunos a interpretarem a fórmula de compasso. A partir dessa interpretação, os alunos descobrirão que a música tem 4 tempos em cada compasso e que a figura que vale 1 tempo é a semínima.



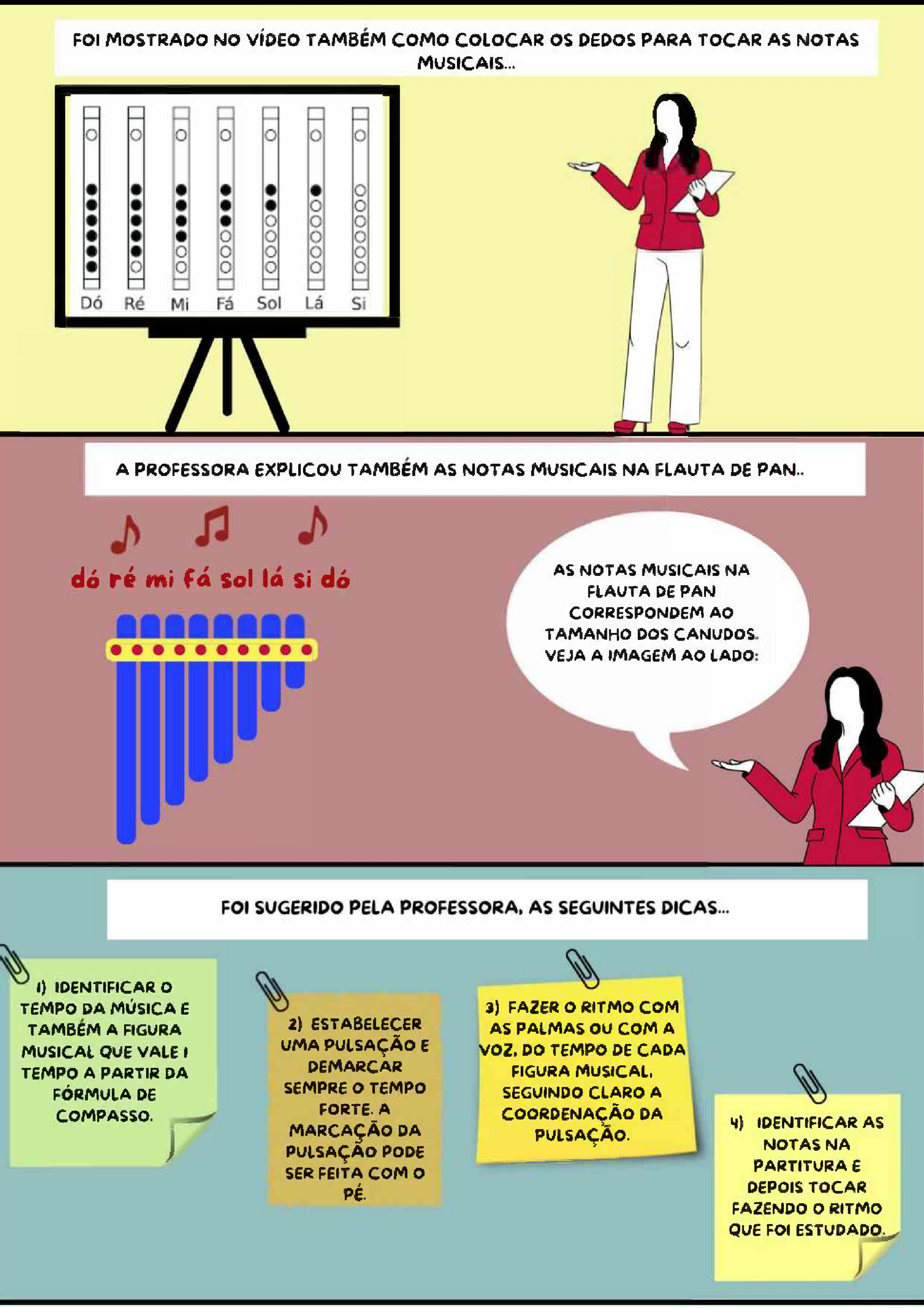
Já, sobre a identificação das notas musicais, é importante que os alunos sejam orientados a fazer com referência ao exemplo mostrado na tirinha. Na música acima, a sequência de notas são respectivamente dó si lá sol sol sol sol lá sol lá si dó ré mi fá mi ré dó ré si dó ré dó.



