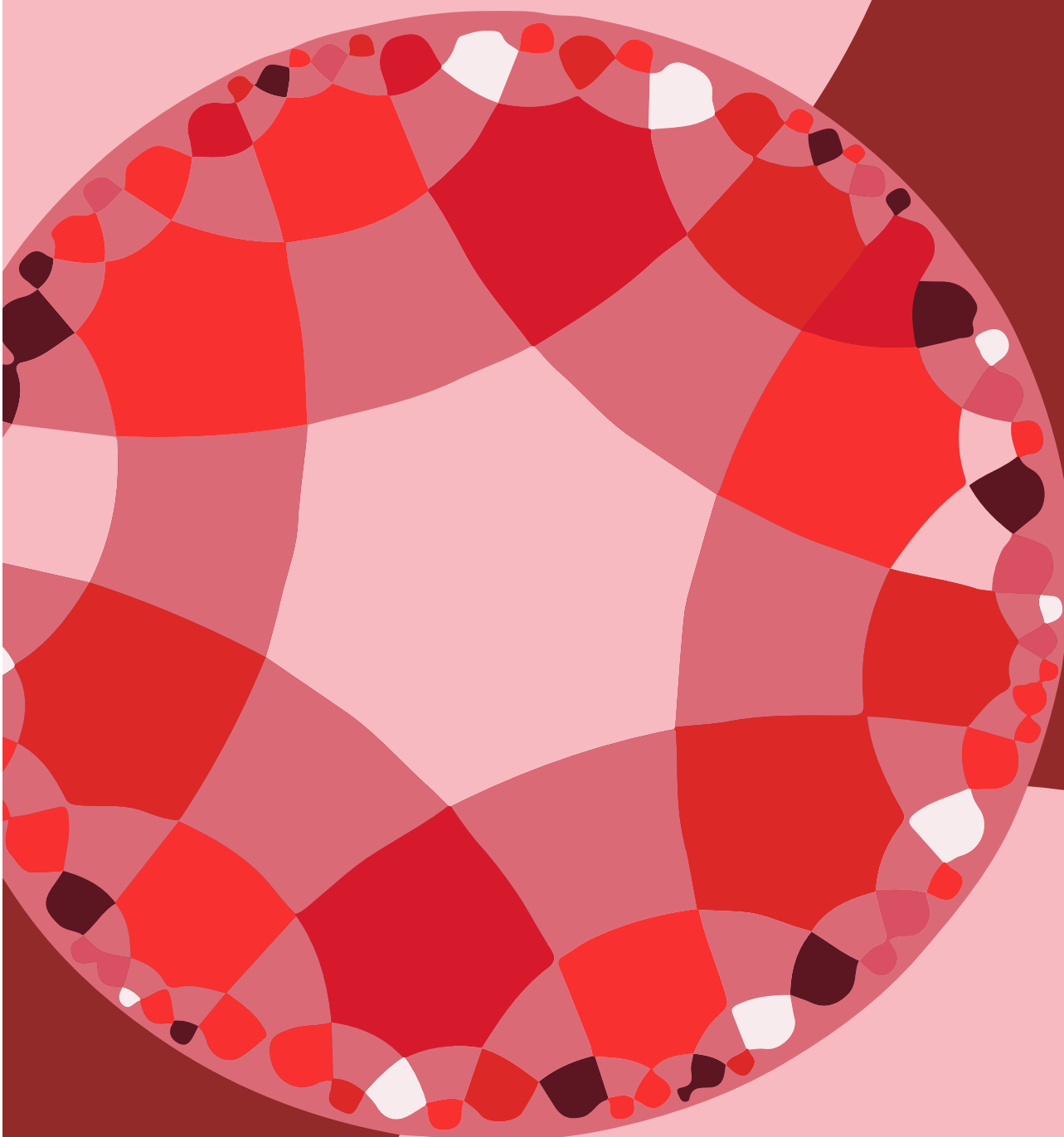


Universidade Federal de Uberlândia
Curso de Licenciatura em Matemática

Introdução à Geometria Hiperbólica Plana

Edson Agustini



EDSON AGUSTINI

INTRODUÇÃO À GEOMETRIA HIPERBÓLICA PLANA

1ª. Edição

Uberlândia/MG
CEaD – Centro de Educação à Distância
UFU – Universidade Federal de Uberlândia
2022

PRESIDENTE DA REPÚBLICA

Jair Messias Bolsonaro

MINISTRO DA EDUCAÇÃO

Victor Godoy Veiga

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

DIRETORIA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA/CAPES

Carlos Cezar Modernel Lenuzza

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA – UFU

REITOR

Valder Steffen Junior

VICE-REITOR

Carlos Henrique Martins da Silva

FACULDADE DE MATEMÁTICA – FAMAT – UFU

DIRETOR

Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro

COORDENADOR DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA À DISTÂNCIA

Germano Abud de Rezende

CENTRO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA – CEaD – UFU

REPRESENTANTE UAB/UFU

Maria Teresa Menezes Freitas

SUPLENTE UAB/UFU

Aléxia Pádua Franco

DIRETOR

Vinícius Silva Pereira

ASSESSORA DA DIRETORIA

Sarah Mendonça de Araújo

COORDENAÇÃO DE TUTORIA INSTITUCIONAL

Mara Dutra Ramos Rios

Rose Silva Machado Fonseca

EQUIPE MULTIDISCIPLINAR

Alberto Dumont Alves Oliveira

Darcus Ferreira Lisboa Oliveira

Dirceu Nogueira de Sales Duarte Júnior

Gustavo Bruno do Vale

Otaviano Ferreira Guimarães

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

A284i
2022

Agustini, Edson, 1971-
Introdução à geometria hiperbólica plana [recurso eletrônico] /Edson
Agustini -- Uberlândia : FAMAT UFU; CEaD UFU, 2022.
144 p.: il. ; (color.).

ISBN: 978-65-86084-61-0
Livro digital (e-book)
Disponível em: <https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/25207>
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Geometria hiperbólica. 2. Trigonometria. 3. Geometria - história.
I. Agustini, Edson, (Aut.). II. Universidade Federal de Uberlândia.
Faculdade de Matemática. III. Título.

CDU: 514.133

Sumário

Informações	9
Antes de Começar...	11
1 Algumas Notas Históricas	13
2 Axiomas da Geometria Plana	21
2.1 Axiomática de Euclides	21
2.2 Axiomática de Hilbert	22
2.3 Axiomática de Birkhoff	23
2.4 Axiomas Específicos das Geometrias Hiperbólica e Elíptica	24
3 O 5º Postulado de Euclides e o “Problema das Paralelas”	27
3.1 Algumas Proposições Importantes para o estudo do “Problema das Paralelas”	27
3.2 Equivalentes ao 5º Postulado de Euclides	34
3.3 Outras Proposições Equivalentes ao 5º Postulado de Euclides	38
3.4 Precusores das Geometrias Não Euclidianas: tentando resolver o “Problema das Paralelas”	40
Seção de Exercícios Propostos: O 5º Postulado de Euclides e o “Problema das Paralelas”	44
4 Modelos Euclidianos para as Geometrias Hiperbólica e Elíptica Planas	49
4.1 O Conceito de Modelo para uma Geometria	49
4.2 O Modelo do Disco de Poincaré para a Geometria Hiperbólica Plana	51
4.3 O Modelo do Semiplano de Poincaré para a Geometria Hiperbólica Plana	53
4.4 Modelo de Klein para a Geometria Hiperbólica Plana	56
4.5 Modelo da Pseudo-esfera de Beltrami para a Geometria Hiperbólica Plana	58
4.6 Modelo de Klein para a Geometria Elíptica Plana	60
4.7 Modelo Duplo da Esfera para a Geometria Elíptica Plana	60
5 Geometria Hiperbólica Plana	63
5.1 Paralelismo	63
5.2 Pontos Ideais	69
5.3 Triângulos Generalizados	70
5.4 O Ângulo de Paralelismo	74
5.5 Polígonos	77
5.6 Variação da Distância entre Duas Retas	83
5.7 Horocírculos e Curvas Equidistantes	86
5.8 Áreas	92
Seção de Exercícios Propostos: Geometria Hiperbólica Plana	98
Trabalho Proposto 1 - Disco de Poincaré no GeoGebra	100
Trabalho Proposto 2 - Disco de Poincaré no GeoGebra	103
6 Trigonometria Hiperbólica	109
6.1 Arcos Correspondentes de Horocírculos Concêntricos	109
6.2 Comprimentos de Arcos Correspondentes e Distâncias	112
6.3 Um Sistema de Coordenadas Hiperbólicas	116
6.4 Números Complementares	119
6.5 A Versão Hiperbólica do Teorema de Pitágoras	120
6.6 As Versões Hiperbólicas da Lei dos Senos e da Lei dos Cossenos	122
6.7 Uma Segunda Lei dos Cossenos	129
6.8 Comparação Entre as Trigonometrias Hiperbólica e Euclidiana	132

Sumário

Seção de Exercícios Propostos: <i>Trigonometria Hiperbólica</i>	135
Referências Bibliográficas	143

Informações

Caro(a) aluno(a):

Ao longo deste guia você encontrará alguns “ícones” que o ajudarão a identificar as atividades. Fique atento(a) ao significado de cada um deles. Isso facilitará a sua leitura e seus estudos.



Áudio



Vídeo



Leituras
Indicadas



Multimídia



Atividades
Guia Impresso



Atividades
Ambiente Virtual



Saiba Mais



Pare e Pense



Pesquisando
na rede



Referências

Esperamos realizar uma ótima parceria! Bons estudos!



Antes de Começar...

Este texto teve origem em algumas notas de aulas da disciplina *Geometria Não Euclidiana* que era ministrada regularmente no curso de Matemática da UFU. Posteriormente, essas notas de aulas foram complementadas e aperfeiçoadas em uma dissertação de Mestrado Profissional em Matemática, referenciada em [1], de Inédio Arcari. Essas notas de aulas e dissertação, por sua vez, foram baseadas nas diversas fontes, citadas nas *Referências Bibliográficas*, nas quais pretendemos dar uma visão bastante completa para um primeiro estudo sobre *Geometria Hiperbólica Plana*. Cabe destacar dentre as diversas referências, o excelente livro de João Lucas M. Barbosa, referenciado em [3], que foi nossa principal inspiração para a confecção dessas notas.

Neste texto vamos abordar basicamente três assuntos:

- (1) *O desenvolvimento histórico das Geometrias Não Euclidianas por meio do Problema das Paralelas.*
- (2) *Uma introdução aos principais resultados da Geometria Hiperbólica Plana.*
- (3) *A Trigonometria Hiperbólica.*

Assim como na Geometria Euclidiana Plana, construções geométricas hiperbólicas “com régua e compasso” são possíveis de serem feitas com o auxílio de softwares de geometria dinâmica, como o *GeoGebra* (referência [12]). Tais construções geométricas, feitas em *modelos euclidianos para a Geometria Hiperbólica Plana*, são exercícios muito interessantes mas não são o foco dessas notas. Também não é foco desse texto um estudo de *Geometria Elíptica Plana*, que é uma outra geometria não euclidiana. Entretanto, é interessante citar e comparar, ao longo do texto, alguns aspectos dessa geometria em confronto com a Geometria Hiperbólica Plana. Estudos mais aprofundados de Geometria Elíptica Plana podem ser encontrados na referência [13].

Alertamos que um curso de Geometria Euclidiana Plana com enfoque axiomático é pré-requisito para a leitura dessas notas. Vamos admitir que o leitor possui familiaridade com os sistemas axiomáticos de Hilbert e Birkhoff, que são adotados de forma parcial (e adaptada) pelos principais autores de textos de Geometria Euclidiana Plana. Aliás, uma recomendação ao leitor entusiasta e estudioso da Geometria: procure os enunciados originais dos axiomas nos sistemas de Euclides, Hilbert, Birkhoff e Tarsky (que são os principais). Trata-se de uma leitura muito instrutiva.

Por fim, recomendamos fortemente que o leitor procure estudar com detalhes o desenvolvimento histórico do chamado “Problema das Paralelas” (inclusive no item (1) acima), que levou ao descobrimento das Geometrias Não Euclidianas. Trata-se de um dos mais belos episódios da Matemática e que teve origem na contestação do “5º Postulado de Euclides”. O leitor se surpreenderá com o trabalho de vários matemáticos importantes que ao longo de mais de 2000 anos se envolveram com esse problema.

Detalhamento do conteúdo dessas notas:

- (1) *O desenvolvimento histórico das Geometrias Não Euclidianas por meio do Problema das Paralelas.*

Um pouco da história da Geometria, de Euclides e de *Os Elementos*
 A construção axiomática e fundamentos da Geometria Euclidiana Plana
 As Proposições I.16, I.27, I.28 e I.29 de *Os Elementos* e o Quinto Postulado de Euclides
 As principais proposições equivalentes ao Quinto Postulado de Euclides
 Tentativas históricas de demonstração do Quinto Postulado de Euclides
 Os precursores das Geometrias Não Euclidianas e seus trabalhos
 Os quadriláteros de Saccheri e de Lambert
 Algumas demonstrações de teoremas concebidas por Legendre
 A descoberta de uma Geometria Não Euclidiana:
 Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)
 Johann Bolyai (1802 - 1860)
 Nikolai Ivanovich Lobachewsky (1793 - 1856)
 A questão da consistência nas Geometrias Não Euclidianas e os modelos geométricos:

Na Geometria Hiperbólica Plana:

- O Modelo Euclidiano do Disco Unitário de Poincaré
- O Modelo Euclidiano do Semiplano Superior de Poincaré
- O Modelo Euclidiano do Disco de Klein
- O Modelo Euclidiano Parcial da Pseudo-esfera de Beltrami

Na Geometria Elíptica Plana:

- O Plano Projetivo
- O Modelo Euclidiano Duplo da Esfera
- O Modelo Euclidiano do Disco Fechado de Klein

Observação: Sobre a consistência das geometrias não euclidianas Hiperbólica ou Elíptica planas, neste texto ela não é demonstrada de forma completa. O objetivo do item é, além de explicar a questão da consistência das geometrias não euclidianas, a apresentação dos modelos, a constatação de que os axiomas dessas geometrias estão satisfeitos nos respectivos modelos e, principalmente, incentivar o uso de um software de geometria dinâmica para a Geometria Hiperbólica Plana e explorar a riqueza visual desse conteúdo.

(2) *Uma introdução aos principais resultados da Geometria Hiperbólica Plana.*

O Postulado de Lobachewsky

Propriedades elementares das paralelas:

Paralelismo na Geometria Hiperbólica - paralelas e hiperparalelas

Triângulos generalizados:

Pontos ideais

Critérios de congruência

O Ângulo de Paralelismo e a Função Ângulo de Paralelismo

Propriedades de quadriláteros especiais:

O Quadrilátero de Saccheri

O Quadrilátero de Lambert

A soma dos ângulos de um triângulo e o critério de congruência “AAA”

A variação da distância entre duas retas:

Retas concorrentes

Retas paralelas

Retas hiperparalelas

A construção geométrica de uma paralela.

Horocírculos e curvas equidistantes

Defeito de polígonos hiperbólicos: áreas

(3) *A Trigonometria Hiperbólica*

Arcos concêntricos de horocírculos

Sistema de coordenadas

Relações trigonométricas em triângulos hiperbólicos retângulos

Relações trigonométricas em triângulos hiperbólicos quaisquer

Expressões para a Função Ângulo de Paralelismo de Bolyai-Lobachewsky

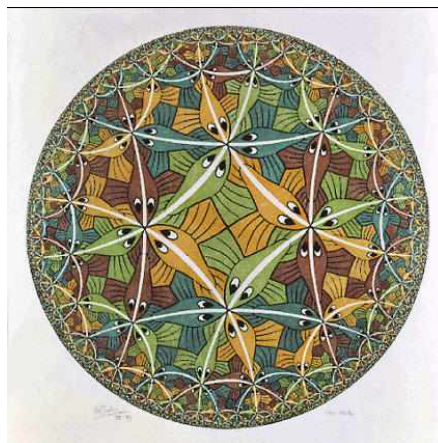
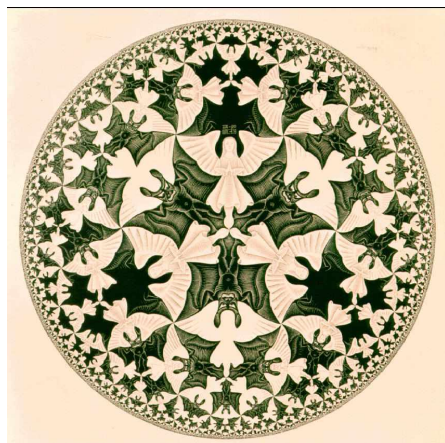
O Teorema de Pitágoras Hiperbólico

A Lei dos Senos

A Lei dos Cossenos 1

A Lei dos Cossenos 2

Comparação entre as trigonometrias Euclidiana e Hiperbólica





Capítulo 1

Algumas Notas Históricas

O estudo sistemático de geometrias não euclidianas em espaços homogêneos, ou seja, espaços que apresentam a mesma curvatura gaussiana⁽¹⁾ em todos os seus pontos, teve origem a partir do final do século XVIII e começo do século XIX quando Gauss estudou o “*Problema das Paralelas*”, que consistia em tentar provar que o 5º Postulado⁽²⁾ de Euclides era independente dos demais. Ironicamente, podemos dizer que o próprio Euclides, ao adotar seu Quinto Postulado em sua obra “*Os Elementos*” lançou a semente das geometrias não euclidianas, uma vez que o questionamento de tal postulado levou ao desenvolvimento da teoria que serviu de base para a fundamentação da primeira geometria não euclidiana, a chamada *Geometria Hiperbólica*.

Neste capítulo introduzimos uma breve biografia dos principais matemáticos responsáveis pelo desenvolvimento da teoria que envolve as chamadas geometrias não euclidianas.

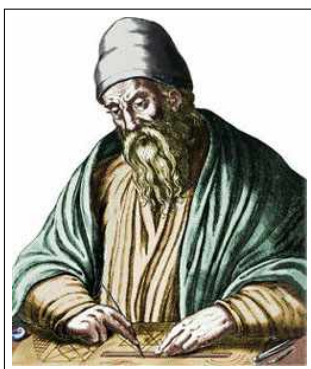
As biografias abaixo podem ser encontradas com mais detalhes no site *MacTutor* de História da Matemática⁽³⁾.

Euclides, de Alexandria.

Euclides foi o matemático grego responsável pela compilação de praticamente toda a matemática desenvolvida até sua época em uma monumental obra de 13 volumes chamada “*Os Elementos*”.

Seu mérito não se restringe apenas à compilação, como também à introdução do método lógico-dedutivo no desenvolvimento de uma teoria, isto é, do método axiomático, tão conhecido da matemática dos dias atuais. Na obra de Euclides temos dez axiomas⁽⁴⁾, sendo cinco “noções comuns”, que Euclides acreditava serem verdades aceitas sem contestações em qualquer ciência, e cinco “postulados” que pretendiam ser proposições específicas da geometria e que também deveriam ser aceitas sem contestações. A partir desses axiomas, Euclides deduziu 465 proposições, dentre as quais figuram também resultados de geometria espacial e teoria dos números (do ponto de vista geométrico). Os livros didáticos de geometria, confeccionados ao longo do tempo, possuem, até hoje, “*Os Elementos*” de Euclides como base. Trata-se da segunda obra mais editada no mundo (a primeira é a Bíblia).

Sabe-se que Euclides nasceu por volta do ano 325 aC e faleceu por volta do ano 265 aC. Sabe-se também que ele viveu boa parte de sua vida na cidade de Alexandria, no Egito, onde trabalhou na famosa biblioteca de Alexandria, fundada por Alexandre, o Grande.



⇐ *Euclides*

¹De um modo bastante intuitivo e informal, a curvatura gaussiana de uma superfície regular S em um ponto $P \in S$ é uma *taxa de variação* que mede “o quanto S afasta-se, em uma vizinhança de P , de seu plano tangente em P ”. Para a definição formal de curvatura gaussiana indicamos as referências [6] e [24].

²**P5** - Se uma reta, intersectando duas retas em um plano, forma ângulos interiores de um mesmo lado com soma menor que a de dois ângulos retos, então as duas retas, se prolongadas indefinidamente, irão se encontrar do lado cuja soma dos ângulos é menor do que a de dois ângulos retos.

³Referência [19].

⁴Proposições admitidas sem demonstrações.

Claudius Ptolomeu.

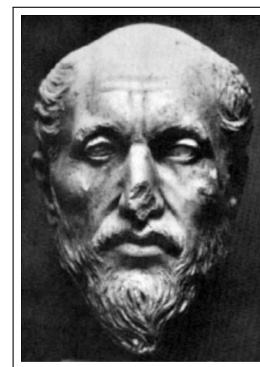
Claudius Ptolomeu foi um dos matemáticos que contestaram o 5º Postulado de Euclides, propondo uma demonstração do mesmo a partir dos quatro primeiros. A demonstração proposta por Ptolomeu fazia uso, implicitamente, da vigésima nona proposição⁽⁵⁾ do primeiro volume de “*Os Elementos*”, que depende do 5º Postulado, isto é, ele usou uma proposição equivalente ao próprio 5º Postulado, fazendo portanto, um ciclo vicioso do ponto de vista lógico.

Claudius Ptolomeu nasceu no ano 85 no Egito e faleceu no ano 165 em Alexandria, também no Egito. Foi um eminente matemático e astrônomo que escreveu uma importante obra, intitulada “*Almagesto*”, que introduziu a trigonometria como ferramenta no estudo de astronomia.



⇐ Ptolomeu

Proclus ⇒



Proclus Diadochus.

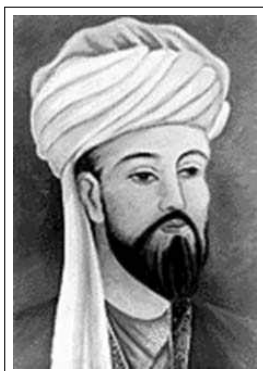
Proclus foi um estudioso das obras clássicas gregas e muito do que se sabe da história e da filosofia da Grécia Antiga sobreviveu em seus escritos. Ele escreveu um trabalho sobre a obra de Euclides chamado “*Comentários sobre Euclides*” onde, assim como Ptolomeu, também critica o 5º Postulado de Euclides, propondo uma demonstração do mesmo, a partir dos quatro outros postulados. Essa demonstração é baseada na aceitação do fato de que retas paralelas são equidistantes, fato este que é equivalente ao próprio 5º Postulado de Euclides.

Proclus nasceu no ano 411 em Constantinopla (atualmente Istambul, na Turquia) e faleceu no ano 485 em Atenas, na Grécia.

Nasir al-Din al-Tusi (Nasiredin).

Assim como Ptolomeu, Nasiredin também estudou astronomia e tentou provar o 5º Postulado de Euclides. Para tanto, ele utilizou uma proposição-axioma, que foi tomada sem demonstração devido ao seu caráter de auto-evidência⁽⁶⁾. No entanto, essa proposição assumida é um equivalente do 5º Postulado de Euclides. Assim como Ptolomeu, Nasiredin acabou realizando um raciocínio cíclico em suas deduções.

Nasiredin era árabe e nasceu no ano 1201 em Tus na Pérsia (atualmente Irã) e faleceu no ano 1274 em Kadhimain, Persia (próximo a Bagdá, atualmente Iraque).



⇐ Nasiredin

Wallis ⇒



John Wallis.

John Wallis foi um eminente matemático inglês que escreveu algumas obras sobre secções cônicas, álgebra e aritmética. Uma delas, a saber, “*Arithmetica Infinitorum*” (Aritmética Infinita) foi utilizada por Isaac Newton em seus estudos. Em suas pesquisas, Wallis também tentou demonstrar o 5º Postulado de Euclides a partir dos quatro primeiros. Para tanto, ele fez uso da existência de triângulos semelhantes e não congruentes, fato este que é equivalente ao próprio 5º Postulado.

⁵ “Se uma reta corta outras duas retas paralelas, então os ângulos correspondentes são congruentes.”

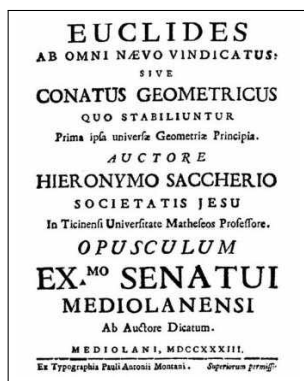
⁶ “Sejam r e s duas retas; $A \in r$ e B o pé da perpendicular baixada de A em s . Suponha ainda que AB não é perpendicular a r . Então, os segmentos perpendiculares a s baixados de r no lado do ângulo agudo entre AB e r são menores do que AB e os do lado oposto são maiores do que AB .”

Wallis nasceu em 23 de novembro de 1616 em Ashford na Inglaterra e faleceu em 28 de outubro de 1703 em Oxford, também na Inglaterra.

Giovanni Girolamo Saccheri.

Saccheri foi um padre jesuíta e estudioso de teologia, filosofia, retórica e matemática que viveu nas cidades de Milão, Turim e Pávia. Sua obra mais famosa é “*Euclides Ab Omni Naevo Vindicatus*” (Euclides Livre de Todas as Máculas) que é considerada uma das primeiras obras de geometria não euclidiana (embora Saccheri não tenha concebido esta obra com este intuito). Em sua obra ele tenta, assim como seus antecessores, provar o 5º Postulado de Euclides a partir dos quatro anteriores. A novidade é que, pela primeira vez, o método de redução ao absurdo em demonstrações foi utilizado no “*Problema das Paralelas*”. Com isto, Saccheri supôs a negação do 5º Postulado e tentou chegar a uma contradição fazendo uso de um quadrilátero com dois ângulos retos na base e dois lados verticais congruentes. Como ele sabia que a existência de retângulos e o 5º Postulado são equivalentes, a negação assumida conduziu a dois casos, a saber: o caso em que os ângulos congruentes do topo são obtusos e o caso em que são agudos. Esse quadrilátero mais tarde passou a se chamar “*Quadrilátero de Saccheri*”. O caso em que os ângulos do topo de seu quadrilátero são obtusos conduz a uma contradição com o Segundo Postulado de Euclides. O caso em que os ângulos são agudos não conduz a uma contradição. No entanto, após ter desenvolvido vários resultados, que hoje são conhecidos teoremas de Geometria Hiperbólica, Saccheri forçou uma contradição admitindo ser impossível a existência de duas retas paralelas assintóticas, ou seja, retas que são paralelas, mas que vão se aproximando à medida que são percorridas em um determinado sentido. Essas retas podem ser utilizadas para a construção dos chamados *triângulos generalizados* da Geometria Hiperbólica.

Saccheri nasceu em 5 de setembro de 1667 em São Remo na Itália e faleceu em 25 de outubro de 1733 em Milão, também na Itália.



⇐ *Capa da obra de Saccheri*

Lambert ⇒



Johann Heinrich Lambert.

Assim como Saccheri, Lambert também tentou provar o 5º Postulado de Euclides por redução ao absurdo, em seu trabalho “*Theorie der Parallelinien*” de 1766, via a introdução de um quadrilátero que possui três ângulos retos, conhecido hoje como “*Quadrilátero de Lambert*”. Como consequência, ele deduziu uma série de resultados que hoje são conhecidos como teoremas de Geometria Hiperbólica. Talvez seu mais importante resultado nesse trabalho tenha sido a dedução de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é inversamente proporcional a sua área, em uma geometria onde não vale o 5º Postulado. Apesar de suas contribuições no campo da geometria, Lambert é mais conhecido no mundo matemático pela prova rigorosa que fez da irracionalidade do número π .

Lambert nasceu em 26 de agosto de 1728 em Mülhausen na França e faleceu em 25 de setembro de 1777 em Berlim na Alemanha.

Adrien Marie Legendre.

Legendre escreveu um tratado de geometria intitulado “*Eléments de Géométrie*” em 1794, que serviu de texto básico no ensino de geometria durante muitas décadas na Europa. Foi nesse trabalho que Legendre voltou-se para a questão do “*Problema das Paralelas*” e, assim como seus antecessores, tentou demonstrar o 5º Postulado a partir dos quatro primeiros. Em uma de suas demonstrações ele admitiu que a partir de um ponto no interior de um ângulo não degenerado, cuja medida não é superior a 60°, é possível traçar uma reta que intersecta os dois lados desse ângulo. Embora pareça evidente, essa proposição é equivalente ao próprio 5º Postulado de Euclides e, desta forma, do ponto de vista lógico-dedutivo, assumi-la significa assumir o 5º Postulado. Embora Legendre não tenha feito progressos no “*Problema das Paralelas*”, seu trabalho no campo da geometria foi magistral do ponto de vista didático e da clareza de raciocínio com que demonstrou diversos teoremas da Geometria Euclidiana⁽⁷⁾.

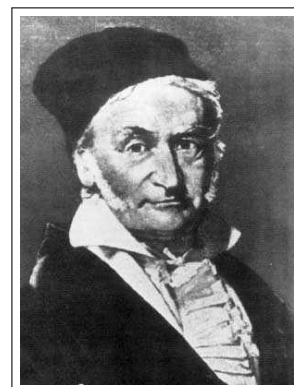
Legendre nasceu em 18 de setembro de 1752 em Paris na França e faleceu em 10 de janeiro de 1833 no mesmo local.

⁷Dois desses teoremas serão usados diversas vezes nesse trabalho.



← Legendre

Gauss ⇒



Johann Carl Friedrich Gauss.

Gauss tomou conhecimento logo cedo, por volta dos quinze anos de idade, do “*Problema das Paralelas*” e, assim como seus antecessores, de início tentou demonstrar o 5º Postulado a partir dos quatro primeiros. No entanto, logo convenceu-se de que tal demonstração não era possível. Embora não haja registros, é possível que Gauss tenha lido os trabalhos de Saccheri, Lambert e Legendre sobre o “*Problema das Paralelas*” e tomado conhecimento dos vários teoremas de geometrias não euclidianas constantes desses trabalhos. Embora não tenha publicado nada sobre esse assunto sabe-se, por meio de numerosas correspondências que Gauss mantinha com diversos matemáticos da época, que ele desenvolveu uma série de resultados de Geometria Hiperbólica e, certamente, foi o primeiro matemático a reconhecer a existência de uma geometria consistente diferente da Euclidiana. Talvez a não publicação de tais resultados tenha sido motivada pelo receio da não aceitação de uma geometria diferente da clássica e da contestação da filosofia de Kant, adotada pela igreja, que coloca o universo como euclidiano.

O termo “não euclidiana” é de Gauss. Em 1824, em carta a F. A. Taurinus, declara que “se supusermos que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é menor do que 180° (o que equivale a considerar uma das negações do 5º Postulado), é possível desenvolver uma longa série de resultados não contraditórios que constituem uma geometria não euclidiana”.

Gauss foi um dos maiores matemáticos que já existiram e possui contribuições em diversas áreas dessa ciência. Nasceu em 30 de abril de 1777 em Brunswick na Alemanha e faleceu em 23 de fevereiro de 1855 in Göttingen, também na Alemanha.

János Bolyai.

O húngaro János Bolyai é filho de um amigo de Gauss, chamado Farkas Bolyai (1775 - 1856), que tentou demonstrar o 5º Postulado de Euclides a partir dos quatro primeiros. Talvez por influência de seu pai János tenha tentado logo cedo resolver o “*Problema das Paralelas*”. Assim como Gauss, o jovem János logo convenceu-se da impossibilidade de tal demonstração e passou a admitir e a desenvolver diversos resultados de Geometria Hiperbólica. János publicou, em latim, o fruto de seu trabalho sob o título “*Ciência do Espaço Absoluto*”⁽⁸⁾, em 1832, como um apêndice de um livro didático escrito por seu pai, intitulado “*Tentamen*”.

Um fato curioso na história de János se deu quando seu pai Farkas enviou uma cópia do “*Tentamen*” para que seu amigo Gauss avaliasse o brilhante trabalho de seu filho. No entanto, ao contrário do esperado elogio do eminente matemático, Farkas recebeu uma carta de Gauss onde o mesmo diz que elogiar o trabalho de János seria o mesmo que elogiar a si próprio, uma vez que a maioria dos resultados descobertos por János já haviam sido descoberto por ele mesmo anos antes. Entretanto, Gauss escreveu que estava feliz e surpreso, pelo fato de esses resultados de Geometria Hiperbólica terem sido descobertos de modo independente pelo prodigioso filho de um ilustre amigo. Naturalmente, a carta de Gauss provocou profundo descontentamento em János, que passou a cultivar profunda aversão ao “Príncipe dos Matemáticos”.

János nasceu em 15 de dezembro de 1802 em Kolozsvár no Império Húngaro (hoje é uma cidade da Romênia) e faleceu em 27 de janeiro de 1860 in Marosvásárhely no Império Húngaro (hoje, também Romênia).

⁸Uma tradução para o inglês do trabalho “*Ciência do Espaço Absoluto*” de János Bolyai pode ser encontrada no final da referência [4].



← Bolyai

Lobachewsky ⇒



Nikolai Ivanovich Lobachewsky.

Assim como seus antecessores, Lobachewsky tentou demonstrar o 5º Postulado de Euclides a partir dos quatro primeiros e logo se convenceu da impossibilidade desse feito. A partir de então, passou a reconhecer a existência e a desenvolver, de forma independente, resultados de uma nova geometria, a Hiperbólica, diferente da Euclidiana, denominada por ele de “*pangeometria*” ou “*geometria imaginária*”. Em 1826 chegou a proferir palestra sobre a existência de geometrias não euclidianas na Universidade de Kazan onde foi professor e reitor. Em 1829, Lobachewsky publicou um trabalho, em russo, sobre suas descobertas mas quase que completamente ignorado pela comunidade científica russa e completamente ignorado no restante do mundo. Entretanto, cronologicamente, trata-se da primeira publicação de uma geometria cujo autor admite ser não euclidiana. Posteriormente, em busca do reconhecimento de seu trabalho, Lobachewsky publicou uma versão em alemão em 1840, intitulada “*Pesquisas Geométricas Sobre a Teoria das Paralelas*”⁽⁹⁾, chegando às mãos de Gauss, que ficou mais uma vez surpreso com o fato de Lobachewsky ter descoberto os mesmos resultados de forma independente. Além disso, Gauss também se superpreendeu com a forma como os teoremas da Geometria Hiperbólica foram demonstrados por Lobachewsky, de modo totalmente diferente dos seus, chegando a afirmar em correspondência para um amigo astrônomo de nome Schumacher que o livro de Lobachewsky continha uma exposição admirável de toda a teoria de Geometria Hiperbólica. Em 1866, dez anos após sua morte, uma versão em francês de seu trabalho foi publicada.

Lobachewsky nasceu em 1 de dezembro de 1792 em Nizhny na Rússia e faleceu em 24 de fevereiro de 1856 em Kazan, também na Rússia.

Georg Friedrich Bernhard Riemann.

Riemann generalizou as geometrias não euclidianas por meio do conceito de curvatura e fundamentou a chamada Geometria Elíptica, que pode ser obtida, do ponto de vista axiomático, da negação do 5º Postulado de Euclides que conduz à não existência de retas paralelas e à substituição do Segundo Postulado de Euclides por postulados que permitem que uma reta tenha comprimento finito (Axiomas de Separação). Com isso, a geometria sobre uma esfera, que sob certas restrições serve de modelo para a Geometria Elíptica, desvinculou-se como parte da geometria euclidiana espacial e passou a ter vida própria.

O trabalho de Riemann sobre geometria está muito além da simples generalização das três geometrias de espaço homogêneo (curvatura gaussiana constante⁽¹⁰⁾). Ele introduziu as hoje chamadas Geometrias Riemannianas que podem, inclusive, não serem homogêneas e que foram, posteriormente, utilizadas na Teoria da Relatividade de Albert Einstein em 1906.

Riemann nasceu em 17 de setembro de 1826 em Breselenz na Alemanha e faleceu em 20 de julho de 1866 em Selasca na Itália, vítima de tuberculose.

⁹Uma tradução para o inglês do trabalho “*Pesquisas Geométricas Sobre a Teoria das Paralelas*”, de Lobachewsky, pode ser encontrada no final da referência [4].

¹⁰A definição rigorosa de curvatura gaussiana de uma superfície requer a introdução de definições e resultados de Geometria Diferencial e pode ser encontrada na referência [24].

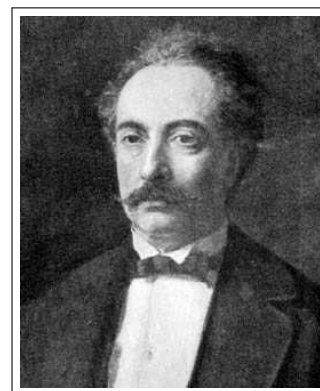
Geometricamente, a curvatura gaussiana em um ponto de uma superfície suave indica, de um certo modo, o quanto essa superfície afasta-se de seu plano tangente em uma vizinhança desse ponto.

Uma superfície que possui curvatura gaussiana constante em qualquer um de seus pontos possui a propriedade de ser homogênea, ou seja, intrinsecamente não há pontos “especiais”, qualquer um de seus pontos possuem as mesmas propriedades e são indistinguíveis. Exemplos de superfícies com curvatura gaussiana constante e positiva são as esferas euclidianas e, com curvatura gaussiana nula, é o plano euclidiano.



← Riemann

Beltrami ⇒



Eugenio Beltrami.

Embora a grande maioria dos teoremas de Geometria Hiperbólica já estivesse estabelecida na segunda metade do século XIX, o problema da consistência de tal geometria ainda não havia sido resolvido. Havia a preocupação sobre a garantia da impossibilidade de se encontrar, no futuro, durante o desenvolvimento da Geometria Hiperbólica, uma contradição lógica na teoria, ou seja, um resultado verdadeiro cuja negação também pudesse ser provada verdadeira. O problema foi resolvido mediante a introdução de *modelos euclidianos* para a Geometria Hiperbólica, isto é, superfícies nas quais as retas são definidas de modo que os axiomas da Geometria Hiperbólica passam a ser interpretados e aceitos como verdadeiros. Desta forma, uma contradição na Geometria Hiperbólica seria automaticamente transferida para a Geometria Euclidiana, que é considerada consistente.

Beltrami foi o primeiro a introduzir um tal modelo parcial para a Geometria Hiperbólica, em 1868, em um artigo intitulado “*Essay on an Interpretation of Non-euclidean Geometry*”. Tal modelo faz uso da *pseudoesfera*, superfície de revolução da curva denominada *tratrix* em torno de sua assíntota.

Beltrami nasceu em 16 de novembro de 1835 em Cremona no Império Austríaco (atualmente, Itália) e faleceu em 18 de fevereiro de 1900 em Roma, na Itália.

Felix Christian Klein.

O modelo de Beltrami da pseudoesfera para a Geometria Hiperbólica não era totalmente adequado devido ao fato de ser parcial, ou seja, representava apenas parte do plano hiperbólico, impedindo que as retas hiperbólicas fossem convenientemente estendidas ao infinito, como reza o Segundo Postulado de Euclides. Deste modo, a busca por modelos completos para a Geometria Hiperbólica passou a ser um preocupação dentre os geômetras no final do século XIX.

Felix Klein foi um eminente geômetra que publicou em 1871 dois artigos sobre geometrias não euclidianas, onde introduziu um modelo completo⁽¹¹⁾ para a Geometria Hiperbólica (Modelo do Disco de Klein) e dois modelos para a Geometria Elíptica (Modelo do Disco Fechado e Modelo Duplo da Esfera). Talvez o trabalho mais conhecido de Klein seja o estudo das propriedades do espaço que são invariantes por um dado grupo de transformações, trabalho este conhecido como “*Erlanger Programm*”, de 1872, e que influenciou profundamente o desenvolvimento da geometria no século XX. Por fim, cabe ressaltar que os termos “hiperbólica” e “elíptica” para as duas geometrias não euclidianas homogêneas foram introduzidos por Klein.

Klein nasceu em 25 de abril de 1849 em Düsseldorf na Prússia (hoje, Alemanha) e faleceu em 22 de junho de 1925 em Göttingen na Alemanha.



← Klein

Poincaré ⇒



¹¹Os modelos completos para a Geometria Hiperbólica imersos no Espaço Euclidiano não possuem métrica induzida da Geometria Euclidiana (*geometricamente, uma superfície possui métrica induzida da métrica do espaço no qual ela está inserida quando o comprimento de qualquer curva dessa superfície é computado como sendo o comprimento dessa curva quando vista sozinha no espaço. Por exemplo, se uma esfera de raio r possui métrica induzida da métrica usual do espaço euclidiano, então um arco de circunferência ligando pontos antípodas da esfera terá comprimento πr*). No caso da Geometria Hiperbólica, a noção de medida é diferente da euclidiana e faz com que as retas hiperbólicas, ao contrário do modelo da pseudoesfera, não sejam geodésicas euclidianas sobre a superfície do modelo. (*as geodésicas euclidianas são as curvas de menor comprimento euclidiano, sobre uma superfície, que unem dois pontos dados dessa mesma superfície*)

Jules Henri Poincaré.

Poincaré é um dos maiores matemáticos de todos os tempos e é considerado o último universalista em matemática, ou seja, uma pessoa que detinha conhecimento profundo de todas as áreas da matemática. Possui contribuições significativas em diversas áreas da matemática e, dentre elas, a geometria. No final do século XIX, após estudo de trabalhos de Lazarus Fuchs, Poincaré introduziu dois modelos euclidianos para a Geometria Hiperbólica enquanto pesquisava grupos de transformações automorfias do plano no plano que são razões de transformações afins de uma variável complexa. Tais grupos são conhecidos atualmente como *grupos fuchsianos*. Os modelos completos introduzidos por Poincaré são amplamente utilizados no estudo e no ensino de Geometria Hiperbólica e são conhecidos como Modelo do Semiplano Superior e Modelo do Disco de Poincaré.

Poincaré nasceu em 29 de abril de 1854 em Nancy na França e faleceu em 17 de julho de 1912 em Paris, também na França.

David Hilbert.

No final do século XIX “*Os Elementos*” de Euclides não estavam resistindo ao rigor que a lógica exigia para os fundamentos da geometria. Muitas proposições de geometria euclidiana plana faziam uso de resultados que não haviam sido demonstrados anteriormente e que não constavam do rol de axiomas⁽¹²⁾, ou seja, era necessária uma reformulação dos axiomas de Euclides. Uma proposta, ainda no século XIX, bem aceita pela comunidade matemática foi a do matemático e lógico alemão David Hilbert⁽¹³⁾, publicada em seu célebre trabalho “*Grundlagen der Geometrie*” (Fundamentos de Geometria), de 1899. Neste trabalho Hilbert coloca a Geometria Euclidiana, tanto plana quanto espacial, sobre bases sólidas por meio da substituição dos cinco Postulados de Euclides por cinco grupos de axiomas, os quais chamou de Axiomas de Incidência (7 axiomas), Axiomas de Ordem (4 axiomas), Axiomas de Congruência (6 axiomas), Axiomas de Continuidade (2 axiomas) e o Axioma das Paralelas.

Na obra original de Hilbert há 21 axiomas, mas o 21º axioma é, na verdade, consequência dos demais axiomas.

Além de propor um novo sistema de axiomas, ao contrário de Euclides, Hilbert considerou que **ponto**, **reta**, **plano** e **espaço** são **conceitos primitivos** (ou **noções primitivas**), objetos não passíveis de serem definidos. Junto aos conceitos primitivos, Hilbert também considerou três *relações primitivas* (igualmente não passíveis de definição) que são as relações “*estar em*”, “*estar entre*” e “*ser congruente a*”.

Com o trabalho de Hilbert, encerra-se talvez o mais longo problema em aberto na Matemática, o “*Problema das Paralelas*” que, ironicamente, foi introduzido pelo próprio Euclides e resistiu por cerca de 2200 anos!

Hilbert nasceu em 23 de janeiro de 1862 em Königsberg na Prússia (atualmente, uma região desconectada da Rússia ao lado da Alemanha) e faleceu em 14 de fevereiro de 1943 em Göttingen na Alemanha.



← Hilbert



Birkhoff ⇒

George David Birkhoff.

Birkhoff foi um matemático americano que também propôs um sistema axiomático para a Geometria Euclidiana. Seu trabalho, intitulado “*A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor*” foi publicado no conceituado periódico *Annals of Mathematics*, em 1932, e consiste de um sistema com apenas 4 axiomas. Tal concisão só foi possível devido à associação que Birkhoff faz de seus axiomas com a estrutura de *corpo ordenado completo* dos números reais. A construção axiomática do conjunto dos números reais já era algo muito bem estabelecido no campo da Análise à sua época.

Essa concisão que os axiomas de Birkhoff trouxe para a geometria foi extremamente bem-vinda do ponto de vista didático, uma vez que a manipulação das propriedades dos números reais é, geralmente, bem compreendida pelos

¹²Um sistema axiomático para uma teoria deve ter necessariamente duas características: ser *coerente* e ser *suficiente*. Coerente significa que não se pode provar uma proposição e sua negação a partir do sistema de axiomas adotado. Suficiente significa que deve ser possível decidir sobre a veracidade ou não de uma proposição da teoria a partir de seu sistema de axiomas. Ainda há um aspecto desejável (mas não obrigatório) em um sistema axiomático: que um axioma não seja consequência dos demais, ou seja, que ele seja o mais enxuto possível.

¹³Há outros sistemas axiomáticos, até mais concisos que o de Hilbert, para a Geometria Euclidiana, como, por exemplo, o de Alfred Tarski e o de George Birkhoff. Entretanto, o sistema de Hilbert parece ter a virtude de ser mais sincronizado com “*Os Elementos*”.

Capítulo 1. Algumas Notas Históricas

estudantes. Atualmente, a grande maioria dos textos didáticos de geometria selecionam “seus axiomas” a partir de uma mistura dos axiomas de Hilbert e de Birkhoff, com pequenas alterações em seus enunciados.

Birkhoff nasceu em 21 de março de 1884 em Overisel nos Estados Unidos e faleceu em 12 de novembro de 1944 em Cambridge, também nos Estados Unidos.



Capítulo 2

Axiomas da Geometria Plana

Neste capítulo introduzimos os **Postulados de Euclides**, os **Axiomas de Hilbert** e os **Axiomas de Birkhoff** para a Geometria Euclidiana Plana, que são proposições aceitas sem demonstrações e formam a base para a dedução de todas as demais proposições dessa geometria. Os Axiomas de Hilbert englobam a geometria plana e a espacial, enquanto que os demais apenas a plana.

É conveniente ressaltar que os textos modernos de Geometria Euclidiana misturam os sistemas axiomáticos desses três matemáticos, fazendo junções, divisões ou reformulações em prol da didática.

Sob o rigor da lógica na axiomática de Hilbert e Birkhoff, ponto, reta, plano (e espaço) são conceitos ou noções primitivas, ou seja, não se definem, pois qualquer tentativa de definição desses entes geométricos recai na utilização de outros conceitos que não foram definidos previamente. Não obstante, Euclides definiu esses conceitos primitivos em sua obra “*Os Elementos*”.

Encerramos esse capítulo apresentando os axiomas específicos das chamadas *Geometria Hiperbólica* e *Geometria Elíptica*, que são as duas geometrias não euclidianas homogêneas.

2.1 Axiomática de Euclides

Euclides estabeleceu 10 axiomas divididos em 5 *Noções Comuns* e 5 *Postulados*.

Noções Comuns de Euclides

Euclides acreditava que as noções comuns eram aceitas em “todas as ciências”. São elas:

- N1** - Coisas que são iguais a uma mesma coisa são iguais entre si.
- N2** - Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais.
- N3** - Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
- N4** - Coisas que coincidem uma com a outra são iguais.
- N5** - O todo é maior do que qualquer de suas partes.

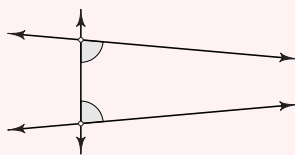
Essas noções comuns de Euclides não são mais consideradas na Geometria moderna, pois elas requerem uma série de explicações a respeito das palavras com que elas foram escritas. Por exemplo, em **N5** a palavra “maior” precisa ser melhor explicada, pois se consideramos que maior se refere à cardinalidade de conjuntos, temos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ e ambos possuem a mesma cardinalidade (são enumeráveis). Logo, em termos de cardinalidade, não podemos dizer que \mathbb{Z} é maior do que \mathbb{N} .

Postulados de Euclides

Os postulados são axiomas específicos da geometria plana. Nos enunciados abaixo, o que está entre parênteses não constam em “*Os Elementos*”. Entretanto, o uso dos dois primeiros postulados feito por Euclides pressupõe as informações dadas nos parênteses. São eles:

- P1** - Pode-se traçar uma (**única**) reta (**segmento**) por quaisquer dois pontos.
- P2** - Pode-se continuar (**de modo único**) uma reta (**segmento**) infinitamente.
- P3** - Pode-se traçar uma circunferência com quaisquer centro e raio.
- P4** - Todos os ângulos retos são iguais.

P5 - Se uma reta, intersectando duas retas em um plano, forma ângulos interiores de um mesmo lado com soma menor que a de dois ângulos retos, então as duas retas, se prolongadas indefinidamente, irão se encontrar do lado cuja soma dos ângulos é menor do que a de dois ângulos retos.



O postulado **P4** está relacionado com a homogeneidade do plano. Já o postulado **P5** destoa completamente dos quatro primeiros pelo seu enorme enunciado e caráter não óbvio. A impressão que se tem é de que se trata de uma proposição que possa ser demonstrada a partir dos demais postulados. Eis, portanto, a origem do chamado “*Problema das Paralelas*”.

2.2 Axiomática de Hilbert

Hilbert criou, a partir dos 5 Postulados de Euclides, 5 grupos de axiomas. São eles:

- Axiomas de Incidência;
- Axiomas de Ordem;
- Axiomas de Congruência;
- Axiomas de Continuidade;
- Axioma das Paralelas.

Os axiomas de Hilbert contemplam tanto a geometria plana quanto a espacial.

1 - Axiomas de Incidência (noção de “estar em”)

1i - Dois pontos distintos determinam uma reta.

1ii - A reta que passa por dois pontos distintos é única⁽¹⁾.

1iii - Três pontos não colineares determinam um plano.

1iv - O plano que passa por três pontos não colineares é único⁽²⁾.

1v - Uma reta que possui dois pontos distintos em um plano está contida nesse plano.

1vi - A intersecção de dois planos distintos que têm um ponto em comum possui necessariamente outro ponto em comum⁽³⁾.

1vii - Em uma reta existem pelo menos dois pontos. Em um plano existem pelo menos três pontos não colineares⁽⁴⁾. No espaço existem pelo menos quatro pontos não coplanares⁽⁵⁾.

2 - Axiomas de Ordem (noção de “estar entre”)

2i - Se o ponto B está entre os pontos distintos A e C, então B também está entre C e A, e são três pontos distintos colineares.

2ii - Se A e C são dois pontos distintos de uma reta, então existe pelo menos um ponto B entre A e C e existe pelo menos um ponto D tal que C está entre A e D⁽⁶⁾.

2iii - De quaisquer três pontos distintos de uma reta, sempre há um, e somente um, que está entre os outros dois.

2iv - (*Axioma de Pasch*) Sejam A, B e C três pontos não colineares e r uma reta no plano determinado por A, B

¹A junção dos axiomas **1i** e **1ii** é “Dois pontos distintos determinam uma única reta”.

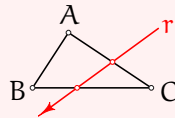
²A junção dos axiomas **1iii** e **1iv** é “Três pontos não colineares determinam um único plano”.

³A combinação direta dos axiomas **1i**, **1ii** e **1vi** permite que escrevamos “A intersecção de dois planos distintos que têm um ponto em comum é uma reta” no lugar do próprio axioma **1vi**.

⁴“Em um plano existem pelo menos três pontos não colineares” permite que concluamos que existe pelo menos um ponto fora de uma reta.

⁵“No espaço existem pelo menos quatro pontos não coplanares” permite que concluamos que existe pelo menos um ponto fora de um plano.

e C que não passa por nenhum desses pontos mas que intersecta o segmento AC, então r intersecta o segmento BC ou o segmento AB.



3 - Axiomas de Congruência (noção de “igualdade” entre segmentos e ângulos)

3i - Se A e B são dois pontos distintos e A' é a origem da semirreta s, então existe um único ponto B' distinto de A' em s tal que o segmento AB é congruente ao segmento A'B'. Além disso, todo segmento é congruente a si mesmo.

3ii - Se o segmento AB é congruente ao segmento CD e ao segmento EF, então o segmento CD é congruente ao segmento EF. (*transitividade*)

3iii - Sejam AB e BC segmentos em uma reta r com apenas B em comum. Além disso, seja, A'B' e B'C' segmentos em uma reta r' com apenas B' em comum. Se o segmento AB for congruente ao segmento A'B' e o segmento BC for congruente ao segmento B'C', então o segmento AC é congruente ao segmento A'C'.

3iv - Sejam um semiplano σ e um ângulo \hat{A} . Tomemos uma semirreta s com origem em B contida na reta que determina o semiplano σ . Então, existe apenas um ângulo \hat{B} com lado em s contido no semiplano σ e congruente ao ângulo \hat{A} . Além disso, todo ângulo é congruente a si mesmo.

3v - Se o ângulo \hat{A} é congruente ao ângulo \hat{B} e ao ângulo \hat{C} , então o ângulo \hat{B} é congruente ao ângulo \hat{C} . (*transitividade*)

3vi - Dados dois triângulos ABC e EFG, se AB é congruente a EF, AC é congruente a EG e \hat{A} é congruente a \hat{E} , então ABC é congruente a EFG. (*caso LAL “lado, ângulo, lado” de congruência*)

4 - Axiomas de Continuidade (para medição de segmentos e ângulos)

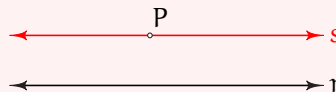
4i - (*Axioma de Arquimedes*) Sejam AB e CD dois segmentos. Então, existe um número finito e distinto de pontos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ na reta que passa por A e B tal que os segmentos $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ são congruentes a CD e o ponto B está entre A e A_n .

4ii - (*Axioma de Dedekind*) Suponha que o conjunto de todos os pontos de uma reta r está na união dos conjuntos não vazios C_1 e C_2 . Suponha ainda que nenhum ponto de C_1 está entre dois pontos de C_2 e vice-versa. Então, existe um único ponto O de C_1 ou C_2 entre quaisquer $P_1 \in C_1$ e $P_2 \in C_2$ com O diferente de P_1 ou P_2 .

5 - Axioma das Paralelas

No plano, por um ponto não pertencente a uma reta dada, pode ser traçada uma *única* reta que não intersecta a reta dada.

(*formulação equivalente ao 5º Postulado de Euclides de John Playfair (1748-1819), físico e matemático escocês*)



2.3 Axiomática de Birkhoff

Conforme já comentado no Capítulo 1 anterior, o sistema axiomático de Birkhoff é bastante enxuto. São quatro axiomas apenas. Entretanto, a associação da reta geométrica com o corpo ordenado dos números reais (ou seja, a reta real) traz consigo um grande desenvolvimento já estabelecido na Análise.

Axioma 1. (medida de segmento). Os pontos de uma reta r podem ser colocados em correspondência biunívoca com o conjunto dos números reais \mathbb{R} de tal modo que se A, B \in r estão associados a a, b \in \mathbb{R} , respectivamente, então a distância entre A e B é dada por $|a - b|$.

Axioma 2. Dois pontos distintos determinam uma única reta.

⁶Os axiomas 1vii e 2ii garantem a existência de infinitos pontos sobre uma reta, um plano ou no espaço.

Axioma 3. (medida de ângulo). As semirretas de um plano com origem O comum podem ser colocadas em correspondência biunívoca com o conjunto dos números reais \mathbb{R} módulo 2π de tal modo que se \vec{OA} e \vec{OB} estão associados a a e $b \in \mathbb{R}$, respectivamente, então a medida do ângulo \widehat{AOB} é dada por $a - b \pmod{2\pi}$. Além disso, se o ponto B variar continuamente sobre uma reta r que não passa por O , então a medida do ângulo \widehat{AOB} também varia continuamente.

Axioma 4. (similaridade ou semelhança) Dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$ e $k > 0$ tal que $d(A', B') = kd(A, B)$, $d(A', C') = kd(A, C)$ e $B'\widehat{A}'C' = \pm B\widehat{A}C$, então $d(B', C') = kd(B, C)$, $C'\widehat{B}'A' = \pm C\widehat{B}A$ e $A'\widehat{C}'B' = \pm A\widehat{C}B$.

2.4 Axiomas Específicos das Geometrias Hiperbólica e Elíptica

Os axiomas da Geometria Euclidiana Plana valem para a chamada *Geometria Hiperbólica Plana*, exceto aqueles que são equivalentes ao Axioma das Paralelas, ou mais especificamente:

- Exceto o 5º *Postulado*, na axiomática de Euclides;
- Exceto o *Axioma das Paralelas*, na axiomática de Hilbert;
- Exceto o *Axioma de Similaridade* (Axioma 4) na axiomática de Birkhoff.

Considerando o Axioma das Paralelas na formulação de Playfair:

“No plano, por um ponto não pertencente a uma reta dada, pode ser traçada uma *única* reta que não intersecta a reta dada.”

há duas negações possíveis para ele:

(1) “No plano, por um ponto não pertencente a uma reta dada, podem ser traçadas pelo menos duas retas distintas que não intersectam a reta dada.”

e

(2) “No plano, por um ponto não pertencente a uma reta dada, não existe reta que passe pelo ponto e que não intersecte a reta dada.”

A negação (1) é chamada de *Axioma de Lobachewsky*.

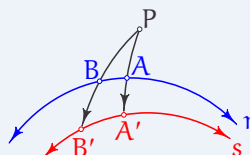
Os axiomas da Geometria Euclidiana com o Axioma de Lobachewsky no lugar do Axioma das Paralelas constituem a base da Geometria Hiperbólica, que será estudada com mais profundidade nos próximos capítulos.

Uma pergunta natural neste momento é: *Como representar com fidelidade no plano duas retas concorrentes paralelas a uma terceira?* Naturalmente, isso não será possível se estivermos imaginando a *reta hiperbólica* com sendo a *reta euclidiana*, que sempre é pensada como sendo uma “linha esticada”. Para resolvermos esse problema e, também, o chamado problema da consistência da Geometria Hiperbólica, precisamos introduzir os chamados *Modelos Euclidianos* para a Geometria Hiperbólica. Esse assunto será estudado no Capítulo 4 adiante.

Na chamada *Geometria Elíptica* o Axioma das Paralelas é substituído pela negação (2) acima. Desta forma, não existe paralelismo em tal geometria não euclidiana e, como consequência, as *retas elípticas* devem ter comprimentos finitos. Sendo assim, outras substituições devem ser feitas para que não haja contradição com o Segundo Postulado de Euclides ou com os Axiomas de Ordem de Hilbert. É necessária a substituição desses axiomas por um conjunto de axiomas chamados de *Axiomas de Separação*, que passamos a descrever abaixo. Antes, porém, duas definições são necessárias.

Dizemos que dois pontos A e B **separam** os pontos C e D sobre uma curva fechada quando não for possível ir de C a D percorrendo a curva sem atravessar os pontos A ou B . Designamos a relação “ A e B separam C e D ” pelo símbolo $(A, B|C, D)$.

Dadas duas retas distintas r e s e um ponto P não pertencente a elas, definimos a **aplicação perspectiva** com centro em P como sendo a transformação $\varphi : r \rightarrow s$ tal que se $A \in r$, então A, P e $A' = \varphi(A)$ são colineares (figura abaixo).



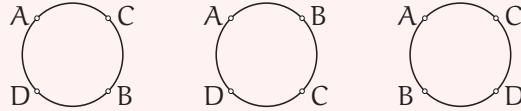
Os Axiomas de Separação são os seguintes:

S1 - Se $(A, B|C, D)$, então os pontos $A, B, C,$ e D são colineares e distintos.

S2 - Se $(A, B|C, D)$, então $(C, D|A, B)$ e $(B, A|C, D)$. (comutatividade)

S3 - Se $(A, B|C, D)$, então **não** vale $(A, C|B, D)$.

S4 - Se os pontos A, B, C e D são colineares e distintos, então ou $(A, B|C, D)$ ou $(A, C|B, D)$ ou $(A, D|B, C)$.



S5 - Se os pontos A, B e C são colineares e distintos, então existe um ponto D tal que $(A, B|C, D)$.

S6 - Por quaisquer cinco pontos colineares e distintos $A, B, C, D,$ e $E,$ se $(A, B|D, E)$, então $(A, B|C, D)$ ou $(A, B|C, E)$.

S7 - Aplicações perspectivas $\varphi : r \rightarrow s,$ sendo r e s retas, preservam separação, isto é, se $(A, B|C, D),$ com A, B, C e D sobre a reta $r,$ e se A', B', C' e D' são imagens de A, B, C, D por $\varphi,$ então $(A', B'|C', D').$

Novamente é natural a pergunta sobre a representação fiel da negação **(2)** do Axioma das Paralelas no plano. E novamente a resposta são os Modelos Euclidianos, que apresentamos no Capítulo 4 adiante.



Capítulo 3

O 5º Postulado de Euclides e o “Problema das Paralelas”

Este capítulo é totalmente dedicado ao estudo do 5º Postulado de Euclides. Por parecer um postulado que pudesse ser demonstrado a partir dos demais, muitos estudiosos e matemáticos tentaram demonstrá-lo ao longo dos séculos. Tal problema ficou conhecido como o “*Problema das Paralelas*”. Se lembrarmos que “*Os Elementos*” foi escrito por volta de 300 aC e o surgimento da primeira geometria não euclidiana foi por volta da terceira década do século XIX, percebemos que o “*Problema das Paralelas*” persistiu por mais de dois milênios!

Antes, porém, é conveniente recordar (ou estabelecer) as seguintes notações, que já foram adotadas no Capítulo 2 anterior e serão, também, adotadas ao longo de todo o texto.

Pontos: letras latinas maiúsculas (A, B, C, \dots).

Segmento com extremos A e B : “*segmento* AB ” ou, simplesmente, \overline{AB} .

Comprimento do segmento AB (ou *medida* do segmento AB): denotamos simplesmente por “ AB ”, sem a barra superior. Também utilizamos letras latinas minúsculas para designar comprimentos (a, b, c, \dots). Alguns textos também trazem a notação $|AB|$.

Observação importante 1: quando não houver perigo de confusão, denotamos “ AB ” tanto para o *segmento* AB (que é um conjunto de pontos), quanto para o *comprimento do segmento* AB (que é um número real). *Congruência* entre dois segmentos será denotada pelo símbolo \equiv . Manipulações de natureza algébrica com segmentos, como por exemplo $AB < CD + EF$, referem-se aos comprimentos dos respectivos segmentos.

Semirreta com origem A contendo B : “*semirreta* AB ” ou, simplesmente, \overrightarrow{AB} (quando não houver perigo de confusão com vetores). Alguns textos também utilizam a notação S_{AB} .

Retas: letras latinas minúsculas (r, s, t, \dots). Também utilizamos a notação \overleftrightarrow{AB} para designar a reta que contém os pontos distintos A e B .

Ângulos: recordemos que um *ângulo* é a reunião de duas semirretas com mesma origem. Cada semirreta é chamada de *lado* do ângulo e a origem comum é chamada de *vértice* do ângulo. Quando \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} são lados de um ângulo de vértice A , denotamos tal ângulo por \widehat{BAC} ou \widehat{CAB} , ou ainda \widehat{A} , quando não houver perigo de confusão (com outro ângulo de mesmo vértice).

Medida de ângulo (geralmente em radianos): denotamos por letras gregas minúsculas ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$).

Observação importante 2: manipulações de natureza algébrica com ângulos, com por exemplo $\widehat{BAC} < \widehat{EDF} + \widehat{HGI}$ ou $\widehat{A} < \widehat{D} + \widehat{G}$, referem-se às medidas dos respectivos ângulos. *Congruência* entre dois ângulos será denotada pelo símbolo \equiv .

3.1 Algumas Proposições Importantes para o estudo do “*Problema das Paralelas*”

Nesta seção vamos enunciar e demonstrar algumas proposições de Geometria Euclidiana Plana que são fundamentais para o estabelecimento dos chamados *equivalentes* do 5º Postulado de Euclides que apresentamos na Seção 3.2 adiante. Por conseguinte, essas proposições são fundamentais para uma compreensão mais aprofundada do “*Problema das Paralelas*” e o conseqüente surgimento da primeira geometria não euclidiana.

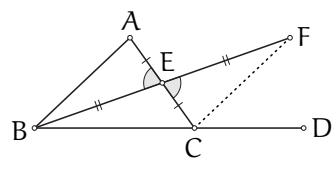
Capítulo 3. O 5º Postulado de Euclides e o “Problema das Paralelas”

Nosso estudo preliminar do 5º Postulado de Euclides, no que diz respeito ao desenvolvimento das geometrias não euclidianas que apresentamos adiante, será feito primeiramente com o auxílio de quatro proposições constantes de “*Os Elementos*”. São as proposições 16, 27, 28 e 29 do primeiro livro desta obra.

Proposição 3.1 (Proposição I.16 - Livro 1 de “Os Elementos”: Teorema do Ângulo Externo) Em qualquer triângulo, se um dos lados for continuado, o ângulo externo formado é sempre maior do que qualquer um dos ângulos internos que não lhe sejam adjacentes.

Demonstração da Proposição 3.1.

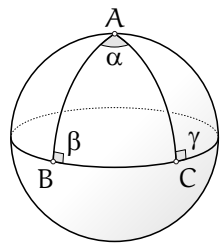
Seja ABC um triângulo. Prolonguemos o segmento BC até um ponto D de tal modo que C esteja entre B e D. Seja E o ponto médio de AC e tomemos $F \neq B$ no prolongamento de BE de tal modo que $BE = EF$, conforme a figura abaixo.



Os triângulos ABE e CFE são congruentes (caso LAL). Logo, $\widehat{BAC} = \widehat{FCA} < \widehat{DCA}$. Raciocínio análogo segue-se para demonstrar que $\widehat{CBA} < \widehat{DCA}$. □

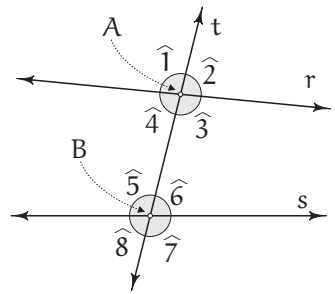
Observação. Veremos adiante que uma grande classe de triângulos esféricos (cujos lados estão sobre círculos máximos da esfera) podem ser considerados “*triângulos elípticos*”, pois a esfera é um modelo duplo para a chamada “*Geometria Elíptica*”, que é uma geometria não euclidiana. Nesta geometria, os axiomas de ordem de Hilbert e o axioma das paralelas não valem.

O Teorema do Ângulo Externo não é válido para triângulos esféricos. Por exemplo, veja que na figura abaixo, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ rad é medida de ângulo externo, $\beta = \frac{\pi}{2}$ rad e α são medidas de ângulos internos não adjacentes (ao ângulo de medida γ) e temos $\gamma = \beta$. E ainda podemos ter $\alpha > \gamma$ no caso de \widehat{A} ser obtuso.



A demonstração acima falha logo no começo para essa geometria, pois a falta de axiomas de ordem nos impede que “*prolonguemos o segmento BC até um ponto D de tal modo que C esteja entre B e D*”.

Para as próximas proposições, recordemos as seguintes definições. Sejam r, s e t retas distintas de tal modo que t intersecta r e s em pontos A e B distintos. Em tal disposição de retas dizemos que t é reta transversal a r e a s . Em torno de A e B temos oito ângulos que, por facilidade (e abuso!) de notação iremos indicar por $\widehat{1}, \widehat{2}, \dots, \widehat{8}$ conforme a figura abaixo.



Temos a seguinte nomenclatura:

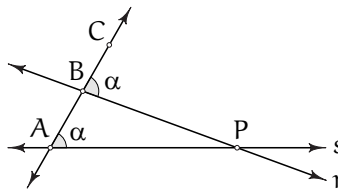
Ângulos	Designação	Ângulos	Designação	Ângulos	Designação
$\hat{1}$ e $\hat{5}$ $\hat{2}$ e $\hat{6}$ $\hat{3}$ e $\hat{7}$ $\hat{4}$ e $\hat{8}$	<i>Correspondentes</i>	$\hat{1}$ e $\hat{8}$ $\hat{2}$ e $\hat{7}$	<i>Colaterais externos</i>	$\hat{1}$ e $\hat{7}$ $\hat{2}$ e $\hat{8}$	<i>Alternos externos</i>
		$\hat{3}$ e $\hat{6}$ $\hat{4}$ e $\hat{5}$	<i>Colaterais internos</i>	$\hat{3}$ e $\hat{5}$ $\hat{4}$ e $\hat{6}$	<i>Alternos internos</i>

As proposições 27ª, 28ª e 29ª de Euclides dizem respeito à paralelismo. Nas duas primeiras, o paralelismo é concluído como tese das proposições, enquanto na última, o paralelismo é hipótese. Vamos a elas:

Proposição 3.2 (Proposição I.27 - Livro 1 de “Os Elementos”) Se uma reta corta duas outras formando ângulos correspondentes congruentes, então as duas retas são paralelas.

Demonstração da Proposição 3.2.

Suponhamos que as retas r e s não sejam paralelas (estamos negando a tese - demonstração por absurdo). Logo, r e s encontram-se em um ponto P e temos um triângulo APB , conforme figura abaixo.



O ângulo \widehat{PBC} é externo ao triângulo PAB e possui a mesma medida α do ângulo interno \widehat{PAB} , pois, por hipótese, esses dois ângulos são correspondentes congruentes.

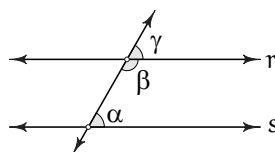
Temos assim uma contradição com o Teorema do Ângulo Externo (Proposição 3.1).

Essa contradição surgiu da suposição de que r e s não sejam paralelas. Logo, r e s são paralelas, como queríamos. \square

Proposição 3.3 (Proposição I.28 - Livro 1 de “Os Elementos”) Se uma reta corta duas outras retas r e s formando ângulos colaterais internos de medidas α e β tais que $\alpha + \beta$ é medida de um ângulo raso, então as retas r e s são paralelas.

Demonstração da Proposição 3.3.

Considere o ângulo de medida γ suplementar ao ângulo de medida β conforme a figura abaixo.



Os ângulos de medidas α e β são colaterais internos e, por hipótese, $\alpha + \beta$ é medida de um ângulo raso. Como $\beta + \gamma$ é, também, medida de um ângulo raso, temos $\alpha = \gamma$, ou seja, os ângulos correspondentes são congruentes.

Pela Proposição 3.2 temos r e s paralelas, como queríamos. \square

A 29ª proposição do primeiro livro de “Os Elementos” de Euclides é a primeira proposição na qual Euclides usa o seu 5º Postulado. Vamos enunciá-la e apresentar a demonstração de Euclides. É interessante notar que o 5º Postulado parece ter sido feito “sob medida” para essa demonstração.

Proposição 3.4 (Proposição I.29 - Livro 1 de “Os Elementos”: primeira proposição de Euclides que faz uso do 5º Postulado) Quando uma reta corta outras duas retas paralelas, então os ângulos correspondentes são congruentes.

Demonstração da Proposição 3.4.

Considere a nomenclatura da figura da demonstração da Proposição 3.3 acima. Por hipótese, r é paralela a s e devemos mostrar que $\alpha = \gamma$.

Como $\gamma + \beta$ é medida de um ângulo raso, temos

$$\alpha = \gamma \Leftrightarrow \alpha + \beta \text{ é medida de um ângulo raso.}$$

Logo, devemos mostrar que $\alpha + \beta$ é medida de um ângulo raso.

Suponhamos que $\alpha + \beta$ não seja medida de um ângulo raso (negação de um equivalente da tese). Sem perda de generalidade, suponhamos que $\alpha + \beta$ é menor do que a medida de um ângulo raso. Logo, pelo 5º Postulado de Euclides, r e s se encontram, ou seja, não são paralelas. Contradição com a hipótese assumida.

Logo, $\alpha + \beta$ é medida de um ângulo raso e, portanto, $\alpha = \gamma$, como queríamos. □

Observações.

(1) A contrapositiva do 5º Postulado é a 29ª proposição de Euclides (Proposição 3.4).

De fato, considerando a nomenclatura da figura da demonstração da Proposição 3.3 acima e que um ângulo raso mede π rad:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad \text{5º Postulado: } \alpha + \beta \neq \pi \Rightarrow r \not\parallel s. \\ \bullet \quad \text{Contrapositiva do 5º Postulado: } r \parallel s \Rightarrow \alpha + \beta = \pi. \\ \bullet \quad \text{29ª proposição de Euclides: } r \parallel s \Rightarrow \alpha = \gamma. \end{array} \right.$$

Mas, como já vimos, $\alpha = \gamma \Leftrightarrow \alpha + \beta = \pi$.

Além disso, do fato de a contrapositiva de uma proposição ser equivalente à própria proposição, concluímos que o 5º Postulado de Euclides é **equivalente** à sua 29ª proposição. Como a hipótese da 29ª proposição envolve retas paralelas, foi natural chamar o problema de tentar-se demonstrar o 5º Postulado a partir dos demais de “Problema das Paralelas”.

(2) A recíproca do 5º Postulado é a contrapositiva da 27ª proposição de Euclides (Proposição 3.2).

De fato, com a mesma nomenclatura acima:

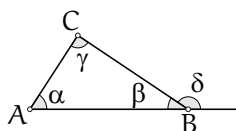
$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad \text{Recíproca do 5º Postulado: } r \not\parallel s \Rightarrow \alpha + \beta \neq \pi. \\ \bullet \quad \text{27ª proposição de Euclides: } \alpha + \beta = \pi \Rightarrow r \parallel s \\ \bullet \quad \text{Contrapositiva da 27ª proposição de Euclides: } r \not\parallel s \Rightarrow \alpha + \beta \neq \pi. \end{array} \right.$$

Deste modo, concluímos que a recíproca do 5º Postulado de Euclides é verdadeira e é **equivalente** à sua 27ª proposição.

Proposição 3.5 Se a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é π rad, então a medida de um ângulo externo de qualquer triângulo é igual a soma das medidas dos ângulos internos que não lhe são adjacentes.

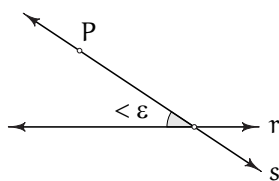
Demonstração da Proposição 3.5.

Seja ABC um triângulo cuja soma das medidas dos ângulos internos seja π rad e consideremos a nomenclatura apresentada na figura abaixo.



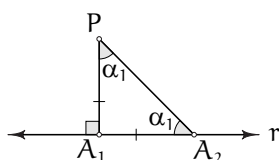
Logo, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ e $\beta + \delta = \pi$, ou seja, $\alpha + \beta + \gamma = \beta + \delta$.
Concluímos, portanto, que $\alpha + \gamma = \delta$, como queríamos. □

Proposição 3.6 Se a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é π rad, r é uma reta, P um ponto fora de r e $\epsilon > 0$, então pode-se traçar uma reta s por P que forma ângulo com r cuja medida é menor do que ϵ .



Demonstração da Proposição 3.6.

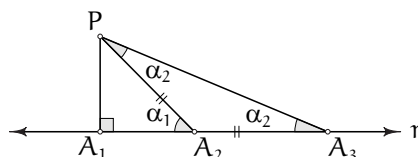
Sejam P , r e $\epsilon > 0$ conforme a hipótese. Seja A_1 o pé da perpendicular baixada por P em r . Seja $A_2 \in r$ tal que PA_1A_2 seja um triângulo retângulo isósceles.



Como estamos assumindo que qualquer triângulo possui soma das medidas dos ângulos internos igual a π rad, temos a Proposição 3.5 verdadeira. Logo,

$$\alpha_1 + \alpha_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{2^2}.$$

Seja $A_3 \in r$ tal que PA_2A_3 seja um triângulo isósceles.

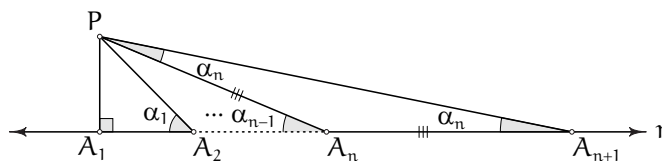


Novamente pela Proposição 3.5,

$$\alpha_2 + \alpha_2 = \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{\alpha_1}{2} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{\pi}{2^3}.$$

Procedendo de modo análogo com $A_4, A_5, \dots, A_n, A_{n+1} \in r$, chegamos ao triângulo isósceles PA_nA_{n+1} tal que

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$



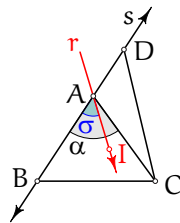
Tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\pi}{2^{n+1}} < \epsilon$, a reta s que passa por P e A_{n+1} forma ângulo com r cuja medida é menor do que $\epsilon > 0$, como queríamos. □

Proposição 3.7 Sejam ABC um triângulo e r reta que passa por A e por um ponto interior ao triângulo ABC . Então, a reta r intersecta o lado BC do triângulo.

Demonstração da Proposição 3.7.

Observemos que r não pode intersectar AB ou AC em outro ponto distinto de A pois, caso contrário, r deveria conter AB ou AC (dois pontos distintos determinam uma única reta) e, portanto, r não teria um ponto I no interior do triângulo ABC .

Sejam s a reta suporte de AB e $D \in s$ de tal modo que A esteja entre B e D (figura abaixo).



Chamando de σ a medida do ângulo \widehat{IAB} e de α a medida do ângulo interno \widehat{A} do triângulo ABC, da hipótese segue que $\sigma < \alpha$, o que significa que a reta r não possui pontos interiores ao triângulo DAC e, portanto, r não intersecta DC.

A reta r intersecta o triângulo DBC no ponto $A \in BD$. Pelo Axioma de Pasch, r deve intersectar BC ou DC. Concluimos assim, que r intersecta BC, como queríamos. \square

A proposição abaixo é clássica nos textos de Geometria Euclidiana Plana e não transcrevemos sua demonstração aqui. O leitor interessado poderá encontrá-la, por exemplo, na referência [2] nas páginas 93 e 94.

Antes porém, recordemos a definição de semelhança entre triângulos.

O triângulo ABC é *semelhante* ao triângulo A'B'C' quando existir uma correspondência biunívoca entre os vértices, digamos

$$\begin{cases} A \longleftrightarrow A' \\ B \longleftrightarrow B' \\ C \longleftrightarrow C' \end{cases}$$

tal que $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}; \widehat{B} \equiv \widehat{B'}; \widehat{C} \equiv \widehat{C'}$ e $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{CB}{C'B'}$.

Proposição 3.8 Se o 5º. Postulado de Euclides é assumido como verdadeiro e os triângulos ABC e EFG são tais que $\widehat{A} \equiv \widehat{E}$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{F}$, então os triângulos ABC e EFG são semelhantes.

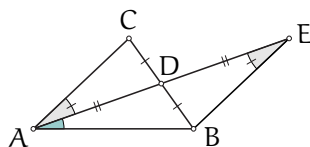
As próximas cinco proposições podem ser facilmente provadas se considerarmos o 5º Postulado. Entretanto, as **demonstrações** aqui apresentadas são devidas a Legendre e **não fazem uso do 5º Postulado de Euclides**.

Proposição 3.9 Dado um triângulo ABC, existe um triângulo A'B'C' satisfazendo:

- (1) A soma das medidas dos ângulos internos de A'B'C' é igual à soma das medidas dos ângulos internos de ABC;
- (2) O triângulo A'B'C' possui um ângulo menor do que ou igual à metade do menor ângulo do triângulo ABC.

Demonstração da Proposição 3.9.

Dado o triângulo ABC, suponhamos que o ângulo \widehat{A} é o (ou um) menor dos três ângulos.



Seja D o ponto médio do segmento BC. Sobre a semirreta de origem A passando por D, marquemos o ponto $E \neq A$ tal que $AD \equiv DE$. Os triângulos ADC e EDB são, conseqüentemente, congruentes pelo caso LAL. Logo, a soma dos ângulos do triângulo ABE é igual à soma dos ângulos do triângulo ABC, provando assim o item (1), se considerarmos $ABE = A'B'C'$.

Agora, vemos que a soma dos ângulos \widehat{BAD} e \widehat{DEB} é igual ao ângulo \widehat{A} do triângulo ABC. Portanto, o novo triângulo ABE possui um ângulo de medida θ satisfazendo $\theta \leq \frac{\widehat{A}}{2}$, verificando-se assim o item (2). \square

Devido ao uso da próxima proposição em diversas situações e, para referência futura, vamos chamá-la de “1ª proposição de Legendre”. Enfatizamos que o resultado já era, naturalmente, conhecido da Geometria Euclidiana Plana, entretanto, o mérito de Legendre está justamente na demonstração isenta do 5º Postulado.

Proposição 3.10 (1ª proposição de Legendre) A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor do que ou igual a um ângulo raso.

Demonstração da Proposição 3.10.

Assumamos a Proposição 3.9, que não depende do 5º Postulado.

Suponhamos a existência de um triângulo cuja soma das medidas dos ângulos seja $\pi + \alpha$ rad. Seja, então, θ_0 a medida do (ou de um) menor ângulo deste triângulo. Aplicando a Proposição 3.9 obtemos um novo triângulo, com mesma soma dos ângulos e cujo menor ângulo, de medida θ_1 , satisfaz $\theta_1 \leq \frac{\theta_0}{2}$.

Aplicando novamente a Proposição 3.9 a este triângulo, conclui-se a existência de um novo triângulo, com mesma soma dos ângulos e menor ângulo, de medida θ_2 , satisfazendo $\theta_2 \leq \frac{\theta_0}{4}$.

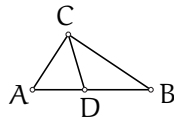
Aplicando a Proposição 3.9 n vezes, chegamos a um triângulo cuja soma das medidas dos ângulos ainda é $\pi + \alpha$ rad e cujo menor ângulo, de medida θ_n , satisfaz $\theta_n \leq \frac{\theta_0}{2^n}$.

Escolhendo-se n suficientemente grande, temos $\theta_n \leq \alpha$. Mas, neste caso, a medida da soma dos outros dois ângulos seria maior do que π rad, o que contradiz o Teorema do Ângulo Externo (Proposição 3.1). Logo, o triângulo ABC não pode ter soma das medidas dos ângulos igual a $\pi + \alpha$ rad, como queríamos. □

Proposição 3.11 Se a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a π rad, o mesmo é verdade para todos os triângulos obtidos deste, traçando-se um segmento ligando um de seus vértices ao lado oposto.

Demonstração da Proposição 3.11.

Dado um triângulo ABC, consideremos um ponto qualquer D do lado AB e tracemos CD.

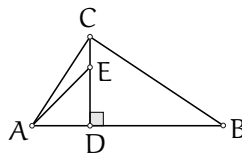


Se a soma das medidas dos ângulos do triângulo ABC é π rad, então, a soma das medidas dos ângulos dos triângulos ADC e DCB é $\hat{A} + \hat{ACB} + \hat{B} + \pi = 2\pi$. Pela 1ª proposição de Legendre (Proposição 3.10), nenhum destes dois triângulos tem soma das medidas dos ângulos internos superior a π . Logo, cada um deles tem soma das medidas dos ângulos internos exatamente igual a π rad. □

Proposição 3.12 Se existe um triângulo cuja soma das medidas dos ângulos internos é igual a π rad, então pode-se construir um triângulo retângulo isósceles com soma das medidas dos ângulos internos igual a π rad e catetos maiores do que qualquer segmento dado.

Demonstração da Proposição 3.12.

Seja ABC o triângulo cuja soma das medidas dos ângulos internos é π . Suponhamos que este triângulo não seja um triângulo retângulo isósceles. Baixemos a altura do (ou de um) vértice com maior ângulo ao lado oposto. Suponhamos que seja CD esta altura (figura abaixo). Obtemos assim dois triângulos retângulos, cada um com soma das medidas dos ângulos igual a π rad, devido à Proposição 3.11.



Se nenhum destes dois triângulos for isósceles, escolhamos um deles, por exemplo, o triângulo ADC com ângulo reto em D. Verificamos qual dos catetos AD ou DC tem maior comprimento. Supondo que seja DC, tracemos um segmento ligando o vértice A a um ponto E do segmento DC, tal que $DA \equiv DE$.

Da Proposição 3.11, obtemos que o triângulo retângulo isósceles ADE tem soma das medidas dos ângulos internos igual a π rad.

Naturalmente, se ABC já for triângulo retângulo isósceles, não precisamos do procedimento descrito acima. Também não precisamos do procedimento para a obtenção do ponto E se ADC ou DCB for triângulo retângulo isósceles. De qualquer forma, a partir do triângulo ABC, chegamos à existência de um triângulo retângulo isósceles.

Dois desses triângulos retângulos isósceles, com soma de medidas dos ângulos igual a π , podem ser justapostos ao longo das hipotenusas, produzindo um quadrado. Quadrados podem ser empilhados, uns sobre os outros, de modo a produzir quadrados de lados arbitrariamente grandes. A diagonal de um deles o divide em dois triângulos retângulos isósceles cuja soma das medidas dos ângulos é π rad, concluindo assim a demonstração. \square

Com a mesma justificativa que utilizamos para chamar a Proposição 3.10 de “1ª proposição de Legendre”, vamos chamar a próxima proposição de “2ª proposição de Legendre”.

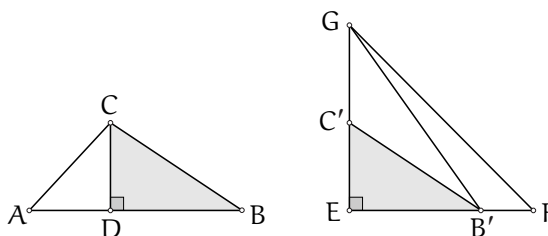
Proposição 3.13 (2ª proposição de Legendre) Se existe um triângulo cuja soma dos ângulos internos é igual a π rad, então a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a π rad.

Demonstração da Proposição 3.13.

Seja ABC um triângulo qualquer. Suponhamos que \hat{C} seja o (ou um) maior ângulo e tracemos a altura CD do triângulo ABC relativa ao vértice C. Consideremos o triângulo retângulo DBC.

Da hipótese e da Proposição 3.12 temos a existência de um triângulo retângulo isósceles EFG, cuja soma das medidas dos ângulos internos seja π rad, e de tal modo que seus catetos sejam maiores do que os catetos do triângulo DBC. Suponhamos que o ângulo reto esteja no vértice E.

Sejam B' em EF e C' em EG de tal modo que $EB' \equiv DB$ e $EC' \equiv DC$. Logo, pelo caso de congruência LAL temos $DBC \equiv EB'C'$.



Pela Proposição 3.11 temos que os triângulos $EB'G$ e $B'FG$ possuem somas das medidas dos ângulos internos igual a π rad.

Novamente pela Proposição 3.11 temos que os triângulos $EB'C'$ e $C'B'G$ possuem somas das medidas dos ângulos internos igual a π rad.

Da congruência de $EB'C'$ com DBC segue que a soma das medidas dos ângulos internos de DBC é π rad.

De modo totalmente análogo ao que fizemos até aqui, também concluímos que a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo ACD é π rad.

Sendo \hat{D} o ângulo reto nos triângulos ADC e DBC concluímos que a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo ABC é π rad, como queríamos. \square

3.2 Equivalentes ao 5º Postulado de Euclides

Existem várias proposições que são equivalentes ao 5º Postulado de Euclides e, portanto, são todas falsas em uma geometria onde este postulado (e somente ele) for falso. Identificar os principais equivalentes é bastante salutar para os estudos que apresentaremos nos próximos capítulos.

Nesta seção vamos demonstrar 4 dessas equivalências e enunciar outras 26, que são deixadas como parte de uma lista de exercícios propostos e resolvidos que apresentamos no final deste capítulo.

Como as demonstrações de equivalência envolvem um “se e somente se”, o 5º Postulado estará ora como hipótese, ora como tese. Quando ele estiver como tese, devemos ter o cuidado de utilizar nesta parte da demonstração apenas resultados matemáticos cujas provas podem ser feitas sem o uso do 5º Postulado (ou de um equivalente a ele) como, por exemplo, a 1ª e a 2ª proposições de Legendre (Proposições 3.10 e 3.13), a 27ª e a 28ª proposições de Euclides (Proposições 3.2 e 3.3) e o Teorema do Ângulo Externo (Proposição 3.1). Neste sentido, é sempre bom lembrar que resultados matemáticos como construções de perpendiculares e casos de congruência de triângulos não dependem do 5º Postulado. Vamos recordá-los:

Construção de perpendicular (2 casos):

- Dada uma reta r e um ponto $P \notin r$, existe e é única a reta s perpendicular a r passando por P .
- Dada uma reta r e um ponto $P \in r$, existe e é única a reta s perpendicular a r passando por P .

Casos de congruência de triângulos (5 casos):

- Caso LAL - lado, ângulo (entre os lados), lado; (este caso é um dos axiomas de Hilbert)
- Caso LLL - lado, lado, lado;
- Caso ALA - ângulo, lado (entre os ângulos), ângulo;
- Caso LAA₀ - lado, ângulo, ângulo oposto (ao lado);
- Caso “cateto-hipotenusa” (caso especial de congruência envolvendo exclusivamente triângulos retângulos).

Para o leitor interessado nas demonstrações dos resultados acima, sugerimos a referência [2].

Como já vimos, o 5º Postulado proposto por Euclides pode ser assim enunciado:

Postulado P5 - “Se uma reta, intersectando duas retas em um plano, forma ângulos interiores de um mesmo lado com soma menor que a de dois ângulos retos, então as duas retas, se prolongadas indefinidamente, irão se encontrar do lado cuja soma dos ângulos é menor do que a de dois ângulos retos.”

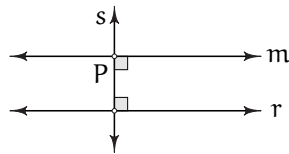
Demonstramos, a seguir, a equivalência entre quatro proposições, designadas por **P5.1**, **P5.2**, **P5.3** e **P5.4**, com o 5º Postulado de Euclides.

Proposição P5.1 - (Axioma de Playfair⁽¹⁾) “Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada”.

Demonstração da equivalência entre P5 e P5.1.

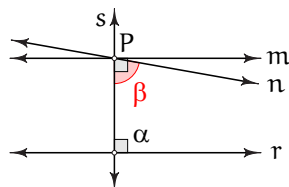
P5 ⇒ P5.1) Seja P um ponto e r uma reta tal que $P \notin r$.

Tracemos uma perpendicular s a r passando por P e tracemos uma perpendicular m a s passando por P , conforme figura abaixo.



Pela Proposição 3.3 temos m paralela a r e isso prova a existência da paralela m sem usar o **P5**.

Quanto à unicidade, suponhamos que existe n paralela a r passando por P e $n \neq m$, conforme figura abaixo.

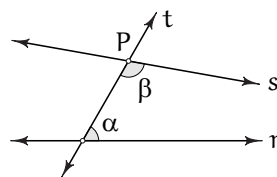


Logo, $\alpha + \beta$ não é medida de um ângulo raso.

Sem perda de generalidade, suponhamos que $\alpha + \beta$ é menor do que a medida de um ângulo raso. Pelo 5º Postulado de Euclides, n e r se encontram. Uma contradição com a hipótese de que n e r são paralelas.

Daí concluímos que n e m não podem ser distintas, ou seja, m é única.

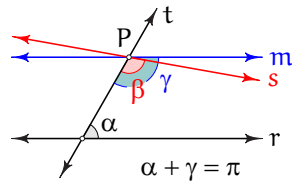
P5.1 ⇒ P5) Sejam as retas r e s cortadas por uma reta t de tal modo que as medidas dos ângulos colaterais internos possuam soma menor do que a de um ângulo raso. Seja $\{P\} = t \cap s$, conforme figura abaixo.



Devemos mostrar que r e s se encontram.

Consideremos uma reta m passando por P de tal modo que os ângulos colaterais internos somem um ângulo raso, ou seja, $\alpha + \gamma$ na figura abaixo é a medida de um ângulo raso.

¹ John Playfair, 1748-1819.



Pela Proposição 3.3 temos m paralela a r .
 Suponhamos que s seja paralela a r (negação da tese).
 Por **P5.1** temos a unicidade das paralelas, ou seja,

$$m = s \Rightarrow \gamma = \beta \Rightarrow \alpha + \gamma = \alpha + \beta$$

que é uma contradição com a hipótese de $\alpha + \beta$ ser menor do que a medida de um ângulo raso.
 Concluimos, então, que s não é paralela a r , como queríamos.

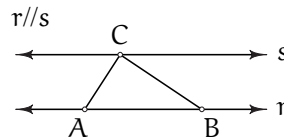
Assim, **P5** \Leftrightarrow **P5.1**. □

Proposição P5.2 - “A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso”.

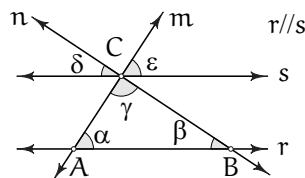
Mostremos que **P5.2** \Leftrightarrow **P5.1**. Como **P5.1** \Leftrightarrow **P5** temos **P5.2** \Leftrightarrow **P5**.

Demonstração da equivalência entre P5.2 e P5.1.

P5.1 \Rightarrow **P5.2**) Consideremos um triângulo ABC e a reta r contendo AB . Tracemos a reta s por C , paralela a r (a existência de s independe de **P5**).



Tomemos as retas m e n contendo AC e BC , conforme figura abaixo.



Pela Proposição 3.4 (que depende de **P5** e, portanto, depende de **P5.1**) temos $\alpha = \epsilon$ e $\beta = \delta$. Como $\gamma + \delta + \epsilon$ é medida de ângulo raso, temos que $\alpha + \beta + \gamma$ é medida de ângulo raso, como queríamos.

P5.2 \Rightarrow **P5.1**) Seja r uma reta e P um ponto fora de r . Devemos mostrar que existe uma única reta s paralela a r passando por P .

Sejam A o pé da perpendicular baixada por P em r e s a reta perpendicular a PA passando por P .

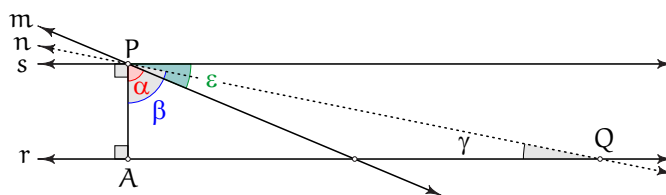
Observação. As construções das perpendiculares acima não dependem de **P5** \Leftrightarrow **P5.1**.

Pela Proposição 3.3 temos que r é paralela a s .

Seja $0 < \epsilon < \frac{\pi}{2}$. Seja m a reta que passa por P e forma ângulo de medida ϵ com s .

Sendo ϵ arbitrário, nosso objetivo é mostrar que $m \cap r \neq \emptyset$ e, portanto, s é a única paralela a r .

Pela Proposição 3.6, podemos traçar a reta n por P de tal modo que n intersecta r em um ponto Q formando ângulo de medida γ com r tal que $\gamma < \epsilon$. Seja β a medida do ângulo \widehat{QPA} .



Seja $\alpha = \frac{\pi}{2} - \epsilon$.

De **P5.2** aplicado ao triângulo PAQ temos $\beta + \gamma + \frac{\pi}{2} = \pi$, ou seja, $\beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$.

Como $\gamma < \varepsilon$ temos $\beta + \varepsilon > \frac{\pi}{2}$, ou seja, $\beta > \frac{\pi}{2} - \varepsilon$.

Logo, $\beta > \alpha$.

Deste modo, a reta m “entra” no triângulo PAQ pelo vértice P, ou seja, m possui um ponto no interior do triângulo PAQ.

Pela Proposição 3.7 temos que m intersecta AQ e, portanto, m intersecta r , ou seja, m não é paralela a r .

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos que s é a única reta paralela a r passando por P, como queríamos. \square

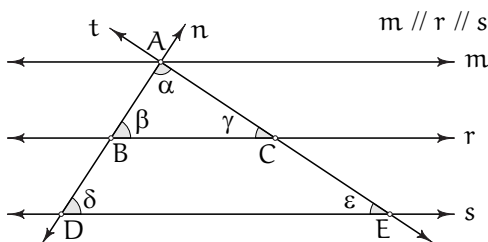
Proposição P5.3 - “Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes.”

Mostraremos que **P5** \Rightarrow **P5.3** e que **P5.3** \Rightarrow **P5.2**. Como **P5.2** \Leftrightarrow **P5**, teremos **P5.3** \Rightarrow **P5** e, portanto, **P5** \Leftrightarrow **P5.3**.

Demonstração das implicações P5 \Rightarrow P5.3 e P5.3 \Rightarrow P5.2.

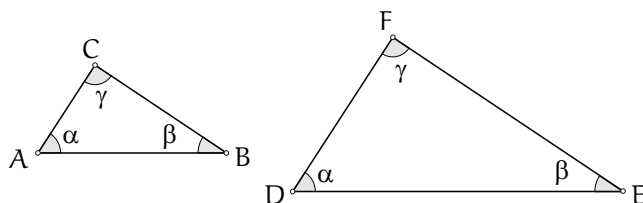
P5 \Rightarrow **P5.3**) Precisamos construir um par de triângulos semelhantes e não congruentes.

Sejam m, r, s retas duas a duas paralelas e n, t retas transversais tais que $n \cap t \cap m = \{A\}$.

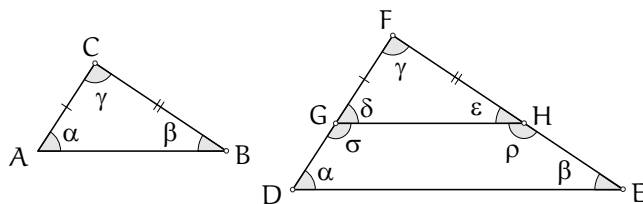


Pela Proposição 3.4 (que depende de **P5**) temos $\beta = \delta$ e $\gamma = \varepsilon$ (figura acima). Consequentemente, pela Proposição 3.8, o triângulo ABC é semelhante ao triângulo ADE mas, naturalmente, não congruentes.

P5.3 \Rightarrow **P5.2**) Sejam ABC e DEF triângulos semelhantes e não congruentes, com $\hat{A} \equiv \hat{D}$; $\hat{B} \equiv \hat{E}$ e $\hat{C} \equiv \hat{F}$. Suponhamos que $AC < DF$.



Sejam $G \in DF$ e $H \in EF$ tais que $FG \equiv CA$ e $FH \equiv CB$.



Pelo caso de congruência LAL, temos $GHE \equiv ABC$, logo, $\delta = \alpha$ e $\varepsilon = \beta$ (figura acima). Assim, $\alpha + \sigma + \rho + \beta = 2\pi$ (pois $\sigma + \delta + \varepsilon + \rho = 2\pi$).

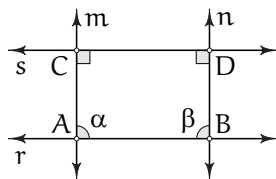
Dividindo o quadrilátero DEHG em dois triângulos, pela 1ª proposição de Legendre (Proposição 3.10) e $\alpha + \sigma + \rho + \beta = 2\pi$, temos que cada triângulo possui soma das medidas dos ângulos internos igual a π rad. Pela 2ª proposição de Legendre (Proposição 3.13) temos que todo triângulo possui soma das medidas dos ângulos internos igual a π rad, ou seja, vale **P5.2**. \square

Proposição P5.4 - “Existe um par de retas equidistantes.”

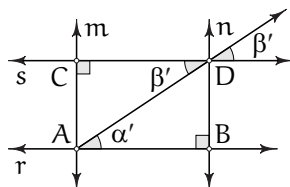
Iremos mostrar que **P5** \Rightarrow **P5.4** e que **P5.4** \Rightarrow **P5.2**. Como **P5.2** \Leftrightarrow **P5**, teremos **P5.4** \Rightarrow **P5**.

Demonstração das implicações P5 ⇒ P5.4 e P5.4 ⇒ P5.2.

P5 ⇒ P5.4) Sejam r e s retas paralelas. Sejam $A, B \in r$ e tomemos as perpendiculares m, n a s passando por A e B , respectivamente. Chamemos de C e D as intersecções de m e n com s , respectivamente.



Assumindo **P5**, a Proposição 3.4 é verdadeira e, portanto, $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ (figura acima).

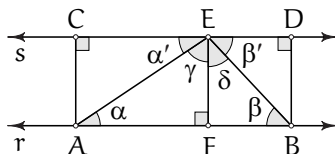


Também pela Proposição 3.4, temos $\alpha' = \beta'$ (figura acima) e, pelo caso de congruência LAA_0 (lado, ângulo, ângulo oposto), temos $ABD \equiv DCA$. Portanto, $AC \equiv BD$.

Como A e B são arbitrários, temos que r e s são equidistantes.

P5.4 ⇒ P5.2) Sejam r e s equidistantes.

Tomemos A e B em r e baixemos perpendiculares com pés C e D em s . Tomemos $E \in CD$ e baixemos uma perpendicular com pé F em r , conforme figura abaixo.



Como $CA \equiv EF$, temos a congruência $CAE \equiv FEA$ (caso “*cateto-hipotenusa*” de congruência de triângulos retângulos - e que não depende de **P5**). Logo, $\alpha = \alpha'$ (figura acima).

Analogamente, $EDB \equiv BFE$ e, portanto, $\beta = \beta'$.

Assim, de $\alpha' + \gamma + \delta + \beta' = \pi$, temos $\alpha + \gamma + \delta + \beta = \pi$, ou seja, o triângulo ABE possui soma das medidas dos ângulos internos igual a π rad.

Pela 2ª proposição de Legendre (Proposição 3.13), temos que todos os triângulos possuem soma das medidas dos ângulos internos igual a π , ou seja, vale **P5.2**. □

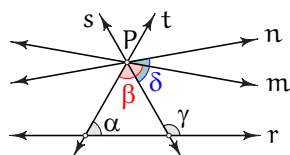
3.3 Outras Proposições Equivalentes ao 5º Postulado de Euclides

Nesta seção apresentamos diversas proposições que, assim como as quatro proposições da seção anterior, são equivalentes ao 5º Postulado de Euclides. As demonstrações são sugeridas como exercícios.

Recordemos que em uma geometria não euclidiana onde não vale o 5º Postulado de Euclides (somente ele), também não valem os equivalentes abaixo.

P5.5. Se a reta r é paralela à reta s e a reta s é paralela à reta t , então a reta r é paralela à reta t . (*transitividade do paralelismo*)

P5.6. Considere a figura abaixo.



Se $\alpha + \beta = \gamma + \delta = \pi$ rad, então $m = n$.

P5.7. A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é sempre a mesma.

P5.8. Dados quaisquer três pontos não colineares, existe um círculo passando por estes três pontos.

P5.9. Se três dos ângulos de um quadrilátero são retos, então o quarto ângulo também é reto.

P5.10. Uma reta que corta uma de duas paralelas, corta também a outra.

P5.11. Uma reta perpendicular a uma de duas paralelas é, também, perpendicular a outra.

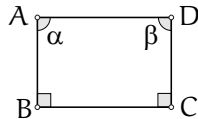
P5.12. Retas paralelas são equidistantes.

(Veremos adiante que Proclus usou este equivalente em sua “demonstração” de **P5**)

P5.13. Existem retângulos.

(retângulo: quadrilátero com quatro ângulos retos)

P5.14. Considere a figura abaixo.



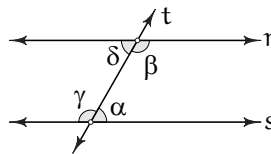
Se $AB \equiv CD$, então $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ rad.

P5.15. Um ângulo inscrito em um semicírculo é sempre reto.

P5.16. Lados opostos de um paralelogramo são congruentes.

(paralelogramo: quadrilátero com lados opostos paralelos)

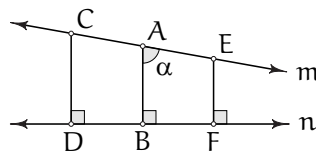
P5.17. Considere a figura abaixo.



Se r é paralela a s , então $\alpha + \beta = \gamma + \delta$.

(Veremos adiante que Ptolomeu usou este equivalente em sua “demonstração” de **P5**)

P5.18. Sejam m e n duas retas, $A \in m$ e $B \in n$ tais que $AB \perp n$ e forma um ângulo agudo com m . Então, as perpendiculares baixadas de m à reta n , do lado do ângulo agudo são menores do que AB e as que ficam do outro lado são maiores do que AB . Veja a figura abaixo.



(Veremos adiante que Nasiredin usou este equivalente em sua “demonstração” de **P5**)

P5.19. Dado um triângulo, é possível construir outro semelhante com lados arbitrariamente grandes.

(Veremos adiante que Wallis usou este equivalente em sua “demonstração” de **P5**)

P5.20. Por um ponto dentro de um ângulo menor que dois retos pode-se traçar uma reta que intesecta os dois lados desse ângulo.

(Veremos adiante que Legendre usou este equivalente em sua “demonstração” de **P5**)

P5.21. Em qualquer triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

(Teorema de Pitágoras)

P5.22. Existem duas retas e um número $\alpha > 0$ com a propriedade de que a distância de qualquer ponto da primeira à segunda é menor do que α .

P5.23. Quaisquer duas retas que não se encontram têm uma perpendicular em comum.

P5.24. As mediatrizes dos lados de um triângulo são concorrentes em um mesmo ponto.

P5.25. Existem quadrados.

(quadrado: retângulo com os quatro lados congruentes)

P5.26. Dois triângulos retângulos são semelhantes se um ângulo agudo de um for igual a um ângulo agudo do outro.

P5.27. As alturas de um triângulo são concorrentes em um mesmo ponto.

P5.28. Um quadrilátero pode ser inscrito em um círculo se, e somente se, possui um par de ângulos opostos suplementares.

P5.29. Se uma reta, paralela a um dos lados de um triângulo, corta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão.

P5.30. O segmento ligando os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem metade de seu comprimento.

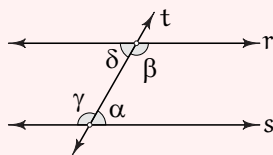
3.4 Precusores das Geometrias Não Euclidianas: tentando resolver o “Problema das Paralelas”

Vários matemáticos tentaram demonstrar o 5º Postulado de Euclides a partir dos quatro primeiros postulados. Nesta seção vamos apresentar em ordem cronológica o raciocínio desenvolvido por sete desses matemáticos. Conforme já vimos, no primeiro capítulo há uma pequena introdução histórica para cada um deles.

(1) Ptolomeu

O raciocínio de Ptolomeu⁽²⁾ foi o seguinte.

Sejam r e s retas paralelas e t transversal, Sejam α , β , γ e δ conforme figura abaixo.



Como r é paralela a s , temos $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ ⁽³⁾.

Logo, se $\alpha + \beta > \pi$ rad, então $\gamma + \delta > \pi$ rad. Contradição, pois $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$ rad.

Se $\alpha + \beta < \pi$ rad, então $\gamma + \delta < \pi$ rad. Contradição, pois $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$ rad.

Assim, $\alpha + \beta = \pi$ rad e, supostamente, provamos a Proposição 29 do primeiro livro de “Os Elementos” de Euclides.

Mas

$$\underbrace{(\text{r é paralela a s} \Rightarrow \alpha + \beta = \pi)}_{\text{Proposição 29 de “Os Elementos”}} \iff \underbrace{(\alpha + \beta \neq \pi \Rightarrow \text{r não é paralela a s})}_{\text{P5}}$$

o que prova **P5**.

(2) Proclus

O raciocínio de Proclus⁽⁴⁾ foi o seguinte.

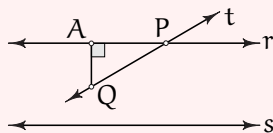
Primeiramente, ele demonstrou a seguinte proposição pensando não ter usado o **P5**.

“Se uma reta corta uma de duas paralelas, então corta a outra”⁽⁵⁾.

Demonstração (de Proclus).

De fato, sejam r reta paralela à reta s e t reta concorrente com r em P .

Seja $Q \in t$ na região entre r e s , conforme a figura abaixo e A o pé da perpendicular baixada de Q a r .



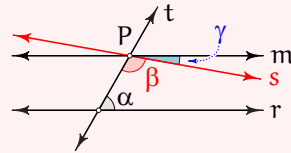
À medida que $Q \in t$ “se afasta” de P , a distância de Q a A aumenta, tornando-se maior do que qualquer valor pré-fixado⁽⁶⁾, inclusive, tornando-se maior do que a distância entre r e s ⁽⁷⁾, ou seja, $t \cap s \neq \emptyset$ e, portanto, t corta s . Isso prova a proposição acima.

Agora, sejam r e s cortadas por t de tal modo que a soma das medidas dos ângulos colaterais internos de um lado de t seja menor do que π rad. Seja m passando por P formando ângulo γ com s de tal modo que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

²Referência [3].

³Aqui Ptolomeu está usando, implicitamente, (e certamente sem perceber) a Proposição 29 do primeiro livro de “Os Elementos” de Euclides (Proposição 3.4 deste texto), que depende do 5º Postulado. Veja, também, o Exercício 3.19.

rad, conforme a figura abaixo.



Pela Proposição 28 do primeiro livro de “Os Elementos” (Proposição 3.3 deste texto) temos m paralela a r . Como s corta m em P , pela proposição acima provada, temos que $s \cap r \neq \emptyset$, ou seja, vale **P5**.

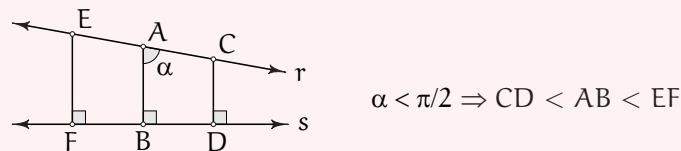
(3) Nasiredin

O raciocínio de Nasiredin⁽⁸⁾ foi o seguinte.

Considere o seguinte “axioma”⁽⁹⁾:

“Sejam r e s duas retas, $A \in r$ e B o pé da perpendicular baixada de A em s . Suponha ainda que AB não é perpendicular a r . Então, os segmentos perpendiculares a s baixados de r no lado do ângulo agudo entre AB e r são menores que AB e os do lado oposto são maiores que AB .”

Observação. O axioma acima é assumido no caso de $ABDC$ formar quadrilátero convexo conforme a figura abaixo.



Considere o quadrilátero $ABDC$ da figura acima e suponhamos que $AB \equiv CD$.

Assumindo o “axioma”, se $\alpha < \frac{\pi}{2}$ rad, então $AB > CD$, uma contradição. Analogamente, se $\alpha > \frac{\pi}{2}$ rad, então $AB < CD$, também uma contradição. Logo, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ rad.

De modo análogo, \hat{C} na figura acima deveria ser reto.

Assim, $ABDC$ é um retângulo (possui quatro ângulos retos) e, portanto, $ABD \equiv DCA$ (caso “cateto-hipotenusa” de congruência). Assim, existem triângulos cuja soma das medidas dos ângulos internos é π rad⁽¹⁰⁾, de onde concluímos **P5**.

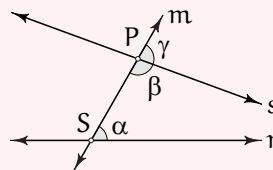
(4) Wallis

O raciocínio de Wallis foi o seguinte.

Considere o “axioma”⁽¹¹⁾:

“Dado um triângulo, é possível contruir outro semelhante a esse com lados arbitrariamente grandes.”

Considere a construção da figura abaixo, onde $\alpha + \beta < \pi$ rad.



Mostremos que r intersecta s .

⁴Referência [3].

⁵Na verdade, essa proposição é equivalente de **P5**. Veja, também, o Exercício 3.12.

⁶Essa proposição não depende de **P5** (será demonstrada quando estudarmos especificamente a Geometria Hiperbólica - Proposição 5.25) e foi simplesmente admitida por Proclus.

⁷Retas paralelas serem equidistantes é um equivalente de **P5**. Veja, também, o Exercício 3.14.

⁸Referência [3].

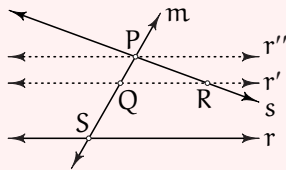
⁹Que é, na verdade, equivalente ao **P5**. Veja, também, o Exercício 3.20.

¹⁰Nasiredin precisaria demonstrar que a existência de um triângulo, cuja soma das medidas dos ângulos internos é π rad, acarreta que todos os triângulos possuem essa mesma propriedade (esta é 2ª proposição de Legendre - Proposição 3.13 deste texto).

Capítulo 3. O 5º Postulado de Euclides e o “Problema das Paralelas”

Observemos que $\alpha < \gamma$, visto que $\gamma + \beta = \pi$ rad. Logo, se deslocarmos a reta r ao longo de m mantendo o ângulo α rígido, podemos colocá-la passando por P inteiramente acima do ângulo β .

Nesse movimento, passamos por um ponto entre P e S formando um triângulo PQR , como na figura abaixo.

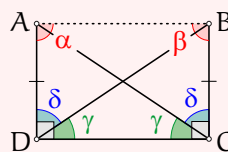
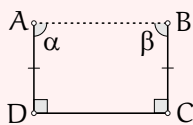


Pelo “axioma”, podemos construir um triângulo PST semelhante a PQR com lados correspondentes PQ e PS . Logo, $T \in r \cap s$, o que prova **P5**.

(5) Saccheri

Foi o primeiro a tentar provar o 5º Postulado substituindo-o por uma afirmação contraditória (demonstração por redução ao absurdo).

Para tanto, considerou um quadrilátero construído conforme a figura abaixo à esquerda.



Da figura acima à direita, temos $\alpha = \beta$.

De fato, $ADC \equiv BCD$ (caso de congruência LAL). Portanto, $\widehat{ACD} \equiv \widehat{BDC}$ e possuem medida γ na figura acima. Consequentemente, $\widehat{ADB} \equiv \widehat{BCA}$ e possuem medida $\delta = \frac{\pi}{2} - \gamma$. Logo, $ABC \equiv BAD$ (novamente, caso de congruência LAL), ou seja, $\alpha = \beta$.

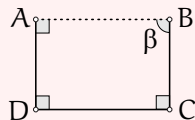
Considerando que a existência de um retângulo ($\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$) é um equivalente de **P5**⁽¹²⁾, Saccheri esperava que se considerasse $\alpha = \beta > \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = \beta < \frac{\pi}{2}$ (negação da existência de um retângulo e, portanto, negação de **P5**), poderia-se chegar a alguma contradição com algum dos quatro primeiros postulados provando assim que **P1, P2, P3, P4** \Rightarrow **P5**.

No 1º caso: se $\alpha = \beta > \frac{\pi}{2}$, Saccheri concluiu que uma reta não seria infinita (teria comprimento finito), contradizendo **P2**.

No 2º caso: se $\alpha = \beta < \frac{\pi}{2}$, Saccheri não conseguiu chegar a uma contradição com algum dos quatro primeiros postulados. No entanto, deduziu uma série de resultados que mais tarde se tornariam teoremas da primeira geometria não euclidiana.

(6) Lambert

Lambert fez um trabalho semelhante ao de Saccheri, considerando o quadrilátero com três ângulos retos da figura abaixo.



Ele procedeu de maneira análoga a Saccheri com relação ao ângulo de medida β , considerando as situações em que $\beta > \frac{\pi}{2}$ e em que $\beta < \frac{\pi}{2}$.