A PROFESSORA NESSA AULA, DECIDIU ENSINAR AOS ALUNOS COMO TOCAR A FLAUTA DE PAN E O PÍFANO.
VAMOS AGORA APRENDER COMO TOCAR OS INSTRUMENTOS MUSICAIS QUE CONSTRUÍMOS EM AULAS ANTERIORES.
A PROFESSORA NESSA AULA, DECIDIU ENSINAR AOS ALUNOS COMO TOCAR A FLAUTA DE PAN E O PÍFANO.
EXISTEM VÁRIOS TIPOS DE INSTRUMENTOS MUSICAIS. ELES PODEM SER SUBDIVIDIDOS EM INSTRUMENTOS DE PERCUSSÃO OU MELÓDICOS. OS INSTRUMENTOS DE PERCUSSÃO SÃO AQUELES UTILIZADOS PARA FAZER O RITMO NA MÚSICA. O GANZÁ E O PAU DE CHUVA SÃO UM EXEMPLO DISSO.
ELA CONTINUOU...
JÁ OS INSTRUMENTOS MELÓDICOS SÃO AQUELES QUE PRODUZEM, ALÉM DO RITMO, AS NOTAS MUSICAIS (DÓ RÉ MI...).


APÓS CADA UM DOS ESTUDANTES TREINAR COMO TOCAR ESSAS FLAUTAS, UM DOS ALUNOS PERGUNTOU:
MAS COMO FAZER PARA TOCAR A PARTITURA?
COM RESPEITO AS FLAUTAS, A PROFESSORA EXPLICOU...
AS FLAUTAS SÃO UM INSTRUMENTO DE SOPRO. POR ISSO É IMPORTANTE RESPIRAR DA MANEIRA CERTA PARA TOCAR BEM ESSE INSTRUMENTO. A RESPIRAÇÃO MELHOR É AQUELA A QUAL ARMAZENAMOS O AR NO DIAFRAGMA (INSPIRAÇÃO) E SOLTAMOS PELAS CAVIDADES NASAIS
A PROFESSORA ENTÃO FEZ O SEGUINTE EXERCÍCIO COM OS ALUNOS...
CADA UM DE VOCÊS IRÁ DEITAR NO CHÃO, COLOCAR A MÃO NA BARRIGA, INSPIRAR E DEPOIS SOLTAR O AR PELO NARIZ. PERCEBERAM A MOVIMENTAÇÃO DO DIAFRAGMA DE VOCÊS?


A SEGUIR, A PROFESSORA PASSOU UM VÍDEO, PRIMEIRAMENTE EXPLICANDO COMO OS ALUNOS DEVERIAM SEGURAR O PÍFANO. UM DE SEUS ALUNOS ERA CANHOTO E PERGUNTOU COMO SERIA NO CASO DELE. A PROFESSORA EXPLICOU:
Três dedos da mão esquerda
Três dedos da mão direita
PARA QUEM FOR CANHOTO BASTA INVERTER A POSIÇÃO..
EM RELAÇÃO A POSIÇÃO DA BOCA PARA ASSOPRAR O FURO DO SOPRO DO PÍFANO, EXPLICOU AS SEGUINTES ORIENTAÇÕES DO QUADRO:
A primeira dica é que a boca deve cobrir aproximadamente 1/4 do furo.
O formato dos lábios deve ser natural de forma a não comprimi-los nem esticá-los muito.
O ideal é que a abertura dos lábios não seja nem muito grande nem pequena.
Cada pessoa deve encontrar o ponto médio de apoio dos seus lábios.
A PROFESSORA EXPLICOU, TAMBÉM, COMO FAZER PARA TOCAR A FLAUTA DE PAN.
SEGURE A FLAUTA COM AMBAS AS MÃOS. POSICIONE A FLAUTA DE FORMA QUE OS TUBOS FIQUEM VERTICAIS SE COMPARADOS AO CORPO. RELAXE OS BRAÇOS ENQUANTO SEGURA A FLAUTA DE PAN.
POSICIONE A FLAUTA DE PAN CONTRA O LÁBIO INFERIOR E DIRECIONE O AR PARA DENTRO DO TUBO COMO SE FOSSE SOPRAR PARA DENTRO DE UMA GARRAFA. TENTE ASSOPRAR COMO SE FALASSE A PALAVRA "TU".