Também não chegou a contradição quando supôs $\beta < \frac{\pi}{2}$. No entanto, chegou a um dos principais teoremas da chamada *Geometria Hiperbólica*:

“A área de um triângulo hiperbólico é proporcional à diferença entre π e a soma das medidas em radianos de seus ângulos internos, ou seja,

$$\text{Área}(ABC) = k(\pi - (\alpha + \beta + \gamma)); \quad k > 0 \text{ constante,}$$

sendo α , β e γ as medidas em radianos dos ângulos internos do triângulo ABC .”

¹¹Que é, na verdade, equivalente ao **P5**. Veja, também, o Exercício 3.21.

¹²Veja o Exercício 3.15.

(7) *Legendre*

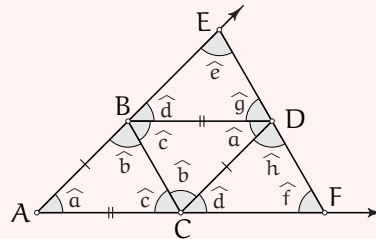
A tentativa de provar **P5** de Legendre também foi por redução ao absurdo. Para tanto, ele considerou a Proposição 3.10 (que estamos chamando de 1ª proposição de Legendre) cuja demonstração não depende de **P5**:

“A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor do que ou igual a π rad”.

Como **P5** \Leftrightarrow **P5.2**, negar **P5** significa admitir a existência de um triângulo cuja soma dos ângulos internos é menor do que π rad (maior do que π rad não ocorre devido à proposição acima).

Seja ABC triângulo com soma das medidas dos ângulos internos igual a $\pi - \alpha$ rad, sendo $0 < \alpha \leq \pi$ (demonstração por absurdo). Suponha que \hat{A} é um menor ângulo de ABC⁽¹³⁾.

Sobre o lado BC construa um triângulo BCD congruente a ABC de modo que $\hat{D} \equiv \hat{A}$; $\hat{A}\hat{B}\hat{C} \equiv \hat{D}\hat{C}\hat{B}$ e $\hat{A}\hat{C}\hat{B} \equiv \hat{D}\hat{B}\hat{C}$.



Por D trace uma reta que interseccione o ângulo $\hat{B}\hat{A}\hat{C}$ em E e F, como na figura acima⁽¹⁴⁾.

Pela Proposição 3.10, temos que a soma dos ângulos de AEF é menor do que ou igual a $\pi - 2\alpha$ rad.

De fato, seguindo a nomenclatura da figura:

$$\hat{e} + \hat{d} + \hat{g} \leq \pi \tag{1}$$

$$\hat{h} + \hat{d} + \hat{f} \leq \pi \tag{2}$$

$$\hat{b} + \hat{d} + \hat{c} = \pi \tag{3}$$

$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = \pi - \alpha \tag{4}$$

$$\hat{g} + \hat{a} + \hat{h} = \pi \tag{5}$$

Assim, somando (3) e (5):

$$\hat{b} + \hat{d} + \hat{c} + \hat{g} + \hat{a} + \hat{h} = 2\pi \tag{6}$$

Substituindo (4) em (6) temos:

$$\hat{d} + \hat{g} + \hat{h} = \pi + \alpha \tag{7}$$

Somando (1), (2) e (5) temos:

$$\hat{a} + \hat{e} + \hat{f} + 2(\hat{g} + \hat{h} + \hat{d}) \leq 3\pi \tag{8}$$

Substituindo (7) em (8) temos:

$$\hat{a} + \hat{e} + \hat{f} + 2(\pi + \alpha) \leq 3\pi \Rightarrow \hat{a} + \hat{e} + \hat{f} \leq \pi - 2\alpha$$

Repetindo o raciocínio acima partindo do triângulo AEF, damos início à construção de uma sequência de triângulos cuja soma dos ângulos internos forma a sequência real

$$(\pi - 2^n \alpha)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Para $n > \log_2 \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)$ temos:

$$2^n > 2^{\log_2 \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)} \Rightarrow 2^n > \frac{\pi}{\alpha} \Rightarrow \pi - 2^n \alpha < 0,$$

o que é impossível pois $\pi - 2^n \alpha$ é limitante superior da soma de medidas positivas de ângulos internos de triângulo e, portanto, trata-se de um número real positivo. Portanto, uma contradição.

Desta forma, Legendre concluiu que $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = \pi$ e, portanto, vale **P5.2**.

¹³Considerando o ângulo \hat{A} como sendo um menor ângulo, então este ângulo deverá ser, necessariamente, menor do que $\frac{\pi}{3}$ rad ($\frac{2}{3}$ de um ângulo reto).

¹⁴A existência de uma reta que intersecciona os lados de \hat{A} e passe por D, é equivalente ao **P5**:

“Dado um ângulo não raso e um ponto no seu interior, é possível passar uma reta pelo ponto que intersecciona os dois lados do ângulo”. Veja, também, o Exercício 3.22.



Seção de Exercícios Propostos:

O 5º Postulado de Euclides e o “Problema das Paralelas”

Os exercícios indicados com (*) apresentam um nível de dificuldade um pouco maior quando comparados com os demais exercícios.

Nos exercícios envolvendo demonstrações de equivalências com o P5, certifique-se de que, quando for utilizar uma proposição X equivalente do P5 como hipótese na resolução de um exercício, a equivalência $X \Leftrightarrow P5$ deve ter sido demonstrada previamente. Cuidado com raciocínios cíclicos como: usar a equivalência $Y \Leftrightarrow P5$ para demonstrar $Z \Leftrightarrow P5$ e usar $Z \Leftrightarrow P5$ para demonstrar $Y \Leftrightarrow P5$. Isto não é válido do ponto de vista lógico.

Exercício 3.1 Demonstre a existência de paralelas sem utilizar, direta ou indiretamente, o 5º Postulado de Euclides: “Por um ponto fora de uma reta sempre passa uma reta que não intersecta a reta dada, ou seja, se $P \notin r$, então $\exists s$ tal que $P \in s$ e $s \parallel r$ ”.

Observação: A existência de s não depende de P5 mas a unicidade de s depende de P5.

Exercício 3.2 Demonstre sem utilizar, direta ou indiretamente, o 5º Postulado de Euclides que: “Duas retas são paralelas se possuem uma perpendicular em comum”.

Exercício 3.3 Demonstre sem utilizar, direta ou indiretamente, o 5º Postulado de Euclides que: “Existem triângulos congruentes”.

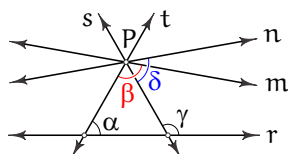
Exercício 3.4 Demonstre sem utilizar, direta ou indiretamente, o 5º Postulado de Euclides que: “No máximo um ângulo em um triângulo pode ser obtuso”.

Exercício 3.5 Demonstre sem utilizar, direta ou indiretamente, o 5º Postulado de Euclides que: “Existem triângulos equiláteros”.

Exercício 3.6 Demonstre sem utilizar, direta ou indiretamente, o 5º Postulado de Euclides que: “Existe um quadrilátero com três ângulos retos”.

Exercício 3.7 Prove a equivalência entre o P5 - 5º Postulado de Euclides - e a transitividade do paralelismo: P5.5. “Se a reta r é paralela à reta s e a reta s é paralela à reta t, então a reta r é paralela à reta t”.

Exercício 3.8 Prove a equivalência entre o P5 - 5º Postulado de Euclides - e a proposição: P5.6. “Considere a figura abaixo.



Se $\alpha + \beta = \gamma + \delta = \pi$ rad, então $m = n$ ”.

Exercício 3.9 Prove a equivalência entre o P5 - 5º Postulado de Euclides - e a proposição: P5.7. “A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é sempre a mesma”.

Exercício 3.10 (*) Prove a equivalência entre o P5 - 5º Postulado de Euclides - e a proposição: P5.8. “Dados quaisquer três pontos não colineares, existe um círculo passando por estes três pontos”.

Exercício 3.11 Prove a equivalência entre o P5 - 5º Postulado de Euclides - e a proposição: P5.9. “Se três dos ângulos de um quadrilátero são retos, então o quarto ângulo também é reto”.

Exercício 3.12 Prove a equivalência entre o P5 - 5º Postulado de Euclides - e a proposição: P5.10. “Uma reta que intersecta uma de duas paralelas, intersecta também a outra”.

Exercício 3.13 Prove a equivalência entre o P5 - 5º Postulado de Euclides - e a proposição: P5.11. “Uma reta perpendicular a uma de duas paralelas é, também, perpendicular a outra”.

Exercício 3.14 Prove a equivalência entre o **P5** - 5º Postulado de Euclides - e a proposição:

P5.12. “Retas paralelas são equidistantes”.

(Vimos que Proclus usou este equivalente em sua “demonstração” de **P5**)

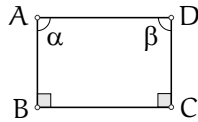
Exercício 3.15 Prove a equivalência entre o **P5** - 5º Postulado de Euclides - e a proposição:

P5.13. “Existem retângulos”.

(retângulo: quadrilátero com quatro ângulos retos)

Exercício 3.16 Prove a equivalência entre o **P5** - 5º Postulado de Euclides - e a proposição:

P5.14. “Considere a figura abaixo.



Se $AB \equiv CD$, então $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ rad”.

Exercício 3.17 Prove a equivalência entre o **P5** - 5º Postulado de Euclides - e a proposição:

P5.15. “Um ângulo inscrito em um semicírculo é sempre reto”.

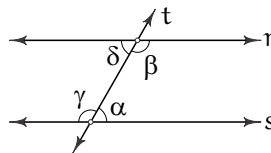
Exercício 3.18 Prove a equivalência entre o **P5** - 5º Postulado de Euclides - e a proposição:

P5.16. “Lados opostos de um paralelogramo são congruentes”.

(paralelogramo: quadrilátero com lados opostos paralelos)

Exercício 3.19 Prove a equivalência entre o **P5** - 5º Postulado de Euclides - e a proposição:

P5.17. “Considere a figura abaixo.

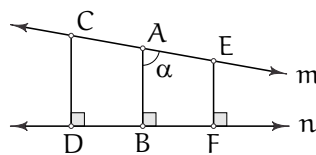


Se r é paralela a s, então $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ ”.

(Vimos que Ptolomeu usou este equivalente em sua “demonstração” de **P5**)

Exercício 3.20 (*) Prove a equivalência entre o **P5** - 5º Postulado de Euclides - e a proposição:

P5.18. “Sejam m e n duas retas, $A \in m$ e $B \in n$ tais que $AB \perp n$ e AB forma um ângulo agudo com m. Sejam $C, E \in m$ e $D, F \in n$ tais que $CD \perp n$ e $EF \perp n$ com EF do lado do ângulo agudo e CD do lado oposto. Suponhamos ainda que FECD forme um quadrilátero convexo. Então, $CD > AB > EF$ ”.



(Vimos que Nasiredin usou este equivalente em sua “demonstração” de **P5**)

Exercício 3.21 Prove a equivalência entre o **P5** - 5º Postulado de Euclides - e a proposição:

P5.19. “Dado um triângulo, é possível construir outro semelhante com lados arbitrariamente grandes”.

(Vimos que John Wallis usou este equivalente em sua “demonstração” de **P5**)

Exercício 3.22 (*) Prove a equivalência entre o **P5** - 5º Postulado de Euclides - e a proposição:

P5.20. “Por um ponto dentro de um ângulo menor que dois retos pode-se traçar uma reta que intesecta os dois lados desse ângulo”.

(Vimos que Legendre usou este equivalente em sua “demonstração” de **P5**)

Exercício 3.23 (*) Prove a equivalência entre o **P5** - 5º Postulado de Euclides - e o Teorema de Pitágoras:

P5.21. “Em qualquer triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos”.

Exercício 3.24 (*) Prove a equivalência entre o **P5** - 5º Postulado de Euclides - e a proposição:

P5.22. “Existem duas retas e um número $\alpha > 0$ com a propriedade de que a distância de qualquer ponto da primeira à segunda é menor do que α ”.

Capítulo 3. O 5º Postulado de Euclides e o “Problema das Paralelas”

Exercício 3.25 (*) Prove a equivalência entre o **P5** - 5º Postulado de Euclides - e a proposição:

P5.23. “Quaisquer duas retas que não se encontram têm uma perpendicular em comum”.

Exercício 3.26 Prove a equivalência entre o **P5** - 5º Postulado de Euclides - e a proposição:

P5.24. “As mediatrizes dos lados de um triângulo são concorrentes em um mesmo ponto”.

Exercício 3.27 Prove a equivalência entre o **P5** - 5º Postulado de Euclides - e a proposição:

P5.25. “Existem quadrados”.

(quadrado: retângulo com os quatro lados congruentes)

Exercício 3.28 Prove a equivalência entre o **P5** - 5º Postulado de Euclides - e a proposição:

P5.26. “Se em dois triângulos retângulos um ângulo agudo de um for congruente a um ângulo agudo do outro, então esses triângulos são semelhantes”.

Exercício 3.29 (*) Prove a equivalência entre o **P5** - 5º Postulado de Euclides - e a proposição:

P5.27. “As alturas de um triângulo são concorrentes”.

Exercício 3.30 Prove a equivalência entre o **P5** - 5º Postulado de Euclides - e a proposição:

P5.28. “Um quadrilátero pode ser inscrito em um círculo se, e somente se, possui um par de ângulos opostos suplementares”.

Exercício 3.31 Prove a equivalência entre o **P5** - 5º Postulado de Euclides - e a proposição:

P5.29. “Se uma reta, paralela a um dos lados de um triângulo, corta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão”.

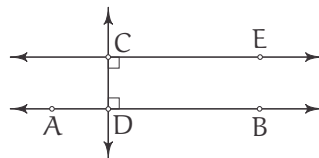
Exercício 3.32 Prove a equivalência entre a proposição abaixo e o **P5** - 5º Postulado de Euclides - e a proposição:

P5.30. “O segmento ligando os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem metade de seu comprimento”.

Exercício 3.33 Acompanhe o raciocínio:

“Demonstração” do Axioma de Playfair:

“Seja uma reta \overleftrightarrow{AB} e um ponto C exterior a essa reta. É necessário demonstrar que pelo ponto C pode-se traçar uma única paralela à reta \overleftrightarrow{AB} . Apliquemos um procedimento bem conhecido e que não depende do Quinto Postulado: pelo ponto C traçamos a perpendicular \overleftrightarrow{CD} à reta \overleftrightarrow{AB} (veja a figura) e, também pelo ponto C , traçamos a perpendicular \overleftrightarrow{CE} à reta \overleftrightarrow{CD} . Em virtude do bem conhecido Teorema do Ângulo Externo (que não depende do 5º Postulado), \overleftrightarrow{CE} é paralela a \overleftrightarrow{AB} . Mas por um ponto só se pode traçar uma única perpendicular a uma reta, e por um ponto pertencente a uma reta só se pode traçar uma única perpendicular a essa reta (essas duas proposições não dependem do Quinto Postulado!). Então a reta \overleftrightarrow{CE} assim obtida é única”.



Observe que nos argumentos acima, não se usou o 5º Postulado de Euclides ou qualquer um de seus equivalentes. Onde está o **ERRO** nessa “demonstração”? Justifique.

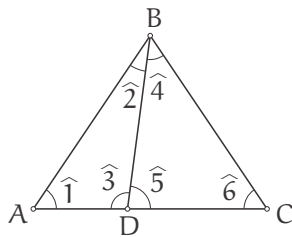
Exercício 3.34 Acompanhe o raciocínio:

Sabemos que as duas “Proposições de Legendre” não dependem do 5º Postulado de Euclides:

- (1) A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é menor ou igual a 180° .
- (2) **Se existir** um triângulo cuja soma dos ângulos internos é 180° , então todos os triângulos terão essa mesma soma.

Faremos uma “demonstração” de que **existe um** triângulo cuja soma dos ângulos internos é igual a 180° “sem usar o 5º Postulado de Euclides ou qualquer um de seus equivalentes”:

“Já que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é menor ou igual a 180° (item (1) acima), consideremos um triângulo ABC que possua a maior soma de ângulos internos possível (se tiver mais de um, escolha um deles). Chamemos essa soma de ângulos internos de ABC de α . Dividamos esse triângulo em dois outros, conforme a figura abaixo:



Temos:

$$\hat{1} + \hat{2} + \hat{4} + \hat{6} = \alpha$$

$$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} \leq \alpha$$

$$\hat{4} + \hat{5} + \hat{6} \leq \alpha$$

Desta forma, $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} \leq 2\alpha$. Mas $\hat{3} + \hat{5} = 180^\circ$. Assim, $\hat{1} + \hat{2} + \hat{4} + \hat{6} + 180^\circ \leq 2\alpha$, ou seja, $\alpha + 180^\circ \leq 2\alpha$ o que implica $\alpha \geq 180^\circ$. Mas $\alpha \leq 180^\circ$ (item (1) acima). Logo, $\alpha = 180^\circ$, ou seja, o triângulo ABC possui soma dos ângulos internos igual a 180° . Pelo item (2) acima, temos que todos os triângulos possuem soma de ângulos internos igual a 180° . No entanto, essa última afirmação é um equivalente do 5º Postulado de Euclides. Conclusão: demonstramos o 5º Postulado de Euclides sem usar qualquer um de seus equivalentes.”

Existe um **ERRO** de raciocínio nessa “demonstração”. Encontre-o justificando sua resposta.



Capítulo 4

Modelos Euclidianos para as Geometrias Hiperbólica e Elíptica

Este capítulo foi baseado, principalmente, na referência [13].

Embora um estudo mais detalhado da chamada Geometria Hiperbólica Plana seja objeto dos Capítulos 5 e 6 seguintes, cremos que a introdução prévia de alguns modelos, ou seja, ambientes nos quais é possível visualizar construções geométricas envolvendo essa geometria, seja bastante útil. As construções geométricas advindas de demonstrações de teoremas que serão provados posteriormente poderão ser, em nossa opinião, melhor compreendidas nos modelos.

Nosso foco principal é a Geometria Hiperbólica Plana mas, neste capítulo, também vamos introduzir, de forma mais simplificada, alguns modelos para a chamada Geometria Elíptica Plana. Como citamos o sistema axiomático que rege essa geometria no Capítulo 2 e alguns comentários históricos no Capítulo 1, acreditamos que é bastante interessante o leitor conhecer os ambientes nos quais esses axiomas são realizados além, é claro, de comparar as principais diferenças “visuais” entre todos os modelos apresentados (sejam hiperbólicos ou elípticos).

Além disso, existem alguns programas computacionais envolvendo geometria dinâmica como, por exemplo, o *GeoGebra*, o *NonEuclid* e o *Cabri-Géomètre* (referências [12], [20] e [5], respectivamente), nos quais podemos trabalhar com alguns dos modelos que citamos, o que faz com que a compreensão acerca de tais teoremas seja consideravelmente melhorada.

O chamado *Modelo do Disco de Poincaré*, para a Geometria Hiperbólica Plana, será apresentado com um pouco mais de detalhes. Os demais modelos serão apresentados de forma resumida.

4.1 O Conceito de Modelo para uma Geometria

Na referência [2] o prof. João Lucas M. Barbosa estabelece um interessante paralelo entre conceitos primitivos, axiomas, teoremas e um jogo de damas. Embora seja algo que cause um certo incômodo em um primeiro estudo, não é possível definirmos tudo em uma teoria axiomática. Se quiséssemos definir rigorosamente *reta*, por exemplo, faríamos uso de termos que, por sua vez, precisariam ser definidos. Na definição desses termos, novos termos surgiriam e estes, por sua vez, precisariam também ser definidos. Cairíamos, fatalmente, em uma cadeia infinita de definições ou, então, em um ciclo vicioso ⁽¹⁾. Os conceitos primitivos são como as pedras de um jogo de damas. Ninguém as define rigorosamente, até porque uma pedra no jogo de damas pode ter formatos variados, além de ser totalmente inútil para o jogo tal tentativa de definição. O que importa são as regras do jogo e não como a pedra é representada. Essas regras são os axiomas. A partir delas deve-se deduzir o que se pode fazer (os teoremas!) e o que não se pode fazer durante o jogo.

Outro aspecto importante que devemos ressaltar é o *modelo* que utilizamos para representar os conceitos primitivos da geometria. Obviamente, estamos extremamente familiarizados em representar uma reta como uma “linha esticada” e um plano como uma “superfície esticada”. Mas uma reta não precisa ter necessariamente esse formato. De fato, em estudos mais avançados podemos provar que qualquer superfície que possa ser “planificada sem distorções” ⁽²⁾ serve como modelo de “plano” para a Geometria Euclidiana. Naturalmente, o formato das “retas” em tais superfícies pode ser extremamente variado. O que faz os *modelos usuais* de pontos, retas e planos da Geometria Euclidiana serem tão utilizados é a sua conveniência em relação às observações físicas que fazemos ao nosso redor.

¹Por exemplo, Euclides “definiu” *reta* como sendo *comprimento sem largura*. Mas o que são os termos *comprimento* e *largura*? Euclides também “definiu” *ponto* como sendo aquilo que *não tem partes*. Possivelmente ele foi influenciado pelo conceito (errôneo) de átomo de sua época, segundo o qual acreditavam ser a porção indivisível da matéria. Mas, e o que significa *não ter partes*?

²Superfícies *isométricas* ao plano usual. Como exemplos clássicos de superfícies que podem ser planificadas isometricamente no plano usual temos os cilindros e os cones de revolução. Notemos que as referidas planificações de cilindros e cones não cobrem todo o plano usual.

Capítulo 4. Modelos Euclidianos para as Geometrias Hiperbólica e Elíptica Planas

Nesse sentido, o estudo de geometrias não euclidianas pode ser muito interessante. Existem muitos modelos diferentes para tais geometrias e seu estudo liberta nossa mente do vício de achar que tudo ao nosso redor se adequa necessariamente aos *modelos usuais* da Geometria Euclidiana.

Vamos à definição formal de modelo para uma geometria:

Um **modelo** para um sistema axiomático de uma geometria é um conjunto no qual podemos representar os conceitos primitivos, e interpretar as relações primitivas, em relação aos quais os axiomas passam a ser afirmações aceitas ou provadas como verdadeiras. ⁽³⁾

Exemplo 4.1 (Modelo para a Geometria Euclidiana Plana) Toda a teoria de um texto de Geometria Euclidiana Plana está desenvolvida sobre um conjunto chamado *plano* (que é um conceito primitivo). Os elementos desse conjunto são os *pontos* (também conceito primitivo). Qualquer subconjunto de pontos do plano é chamado de *figura*. Um tipo de figura importante do plano é composto por *retas* (outro conceito primitivo).

Conforme já discutido acima, podemos adotar como *modelo de plano* uma “superfície esticada” não limitada em todas as direções. Estamos extremamente familiarizados com este tipo de modelo de plano, uma vez que uma folha de papel sobre uma mesa fornece o “material concreto” para esboçarmos figuras em pelo menos uma parte limitada do plano.

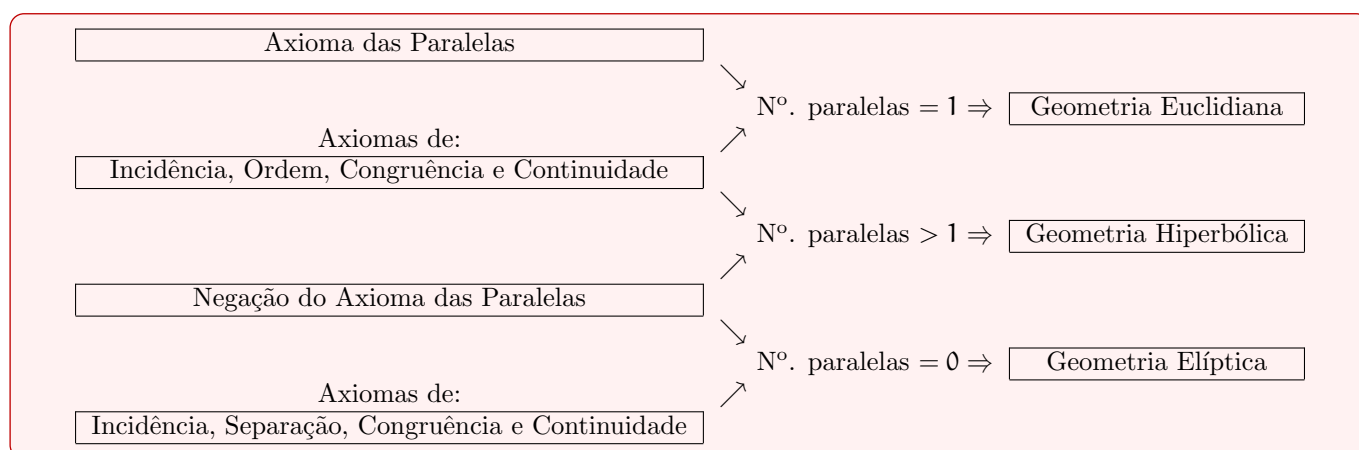
Um *modelo de reta* pode ser adotado como sendo uma “linha esticada” não limitada em ambos os sentidos no plano. Do ponto de vista concreto também estamos absolutamente familiarizados com esse modelo, pois parte de tal linha pode ser traçada sobre uma folha de papel com o auxílio de uma régua.

Por fim, um *modelo de ponto* pode ser adotado como sendo uma “partícula” no plano. Também do ponto de vista concreto temos muita familiaridade com pontos, uma vez que eles podem ser produzidos sobre uma folha de papel com o auxílio da ponta de um lápis ou caneta.

O *plano euclidiano* é um modelo para os sistemas axiomáticos de Euclides, Hilbert e Birkhoff, pois nele é possível representar fielmente ponto, reta e plano, bem como interpretar as noções de “estar entre”, “estar em” e “congruência”, de tal modo que todos os axiomas passam a ser afirmações aceitas como verdadeiras.

Vamos usar a existência de um modelo para o sistema axiomático para a Geometria Euclidiana e apresentar modelos para as chamadas *Geometria Hiperbólica* ⁽⁴⁾ e *Geometria Elíptica Planas*, que são geometrias nas quais não vale o 5º Postulado de Euclides e, portanto, não vale qualquer um de seus equivalentes.

Esquemáticamente podemos dispor os Axiomas de Hilbert, bem como a negação do Axioma das Paralelas, conforme quadro a seguir ⁽⁵⁾:



³Nesta definição, os axiomas devem ser provados se estivermos na seguinte situação:

Quando o conjunto que representa um modelo para a Geometria X for subconjunto de um modelo da Geometria Y, então os axiomas da Geometria X devem ser provados como teoremas da Geometria Y.

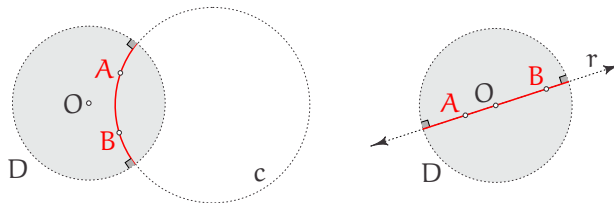
⁴Veremos no Capítulo 5 adiante o estudo detalhado da Geometria Hiperbólica Plana.

⁵Quadro extraído do artigo “COSTA, S. I. R. & SANTOS, S. A. “Geometrias Não-Euclidianas”. *Ciência Hoje*. Vol. 11, Nº. 65, agosto de 1990, pp. 14-23.” (Referência [7])

4.2 O Modelo do Disco de Poincaré para a Geometria Hiperbólica Plana

Fixemos um disco euclidiano aberto D de raio r ⁽⁶⁾, ou seja, sem o seu círculo de bordo. Portanto, estamos considerando apenas a região interior ao disco. Usando os axiomas e teoremas da Geometria Euclidiana podemos provar que:

(i) Se os pontos A , B e O não são colineares, sendo O o centro de D , então existe um único círculo euclidiano c que passa pelos pontos A e B e intersecta o bordo de D ortogonalmente ⁽⁷⁾, conforme ilustrado na figura abaixo à esquerda.



(ii) Se os pontos A , B e O são colineares, então existe uma única reta euclidiana r passando por eles. Essa reta é ortogonal ao bordo de D , conforme figura acima à direita.

Observação. Pode-se provar que a intersecção não vazia, em D , de dois arcos de círculos distintos ortogonais ao bordo de D , ocorre em um único ponto. Analogamente, a intersecção não vazia, em D , entre um arco de círculo ortogonal ao bordo de D e um diâmetro ⁽⁸⁾ de D , ou entre dois diâmetros de D , também ocorre em um único ponto.

(1) Os Conceitos Primitivos

Façamos as seguintes representações em D :

Pontos: Os *pontos hiperbólicos* são os “pontos euclidianos” de D .

Retas: As *retas hiperbólicas* são intersecções de D com seus diâmetros, ou intersecções de D com círculos ortogonais ao seu bordo.

Plano: O *plano hiperbólico* é o disco euclidiano aberto D . Isto significa que o bordo de D não faz parte do plano hiperbólico.

Com as representações dadas acima, juntamente com a observação prévia, concluímos que a intersecção não vazia de duas retas hiperbólicas distintas ocorre em apenas um único ponto, permitindo verificar dois dos Axiomas de Incidência de Hilbert, que diz que dois pontos distintos determinam uma única reta.

(2) As Relações Primitivas

A relação primitiva “*estar em*”: a noção de um ponto estar em uma reta (no sentido hiperbólico) coincide com a noção de “estar em” no sentido euclidiano.

A relação primitiva “*estar entre*”: a noção de um ponto estar entre outros dois pontos (no sentido hiperbólico) coincide com a noção de “estar entre” no sentido euclidiano.

Com essas interpretações, um *segmento hiperbólico* AB é composto por todos os pontos da reta hiperbólica \overleftrightarrow{AB} que estão entre A e B . Os pontos A e B são os *extremos* do segmento AB .

Um ponto O em uma reta hiperbólica a separa em dois subconjuntos disjuntos, cada qual, junto com o ponto O , é chamado de *semirreta hiperbólica*. O ponto O é chamado de *origem* de cada uma das semirretas.

Medindo Comprimentos:

Devido aos Axiomas de Ordem de Hilbert, uma reta deve ter comprimento infinito. Isto significa que distância euclidiana (ou métrica euclidiana) não pode ser utilizada em D , pois um arco de círculo, ou um diâmetro, possuem comprimentos euclidianos finitos. Deste modo, precisamos mudar a métrica em D , de tal modo que retas ou semirretas hiperbólicas possam ter comprimentos infinitos.

⁶Embora possamos construir modelos para a Geometria Hiperbólica Plana em discos de quaisquer raios, sempre que conveniente, vamos adotar o raio unitário ($r = 1$) para facilitar as fórmulas que serão trabalhadas adiante.

⁷Isso significa que as retas tangentes ao círculo que é bordo de D e ao círculo c , nos pontos de intersecção desses dois círculos, são perpendiculares.

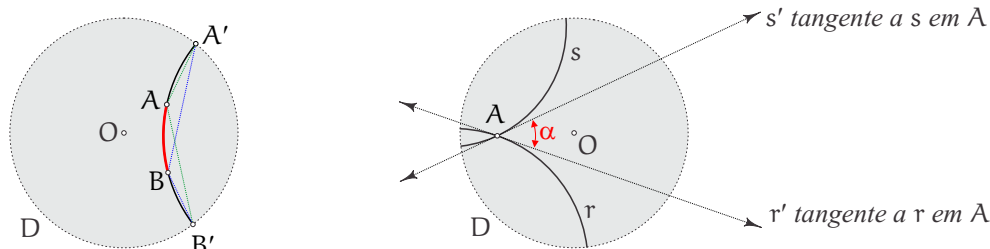
⁸Assim como a palavra *raio*, a palavra *diâmetro*, possui duas acepções: (i) um *segmento* AB com extremos em um círculo e ponto médio em seu centro ou; (ii) o *comprimento* do segmento AB . Neste último caso o diâmetro é $2r$, sendo r o raio do círculo.

Capítulo 4. Modelos Euclidianos para as Geometrias Hiperbólica e Elíptica Planas

Consideremos um *segmento hiperbólico* AB (veja figura abaixo à esquerda) e sejam A' e B' os pontos de D que são as “extremidades” da reta hiperbólica que contém AB . Definimos a **distância hiperbólica** $d_D(A, B)$ do ponto A ao ponto B no disco D , ou o *comprimento hiperbólico* do segmento (hiperbólico) AB no disco D , como sendo a aplicação $d_D : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d_D(A, B) = \ln \left(\frac{AB' \cdot BA'}{AA' \cdot BB'} \right),$$

sendo AB' , BA' , AA' e BB' comprimentos dos segmentos euclidianos AB' , BA' , AA' e BB' , respectivamente. O logaritmando acima é chamado de **razão cruzada** e observemos que ele é sempre maior do que ou igual a 1 (a igualdade ocorre quando $A = B$), fazendo com que $d_D(A, B) \geq 0$.



É possível mostrar que a aplicação d_D cumpre a definição de *distância* ou *métrica* em D ⁽⁹⁾.

Observação.

Notemos que, com a definição de distância em D , a reta, ou semirreta, hiperbólica tem comprimento infinito, pois à medida que A tende a A' ou B tende a B' , $d_D(A, B)$ tende a infinito. No contexto geral, o segmento hiperbólico ligando dois pontos A e B é a curva em D de menor comprimento hiperbólico ligando estes pontos. Prova-se que as retas hiperbólicas tais como as definimos acima fornecem segmentos hiperbólicos que cumprem essa condição de minimalidade de comprimento.

Em estudos mais aprofundados, as retas de um determinado modelo geométrico são chamadas de “retas geodésicas”, ou simplesmente de “geodésicas”, e os segmentos são chamados de “segmentos geodésicos”. A palavra “geodésica” remete aos círculos de raio máximo sobre a superfície terrestre que, com a métrica euclidiana induzida do espaço (euclidiano), cumprem a condição de minimalidade que citamos acima.

É muito importante ressaltar que a métrica está intimamente relacionada com o formato da geodésica. Geralmente, a partir de uma métrica dada em uma determinada superfície, é possível deduzir o formato das curvas que farão o papel das geodésicas. O contrário geralmente é mais difícil, ou seja: dado o formato da geodésica, às vezes é possível deduzir uma expressão para a métrica (tal como fizemos acima!).

Medindo Ângulos:

Ao contrário do comprimento hiperbólico em D , que difere do comprimento euclidiano, a *medida de ângulo hiperbólico* em D coincide com a medida de ângulo euclidiano. Isso significa que, se em D , duas retas hiperbólicas r e s são concorrentes em A , os quatro ângulos que elas formam possuem medidas que coincidem com as medidas dos ângulos formados pelas duas retas euclidianas r' e s' tangentes a r e s em A . Na figura acima à direita, α é a medida (em graus ou radianos) do ângulo formado pelas retas hiperbólicas r e s . Este ângulo coincide com a medida do ângulo formado pelas tangentes r' e s' ⁽¹⁰⁾.

A relação primitiva “congruência”: a noção de congruência com as medidas de segmentos e ângulos dadas acima (no sentido hiperbólico) coincide com a noção de “congruência” no sentido euclidiano.

⁹Em Matemática, *distância* ou *métrica* em um conjunto S é uma função $d : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$, indicada por $d(X, Y)$, que associa dois elementos X e Y de S a um número real $d = d(X, Y)$, cumprindo as seguintes condições:

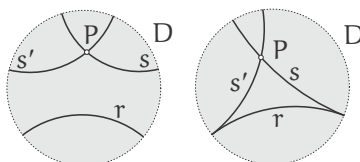
- (i) $d(X, Y) \geq 0$ e $d(X, Y) = 0 \iff X = Y$;
- (ii) $d(X, Y) = d(Y, X)$ (simetria);
- (iii) $d(X, Y) \geq d(X, Z) + d(Z, Y)$, $\forall Z \in S$ (desigualdade triangular).

¹⁰Um *ângulo hiperbólico* é definido exatamente como o ângulo euclidiano, ou seja é uma figura formada por duas semirretas hiperbólicas de mesma origem. Entretanto, o ângulo hiperbólico em D possui aspecto geométrico diferente do ângulo euclidiano, pois em D , o ângulo hiperbólico é formado por arcos de círculos euclidianos ortogonais ao seu bordo. O que ocorre em D é que as medidas dos ângulos (hiperbólicos e euclidianos-tangentes) coincidem.

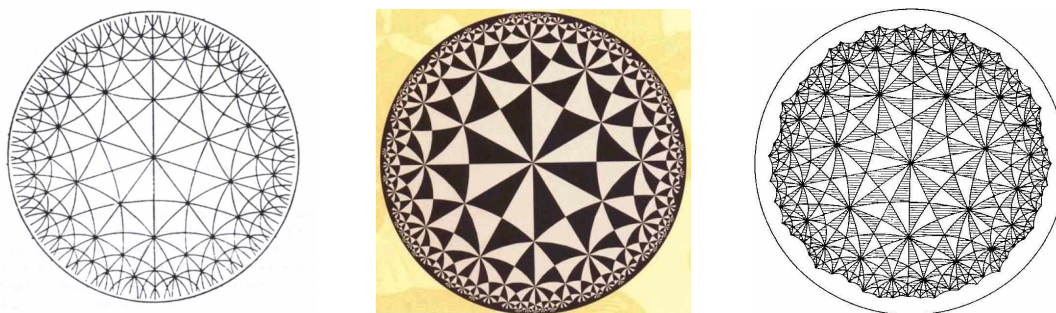
(3) O Modelo

O disco euclidiano aberto D , com as representações dos conceitos primitivos e interpretações das relações primitivas expostas acima, é chamado de Modelo Euclidiano do **Disco de Poincaré** para a Geometria Hiperbólica Plana ⁽¹¹⁾.

Temos, portanto, um modelo para o sistema axiomático da Geometria Hiperbólica Plana, onde o Axioma das Paralelas é trocado pelo Axioma de Lobachewsky: “Por um ponto não pertencente a uma reta dada, podem ser traçadas pelo menos duas retas distintas que não intersectam a reta dada”.



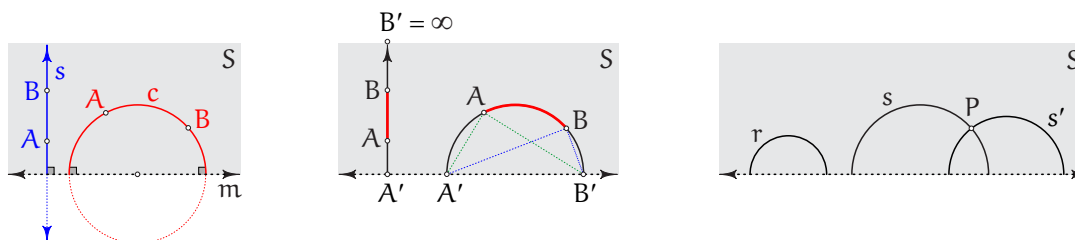
Como curiosidade, abaixo seguem algumas imagens de ladrilhamentos do plano hiperbólico por pentágonos, hexágonos e heptágonos regulares no modelo de Disco de Poincaré D . No Capítulo 5 justificaremos essas construções geométricas.



4.3 O Modelo do Semiplano de Poincaré para a Geometria Hiperbólica Plana

Fixemos um semiplano euclidiano aberto S , ou seja, sem sua reta m de bordo. Usando os axiomas e teoremas da Geometria Euclidiana podemos provar que:

- (i) Se os pontos A e B em S são tais que a reta s que passa por A e B não é ortogonal a m , então existe um único círculo euclidiano c com centro em m que passa pelos pontos A e B . O círculo c é ortogonal à reta m , que é bordo de S .
- (ii) Se os pontos A, B em S são tais que a reta s que passa por A e B é ortogonal a m , então a reta s é única. Veja a figura abaixo à esquerda.



¹¹Na verdade, precisaríamos ainda provar que todos os Axiomas de Hilbert (exceto o das paralelas) tornam-se verdadeiros em D com as representações e interpretações acima.

Mais especificamente:

- (i) considerando D como parte do plano euclidiano;
 - (ii) utilizando os Axiomas de Hilbert para o plano euclidiano e;
 - (iii) considerando as representações e interpretações feitas no texto;
- deveríamos provar, como teoremas euclidianos, que os Axiomas de Hilbert são válidos em D .

Por ser este um trabalho longo, não faremos essas demonstrações aqui. O leitor interessado poderá encontrá-las na referência [3].

Observação. Pode-se provar que a intersecção não vazia, em S , de dois semicírculos distintos ortogonais ao bordo de S ocorre em um único ponto. Analogamente, a intersecção não vazia, em S , entre um semicírculo e uma semirreta ortogonais ao bordo de S , também ocorrem em um único ponto.

(1) Os Conceitos Primitivos

Façamos as seguintes representações em S :

Pontos: Os *pontos hiperbólicos* são os “pontos euclidianos” de S .

Retas: As *retas hiperbólicas* são intersecções de S com retas ortogonais ao bordo de S ; ou intersecções de S com círculos com centro no bordo de S .

Plano: O *plano hiperbólico* é o semiplano euclidiano aberto S . Portanto, a reta m do bordo de S não faz parte do plano hiperbólico.

Assim como no Modelo do Disco de Poincaré, com as interpretações dadas acima, juntamente com a observação prévia, concluímos que a intersecção não vazia de duas retas hiperbólicas distintas ocorre em apenas um único ponto, permitindo verificar dois dos Axiomas de Incidência de Hilbert, que diz que dois pontos distintos determinam uma única reta.

(2) As Relações Primitivas

A relação primitiva “*estar em*”: a noção de um ponto estar em uma reta (no sentido hiperbólico) coincide com a noção de “estar em” no sentido euclidiano.

A relação primitiva “*estar entre*”: a noção de um ponto estar entre outros dois pontos (no sentido hiperbólico) coincide com a noção de “estar entre” no sentido euclidiano.

Também como no Modelo do Disco de Poincaré, com essas interpretações, um **segmento hiperbólico** AB em S é composto por todos os pontos da reta hiperbólica \overleftrightarrow{AB} que estão entre A e B . Os pontos A e B são os **extremos** do segmento AB .

Um ponto O em uma reta hiperbólica a separa em dois subconjuntos disjuntos, cada qual, junto com o ponto O , é chamado de **semirreta hiperbólica**. O ponto O é chamado de **origem** de cada uma das semirretas.

Medindo Comprimentos:

Novamente, como no Modelo do Disco de Poincaré, devido aos Axiomas de Ordem de Hilbert, uma reta deve ter comprimento infinito. Isto significa que a distância euclidiana não pode ser utilizada em S , pois um semicírculo possui comprimento euclidiano finito. Deste modo, precisamos mudar a métrica em S , de tal modo que retas ou semirretas hiperbólicas possam ter comprimentos infinitos.

Consideremos um *segmento hiperbólico* AB (veja figura acima no centro) e sejam A' e B' os pontos de S que são as “extremidades” da reta hiperbólica que contém AB (se AB estiver em uma semirreta euclidiana vertical, tomemos $B' = \infty$). Definimos a **distância hiperbólica** $d_S(A, B)$ do ponto A ao ponto B no semiplano S , ou o **comprimento hiperbólico** do segmento (hiperbólico) AB no semiplano S , como sendo a aplicação $d_S : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} d_S(A, B) = \ln \left(\frac{AB' \cdot BA'}{AA' \cdot BB'} \right), \text{ se } A \text{ e } B \text{ estiverem em um semicírculo euclidiano} \\ d_S(A, B) = \ln \left(\frac{BA'}{AA'} \right), \text{ se } A \text{ e } B \text{ estiverem em uma semirreta euclidiana} \end{array} \right.$$

sendo AB' , BA' , AA' e BB' comprimentos dos segmentos euclidianos AB' , BA' , AA' e BB' , respectivamente.

Na segunda expressão B' está “no infinito”. Neste caso, os comprimentos euclidianos de AB' e BB' são infinitos e, devido à continuidade da aplicação distância, podemos utilizar limites e obter essa segunda expressão a partir da primeira. Vejamos como fazer isso:

$$\begin{aligned} d_S(A, B) &= \lim_{B' \rightarrow \infty} \left(\ln \left(\frac{AB' \cdot BA'}{AA' \cdot BB'} \right) \right) = \lim_{B' \rightarrow \infty} \left(\ln \left(\frac{(AB+BB') \cdot BA'}{AA' \cdot BB'} \right) \right) = \lim_{B' \rightarrow \infty} \left(\ln \left(\frac{AB \cdot BA'}{AA' \cdot BB'} + \frac{BB' \cdot BA'}{AA' \cdot BB'} \right) \right) \\ &= \lim_{B' \rightarrow \infty} \left(\ln \left(\frac{AB \cdot BA'}{AA' \cdot BB'} + \frac{BA'}{AA'} \right) \right) = \ln \left(\lim_{B' \rightarrow \infty} \left(\frac{AB \cdot BA'}{AA' \cdot BB'} + \frac{BA'}{AA'} \right) \right) = \ln \left(0 + \frac{BA'}{AA'} \right) \\ &= \ln \left(\frac{BA'}{AA'} \right). \end{aligned}$$

Com isso, notamos que, na verdade, a métrica hiperbólica d_S no semiplano S é exatamente a mesma do Disco de Poincaré D .

Por fim, é possível mostrar que d_S cumpre a definição de *distância*, ou *métrica*, em S , e a observação que fizemos na seção acima sobre as geodésicas e condições de minimalidade, no caso do disco D , se transferem de forma idêntica para o semiplano S .

Medindo Ângulos:

Aqui, mais uma vez, temos as mesmas considerações que fizemos para o Disco de Poincaré D . Ao contrário da distância hiperbólica em S , que difere da distância euclidiana, a *medida de ângulo hiperbólico* em S coincide com a medida de ângulo euclidiano. Isso significa que, se em S , duas retas hiperbólicas r e s são concorrentes em A , então os quatro ângulos que elas formam possuem medidas que coincidem com as medidas dos ângulos formados pelas duas retas euclidianas r' e s' tangentes a r e s em A .

A relação primitiva “*congruência*”: a noção de congruência com as medidas de segmentos e ângulos dadas acima (no sentido hiperbólico) coincide com a noção de “*congruência*” no sentido euclidiano.

(3) O Modelo

O semiplano euclidiano aberto S , com as representações dos conceitos primitivos e interpretações das relações primitivas expostas acima, é chamado de Modelo Euclidiano do **Semiplano de Poincaré para a Geometria Hiperbólica Plana**.

Temos, portanto, mais um modelo para o sistema axiomático da Geometria Hiperbólica Plana, onde o Axioma das Paralelas é trocado pelo Axioma de Lobachewsky. A figura acima, à direita, ilustra esse axioma no Semiplano de Poincaré S .

Transferência isométrica do Modelo do Semiplano para o Disco de Poincaré

Conforme podemos observar, os modelos do Semiplano e do Disco de Poincaré apresentam algumas semelhanças. É natural perguntar se podemos estabelecer uma transformação entre os modelos de tal modo que retas hiperbólicas de um modelo sejam levadas nas retas hiperbólicas do outro e, ainda mais, se é possível estabelecer uma isometria ⁽¹²⁾ entre os modelos.

A existência de uma isometria entre modelos de uma mesma geometria permite transferir resultados matemáticos que dependam de comprimentos, áreas e ângulos de um modelo para o outro. Quando estamos pretendendo deduzir fórmulas trigonométricas isso é bastante útil. Além disso, a verificação dos axiomas da geometria em um determinado modelo “sai de graça” quando temos uma isometria entre um modelo (no qual já verificamos os axiomas) em outro (no qual precisamos verificar os axiomas).

A resposta para a existência de uma isometria entre os modelos do Semiplano e do Disco de Poincaré para a Geometria Hiperbólica Plana é positiva, e vamos em busca dela.

Para tanto, fixemos um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço euclidiano.

Consideremos o modelo do semiplano como sendo

$$S = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : y > 0\} \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\},$$

o modelo do disco (que vamos tomar com raio euclidiano 1) como sendo

$$D = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$$

e a esfera de raio $\frac{1}{2}$ e centro em $C(0, 0, \frac{1}{2})$ como sendo

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

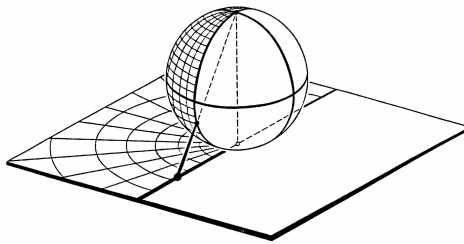
(1) Tomemos a inversa da projeção estereográfica $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \times \{0\} \rightarrow E - \{N\}$, sendo $N(0, 0, 1)$, dada por

$$\pi^{-1}(x, y, 0) = \left(\frac{x}{x^2+y^2+1}, \frac{y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1} \right)$$

que mapeia o Semiplano de Poincaré no hemisfério “esquerdo” da esfera E , conforme a figura ⁽¹³⁾ abaixo.

¹²Sejam (S_1, d_1) e (S_2, d_2) dois espaços métricos, ou seja, conjuntos nos quais estão definidas métricas. Uma *isometria* entre S_1 e S_2 é uma aplicação bijetiva que preserva distâncias, ou seja, $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ tal que $d_1(A, B) = d_2(\varphi(A), \varphi(B))$. Como consequência, áreas e ângulos também são preservados pela isometria φ .

¹³Extraída da referência [15].



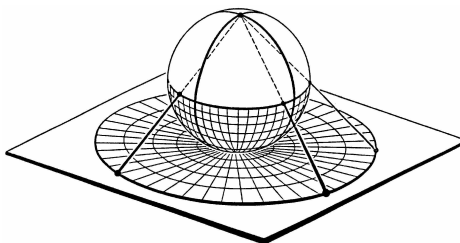
(2) Rotacionemos a esfera E de tal modo que $\pi^{-1}(S)$ seja transportado para o hemisfério sul de E pela aplicação $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\rho(x, y, z) = \left(x, z - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - y\right)$$

(3) Apliquemos a projeção estereográfica $\pi : E - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ dada por

$$\pi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0\right)$$

que mapeia o hemisfério sul da esfera E no Disco de Poincaré D , conforme figura (14) abaixo.



(4) A aplicação $\varphi = \pi \circ \rho \circ \pi^{-1} : S \rightarrow D$ que mapeia S em D é dada por:

$$\varphi(x, y, 0) = \left(\frac{2x}{x^2 + (y+1)^2}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y+1)^2}, 0\right).$$

Em cursos mais avançados, é possível provar que φ é, de fato, uma isometria entre os modelos S do Semiplano e D do Disco de Poincaré (15).

4.4 Modelo de Klein para a Geometria Hiperbólica Plana

Fixemos um disco euclidiano aberto K de raio r , ou seja, sem o seu círculo de bordo. Portanto, estamos considerando apenas a região interior ao disco.

Usando os axiomas e teoremas da Geometria Euclidiana podemos provar que dados dois pontos A e B em K , então existe uma única corda euclidiana s (16) que passa pelos pontos A e B .

Observação. *Pode-se provar que a intersecção não vazia, em K , de duas cordas distintas ocorre em um único ponto.*

(1) Os Conceitos Primitivos

Façamos as seguintes representações em K :

Pontos: Os *pontos hiperbólicos* são os “pontos euclidianos” de K .

Retas: As *retas hiperbólicas* são intersecções de K com suas cordas.

Plano: O *plano hiperbólico* é o disco euclidiano aberto K . Portanto, o círculo do bordo de K não faz parte do plano hiperbólico.

Assim como nos modelos de Poincaré, com as interpretações dadas acima, juntamente com a observação prévia, concluímos que a intersecção não vazia de duas retas hiperbólicas distintas ocorre em apenas um único ponto, permitindo verificar dois dos Axiomas de Incidência de Hilbert, que diz que dois pontos distintos determinam uma única reta.

¹⁴Extraída da referência [15].

¹⁵Naturalmente, $\varphi^{-1} : D \rightarrow S$ é uma isometria entre D e S .

¹⁶Uma *corda* em um círculo ou disco é um segmento de reta euclidiana ligando dois pontos do círculo ou do bordo do disco.

(2) *As Relações Primitivas*

A relação primitiva “*estar em*”: a noção de um ponto estar em uma reta (no sentido hiperbólico) coincide com a noção de “*estar em*” no sentido euclidiano.

A relação primitiva “*estar entre*”: a noção de um ponto estar entre outros dois pontos (no sentido hiperbólico) coincide com a noção de “*estar entre*” no sentido euclidiano.

Também como nos modelos de Poincaré, com essas interpretações, um *segmento hiperbólico* AB em K é composto por todos os pontos da reta hiperbólica \overleftrightarrow{AB} que estão entre A e B . Os pontos A e B são os *extremos* do segmento AB .

Um ponto O em uma reta hiperbólica a separa em dois subconjuntos disjuntos, cada qual, junto com o ponto O , é chamado de *semirreta hiperbólica*. O ponto O é chamado de *origem* de cada uma das semirretas.

Medindo Comprimentos:

Novamente, como nos modelos de Poincaré, devido aos Axiomas de Ordem de Hilbert, uma reta deve ter comprimento infinito. Isto significa que a distância euclidiana não pode ser utilizada em K , pois uma corda possui comprimento euclidiano finito. Deste modo, precisamos mudar a métrica em K , de tal modo que retas ou semirretas hiperbólicas possam ter comprimentos infinitos.

Consideremos um *segmento hiperbólico* AB e sejam A' e B' os pontos de K que são as “extremidades” da reta hiperbólica que contém AB . Definimos a *distância hiperbólica* $d_K(A, B)$ do ponto A ao ponto B no disco K , ou o *comprimento hiperbólico* do segmento (hiperbólico) AB no disco K , como sendo a aplicação $d_K : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d_K(A, B) = \ln \left(\sqrt{\frac{AB' \cdot BA'}{AA' \cdot BB'}} \right),$$

sendo AB' , BA' , AA' e BB' comprimentos dos segmentos euclidianos AB' , BA' , AA' e BB' , respectivamente.

Notamos que a métrica hiperbólica d_K no disco K é, a menos da raiz quadrada que aparece no logaritmando, análoga à do Disco de Poincaré D .

Por fim, é possível mostrar que d_K cumpre a definição de *distância*, ou *métrica*, em K , e a observação que fizemos na seção do Disco de Poincaré sobre as geodésicas e condições de minimalidade, no caso do disco D , se transferem de forma idêntica para o disco K .

Medindo Ângulos:

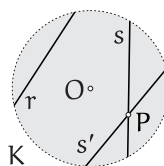
Aqui reside uma diferença importante do Disco de Klein K em relação ao Disco de Poincaré D : a *medida de ângulo hiperbólico* em K difere da medida de ângulo euclidiano. Não entraremos em detalhes sobre a forma se fazer os cálculos das medidas dos ângulos em K , uma vez que este cálculo depende do local onde está situado o vértice do ângulo. Entretanto, para o leitor interessado podemos recomendar a referência [23].

A relação primitiva “*congruência*”: a noção de congruência com as medidas de segmentos e ângulos dada e citada acima (no sentido hiperbólico) coincide com a noção de “*congruência*” no sentido euclidiano.

(3) *O Modelo*

O disco euclidiano aberto K , com as representações dos conceitos primitivos e interpretações das relações primitivas expostas acima, é chamado de Modelo Euclidiano do Disco de Klein para a Geometria Hiperbólica Plana.

Temos, portanto, mais um modelo para o sistema axiomático da Geometria Hiperbólica Plana, onde o Axioma das Paralelas é trocado pelo Axioma de Lobachewsky. A figura abaixo ilustra esse axioma no Disco de Klein.



Transferência isométrica do Modelo do Disco de Poincaré para o Modelo do Disco de Klein

De modo análogo ao que fizemos com o Semiplano e o Disco de Poincaré. Podemos estabelecer uma isometria entre os Discos de Klein e de Poincaré. Entretanto, vamos considerar o Disco de Poincaré com raio euclidiano 2, para facilitar nossas fórmulas.

Capítulo 4. Modelos Euclidianos para as Geometrias Hiperbólica e Elíptica Planas

Para tanto, fixemos um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço euclidiano.

Consideremos o modelo do Disco de Poincaré como sendo $D = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 4\} \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, o modelo do Disco de Klein como sendo $K = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ e a esfera de raio 1 e centro em $C(0, 0, 1)$ como sendo $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

Roteiro:

- (i) Tomamos o Disco de Klein K e esfera E . Logo, o pólo sul da esfera tangencia o centro do disco.
- (ii) Tomamos o Disco de Poincaré D com o mesmo centro de K . O disco D tem o dobro do raio do disco K .
- (iii) Tomamos a inversa da projeção estereográfica $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \times \{0\} \rightarrow E - \{N\}$, sendo $N(0, 0, 2)$, e mapeamos o Disco de Poincaré D no hemisfério sul da esfera E , dada por

$$\pi^{-1}(x, y, 0) = \left(\frac{4x}{x^2 + y^2 + 4}, \frac{4y}{x^2 + y^2 + 4}, \frac{2x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2 + 4} \right).$$

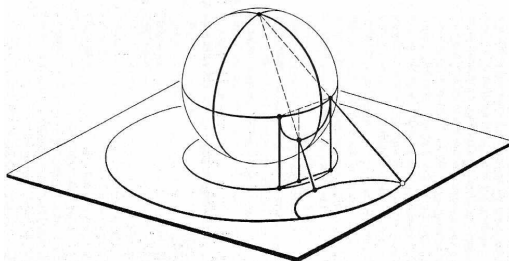
- (iv) Projetamos o hemisfério sul de E ortogonalmente em $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ no Disco de Klein, ou seja, consideremos $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\}$:

$$p(x, y, z) = (x, y, 0).$$

- (v) A aplicação $\varphi = p \circ \pi^{-1} : D \rightarrow K$ que mapeia D em K é dada por:

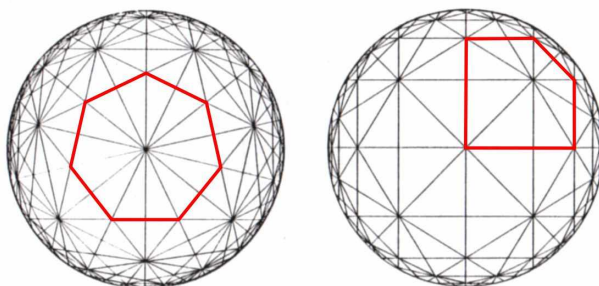
$$\varphi(x, y, 0) = \left(\frac{4x}{x^2 + y^2 + 4}, \frac{4y}{x^2 + y^2 + 4}, 0 \right).$$

A figura abaixo ilustra as duas transformações que compõem φ .



É interessante notar que $\pi^{-1}(m)$, sendo m uma reta hiperbólica no Disco de Poincaré, é uma semicircunferência em E situada em um plano vertical ortogonal ao Disco de Klein.

Por fim, abaixo seguem algumas imagens de ladrilhamentos por heptágonos (à esquerda) e pentágonos (à direita) regulares no modelo de Disco de Klein.



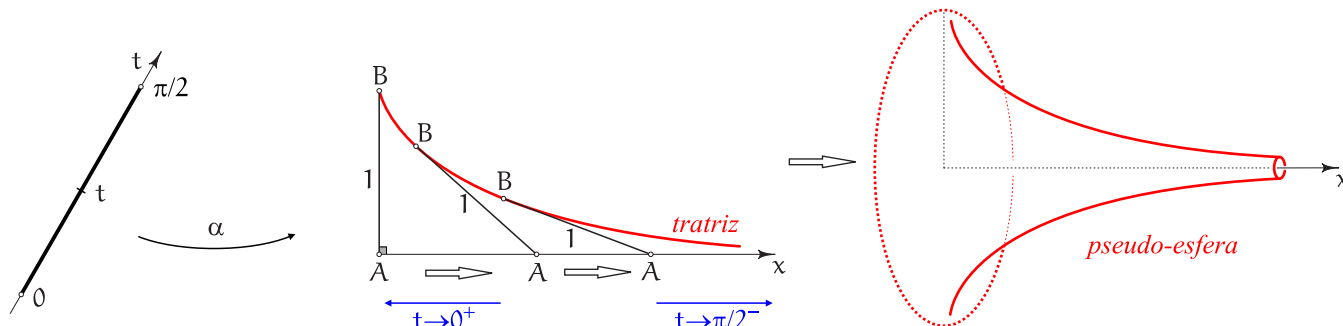
4.5 Modelo da Pseudo-esfera de Beltrami para a Geometria Hiperbólica Plana

A pseudo-esfera é a superfície obtida pela rotação de uma curva denominada *tratrix* em torno de um eixo. Esta curva pode ser concebida mecanicamente do seguinte modo: fixemos um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no plano e consideremos um segmento AB , de comprimento unitário, perpendicular ao eixo cartesiano x na origem. Podemos tomar $A(0, 0)$ e $B(0, 1)$, por exemplo, conforme a figura abaixo. À medida que o extremo A do segmento

é tracionado deslocando-se pelo eixo x no sentido positivo, o extremo B, “livre” ⁽¹⁷⁾, descreve uma curva no plano cartesiano. Essa curva é uma tratriz, cuja parametrização $\alpha :]0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}^2$ pode ser dada por:

$$\alpha(t) = \left(-\operatorname{sen}(t) - \ln\left(\frac{\cos(t)}{1+\operatorname{sen}(t)}\right), \cos(t) \right)$$

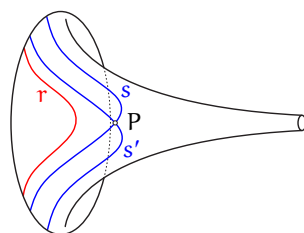
A pseudo-esfera não é um modelo plenamente adequado para a Geometria Hiperbólica Plana, pois não é completa, isto é, apresenta uma fronteira que impede o prolongamento das retas hiperbólicas (figura abaixo).



Assim, uma pseudo-esfera representa apenas parte de um plano hiperbólico, portanto, trata-se de um modelo parcial.

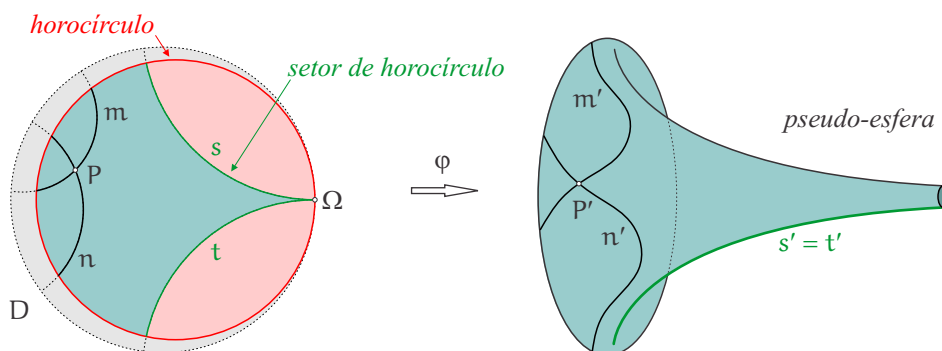
A vantagem deste modelo parcial é que, considerando as retas hiperbólicas como sendo geodésicas euclidianas da superfície, a métrica hiperbólica coincide com a métrica euclidiana induzida do espaço. Desta forma, a distância entre dois pontos é o comprimento da curva de menor comprimento euclidiano sobre a pseudo-esfera que liga esses pontos.

Na figura abaixo temos uma ideia do Axioma de Lobachewsky no modelo da Pseudo-esfera.



Conforme comentamos, o formato das retas hiperbólicas no modelo da Pseudo-esfera é difícil de descrever. Entretanto, é possível estabelecer uma isometria entre a Pseudo-esfera e parte do Disco de Poincaré. Vamos apresentar as ideias para a construção dessa isometria.

Consideremos uma região do Disco de Poincaré constituída por um disco euclidiano menor, tangente internamente ao Disco de Poincaré no ponto Ω (figura abaixo à esquerda). Tal disco é chamado de *horocírculo* e será objeto de estudos no Capítulo 5.



Consideremos as retas hiperbólicas paralelas s e t tendo Ω como ponto no bordo do Disco de Poincaré. A região entre as retas s e t e dentro do horocírculo é chamada de *setor de horocírculo*.

É possível definir uma transformação φ do setor de horocírculo na pseudo-esfera de tal maneira que as retas s e t são identificadas, ou seja, possuem a mesma imagem $s' = t'$ por φ . Na verdade, φ pode ser tomada como homeomorfismo ⁽¹⁸⁾ do interior do setor de horocírculo sobre sua imagem. O efeito geométrico da transformação φ pode ser visto na figura acima à direita.

¹⁷Matematicamente, “livre” significa que a reta que contém o segmento AB é tangente à curva que o ponto B descreve no plano.

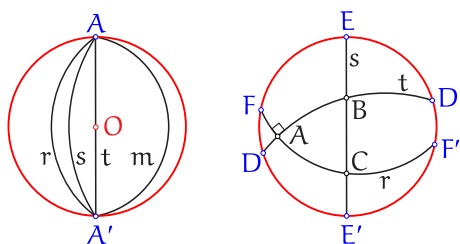
¹⁸Aplicação contínua com inversa contínua.

Em estudos mais avançados é possível encontrar expressões analíticas da transformação φ de modo que ela seja uma isometria.

As imagens de partes de retas hiperbólicas m e n concorrentes no ponto P que estão no interior do horocírculo são partes de retas hiperbólicas na pseudo-esfera. Nas figuras acima podemos observar essa transformação.

4.6 Modelo de Klein para a Geometria Elíptica Plana

No Modelo de Klein para a Geometria Elíptica Plana, o *plano elíptico* é considerado como sendo um disco euclidiano fechado, ou seja, o círculo que forma seu bordo faz parte do plano elíptico. As *retas elípticas* são consideradas como sendo arcos de circunferências (ou diâmetros) unindo pontos diametralmente opostos no bordo do disco. Ao contrário do que ocorre nos modelos da Geometria Hiperbólica Plana, os pontos do bordo pertencem ao plano elíptico, no entanto, pontos diametralmente opostos são vistos como sendo um **único ponto**. A título de ilustração, na figura abaixo à esquerda, r, s, t e m são *retas elípticas* concorrentes e; A e A' constituem um único ponto (que é exatamente o ponto em comum às retas r, s, t e m).



É possível provar, utilizando Geometria Euclidiana, que dados dois pontos, existe uma única *reta elíptica* que os contém.

Considerações:

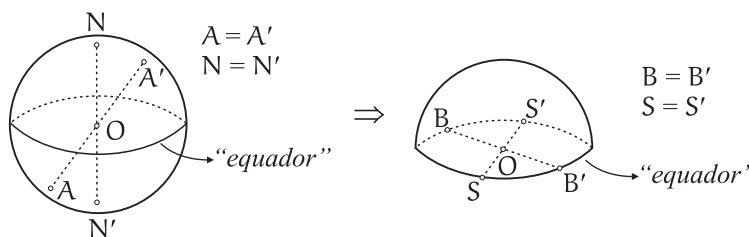
- (i) Assim, como no Modelo do Disco de Poincaré, no Modelo de Klein para a Geometria Elíptica Plana, a métrica não é euclidiana.
- (ii) Na Geometria Elíptica retas possuem comprimento limitado (não vale o Segundo Postulado de Euclides ou os Axiomas de Ordem de Hilbert).
- (iii) Também como no Modelo do Disco de Poincaré, a medida de ângulo no Modelo de Klein para a Geometria Elíptica Plana coincide com a medida de ângulo euclidiana. Em particular, na figura acima à direita temos que as *retas elípticas* r e t são perpendiculares e a soma das medidas dos ângulos internos do *triângulo elíptico* ABC é maior do que π radianos.
- (iv) Quaisquer duas retas elípticas distintas são concorrentes, ou seja não vale o 5º. Postulado de Euclides.

4.7 Modelo Duplo da Esfera para a Geometria Elíptica Plana

Por muito tempo a geometria da esfera foi considerada como sendo um caso particular da Geometria Euclidiana Espacial. Porém, devido ao advento da descoberta da Geometria Hiperbólica, a esfera ganhou vida própria passando a ser, sob certas condições que descrevemos abaixo, ambiente de uma geometria independente do espaço no qual está imersa.

O Modelo do Disco de Klein para a Geometria Elíptica Plana inspira considerar uma esfera como modelo para essa geometria. No entanto, alguns cuidados devem ser tomados: as *retas elípticas* são círculos máximos da esfera com os pontos diametralmente opostos identificados. Desta forma, não temos contradição com o axioma de incidência que diz que dois pontos distintos determinam uma única reta.

Esse procedimento é equivalente a considerar uma semiesfera como modelo e tomarmos os pontos diametralmente opostos da fronteira identificados, como na figura abaixo.



Desta forma, a esfera pode ser considerada como um “*modelo duplo*” para a Geometria Elíptica Plana. Uma esfera com os pontos diametralmente opostos identificados recebe o nome de *Plano Projetivo*.

Comparado com o Modelo do Disco de Klein para a Geometria Elíptica Plana, a principal vantagem do Modelo Duplo da Esfera reside no fato de a métrica elíptica coincidir com a métrica euclidiana induzida do espaço sobre a esfera, ou seja, a maneira de se medir comprimentos é euclidiana. Além disso, a medição de ângulo também é euclidiana!

Podemos criar uma isometria entre o Modelo Duplo da Esfera e o Modelo do Disco de Klein para a Geometria Elíptica Plana. Vamos exemplificar com uma esfera de raio $\frac{1}{2}$ e um disco de raio euclidiano 1.

Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço euclidiano.

Tomemos a esfera

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\}$$

de centro $C(0, 0, \frac{1}{2})$ e raio $\frac{1}{2}$.

Tomemos

$$D = \{ (x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

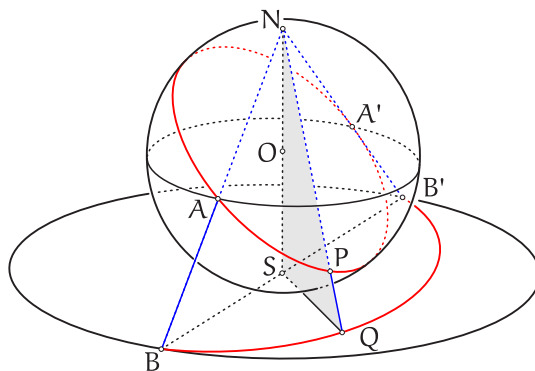
como sendo do Disco de Klein de raio euclidiano 1.

Vamos considerar o hemisfério sul de E com os pontos diametralmente opostos do equador identificados.

Utilizando a projeção estereográfica $\pi : E - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, dada por

$$\pi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0 \right),$$

mapeamos o hemisfério sul da esfera no Disco de Klein, conforme observamos na figura abaixo.



Os pontos antípodas do equador estão identificados. Logo, os pontos antípodas do disco também estão identificados.

Em cursos mais avançados prova-se que a projeção estereográfica acima é uma isometria entre o Modelo Duplo da Esfera de raio $\frac{1}{2}$ no Modelo do Disco de Klein de raio euclidiano 1 para a Geometria Elíptica Plana.



Capítulo 5

Geometria Hiperbólica Plana

Tomando-se os quatro primeiros grupos de axiomas de Hilbert, a saber:

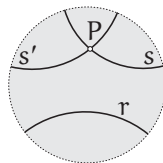
- (i) Axiomas de Incidência;
- (ii) Axiomas de Ordem;
- (iii) Axiomas de Congruência;
- (iv) Axiomas de Continuidade;

juntamente com a negação do 5º. Postulado de Euclides conhecida como *Postulado de Lobachewsky*:

“Por um ponto não pertencente a uma reta dada, podem ser traçadas pelo menos duas retas distintas que não intersectam a reta dada”

temos o sistema axiomático que origina a chamada *Geometria Hiperbólica Plana*.

A figura abaixo ilustra o Postulado de Lobachewsky no Modelo do Disco de Poincaré. ⁽¹⁾



À semelhança da Geometria Euclidiana, temos que ponto, reta e plano na Geometria Hiperbólica são conceitos primitivos, portanto, não definidos.

5.1 Paralelismo

Proposição 5.1 Sejam r uma reta e P um ponto não pertencente a r . Então, existem infinitas retas que passam por P e não intersectam r .

Demonstração.

Pelo Postulado de Lobachewsky, existem s e s' passando por P tais que $s \cap r = s' \cap r = \emptyset$.

Deste modo, s e s' determinam no plano hiperbólico quatro setores angulares ⁽²⁾, rotulados de 1 a 4, conforme a figura abaixo à esquerda.

Seja Q o pé da perpendicular baixada de P a r . Consideremos os ângulos de vértice comum P , orientados a partir de PQ , de medidas α e β , que o segmento PQ forma com as retas s e s' , respectivamente, em um mesmo lado de PQ . Sendo s e s' distintas, $\alpha \neq \beta$ e, sem perda de generalidade, suponhamos que $\alpha < \beta$. A figura abaixo ao centro mostra um exemplo de tal construção. Sejam $\gamma \in \mathbb{R}$, tal que $\alpha < \gamma < \beta$, e R ponto no interior de um dos setores angulares pares tais que o ângulo \widehat{QPR} tenha medida γ e esteja contido no setor angular formado pelo ângulo de medida β . A figura abaixo ao centro também ilustra o ângulo \widehat{QPR} .

Seja s'' reta passando por P e R . Logo, s'' é distinta de s e s' e está contida nos setores angulares opostos pelo vértice P que não contém a reta r (setores 2 e 4 da figura abaixo à esquerda).

Temos $s'' \cap r = \emptyset$. De fato, se $s'' \cap r = \{A\}$, teríamos um triângulo PQA e duas possibilidades:

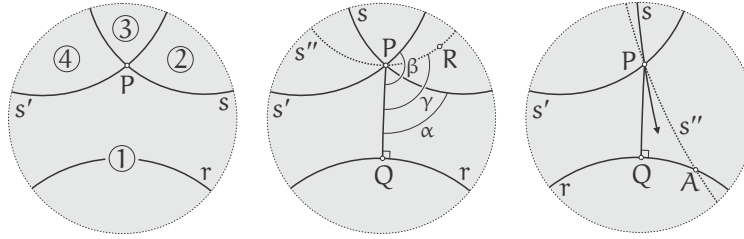
- (1) a reta s “entra” no triângulo PQA por P , conforme a figura abaixo à direita. Pela Proposição 3.7, teríamos

¹Procuraremos, sempre que possível, fazer as construções geométricas e ilustrações vinculadas à Geometria Hiperbólica utilizando o Modelo do Disco de Poincaré.

$s \cap QA \neq \emptyset$, gerando uma contradição, ou;

(2) a reta s' “entra” em PQA por P. Novamente, pela Proposição 3.7, teríamos $s' \cap QA \neq \emptyset$, gerando, também, uma contradição.

Conclusão: $s'' \cap r = \emptyset$.



Como há infinitos $\gamma \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha < \gamma < \beta$, há infinitos pontos R que podem ser escolhidos, conforme descrito acima, que originam infinitas retas s'' que passam por P e não intersectam r. □

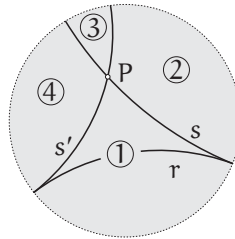
Proposição 5.2 Sejam r uma reta e P um ponto não pertencente a r . Consideremos:

\mathcal{C}_1 : conjunto das retas que passam por P e não intersectam r ;

\mathcal{C}_2 : conjunto das retas que passam por P e intersectam r .

Então, existem exatamente duas retas distintas s e s' de \mathcal{C}_1 que determinam no plano hiperbólico dois pares S_1 e S_2 de setores angulares opostos pelo vértice P de tal modo que $\mathcal{C}_1 = S_1$ e $\mathcal{C}_2 \subset S_2$.

Com o intuito de ilustrar os conjuntos \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 , bem como os setores angulares S_1 e S_2 temos a figura abaixo. Nela, os setores angulares opostos pelo vértice P, rotulados pelos números 2 e 4, correspondem ao conjunto \mathcal{C}_1 . O interior dos setores angulares opostos pelo vértice P, rotulados pelos números 1 e 3, e acrescido pelo próprio ponto P, correspondem ao conjunto \mathcal{C}_2 .



Observemos que \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 não possuem a mesma natureza. De fato, $\mathcal{C}_1 = S_1$ é um par de setores angulares opostos pelo vértice e, portanto, é um conjunto fechado no plano hiperbólico, tendo por fronteira os ângulos opostos pelo vértice P formados pelas retas s e s' . Já $\mathcal{C}_2 \subset S_2$ é a reunião do interior de um par de setores angulares opostos pelo vértice acrescido do ponto P. Portanto, \mathcal{C}_2 não é um conjunto fechado (e nem aberto) no plano hiperbólico. Sua fronteira, que também é constituída pelos ângulos opostos pelo vértice P formados pelas retas s e s' , não está contida em \mathcal{C}_2 .

Por fim, observemos que a decomposição do plano hiperbólico em \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 não é disjunta, pois $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{P\}$.

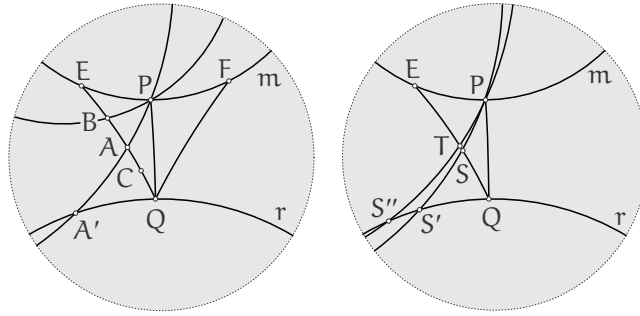
Demonstração da Proposição 5.2.

Baixemos a perpendicular do ponto P à reta r e designemos por Q o pé desta perpendicular. Em seguida tracemos a reta m passando por P e perpendicular ao segmento PQ, a qual sabemos que não intersecta a reta r (Proposição 3.2). Escolhamos dois pontos E e F, sobre m , de modo que P esteja entre E e F. Consideremos o triângulo EFQ. Como o ponto P pertence ao lado EF, todas as retas que passam por P, com exceção de m , são retas que “entram” no triângulo EFQ, e que, conseqüentemente, cortam também o segmento EQ ou o segmento QF (Axioma de Pasch). Vamos nos restringir, inicialmente, às retas que cortam o segmento EQ. Observemos que, neste segmento, cada ponto representa uma das retas que passa por P nas condições descritas acima (figura abaixo à esquerda).

Estes pontos de EQ podem ser separados em duas classes:

- (i) Pontos que representam retas que não intersectam r , que constituem um conjunto que chamaremos de \mathcal{N} ;
- (ii) Pontos que representam retas que intersectam r , que constituem um conjunto que chamaremos de \mathcal{M} .

²Um setor angular é a reunião de um ângulo não raso com seu interior.



É claro que $\mathcal{N} \cap \mathcal{M} = \emptyset$, que $E \in \mathcal{N}$ e que $Q \in \mathcal{M}$.

Além disto, se $A \in \mathcal{M}$, então $QA \subset \mathcal{M}$. Para ver que isto ocorre, seja A' o ponto de r que está sobre a reta que passa por P e A (figura acima à esquerda). Seja $C \in QA$. Logo, a reta que passa por P e C “entra” no triângulo $PA'Q$ pelo vértice P e, pela Proposição 3.7, essa reta deve cortar o lado $A'Q$ desse triângulo, ou seja, a reta que passa por P e por C deve intersectar r .

Da mesma forma, se $B \in \mathcal{N}$, então, $EB \subset \mathcal{N}$.

Segue-se, então, do Axioma de Dedekind (que vale para os números reais, para os pontos de uma reta ou para os pontos de um segmento), que existe exatamente um ponto S em EQ que separa os conjuntos \mathcal{M} e \mathcal{N} . A questão que se coloca imediatamente é se este ponto S de separação pertence ao conjunto \mathcal{M} ou ao conjunto \mathcal{N} . Suponha que S pertença ao conjunto \mathcal{M} , ou seja, a reta que passa por P e S intersecta r em um ponto S' . Tomemos qualquer ponto $S'' \in r$ tal que S' esteja entre S'' e Q (figura acima à direita). É claro que a reta que passa por P e por S'' intersecta EQ em um ponto T que fica fora do segmento QS , o que é absurdo. Logo, $S \in \mathcal{N}$.

O mesmo raciocínio pode agora ser repetido com o segmento QF , obtendo-se outro ponto de separação daquele lado. Estes dois pontos correspondem a retas que separam todas as retas que passam pelo ponto P em duas categorias: as que intersectam r ; e as que não intersectam r . Além disto, estas duas retas não intersectam r . \square

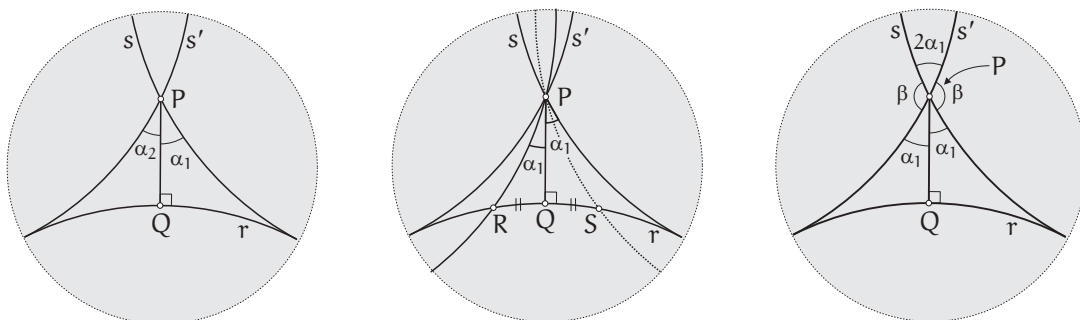
Devido à infinidade de retas que passam por P e não intersectam r , iremos alterar a definição de retas paralelas proveniente da Geometria Euclidiana.

Sejam r uma reta e P um ponto não pertencente a r . Às retas s e s' da Proposição 5.2, chamamos de **retas paralelas a r por P** , enquanto que as demais retas que passam por P e não intersectam r chamamos de **retas hiperparalelas a r por P** .

Proposição 5.3 Sejam r uma reta e P um ponto não pertencente a r . Então, as duas retas paralelas a r pelo ponto P determinam ângulos congruentes com o segmento perpendicular à reta r baixado de P . Além disso, os ângulos congruentes mencionados são agudos.

Demonstração.

Seja Q o pé da perpendicular baixada de P a r . Sejam α_1 e α_2 as medidas dos ângulos formados pelas paralelas s e s' a r por P com PQ , conforme a figura abaixo à esquerda.



Suponhamos que $\alpha_1 < \alpha_2$.

Tomemos o ângulo de medida α_1 contido no setor angular determinado pelo ângulo de medida α_2 tendo PQ contido em um de seus lados, conforme a figura acima ao centro.

Devido à Proposição 5.2, $\exists R \in r$ tal que a medida de \widehat{RPQ} seja α_1 (figura acima ao centro).

Seja $S \in r$ tal que $Q \in RS$ e $RQ \equiv QS$. Logo, \widehat{QPS} tem medida menor do que α_1 e, também, igual a α_1 , pelo caso LAL nos triângulos PQR e PQS . Contradição!

Assim, $\alpha_1 = \alpha_2$.

Como $s \neq s'$, seja $\beta \neq 0$ a medida dos ângulos opostos pelo vértice P que essas retas determinam, conforme a figura acima à direita.

Logo,

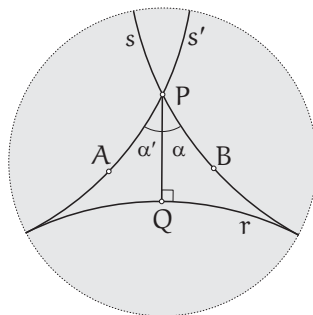
$$4\alpha_1 + 2\beta = 2\pi \implies \alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} \implies \alpha_1 < \frac{\pi}{2},$$

como queríamos. □

Consideremos P um ponto não pertencente a uma reta r dada e as retas s e s', passando por P e paralelas a r. A uma das retas paralelas, s ou s', chamamos de **reta paralela a r por P no sentido positivo**. À outra chamamos de **reta paralela a r por P no sentido negativo**.

Deste modo, uma reta paralela a uma reta dada por um ponto em um determinado sentido é única.

Seja Q o pé do segmento perpendicular a r baixado de P. Os ângulos agudos enunciados na Proposição 5.3⁽³⁾ são chamados de **ângulo de paralelismo entre s e r em P** e de **ângulo de paralelismo entre s' e r em P**. (figura abaixo).



Como existem exatamente duas retas s e s' paralelas a r por P, existem exatamente dois ângulos de paralelismo α e α' em P, sendo α determinado por s e α' determinado por s'. Desta forma, podemos associar cada ângulo de paralelismo a um sentido de paralelismo e vice-versa.

Estamos tratando de retas paralelas s e s' sempre a partir de uma reta r e um ponto P fora dela. Uma questão natural neste momento é a seguinte: se tomarmos um ponto \bar{P} em s, distinto de P, o que podemos dizer das retas \bar{s} e \bar{s}' paralelas a r por \bar{P} ? Será que uma delas coincide com s? A próxima proposição responde essa última pergunta e, além disso, ela será útil para simplificar algumas das definições envolvendo paralelismo.

Proposição 5.4 Seja s reta paralela a r por P em um determinado sentido. Então, a reta s é paralela a r nesse mesmo sentido por qualquer um de seus pontos.

Demonstração.

Seja s paralela a r por P em um determinado sentido. Tomemos um ponto qualquer $Q \in s$.

Seja A o pé da perpendicular baixada de P a r.

1º caso: (figura abaixo) Suponhamos que $Q \in s$ está na semirreta com origem em P que forma um dos lados do ângulo de paralelismo entre s e r em P. Seja $B \in r$ tal que QB é perpendicular a r.

Seja α o ângulo suplementar de BQP .

Para mostrar que s é paralela a r por Q no mesmo sentido do paralelismo de s a r por P, basta mostrar que qualquer t entrando no interior do ângulo α por Q intersecta r.

Seja $C \in t$ no interior de α .

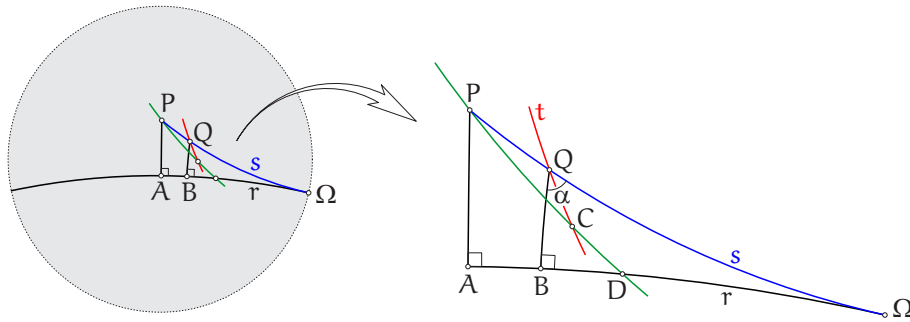
Logo, devido à Proposição 5.2, a reta que passa por P e por C intersecta r em um ponto D.

Assim, t entra no interior do triângulo PAD pelo lado PD. Pelo Axioma de Pasch, t intersecta AD ou PA.

A reta t não intersecta PA pois, caso contrário, t não estaria entrando no interior do ângulo α .

Logo, t intersecta AD, ou seja, t intersecta r. Desta forma, s é paralela a r por Q no mesmo sentido do paralelismo de s a r por P.

³Um desses ângulos é formado por uma das semirretas de s com origem em P, enquanto que a outra semirreta tem origem em P e passa por Q. O outro ângulo de paralelismo é formado pela mesma semirreta com origem em P passando por Q e por uma das semirretas de s' com origem em P.



2º caso: (figura abaixo) Suponhamos que $Q \in s$ não está na semirreta com origem em P que forma um dos lados do ângulo de paralelismo entre s e r em P . Seja $B \in r$ tal que QB é perpendicular a r .

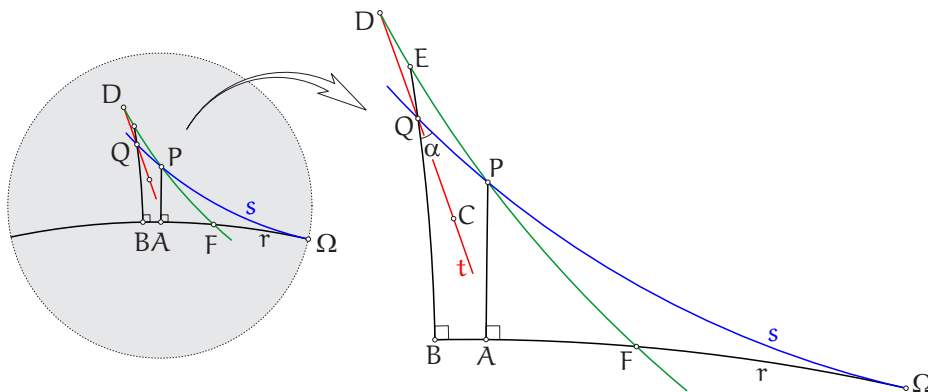
Seja α o ângulo $B\hat{Q}P$.

Para mostrar que s é paralela a r por Q no mesmo sentido do paralelismo de s a r por P , basta mostrar que qualquer t entrando no interior do ângulo α por Q corta r .

Seja $C \in t$ no interior do ângulo α . Tomemos $D \in t$ de tal modo que Q esteja entre C e D . Consideremos o triângulo QDP .

Temos que a reta que passa por Q e B entra no interior do triângulo QDP pelo vértice Q e, pela Proposição 3.7, esta reta deve intersectar DP em um ponto E .

Nesta construção, temos a reta que passa por DP entrando no interior do ângulo de paralelismo de vértice P . Logo, esta reta deve intersectar r em um ponto F . Com isso, temos um triângulo retângulo EBF no qual a reta t entra no interior desse triângulo pelo lado EB . Logo, pelo Axioma de Pasch, t deve intersectar DF ou BF . A reta t não intersecta DF , pois, caso contrário, t seria a reta que passa por D e F , não passando por Q , o que é uma contradição.



Logo, t intersecta BF , ou seja, t intersecta r , como queríamos. □

A proposição acima permite-nos livrar do ponto P em algumas das definições envolvendo paralelismo que temos até agora, ou seja: dizemos que a reta s é **paralela** à reta r em um determinado sentido quando s for paralela a r neste mesmo sentido por qualquer um de seus pontos. Também é usual omitir a expressão “em um determinado sentido”, ficando implícito que quando se diz “ s é paralela a r ” significa que s é paralela a r em um dos dois possíveis sentidos.

A propriedade simétrica envolvendo paralelismo é válida, conforme proposição abaixo.

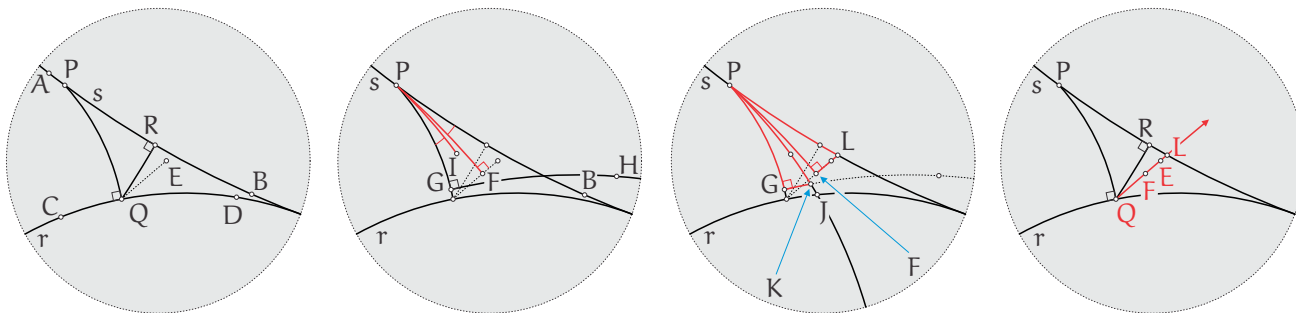
Proposição 5.5 Se s é paralela a r , então r é paralela a s .

Demonstração.

Primeira passo: construções preliminares.

Faremos diversas construções geométricas que serão esboçadas na figura abaixo.

Consideremos a reta s paralela à reta r . Sejam $A, B \in s$ e $C, D \in r$ pontos distintos. Seja P um ponto do segmento AB e tracemos o segmento PQ perpendicular a r e o segmento QR perpendicular a s . Suponhamos que a disposição dos pontos A, P e B sobre a reta s seja tal que B esteja em um dos lados do ângulo de paralelismo entre s e r em P .



Como o ângulo de paralelismo \widehat{QPB} é agudo (Proposição 5.3), o ponto R ficará sobre um dos lados desse ângulo de paralelismo pois, do contrário, o triângulo PQR teria dois ângulos não agudos, o que contradiz o Teorema do Ângulo Externo.

Suponhamos que a disposição dos pontos C, Q e D sobre a reta r seja tal que \widehat{RQD} seja agudo.

Segundo passo: a reta r é paralela à reta s pelo ponto Q.

Para demonstrar isto, temos de provar que toda reta que passa pelo ponto Q intersectando o interior do ângulo \widehat{RQD} intersecta a reta s. Consideremos uma de tais retas e seja E um de seus pontos dentro daquele ângulo. Tracemos o segmento PF perpendicular a esta reta \overrightarrow{QE} . Assim, o ponto F pertence à semirreta \overrightarrow{QE} de origem Q passando por E. Na semirreta \overrightarrow{PQ} , marquemos um ponto G, de modo que $PG \equiv PF$. O ponto $G \in PQ$, já que PF é a distância de P à reta \overrightarrow{QE} que passa por Q e E, que por sua vez é menor do que a distância de P a Q, uma vez que $Q \in \overrightarrow{QE}$, ou seja, $PF = d(P, \overrightarrow{QE}) < PQ$. Tracemos a perpendicular GH ao segmento PQ e construamos um ângulo \widehat{GPI} congruente ao ângulo \widehat{FPB} .

Como s é paralela a r e a reta que passa por P e I intersecta o interior do ângulo de paralelismo \widehat{QPB} , temos, pelas Proposições 5.2 e 5.3, que esta reta intersecta r em um ponto J.

Como a semirreta \overrightarrow{GH} corta o lado PQ do triângulo PQJ, mas não corta o lado QJ (senão teríamos contradição com o Teorema do Ângulo Externo), então esta semirreta deve cortar PJ em algum ponto K (Axioma de Pasch). Em \overrightarrow{PB} marquemos um ponto L tal que $PL \equiv PK$ e tracemos FL. Observemos que os triângulos PGK e PFL são congruentes (caso LAL: $PG \equiv PF$, $\widehat{GPI} \equiv \widehat{FPL} = \widehat{FPB}$ e $PK \equiv PL$). Consequentemente, $\widehat{PFL} \equiv \widehat{PGK}$ é ângulo reto. Logo os pontos Q, F, E e L são colineares. Portanto a semirreta \overrightarrow{QE} corta a reta s, como queríamos.

Terceiro passo: a reta r é paralela à reta s.

Utilizando a Proposição 5.4 concluímos que r é paralela a s por qualquer um de seus pontos, concluindo a demonstração. □

Finalmente, vale a propriedade da transitividade na noção de paralelismo em um determinado sentido, conforme proposição abaixo.

Proposição 5.6 Se as retas s e t são paralelas à reta r em um determinado sentido, então as retas s e t são paralelas.

Demonstração.

Sejam as retas r, s e t conforme as hipóteses apresentadas.

1º caso: r está entre s e t. (figura abaixo à esquerda) ⁽⁴⁾

Sejam A, B \in s e C \in t de tal modo que $AC \perp t$ e a semirreta \overrightarrow{AB} seja lado do ângulo de paralelismo entre s e r em A.

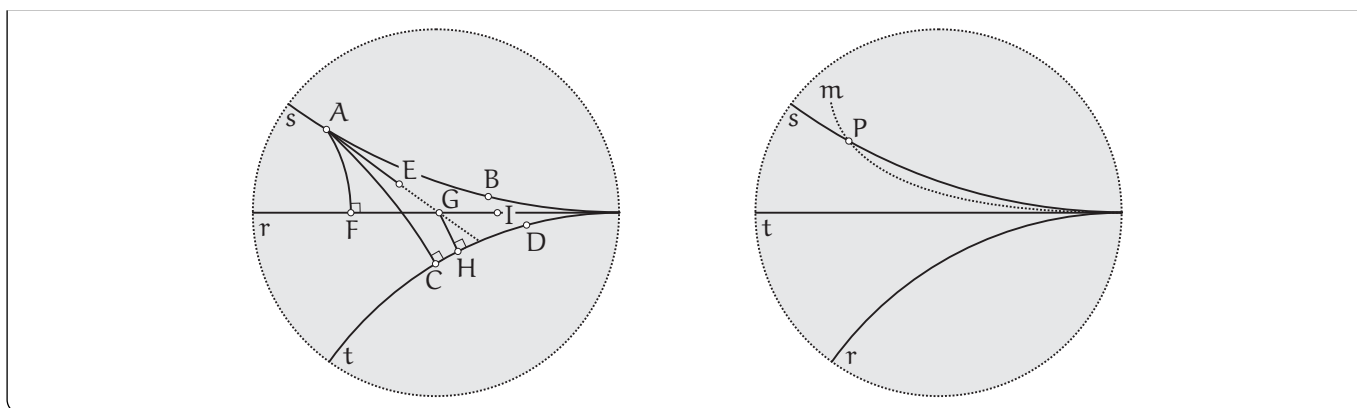
Seja E ponto no interior do ângulo \widehat{CAB} e entre s e r. É fácil verificar que E está, também, no interior do ângulo de paralelismo entre s e r em A (ângulo \widehat{FAB} da figura abaixo à esquerda). Como s é paralela a r por A, pela Proposição 5.3, a semirreta \overrightarrow{AE} intersecta r em um ponto G.

É fácil mostrar que a semirreta \overrightarrow{AE} intersecta o interior do ângulo de paralelismo entre r e t em G (ângulo \widehat{HGI} da figura abaixo à esquerda). Logo, pela Proposição 5.3, a semirreta \overrightarrow{AE} intersecta a reta t. Por fim, utilizando a Proposição 5.4 temos a prova do resultado neste caso.

2º caso: t está entre r e s. (figura abaixo à direita)

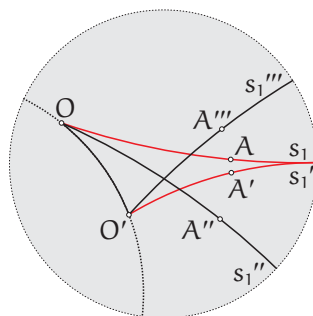
Tomemos um ponto P \in s. Consideremos a reta m passando por P, paralela a t, no mesmo sentido do paralelismo das demais retas.

De acordo com o primeiro caso provado, m é paralela a r. Logo, m e s são paralelas a r por P em um mesmo sentido. Pela Proposição 5.2 temos s = m. Isto e a Proposição 5.4 conclui o resultado neste caso. □



5.2 Pontos Ideais

Dizemos que *duas semirretas* $s_1 = \overrightarrow{OA}$ e $s'_1 = \overrightarrow{O'A'}$ são *paralelas em um mesmo sentido* quando suas retas suportes s e s' são paralelas e, além disso, qualquer semirreta $s''_1 = \overrightarrow{OA''}$ contida no interior do setor angular determinado pelo ângulo $\widehat{AOO'}$ intersecta s'_1 (ou, equivalentemente, qualquer semirreta $s'''_1 = \overrightarrow{O'A'''}$ contida no interior do setor angular determinado pelo ângulo $\widehat{A'O'O}$ intersecta s_1).



Assim como nas retas, é comum omitir a expressão “em um mesmo sentido” no caso de semirretas paralelas.

Indiquemos o plano hiperbólico por H e consideremos o conjunto S de todas as semirretas de H .

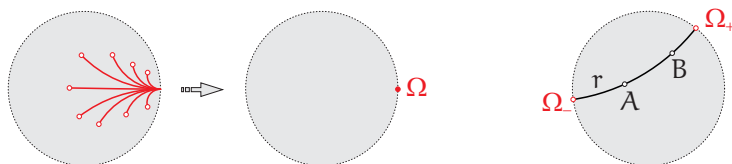
Embora o conceito de paralelismo entre retas introduzido na seção anterior não admita que duas retas paralelas possam ser iguais (pois aí teríamos apenas uma reta e não duas), vamos convencionar, por enquanto, que uma reta possa ser paralela a ela mesma para podermos introduzir uma relação de equivalência \sim em S envolvendo tal conceito.

Sejam $s_1, s_2 \in S$. Definimos:

$$s_1 \sim s_2 \iff s_1 // s_2.$$

Considerando a convenção de que uma reta ou semirreta pode ser paralela a ela mesma e as duas últimas proposições acima, temos que a relação \sim é uma relação de equivalência em S .

As classes de equivalência da relação \sim definida acima no conjunto S das semirretas do plano hiperbólico H são chamadas de *pontos ideais* ou *pontos no infinito* ou *pontos ômegas* de H . Veja a figura abaixo.



Geralmente uma classe de equivalência acima é indicada pela letra Ω .

É bastante útil pensar em um ponto ideal Ω como um ponto do bordo do Modelo do Disco de Poincaré para a Geometria Hiperbólica e considerá-lo como o “ponto de convergência” de todas as semirretas da classe que o define.

Sejam r uma reta e $A \in r$. Logo, A define duas semirretas em r que podem ser representantes de duas classes de equivalência acima definidas. Qualquer outro ponto $B \in r$ definirá as mesmas classes que A define. Assim, podemos dizer que uma reta r determina dois pontos ideais, um para cada sentido de paralelismo em r . Indicando tais pontos

⁴A reta r divide o plano hiperbólico em dois semiplanos S_1 e S_2 , sendo r a fronteira de cada um desses semiplanos. Dizer que r está entre s e t significa que $s \subset S_1$ e $t \subset S_2$. Como consequência, qualquer segmento ligando um ponto de s a um ponto de t deve intersectar r .

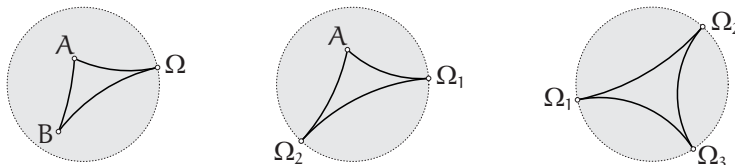
ideais por Ω_- e Ω_+ , podemos imaginá-los com os mesmos papéis dos pontos $-\infty$ e $+\infty$ associados à reta dos números reais. Neste sentido, tendo a noção de reta orientada com sentido positivo e negativo em mente, é conveniente pensar em Ω_- como sendo um ponto que vem “antes” de todos os pontos de r e Ω_+ como sendo um ponto que vem “depois” de todos de r .

Por fim, é conveniente observar que pontos ideais não são pontos do plano hiperbólico (assim como $+\infty$ não é ponto da reta real). Para distingui-los é comum chamar os pontos do plano hiperbólico de *pontos ordinários*.

5.3 Triângulos Generalizados

Sejam:

(i) A, B pontos ordinários e Ω ponto ideal do plano hiperbólico. A figura geométrica formada pelas semirretas $A\Omega$, $B\Omega$ e o segmento AB é chamada de *triângulo generalizado* (ou *triângulo com um vértice ideal*, ou *triângulo ômega*) $AB\Omega$ (figura abaixo à esquerda).



(ii) A ponto ordinário e Ω_1, Ω_2 pontos ideais do plano hiperbólico. A figura geométrica formada pelas semirretas $A\Omega_1, A\Omega_2$ e a reta $\Omega_1\Omega_2$ é chamada de *triângulo generalizado* (ou *triângulo com dois vértices ideais*, ou *triângulo ômega*) $A\Omega_1\Omega_2$ (figura acima ao centro).

(iii) $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ pontos ideais do plano hiperbólico. A figura geométrica formada pelas retas $\Omega_1\Omega_2, \Omega_1\Omega_3$ e $\Omega_2\Omega_3$ é chamada de *triângulo generalizado* (ou *triângulo com vértices ideais*, ou *triângulo ômega*) $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ (figura acima à direita).

Às vezes, triângulos generalizados são chamados simplesmente de *triângulos ideais* (sem especificar a quantidade de vértices ideais).

Dadas as semirretas $P\Omega$ e $Q\Omega$, consideremos suas retas suportes $\Omega'\Omega$ e $\Omega''\Omega$. A figura geométrica formada por $\Omega'\Omega$ e $\Omega''\Omega$ é chamada de *ângulo ideal* $\Omega'\widehat{\Omega}\Omega''$ e sua medida é definida como sendo *nula*. Tal ângulo pode ser também indicado por $P\widehat{\Omega}Q$.

Desta forma, um triângulo generalizado possuirá pelo menos um ângulo interno ideal, cuja medida é nula.

Seja S_1 o semiplano originado por $\Omega'\Omega$ e que contenha $\Omega''\Omega$. Seja S_2 o semiplano originado por $\Omega''\Omega$ e que contenha $\Omega'\Omega$. Ao conjunto $(S_1 \cap S_2) - (\Omega'\Omega \cup \Omega''\Omega)$, ou seja, intersecção dos semiplanos S_1 e S_2 excetuando-se as retas que os originam, é chamado de *interior do ângulo ideal* $\Omega'\widehat{\Omega}\Omega''$.

À intersecção dos interiores dos ângulos internos de um triângulo generalizado chamamos de *interior do triângulo generalizado*.

Observação. Polígonos convexos generalizados podem ser definidos de modo análogo.

Propriedades de Triângulos Generalizados

Dizemos que uma reta *entra* em um triângulo generalizado quando a intersecção desta reta com o interior do triângulo generalizado for não vazia.

Seja $AB\Omega$ um triângulo generalizado. Dizemos que uma reta r *passa* por um dos vértices de $AB\Omega$ quando $A \in r$ ou $B \in r$ ou Ω é um dos pontos ideais de r . Analogamente, este conceito estende-se para triângulos generalizados $A\Omega_1\Omega_2$ ou $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$.

Proposição 5.7 Se uma reta r entra em um triângulo generalizado $AB\Omega$ passando por um de seus vértices, então r intersecta o lado do triângulo generalizado oposto a esse vértice.

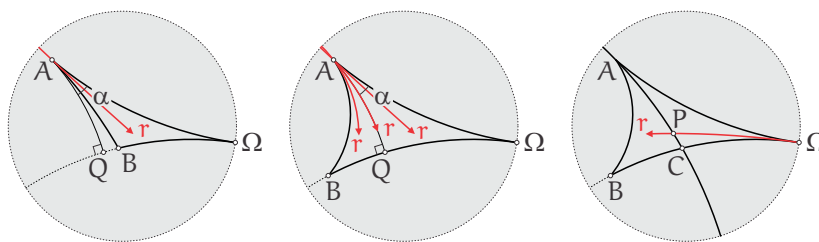
Demonstração da Proposição 5.7.

(i) Seja r entrando em $AB\Omega$ por A .

Seja Q o pé da perpendicular baixada de A até a reta $\overleftrightarrow{B\Omega}$ e α a medida do ângulo $Q\widehat{A}\Omega$.

Temos dois casos:

(i – 1) Se a medida de $B\widehat{A}\Omega$ é menor do que ou igual a α , então, pela Proposição 5.2, temos $r \cap B\Omega \neq \emptyset$ (figura abaixo à esquerda).



(i – 2) Se a medida de $\widehat{B\tilde{A}\Omega}$ for maior do que α , temos três situações (figura acima ao centro):

(i – 2.1) Se r entra em $AQ\Omega$, então, pela Proposição 5.2, temos $r \cap B\Omega \neq \emptyset$.

(i – 2.2) Se r entra em ABQ , então pela Proposição 3.7, $r \cap BQ \neq \emptyset$.

(i – 2.3) Se r contém Q , então $r \cap B\Omega = \{Q\} \neq \emptyset$.

(ii) Seja r entrando em $AB\Omega$ por Ω .

Consideremos um ponto $P \in r$ no interior de $AB\Omega$, conforme a figura acima à direita.

Logo, \overleftrightarrow{AP} intersecta $B\Omega$ em um ponto C .

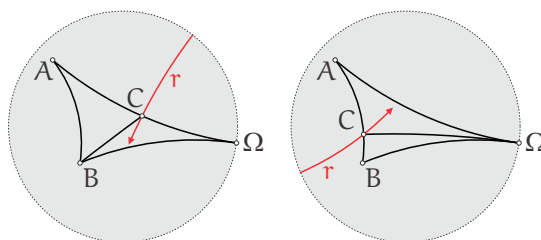
Logo, r entra no triângulo ABC . Pelo Axioma de Pasch, r corta AB ou BC . A reta r não corta BC pois, caso contrário, r e $\overleftrightarrow{B\Omega}$ seriam paralelas a $\overleftrightarrow{A\Omega}$ em um mesmo sentido com um ponto em comum, ou seja $r = \overleftrightarrow{B\Omega}$. Contradição!

Logo, $r \cap AB \neq \emptyset$. □

Proposição 5.8 Se uma reta r entra em um triângulo generalizado $AB\Omega$ intersectando um de seus lados mas não passando por nenhum de seus vértices, então r intersecta um dos outros dois lados do triângulo generalizado.

Demonstração.

(i) Se r entra em $AB\Omega$ por $A\Omega$, então consideremos $\{C\} = r \cap A\Omega$, conforme a figura abaixo à esquerda.



Temos dois casos:

(i – 1) Se r entra em $BC\Omega$, pela proposição acima, $r \cap B\Omega \neq \emptyset$.

(i – 2) Se r entra em ABC , pela Proposição 3.7, $r \cap AB \neq \emptyset$.

Observação: r não contém BC pois, caso contrário, $B \in r$ que é contra a hipótese.

(ii) Se r entra em $AB\Omega$ por AB , então consideremos $\{C\} = r \cap AB$, conforme a figura acima à direita.

Temos, novamente, dois casos:

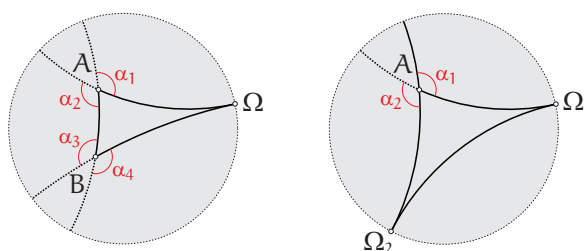
(ii – 1) Se r entra em $AC\Omega$, pela proposição acima, $r \cap A\Omega \neq \emptyset$.

(ii – 2) Se r entra em $BC\Omega$, pela proposição acima, $r \cap B\Omega \neq \emptyset$.

Por fim, a reta r não contém $C\Omega$ pois, caso contrário, r passaria por Ω , o que é contrário à hipótese. □

Observação: as duas proposições acima podem ser facilmente estendidas para os outros dois tipos de triângulos generalizados. Além disso, elas são os “Axiomas de Pasch” para triângulos generalizados $AB\Omega$.

Seja $AB\Omega$ triângulo generalizado. Os **ângulos externos** de $AB\Omega$ são os ângulos suplementares de $\widehat{B\tilde{A}\Omega}$ e $\widehat{A\tilde{B}\Omega}$ construídos sobre as retas suportes de AB , $A\Omega$ e $B\Omega$ (figura abaixo à esquerda).



Capítulo 5. Geometria Hiperbólica Plana

Seja $A\Omega_1\Omega_2$ triângulo generalizado. Os *ângulos externos* de $A\Omega_1\Omega_2$ são os ângulos suplementares de $\Omega_1\hat{A}\Omega_2$ construídos sobre as retas suportes de $A\Omega_1$ e $A\Omega_2$ (figura acima à direita).

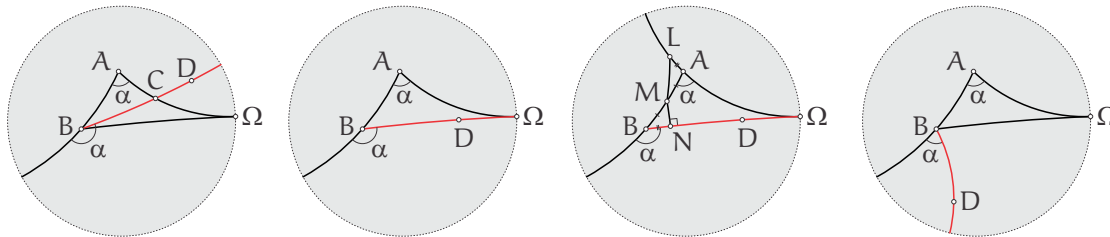
Triângulos generalizados $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ não possuem ângulos externos.

Proposição 5.9 (Teorema do Ângulo Externo para Triângulos Generalizados) Um ângulo externo de um triângulo generalizado é sempre maior do que o ângulo interno que não lhe seja adjacente.

Demonstração.

Um ângulo externo de um triângulo generalizado é sempre não nulo. Logo, é maior que o ângulo nulo dos vértices ideais. Resta mostrar que um ângulo externo em B é maior do que o ângulo em A em $AB\Omega$.

Consideremos a semirreta \overrightarrow{BD} conforme a figura abaixo.



Temos três possibilidades para \overrightarrow{BD} :

(i) \overrightarrow{BD} “entra” no triângulo $AB\Omega$ pelo vértice B (primeira das figuras acima). Logo, pela Proposição 5.7, $\overrightarrow{BD} \cap \overrightarrow{A\Omega} = \{C\}$. Temos, portanto, um triângulo ABC com ângulo externo α e ângulo interno não adjacente α . Contradição com o Teorema do Ângulo Externo. Portanto, essa possibilidade não ocorre.

(ii) \overrightarrow{BD} coincide com o lado $\overrightarrow{B\Omega}$ do triângulo $AB\Omega$ (segunda das figuras acima). Neste caso, sejam M o ponto médio de AB, N o pé da perpendicular baixada de M a $\overrightarrow{B\Omega}$ e $L \in \overrightarrow{A\Omega}$ tal que $LA \equiv BN$. Há três possibilidades para L:

(1) se N coincidir com B, então L coincide com A e α é reto. Teríamos, portanto, um ângulo de paralelismo reto, o que é uma contradição com a Proposição 5.3.

(2) se N estiver entre B e Ω , tomamos L tal que A esteja entre L e Ω (terceira das figuras acima).

(3) se N for tal que B esteja entre N e Ω , tomamos L entre A e Ω .

Os casos (2) e (3) são análogos e, pelo caso LAL de congruência de triângulos, teríamos $BNM \equiv ALM$. Logo, L, M e N seriam colineares e ML seria perpendicular a $\overrightarrow{A\Omega}$. Novamente contradição com a Proposição 5.3, pois assim, teríamos um ângulo de paralelismo reto.

Concluimos que a possibilidade (ii) não ocorre.

(iii) \overrightarrow{BD} divide um ângulo externo do triângulo $AB\Omega$ (quarta das figuras acima). Logo, a medida de um ângulo externo de $AB\Omega$ em B é maior do que a medida de α , como queríamos. \square

Congruência em Triângulos Generalizados

Dizemos que dois triângulos generalizados $AB\Omega$ e $A'B'\Omega'$ são *congruentes* quando $AB \equiv A'B'$, $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ e $\hat{B} \equiv \hat{B}'$. Indicamos por $AB\Omega \equiv A'B'\Omega'$.

Dizemos que dois triângulos generalizados $A\Omega_1\Omega_2$ e $A'\Omega'_1\Omega'_2$ são *congruentes* quando $\hat{A} \equiv \hat{A}'$. Indicamos por $A\Omega_1\Omega_2 \equiv A'\Omega'_1\Omega'_2$.

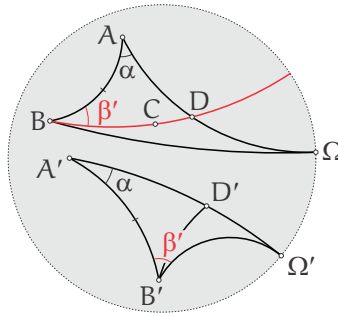
Definimos que todos os triângulos generalizados $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ são congruentes entre si.