FOI MOSTRADO NO VÍDEO TAMBÉM COMO COLOCAR OS DEDOS PARA TOCAR AS NOTAS MUSICAIS...
Dó Ré Mi Fá Sol Lá Si
A PROFESSORA EXPLICOU TAMBÉM AS NOTAS MUSICAIS NA FLAUTA DE PAN..
dó ré mi fá sol lá si dó
AS NOTAS MUSICAIS NA FLAUTA DE PAN CORRESPONDEM AO TAMANHO DOS CANUDOS. VEJA A IMAGEM AO LADO:
FOI SUGERIDO PELA PROFESSORA, AS SEGUINTES DICAS...
1) IDENTIFICAR O TEMPO DA MÚSICA E TAMBÉM A FIGURA MUSICAL QUE VALE 1 TEMPO A PARTIR DA FÓRMULA DE COMPASSO.
2) ESTABELECER UMA PULSAÇÃO E DEMARCAR SEMPRE O TEMPO FORTE. A MARCAÇÃO DA PULSAÇÃO PODE SER FEITA COM O PÉ.
3) FAZER O RITMO COM AS PALMAS OU COM A VOZ, DO TEMPO DE CADA FIGURA MUSICAL, SEGUINDO CLARO A COORDENAÇÃO DA PULSAÇÃO.
4) IDENTIFICAR AS NOTAS NA PARTITURA E DEPOIS TOCAR FAZENDO O RITMO QUE FOI ESTUDADO.

FOI ENTREGUE PELA PROFESSORA A SEGUINTE PARTITURA:

A PROFESSORA PROPÔS O SEGUINTE EXERCÍCIO:

A partir da partitura entregue responda:

a) O que significa a fórmula de compasso na partitura?

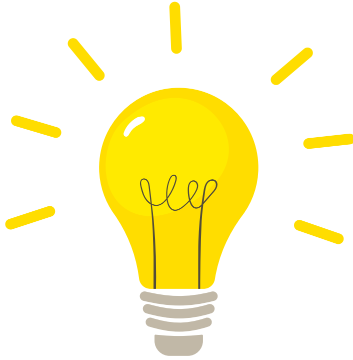
b) Qual figura melódica que representa a unidade do compasso?

c) Utilizando o ganzá, faça o ritmo das figuras musicais.

d)Toque a música acima utilizando flauta de Pan ou a flauta Ney.

Se vocês estivessem no lugar dos alunos como vocês resolveriam esse desafio?

Dica



É importante que você oriente os alunos, antes de tocar, a fazerem uma análise musical identificando, por exemplo, o tempo musical e a unidade de compasso.

Pedir para os alunos estabelecerem uma pulsação ressaltando sempre o tempo forte.

Com o Ganzá ou Pau de Chuva, pedir para os alunos fazerem os ritmos das figuras musicais.

Solicitar aos alunos que anotem o nome de cada nota musical na partitura.
Depois disso, tocar essas notas nas flautas, buscando fazer os sons de acordo com o ritmo que estudaram.
É importante sempre reforçar que eles precisam fazer a marcação do pulso com o pé.

AGORA É COM VOCÊS...

Nesse momento os alunos podem ser desafiados a escreverem um trecho de uma pequena melodia. Eles podem escolher a fórmula de compasso, as figuras rítmicas e as notas musicais que desejarem!

O professor ou a professora pode solicitar que os alunos executem o ritmo com o ganzá ou pau de chuva e, depois, toquem a melodia com a flauta que eles preferirem: o pífano ou a flauta de Pan.

Esperamos que tenham gostado das sugestões das atividades aqui apresentadas, e que elas possam ter colaborado e desafiado vocês a se colocarem no movimento de pesquisa em relação a como ensinar as frações a partir da música.

O que achou do produto? DEIXE SUA OPINIÃO por meio dO QR CODE ABAIXO.

Obrigada!

REFERÊNCIAS

file:///C:/Users/usuario/Downloads/PRODUTO.pdf. Acesso em 11 maio 2021.

http://blogdasnotas-felipecs.blogspot.com/2018/03/aula-de-pifano.html. Acesso em 11 maio 2021.

http://matheusdasflautas.blogspot.com/p/pifano.html. Acesso em 11 maio 2021.