Proposição 5.10 (Caso “lado-ângulo” - LA - de congruência para triângulos generalizados) Sejam $AB\Omega$ e $A'B'\Omega'$ triângulos generalizados. Se $AB \equiv A'B'$ e $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, então $AB\Omega \equiv A'B'\Omega'$.

Demonstração.

Devemos mostrar que $\hat{B} \equiv \hat{B}'$.

Suponhamos que $\hat{B} > \hat{B}' = \beta'$.



Seja C no interior de $AB\Omega$ tal que $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'\Omega'} = \beta'$, conforme a figura acima. Logo, a semirreta \overrightarrow{BC} intersecta o lado $A\Omega$ do triângulo $AB\Omega$ em um ponto D . Assim,

$$\widehat{ABD} \equiv \widehat{A'B'\Omega'} = \beta'. \quad (*)$$

Seja $D' \in A'\Omega'$ tal que $AD \equiv A'D'$.

Logo, $ABD \equiv A'B'D'$, pelo caso de congruência de triângulos LAL. Assim, de (*) temos

$$\widehat{A'B'D'} \equiv \widehat{A'B'\Omega'} = \beta',$$

o que é uma contradição, pois a semirreta $\overrightarrow{B'D'}$ divide o ângulo $\widehat{A'B'\Omega'}$ e, portanto, $\widehat{A'B'D'} < \widehat{A'B'\Omega'}$.

Logo, $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$, como queríamos. □

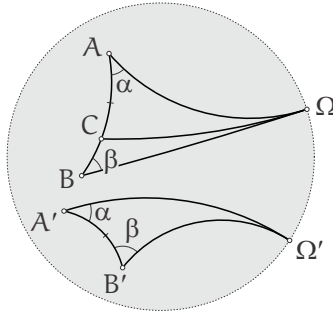
Proposição 5.11 (Caso “ângulo-ângulo” - AA - de congruência para triângulos generalizados) Sejam $AB\Omega$ e $A'B'\Omega'$ triângulos generalizados. Se $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$, então $AB\Omega \equiv A'B'\Omega'$.

Demonstração.

Devemos mostrar que $AB \equiv A'B'$.

Suponhamos que $AB > A'B'$.

Seja $C \in AB$ tal que $AC \equiv A'B'$, conforme a figura abaixo.



Logo, pelo caso de congruência LA para triângulos generalizados, temos $AC\Omega \equiv A'B'\Omega'$. Logo, $\widehat{C} \equiv \widehat{B'} \equiv \widehat{B}$, ou seja,

$$\widehat{A\hat{C}\Omega} \equiv \widehat{C\hat{B}\Omega},$$

o que é uma contradição com o *Teorema do Ângulo Externo para Triângulos Generalizados*, pois $\widehat{A\hat{C}\Omega}$ é ângulo externo do triângulo generalizado $CB\Omega$.

Assim, $AB \equiv A'B'$, como queríamos. □

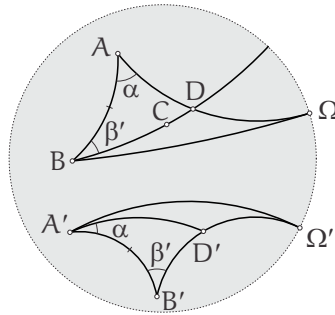
Dizemos que o triângulo generalizado $AB\Omega$ é *isósceles* de base AB quando $\widehat{A} \equiv \widehat{B}$. ⁽⁵⁾

Proposição 5.12 (Caso “triângulos isósceles” de congruência para triângulos generalizados) Todos os triângulos generalizados isósceles com bases de mesma medida são congruentes entre si, ou seja, se $AB\Omega$ e $A'B'\Omega'$ são tais que $AB \equiv A'B'$, $\widehat{A} \equiv \widehat{B}$ e $\widehat{A'} \equiv \widehat{B'}$, então $AB\Omega \equiv A'B'\Omega'$.

⁵Observe que essa definição difere da definição de triângulo isósceles ordinário (dois lados de mesmo comprimento) pois, neste caso, ângulos congruentes na base é consequência da definição.

Demonstração.

É suficiente mostrar que $\widehat{B} \equiv \widehat{B}' = \beta'$ e usar o caso de congruência LA para triângulos generalizados. Suponhamos que $\widehat{B} > \widehat{B}' = \beta'$. Seja C no interior do triângulo $AB\Omega$ de tal modo que $\widehat{CBA} \equiv \widehat{B}' = \beta'$, conforme a figura abaixo.



Pela Proposição 5.7, a semirreta \overrightarrow{BC} intersecta o lado $A\Omega$ do triângulo generalizado $AB\Omega$ em um ponto que chamamos de D.

Seja $D' \in B'\Omega'$ tal que $B'D' \equiv BD$. Pelo caso de congruência de triângulos LAL, temos $ABD \equiv A'B'D'$ e, em particular, $\widehat{B'A'D'} \equiv \widehat{BAD} = \alpha$.

Logo,

$$B'\widehat{A'D'} < B'\widehat{A'\Omega'} \implies \widehat{BAD} < B'\widehat{A'\Omega'} \implies \widehat{BA\Omega} < B'\widehat{A'\Omega'} \implies \widehat{A} < \widehat{A}'.$$

Assim,

$$\widehat{B} > \widehat{B}' \text{ e } \widehat{A} < \widehat{A}' \implies \widehat{A} + \widehat{B}' < \widehat{B} + \widehat{A}',$$

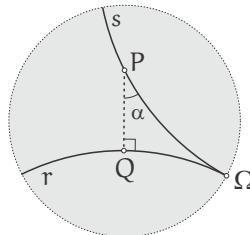
contradição, pois $\widehat{B}' \equiv \widehat{A}'$ e $\widehat{A} \equiv \widehat{B}$, o que implica em $\widehat{A} + \widehat{B}' \equiv \widehat{B} + \widehat{A}'$.

Assim, $\widehat{B} \equiv \widehat{B}'$, como queríamos. □

5.4 O Ângulo de Paralelismo

Consideremos o ângulo de paralelismo entre as retas s e r no ponto $P \in s$, definido na primeira seção, onde estudamos o paralelismo na Geometria Hiperbólica.

Notemos que a noção de ângulo de paralelismo está associada a um triângulo retângulo generalizado $PQ\Omega$ e que seu ângulo interno \widehat{P} é exatamente o ângulo de paralelismo entre s e r em $P \in s$, conforme a figura abaixo.



Sendo assim, chamemos o ângulo \widehat{P} de *ângulo de paralelismo do triângulo retângulo generalizado $PQ\Omega$ relativo à altura PQ* .

Como r , s e Ω estão fixos, notemos que o ângulo de paralelismo \widehat{P} depende apenas da altura PQ do triângulo retângulo generalizado $PQ\Omega$. Logo, podemos definir uma função, chamada de *função ângulo de paralelismo*, do seguinte modo:

$$\Theta: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ a \mapsto \alpha$$

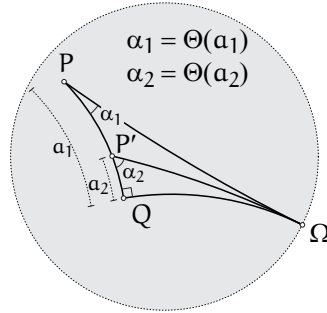
tal que a é a medida da altura PQ do triângulo retângulo generalizado $PQ\Omega$ e α é a medida, em radianos, de seu ângulo interno agudo \widehat{P} .

Proposição 5.13 A função ângulo de paralelismo é estritamente decrescente e, portanto, injetiva.

Demonstração.

Sejam $a_1 > a_2$. Devemos mostrar que $\Theta(a_1) < \Theta(a_2)$.

De fato, observemos a figura abaixo.



Pelo Teorema do Ângulo Externo para o triângulo generalizado $PP'\Omega$, temos $\alpha_2 > \alpha_1$ pois α_2 é ângulo externo de $PP'\Omega$ e α_1 é ângulo interno não adjacente. Logo, $\Theta(a_1) < \Theta(a_2)$, como queríamos. \square

Proposição 5.14 A função ângulo de paralelismo é sobrejetiva se restringirmos seu contra-domínio ao intervalo aberto $]0, \pi/2[\subset \mathbb{R}$.

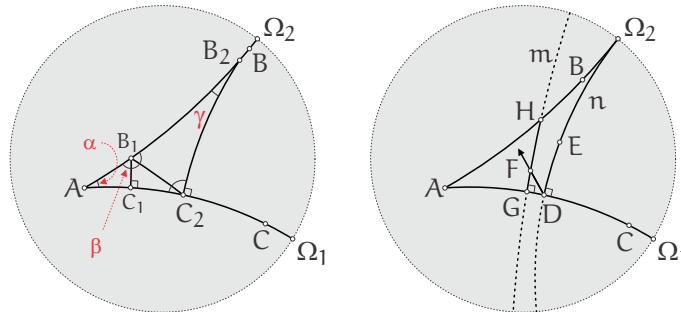
Demonstração.

Construamos um ângulo \widehat{BAC} agudo de medida, em radianos, $\alpha \in]0, \pi/2[$.

Afirmamos que existem retas perpendiculares à semirreta \overrightarrow{AC} que não intersectam a semirreta \overrightarrow{AB} .

De fato, suponhamos que qualquer reta perpendicular à semirreta \overrightarrow{AC} intersecte a semirreta \overrightarrow{AB} .

Tomemos C_1 em \overrightarrow{AC} e B_1 intersecção da reta perpendicular à semirreta \overrightarrow{AC} , passando por C_1 , com a semirreta \overrightarrow{AB} (figura abaixo à esquerda). A soma das medidas dos ângulos internos do triângulo retângulo AB_1C_1 é menor do que π radianos (decorrência de equivalente do Postulado de Lobachewsky), digamos $\pi - \varepsilon$. Tomemos o ponto C_2 em \overrightarrow{AC} tal que $AC_2 = 2 \cdot AC_1$, e consideremos o ponto B_2 onde a reta perpendicular à semirreta \overrightarrow{AC} , passando por C_2 , intersecta a semirreta \overrightarrow{AB} (figura abaixo à esquerda).



Os triângulos retângulos AB_1C_1 e $C_2B_1C_1$ são congruentes pelo caso LAL. Além disso, o triângulo $\widehat{B_1B_2C_2}$ possui soma das medidas dos ângulos internos menor do que π radianos. Chamando a medida do ângulo $\widehat{AB_1C_1}$ de β e a medida do ângulo $\widehat{AB_2C_2}$ de γ , temos:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \frac{\pi}{2} - \varepsilon; \text{ (do triângulo } AB_1C_1) \\ \alpha + \beta &= \frac{\pi}{2} - \varepsilon; \text{ (do triângulo } C_2B_1C_1) \\ \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + (\pi - 2\beta) + \gamma &< \pi; \text{ (do triângulo } B_1B_2C_2) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) + (\alpha + \beta) + \left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + (\pi - 2\beta) + \gamma\right) &< \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) + \pi \Rightarrow \\ \alpha + \frac{3\pi}{2} + \gamma &< 2\pi - 2\varepsilon \Rightarrow \\ \alpha + \frac{\pi}{2} + \gamma &< \pi - 2\varepsilon, \end{aligned}$$

o que permite concluir que a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo AB_2C_2 é menor do que $\pi - 2\varepsilon$.

Continuando a construção geométrica dos triângulos retângulos iniciada acima, chegamos a triângulos AB_nC_n com soma das medidas dos ângulos internos menor do que $\pi - n\varepsilon$. Tomando n suficientemente grande, obtem-se um triângulo cuja soma das medidas dos ângulos internos é negativa, o que é um absurdo.

Logo, existe pelo menos uma reta perpendicular à semirreta \overrightarrow{AC} que não intersecta a semirreta \overrightarrow{AB} .

Assim, existem retas perpendiculares à \overrightarrow{AC} que intersectam a semirreta \overrightarrow{AB} e que não intersectam a semirreta \overrightarrow{AB} ; e elas estão separadas (*). Logo, pelo *Axioma de Dedekind*, existe exatamente uma reta n , perpendicular à semirreta \overrightarrow{AC} , separando estas duas classes de retas.

Mostremos que n é paralela a \overrightarrow{AB} .

Seja D o ponto onde n intersecta \overrightarrow{AC} (figura acima à direita). Considere uma semirreta qualquer \overrightarrow{DF} que divida o ângulo \widehat{ADE} . Afirmamos que \overrightarrow{DF} intersecta \overrightarrow{AB} . De fato, F pertence a uma das retas perpendiculares m a \overrightarrow{AC} que intersectam \overrightarrow{AB} . Sejam $\{G\} = m \cap \overrightarrow{AC}$ e $\{H\} = m \cap \overrightarrow{AB}$. Temos a semirreta \overrightarrow{DF} entrando no triângulo AGH pelo lado GH . Como \overrightarrow{DF} não intersecta \overrightarrow{AC} em outro ponto distinto de D , pelo *Axioma de Pash*, \overrightarrow{DF} intersecta o lado AH do triângulo AGH e, portanto, intersecta \overrightarrow{AB} .

Mas, se qualquer semirreta que divide o ângulo \widehat{ADE} intersecta \overrightarrow{AB} , então \overrightarrow{DE} é paralela a \overrightarrow{AB} . Portanto, o comprimento a do segmento AD tem α como ângulo de paralelismo. \square

Com os dois resultados acima temos uma bijeção entre \mathbb{R}_+ e $]0, \pi/2[$ pela *Função Ângulo de Paralelismo*. Portanto, se $\alpha \in \mathbb{R}_+$ é a medida de um ângulo de paralelismo \widehat{P} em um triângulo retângulo generalizado $PQ\Omega$, então α depende apenas de um único $a = PQ$. Desta forma, podemos simplificar a nomenclatura (com um certo abuso de linguagem) e dizer que “ α é ângulo de paralelismo de a ”.

Proposição 5.15 A função ângulo de paralelismo é contínua.

Demonstração.

Seja $a_0 \in \mathbb{R}_+$. Mostremos que Θ é contínua em a_0 . Façamos $\Theta(a_0) = \alpha_0$. Assim, devemos mostrar que:

$$\text{Dado } \varepsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que } |a - a_0| < \delta \Rightarrow |\Theta(a) - \Theta(a_0)| = |\alpha - \alpha_0| < \varepsilon, \quad (1)$$

sendo $\Theta(a) = \alpha$.

Tomemos $\varepsilon > 0$. Seja $\alpha' > \alpha_0$; $\alpha' \in]0, \pi/2[$; tal que $\alpha' - \alpha_0 < \varepsilon$. Como Θ é sobrejetiva, temos a existência de a' tal que $\Theta(a') = \alpha'$. Além disso, como Θ é decrescente, temos também $a' < a_0$. Façamos $a_0 - a' = \delta' > 0$. Assim:

$$a' < a < a_0 \Rightarrow \alpha' > \alpha > \alpha_0,$$

sendo $\Theta(a) = \alpha$, ou seja,

$$|a - a_0| < |a' - a_0| = \delta' \Rightarrow |\alpha - \alpha_0| < |\alpha' - \alpha_0| < \varepsilon.$$

De modo análogo, seja $\alpha'' < \alpha_0$; $\alpha'' \in]0, \pi/2[$; tal que $\alpha_0 - \alpha'' < \varepsilon$. Como Θ é sobrejetiva, temos a existência de a'' tal que $\Theta(a'') = \alpha''$. Além disso, como Θ é decrescente, temos também $a'' > a_0$. Façamos $a'' - a_0 = \delta'' > 0$. Assim:

$$a_0 < a < a'' \Rightarrow \alpha_0 > \alpha > \alpha'',$$

sendo $\Theta(a) = \alpha$, ou seja,

$$|a - a_0| < |a'' - a_0| = \delta'' \Rightarrow |\alpha - \alpha_0| < |\alpha'' - \alpha_0| < \varepsilon.$$

Tomando $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ temos (1) satisfeita.

Como a_0 é arbitrário, temos Θ contínua. \square

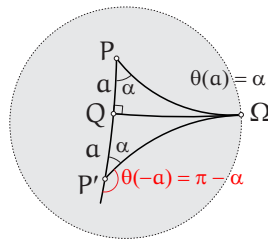
Extensão da Função Ângulo de Paralelismo

Podemos estender o domínio da função ângulo de paralelismo Θ ao conjunto dos números reais \mathbb{R} do modo seguinte.

Definamos a função θ tal que, para $a > 0$: $\theta(a) = \Theta(a)$, $\theta(0) = \pi/2$ e $\theta(-a) = \pi - \Theta(a)$. Assim, a chamada *função ângulo de paralelismo estendida* θ é dada por:

$$\theta: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \alpha, & \text{se } x > 0 \\ \pi/2, & \text{se } x = 0 \\ \pi - \alpha, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

sendo α a medida do ângulo de paralelismo \widehat{P} do triângulo retângulo generalizado $PQ\Omega$ relativo à altura PQ de medida $a = |x|$, conforme a figura abaixo.



Observemos que o fato de Θ ser contínua implica em θ ser contínua em $\mathbb{R} - \{0\}$.

Também somos induzidos, pela representação geométrica de θ dada acima, a considerar que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta(x) = \frac{\pi}{2}$. Como

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \theta(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \theta(-x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\pi - \theta(x)) = \pi - \lim_{x \rightarrow 0^+} \theta(x) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

somos levados a crer que $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{\pi}{2} = \theta(0)$, ou seja, que θ seja contínua em 0 e, portanto, contínua em \mathbb{R} .

No próximo capítulo iremos deduzir uma expressão analítica para θ onde poderemos constatar que θ é contínua, decrescente e bijetora quando restringimos o contradomínio ao intervalo aberto $]0, \pi[\subset \mathbb{R}$.

5.5 Polígonos

Nesta seção apresentamos alguns resultados concernentes a polígonos hiperbólicos, mais especificamente, apresentamos resultados sobre soma de ângulos de polígonos, um novo caso de congruência de triângulos e um estudo de dois tipos especiais de quadriláteros.

Para tanto, vamos considerar polígonos “ordinários” e polígonos “generalizados”, conforme a seguinte definição:

Um polígono hiperbólico é dito **ordinário** quando todos os seus vértices são pontos ordinários do plano hiperbólico.

Observação: a definição de “*polígono*” na Geometria Hiperbólica Plana é a mesma da Geometria Euclidiana Plana.

Um polígono hiperbólico é dito **generalizado** ou **ideal** quando possui pelo menos um de seus vértices como sendo um ponto ideal. Desta forma, triângulos generalizados são casos particulares de polígonos hiperbólicos generalizados. Além disso, polígonos hiperbólicos generalizados possuem pelo menos dois lados como sendo semirretas (ou retas), portanto, pelo menos dois lados com comprimentos infinitos.

Soma de Medidas de Ângulos Internos

Proposição 5.16 A soma dos ângulos internos de um triângulo ordinário é menor do que dois retos.

Demonstração.

Considerando-se os *Axiomas de Hilbert* excetuando-se o *Axioma das Paralelas de Euclides* (*Axioma de Playfair*), vimos que é possível provar as duas *Proposições de Legendre*.

Suponhamos que exista um triângulo ordinário cuja soma de ângulos internos seja igual a dois retos.

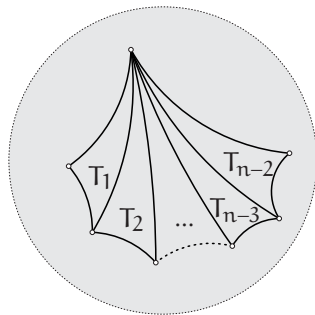
Pela *Segunda Proposição de Legendre* concluímos que todos os triângulos ordinários possuirão soma de ângulos internos igual a dois retos, que é precisamente o equivalente **P5.2** ao *Axioma das Paralelas de Euclides* já provado. Assim, chegamos a uma contradição com o fato de que tal axioma não vale na Geometria Hiperbólica.

Conclusão: todo triângulo ordinário possui soma de ângulos internos menor do que dois retos. □

Corolário 5.1 A soma dos ângulos internos de um polígono convexo ordinário de n lados possui medida menor do que $(n - 2)\pi$.

Demonstração.

A partir de um dos vértices de um polígono convexo de n lados podemos traçar as diagonais ⁽⁶⁾, dividindo assim o polígono em $n - 2$ triângulos T_1, T_2, \dots, T_{n-2} (resultado da *Geometria Euclidiana*), conforme a figura abaixo.



Vimos que triângulos ordinários têm soma dos ângulos internos menor que dois ângulos retos, $S_{T_1}, S_{T_2}, \dots, S_{T_{(n-2)}} < \pi$. Logo, a soma dos ângulos de todos os $(n - 2)$ triângulos é dada pela soma $S_{T_1} + S_{T_2} + \dots + S_{T_{(n-2)}} < \pi + \pi + \dots + \pi = (n - 2)\pi$, como queríamos. \square

O resultado acima também é válido para polígonos não convexos, pois sempre é possível decompor um polígono qualquer de n lados em $n - 2$ triângulos.

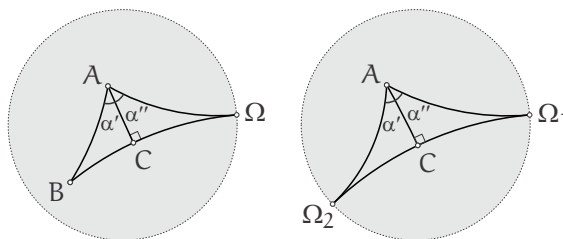
Proposição 5.17 A soma dos ângulos internos de um triângulo generalizado é menor do que dois retos.

Demonstração.

Podemos dividir em três casos:

1º caso: triângulo generalizado $AB\Omega$.

Sem perda de generalidade, suponhamos $\hat{A} \geq \hat{B}$. Baixemos a altura relativa ao vértice A , e chamemos de C o pé da altura sobre o lado $B\Omega$, obtendo assim dois triângulos retângulos. Consideremos o triângulo retângulo ordinário ABC e o triângulo retângulo generalizado $AC\Omega$, conforme a figura abaixo à esquerda. Consideremos, ainda, $\alpha = \alpha' + \alpha''$.



Temos $\alpha' + \beta < \frac{\pi}{2}$ radianos (proposição), $\alpha'' < \frac{\pi}{2}$ radianos (o ângulo de paralelismo é agudo - Proposição 5.3) e $\hat{\Omega}$ é nulo por definição. Logo, $\alpha' + \alpha'' + \beta < \pi$ e como $\alpha' + \alpha'' = \alpha$, concluímos que $\alpha + \beta < \pi$.

2º caso: triângulo generalizado $A\Omega_1\Omega_2$ (figura acima à direita).

Por definição os ângulos em Ω_1 e Ω_2 são nulos. Como as semirretas $\overrightarrow{A\Omega_1}$ e $\overrightarrow{A\Omega_2}$ são paralelas ao lado $\overleftrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$ à esquerda e à direita, respectivamente. Basta-nos baixar a perpendicular de $\overleftrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$ pelo ponto A para podemos fazer uso do ângulo de paralelismo. Sabendo que os ângulos de paralelismo são agudos, podemos concluir que $\alpha < \pi$ radianos.

3º caso: triângulo generalizado $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$. É imediato que a soma dos ângulos do triângulo é menor que π radianos pois, por definição, os três ângulos são nulos, o que resulta em soma nula. \square

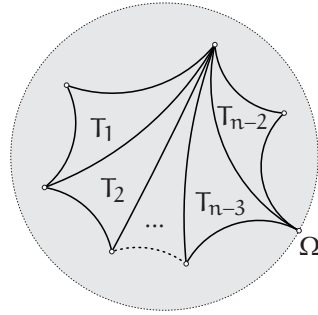
Corolário 5.2 A soma dos ângulos internos de um polígono convexo generalizado de n lados possui medida menor do que $(n - 2)\pi$.

Demonstração.

Um polígono convexo generalizado pode ser dividido em triângulos ordinários ou generalizados, conforme a figura abaixo. A partir de um dos vértices seja ele ordinário ou ideal, de um polígono convexo de n lados podemos traçar

⁶Diagonais em polígonos convexos ordinários são segmentos que ligam dois vértices não adjacentes, e em polígonos convexos generalizados podem ser retas ou semirretas que atingem os vértices ideais.

as diagonais dividindo assim o polígono em $n - 2$ triângulos T_1, T_2, \dots, T_{n-2} . Temos que os triângulos tem soma dos ângulos internos menor que dois ângulos retos, $S_{T_1}, S_{T_2}, \dots, S_{T_{(n-2)}} < \pi$. Logo, a soma dos ângulos de todos os $(n - 2)$ triângulos é dada pela soma $S_{T_1} + S_{T_2} + \dots + S_{T_{(n-2)}} < \pi + \pi + \dots + \pi = (n - 2)\pi$.



Se um polígono tem todos os seus vértices ideais terá soma dos ângulos internos nula. □

À semelhança do caso ordinário, o resultado acima também é válido para polígonos generalizados não convexos.

O Caso de Congruência de Triângulos Ordinários AAA

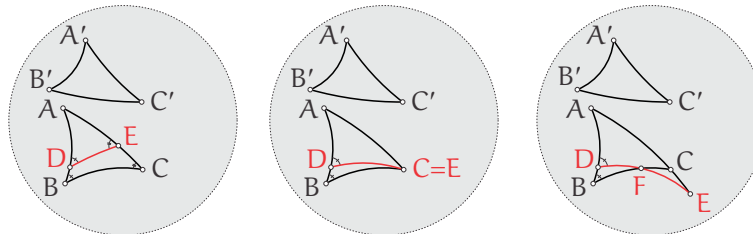
Vimos que na Geometria Hiperbólica não há o conceito de semelhança, pois tal conceito é equivalente ao Quinto Postulado de Euclides. Sendo assim, o que podemos dizer de dois triângulos hiperbólicos ordinários que possuem ângulos internos congruentes? A resposta é dada pela próxima proposição.

Proposição 5.18 (Caso de Congruência AAA da Geometria Hiperbólica) Se ABC e $A'B'C'$ são triângulos ordinários tais que $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$, $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$ e $\widehat{C} \equiv \widehat{C'}$, então $ABC \equiv A'B'C'$.

Demonstração.

Sejam ABC e $A'B'C'$ tais triângulos.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $AB > A'B'$. Sejam $D \in AB$, $E \in \overrightarrow{AC}$ tais que $AD \equiv A'B'$ e $AE \equiv A'C'$, conforme figura abaixo.



1º caso) $AE < AC$ (figura acima à esquerda).

Pelo caso de congruência de triângulos LAL temos $ADE \equiv A'B'C'$. Portanto, $\widehat{ADE} \equiv \widehat{A'B'C'}$ e $\widehat{AED} \equiv \widehat{A'C'B'}$.

Logo, o quadrilátero BDEC possui soma de ângulos internos igual a 2π radianos, o que é uma contradição. Portanto, este caso não ocorre.

2º caso) $C = E$ (figura acima ao centro).

Pelo caso de congruência de triângulos LAL temos $ADE \equiv A'B'C'$. Logo, $\widehat{ADE} \equiv \widehat{A'B'C'} \equiv \widehat{ABC}$, ou seja, o triângulo BDE apresenta um ângulo externo congruente a um ângulo interno não adjacente a este, o que é uma contradição com o Teorema do Ângulo Externo. Portanto, este caso não ocorre.

3º caso) $AE > AC$. (figura acima à direita).

Pelo caso de congruência de triângulos LAL temos $ADE \equiv A'B'C'$. Assim, os triângulos BDF e FCE possuem um ângulo externo congruente a um ângulo interno não adjacente a este, o que é uma contradição com o Teorema do Ângulo Externo. Portanto, este caso não ocorre.

Desta forma, $AB \equiv A'B'$ e, pelo caso de congruência de triângulos ALA, temos $ABC \equiv A'B'C'$. □

Como os cinco casos de congruência da Geometria Euclidiana Plana também são válidos na Geometria Hiperbólica (pois não dependem do Quinto Postulado de Euclides), temos um total de seis casos de congruência para triângulos ordinários, além dos já vistos três casos de congruência dos triângulos generalizados.

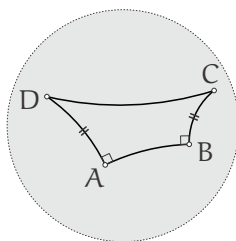
Em síntese temos:

	Caso	Sigla	Triângulo
(1)	lado, ângulo, lado	LAL	ordinário ABC qualquer
(2)	lado, lado, lado	LLL	ordinário ABC qualquer
(3)	ângulo, lado, ângulo	ALA	ordinário ABC qualquer
(4)	lado, ângulo, ângulo oposto (ao lado)	LAA ₀	ordinário ABC qualquer
(5)	cateto, hipotenusa	—	ordinário ABC retângulo
(6)	ângulo, ângulo, ângulo	AAA	ordinário ABC qualquer
(7)	lado, ângulo	LA	generalizado ABΩ qualquer
(8)	ângulo, ângulo	AA	generalizado ABΩ qualquer
(9)	isósceles generalizado	—	generalizado ABΩ isósceles

Lembremos que o caso LAL é estabelecido como um dos axiomas de congruência de Hilbert. Os demais casos, são proposições demonstradas.

Quadriláteros Especiais

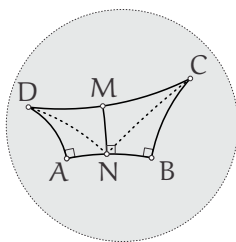
Um quadrilátero convexo ABCD é dito *Quadrilátero de Saccheri* de base AB, topo DC e laterais AD e BC quando os lados laterais são congruentes e perpendiculares ao lado base, ou seja, $AD \equiv BC$, $AD \perp AB$ e $BC \perp AB$ (figura abaixo).



Proposição 5.19 O segmento ligando os pontos médios da base e do topo de um Quadrilátero de Saccheri ABCD é perpendicular a esses lados. Além disso, os ângulos do topo \widehat{C} e \widehat{D} são congruentes e agudos.

Demonstração.

Sejam M e N pontos médios do topo e da base (figura abaixo).



Pelo caso de congruência de triângulos LAL:

$$ADN \equiv BCN \implies DN \equiv NC.$$

Pelo caso de congruência de triângulos LLL:

$$DNM \equiv CNM \implies NM \perp DC.$$

Como

$$\widehat{AND} \equiv \widehat{BNC} \text{ e } \widehat{DNM} \equiv \widehat{CNM} \implies NM \perp AB.$$

Além disso,

$$\widehat{ADN} \equiv \widehat{BCN} \text{ e } \widehat{NDM} \equiv \widehat{NCM} \implies \widehat{D} \equiv \widehat{C},$$

Quanto aos ângulos do topo serem agudos, pela *Primeira Proposição de Legendre*, a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo ABD, ou BDC, é menor do que, ou igual a, π radianos.

Se um desses triângulos possuísse soma das medidas dos ângulos internos igual a π radianos, pela *Segunda Proposição de Legendre*, teríamos que todos os triângulos possuiriam soma das medidas dos ângulos internos igual a

π radianos, o que implicaria no 5º Postulado de Euclides, que é contrário ao Postulado de Lobachewsky. Logo, \widehat{ABD} e \widehat{BDC} possuem, cada um, soma das medidas dos ângulos internos menor do que π radianos. Assim, $\widehat{D} + \widehat{C} < \pi$ e, portanto, $\widehat{D} < \frac{\pi}{2}$, como queríamos. \square

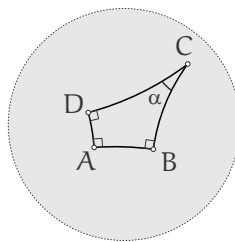
Proposição 5.20 A base e o topo de um Quadrilátero de Saccheri fazem parte de retas hiperparalelas.

Demonstração.

Aproveitemos a figura da demonstração da proposição acima. Se \overleftrightarrow{DC} fosse paralela ou concorrente com \overleftrightarrow{AB} , então \widehat{NMC} seria menor do que, ou igual a, um ângulo de paralelismo, portanto, agudo, o que contradiz a proposição acima. \square

Dizemos que dois Quadriláteros de Saccheri $ABCD$ e $A'B'C'D'$ com bases AB e $A'B'$ e lados $AD, BC \perp AB$ e $A'D', B'C' \perp A'B'$, respectivamente, são **congruentes** quando $AB \equiv A'B'$ e $AD \equiv A'D'$.

Um quadrilátero é dito **Quadrilátero de Lambert** quando possuir três ângulos internos retos.



Observando a Proposição 5.19, concluímos que todo Quadrilátero de Saccheri pode ser decomposto em dois Quadriláteros de Lambert por meio da perpendicular comum à base e o topo do Quadrilátero de Saccheri.

Proposição 5.21 O ângulo interno não conhecido de um Quadrilátero de Lambert é agudo.

Demonstração.

Podemos decompor um quadrilátero qualquer em dois triângulos. Pela Primeira Proposição de Legendre, a soma das medidas dos ângulos internos de cada um dos triângulos é menor do que, ou igual a, π radianos.

Se um desses triângulos possuísse soma das medidas dos ângulos internos igual a π radianos, pela Segunda Proposição de Legendre, teríamos que todos os triângulos possuiriam soma das medidas dos ângulos internos igual a π radianos, o que implicaria no 5º Postulado de Euclides, que é contrário ao Postulado de Lobachewsky. Logo, os dois triângulos da decomposição do Quadrilátero de Lambert possuem, cada um, soma das medidas dos ângulos internos menor do que π radianos. Assim, o ângulo desconhecido do quadrilátero deve ser agudo.

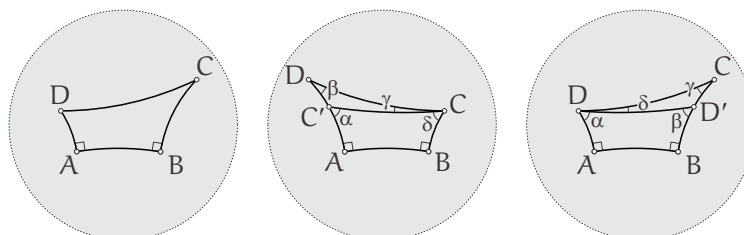
Outra forma de demonstrar essa proposição é construir, a partir do Quadrilátero de Lambert, um Quadrilátero de Saccheri e usar a proposição 5.19. \square

Proposição 5.22 Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo com base AB e laterais AD e BC perpendiculares à base, ou seja, $\widehat{A} \equiv \widehat{B} = \frac{\pi}{2}$. Então,

$$\widehat{C} < \widehat{D} \iff AD < BC.$$

Demonstração.

$(\implies) \widehat{C} < \widehat{D} \implies AD < BC$ (figura abaixo à esquerda).



(i) Se $AD \equiv CB$, então ABCD seria de Saccheri. Logo, teríamos $\widehat{C} \equiv \widehat{D}$, uma contradição.
 (ii) Se $AD > BC$ (figura acima ao centro), seja $C' \in AD$ tal que $AC' \equiv BC$. Logo, $\alpha = \delta$ e, pelo Teorema do Ângulo Externo, $\alpha > \beta$. Assim,

$$\delta > \beta \implies \delta + \gamma > \beta \implies \widehat{C} > \widehat{D},$$

uma contradição com a hipótese.

Concluimos, portanto, que $AD < BC$, como queríamos.

(\Leftarrow) $AD < BC \implies \widehat{C} < \widehat{D}$.

Seja $D' \in BC$ tal que $AD \equiv BD'$ (figura acima à direita). Temos $\alpha = \beta$ e, pelo Teorema do Ângulo Externo, temos

$$\beta > \gamma \implies \alpha > \gamma \implies \alpha + \delta > \gamma \implies \widehat{D} > \widehat{C},$$

como queríamos. □

Uma Aplicação Importante do Quadrilátero de Lambert: Construção Geométrica de Uma Reta Paralela a Uma Reta Dada

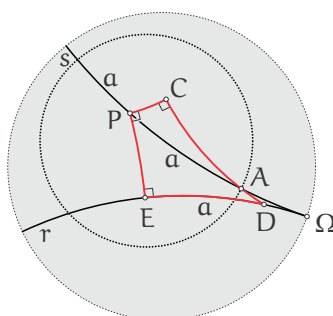
Um problema clássico na Geometria Hiperbólica é:

Dada uma reta r e um ponto P fora dela, construir as duas retas paralelas s e s' à reta r passando pelo ponto P dado usando apenas “régua hiperbólica” sem escala e “compasso hiperbólico”.

No modelo do Disco de Poincaré, isso equivale a não utilizar na construção qualquer ponto do bordo do disco. O roteiro da construção é dado pela proposição abaixo. Não faremos a demonstração dessa proposição neste texto devido ao seu grande número de pré-requisitos e extensão. Entretanto, para aqueles que desejarem estudarem-na, recomendamos a referência [3] páginas de 94 até 102.

Proposição 5.23 Sejam r uma reta e $P \notin r$.
 Trace o segmento PE perpendicular a r com $E \in r$.
 Trace um segmento PC perpendicular a PE de modo seja possível traçar a reta \overleftrightarrow{CD} perpendicular a PC com $D \in r$.
 Trace o círculo de centro P e raio $\alpha = ED$. Esse círculo determina dois pontos $A, A' \in \overleftrightarrow{CD}$.
 Então, as retas $s = \overleftrightarrow{AP}$ e $s' = \overleftrightarrow{A'P}$ são paralelas a r passando por P .

A figura abaixo ajuda a compreender o procedimento descrito na proposição acima e ilustra a reta s .



A Proposição 5.23 acima também suscita algumas observações adicionais:

- (1) Há duas posições relativas para o quadrilátero de Lambert PEDC, a depender de qual lado da reta \overleftrightarrow{PE} em que se constrói o segmento PC . Ambos os quadriláteros possíveis de serem construídos são congruentes e as retas s e s' são as mesmas (prove isto!).
- (2) A existência da reta \overleftrightarrow{CD} depende do comprimento de PC . Se PC for muito grande, pode ser que a reta perpendicular a PC em C não intersecte r .
- (3) Os pontos A e A' de intersecção do círculo de centro P e raio $\alpha = ED$ com a reta \overleftrightarrow{CD} sempre existem, pois no quadrilátero de Lambert PEDC sempre temos $PC < ED$.

5.6 Variação da Distância entre Duas Retas

Proposição 5.24 Duas retas hiperparalelas possuem uma, e somente uma, reta perpendicular em comum.

Demonstração da Proposição 5.24.

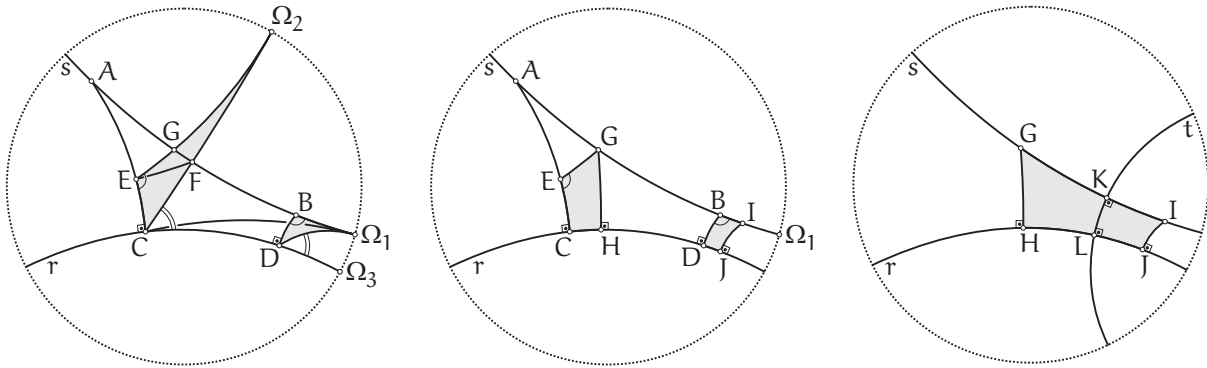
Existência:

A idéia da prova da existência da reta perpendicular comum a duas retas hiperparalelas r e s é a construção de um Quadrilátero de Saccheri tendo base na reta r e topo na reta s , ou seja, a idéia é “encaixar” um Quadrilátero de Saccheri entre as retas r e s . Feito isso, a Proposição 5.19 garante que existirá a reta procurada, bastando para isso tomar a reta que passa pelos pontos médios da base e do topo do quadrilátero.

Sejam r e s retas hiperparalelas. Consideremos A e B pontos distintos de s . Tracemos os segmentos AC e BD perpendiculares a r .

Se $AC \equiv BD$, então o quadrilátero $ACDB$ é de Saccheri. Logo, pela Proposição 5.19, temos que r e s possuem uma reta perpendicular comum.

Se o segmento AC não for congruente ao segmento BD , podemos supor, *sem perda de generalidade*, que $AC > BD$. Seja Ω_1 um dos pontos ideais da reta s de tal modo que B esteja na semirreta $\overrightarrow{A\Omega_1}$. Tomemos $E \in AC$ tal que $EC \equiv BD$, consideremos a semirreta $\overrightarrow{E\Omega_2}$ de tal modo que $\widehat{CE\Omega_2} \equiv \widehat{DB\Omega_1}$ e, além disso, que os triângulos generalizados $EC\Omega_2$ e $BD\Omega_1$ estejam no mesmo semiplano determinado pela reta que passa por A e C , conforme a figura abaixo à esquerda.



Afirmação: a semirreta $\overrightarrow{E\Omega_2}$ intersecta a reta s .

De fato, consideremos Ω_3 um dos pontos ideais da reta r de tal modo que D esteja na semirreta $\overrightarrow{C\Omega_3}$.

Primeiramente, observemos que os triângulos generalizados $EC\Omega_2$ e $BD\Omega_1$ são congruentes pelo caso “lado, ângulo”. Consequentemente, $\Omega_1\widehat{D}\Omega_3 \equiv \Omega_2\widehat{C}\Omega_3$. Além disso, esses ângulos são agudos.

Pelo Teorema do Ângulo Externo para Triângulos Generalizados, o ângulo $\Omega_1\widehat{D}\Omega_3$ (que é ângulo externo do triângulo generalizado $CD\Omega_1$) deve ser maior do que o ângulo $\Omega_1\widehat{C}D$ (que é ângulo interno não adjacente no mesmo triângulo). Desta forma, a semirreta $\overrightarrow{C\Omega_1}$ divide o ângulo $\Omega_2\widehat{C}\Omega_3$.

Sendo o ângulo $\Omega_2\widehat{C}\Omega_3$ agudo e maior do que o ângulo $\Omega_1\widehat{C}\Omega_3$, podemos garantir que a semirreta $\overrightarrow{C\Omega_2}$ divide o ângulo $A\widehat{C}\Omega_1$. Pelo “Axioma de Pasch” para triângulos generalizados, a semirreta $\overrightarrow{C\Omega_2}$ intersecta o lado $A\Omega_1$ do triângulo generalizado $AC\Omega_1$ em um ponto F .

Por fim, pelo “Axioma de Pasch” aplicado no triângulo AEF , temos que a semirreta $E\Omega_2$ deve intersectar o lado AF em um ponto G , provando nossa afirmação.

Seja $H \in r$ de tal modo que o segmento GH seja perpendicular à reta r , conforme a figura acima ao centro.

Seja $I \in s$ de tal modo que $EG \equiv BI$ e I está na semirreta $B\Omega_1$.

Seja $J \in r$ de tal modo que o segmento IJ seja perpendicular à reta r .

Com isto, temos dois quadriláteros, $ECHG$ e $BDJI$, que são congruentes (para ver isso facilmente, basta dividi-los em triângulos). Desta forma, $GH \equiv IJ$.

Temos assim, o Quadrilátero de Saccheri $GHJI$ com base na reta r e topo na reta s , conforme a figura acima à direita. Pela Proposição 5.19 temos que a reta t que passa pelos pontos médios K do topo GI e L da base HJ é perpendicular às retas r e s , como queríamos.

Unicidade:

Se existissem duas retas perpendiculares às retas r e s , teríamos um quadrilátero com quatro ângulos retos, o que, como vimos, é impossível. Isto conclui a demonstração. \square

Observações.

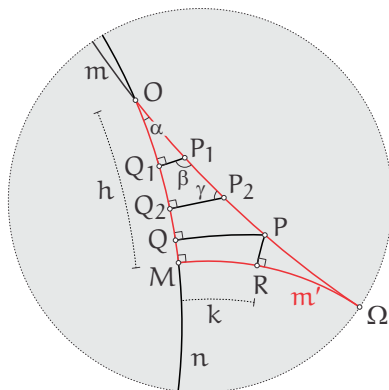
- (i) Duas retas concorrentes não possuem uma reta perpendicular em comum. Caso contrário, teríamos um triângulo ordinário com dois ângulos internos retos ou um ângulo raso com medida diferente de π radianos.
- (ii) Duas retas paralelas não possuem uma reta perpendicular em comum. Caso contrário, teríamos um triângulo generalizado com dois ângulos internos retos.

A *distância* de um ponto P a uma reta r é o comprimento do segmento PQ sendo Q o pé da perpendicular baixada de P a r . Indiquemos a distância de P a r por $d(P, r)$.

Proposição 5.25 Sejam m e n retas concorrentes em um ponto O . Seja $P \in m$. A distância de P a n cresce quando P se afasta de O , tornando-se arbitrariamente grande, e decresce quando P se aproxima de O tornando-se arbitrariamente pequena.

Demonstração.

Este resultado é evidente quando as retas m e n são perpendiculares. Sendo assim, consideremos m e n retas concorrentes e α o ângulo agudo entre elas, conforme a figura abaixo.



Considere $P_1, P_2 \in m$ tais que $P_1 \in OP_2$ e $Q_1, Q_2 \in n$ tais que $P_1Q_1 \perp n$ e $P_2Q_2 \perp n$. Temos $\beta > \gamma$, pois $\gamma < \frac{\pi}{2}$ radianos (veja o triângulo retângulo OQ_2P_2) e $\beta > \frac{\pi}{2}$ radianos pelo *Teorema do Ângulo Externo* no triângulo OQ_1P_1 .

Logo, por proposição já demonstrada,

$$P_1Q_1 < P_2Q_2 \Rightarrow d(P_1, n) < d(P_2, n).$$

Isto mostra que:

$$d(P, n) \begin{cases} \text{cresce quando } P \text{ se afasta de } O \\ \text{decresce quando } P \text{ se aproxima de } O \end{cases} .$$

Resta mostrar a segunda parte.

Seja $k > 0$. Pela *função ângulo de paralelismo*, existe $h > 0$ tal que $\theta(h) = \alpha$.

Seja $M \in n$ tal que $OM = h$. Tomemos m' perpendicular a n por M .

Logo, $m' \parallel m$ (pois $\theta(h) = \alpha$).

Seja $R \in m'$ tal que $MR = k$. Seja $P \in m$ tal que $PR \perp m'$ (P existe pelo “*Axioma de Pasch*” para triângulos generalizados). Seja $Q \in n$ tal que $PQ \perp n$. Temos que $MRPQ$ é um *Quadrilátero de Lambert* e, portanto,

$$MR < PQ \Rightarrow k < d(P, n),$$

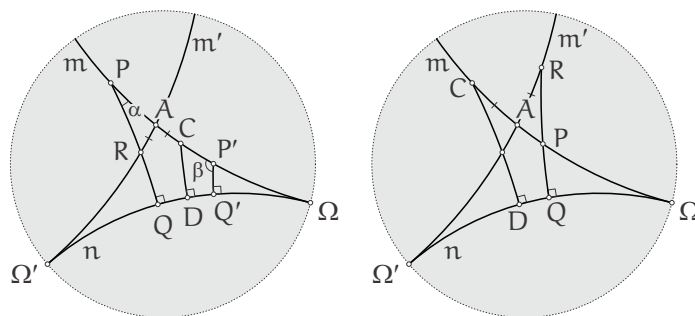
ou seja, $d(P, n)$ pode tornar-se arbitrariamente grande.

Por fim, observemos que no triângulo retângulo OPQ o lado OP é sempre maior do que PQ , que representa a distância de P à reta n (lembre-se de que em um triângulo, o maior lado é oposto ao maior ângulo, e esse é um resultado que não depende do Quinto Postulado de Euclides). Temos assim, $OP > PQ = d(P, n)$. Isto significa que quando P se aproxima de O , então a distância de P à reta n torna-se arbitrariamente pequena. □

Proposição 5.26 Sejam m e n retas paralelas com ponto ideal Ω em comum. Seja $P \in m$. A distância de P a n decresce quando P se move no sentido de Ω , tornando-se arbitrariamente pequena. A distância de P a n cresce quando P se move no sentido oposto de Ω tornando-se arbitrariamente grande.

Demonstração.

Sejam m e n duas retas paralelas e $P, P' \in m$ tais que $P' \in P\Omega$. Sejam $Q, Q' \in n$ tais que $PQ \perp n$ e $P'Q' \perp n$, conforme a figura abaixo à esquerda.



Temos $\alpha < \frac{\pi}{2}$ radianos (devido à função ângulo de paralelismo) e $\beta > \frac{\pi}{2}$ radianos (devido ao Teorema do Ângulo Externo para triângulos generalizados). Logo, $\alpha < \beta$ e, devido à proposição já demonstrada,

$$PQ > P'Q' \Rightarrow d(P, n) > d(P', n),$$

ou seja,

$$d(P, n) \begin{cases} \text{decresce quando } P \text{ se move no sentido de } \Omega \\ \text{cresce quando } P \text{ se move no sentido oposto} \end{cases}.$$

Quanto à segunda parte, seja $k > 0$ arbitrário. Mostremos que existem pontos em m à distância k da reta n . Seja $P \in m$ e $Q \in n$ tais que $PQ \perp n$.

Se $d(P, n) > k$, tomemos em PQ um ponto R tal que $d(R, n) = k$.

Tomemos a reta m' paralela à reta n , passando por R no sentido oposto ao do paralelismo entre as retas m e n . A reta m' entra no triângulo generalizado $PQ\Omega$ pelo lado PQ e, sendo distinta de n , ela deve intersectar a reta m (“Axioma de Pasch” para triângulos generalizados). Seja A tal ponto de intersecção.

Tomemos na semirreta $\overrightarrow{A\Omega} \subset m$ um ponto C tal que $AR \equiv AC$ e baixemos a perpendicular, sendo $D \in n$ tal que $CD \perp n$.

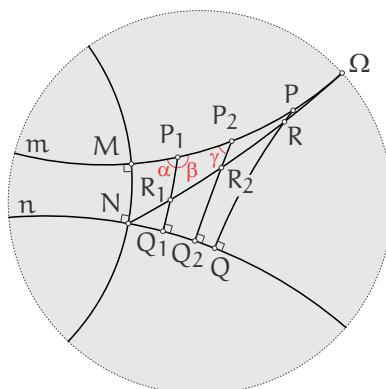
É fácil mostrar, utilizando congruência de triângulos que $RQ \equiv CD$, ou seja, $d(C, n) = k$, como queríamos.

Se $d(P, n) < k$, o raciocínio é análogo, apenas que invés de tomarmos R entre P e Q , tomamos R tal que P esteja entre R e Q e $d(R, n) = k$. A figura acima à direita ilustra esse caso. □

Proposição 5.27 Sejam m e n retas hiperparalelas e MN o segmento perpendicular comum a m e n com $M \in m$ e $N \in n$. Seja $P \in m$. A distância de P a n decresce quando P se aproxima de M , tornando-se igual a MN quando $P = M$. A distância de P a n cresce quando P se afasta de M tornando-se arbitrariamente grande.

Demonstração.

Consideremos a figura abaixo.



O quadrilátero MP_1Q_1N é de Lambert, assim como MP_2Q_2N . Logo,

$$\alpha, \gamma < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta > \frac{\pi}{2}.$$

Assim, por proposição já demonstrada, temos

$$P_1Q_1 < P_2Q_2 \Rightarrow d(P_1, n) < d(P_2, n).$$

Logo,

$$d(P, n) \begin{cases} \text{cresce quando } P \text{ se afasta de } M \\ \text{decrece quando } P \text{ se aproxima de } M \end{cases}$$

Quanto à segunda parte, seja a semirreta $\overrightarrow{N\Omega}$ paralela a m .

Tomemos $P \in \overrightarrow{M\Omega}$ e $Q \in n$ tal que $PQ \perp n$. Seja R a intersecção de PQ com a semirreta $\overrightarrow{N\Omega}$.

Vimos na proposição anterior que $d(R, n)$ aumenta arbitrariamente quando R se afasta de N .

Como $R \in PQ$ concluímos também que $d(P, n)$ aumenta arbitrariamente quando P se afasta de M .

Também vimos que $d(R, n)$ tende a zero quando R se aproxima de N , sendo zero quando $R = N$. Logo, $d(P, n)$ tende a $d(M, n)$ quando P se aproxima de M , sendo MN quando $P = M$. \square

5.7 Horocírculos e Curvas Equidistantes

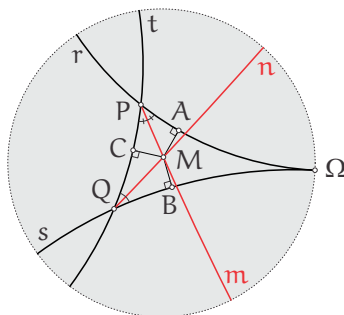
Na Geometria Hiperbólica existem dois tipos de curvas (inexistentes na Geometria Euclidiana) que desempenham papel importante para o desenvolvimento de conteúdos mais avançados no campo das geometrias não euclidianas. Trata-se do horocírculo e da curva equidistante, que estudaremos nessa seção. Antes porém, precisamos desenvolver alguns conceitos e proposições que servirão de base para nosso estudo.

Proposição 5.28 Dadas duas retas paralelas, existe um ponto ordinário equidistante dessas duas retas.

Demonstração da Proposição 5.28.

Sejam $r // s$; $P \in r$, $Q \in s$ e t reta que passa por P e Q .

Sejam m e n bissetrizes dos ângulos formados por r e t , por s e t , conforme a figura abaixo.



Temos que $MAP \cong MCP$ e $MCQ \cong MBQ$. Logo, $MA \cong MC \cong MB$, ou seja, M é equidistante de r e s . \square

Proposição 5.29 Sejam r e s retas paralelas com o ponto ideal Ω em comum. Seja M um ponto ordinário equidistante de r e s . Então, a reta $\overrightarrow{M\Omega}$ é equidistante de r e s .

Demonstração da Proposição 5.29.

Seja $N \in \overrightarrow{M\Omega}$ arbitrário e consideremos as construções da figura abaixo, sendo A, A', B e B' os pés das perpendiculares baixadas de M e N às retas r e s . Nosso objetivo é mostrar que $NA' = d(N, r)$ é igual a $NB' = d(N, s)$.

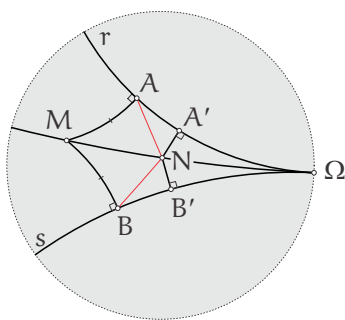
Por congruência de triângulos:

Caso LA de congruência de triângulos generalizados: $AM\Omega \cong BM\Omega \Rightarrow \widehat{AM\Omega} \cong \widehat{BM\Omega}$.

Caso LAL de congruência de triângulos: $AMN \cong BMN \Rightarrow AN \cong BN$ e $\widehat{NAA'} \cong \widehat{NBB'}$.

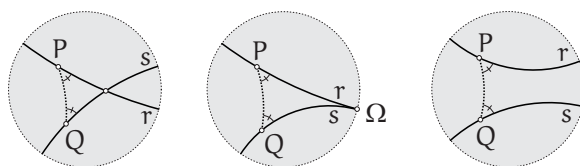
Caso LAA₀ de congruência de triângulos: $AA'N \cong BB'N \Rightarrow NA' \cong NB'$.

Como $N \in \overrightarrow{M\Omega}$ é arbitrário, temos o resultado desejado. \square



A reta \overleftrightarrow{MQ} da proposição acima é chamada de **reta bissectora** das retas paralelas r e s .

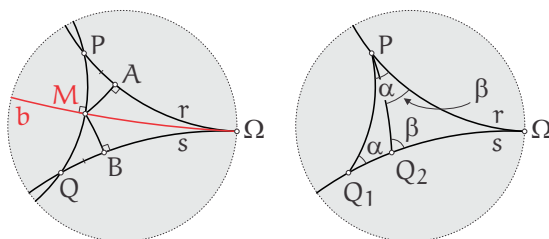
Sejam r e s retas distintas e $P \in r$, $Q \in s$. Dizemos que P e Q são **pontos correspondentes** quando o segmento PQ forma com r e s ângulos congruentes em um mesmo lado de PQ (figura abaixo). Também podemos dizer que P **corresponde** a Q .



Proposição 5.30 Sejam r e s retas paralelas e $P \in r$. Então, existe um único ponto $Q \in s$ tal que P e Q são pontos correspondentes.

Demonstração da Proposição 5.30.

Seja b a reta bissectora de r e s , conforme a figura abaixo à esquerda.
 Seja $M \in b$ o pé da perpendicular baixada de P a b .
 Sejam $A \in r$ e $B \in s$ pés das perpendiculares baixadas de M a r e s , respectivamente.
 Seja $Q \in s$ tal que $PA \equiv QB$.
 Assim, $PAM \equiv QBM$ (caso de congruência LAL) e, portanto, $PM \equiv QM$.
 Desta forma, $PM\Omega \equiv QM\Omega$ (caso de congruência LA), de onde concluímos que P , M e Q são colineares.

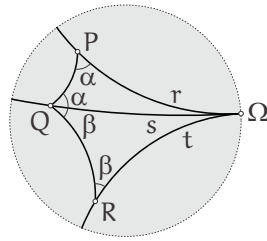


Deste modo, é fácil ver que $Q\hat{P}\Omega \equiv P\hat{Q}\Omega$, ou seja, P e Q são correspondentes.
 Quanto à unicidade: Suponha que existam Q_1 e $Q_2 \in s$ correspondentes a $P \in r$, conforme a figura acima à direita.
 Temos $\beta > \alpha$ pelo Teorema do Ângulo Externo aplicado ao triângulo PQ_1Q_2 e $\beta < \alpha$ por construção no ponto P . Contradição.
 Logo, Q é único. □

Proposição 5.31 Sejam r , s e t retas paralelas distintas em um mesmo sentido e $P \in r$, $Q \in s$ e $R \in t$. Se P corresponde a Q e Q corresponde a R , então P , Q e R são pontos não colineares.

Demonstração da Proposição 5.31.

Consideremos as hipóteses de acordo com a figura abaixo.

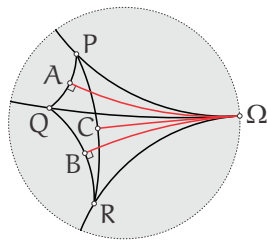


Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo generalizado é menor que π radianos, concluímos que $\alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\beta < \frac{\pi}{2}$.
Logo, $\alpha + \beta < \pi$ e, portanto, P, Q e R não são colineares. □

Proposição 5.32 Sejam r, s e t retas paralelas distintas em um mesmo sentido e $P \in r, Q \in s$ e $R \in t$. Se P corresponde a Q e Q corresponde a R, então P corresponde a R.

Demonstração da Proposição 5.32.

Considere a figura abaixo.



Pela proposição acima, P, Q e R formam triângulo. Sejam A e B pontos médios de PQ e QR, respectivamente. Logo, $\overleftrightarrow{A\Omega}$ e $\overleftrightarrow{B\Omega}$ são mediatrizes de PQ e QR (congruência de triângulos generalizados - caso LA). Desta forma, o triângulo PQR não é inscritível em um círculo.

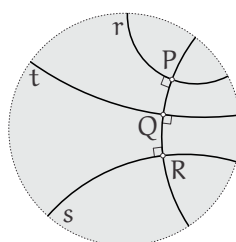
Observemos que no triângulo PQR valem as relações $PR > QP$ e $PR > QR$, pois $\widehat{RQP} > \widehat{QPR}$ e $\widehat{RQP} > \widehat{PRQ}$ (em um triângulo o maior lado é oposto ao maior ângulo e vice-versa - esse resultado é válido na Geometria Hiperbólica). Desta forma, se C é ponto médio de PR, então C está na região do plano hiperbólico delimitada por $\overleftrightarrow{A\Omega}$ e $\overleftrightarrow{B\Omega}$. (*)

Deste modo, a mediatriz de PR deverá ser $\overleftrightarrow{C\Omega}$ pois, caso contrário, haveria intersecção entre $\overleftrightarrow{C\Omega}$ e $\overleftrightarrow{A\Omega}$, ou entre $\overleftrightarrow{C\Omega}$ e $\overleftrightarrow{B\Omega}$. Portanto, haveria um circuncentro ordinário para o triângulo PQR. Contradição, pois $\overleftrightarrow{A\Omega}$ e $\overleftrightarrow{B\Omega}$ são paralelas.

Assim, $PC\Omega$ e $RC\Omega$ são triângulos retângulos generalizados congruentes (caso LA). Logo, $\widehat{RP\Omega} \equiv \widehat{PR\Omega}$, ou seja, P e R são correspondentes. □

Observações.

- (i) As Proposições 5.28, 5.29, 5.31 e 5.32 podem ser adaptadas para retas concorrentes. As Proposições 5.28, 5.29, e 5.30 podem ser adaptadas (com o auxílio da Proposição 5.24) para retas hiperparalelas.
- (ii) A Proposição 5.30 é falsa para o caso de retas concorrentes porque, neste caso, um ponto distinto do ponto de intersecção em uma das retas possui exatamente dois pontos correspondentes na outra reta.
- (iii) A Proposição 5.31 é falsa para retas hiperparalelas. De fato, se r e s são retas hiperparalelas e PR é o segmento perpendicular a ambas, então a reta t perpendicular a PR passando pelo ponto médio Q de PR é reta hiperparalela a r e a s . Assim, r, s e t são hiperparalelas, P e Q são pontos correspondentes, Q e R são pontos correspondentes e P, Q e R são pontos colineares. A figura abaixo ilustra essa situação.

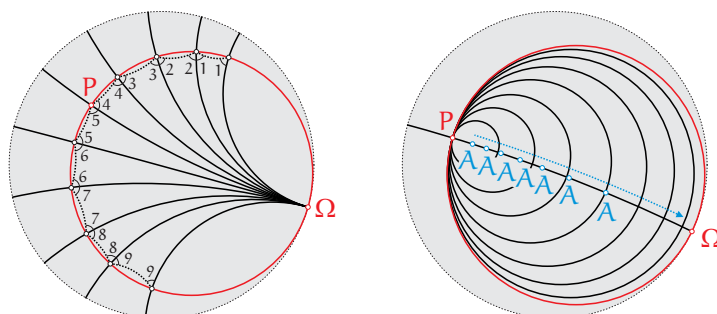


(iv) A Proposição 5.32 é falsa para três retas hiperparalelas duas a duas de um modo geral. Entretanto, se as três hiperparalelas possuírem uma única perpendicular comum (como na figura acima), então o resultado é verdadeiro.

A tabela abaixo sintetiza as observações acima:

	Concorrentes	Paralelas	Hiperparalelas
Prop. 5.28 (existência de ponto equidistante)	sim	sim	sim
Prop. 5.29 (existência de reta equidistante)	sim	sim	sim
Prop. 5.30 (unicidade de ponto correspondente)	não	sim	sim
Prop. 5.31 (3 pontos correspondentes não colineares)	sim	sim	não
Prop. 5.32 (transitividade de pontos correspondentes)	sim	sim	não

Sejam o feixe (conjunto) de todas as retas paralelas em um mesmo sentido com um ponto ideal Ω em comum e P um ponto ordinário em uma reta desse feixe. Ao lugar geométrico de todos os pontos correspondentes a P nas demais retas do feixe chamamos de *horocírculo* (ou *horociclo*) *de centro Ω e raio $P\Omega$* , conforme a figura abaixo à esquerda).

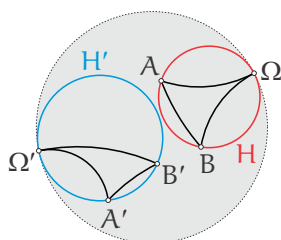


Observemos que um horocírculo fica determinado por um ponto ideal Ω (centro) e um ponto ordinário P .

Um modo intuitivo de conceber um horocírculo é pensá-lo como “limite de círculos”. Se tomarmos um círculo com centro em $A \in P\Omega$ e raio AP e fizermos A “tender” a Ω , então o círculo de centro A e raio AP “tende” ao horocírculo de centro Ω e raio $P\Omega$ (figura acima à direita).

Observação: No modelo do Disco de Poincaré é possível provar que um horocírculo possui o formato de um círculo euclidiano tangente ao bordo do modelo.

Sejam H e H' dois horocírculos de centros Ω e Ω' , respectivamente. Dizemos que H e H' são *congruentes* quando para quaisquer $A, B \in H$, existem $A', B' \in H'$ tais que $AB\Omega \cong A'B'\Omega'$ (figura abaixo).

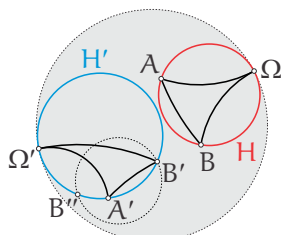


Proposição 5.33 Quaisquer dois horocírculos são congruentes.

Demonstração.

Sejam $A, B \in H$ e $A' \in H'$, conforme a figura abaixo.

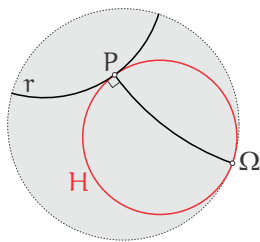
Seja o círculo de centro A' e raio $A'B$. Logo, este círculo intersecta H' em dois pontos $B', B'' \in H'$.



Capítulo 5. Geometria Hiperbólica Plana

Pela caso de congruência de triângulos generalizados isósceles, temos $AB\Omega \equiv A'B'\Omega'$ (ou $A'B''\Omega'$), como queríamos. □

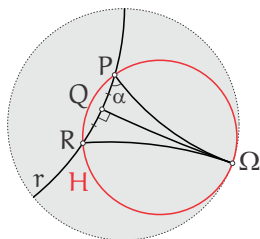
Dados um horocírculo H de centro Ω e uma reta r que não tenha Ω como ponto ideal, dizemos que r é **tangente** a H quando $r \cap H$ for um conjunto constituído por apenas um ponto.



Proposição 5.34 Uma reta é tangente a um horocírculo se, e somente se, for perpendicular a um de seus raios em sua extremidade.

Demonstração.

\Rightarrow) Seja $\{P\} = H \cap r$. Suponhamos que o ângulo entre $\overrightarrow{P\Omega}$ e r seja agudo medindo α .



Considerando-se a função ângulo de paralelismo θ , seja $h > 0$ tal que $\theta(h) = \alpha < \frac{\pi}{2}$ radianos.

Seja $Q \in r$ tal que $PQ = h$ e $\widehat{QP\Omega} = \alpha$. Seja $R \in r$ tal que $PQ \equiv QR$ e Q esteja entre P e R , conforme ilustrado na figura acima.

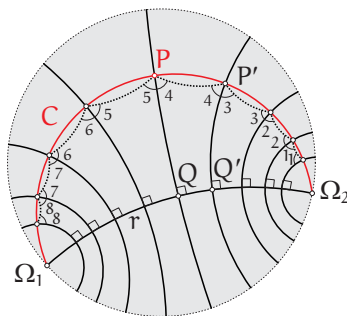
Logo, $PQ\Omega$ e $RQ\Omega$ são triângulos retângulos generalizados congruentes, ou seja, $PQ\Omega \equiv RQ\Omega$ (caso LA de congruência de triângulos generalizados).

Assim, $\widehat{PR\Omega} \equiv \widehat{RP\Omega}$, ou seja, P e R são correspondentes. Logo, $R \in H$, contradizendo a hipótese. Conclusão: $\alpha = \frac{\pi}{2}$ radianos.

\Leftarrow) Se $\overrightarrow{P\Omega} \perp r$ e r cortar H em um outro ponto S , teremos que P e S serão correspondentes e $PS\Omega$ será um triângulo generalizado com dois ângulos retos. Contradição!

Logo, $H \cap r = \{P\}$ e, portanto, r é tangente a H . □

Seja r uma reta. Consideremos o conjunto \mathcal{P} de todas as retas perpendiculares a r . Seja P um ponto pertencente a uma dessas retas e $P \notin r$. O lugar geométrico C de todos os pontos correspondentes de P nas demais retas de \mathcal{P} é chamado de **curva equidistante** de r . A distância de P a r é chamada de **distância** de C a r , conforme a figura abaixo.

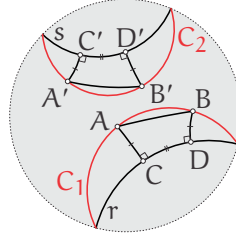


Observações:

(i) C **não é** uma reta hiperbólica.

(ii) Se $P, P' \in C$ e Q, Q' são os pés das perpendiculares baixadas de P, P' a r , então $PQQ'P'$ é um *Quadrilátero de Saccheri*.

Sejam C_1 e C_2 curvas equidistantes das retas r e s , respectivamente, conforme a figura abaixo. Dizemos que C_1 é **congruente** a C_2 quando, dados $A, B \in C_1$, existem $A', B' \in C_2$ tais que $ACDB \equiv A'C'D'B'$, sendo C, D os pés das perpendiculares baixadas de A, B a r e C', D' os pés das perpendiculares baixadas de A', B' a s . (ou seja, os Quadriláteros de Saccheri $ACDB$ e $A'C'D'B'$ são congruentes).



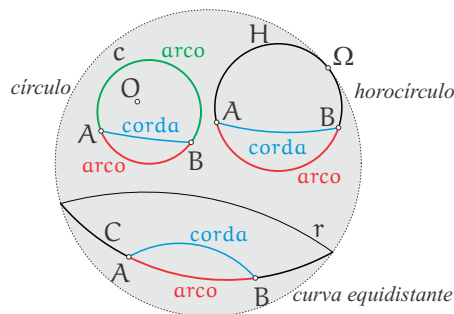
Proposição 5.35 Duas curvas equidistantes C_1 e C_2 de r e s , respectivamente, tais que a distância de C_1 a r é a mesma que a distância de C_2 a s são congruentes.

Demonstração.

Sejam $A, B \in C_1$ e $C, D \in r$ tais que $AC \perp r$, $BD \perp r$, conforme a figura abaixo.
 Sejam $A' \in C_2$ e $C' \in s$ tais que $A'C' \perp s$. Seja a circunferência de centro C' e raio CD . Esta circunferência intersecta s em dois pontos D' e D'' .
 Tomemos $B' \in C_2$ correspondente de A' na reta perpendicular a s por D' .

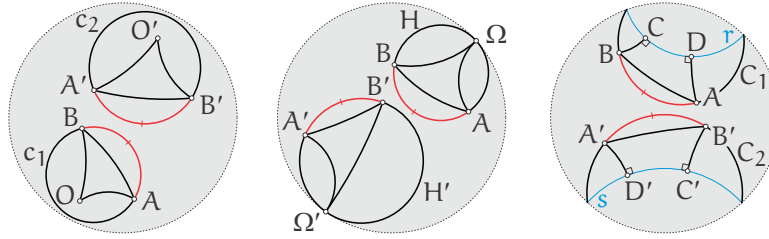
Por congruência de triângulos, é fácil mostrar que $\alpha = \beta$ e, portanto, que o quadrilátero de Saccheri $ABCD \equiv A'B'C'D'$, ou seja C_1 e C_2 são curvas equidistantes congruentes. □

Sejam A e B pontos ordinários em um círculo, horocírculo ou curva equidistante. Chamamos o segmento AB de corda do círculo, horocírculo ou curva equidistante e a parte de comprimento finito compreendida entre A e B de **arco de círculo**, **horocírculo** ou **curva equidistante**, conforme figura abaixo.



Sejam \widehat{AB} e $\widehat{A'B'}$ arcos de círculos c_1 e c_2 de centros O e O' , respectivamente. Dizemos que \widehat{AB} e $\widehat{A'B'}$ são congruentes quando $ABO \equiv A'B'O'$ (figura abaixo à esquerda).
 Sejam \widehat{AB} e $\widehat{A'B'}$ arcos de horocírculos H e H' de centros Ω e Ω' , respectivamente. Dizemos que \widehat{AB} e $\widehat{A'B'}$ são congruentes quando $AB\Omega \equiv A'B'\Omega'$ (figura abaixo ao centro).

Sejam \widehat{AB} e $\widehat{A'B'}$ arcos de curvas equidistantes C_1 e C_2 a r e s , respectivamente. Dizemos que \widehat{AB} e $\widehat{A'B'}$ são congruentes quando os Quadriláteros de Saccheri $ABCD \equiv A'B'C'D'$, sendo CD e $C'D'$ suas bases em r e s , respectivamente (figura abaixo à direita).



Proposição 5.36 (i) Cordas congruentes em círculos de mesmo raio subentendem arcos congruentes.
 (ii) Cordas congruentes em horocírculos subentendem arcos congruentes.
 (iii) Cordas congruentes em curvas equidistantes C_1 e C_2 à mesma distância de r e s , respectivamente, subentendem arcos congruentes.

Demonstração.

No primeiro caso, o caso de congruência de triângulos LLL resolve.
 No segundo caso, o caso de congruência para triângulos isósceles generalizados resolve.
 No terceiro caso, considere a figura abaixo à esquerda.

Devemos mostrar que $ABCD \equiv A'B'C'D'$. Para isso, de acordo com a definição de congruência entre Quadriláteros de Saccheri, basta mostrar a igualdade $CD \equiv C'D'$, uma vez que $CB \equiv C'B'$. Para tanto, sejam α e β as medidas dos ângulos do topo dos Quadriláteros de Saccheri $ABCD$ e $A'B'C'D'$, respectivamente.

Construamos sobre uma reta t os Quadriláteros de Saccheri $ABCD$ e $A'B'C'D'$ de tal forma que eles sejam adjacentes com o lado $BC \equiv A'D'$ em comum e as bases CD e $C'D'$ sobre a reta t (figura acima à direita). De $AD \equiv C'B'$ temos um Quadrilátero de Saccheri $AB'C'D$ com ângulos do topo medindo γ . Por hipótese, as cordas AB e $A'B'$ são congruentes, o que implica no triângulo $AA'B'$ ser isósceles e, portanto, $\beta - \gamma = \alpha - \gamma$, ou seja, $\alpha = \beta$.

Desta forma, BC está sobre a bissetriz do ângulo \widehat{A} do triângulo isósceles $AA'B'$ e, portanto, BC está sobre a altura relativa ao vértice A' desse triângulo. Assim, BC está sobre a reta que é perpendicular ao topo e à base do Quadrilátero de Saccheri $AB'C'D$. Mas esta reta divide a base $C'D$ ao meio, ou seja, $CD \equiv C'D'$, como queríamos. \square

5.8 Áreas

Na *Geometria Euclidiana Plana* é comum definirmos a unidade de área como sendo a porção do plano delimitada por um quadrado de lado unitário. Naturalmente, não podemos adotar a mesma definição na *Geometria Hiperbólica Plana*, pelo simples fato de não haver quadrados em tal geometria. Por outro lado, podemos pensar em adotar outra figura geométrica no lugar do quadrado para servir de unidade de área, como um determinado triângulo, por exemplo. É o que faremos nesta seção, entretanto, não iremos fixar um triângulo para servir de unidade de área, mas sim, seremos conduzidos naturalmente a considerar uma determinada família de triângulos de área unitária. A figura geométrica *triângulo* é uma escolha natural neste caso, pois dado um polígono qualquer, sempre é possível triângulá-lo em uma quantidade finita de triângulos, mesmo que os polígonos não sejam convexos. Vejamos como desenvolver essas ideias.

Desejamos fazer o estudo do conceito de área de um triângulo hiperbólico e, de modo mais geral, o conceito de área de uma “*região*” no plano hiperbólico.

O conceito de área é universal, tanto na Geometria Euclidiana quanto nas demais geometrias. Definindo T como sendo o conjunto de todos os triângulos ordinários ou generalizados do plano hiperbólico, a **função área de triângulo**, $A : T \rightarrow \mathbb{R}_+$ é definida como sendo uma função que associa a cada triângulo $\mathcal{T} \in T$ um número real $A(\mathcal{T}) > 0$ cumprindo as duas seguintes propriedades:

(1) Se \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 são triângulos congruentes, então \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 possuem a mesma área, ou seja,

$$A(\mathcal{T}_1) = A(\mathcal{T}_2).$$

(2) Se \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 são triângulos tais que $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ também seja um triângulo e tais que a intersecção de seus interiores seja vazia, então

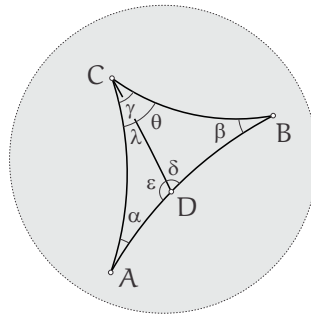
$$A(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2) = A(\mathcal{T}_1) + A(\mathcal{T}_2).$$

Na Geometria Hiperbólica, é curioso saber que há uma outra função que cumpre as duas propriedades da “função área de triângulo” acima, na situação em que a reunião de dois triângulos também seja um triângulo. Trata-se da “função defeito de triângulo”, que passamos a definir.

A diferença entre π e a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo ordinário ou generalizado, medida em radianos, é chamada de **defeito** do triângulo. Sendo assim podemos definir a **função defeito de triângulo**, $\delta : T \rightarrow \mathbb{R}^+$ que associa a cada triângulo $\mathcal{T} \in T$ um número real $\delta(\mathcal{T}) > 0$ que é o defeito do triângulo \mathcal{T} .

A propriedade (1) acima é obviamente cumprida por δ , pois triângulos congruentes possuem mesmas medidas de ângulos internos.

Quanto à propriedade (2), devemos ter $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ como sendo um triângulo (ordinário ou generalizado). Assim, tomemos um triângulo ABC e $D \in AB$, como na figura abaixo. O que podemos dizer da relação entre o defeito de $ABC = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ e os defeitos de $ACD = \mathcal{T}_1$ e $BCD = \mathcal{T}_2$?



Temos:

$$\begin{aligned} [\pi - (\alpha + \epsilon + \lambda)] + [\pi - (\beta + \delta + \theta)] &= 2\pi - (\alpha + \beta + \lambda + \theta + \epsilon + \delta) \\ &= 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma + \pi) \\ &= \pi - (\alpha + \beta + \gamma) \end{aligned}$$

Deste modo, concluímos que o defeito de ABC é a **soma** dos defeitos de ACD e BCD , ou seja, $\delta(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2) = \delta(\mathcal{T}_1) + \delta(\mathcal{T}_2)$.

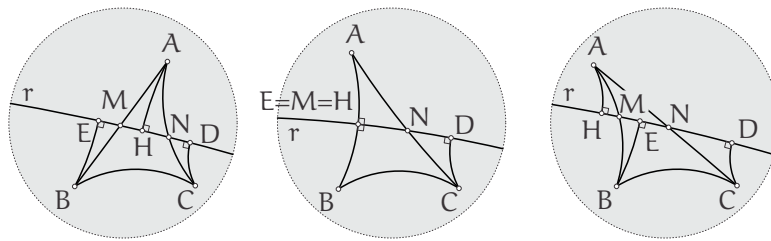
Observações:

A propriedade (2) pode ser estendida para uma decomposição qualquer de um triângulo \mathcal{T} em uma quantidade finita de triângulos menores \mathcal{T}_i ; $i = 1, \dots, n$; e, assim, o defeito do triângulo \mathcal{T} será a soma dos defeitos dos triângulos \mathcal{T}_i .

A definição de defeito pode ser generalizada para polígonos (ordinários ou generalizados). Chamamos de **defeito** do polígono de n lados a diferença entre $(n - 2)\pi$ e a soma das medidas dos ângulos internos desse polígono. Não é difícil verificar a propriedade (2) para o caso de polígonos.

O fato de as funções “área de triângulo” e “defeito de triângulo” cumprirem as mesmas propriedades não é mera coincidência, e é natural esperar que haja uma fórmula que as relacione. É o faremos a seguir.

Dado um triângulo ordinário ABC qualquer, tomemos os pontos médios M e N dos lados AB e AC . Seja r a reta que passa por M e N . Desta forma, B e C estão de um mesmo lado de r e podemos traçar perpendiculares a r passando por B e C e construir um quadrilátero $BCDE$, sendo D e E os pés das perpendiculares que passam por C e B , respectivamente. A figura abaixo ilustra as três situações possíveis para tal construção.



Não é difícil provar, utilizando o caso de congruência de triângulos LAA_0 , que BCDE é um Quadrilátero de Saccheri em qualquer situação.

Proposição 5.37 Sejam ABC um triângulo e BCDE um Quadrilátero de Saccheri com base DE tal que M, ponto médio de AB, e N, ponto médio de AC, pertencem à reta \overleftrightarrow{DE} . Então, ABC e BCDE possuem a mesma área.

Demonstração:

Considere a figura acima.

No primeiro e terceiro casos, $AHN \equiv CDN$ e $AHM \equiv BEM$ pelo caso de congruência de triângulos LAA_0 . Logo, a área do triângulo ABC é igual à área do Quadrilátero de Saccheri BCDE.

No segundo caso, temos $AHN \equiv CDN$ apenas e a conclusão é mesma. □

Proposição 5.38 Dados dois triângulos (ordinários ou generalizados), se eles possuem o mesmo defeito, então eles possuem a mesma área.

Demonstração.

Faremos a demonstração apenas para triângulos ordinários.

Dividiremos a demonstração em dois casos e utilizaremos a situação da figura acima, ilustração da esquerda (as outras duas situações seguem de modo análogo).

(1) Os triângulos ABC e $A'B'C'$ possuem um dos lados congruentes, digamos $BC \equiv B'C'$.

Consideremos a figura abaixo à esquerda, sendo:

- M: ponto médio de AB;
- N: ponto médio de AC;
- M' : ponto médio de $A'B'$;
- N' : ponto médio de $A'C'$.

Conforme observado à pouco, na figura acima, temos $\delta + \varepsilon = \alpha$ e $\delta' + \varepsilon' = \alpha'$. Mas, por hipótese,

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma'.$$

Assim,

$$\delta + \varepsilon + \beta + \gamma = \delta' + \varepsilon' + \beta' + \gamma'.$$

Mas $\beta + \delta = \gamma + \varepsilon$ e $\beta' + \delta' = \gamma' + \varepsilon'$ devido ao fato dos quadriláteros BCDE e $B'C'D'E'$ serem de Saccheri. Logo,

$$2(\gamma + \varepsilon) = 2(\gamma' + \varepsilon') \Rightarrow \gamma + \varepsilon = \gamma' + \varepsilon'.$$

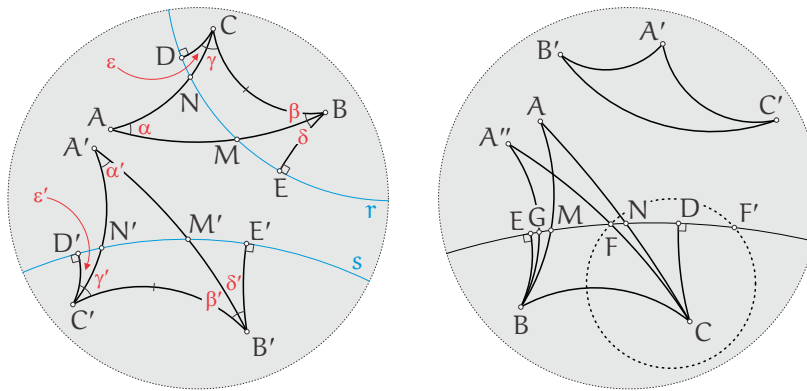
Deste modo:

$$\delta + \beta = \gamma + \varepsilon = \delta' + \beta' = \gamma' + \varepsilon'.$$

A congruência entre os quatro ângulos do topo dos dois quadriláteros de Saccheri BCDE e $B'C'D'E'$, junto à hipótese $BC \equiv B'C'$, permite concluir que $CD \equiv C'D'$ (e $BE \equiv B'E'$). A prova disso é por absurdo: basta supor que $CD > C'D'$ ou $CD < C'D'$, então seria possível construir um quadrilátero com quatro ângulos retos, o que não é possível na Geometria Hiperbólica.

Dividindo os quadriláteros de Saccheri BCDE e $B'C'D'E'$ em quatro triângulos cada, e usando os casos de congruências de triângulos, concluímos facilmente que $BCDE \equiv B'C'D'E'$.

Temos assim, a igualdade das áreas dos triângulos ABC e $A'B'C'$.



(2) Os triângulos ABC e $A'B'C'$ não possuem lados congruentes.

Suponhamos, sem perda de generalidade que $AC < A'C'$.

Consideremos a circunferência de centro em C e raio $\frac{A'C'}{2}$. Esta circunferência intersecta \overleftrightarrow{MN} (figura acima à direita) nos pontos F e F'' .

Consideremos ainda M como sendo o ponto médio de AB e N como sendo o ponto médio de AC .

Seja A'' tal que F é ponto médio de $A''C$.

Facilmente vê-se que G é ponto médio de $A''B$.

Assim, podemos concluir que $A''BC$ e ABC possuem mesma área.

No entanto, $A''BC$ e $A'B'C'$ são triângulos com mesmo defeito (pois ABC e $A''BC$ possuem mesmo defeito) e com $A''C \equiv A'C'$. Logo, pelo Caso (1) acima, temos $A''BC$ e $A'B'C'$ com a mesma área.

Concluimos, portanto, que ABC e $A'B'C'$ possuem mesma área, como queríamos. \square

Na verdade, a recíproca da proposição acima é verdadeira, ou seja, se dois triângulos (ordinários ou generalizados) possuem a mesma área, então possuem o mesmo defeito. Mais do que isso, provaremos que a *função área de triângulo* e a *função defeito de triângulo* são proporcionais, ou seja, $\frac{A(\mathcal{T})}{\delta(\mathcal{T})} = c$, sendo c constante positiva fixa, para qualquer triângulo \mathcal{T} (um tratamento pormenorizado desses conceitos e resultados pode ser conferido em [18]).

Essa proporcionalidade nos dá uma informação extremamente preciosa: devido à função defeito de triângulo generalizado ser limitada (no intervalo $]0, \pi]$), então a função área de triângulo é, também, limitada (no intervalo $]0, c\pi]$). Desta forma, triângulos generalizados com três vértices ideais são os triângulos que possuem a maior área possível (pois são os triângulos com o maior defeito possível).

Antes de demonstrarmos essa proporção, precisamos de um lema.

Lema A função defeito de triângulo $\delta : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}_+$ é contínua.

Proposição 5.39 Se ABC e DEF são triângulos (ordinários ou generalizados), então

$$\frac{A(ABC)}{\delta(ABC)} = \frac{A(DEF)}{\delta(DEF)}.$$

Demonstração.

Faremos a situação em que os triângulos são ordinários.

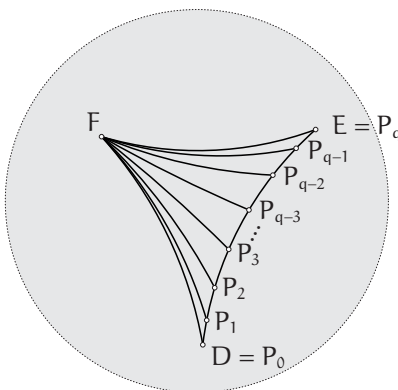
(1º. caso) Se $\delta(ABC) = \delta(DEF)$, então pelo teorema acima, $A(ABC) = A(DEF)$ e o resultado segue.

(2º. caso) Sem perda de generalidade, suponhamos $\delta(ABC) < \delta(DEF)$.

Se $\frac{\delta(ABC)}{\delta(DEF)} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, então p e q são inteiros positivos tais que $p < q$. Como a função defeito é contínua, podemos escolher pontos P_0, P_1, \dots, P_q sobre o lado DE (com $P_0 = D, P_q = E$ e P_i entre P_{i-1} e P_{i+1} para $i = 1, \dots, q - 1$) de tal modo que

$$\delta(P_i P_{i+1} F) = \frac{1}{q} \delta(DEF)$$

para $i = 0, \dots, q - 1$. Isso significa, pelo teorema anterior, que todos os triângulos $P_i P_{i+1} F$ possuem a mesma área (pois todos esses triângulos possuem o mesmo defeito).



Além disso, pela propriedade (2) para a função defeito, temos

$$\delta(ABC) = \frac{p}{q} \delta(DEF) = p \left(\frac{1}{q} \delta(DEF) \right) = \underbrace{\delta(P_0P_1F) + \delta(P_1P_2F) + \dots + \delta(P_{p-1}P_pF)}_{p \text{ termos}} = \delta(P_0P_pF) \Rightarrow$$

$$A(ABC) = A(P_0P_pF); \text{ (pois } ABC \text{ e } P_0P_pF \text{ possuem o mesmo defeito)} \Rightarrow$$

$$A(ABC) = \frac{p}{q} A(DEF); \text{ (pois } DEF \text{ está decomposto em } q \text{ triângulos de mesma área)} \Rightarrow$$

$$\frac{A(ABC)}{A(DEF)} = \frac{p}{q},$$

que nos permite concluir que

$$\frac{\delta(ABC)}{\delta(DEF)} = \frac{p}{q} = \frac{A(ABC)}{A(DEF)} \Rightarrow \frac{A(ABC)}{\delta(ABC)} = \frac{A(DEF)}{\delta(DEF)}.$$

Se $\frac{\delta(ABC)}{\delta(DEF)} = r \notin \mathbb{Q}$, então dividamos DE em n partes do mesmo modo como fizemos acima, tomando triângulos $P_iP_{i+1}F$ tais que $\delta(P_iP_{i+1}F) = \frac{1}{n} \delta(DEF)$. Desta forma, existe m inteiro de modo que $\frac{m}{n} < r < \frac{m+1}{n}$, sendo $m < n$ (pois estamos supondo $\delta(ABC) < \delta(DEF)$, ou seja, $r < 1$).

Assim,

$$\frac{\delta(P_0P_mF)}{\delta(DEF)} = \frac{m}{n} = \frac{A(P_0P_mF)}{A(DEF)},$$

$$\frac{\delta(P_0P_{m+1}F)}{\delta(DEF)} = \frac{m+1}{n} = \frac{A(P_0P_{m+1}F)}{A(DEF)}$$

Mas $\delta(P_0P_mF) < \delta(ABC) < \delta(P_0P_{m+1}F)$ e, devido à continuidade da função defeito, temos que à medida que $n \rightarrow \infty$, então $\frac{m}{n} \rightarrow \frac{m+1}{n}$ e ambos estes números se aproximam de r, o que significa $\delta(P_0P_mF) \rightarrow \delta(P_0P_{m+1}F)$ e ambos estes números se aproximam de $\delta(ABC)$ e, portanto, $A(P_0P_mF) \rightarrow A(P_0P_{m+1}F)$ e ambos estes números se aproximam de $A(ABC)$. Assim, das igualdades acima, fazendo $n \rightarrow \infty$, temos

$$\frac{\delta(ABC)}{\delta(DEF)} = r = \frac{A(ABC)}{A(DEF)} \Rightarrow \frac{A(ABC)}{\delta(ABC)} = \frac{A(DEF)}{\delta(DEF)},$$

como queríamos. □

Corolário 5.3 Se ABC é triângulo (ordinário ou generalizado), então

$$A(ABC) = c \delta(ABC),$$

sendo c constante positiva.

Demonstração.

Na proposição acima, basta fixarmos o triângulo DEF. Assim, $\frac{A(DEF)}{\delta(DEF)} = c > 0$ e temos o resultado desejado. □

Perguntas que surgem naturalmente aqui são as seguintes:

A constante de proporcionalidade c pode ser arbitrada?

A constante de proporcionalidade c possui alguma interpretação geométrica?

Para responder às perguntas acima, apelamos para o famoso Teorema de Gauss-Bonnet, que tem por um de seus corolários, que a integral da curvatura gaussiana do plano hiperbólico sobre um triângulo T é igual a diferença entre

a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo e π , isto é:

$$(\alpha + \beta + \gamma) - \pi = \iint_{\mathcal{T}} k d\sigma,$$

sendo α , β e γ medidas dos ângulos internos do triângulo \mathcal{T} , k curvatura constante e negativa do plano hiperbólico e $d\sigma$ elemento de área hiperbólica, isto é, $d\sigma = \sqrt{EG - F^2} dx dy$, sendo E , F e G coeficientes da Primeira Forma Quadrática relativa a uma parametrização local do plano hiperbólico que contém \mathcal{T} . Deste modo,

$$A(\mathcal{T}) = \iint_{\mathcal{T}} 1 d\sigma = \frac{1}{k} ((\alpha + \beta + \gamma) - \pi) = -\frac{1}{k} (\pi - (\alpha + \beta + \gamma)) = -\frac{1}{k} \delta(\mathcal{T}).$$

Assim, a constante de proporcionalidade c acima é tal que $c = -\frac{1}{k}$ e está, portanto, relacionada com a curvatura do plano hiperbólico. Podemos arbitrar c ? Sim, pois podemos arbitrar a curvatura. Tomando a curvatura gaussiana k igual a -1 (que corresponde a tomarmos o modelo do Disco de Poincaré com raio euclidiano igual a 1), temos que a área de um triângulo hiperbólico \mathcal{T} será exatamente o seu defeito. Desta forma, qualquer triângulo cujo defeito seja 1 pode ser tomado como unidade de área hiperbólica. Observemos que existe uma família com infinitos triângulos não congruentes que podem ser considerados como “triângulos unitários” na Geometria Hiperbólica. Esses triângulos não tem obrigação de serem equiláteros (aliás, existe apenas um único triângulo equilátero com defeito 1) e, inclusive, há triângulos generalizados com defeito 1.

Sintetizamos esse resultado na proposição abaixo.

Proposição 5.40 Sejam $k = -1$ a curvatura gaussiana do plano hiperbólico, \mathcal{T} triângulo hiperbólico, $A(\mathcal{T})$ sua área e $\delta(\mathcal{T})$ seu defeito. Então:

$$A(\mathcal{T}) = \delta(\mathcal{T}) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Podemos generalizar o resultado acima para polígonos \mathcal{P} :

$$A(\mathcal{P}) = \delta(\mathcal{P}).$$

Mas, e a área de uma “região não poligonal” no plano hiperbólico? Como definimos sua área? Vejamos:

Sejam \mathcal{R} conjunto de pontos no plano hiperbólico e $A(\mathcal{R})$ número real tal que:

Dados $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ quaisquer com $r_1 < A(\mathcal{R}) < r_2$, existem polígonos $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{P}_2$ cujas áreas $A(\mathcal{P}_1)$ e $A(\mathcal{P}_2)$ satisfazem $r_1 < A(\mathcal{P}_1) \leq A(\mathcal{R}) \leq A(\mathcal{P}_2) < r_2$.

O número real $A(\mathcal{R})$ é definido como o **área** de \mathcal{R} .

Conjuntos \mathcal{R} do plano hiperbólico que possuem áreas não nulas, definidas conforme acima, são chamados de **regiões**.

Em palavras mais simples, a área de uma região \mathcal{R} é o número real $A(\mathcal{R})$ cujas aproximações por falta são áreas de polígonos contidos na região e cujas aproximações por excesso são as áreas de polígonos que contêm a região.

Em cursos mais avançados (de Análise Real ou Teoria da Medida) é possível mostrar que existem conjuntos, mesmo limitados, de pontos no plano que não possuem a área estabelecida conforme a definição que demos acima. Além disso, é possível mostrar que a área de um conjunto de pontos no plano hiperbólico (quando existe) é única.

Com a definição acima, podemos calcular a área de um círculo hiperbólico, por exemplo. Isso será feito no próximo capítulo.

Para encerrar, uma observação importante: em geometria hiperbólica, não é correto dizer que determinada região possui área igual a x “*unidades de comprimento ao quadrado*” pois, como vimos, a unidade de área hiperbólica não provém de quadrado e não faz uso de medidas de comprimento. É melhor utilizar a expressão x “*unidades de área*”.



Seção de Exercícios Propostos: *Geometria Hiperbólica Plana*

Exercício 5.1 Prove que, se as semirretas que contém os segmentos BC e AC, sendo $BC \cap AC = \{C\}$, são ambas paralelas a uma reta n , então a bissetriz do ângulo \widehat{ACB} é perpendicular à reta n .

Exercício 5.2 Mostre que se uma reta t corta duas retas r e s formando ângulos colaterais internos cuja soma das medidas é π rad, então r e s são retas hiperparalelas.

Exercício 5.3 Dadas duas retas paralelas $\overleftrightarrow{A\Omega}$, $\overleftrightarrow{B\Omega}$ e quatro pontos A' , B' , C' e D' , se ocorrer que $AB \equiv A'B'$, $A'B'C' \equiv A\widehat{B}\Omega$ e $B'A'D' \equiv B\widehat{A}\Omega$, então as retas que contém $A'D'$ e $B'C'$ são paralelas.

Exercício 5.4 Quando os ângulos ordinários do triângulo $AB\Omega$ são iguais, dizemos que o triângulo generalizado é isósceles. Prove que, em tais triângulos, se M é o ponto médio de AB , então a reta $M\Omega$ é perpendicular a AB . Inversamente, mostre que, se M é o ponto médio de um segmento AB e $M\Omega$ é perpendicular a AB , então $AB\Omega$ é isósceles.

Exercício 5.5 Dados os triângulos generalizados $AB\Omega$ e $A'B'\Omega'$, nos quais $A'\widehat{B}'\Omega' \equiv A\widehat{B}\Omega$ e $AB > A'B'$, mostre que $B'\widehat{A}'\Omega' > B\widehat{A}\Omega$.

Dica: tome um ponto A'' em AB tal que $A''B \equiv A'B'$. Pelo caso de congruência LA de triângulos generalizados, $A''B\Omega \equiv A'B'\Omega'$. Pelo Teorema do Ângulo Externo para triângulos generalizados (triângulo $A''A\Omega$) concluímos o que queremos.

Exercício 5.6 Mostre que se uma reta “entra” em um triângulo generalizado $A\Omega_1\Omega_2$ por um de seus vértices, então essa reta intersecta o lado oposto a esse vértice.

Dica: quando a reta r “entra” por A , tome um ponto $P \in \Omega_1\Omega_2$ e ligue com A . Utilize proposição análoga ao enunciado para triângulos generalizados com apenas um vértice ideal (feita na teoria). Quando reta r “entra” pelo vértice ideal Ω_1 , então $r//A\Omega_1$ e $r//\Omega_1\Omega_2$. Tome um ponto $P \in r$ dentro do triângulo e ligue com A com Ω_2 . Logo, r “entra” em $AP\Omega_2$ por P .

Exercício 5.7 Mostre que se uma reta intersecta um dos lados de um triângulo generalizado $A\Omega_1\Omega_2$ e não passa por nenhum de seus vértices, então essa reta intersecta um dos outros dois lados.

Dica: seja P o ponto de intersecção da reta com um dos lados. Se $P \in A\Omega_1$, considere os triângulos $PA\Omega_2$ e $P\Omega_1\Omega_2$. Se $P \in \Omega_1\Omega_2$, considere os triângulos $PA\Omega_1$ e $PA\Omega_2$.

Exercício 5.8 Mostre que se uma reta “entra” em um triângulo generalizado $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ por um de seus vértices, então essa reta intersecta o lado oposto a esse vértice.

Dica: seja P um ponto da reta no interior do triângulo. Se a reta “entra” pelo vértice Ω_1 , ela é paralela às retas $\Omega_1\Omega_2$ e $\Omega_1\Omega_3$ e considere o triângulo $P\Omega_2\Omega_3$. A reta “entra” nesse triângulo pelo vértice P .

Exercício 5.9 Mostre que se uma reta intersecta um dos lados de um triângulo generalizado $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ e não passa por nenhum de seus vértices, então essa reta intersecta um dos outros dois lados.

Dica: seja P o ponto de intersecção da reta com um dos lados. Se $P \in \Omega_1\Omega_2$, considere os triângulos $P\Omega_1\Omega_3$ e $P\Omega_2\Omega_3$.

Exercício 5.10 Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $\widehat{A} \equiv \widehat{B}$ são retos. Mostre que, se os outros dois ângulos são congruentes, então $ABCD$ é Quadrilátero de Saccheri.

Dica: por absurdo. Se $AD < BC$, tome $C' \in BC$ tal que $AD \equiv BC'$ e temos um Quadrilátero de Saccheri $ABC'D$ (portanto, $\widehat{ADC'} = \widehat{BC'D}$) e um triângulo $C'CD$. Pelo Teorema do Ângulo Externo temos $\widehat{BCD} < \widehat{BC'D}$. Já no vértice D temos $\widehat{ADC'} < \widehat{ADC}$ e, portanto, $\widehat{BCD} < \widehat{ADC}$. Contradição.

Exercício 5.11 Prove que, em um quadrilátero de Lambert, os lados adjacentes ao ângulo agudo são maiores do que os respectivos lados opostos. Com esse resultado, responda e justifique:

O que é maior: a base ou o topo de um quadrilátero de Saccheri?

Dica: por absurdo. Seja $ABCD$ de Lambert com \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} retos. Se $AD \equiv BC$, então $ABCD$ seria de Saccheri e C deveria ser agudo. Se $AD < BC$, então tome $C' \in BC$ tal que $BC' \equiv AD$ e $ABC'D$ seria de Saccheri e, portanto, $\widehat{C'}$ seria agudo e externo ao triângulo retângulo $C'CD$, o que contradiz o Teorema do Ângulo Externo.

Exercício 5.12 Prove que o segmento ligando os pontos médios de dois lados de um triângulo hiperbólico ordinário é menor do que a metade do terceiro lado.

Exercício 5.13 (bom) Sejam ABC um triângulo hiperbólico ordinário e r reta que passa pelos pontos médios de AB e AC . Considere $D, E \in r$ tais que $BD \perp r$ e $CE \perp r$. Prove que $BCED$ é um Quadrilátero de Saccheri. Como consequência, prove que a reta perpendicular a BC passando pelo seu ponto médio é perpendicular a r .

Exercício 5.14 (bom) Sejam ABC um triângulo hiperbólico ordinário e r reta que passa pelos pontos médios de AB e AC . Suponha que existam $D, E \in r$ tais que $DB \perp BC$ e $EC \perp BC$. Prove que $DECB$ é um Quadrilátero de Saccheri.

Exercício 5.15 (bom) Prove que a reta ligando os pontos médios dos lados congruentes de um Quadrilátero de Saccheri é perpendicular à reta ligando os pontos médios dos outros dois lados, e que, ela divide ao meio as diagonais do quadrilátero.

Exercício 5.16 (bom) Prove que as bissetrizes dos ângulos de um triângulo hiperbólico ordinário são concorrentes em um único ponto no interior do triângulo.

Exercício 5.17 (bom) Mostre que o comprimento de uma circunferência é maior do que seis vezes o seu raio. (*obs.: não é para utilizar a fórmula de comprimento de circunferência hiperbólica*)

Exercício 5.18 Mostre que “Sejam r e s são retas concorrentes em O . Se $P \neq O$ está em r , então em s existem exatamente dois pontos distintos que lhe são correspondentes”.

Exercício 5.19 Mostre que “Dado um ponto em uma de duas retas hiperparalelas, existe sobre a outra um e somente um ponto que lhe é correspondente”.

Exercício 5.20 Mostre que “Se três pontos P, Q e R estão em três retas concorrentes em um ponto O e, se $P \neq O$ corresponde a Q e Q corresponde a R , então os três pontos não são colineares”.

Exercício 5.21 É verdade que “Se três pontos P, Q e R estão em três retas duas a duas hiperparalelas e, se P corresponde a Q e Q corresponde a R , então os três pontos não são colineares”? Justifique.

Exercício 5.22 Mostre que “Se três pontos P, Q e R estão em três retas concorrentes em um ponto O e, se $P \neq O$ corresponde a Q e Q corresponde a R , então P corresponde a R ”.

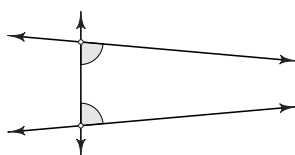
Exercício 5.23 Mostre que “Sejam três pontos P, Q e R em três retas r, s e t duas a duas hiperparalelas. Se r, s e t possuem uma perpendicular em comum e, se P corresponde a Q e Q corresponde a R , então P corresponde a R ”.



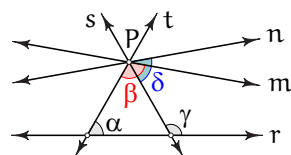
Trabalho Proposto 1 - Disco de Poincaré no GeoGebra:
Equivalentes do P5 não valem na Geometria Hiperbólica

Utilizando o software de geometria dinâmica *GeoGebra* com o menu de Geometria Hiperbólica Plana, dê contra-exemplos no Disco de Poincaré, utilizando construções geométricas, para os seguintes equivalentes do 5º Postulado de Euclides (incluindo o próprio):

(1) **P5** - Se uma reta, intersectando duas retas em um plano, forma ângulos interiores de um mesmo lado com soma menor que a de dois ângulos retos, então as duas retas, se prolongadas indefinidamente, irão se encontrar do lado cuja soma dos ângulos é menor do que a de dois ângulos retos.

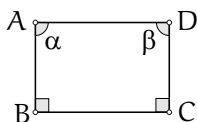


- (2) Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.
- (3) A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso.
- (4) Se a reta r é paralela à reta s e a reta s é paralela à reta t , então a reta r é paralela à reta t .
- (5) Considere a figura abaixo:



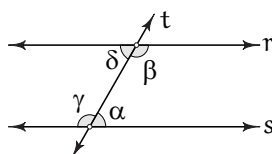
Se $\alpha + \beta = \gamma + \delta = \pi$ rad, então $m = n$.

- (6) A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é sempre a mesma
- (7) Dados quaisquer três pontos não colineares, existe um círculo passando por estes três pontos.
- (8) Se três dos ângulos de um quadrilátero são retos, então o quarto ângulo também é reto.
- (9) Uma reta que corta uma de duas paralelas, corta também a outra.
- (10) Uma reta perpendicular a uma de duas paralelas é, também, perpendicular a outra.
- (11) Retas paralelas são equidistantes.
- (12) Considere a figura abaixo:



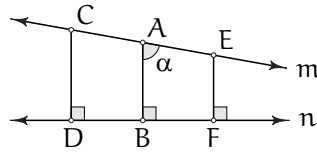
Se $AB \equiv CD$, então $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ rad.

- (13) Um ângulo inscrito em um semicírculo é sempre reto.
- (14) Lados opostos de um paralelogramo são congruentes.
- (15) Considere a figura abaixo:



Se r é paralela a s , então $\alpha + \beta = \gamma + \delta$.

(16) Sejam m e n duas retas, $A \in m$ e $B \in n$ tais que $AB \perp n$ e forma um ângulo agudo com m . Então, as perpendiculares baixadas de m à reta n , do lado do ângulo agudo são menores do que AB e as que ficam do outro lado são maiores do que AB . Veja a figura abaixo.



(17) Por um ponto dentro de um ângulo menor que dois retos pode-se traçar uma reta que intesecta os dois lados desse ângulo.

(18) Em qualquer triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

(19) As mediatrizes dos lados de um triângulo são concorrentes em um mesmo ponto.

(20) Dois triângulos retângulos são semelhantes se um ângulo agudo de um for igual a um ângulo agudo do outro.

(21) As alturas de um triângulo são concorrentes em um mesmo ponto.

(22) Um quadrilátero pode ser inscrito em um círculo se, e somente se, possui um par de ângulos opostos suplementares.

(23) Se uma reta, paralela a um dos lados de um triângulo, corta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão.

(24) O segmento ligando os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem metade de seu comprimento.

Recomendações para confecção e envio deste trabalho:

- Este trabalho computacional deverá ser digitado em um editor de textos e as imagens com as construções nas telas do *GeoGebra* deverão ser inseridas nesse texto (isto pode ser feito por meio de “*print screen*” da tela).
- Os enunciados dos equivalentes e a **descrição** da construção geométrica na figura que fornece o contra-exemplo deverão constar no texto.
- Organize o trabalho de modo que cada construção geométrica (com enunciado, descrição e figura) ocupe apenas uma página. (uma página por construção)
- Acrescente uma capa como primeira página com as informações pertinentes ao trabalho, não esquecendo, obviamente, a identificação do autor.
- Se você seguir as recomendações acima, seu trabalho terá *exatamente* 25 páginas.
- Um arquivo *pdf* deverá ser gerado e enviado ao professor. Não imprima o trabalho em papel. O envio é exclusivamente eletrônico. Os arquivos *ggb* do *GeoGebra* não precisam ser enviados.

Para auxiliar, na próxima página, segue um exemplo completo da primeira construção geométrica que deverá ser feita.



EXEMPLO

(1) **P5** - Se uma reta, intersectando duas retas em um plano, forma ângulos interiores de um mesmo lado com soma menor que a de dois ângulos retos, então as duas retas, se prolongadas indefinidamente, irão se encontrar do lado cuja soma dos ângulos é menor do que a de dois ângulos retos.

Na Geometria Hiperbólica esta proposição não é verdadeira, pois tal geometria é construída baseada em um axioma contraditório com **P5**. Uma construção geométrica hiperbólica no Disco de Poincaré utilizando o software *GeoGebra* com o menu de Geometria Hiperbólica Plana permite um contra-exemplo para **P5**.

Descrição da construção geométrica: (FIGURA 1)

(a) Tracemos retas hiperbólicas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD} de tal modo que elas sejam paralelas, ou seja, não se intersectam.
 (b) Posicionemos os pontos B e D de tal modo que fiquem de um mesmo lado da reta transversal hiperbólica \overleftrightarrow{AC} .
 (c) Meçamos os ângulos \widehat{CAB} e \widehat{DCA} .
 (d) Movimentemos os pontos B e D de tal modo que a soma das medidas dos ângulos \widehat{CAB} e \widehat{DCA} seja menor do que a medida de um ângulo raso. As retas hiperbólicas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD} devem permanecer paralelas nesses movimentos.

No caso da FIGURA 1, a soma das medidas dos ângulos mencionada no item (d) é $128,27^\circ$, que é menor do que 180° .

Com isso, a hipótese de **P5** está cumprida, mas a tese não.

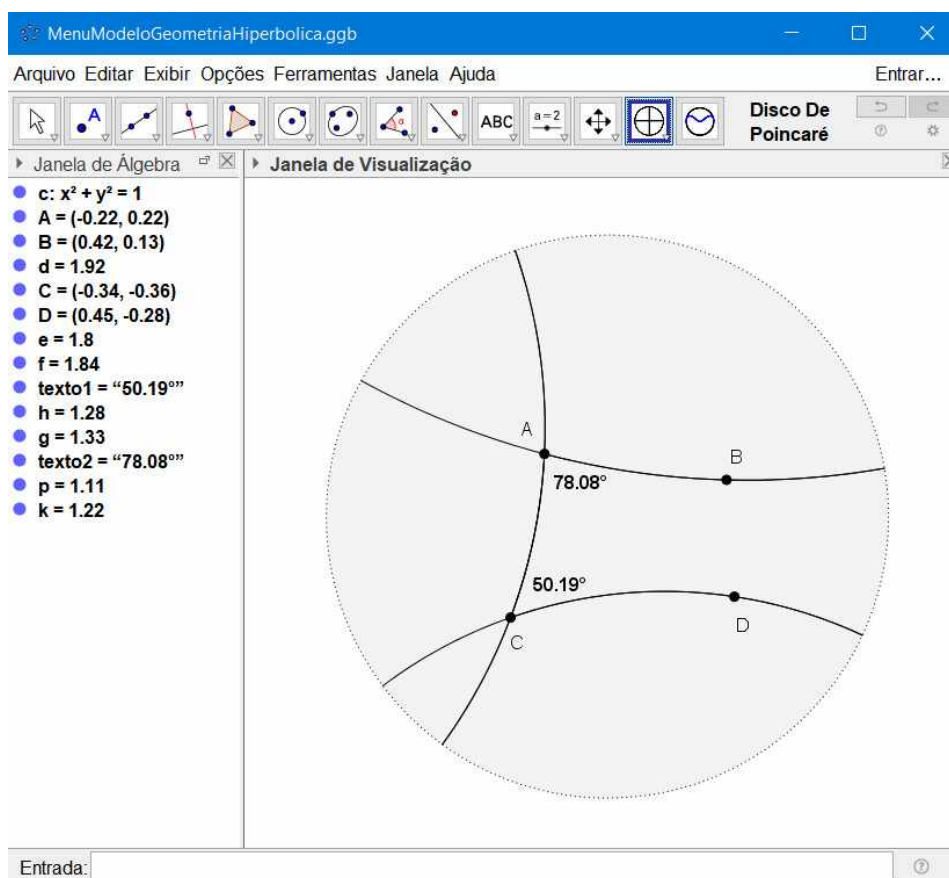


FIGURA 1



Trabalho Proposto 2 - Disco de Poincaré no GeoGebra: Quais proposições da Geometria Euclidiana valem na Geometria Hiperbólica?

A seguir temos diversas definições utilizadas nas Geometrias Euclidiana e Hiperbólica Planas, além de 63 teoremas da Geometria Euclidiana, dos quais 26 não são válidos na Geometria Hiperbólica (e estão devidamente identificados no enunciado de cada teorema). Você deve fornecer contra-exemplos, por meio de construções geométricas, para os teoremas que **não** são válidos na Geometria Hiperbólica utilizando o software de geometria dinâmica *GeoGebra* (com o menu de Geometria Hiperbólica Plana).

Há, também, 6 propostas de construções geométricas hiperbólicas especiais ao final da lista de teoremas que devem ser acrescentadas ao trabalho.

Uma sugestão edificante para enriquecimento de seus estudos: se quiser, você pode verificar por si só quais dos 63 teoremas enunciados abaixo não são válidos na Geometria Hiperbólica. Para isso, você deve analisar a demonstração de cada um deles e identificar quais delas efetivamente utilizam um equivalente do 5°. Postulado de Euclides. O livro *Geometria Euclidiana Plana*, de João Lucas M. Barbosa (referência [2]), pode ser bastante útil para verificar quais são os teoremas que dependem do 5°. Postulado.

Retas e Ângulos

Como no caso Euclidiano, **ângulos hiperbólicos** são figuras formadas pela reunião de duas semirretas hiperbólicas que possuem a mesma origem. As duas semirretas são chamadas de **lados** do ângulo e a origem comum das semirretas de **vértice**. Dois ângulos são chamados **ângulos opostos pelo vértice** quando possuem o mesmo vértice e seus lados formam duas retas hiperbólicas. Quando os ângulos \widehat{BAD} e \widehat{CAD} têm em comum o lado \overrightarrow{AD} , e as semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} são opostas, chamamos \widehat{BAD} e \widehat{CAD} de **ângulos suplementares**. Um ângulo \widehat{BAD} é denominado **ângulo reto** quando possui um suplemento congruente a ele.

Teorema 5.1 *Ângulos opostos pelo vértice são congruentes.*

Teorema 5.2 *Por qualquer ponto de uma reta passa uma única reta perpendicular a esta reta.*

Dois retas l e m são **perpendiculares** quando elas se intersectam em um ponto A e existe uma semirreta \overrightarrow{AB} contida em l e uma semirreta \overrightarrow{AC} contida em m de modo que o ângulo \widehat{BAC} é reto. Duas retas l e m no plano são **paralelas** (ou **hiperparalelas**⁷) quando não se intersectam.

Teorema 5.3 *Se duas retas que se intersectam formam um ângulo reto, então elas formam quatro ângulos retos.*

Teorema 5.4 (não vale na GH) *Se l e m são retas que não se intersectam e uma reta r intersecta l , então r também intersecta m .*

Teorema 5.5 (não vale na GH) *Se l e m são duas retas que não se intersectam e uma reta r intersecta l e é perpendicular a m , então r também é perpendicular a l .*

Teorema 5.6 (não vale na GH) *Se l e m são duas retas que não se intersectam, r é uma reta perpendicular a l e s é uma reta perpendicular a m , então $r = s$ ou r não intersecta s .*

Teorema 5.7 *Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar apenas uma perpendicular à reta passando pelo ponto.*

Triângulos

⁷Como vimos neste capítulo, na Geometria Hiperbólica temos o conceito de *retas paralelas* e de *retas hiperparalelas*. Em ambos os casos, tratam-se de retas que não se intersectam.

Sejam A , B e C três pontos não colineares. A figura formada pela reunião dos três segmentos de retas AB , AC e BC é chamada de **triângulo** e representada por ABC . Os pontos A , B e C são chamados de **vértices** e os segmentos AB , AC e BC são os **lados**. Cada triângulo ABC determina três ângulos, a saber: \widehat{BAC} , \widehat{ABC} e \widehat{ACB} . Estes são chamados **ângulos do triângulo** ABC . Dois triângulos são **congruentes** quando existe uma correspondência entre eles tal que os três pares de lados correspondentes são congruentes, e os três pares de ângulos correspondentes também são congruentes.

Teorema 5.8 *Critério LLL de congruência.*

Teorema 5.9 *Critério ALA de congruência.*

Teorema 5.10 *Critério LAA_0 de congruência.*

Teorema 5.11 (axioma) *Critério LAL de congruência.*

Um triângulo que tem dois lados congruentes é chamado **triângulo isósceles**, o terceiro lado é chamado de **base**. Os dois ângulos adjacentes à base são chamados **ângulos da base** e o ângulo oposto à base é chamado **ângulo do vértice**. Um triângulo cujos três lados são congruentes é chamado **triângulo equilátero** e um triângulo no qual dois lados quaisquer não são congruentes é chamado **triângulo escaleno**. Quando os três ângulos de um triângulo são congruentes dizemos que ele é **equiângulo**.

Teorema 5.12 *Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.*

Teorema 5.13 *Se dois ângulos de um triângulo são congruentes, então os lados opostos a estes ângulos são congruentes.*

Teorema 5.14 *Em um triângulo isósceles a mediana relativa à base é também altura e bissetriz.*

Teorema 5.15 *Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a eles não são congruentes e o maior ângulo se opõe ao maior lado.*

Teorema 5.16 *Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a estes ângulos não são congruentes e o maior lado se opõe do maior ângulo.*

Teorema 5.17 (Teorema da Dobradiça) *Se dois lados de um triângulo são congruentes, respectivamente a dois lados de um segundo triângulo e se o ângulo determinado por eles no primeiro triângulo é maior que o ângulo correspondente no segundo, então o terceiro lado do primeiro triângulo é maior que o terceiro lado do segundo.*

Teorema 5.18 (Recíproco do Teorema da Dobradiça) *Se dois lados de um triângulo são congruentes, respectivamente, a dois lados de um segundo triângulo e se o terceiro lado do primeiro triângulo é maior que o terceiro lado do segundo, então o ângulo determinado pelos dois lados no primeiro triângulo é maior que o ângulo determinado pelos lados correspondentes no segundo.*

Teorema 5.19 (Teorema do Ângulo Externo) *Todo ângulo externo de um triângulo mede mais do que qualquer ângulo interno a ele não adjacente.*

Teorema 5.20 *A soma das medidas de quaisquer dois ângulos internos de um triângulo é sempre menor do que π rad.*

Teorema 5.21 (axioma) *Em um triângulo a soma das medidas de dois lados quaisquer é sempre maior do que a medida do terceiro lado.*

Teorema 5.22 *Dados três números reais positivos a , b e c tais que $|b - c| < a < b + c$, então é sempre possível construir um triângulo com lados medindo a , b e c .*

Teorema 5.23 (não vale na GH) *O segmento ligando os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem metade de seu comprimento.*

Teorema 5.24 (não vale na GH) *Se uma reta, paralela à reta suporte de um dos lados de um triângulo, intersecta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão.*

Quando D é um ponto no interior do ângulo \widehat{BAC} e $\widehat{BAD} \equiv \widehat{DAC}$ dizemos que a semirreta \overrightarrow{AD} é a **bissetriz do ângulo \widehat{BAC}** . Um segmento de reta é uma **bissetriz de um triângulo** quando está contido em uma semirreta que é bissetriz de um ângulo do triângulo e suas extremidades são, uma o vértice deste ângulo e a outra, um ponto do lado oposto. Uma **mediana de um triângulo** é um segmento cujas extremidades são um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a este vértice. Uma **altura de um triângulo** é um segmento perpendicular, por um vértice do triângulo, à reta que contém o lado oposto. Os extremos da altura devem estar sobre o vértice e a reta que contém o lado oposto.

Teorema 5.25 (não vale na GH) *As retas suportes das alturas dos lados de um triângulo intersectam-se em um mesmo ponto ordinário.*

Teorema 5.26 *As bissetrizes de um triângulo intersectam-se em um mesmo ponto.*

Teorema 5.27 *Em qualquer triângulo existe um ponto equidistante de seus lados.*

Teorema 5.28 (não vale na GH) *Em um triângulo, o produto da medida da altura pela medida da base é o mesmo qualquer se seja o lado escolhido como base.*

Teorema 5.29 *A altura de um triângulo isósceles relativa a sua base bissecta o ângulo oposto à base.*

Pergunta: Na Geometria Euclidiana, a correspondência LLA e a correspondência AAA não são suficientes para provar que os pares de triângulos correspondentes são congruentes. Essas correspondências são suficientes para provar que triângulos correspondentes são congruentes na Geometria Hiperbólica? Justifique.

(Respostas: LLA não, AAA sim)

Um **triângulo retângulo** é um triângulo que tem um ângulo reto. O lado oposto ao ângulo reto é chamado de **hipotenusa** e os outros dois lados de **catetos**.

Teorema 5.30 *Existe um triângulo retângulo, ou seja, é possível construir um triângulo retângulo.*

Teorema 5.31 (não vale na GH) (Teorema de Pitágoras) *Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*

Teorema 5.32 (não vale na GH) (Recíproco do Teorema de Pitágoras) *Um triângulo possui lados medindo a , b e c . Se $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo é retângulo e a hipotenusa é o lado de medida a .*

Teorema 5.33 (Caso de congruência exclusivo de triângulos retângulos) *Se dois triângulos retângulos possuem hipotenusas e um dos catetos congruentes, então os triângulos são congruentes.*

Teorema 5.34 (não vale na GH) *Em um triângulo retângulo o comprimento h da altura relativa ao vértice do ângulo reto é a média geométrica dos comprimentos m e n das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa, ou seja, $h = \sqrt{mn}$.*

Quadriláteros, Retângulos e Quadrados

Considere quatro pontos A , B , C , e D no mesmo plano tais que três quaisquer destes pontos são não colineares e os segmentos AB , BC , CD e DA só se intersectam em seus extremos. A reunião desses quatro segmentos é chamada de **quadrilátero**. Os quatro segmentos são chamados **lados**, os pontos A , B , C e D são os **vértices** e os ângulos \widehat{DAB} , \widehat{ABC} , \widehat{BCD} e \widehat{CDA} são chamados **ângulos do quadrilátero**. Um **retângulo** é um quadrilátero com os quatro ângulos retos. Um **quadrado** é um retângulo com os quatro lados congruentes. Um **quadrilátero regular** é um quadrilátero no qual todos os ângulos são congruentes e todos os lados também.

Teorema 5.35 (não vale na GH) *É possível construir retângulos, e, conseqüentemente, quadrados.*

Teorema 5.36 *É possível construir um quadrilátero regular.*

Teorema 5.37 (não vale na GH) *Todo quadrilátero regular é um quadrado.*

Teorema 5.38 (não vale na GH) *Os dois segmentos de retas passando pelos pontos médios dos lados opostos de um quadrilátero regular dividem o quadrilátero regular em quatro quadriláteros regulares menores.*

Teorema 5.39 *As diagonais de um quadrilátero regular se intersectam em seus pontos médios.*

Teorema 5.40 *As diagonais de um quadrilátero regular são perpendiculares.*

Teorema 5.41 (não vale na GH) *A mediana em relação à hipotenusa de um triângulo retângulo tem por comprimento a metade do comprimento da hipotenusa.*

Um **paralelogramo** é um quadrilátero no qual ambos os pares de lados opostos estão sobre retas paralelas (ou hiperparalelas).

Teorema 5.42 *É possível construir um paralelogramo.*

Teorema 5.43 (não vale na GH) *Os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.*

Teorema 5.44 (não vale na GH) *Os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes.*

Teorema 5.45 (não vale na GH) *As diagonais de um paralelogramo se intersectam em seus pontos médios.*

Teorema 5.46 *Se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes, então este quadrilátero é um paralelogramo.*

Círculos

Sejam O um ponto do plano e r um número real positivo. O **círculo de centro O e raio r** é o conjunto de todos os pontos P do plano tal que o segmento OP tem comprimento r . O segmento OP é, também, chamado de raio do círculo. Quando A e B são pontos de um círculo, o segmento AB é chamado de **corda** do círculo. Em particular, quando A , B e O são colineares essa corda é chamada de **diâmetro** do círculo. Uma reta é **tangente** a um círculo quando possui apenas um único ponto em comum com o círculo.

Teorema 5.47 *Seja c uma corda que não é diâmetro de um círculo. Um raio é perpendicular a c se, e somente se, c divide em dois segmentos congruentes.*

Teorema 5.48 *Se uma reta é tangente a um círculo, então ela é perpendicular ao raio que liga o centro ao ponto de tangência.*

Teorema 5.49 *Se uma reta é perpendicular a um raio em sua extremidade, então a reta é tangente ao círculo.*

Teorema 5.50 *Em um mesmo círculo, ou em círculos de mesmo raio, cordas congruentes determinam ângulos centrais congruentes e reciprocamente.*

Teorema 5.51 (não vale na GH) *Todo ângulo inscrito em um círculo tem medida igual a metade da medida do arco correspondente.*

Teorema 5.52 (não vale na GH) *Todos os ângulos inscritos em um círculo que subentendem um mesmo arco têm a mesma medida. Em particular, todos os ângulos que subentendem um semicírculo são retos.*

Teorema 5.53 (não vale na GH) *Sejam AB e CD cordas distintas de um mesmo círculo que se intersectam em um ponto P . Então, $\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$.*

Teorema 5.54 (não vale na GH) *Se dois lados de um ângulo de vértices P são tangentes a um círculo nos pontos A e B , então a medida do ângulo \widehat{P} é igual a π rad menos a medida do arco menor determinado por A e B .*

Teorema 5.55 *Se dois lados de um ângulo de vértices P são tangentes a um círculo nos pontos A e B , então $PA \equiv PB$.*

Teorema 5.56 (não vale na GH) *Todo triângulo está inscrito em um círculo.*

Teorema 5.57 (não vale na GH) *As mediatrizes dos lados de um triângulo encontram-se em um mesmo ponto.*

Teorema 5.58 (não vale na GH) *A relação $\frac{\text{medida do círculo}}{\text{diâmetro do círculo}}$ é sempre constante e igual a π .*

Observação: De maneira análoga ao que ocorre na Geometria de Euclidiana, na Geometria Hiperbólica, a medida de um círculo pode ser determinada por meio do limite do perímetro de uma sequência de polígonos regulares inscritos ao círculo. Como o número de lados dos polígonos regulares aumenta, os perímetros dos polígonos se tornam aproximações da medida do círculo.

Teorema 5.59 (não vale na GH) *Um quadrilátero pode se inscrito em um círculo se, e somente se, possui um par de ângulos opostos suplementares.*

Teorema 5.60 *Todo triângulo possui um círculo inscrito.*

Polígonos

Um **polígono** é uma figura fechada formada pela reunião de três ou mais segmentos de reta que se intersectam somente em suas extremidades e, se dois destes segmentos têm uma extremidade em comum, então eles não estão contidos em uma mesma reta. As extremidades dos segmentos são os **vértices** do polígono e os segmentos, os **lados**. Um polígono é **convexo** quando está sempre contido em um dos semiplanos determinados pelas retas que contêm os seus lados. Dois lados com um vértice em comum de um polígono convexo determinam um ângulo que é chamado de **ângulo** do polígono. Um polígono convexo é **regular** quando possui ângulos congruentes e lados congruentes.

Pergunta: Como construir um triângulo regular e um quadrilátero regular no *GeoGebra*?

Teorema 5.61 (não vale na GH) *Qualquer polígono regular está contido no interior de um triângulo com lados suficientemente grandes.*

Observação: Esta é uma declaração tão óbvia que nunca se vê essa afirmação feita como um teorema. Na Geometria Hiperbólica, ela não é uma declaração óbvia!

Teorema 5.62 *Qualquer polígono regular pode ser inscrito em um círculo.*

Teorema 5.63 *Qualquer polígono regular pode ser circunscrito a um círculo.*

Construções Geométricas Especiais

Construção 1. Dada uma reta e um ponto fora dela, construa rigorosamente as duas retas paralelas a ela passando pelo ponto. Descreva o procedimento utilizado na construção.

Observação: Não é para usar o botão “retas paralelas” (que já dá a resposta final) do menu de Geometria Hiperbólica Plana do GeoGebra.

Construção 2. Construa rigorosamente a perpendicular comum a duas retas hiperparalelas arbitrárias. Descreva o procedimento utilizado na construção.

Observação: Não é para usar o botão “reta perpendicular a hiperparalelas” (que já dá a resposta final) do menu de Geometria Hiperbólica Plana do GeoGebra.

Construção 3. Construa uma linha poligonal (com cerca de 20 vértices) que se aproxime do formato de uma curva equidistante c a uma reta r dada, à distância. Faça $d(c, r) = 1$. Descreva o procedimento utilizado na construção.

Observação: Não é para usar o botão “curva equidistante” (que já dá a resposta final) do menu de Geometria Hiperbólica Plana do GeoGebra.

Construção 4. Construa um feixe de horocírculos concêntricos (com pelo menos 6 horocírculos) de tal modo que se $A_1\Omega$ é um raio de um dos horocírculos que intersecta todos os outros horocírculos nos pontos A_2, A_3, A_4, \dots , então $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \dots = 1$.

Construção 5. Construa uma linha poligonal (com cerca de 20 vértices) que se aproxime de uma “parábola hiperbólica” (a definição geométrica de parábola é a mesma tanto na Geometria Euclidiana quanto na Hiperbólica).

Construção 6. Posicione os dois eixos coordenados Ox e Oy do sistema de coordenadas hiperbólicas com origem no centro O no disco de Poincaré, Ox na “horizontal” e Oy na “vertical”. Aproxime a curva de equação $y = x^2$ (essa equação no sistema de coordenadas hiperbólicas) por uma linha poligonal (com cerca de 20 vértices). Essa curva é uma “parábola hiperbólica”? (compare com a *Construção 5* acima)

Observação: Não é para usar o botão “gráficos de funções” (que já dá a resposta final) do menu de Geometria Hiperbólica Plana do GeoGebra.

Recomendações para confecção e envio deste trabalho:

- Este trabalho computacional deverá ser digitado em um editor de textos e as imagens com as construções nas telas do *GeoGebra* deverão ser inseridas nesse texto (isto pode ser feito por meio de “*print screen*” da tela).
- Os enunciados dos teoremas que não valem na Geometria Hiperbólica e a **descrição** da construção geométrica na figura que fornece o contra-exemplo deverão constar no texto.
- Organize o trabalho de modo que cada construção geométrica (com enunciado, descrição e figura) ocupe apenas uma página. (uma página por construção)
- Acrescente uma capa como primeira página com as informações pertinentes ao trabalho, não esquecendo, obvia-

mente, a identificação do autor.

- Se você seguir as recomendações acima, seu trabalho terá *exatamente* 33 páginas.
- Um arquivo *pdf* deverá ser gerado e enviado ao professor. Não imprima o trabalho em papel. O envio é exclusivamente eletrônico. Os arquivos *ggb* do *GeoGebra* não precisam ser enviados.

A execução do Trabalho 2 é análoga ao do Trabalho 1. Para auxiliar, veja o exemplo completo apresentado para o Trabalho 1 na seção anterior.



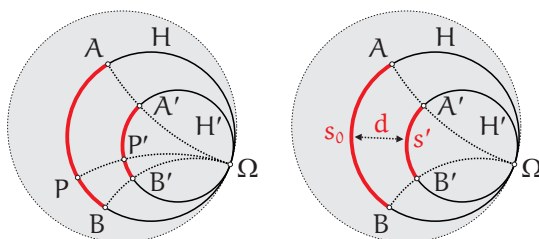
Capítulo 6

Trigonometria Hiperbólica

As ilustrações das próximas subseções foram inspiradas nas construções geométricas realizadas no Modelo do Disco de Poincaré para a Geometria Hiperbólica Plana. As mesmas podem ser reproduzidas com o auxílio de um software de geometria dinâmica hiperbólica, como o *GeoGebra*, *NonEuclid* ou *Cabri-Géomètre* (referências [12], [20] e [5], respectivamente).

6.1 Arcos Correspondentes de Horocírculos Concêntricos

Proposição 6.1 Segmentos de raios de um horocírculo, delimitados entre horocírculos concêntricos, são congruentes.



Seja \widehat{AB} arco do horocírculo H de centro Ω . Um arco $\widehat{A'B'}$ de um horocírculo H' , concêntrico a H , tal que $A' \in A\Omega$ e $B' \in B\Omega$ (como na figura acima), é chamado de **arco correspondente** a \widehat{AB} . Para simplificar, é costume chamar \widehat{AB} e $\widehat{A'B'}$ de **arcos correspondentes de horocírculos concêntricos** ou, simplesmente, **arcos correspondentes**, quando o contexto não deixar dúvidas. É importante observar que, quando falamos de arcos correspondentes, estamos considerando um horocírculo “externo” H que serve como ponto de partida para a criação dos arcos correspondentes, sendo que os horocírculos H' são “internos” a H .

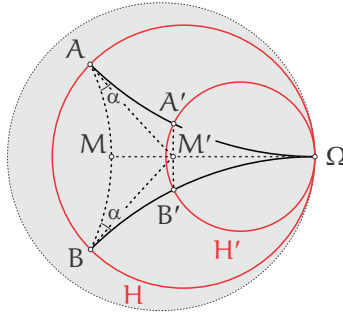
A Proposição 6.1 acima permite definir a **distância** entre \widehat{AB} e $\widehat{A'B'}$ de forma inequívoca, como sendo o comprimento de qualquer segmento PP' de raio $P\Omega$ de horocírculo de H que liga um ponto P de \widehat{AB} a um ponto P' de $\widehat{A'B'}$. Dizemos também que os arcos \widehat{AB} e $\widehat{A'B'}$ de horocírculos concêntricos são **equidistantes**.

De acordo com Proposição 6.1, na figura acima, à esquerda, temos $AA' \equiv PP' \equiv BB'$ e fazamos $d = PP'$. Observemos que se fixarmos o arco \widehat{AB} do horocírculo H e chamarmos seu comprimento de s_0 , parece ser razoável que o comprimento s' de um arco $\widehat{A'B'}$ de horocírculo concêntrico H' e extremos A' e B' nos raios $A\Omega$ e $B\Omega$ dependa apenas de s_0 e da distância d do arco $\widehat{A'B'}$ ao arco \widehat{AB} , ou seja, na figura acima, à direita, se s' é o comprimento de $\widehat{A'B'}$, então $s' = s'(s_0, d)$. Veremos adiante, na Proposição 6.4, que essa observação é, de fato, verdadeira e, mais do que isso, que razão $\frac{s_0}{s'}$ depende apenas de d , não importando o tamanho dos arcos correspondentes e nem da região do plano hiperbólico na qual eles se encontram. Por fim, aqui já surge uma pergunta natural: *existe uma equação explícita envolvendo s_0 , d e s'* ? Mais adiante, na Proposição 6.5, também justificaremos uma equação bastante simples envolvendo esses três parâmetros.

Demonstração (da Proposição 6.1).

Sejam os horocírculos concêntricos H e H' , com centro em Ω , e os pontos $A, B \in H$. Identifiquemos os pontos

A' e B' , respectivamente, como intersecção dos raios $A\Omega$ e $B\Omega$ de H com H' , conforme a figura abaixo:



Seja M ponto médio de AB e, sendo $\widehat{A} = \widehat{B} = \alpha$ no triângulo generalizado $AB\Omega$, pelo caso de congruência “lado, ângulo” para triângulos generalizados (aplicado aos triângulos $AM\Omega$ e $BM\Omega$) temos $M\Omega \perp AB$.

Temos também $AMM' \equiv BMM'$ (caso LAL) e, portanto, $AA'M' \equiv BB'M'$ (caso LAA₀).

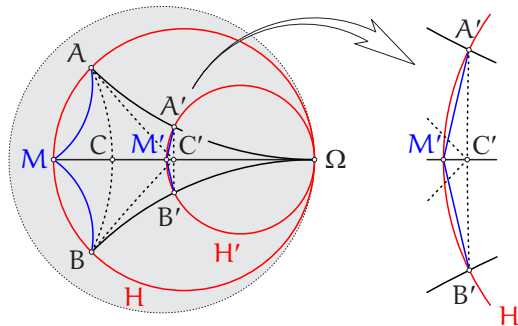
Conclusão: $AA' \equiv BB'$, como queríamos. □

Proposição 6.2 Se M divide ao meio um arco \widehat{AB} do horocírculo H , então o raio $M\Omega$ divide ao meio quaisquer arcos correspondentes a \widehat{AB} em horocírculos concêntricos a H .

Demonstração.

Sejam (veja figura abaixo):

- H e H' horocírculos concêntricos com centro em Ω ;
- A e B pontos distintos de H ;
- A' e B' pontos tais que $\{A'\} = A\Omega \cap H'$ e $\{B'\} = B\Omega \cap H'$;
- M ponto médio do arco de horocírculo \widehat{AB} de H ;
- M' ponto tal que $\{M'\} = A'B' \cap M\Omega$, sendo $\widehat{A'B'}$ arco de horocírculo de H' correspondente a \widehat{AB} ;
- C e C' pontos tais que $\{C\} = AB \cap M\Omega$ e $\{C'\} = A'B' \cap M\Omega$.



Como $\widehat{AM} \equiv \widehat{MB}$ temos $AM\Omega \equiv BM\Omega$ (definição de arcos congruentes em horocírculos).

Como $AMC \equiv BMC$ (caso LAL) temos $AC \equiv BC$ e $AB \perp M\Omega$. Logo, $ACC' \equiv BCC'$ (caso LAL).

Assim, $AA'C' \equiv BB'C'$ (caso LAL), o que implica $A'C'\Omega \equiv B'C'\Omega$.

Conclusão:

$$A'M'C' \equiv B'M'C' \text{ (caso LAL)} \Rightarrow A'M'\Omega \equiv B'M'\Omega \Rightarrow \widehat{A'M'} \equiv \widehat{B'M'},$$

o que conclui a demonstração. □

Corolário 6.1 Consideremos \widehat{AB} arco do horocírculo H . Então, os pontos médios de todos os demais arcos $\widehat{A'B'}$ correspondentes a \widehat{AB} em horocírculos H' concêntricos a H constituem um raio de H .

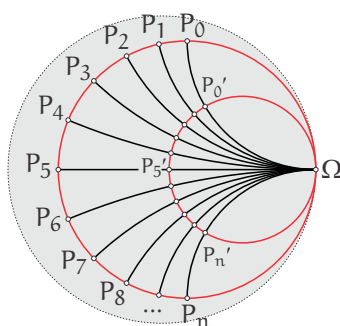
O corolário acima é consequência óbvia da proposição, pois todo ponto do raio em questão pode ser visto como intersecção do raio com um arco correspondente de horocírculo.

Corolário 6.2 Sejam P_0, \dots, P_n pontos de H que dividem $P_0\widehat{P}_n \subset H$ em n partes iguais. Sejam H' horocírculo concêntrico com H e $P'_0, \dots, P'_n \in H'$ tais que $\widehat{P}_i\widehat{P}_j$ e $\widehat{P}'_i\widehat{P}'_j$ são correspondentes. Então, P'_0, \dots, P'_n dividem $P'_0\widehat{P}'_n \subset H'$

em n partes iguais.

Demonstração.

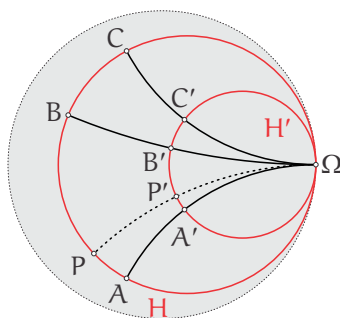
Basta aplicar a proposição acima a $P_0\widehat{P}_2$; $P_1\widehat{P}_3$; $P_2\widehat{P}_4$; $P_3\widehat{P}_5$; ...; $P_{n-2}\widehat{P}_n$.



A figura acima ilustra o procedimento. □

Proposição 6.3 Sejam H e H' horocírculos concêntricos e $A, B, C \in H$. Então, os pontos $A', B', C' \in H'$ determinados pelos raios que passam por A, B e C são tais que

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} = \frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{A'C'}}.$$



Demonstração.

Sem perda de generalidade, suponhamos $B \in \widehat{AC}$.

1º caso: Os arcos \widehat{AB} e \widehat{AC} são *comensuráveis*, ou seja,

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} \in \mathbb{Q}.$$

Logo, existe uma unidade de medida comum aos dois arcos. Suponhamos que \widehat{AP} , com $P \in \widehat{AB}$, possua o comprimento dessa unidade. Logo, $\widehat{AB} = m\widehat{AP}$ e $\widehat{AC} = n\widehat{AP}$ com $m, n \in \mathbb{N}$.

Consideremos o raio $P\Omega$. Ele determina $P' \in H'$.

Pelo corolário acima temos $\widehat{A'B'} = m\widehat{A'P'}$ e $\widehat{A'C'} = n\widehat{A'P'}$. Logo,

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} = \frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{A'C'}} = \frac{m}{n}.$$

2º caso: Os arcos \widehat{AB} e \widehat{AC} não são comensuráveis.

Neste caso, dividamos \widehat{AB} em $m \in \mathbb{N}$ partes congruentes e seja $P \in \widehat{AB}$ tal que $\widehat{AB} = m\widehat{AP}$. Desta forma, também temos a existência de $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n\widehat{AP} \leq \widehat{AC} < (n+1)\widehat{AP} \tag{1}$$

e, como $B \in \widehat{AC}$, temos

$$\widehat{AB} \leq \widehat{AC} \Rightarrow m\widehat{AP} \leq \widehat{AC} \Rightarrow m\widehat{AP} < (n+1)\widehat{AP} \Rightarrow m < n+1 \Rightarrow \frac{m}{n+1} < 1.$$

Além disso, de $m, n \in \mathbb{N}$ e $m < n + 1$ temos $m \leq n$ e, portanto, $\frac{m}{n} \leq 1$.

Pelo corolário acima, $\widehat{A'B'} = m\widehat{A'P'}$ e

$$n\widehat{A'P'} \leq \widehat{A'C'} < (n + 1)\widehat{A'P'}. \tag{2}$$

Logo, de (1) e (2) temos

$$\begin{aligned} \frac{n}{m}\widehat{AB} \leq \widehat{AC} < \frac{n+1}{m}\widehat{AB} \quad \text{e} \quad \frac{n}{m}\widehat{A'B'} \leq \widehat{A'C'} < \frac{n+1}{m}\widehat{A'B'} &\Rightarrow \frac{m}{n+1} < \frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} \leq \frac{m}{n} \quad \text{e} \quad \frac{m}{n+1} < \frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{A'C'}} \leq \frac{m}{n} \Rightarrow \\ \frac{m}{n+1} - \frac{m}{n} < \frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} - \frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{A'C'}} < \frac{m}{n} - \frac{m}{n+1} &\Rightarrow 0 \leq \left| \frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} - \frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{A'C'}} \right| < \frac{m}{n} - \frac{m}{n+1} \Rightarrow \\ 0 \leq \left| \frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} - \frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{A'C'}} \right| < \frac{m}{n(n+1)} < \frac{1}{n+1}. & \text{(pois } \frac{m}{n} \leq 1) \end{aligned}$$

Fazendo $\widehat{AP} \rightarrow 0$, temos $n \rightarrow +\infty$. Logo, $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$, ou seja,

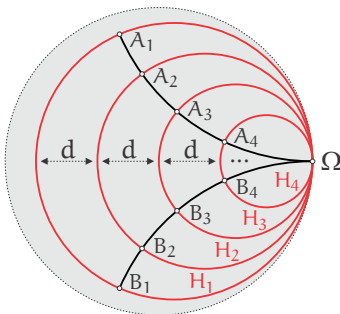
$$\left| \frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} - \frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{A'C'}} \right| = 0 \Rightarrow \frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} = \frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{A'C'}}$$

o que conclui a demonstração. □

Proposição 6.4 A razão entre as medidas dos arcos correspondentes \widehat{AB} e $\widehat{A'B'}$ de horocírculos concêntricos depende somente da distância d entre eles, ou seja, $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{A'B'}} = f(d)$.

Como consequência, se temos uma sequência de arcos correspondentes $(\widehat{A_n B_n})_{n \in \mathbb{N}}$ de horocírculos concêntricos, como na figura abaixo, então

$$\frac{\widehat{A_1 B_1}}{\widehat{A_2 B_2}} = \frac{\widehat{A_2 B_2}}{\widehat{A_3 B_3}} = \frac{\widehat{A_3 B_3}}{\widehat{A_4 B_4}} = \dots = f(d) > 1.$$



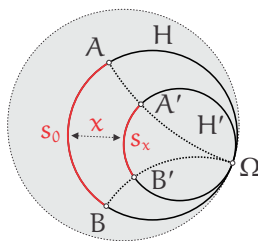
Observemos que o análogo dessa proposição para “*arcos correspondentes de círculos euclidianos concêntricos*” é falsa. Além disso, depois de deduzirmos a fórmula do comprimento de círculo hiperbólico, veremos que essa proposição também é falsa para “*arcos correspondentes de círculos hiperbólicos concêntricos*”.

O próximo passo será descobrir, se possível, uma expressão analítica para o $f(d)$ da proposição acima. Este é o resultado que abre a próxima seção.

6.2 Comprimentos de Arcos Correspondentes e Distâncias

Proposição 6.5 Se s_0 e s_x são comprimentos de dois arcos correspondentes em horocírculos concêntricos com $s_x < s_0$, sendo x a distância entre eles, então

$$\frac{s_0}{s_x} = e^x.$$



Não reproduziremos a demonstração dessa proposição nestas notas. O leitor interessado poderá encontrá-la na referência [3].

Uma observação que surge da Proposição 6.5 acima reside no fato de que podemos “construir” a unidade de comprimento hiperbólica de forma natural, ou seja, de modo que não venha a ser algo convencionado, como ocorre com as unidades de comprimento na geometria euclidiana. Toda vez que tomamos arcos correspondentes de horocírculos concêntricos cuja razão entre seus comprimentos seja e , estamos definindo a unidade de comprimento hiperbólico, que é a distância entre esses arcos. Notemos que essa ideia de construir unidade de medida por meio de quociente é análoga à definição de *radiano* na Geometria Euclidiana Plana (aliás uma das poucas medidas da Geometria Euclidiana que surge de maneira natural e não é convencionada).

Entretanto, quando lembramos da fórmula da área de Gauss para um triângulo Δ (ordinário ou generalizado) com ângulos internos medindo α , β e γ radianos:

$$\text{Área}(\Delta) = k(\pi - (\alpha + \beta + \gamma)); k > 0 \text{ constante,}$$

podemos ficar desconfiados da proposição acima. Mas, por mais incrível que pareça, a equação apresentada na proposição não depende de k e, por conseguinte, não depende do raio euclidiano do Disco de Poincaré (quando usamos esse modelo para fazer as construções geométricas). Aliás, podemos utilizar a métrica do Disco de Poincaré apresentada no capítulo 4 para fazer as construções geométricas envolvidas nesta discussão e “explicitar” a unidade de comprimento hiperbólica.

Em resumo, quando \widehat{AB} e $\widehat{A'B'}$ são arcos correspondentes de horocírculos concêntricos, temos:

$$d(\widehat{AB}, \widehat{A'B'}) = 1 \Leftrightarrow \frac{\widehat{AB}}{\widehat{A'B'}} = e.$$

A unidade de medida hiperbólica também pode ser obtida sob a forma de um arco de horocírculo construído de modo muito simples, conforme estabelece a Proposição 6.8 abaixo. Antes porém, necessitamos das duas próximas proposições, que apresentam as propriedades da construção geométrica simples de que precisamos.

Proposição 6.6 Sejam $m = \Omega_1\Omega_2$ e $n = \Omega_3\Omega_4$ retas perpendiculares em A e H horocírculo com centro em Ω_1 passando por A . Seja $r = \Omega_1\Omega_3$. Então, r intersecta H em ponto B e a reta t perpendicular a r por B é paralela a m .

Na demonstração abaixo há cinco ilustrações. A última delas é a construção geométrica associada a esta proposição.

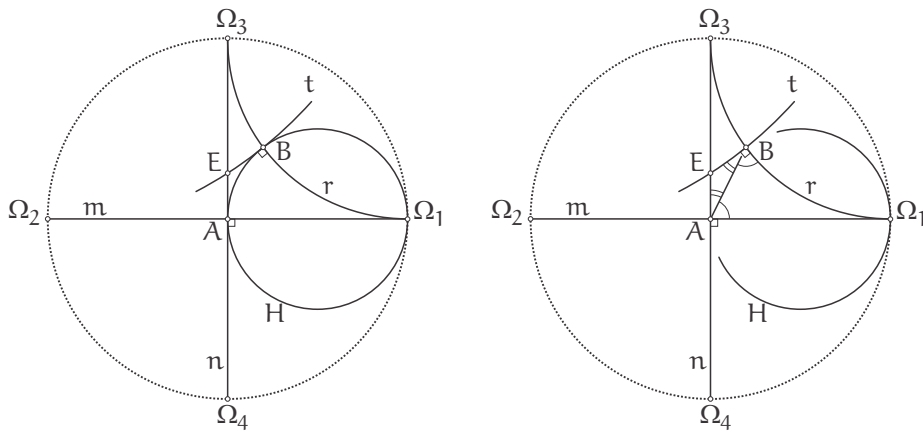
Demonstração.

Sejam m , n , A , H e r conforme enunciado.

Sendo r uma das retas com ponto ideal Ω_1 , pela definição de horocírculo, deve haver um ponto B de H correspondente a A em r . Tomemos t reta perpendicular a r em B (figura abaixo à esquerda).

A reta t possui apenas o ponto B em comum com H , pois, caso contrário, se existisse $B' \in H \cap t$ com $B' \neq B$, devido a definição de horocírculo, teríamos o triângulo generalizado $BB'\Omega_1$ com dois ângulos retos, o que não é possível. Com isto, concluímos que H está totalmente contido em um dos semiplanos determinados por t .

Pelo fato da reta r ser perpendicular a t , ela possui pontos em ambos os semiplanos determinados por t . Neste caso, diremos que Ω_1 está em um desses semiplanos e Ω_3 está no outro. Sendo Ω_3 ponto ideal de n e t , e sendo $A \in n$ no mesmo semiplano no qual está Ω_1 , temos que n deve intersectar t (Axiomas de Continuidade). Chamemos essa intersecção de E .

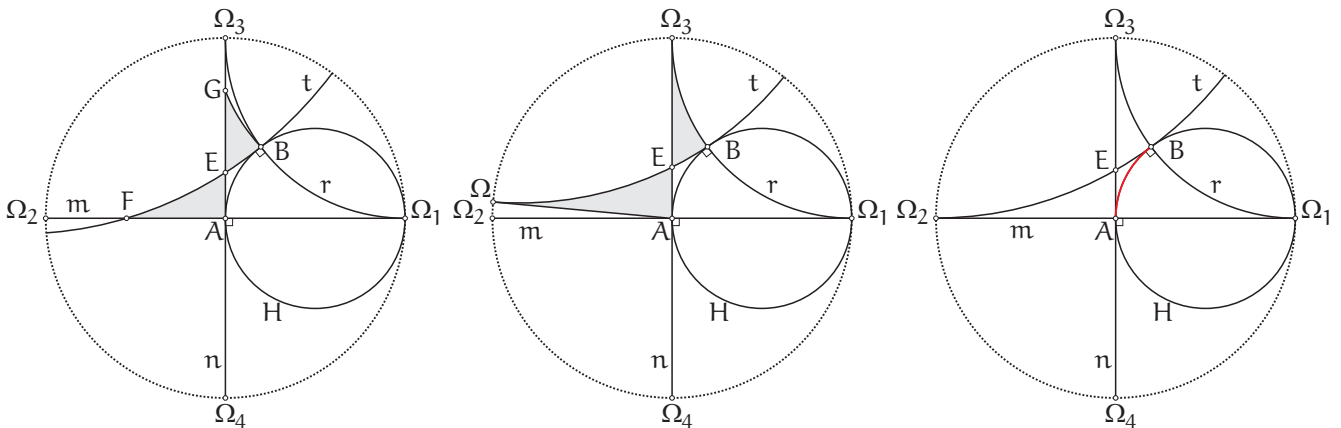


Observemos que $EB \equiv EA$. De fato, devido a definição de horocírculo, o triângulo generalizado $AB\Omega_1$ é isósceles (figura acima à direita). Logo, os ângulos \widehat{EBA} e \widehat{EAB} são congruentes, ou seja, o triângulo EAB é isósceles com base AB .

A reta t é paralela à reta m . De fato, se não fosse, haveria duas possibilidades:

(1) a reta t intersecta m em um ponto F (figura abaixo à esquerda). Logo, podemos tomar $G \in n$ de tal modo que E esteja entre A e G e $EG \equiv EF$. Logo, pelo caso de congruência LAL , $EAF \equiv EBG$, implicando que \widehat{GBE} é reto. Devido à unicidade da perpendicular à reta t por B , deveríamos ter que $G \in r$, uma contradição, pois r e n são paralelas.

(2) a reta t é hiperparalela com m (figura abaixo ao centro). Seja Ω ponto ideal de t de tal modo que E esteja na semirreta $B\Omega$. Logo, pelo caso de congruência LA de triângulos generalizados, $EB\Omega_3 \equiv EA\Omega$, implicando que $EA\Omega$ é reto. Mais uma vez, devido à unicidade da perpendicular à reta n por A , deveríamos ter que Ω seja ponto ideal de m , fazendo com que m e t sejam paralelas, contradizendo a hipótese assumida.



Logo, a reta t e a reta m devem ser paralelas, conforme figura acima à direita. □

A proposição abaixo é uma espécie de a recíproca da proposição anterior, no sentido de que as quatro retas citadas definem um horocírculo.

Proposição 6.7 Sejam $m = \Omega_1\Omega_2$ e $n = \Omega_3\Omega_4$ retas perpendiculares em A , $r = \Omega_1\Omega_3$ e t reta perpendicular a r em B com ponto ideal Ω_2 . Então, existe um horocírculo com centro em Ω_1 passando por A e por B .

A figura acima à direita também ilustra a construção geométrica associada a esta proposição.

Demonstração.

Primeiramente, devido ao fato de n dividir o plano em dois semiplanos de tal modo que t possui pontos em ambos, os Axiomas de Continuidade garantem a existência da intersecção de t com n , que chamaremos de E . O triângulo EAB é isósceles com base AB , o que garante que o triângulo generalizado $AB\Omega_1$ é isósceles, ou seja, A e B são pontos correspondentes, logo, pertencem a um mesmo horocírculo de centro Ω_1 . □

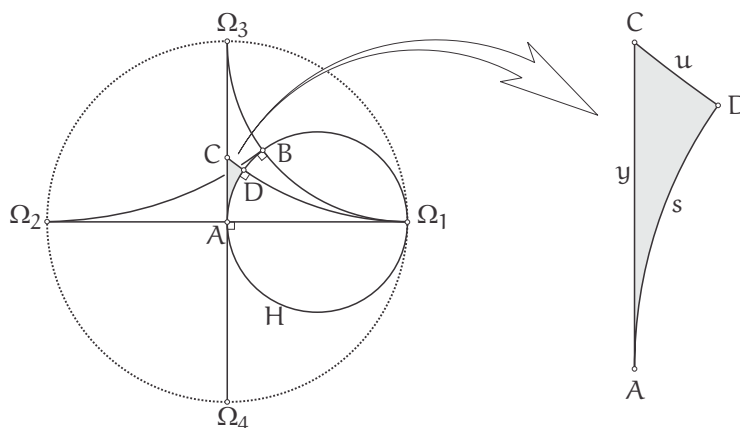
A construção geométrica da figura acima à direita irá desempenhar um papel importante na obtenção de fórmulas trigonométricas. Entretanto, cabe ressaltar o resultado bastante curioso que citamos acima, cuja demonstração faz uso da Geometria Diferencial.

Proposição 6.8 Nas condições das proposições acima, o comprimento do arco de horocírculo \widehat{AB} é unitário.

Mais uma vez, temos a unidade de comprimento na Geometria Hiperbólica sendo concretizada com o auxílio do conceito de horocírculo.

Estamos em condições de estabelecer algumas relações bastante importantes.

Consideremos a figura abaixo, que deriva da figura acima à direita, sendo C um ponto de $A\Omega_3$ e D a intersecção de $C\Omega_1$ com o horocírculo H.



Observemos que construímos uma figura ACD muito interessante (cuidado: não é um triângulo) que é objeto da próxima proposição.

Proposição 6.9 Nas condições estabelecidas na figura acima, sendo s o comprimento do arco de horocírculo \widehat{AD} , $AC = y$ e $CD = u$, então:

$$\begin{cases} 1 - s = e^{-y-u} \\ 1 + s = e^{y-u} \end{cases}$$

Não reproduziremos a demonstração dessa proposição nestas notas. O leitor interessado poderá encontrá-la na referência [3].

Com o objetivo de simplificar as expressões que surgirão doravante, definamos

$$\boxed{\sinh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}}, \quad \boxed{\cosh(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}}, \quad \boxed{\operatorname{tgh}(y) = \frac{\sinh(y)}{\cosh(y)}}, \quad \boxed{\operatorname{sech}(y) = \frac{1}{\cosh(y)}}, \quad \boxed{\operatorname{cosech}(y) = \frac{1}{\sinh(y)}}$$

sendo que na função cossecante hiperbólica devemos ter $y \neq 0$.

Veremos adiante que a nomenclatura adotada acima, inspirada nas funções trigonométricas euclidianas, será conveniente quando do estabelecimento de fórmulas trigonométricas hiperbólicas.

Proposição 6.10 Nas condições da proposição acima valem as seguintes fórmulas:

$$\boxed{e^u = \cosh(y)} \quad \text{e} \quad \boxed{s = \operatorname{tgh}(y)}$$

Demonstração.

Somando as duas equações da Proposição 6.9 temos

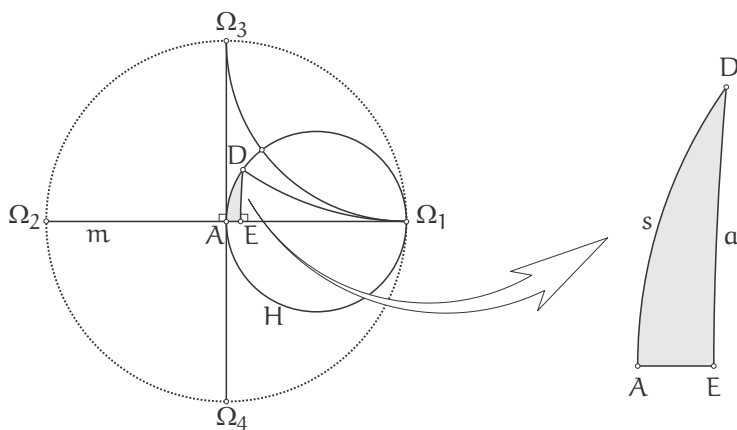
$$2 = e^{-y}e^{-u} + e^ye^{-u} \Rightarrow 2e^u = e^y + e^{-y} \Rightarrow e^u = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \Rightarrow e^u = \cosh(y).$$

Subtraindo a segunda equação da primeira na Proposição 6.9 temos

$$2s = (e^ye^{-u} - e^{-y}e^{-u}) \Rightarrow s = \frac{1}{2} \left(\frac{e^y - e^{-y}}{e^u} \right) \Rightarrow s = \frac{1}{e^u} \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) \Rightarrow s = \frac{1}{e^u} \sinh(y) \Rightarrow s = \frac{\sinh(y)}{\cosh(y)} \Rightarrow s = \operatorname{tgh}(y),$$

o que conclui a demonstração. □

Consideremos a figura abaixo, sendo $D \in \widehat{AB}$, DE perpendicular a $m = \Omega_1\Omega_2$, s o comprimento do arco \widehat{AD} e $DE = a$.

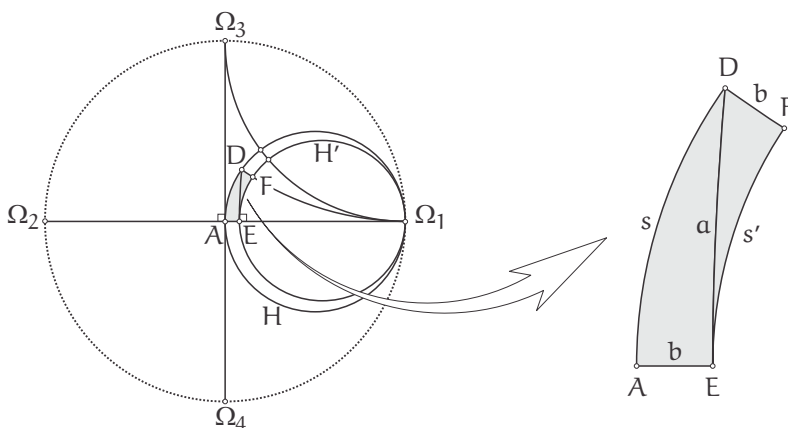


Proposição 6.11 Nas condições da figura acima vale

$$s = \sinh(a).$$

Demonstração.

Tomemos por E um horocírculo H' de centro em Ω_1 . Seja $\{F\} = D\Omega_1 \cap H'$, conforme a figura abaixo.



Seja s' o comprimento do arco de horocírculo \widehat{EF} .

Temos que \widehat{AD} e \widehat{EF} são arcos correspondentes em horocírculos concêntricos. Logo, $\frac{s}{s'} = e^b$. Também temos $s' = \operatorname{tgh}(a)$. Logo,

$$s = e^b \operatorname{tgh}(a).$$

Como $e^b = \cosh(a)$, temos

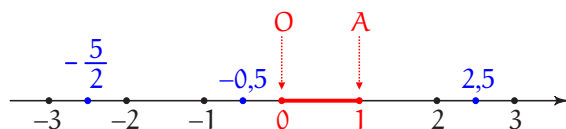
$$s = \cosh(a) \operatorname{tgh}(a) \Rightarrow s = \sinh(a),$$

o que conclui a demonstração. □

6.3 Um Sistema de Coordenadas Hiperbólicas

Assim como na reta euclidiana, podemos associar os números reais a pontos de uma reta hiperbólica.

Para tanto, basta fixarmos dois pontos O e A à distância hiperbólica 1 na reta e associarmos os números 0 e 1, respectivamente. Com isto, estabelecemos a unidade de medida sobre a reta que, por meio de seus múltiplos e submúltiplos, permite a localização dos números racionais sobre a mesma. Os números racionais positivos estão associados a pontos da semirreta com origem em O que passa por A , enquanto que os números racionais negativos estão associados a pontos da semirreta com origem em O que não passa por A . A figura abaixo esclarece o procedimento acima.



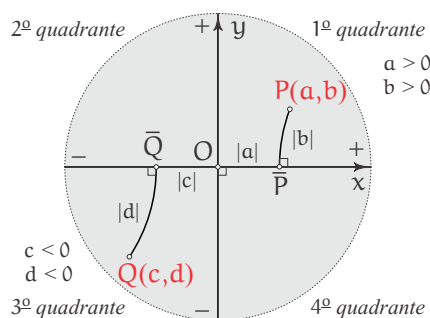
Existem pontos da reta que não estão associados a números racionais. Tais pontos estão associados aos números irracionais e essa associação é feita respeitando-se a ordem dos números reais e levando-se em conta os pontos já associados aos números racionais.

A reta hiperbólica associada ao conjunto dos números reais, conforme descrevemos acima, chamamos de **reta hiperbólica orientada de origem** O , ou então **reta hiperbólica real**, ou ainda, simplificada, de **eixo hiperbólico**.

Consideremos dois eixos hiperbólicos perpendiculares em O . Chamemos esses eixos de **eixos coordenados hiperbólicos** e os indiquemos por O_x e O_y . Seja P um ponto do plano hiperbólico. Associemos a P dois números reais x e y do seguinte modo:

- (i) $|x|$ é a distância hiperbólica até O da projeção ortogonal \bar{P} de P no eixo O_x , sendo que:
 - $x > 0$, quando \bar{P} situa-se na semirreta de orientação positiva do eixo O_x .
 - $x < 0$, quando \bar{P} situa-se na semirreta de orientação negativa do eixo O_x .
- (ii) $|y|$ é a distância de P a \bar{P} , sendo que:
 - $y > 0$, quando P estiver no semiplano, determinado pelo eixo O_x , que contém a semirreta de orientação positiva do eixo O_y .
 - $y < 0$, quando P estiver no semiplano, determinado pelo eixo O_x , que contém a semirreta de orientação negativa do eixo O_y .

Chamamos x e y de **coordenadas hiperbólicas** de P , sendo x a **abscissa** e y a **ordenada** de P e escrevemos $P(x, y)$. A figura abaixo ilustra esse procedimento.

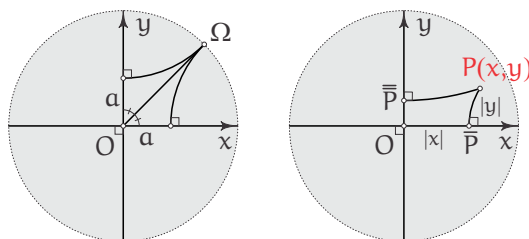


Observemos que, deste modo, existe uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano hiperbólico e os pares ordenados de números reais.

Nas condições estabelecidas acima dizemos que os eixos coordenados hiperbólicos estabelecem um **sistema de coordenadas hiperbólicas** no plano hiperbólico.

Observações:

(1) Não podemos definir y como sendo a distância até O da projeção ortogonal \bar{P} de P no eixo O_y . (Isto é, definir coordenadas como no *Sistema de Coordenadas Cartesianas Ortogonais* do plano euclidiano). Caso contrário, não haveria uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e os pares ordenados de números reais. Por exemplo, se $a \in \mathbb{R}^+$ é tal que $\theta(a) = \frac{\pi}{4}$ (θ : função ângulo de paralelismo), então não existiria um ponto ordinário de coordenadas (a, a) (figura abaixo à esquerda).



Por outro lado, se partirmos do ponto P , sempre existiria \bar{P} e $\bar{\bar{P}}$ e, portanto, existiriam as coordenadas x e y , como no sistema cartesiano do plano euclidiano (figura acima à direita).

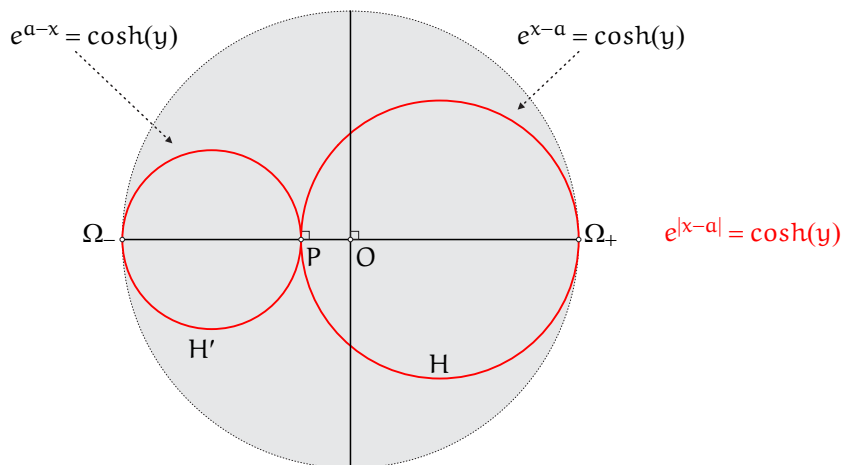
Capítulo 6. Trigonometria Hiperbólica

(2) Nas condições como definimos o sistema de coordenadas na Geometria Hiperbólica, um ponto $P(x, y)$ é tal que $d(O, \bar{P}) < |y|$, como na figura acima à direita. De fato, $O\bar{P}\bar{P}$ é um *Quadrilátero de Lambert* e, portanto, $d(O, \bar{P}) < d(P, \bar{P}) = |y|$.

De posse de um sistema de coordenadas no plano hiperbólico, é natural o estudo de equações de curvas nesse sistema. As próximas proposições estabelecem equações de determinados horocírculos e retas que utilizaremos para deduzir importantes relações na próxima seção.

Proposição 6.12 Fixemos o sistema de coordenadas hiperbólicas. A equação do **par de horocírculos tangentes** que passam por $P(a, 0)$ e possuem centros nos pontos ideais do eixo O_x é dada por

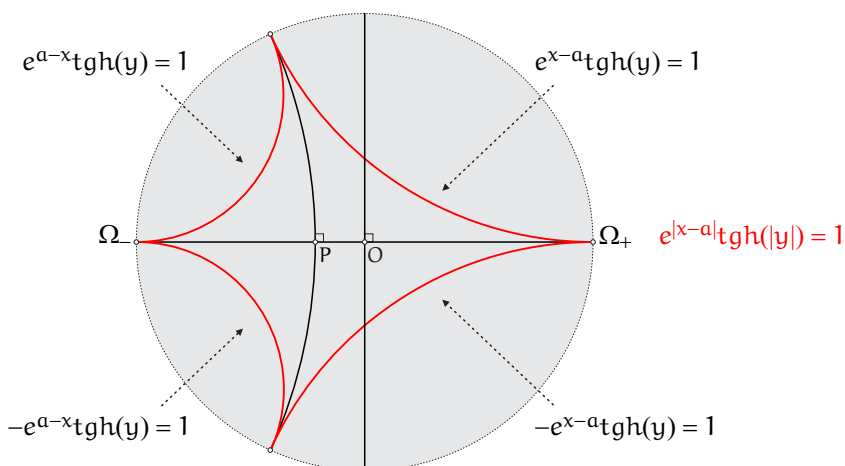
$$e^{|x-a|} = \cosh(y).$$



Para a próxima proposição, definimos a **astroide hiperbólica generalizada** como sendo a figura composta por quatro retas hiperbólicas não concorrentes duas a duas que ligam quatro vértices ideais distintos.

Proposição 6.13 Fixemos o sistema de coordenadas hiperbólicas. A equação da **astroide hiperbólica generalizada** de diagonais perpendiculares em $P(a, 0)$ e quatro vértices ideais, sendo dois deles pontos ideais do eixo O_x , é dada por

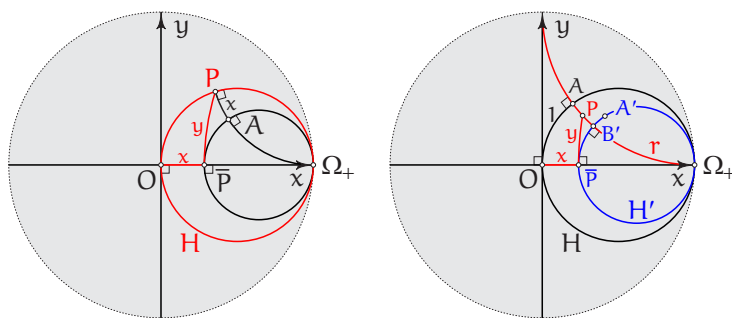
$$e^{|x-a|} \operatorname{tgh}(|y|) = 1.$$



Demonstração das Proposições 6.12 e 6.13.

(i) Para a Proposição 6.12 faremos apenas a dedução da equação do horocírculo com centro em Ω_+ no caso $P(0, 0)$. Os demais casos são deixados para o leitor.

Seja H o horocírculo com centro em Ω_+ passando por $P(0, 0)$ e seja $P(x, y) \in H$. Consideremos a figura abaixo à esquerda.



Temos $\widehat{OP} = PA = x$. Logo, $e^x = \cosh(y)$ é a equação de H no sistema de coordenadas hiperbólicas.

(ii) Para a Proposição 6.13 faremos apenas a dedução da equação da reta com ponto ideal Ω_+ acima do eixo O_x e no caso $P(0,0)$, ou seja, a reta paralela aos eixos coordenados no primeiro quadrante. Os demais casos são deixados para o leitor.

Seja r a reta paralela aos eixos coordenados no primeiro quadrante e seja $P(x,y) \in r$. Consideremos a figura acima à direita.

Seja H horocírculo de centro Ω_+ passando pela origem O. Vimos que $\widehat{AO} = 1$.

Seja $A' \in H'$ tal que $\widehat{A'P} = 1$. (H' é horocírculo com centro em Ω_+ passando por \overline{P}).

Seja s o comprimento do arco $\widehat{B'P}$. Temos $s = \tanh(y)$.

Os arcos \widehat{AO} e $\widehat{B'P}$ são correspondentes. Logo, $1 = se^x$, o que implica em $e^x \operatorname{tgh}(y) = 1$ como sendo a equação de r no sistema de coordenadas hiperbólicas. \square

6.4 Números Complementares

Dois números positivos z e z' são chamados **complementares** quando os ângulos de paralelismo a eles associados são complementares, ou seja,

$$\theta(z) + \theta(z') = \frac{\pi}{2},$$

sendo θ a *Função Ângulo de Paralelismo*.

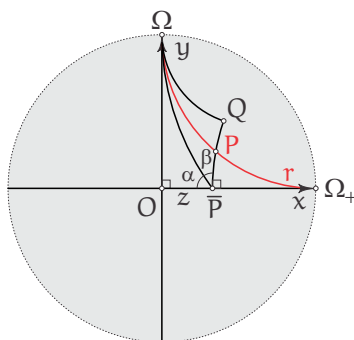
Números complementares estão associados a *quadriláteros de Lambert generalizados*.

Proposição 6.14 Se z e z' são números complementares, então valem as seguintes relações:

- (1) $e^z \operatorname{tgh}\left(\frac{z'}{2}\right) = 1$;
- (2) $\sinh(z) = \operatorname{cosech}(z')$;
- (3) $\cosh(z) = \operatorname{cotgh}(z')$.

Demonstração.

(1) Consideremos a figura abaixo, na qual $\widehat{OP} = z$; \overline{PP} é perpendicular ao eixo coordenado O_x e $\overline{PP} \equiv \overline{QP}$.



Temos $\widehat{PP}\Omega_+ \equiv \widehat{PQ}\Omega$ (caso LA de triângulos generalizados). Logo, \widehat{Q} é reto.

Temos $\theta(z) = \alpha$ e $\theta(QP) = \beta$. Como $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, segue que $z' = QP$ é complementar de z .

Mas, pela Proposição 6.13, a equação da reta r é $e^x \operatorname{tgh}(y) = 1$.

No ponto $P \in r$ temos $x = z$ e $y = \overline{PP} = \frac{z'}{2}$. Logo, $e^z \operatorname{tgh}\left(\frac{z'}{2}\right) = 1$.

Nota: para as demonstrações dos itens (2) e (3) necessitamos das relações

$$\begin{cases} \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \\ \sinh(x) = 2 \sinh\left(\frac{x}{2}\right) \cosh\left(\frac{x}{2}\right) \\ \cosh(x) = \sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) \end{cases},$$

que são facilmente deduzidas a partir das definições das respectivas funções envolvidas.

(2) Temos

$$2 \sinh(z) = e^z - e^{-z} = \cotgh\left(\frac{z'}{2}\right) - \tgh\left(\frac{z'}{2}\right) = \frac{\cosh^2\left(\frac{z'}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{z'}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{z'}{2}\right) \cosh\left(\frac{z'}{2}\right)} \Rightarrow \sinh(z) = \frac{1}{\sinh(z')} = \operatorname{cosech}(z').$$

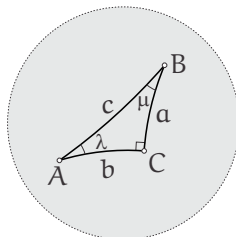
(3) Temos

$$2 \cosh(z) = e^z + e^{-z} = \cotgh\left(\frac{z'}{2}\right) + \tgh\left(\frac{z'}{2}\right) = \frac{\cosh^2\left(\frac{z'}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{z'}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{z'}{2}\right) \cosh\left(\frac{z'}{2}\right)} \Rightarrow \cosh(z) = \frac{\cosh(z')}{\sinh(z')} = \operatorname{cotgh}(z'),$$

o que conclui a demonstração. □

6.5 A Versão Hiperbólica do Teorema de Pitágoras

Seja um triângulo retângulo ABC como na figura abaixo.



Chamaremos tal triângulo de *triângulo retângulo com partes* a, b, c, λ, μ.

Dado um triângulo retângulo, é possível construir, ou associar, outros quatro triângulos retângulos bastante especiais utilizando o conceito de números complementares. Vamos utilizar dois desses triângulos no desenvolvimento de uma fórmula análoga ao Teorema de Pitágoras para a Geometria Hiperbólica. Esses triângulos aparecem de modo natural na demonstração da proposição que nos permite construir geometricamente uma reta paralela a uma reta dada (Proposição 5.23 do Capítulo 5).

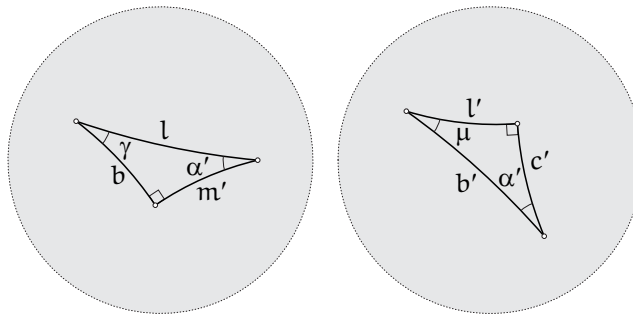
Proposição 6.15 *Dado um triângulo retângulo com partes a, b, c, λ, μ, existem os triângulos retângulos:*
 (i) *com partes m', b, l, γ, α'; sendo θ(m') = μ' com μ + μ' = π/2; θ(c) = γ; θ(a) = α e θ(a') = α' com α + α' = π/2;*
 (ii) *com partes l', c', b', α', μ, sendo θ(l') = λ' com λ + λ' = π/2, θ(c') = γ' com γ + γ' = π/2, θ(b) = β e θ(b') = β' com β + β' = π/2.*
 θ é a Função Ângulo de Paralelismo e, como constatado nas condições acima, m', l', c' e b' são números complementares de m, l, c e b, respectivamente.

A demonstração da proposição acima é longa e pode ser encontrada na referência [3], Seção 6.9.

A partir dos cinco números a, b, c, λ, μ das partes de um triângulo retângulo, podemos construir outros quinze números por meio da função ângulo de paralelismo e dos números complementares, que estão apresentados na tabela abaixo. É destes vinte números que extraímos quatro quintulas, duas das quais estão citadas nos itens (i) e (ii) da Proposição 6.15, que formam partes de triângulos retângulos.

α'		a	$\alpha = \theta(a)$	$\overbrace{\alpha'} = \pi/2 - \alpha$	$\alpha' = \theta^{-1}(\alpha')$	α'
b'		b	$\beta = \theta(b)$	$\beta' = \pi/2 - \beta$	$\overbrace{b'} = \theta^{-1}(\beta')$	b
c'	\Leftarrow	c	$\overbrace{\gamma} = \theta(c)$	$\gamma' = \pi/2 - \gamma$	$\overbrace{c'} = \theta^{-1}(\gamma')$	γ
l'		$\overbrace{l} = \theta^{-1}(l)$	λ	$\lambda' = \pi/2 - \lambda$	$\overbrace{l'} = \theta^{-1}(\lambda')$	l
μ		$m = \theta^{-1}(\mu)$	$\overbrace{\mu}$	$\mu' = \pi/2 - \mu$	$\overbrace{m'} = \theta^{-1}(\mu')$	m'

A figura abaixo apresenta os triângulos retângulos de partes m' , b , l , γ , α' e partes l' , c' , b' , α' , μ da Proposição 6.15.



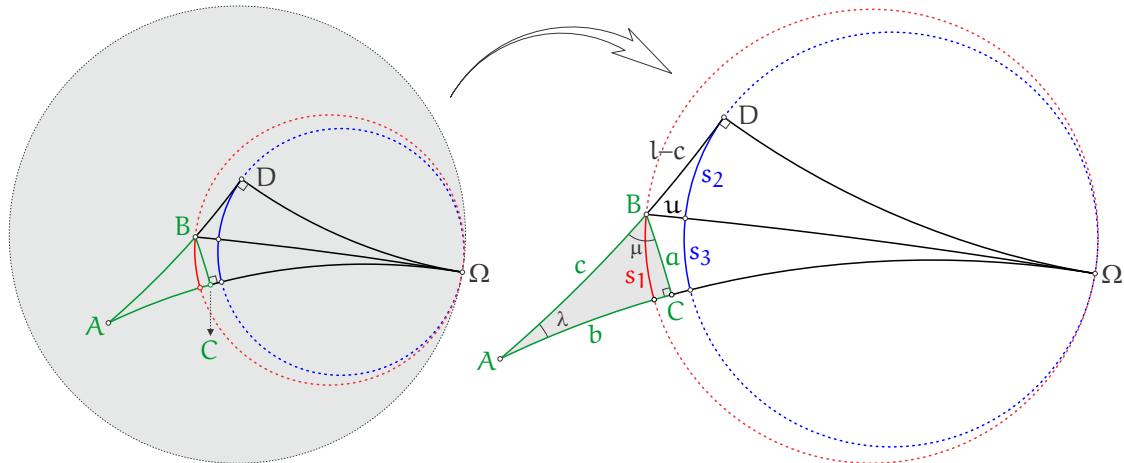
Proposição 6.16 Em um triângulo retângulo com partes a , b , c , λ , μ valem as relações

- (1) $\sinh(c) = \sinh(a) \cosh(l)$;
- (2) $\cosh(l) = \sinh(c) \sinh(\alpha')$;
- (3) $\cosh(c) = \sinh(l) \sinh(m)$;
- (4) $\cosh(\alpha') = \sinh(l) \sinh(b')$;

nas quais α' e b' são números complementares de a e b , respectivamente, l e m são tais que $\theta(l) = \lambda$ e $\theta(m) = \mu$, sendo θ a Função Ângulo de Paralelismo.

Demonstração.

(1) Consideremos a figura abaixo.



Temos $s_1 = \sinh(a)$; $\frac{s_1}{s_3} = e^u = \cosh(l - c)$; $s_2 + s_3 = \operatorname{tgh}(l)$ e $s_2 = \operatorname{tgh}(l - c)$. Logo,

$$\begin{aligned} \sinh(a) &= s_1 = \cosh(l - c) s_3 = \cosh(l - c) ((s_2 + s_3) - s_2) = \cosh(l - c) (\operatorname{tgh}(l) - \operatorname{tgh}(l - c)) \\ &= \cosh(l - c) \operatorname{tgh}(l) - \sinh(l - c) = \frac{\sinh(l) \cosh(l - c) - \sinh(l - c) \cosh(l)}{\cosh(l)} = \frac{\sinh(l - (l - c))}{\cosh(l)} = \frac{\sinh(c)}{\cosh(l)} \Rightarrow \\ \sinh(c) &= \sinh(a) \cosh(l). \end{aligned}$$

(2) Temos $\sinh(c) = \sinh(a) \cosh(l)$ e, do Item (2) da Proposição 6.14 $\sinh(a) = \operatorname{cosech}(\alpha')$. Logo,

$$\sinh(c) = \frac{1}{\sinh(\alpha')} \cosh(l) \Rightarrow \cosh(l) = \sinh(c) \sinh(\alpha').$$

(3) Ao triângulo retângulo com partes a, b, c, λ, μ está associado o triângulo retângulo com partes $m', b, l, \gamma, \alpha'$ (Proposição 6.15, Item (i)). A fórmula análoga ao Item (2) para este novo triângulo retângulo, é

$$\cosh(c) = \sinh(l) \sinh(m).$$

(4) Ao triângulo retângulo com partes a, b, c, λ, μ está associado (também) o triângulo retângulo com partes l', c', b', α', μ (Proposição 6.15, Item (ii)). A fórmula análoga ao Item (2) para este novo triângulo retângulo, é

$$\cosh(\alpha') = \sinh(b') \sinh(l),$$

como queríamos. □

Proposição 6.17 (Teorema de Pitágoras Hiperbólico) Em um triângulo retângulo com hipotenusa medindo c e catetos medindo a e b vale

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b).$$

Demonstração.

Considere um triângulo retângulo com partes a, b, c, λ, μ e os números l, m tais que $\theta(l) = \lambda$ e $\theta(m) = \mu$, sendo θ a função ângulo de paralelismo.

Pelo Item (3) da Proposição 6.16 temos

$$\cosh(c) = \sinh(l) \sinh(m)$$

e, pelo Item (4) da mesma proposição, temos $\sinh(l) = \frac{\cosh(\alpha')}{\sinh(b')}$ e $\sinh(m) = \frac{\cosh(b')}{\sinh(\alpha')}$. Logo,

$$\cosh(c) = \frac{\cosh(\alpha') \cosh(b')}{\sinh(b') \sinh(\alpha')} = \cotgh(\alpha') \cotgh(b').$$

Mas, pelo Item (3) da Proposição 6.14, temos $\cotgh(\alpha') = \cosh(a)$ e $\cotgh(b') = \cosh(b)$. Logo,

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b),$$

o que conclui a demonstração. □

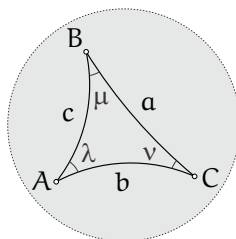
Exemplo 6.1 Seja um triângulo retângulo hiperbólico com catetos medindo 3 e 4. A hipotenusa mede aproximadamente 6,30966. De fato, temos $\cosh(c) = \cosh(3) \cosh(4) \cong 274,93$ o que fornece $c = 6,30966$.

Observemos que a hipotenusa é “maior” no caso hiperbólico do que no caso euclidiano.

Observemos também que se restringirmos o domínio da função cosseno hiperbólico a \mathbb{R}_+ (que é o que nos interessa), podemos inverter a função $f(x) = \cosh(x)$. Acima, de $\cosh(c) \cong 274,93$, temos $c \cong \cosh^{-1}(274,93) \cong 6,30966$.

6.6 As Versões Hiperbólicas da Lei dos Senos e da Lei dos Cossenos

Consideremos o triângulo ABC da figura abaixo.



e a função ângulo de paralelismo θ .

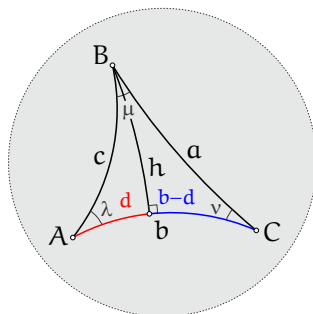
Proposição 6.18 Baseados na figura acima, tem-se

$$\frac{\sinh(a)}{\operatorname{sech}(l)} = \frac{\sinh(b)}{\operatorname{sech}(m)} = \frac{\sinh(c)}{\operatorname{sech}(n)},$$

sendo $\theta(l) = \lambda$; $\theta(m) = \mu$ e $\theta(n) = \nu$.

Demonstração.

Supondo, sem perda de generalidade, que $b \geq a$ e $b \geq c$, seja h a altura relativa ao vértice B , como na figura abaixo.



Pelo Item (1) da Proposição 6.16 temos

$$\begin{cases} \sinh(c) = \sinh(h) \cosh(l) \\ \sinh(a) = \sinh(h) \cosh(n) \end{cases} .$$

Logo,

$$\frac{\sinh(a)}{\sinh(c)} = \frac{\cosh(n)}{\cosh(l)} = \frac{\operatorname{sech}(l)}{\operatorname{sech}(n)} \Rightarrow \frac{\sinh(a)}{\operatorname{sech}(l)} = \frac{\sinh(c)}{\operatorname{sech}(n)} .$$

De modo análogo,

$$\frac{\sinh(b)}{\operatorname{sech}(m)} = \frac{\sinh(c)}{\operatorname{sech}(n)} ,$$

o que conclui a demonstração. □

Proposição 6.19 Seja ABC triângulo com lados medindo a , b e c e ângulos internos opostos medindo λ , μ e ν , respectivamente (veja figura acima). Então:

$$\cosh(a) = \cosh(b) \cosh(c) - \sinh(b) \sinh(c) \tanh(l) ,$$

sendo $\theta(l) = \lambda$.

Demonstração.

Consideremos a figura acima, supondo que μ seja um maior ângulo do triângulo. Pelo Teorema de Pitágoras Hiperbólico:

$$\begin{cases} \cosh(a) = \cosh(h) \cosh(b-d) \\ \cosh(c) = \cosh(h) \cosh(d) \end{cases} .$$

Logo,

$$\begin{aligned} \cosh(a) &= \frac{\cosh(c)}{\cosh(d)} \cosh(b-d) = \frac{\cosh(c)}{\cosh(d)} (\cosh(b) \cosh(d) - \sinh(b) \sinh(d)) \\ &= \cosh(b) \cosh(c) - \cosh(c) \sinh(b) \operatorname{tgh}(d) . \end{aligned}$$

Mas,

$$\operatorname{tgh}(d) = \operatorname{tgh}(c) \operatorname{tgh}(l) . \tag{6.1}$$

De fato:

$$\operatorname{tgh}(l) = \frac{\sinh(l)}{\cosh(l)} \stackrel{\text{(i)}}{=} \frac{\cosh(h')}{\sinh(d')} \stackrel{\text{(ii)}}{=} \frac{\cosh(h)}{\sinh(h)} \frac{\sinh(d)}{\sinh(h)} \stackrel{\text{(iii)}}{=} \frac{\cosh(c)}{\cosh(d)} \frac{\sinh(d)}{\sinh(c)} = \frac{\operatorname{tgh}(d)}{\operatorname{tgh}(c)} .$$

(i): Item (4) (numerador) e Item (1) (denominador) da Proposição 6.16.

(ii): Itens (2) e (3) da Proposição 6.14.

(iii): Teorema de Pitágoras Hiperbólico.

Desta forma,

$$\begin{aligned} \cosh(a) &= \cosh(b) \cosh(c) - \cosh(c) \sinh(b) \frac{\sinh(c)}{\cosh(c)} \operatorname{tgh}(l) \\ &= \cosh(b) \cosh(c) - \sinh(b) \sinh(c) \operatorname{tgh}(l), \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Com os resultados acima, estamos em condições de estabelecer uma expressão analítica para a já apresentada função ângulo de paralelismo.

Proposição 6.20 Seja

$$\begin{aligned} \theta: \mathbb{R} &\longrightarrow]0, \pi[\\ a &\longmapsto \theta(a) = \alpha \end{aligned}$$

a função ângulo de paralelismo. Então,

$$\theta(a) = \arccos(\operatorname{tgh}(a)),$$

ou seja,

$$\cos(\alpha) = \operatorname{tgh}(a).$$

Demonstração.

Sendo θ a função ângulo de paralelismo, vimos que trata-se de uma bijeção contínua. Levando-se em conta que

$$\begin{aligned} \operatorname{tgh}: \mathbb{R} &\longrightarrow]-1, 1[& \text{e} & \cos:]0, \pi[&\longrightarrow &]-1, 1[\\ x &\longmapsto \operatorname{tgh}(x) & & x &\longmapsto \cos(x) \end{aligned}$$

são bijeções contínuas, podemos definir a função contínua

$$f:]0, \pi[\longrightarrow]0, \pi[\\ \alpha \longmapsto \arccos(\operatorname{tgh}(\theta^{-1}(\alpha))),$$

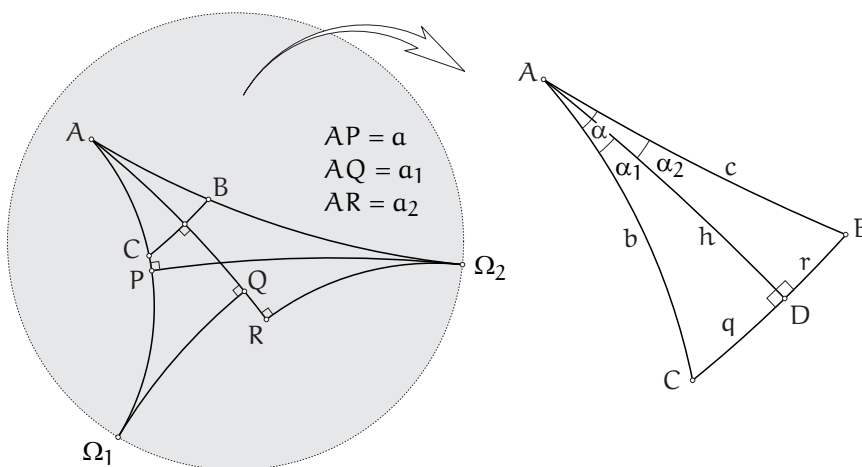
ou seja,

$$\operatorname{tgh}(a) = \cos(f(\alpha)).$$

Nosso objetivo é, portanto, mostrar que f é a função identidade.

Primeiramente, vamos restringir α ao intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$, o que equivale considerar, devido a definição da função ângulo de paralelismo, $a \geq 0$.

Consideremos $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ com α_1 e α_2 no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$. Sejam a_1 e a_2 , tais que $\theta(a_1) = \alpha_1$ e $\theta(a_2) = \alpha_2$, e $h < \min\{a_1, a_2\}$. Logo, é possível construir dois triângulos retângulos ADB e ADC (veja a figura abaixo).



Pela Proposição 6.19 temos

$$\cosh(q + r) = \cosh(b) \cosh(c) - \sinh(b) \sinh(c) \operatorname{tgh}(a).$$

Isolando $\operatorname{tgh}(a)$ e substituindo em $\cos(f(\alpha)) = \operatorname{tgh}(a)$ temos

$$\begin{aligned} \cos(f(\alpha)) &= \frac{\cosh(b)\cosh(c) - \cosh(q+r)}{\sinh(b)\sinh(c)} \Rightarrow \\ \cos(f(\alpha)) &= \operatorname{cotgh}(b)\operatorname{cotgh}(c) - \frac{\cosh(q)\cosh(r)}{\sinh(b)\sinh(c)} - \frac{\sinh(q)\sinh(r)}{\sinh(b)\sinh(c)}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

(i) Manipulando o termo $\operatorname{cotgh}(b)\operatorname{cotgh}(c)$.

Utilizando a fórmula 6.1 nos dois triângulos retângulos ADB e ADC (figura acima) temos

$$\begin{aligned} \operatorname{tgh}(h) &= \operatorname{tgh}(b)\operatorname{tgh}(\alpha_1) = \operatorname{tgh}(b)\cos(f(\alpha_1)) \\ \operatorname{tgh}(h) &= \operatorname{tgh}(c)\operatorname{tgh}(\alpha_2) = \operatorname{tgh}(c)\cos(f(\alpha_2)) \end{aligned}$$

o que nos fornece

$$\operatorname{cotgh}(b)\operatorname{cotgh}(c) = \operatorname{cotgh}^2(h)\cos(f(\alpha_1))\cos(f(\alpha_2)). \quad (6.3)$$

(ii) Manipulando o termo $\frac{\cosh(q)\cosh(r)}{\sinh(b)\sinh(c)}$.

Temos, utilizando o Teorema de Pitágoras Hiperbólico e a fórmula 6.1,

$$\frac{\cosh(q)}{\sinh(b)} = \frac{\cosh(q)\cosh(h)}{\sinh(b)\cosh(h)} = \frac{\cosh(b)}{\sinh(b)\cosh(h)} = \frac{\frac{\sinh(h)}{\cosh(h)}}{\frac{\sinh(b)}{\cosh(b)}\sinh(h)} = \frac{\operatorname{tgh}(h)}{\operatorname{tgh}(b)\sinh(h)} = \frac{\operatorname{tgh}(\alpha_1)}{\sinh(h)} = \frac{\cos(f(\alpha_1))}{\sinh(h)}.$$

Analogamente

$$\frac{\cosh(r)}{\sinh(c)} = \frac{\cos(f(\alpha_2))}{\sinh(h)}.$$

Logo,

$$\frac{\cosh(q)\cosh(r)}{\sinh(b)\sinh(c)} = \operatorname{cosech}^2(h)\cos(f(\alpha_1))\cos(f(\alpha_2)). \quad (6.4)$$

(iii) Manipulando o termo $\frac{\sinh(q)\sinh(r)}{\sinh(b)\sinh(c)}$.

Tomando o quadrado dos dois membros de $\operatorname{tgh}(a) = \cos(f(\alpha))$ temos $\frac{\cosh^2(a)-1}{\cosh^2(a)} = 1 - \operatorname{sen}^2(f(\alpha))$, o que significa $\operatorname{sech}(a) = \operatorname{sen}(f(\alpha))$. Do Item (1) da Proposição 6.16 temos

$$\frac{\sinh(q)}{\sinh(b)} = \frac{\sinh(q)}{\sinh(q)\cosh(\alpha_1)} = \operatorname{sech}(\alpha_1) = \operatorname{sen}(f(\alpha_1)).$$

Analogamente

$$\frac{\sinh(r)}{\sinh(c)} = \operatorname{sen}(f(\alpha_2)).$$

Logo,

$$\frac{\sinh(q)\sinh(r)}{\sinh(b)\sinh(c)} = \operatorname{sen}(f(\alpha_1))\operatorname{sen}(f(\alpha_2)). \quad (6.5)$$

Substituindo 6.3, 6.4 e 6.5 em 6.2 temos

$$\begin{aligned} \cos(f(\alpha)) &= (\operatorname{cotgh}^2(h) - \operatorname{cosech}^2(h))\cos(f(\alpha_1))\cos(f(\alpha_2)) - \operatorname{sen}(f(\alpha_1))\operatorname{sen}(f(\alpha_2)) \\ &= \cos(f(\alpha_1))\cos(f(\alpha_2)) - \operatorname{sen}(f(\alpha_1))\operatorname{sen}(f(\alpha_2)), \end{aligned}$$

ou seja

$$\cos(f(\alpha_1 + \alpha_2)) = \cos(f(\alpha_1) + f(\alpha_2)) \Rightarrow f(\alpha_1 + \alpha_2) = f(\alpha_1) + f(\alpha_2).$$

(1) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x \in]0, \frac{\pi}{2n}]$. Logo,

$$f(nx) = nf(x).$$

(2) Sejam $r = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$, com n e m inteiros positivos, e $x \in]0, \frac{\pi}{2n}]$. Logo,

$$mf\left(\frac{n}{m}x\right) = f\left(m\frac{n}{m}x\right) = f(nx) = nf(x) \Rightarrow f(rx) = rf(x).$$

(3) Sejam s e x reais positivos tais que x e sx pertencem ao intervalo $]0, \frac{\pi}{2}]$. Seja $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sequência de números racionais convergindo para s de tal modo que $r_j x \in]0, \frac{\pi}{2}]$. Como f é contínua, temos

$$sf(x) = \left(\lim_{j \rightarrow +\infty} r_j\right)f(x) = \lim_{j \rightarrow +\infty} r_j f(x) = \lim_{i \rightarrow +\infty} f(r_j x) = f(sx) \Rightarrow f(sx) = sf(x).$$

Observemos que

$$\operatorname{tgh}(0) = \cos(f(\theta(0))) \Rightarrow 0 = \cos(f(\frac{\pi}{2})) \Rightarrow f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}.$$

Logo, fazendo $\alpha = s\frac{\pi}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ temos

$$f(\alpha) = f(s\frac{\pi}{2}) = sf(\frac{\pi}{2}) = s\frac{\pi}{2} = \alpha,$$

ou seja, $f(\alpha) = \alpha$ vale no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Para $\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ temos, devido a definição da *Função Ângulo de Paralelismo*, $\alpha < 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \cos(f(\alpha)) &= \cos(f(\theta(\alpha))) = \operatorname{tgh}(\alpha) = -\operatorname{tgh}(-\alpha) = -\cos(f(\theta(-\alpha))) \\ &= -\cos(\theta(-\alpha)) = \cos(\pi - \theta(-\alpha)) = \cos(\theta(\alpha)) = \cos(\alpha), \end{aligned}$$

ou seja, $f(\alpha) = \alpha$ vale também no intervalo $]\frac{\pi}{2}, \pi[$, o que conclui a demonstração. □

Observação:

Considerando relações trigonométricas euclidianas e hiperbólicas básicas, podemos considerar outras equações que relacionam α e α , a partir de $\cos(\alpha) = \operatorname{tgh}(\alpha)$ (deduzida na Proposição 6.20 acima), proveniente da *função ângulo de paralelismo* $\alpha = \theta(\alpha)$. São elas:

- $\operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sech}(\alpha)$; (para deduzir essa relação considere $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ e $\operatorname{sech}^2(\alpha) + \operatorname{tgh}^2(\alpha) = 1$)
- $\operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{cosech}(\alpha)$;
- $\operatorname{cotg}(\alpha) = \operatorname{senh}(\alpha)$;
- $\operatorname{sec}(\alpha) = \operatorname{cotgh}(\alpha)$
- $\operatorname{cosec}(\alpha) = \operatorname{cosh}(\alpha)$;

Proposição 6.21 (Primeira Lei dos Cossenos) Em um triângulo hiperbólico ordinário com lados medindo a, b, c e ângulo interno de medida λ oposto ao lado de medida a , vale

$$\cosh(a) = \cosh(b)\cosh(c) - \operatorname{senh}(b)\operatorname{senh}(c)\cos(\lambda).$$

Demonstração.

O resultado é consequência imediata das Proposições 6.19 e 6.20. □

Proposição 6.22 (Lei dos Senos) Em um triângulo hiperbólico ordinário com ângulos internos de medidas λ, μ, ν opostos aos lados de medidas a, b, c , respectivamente, vale

$$\frac{\operatorname{senh}(a)}{\operatorname{sen}(\lambda)} = \frac{\operatorname{senh}(b)}{\operatorname{sen}(\mu)} = \frac{\operatorname{senh}(c)}{\operatorname{sen}(\nu)}.$$

Demonstração.

Da Proposição 6.18 temos $\frac{\operatorname{senh}(a)}{\operatorname{sech}(l)} = \frac{\operatorname{senh}(b)}{\operatorname{sech}(m)} = \frac{\operatorname{senh}(c)}{\operatorname{sech}(n)}$.

Da observação que fizemos após a demonstração da Proposição 6.20 temos $\operatorname{sen}(\lambda) = \operatorname{sech}(l)$; $\operatorname{sen}(\mu) = \operatorname{sech}(m)$ e $\operatorname{sen}(\nu) = \operatorname{sech}(n)$, sendo $\theta(l) = \mu$; $\theta(m) = \mu$ e $\theta(n) = \nu$.

Portanto,

$$\frac{\operatorname{senh}(a)}{\operatorname{sen}(\lambda)} = \frac{\operatorname{senh}(b)}{\operatorname{sen}(\mu)} = \frac{\operatorname{senh}(c)}{\operatorname{sen}(\nu)},$$

como queríamos. □

Corolário 6.3 Se θ é a função ângulo de paralelismo estendida, então:

$$\theta(\alpha) = 2 \operatorname{arctg}(e^{-\alpha}),$$

isto é,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = e^{-\alpha},$$

sendo $\theta(\alpha) = \alpha$.

Demonstração.

Temos

$$e^a = \sinh(a) + \cosh(a).$$

Da observação que fizemos após a demonstração da Proposição 6.20 temos:

$$\begin{cases} \sinh(a) = \cotg(\alpha) \\ \cosh(a) = \operatorname{cosec}(\alpha) \end{cases}$$

Substituindo:

$$\begin{aligned} e^a &= \sinh(a) + \cosh(a) = \cotg(\alpha) + \operatorname{cosec}(\alpha) = \frac{1 + \cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)} \\ &= \frac{1 + \cos^2(\frac{\alpha}{2}) - \operatorname{sen}^2(\frac{\alpha}{2})}{2 \operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2}) \cos(\frac{\alpha}{2})} = \frac{\cos^2(\frac{\alpha}{2}) + \cos^2(\frac{\alpha}{2})}{2 \operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2}) \cos(\frac{\alpha}{2})} = \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2})} = \cotg(\frac{\alpha}{2}). \end{aligned}$$

Logo,

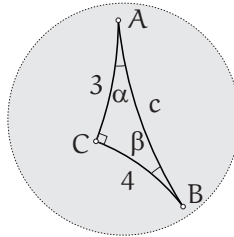
$$e^a = \cotg(\frac{\alpha}{2}) \Rightarrow e^{-a} = \operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2}),$$

o que conclui a demonstração. □

Exemplo 6.2 A área de um triângulo retângulo com catetos medindo 3 e 4 na Geometria Hiperbólica é aproximadamente 1,43488196 unidades de área.

De fato:

Precisamos encontrar os ângulos internos na figura abaixo.



Pelo Teorema de Pitágoras Hiperbólico:

$$\cosh(c) = \cosh(3) \cosh(4) \Rightarrow c \cong 6,30966.$$

Pela Lei dos Senos Hiperbólica:

$$\frac{\sinh(3)}{\operatorname{sen}(\beta)} \cong \frac{\sinh(6,30966)}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})} \Rightarrow \operatorname{sen}(\beta) \cong 0,036438166 \Rightarrow \beta \cong 0,036446234 \text{ rad (ou } \beta \cong 2,088^\circ).$$

Analogamente:

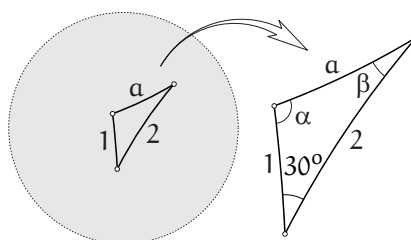
$$\frac{\sinh(4)}{\operatorname{sen}(\alpha)} \cong \frac{\sinh(6,30966)}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})} \Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha) \cong 0,099262 \Rightarrow \alpha \cong 0,0994257 \text{ rad (ou } \alpha \cong 5,6966^\circ).$$

Assim:

$$\text{Área}(ABC) \cong \pi - (\frac{\pi}{2} + 0,036446234 + 0,0994257) \cong 1,43488196 \text{ unidades de área.}$$

Observação: Se o triângulo fosse euclidiano: $\beta \cong 36,87^\circ$; $\alpha \cong 53,13^\circ$ e $\text{Área}(ABC) = 6$.

Exemplo 6.3 Um triângulo possui lados medindo 1 e 2 e o ângulo entre eles é de 30° , conforme a figura abaixo. Logo, a medida do terceiro lado é 1,380472 unidades de comprimento e os demais ângulos medem $18,3887^\circ$ e $103,2^\circ$.



Capítulo 6. Trigonometria Hiperbólica

De fato, pela *Primeira Lei dos Cossenos Hiperbólica*:

$$\cosh (a) = \cosh (1) \cosh (2) - \sinh (1) \sinh (2) \cos (30^\circ) \cong 2,1141193 \Rightarrow a \cong 1,380472.$$

Pela *Lei dos Senos Hiperbólica*:

$$\begin{cases} \frac{\sinh (a)}{\sin (30^\circ)} = \frac{\sinh (1)}{\sin (\beta)} \Rightarrow \sin (\beta) = 0,31546 \Rightarrow \beta \cong 0,320944 \text{ rad} \cong 18,3887^\circ \\ \frac{\sinh (a)}{\sin (30^\circ)} = \frac{\sinh (2)}{\sin (\alpha)} \Rightarrow \sin (\alpha) = 0,97357 \Rightarrow \alpha \cong 1,8012 \text{ rad} \cong 103,2^\circ. \end{cases}$$

(Obs.: o ângulo de medida α é obtuso, pois $\cosh (2) > \cosh (1) \cosh (a)$).

Exemplo 6.4 O comprimento de uma circunferência hiperbólica de raio r é $c = 2\pi \sinh (r)$.

De fato, consideremos um polígono hiperbólico regular com n lados inscrito em um círculo hiperbólico de raio r . Logo, este polígono pode ser decomposto em $2n$ triângulos retângulos com hipotenusa medindo r , catetos medindo a e b e ângulos internos medindo $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{n}$ e α , sendo o ângulo de medida α oposto ao cateto de medida a . Observemos que o comprimento da circunferência será melhor aproximado quanto maior for o número de lados do polígono regular inscrito, ou seja,

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} 2nb.$$

Pela *Lei dos Senos Hiperbólica*,

$$\frac{\sinh (b)}{\sin \left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{\sinh (r)}{\sin \left(\frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow b = \sinh^{-1} \left(\sinh (r) \sin \left(\frac{\pi}{n}\right)\right).$$

Logo,

$$c = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sinh^{-1} \left(\sinh (r) \sin \left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n}}.$$

Embora n seja uma variável real discreta, para efeito de cômputo do limite acima, vamos substituir n pela variável real contínua x para podermos aplicar a *Regra de L'Hospital*. Logo,

$$c = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sinh (r) \cos \left(\frac{\pi}{x}\right) \left(-\frac{\pi}{x^2}\right)}{\cosh \left(\sinh^{-1} \left(\sinh (r) \sin \left(\frac{\pi}{x}\right)\right)\right)}}{-\frac{1}{x^2}} = 2\pi \sinh (r) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \left(\frac{\pi}{x}\right)}{\cosh \left(\sinh^{-1} \left(\sinh (r) \sin \left(\frac{\pi}{x}\right)\right)\right)} = 2\pi \sinh (r).$$

Exemplo 6.5 A área de um círculo hiperbólico de raio r é $A = 4\pi \sinh^2 \left(\frac{r}{2}\right)$.

De fato, consideremos um polígono hiperbólico regular com n lados inscrito em um círculo hiperbólico de raio r . Logo, este polígono pode ser decomposto em $2n$ triângulos retângulos com hipotenusa medindo r , catetos medindo a e b e ângulos internos medindo $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{n}$ e α , sendo o ângulo de medida α oposto ao cateto de medida a . Observemos que a área do círculo será melhor aproximada quanto maior for o número de lados do polígono regular inscrito, ou seja,

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \left(\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n} + \alpha\right)\right) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} - \alpha\right).$$

Pela *Lei dos Senos Hiperbólica*,

$$\frac{\sinh (b)}{\sin \left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{\sinh (r)}{\sin \left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sinh (a)}{\sin (\alpha)} \Rightarrow \sinh (a) = \sinh (r) \sin (\alpha) \quad \text{e} \quad \sinh (b) = \sinh (r) \sin \left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Pelo *Teorema de Pitágoras Hiperbólico*,

$$\begin{aligned} \cosh (r) &= \cosh (a) \cosh (b) \Rightarrow \\ \cosh^2 (r) &= \left(1 + \sinh^2 (a)\right) \left(1 + \sinh^2 (b)\right) \Rightarrow \\ \cosh^2 (r) &= \left(1 + \sinh^2 (r) \sin^2 (\alpha)\right) \left(1 + \sinh^2 (r) \sin^2 \left(\frac{\pi}{n}\right)\right) \Rightarrow \\ \cosh^2 (r) &= 1 + \sinh^2 (r) \sin^2 (\alpha) + \sinh^2 (r) \sin^2 \left(\frac{\pi}{n}\right) + \sinh^4 (r) \sin^2 (\alpha) \sin^2 \left(\frac{\pi}{n}\right) \Rightarrow \\ \sinh^2 (r) &= \sinh^2 (r) \left(\sin^2 \left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin^2 (\alpha) \left(1 + \sinh^2 (r) \sin^2 \left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\right) \Rightarrow \\ \cos^2 \left(\frac{\pi}{n}\right) &= \sin^2 (\alpha) \left(1 + \sinh^2 (r) \sin^2 \left(\frac{\pi}{n}\right)\right) \Rightarrow \\ \alpha &= \arcsen \left(\frac{\cos \left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sqrt{1 + \sinh^2 (r) \sin^2 \left(\frac{\pi}{n}\right)}}\right). \end{aligned}$$

Desta forma,

$$A = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} - \arcsen\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sqrt{1 + \sinh^2(r) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}}\right)}{\frac{1}{n}}.$$

Embora n seja uma variável real discreta, para efeito de cômputo do limite acima, vamos substituir n pela variável real contínua x para podermos aplicar a Regra de L'Hospital ao limite acima. Logo,

$$\begin{aligned} & \frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)\sqrt{1 + \sinh^2(r) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} - \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \frac{2 \sinh^2(r) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)}{2\sqrt{1 + \sinh^2(r) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{x}\right)}}}{\frac{1 + \sinh^2(r) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right)}{1 + \sinh^2(r) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{x}\right)}}}} \\ A &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{x^2} - \frac{1 + \sinh^2(r) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right)}{1 + \sinh^2(r) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{x}\right)}}}}{-\frac{1}{x^2}} \Rightarrow \\ A &= -2\pi \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)\sqrt{1 + \sinh^2(r) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} + \frac{\sinh^2(r) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\sqrt{1 + \sinh^2(r) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{x}\right)}}}{1 + \sinh^2(r) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} \right) \Rightarrow \\ A &= -2\pi \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)(1 + \sinh^2(r) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{x}\right)) + \sinh^2(r) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\sqrt{1 + \sinh^2(r) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{x}\right)}(1 + \sinh^2(r) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{x}\right))}}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{x}\right) + \sinh^2(r) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{x}\right)}} \right) \Rightarrow \\ A &= -2\pi \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)(1 + \sinh^2(r) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{x}\right)) + \sinh^2(r) \cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right)}{1 + \sinh^2(r) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{x}\right)}}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{x}\right) (1 + \sinh^2(r))}} \right) = -2\pi \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)(1 + \sinh^2(r))}{1 + \sinh^2(r) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{x}\right)}}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) \cosh(r)} \right) \Rightarrow \\ A &= -2\pi \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\cosh(r)}{1 + \sinh^2(r) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} \right) = -2\pi (1 - \cosh(r)) = -2\pi \left(1 - \cosh^2\left(\frac{r}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{r}{2}\right) \right) \Rightarrow \\ A &= 4\pi \sinh^2\left(\frac{r}{2}\right). \end{aligned}$$

6.7 Uma Segunda Lei dos Cossenos

Proposição 6.23 (Segunda Lei dos Cossenos) Seja um triângulo ABC tal que $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\widehat{A} = \lambda$, $\widehat{B} = \mu$ e $\widehat{C} = \nu$. Então:

$$\cosh(c) = \frac{\cos(\lambda) \cos(\mu) + \cos(\nu)}{\operatorname{sen}(\lambda) \operatorname{sen}(\mu)}.$$

Demonstração.

Façamos $A = \cosh(a)$; $B = \cosh(b)$ e $C = \cosh(c)$.
Temos $\cosh^2(a) - \sinh^2(a) = 1 \Rightarrow \sinh^2(a) = \cosh^2(a) - 1$.
Para $a > 0 \Rightarrow \sinh(a) > 0$. Logo:

$$\sinh(a) = \sqrt{A^2 - 1}.$$

Analogamente:

$$\sinh(b) = \sqrt{B^2 - 1} \quad \text{e} \quad \sinh(c) = \sqrt{C^2 - 1}.$$

Pela Primeira Lei dos Cossenos Hiperbólica,

$$C = AB - \sqrt{A^2 - 1} \sqrt{B^2 - 1} \cos(\nu) \Rightarrow \cos(\nu) = \frac{AB - C}{\sqrt{A^2 - 1} \sqrt{B^2 - 1}}.$$

Analogamente:

$$\cos(\lambda) = \frac{BC - A}{\sqrt{B^2 - 1} \sqrt{C^2 - 1}} \quad \text{e} \quad \cos(\mu) = \frac{AC - B}{\sqrt{A^2 - 1} \sqrt{C^2 - 1}}.$$

Assim:

$$\operatorname{sen}^2(\nu) = 1 - \cos^2(\nu) = 1 - \left(\frac{AB - C}{\sqrt{A^2 - 1} \sqrt{B^2 - 1}} \right)^2 = \frac{(A^2 - 1)(B^2 - 1) - A^2 B^2 + 2ABC - C^2}{(A^2 - 1)(B^2 - 1)} = \frac{1 + 2ABC - A^2 - B^2 - C^2}{(A^2 - 1)(B^2 - 1)}.$$

Façamos

$$D = 1 + 2ABC - A^2 - B^2 - C^2.$$

Logo:

$$\text{sen}(\nu) = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{A^2-1}\sqrt{B^2-1}}.$$

Analogamente,

$$\text{sen}(\lambda) = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{B^2-1}\sqrt{C^2-1}} \quad \text{e} \quad \text{sen}(\mu) = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{A^2-1}\sqrt{C^2-1}}.$$

Assim:

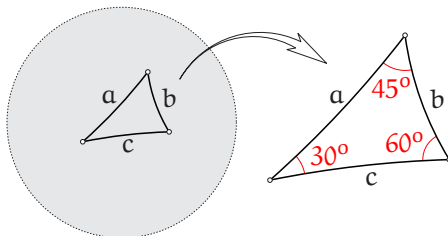
$$\begin{aligned} \frac{\cos(\lambda)\cos(\mu)+\cos(\nu)}{\text{sen}(\lambda)\text{sen}(\mu)} &= \frac{\frac{BC-A}{\sqrt{B^2-1}\sqrt{C^2-1}}\frac{AC-B}{\sqrt{A^2-1}\sqrt{C^2-1}} + \frac{AB-C}{\sqrt{A^2-1}\sqrt{B^2-1}}}{\frac{\sqrt{D}}{\sqrt{B^2-1}\sqrt{C^2-1}}\frac{\sqrt{D}}{\sqrt{A^2-1}\sqrt{C^2-1}}} = \frac{(BC-A)(AC-B)+(AB-C)(C^2-1)}{D} \\ &= \frac{ABC^2-B^2C-A^2C+AB+ABC^2-C^3-AB+C}{D} = C \frac{1+2ABC-A^2-B^2-C^2}{D} = C \frac{D}{D} = C. \end{aligned}$$

Isto é:

$$\cosh(c) = \frac{\cos(\lambda)\cos(\mu)+\cos(\nu)}{\text{sen}(\lambda)\text{sen}(\mu)},$$

o que conclui a demonstração. □

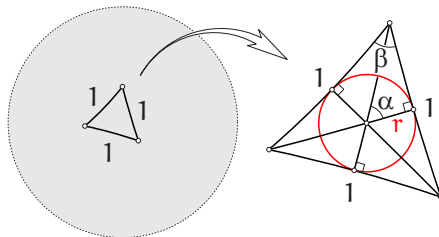
Exemplo 6.6 Vejamos como calcular as medidas a , b e c dos lados de um triângulo hiperbólico que possui ângulos internos medindo 60° , 30° e 45° , conforme a figura abaixo.



Aplicando a 2ª. Lei dos Cossenos Hiperbólica três vezes temos:

$$\begin{aligned} \cosh(a) &= \frac{\cos(30^\circ)\cos(45^\circ)+\cos(60^\circ)}{\text{sen}(30^\circ)\text{sen}(45^\circ)} \cong 3,146264 \Rightarrow a \cong 1,8130936 \\ \cosh(b) &= \frac{\cos(60^\circ)\cos(45^\circ)+\cos(30^\circ)}{\text{sen}(60^\circ)\text{sen}(45^\circ)} \cong 1,991563 \Rightarrow b \cong 1,3120735 \\ \cosh(c) &= \frac{\cos(60^\circ)\cos(30^\circ)+\cos(45^\circ)}{\text{sen}(60^\circ)\text{sen}(30^\circ)} \cong 2,632993 \Rightarrow c \cong 1,6230837 \end{aligned}$$

Exemplo 6.7 Vejamos como calcular o raio do círculo inscrito em um triângulo equilátero hiperbólico de lados medindo 1 (figura abaixo).



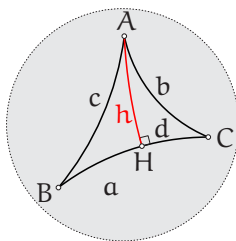
É fácil ver que, na figura acima, $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Pela Lei dos Senos Hiperbólica:

$$\begin{aligned} \frac{\sinh(\frac{1}{2})}{\text{sen}(\frac{\beta}{2})} &= \frac{\sinh(1)}{\text{sen}(\frac{\pi}{2})} \Rightarrow \text{sen}(\frac{\beta}{2}) = \frac{\sinh(\frac{1}{2})}{\sinh(1)} \cong 0,44340944 \Rightarrow \frac{\beta}{2} \cong 0,4593989 \text{ rad} \Rightarrow \\ \beta &\cong 0,9187978 \text{ rad} \cong 52,643^\circ \end{aligned}$$

Assim, novamente pela Lei dos Senos Hiperbólica:

$$\frac{\sinh(r)}{\text{sen}(\frac{\beta}{2})} = \frac{\sinh(\frac{1}{2})}{\text{sen}(\frac{\pi}{3})} \Rightarrow r \cong 0,2637354.$$

Exemplo 6.8 Vejamos como colocar a altura h , relativa ao vértice A , de um triângulo hiperbólico ABC , em função das medidas a , b , e c dos lados desse triângulo.



Chamando de H o pé da perpendicular traçada de A à reta que passa por B e C, há três casos possíveis:

- (i) H está em BC (figura acima);
- (ii) H coincide com B ou com C;
- (iii) H está fora de BC.

Caso (i):

Pelo Teorema de Pitágoras Hiperbólico e pela Relação Fundamental Hiperbólica:

$$\begin{cases} \cosh(c) = \cosh(h) \cosh(a-d) = \cosh(h) (\cosh(d) \cosh(a) - \sinh(d) \sinh(a)) \\ \cosh(b) = \cosh(h) \cosh(d) \\ \cosh^2(d) - \sinh^2(d) = 1 \end{cases}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \cosh(c) &= \cosh(h) \left(\frac{\cosh(b)}{\cosh(h)} \cosh(a) - \sqrt{-1 + \left(\frac{\cosh(b)}{\cosh(h)}\right)^2} \sinh(a) \right) \Rightarrow \\ \cosh(c) &= \cosh(b) \cosh(a) - \sqrt{\cosh^2(b) - \cosh^2(h)} \sinh(a) \Rightarrow \\ \frac{\cosh(c) - \cosh(b) \cosh(a)}{\sinh(a)} &= -\sqrt{\cosh^2(b) - \cosh^2(h)} \Rightarrow \cosh^2(b) - \cosh^2(h) = \left(\frac{\cosh(c) - \cosh(b) \cosh(a)}{\sinh(a)} \right)^2 \Rightarrow \\ -\cosh^2(h) &= \frac{\cosh^2(c) - 2 \cosh(b) \cosh(a) \cosh(c) + \cosh^2(a) \cosh^2(b)}{\sinh^2(a)} - \cosh^2(b) \Rightarrow \\ -\cosh^2(h) &= \frac{\cosh^2(c) - 2 \cosh(b) \cosh(a) \cosh(c) + \cosh^2(a) \cosh^2(b) - \sinh^2(a) \cosh^2(b)}{\sinh^2(a)} \Rightarrow \\ -\cosh^2(h) &= \frac{\cosh^2(c) - 2 \cosh(b) \cosh(a) \cosh(c) + \cosh^2(b)}{\sinh^2(a)} \Rightarrow \cosh^2(h) = \frac{2 \cosh(b) \cosh(a) \cosh(c) - \cosh^2(b) - \cosh^2(c)}{\sinh^2(a)} \Rightarrow \\ \cosh(h) &= \frac{\sqrt{2 \cosh(a) \cosh(b) \cosh(c) - \cosh^2(b) - \cosh^2(c)}}{\sinh(a)} \Rightarrow \boxed{h = \cosh^{-1} \left(\frac{\sqrt{2 \cosh(a) \cosh(b) \cosh(c) - \cosh^2(b) - \cosh^2(c)}}{\sinh(a)} \right)}. \end{aligned}$$

Caso (ii):

Supondo que H = C temos h = b e o triângulo ABC é retângulo em C. Neste caso, o Teorema de Pitágoras Hiperbólico fornece:

$$\boxed{h = \cosh^{-1} \left(\frac{\cosh(c)}{\cosh(a)} \right)}.$$

Se H = B temos h = c e o triângulo ABC é retângulo em B. Portanto,

$$\boxed{h = \cosh^{-1} \left(\frac{\cosh(b)}{\cosh(a)} \right)}.$$

Uma pergunta natural neste ponto é se a fórmula encontrada no Caso (i) serve para o Caso (ii), e a resposta é sim. Na verdade, as fórmulas acima são casos particulares da fórmula do Caso (i) quando h = b ou quando h = c. Vejamos a dedução quando h = b (o caso h = c se processa exatamente do mesmo modo, devido à simetria da fórmula em relação a b ou c):

$$\begin{aligned} h &= \cosh^{-1} \left(\frac{\sqrt{2 \cosh(a) \cosh(b) \cosh(c) - \cosh^2(b) - \cosh^2(c)}}{\sinh(a)} \right) \Rightarrow h = \cosh^{-1} \left(\sqrt{\frac{2 \cosh(a) \cosh(b) \cosh(c) - \cosh^2(b) - \cosh^2(c)}{\sinh^2(a)}} \right) \Rightarrow \\ h &= \cosh^{-1} \left(\sqrt{\frac{2 \cosh(a) \cosh(b) \cosh(c) - \cosh^2(b) - \cosh^2(c)}{\cosh^2(a) - 1}} \right) \Rightarrow \\ h &= \cosh^{-1} \left(\sqrt{\frac{2 \cosh^3(a) \cosh(b) \cosh(c) - \cosh^2(a) \cosh^2(b) - \cosh^2(a) \cosh^2(c)}{\cosh^2(a) (\cosh^2(a) - 1)}} \right) \stackrel{TPH}{\Rightarrow} \\ h &= \cosh^{-1} \left(\sqrt{\frac{2 \cosh^2(a) \cosh^2(c) - \cosh^2(c) - \cosh^2(a) \cosh^2(c)}{\cosh^2(a) (\cosh^2(a) - 1)}} \right) \Rightarrow h = \cosh^{-1} \left(\sqrt{\frac{\cosh^2(a) \cosh^2(c) - \cosh^2(c)}{\cosh^2(a) (\cosh^2(a) - 1)}} \right) \Rightarrow \\ h &= \cosh^{-1} \left(\sqrt{\frac{(\cosh^2(a) - 1) \cosh^2(c)}{\cosh^2(a) (\cosh^2(a) - 1)}} \right) \Rightarrow h = \cosh^{-1} \left(\sqrt{\frac{\cosh^2(c)}{\cosh^2(a)}} \right) \Rightarrow h = \cosh^{-1} \left(\frac{\cosh(c)}{\cosh(a)} \right). \end{aligned}$$

Capítulo 6. Trigonometria Hiperbólica

Caso (iii): neste caso, d é a distância de C a H ou a distância de B a H , a depender de que lado está H em relação ao segmento BC . Faremos o caso em que C está entre B e H . O outro caso é análogo e será deixado ao leitor.

Pelo *Teorema de Pitágoras Hiperbólico* e pela *Relação Fundamental Hiperbólica*:

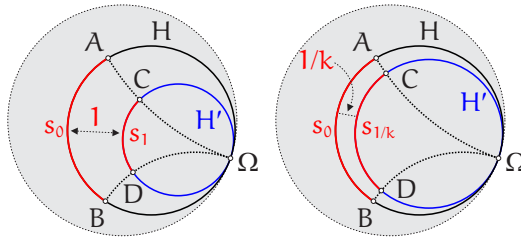
$$\begin{cases} \cosh(c) = \cosh(h) \cosh(d+a) = \cosh(h) (\cosh(d) \cosh(a) + \sinh(d) \sinh(a)) \\ \cosh(b) = \cosh(h) \cosh(d) \\ \cosh^2(d) - \sinh^2(d) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

Logo:

$$\begin{aligned} \cosh(c) &= \cosh(h) \left(\frac{\cosh(b)}{\cosh(h)} \cosh(a) + \sqrt{-1 + \left(\frac{\cosh(b)}{\cosh(h)}\right)^2} \sinh(a) \right) \Rightarrow \\ \cosh(c) &= \cosh(b) \cosh(a) + \sqrt{\cosh^2(b) - \cosh^2(h)} \sinh(a) \Rightarrow \\ \frac{\cosh(c) - \cosh(b) \cosh(a)}{\sinh(a)} &= \sqrt{\cosh^2(b) - \cosh^2(h)} \Rightarrow \cosh^2(b) - \cosh^2(h) = \left(\frac{\cosh(c) - \cosh(b) \cosh(a)}{\sinh(a)} \right)^2 \Rightarrow \\ -\cosh^2(h) &= \frac{\cosh^2(c) - 2 \cosh(b) \cosh(a) \cosh(c) + \cosh^2(a) \cosh^2(b) - \cosh^2(b)}{\sinh^2(a)} \Rightarrow \\ -\cosh^2(h) &= \frac{\cosh^2(c) - 2 \cosh(b) \cosh(a) \cosh(c) + \cosh^2(a) \cosh^2(b) - \sinh^2(a) \cosh^2(b)}{\sinh^2(a)} \Rightarrow \\ -\cosh^2(h) &= \frac{\cosh^2(c) - 2 \cosh(b) \cosh(a) \cosh(c) + \cosh^2(b)}{\sinh^2(a)} \Rightarrow \cosh^2(h) = \frac{2 \cosh(b) \cosh(a) \cosh(c) - \cosh^2(b) - \cosh^2(c)}{\sinh^2(a)} \Rightarrow \\ \cosh(h) &= \frac{\sqrt{2 \cosh(a) \cosh(b) \cosh(c) - \cosh^2(b) - \cosh^2(c)}}{\sinh(a)} \Rightarrow \boxed{h = \cosh^{-1} \left(\frac{\sqrt{2 \cosh(a) \cosh(b) \cosh(c) - \cosh^2(b) - \cosh^2(c)}}{\sinh(a)} \right)}. \end{aligned}$$

6.8 Comparação Entre as Trigonometrias Hiperbólica e Euclidiana

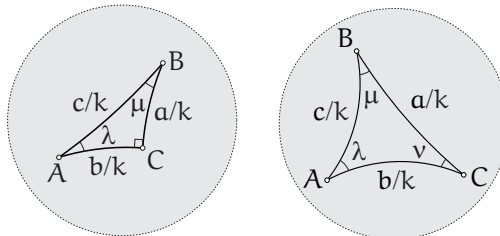
Estamos tomando como unidade de medida a distância entre dois arcos correspondentes de horocírculos concêntricos cujo quociente de seus comprimentos é igual a e . Na figura abaixo à esquerda, isto significa $\frac{s_0}{s_1} = e$.



Temos, pela Proposição 6.5, que se x é a distância entre os arcos \widehat{AB} e \widehat{CD} de horocírculos concêntricos, então $\widehat{AB} = \widehat{CD}e^x$. Tomemos $x = \frac{1}{k}$ com $k > 0$.

Podemos considerar $\frac{1}{k}$ (figura acima à direita) como sendo unidade de medida. Logo, para k grande, a unidade de medida é pequena e os arcos \widehat{AB} e \widehat{CD} possuem quase o mesmo comprimento.

Com esta unidade de medida $\frac{1}{k}$, consideremos triângulos com lados de comprimentos a , b e c (figura abaixo).



As fórmulas trigonométricas ficam do seguinte modo:

(1) *Teorema de Pitágoras Hiperbólico*:

$$\cosh\left(\frac{c}{k}\right) = \cosh\left(\frac{b}{k}\right) \cosh\left(\frac{a}{k}\right);$$

(2) *Lei dos Senos Hiperbólica*:

$$\frac{\sinh\left(\frac{a}{k}\right)}{\text{sen}(\lambda)} = \frac{\sinh\left(\frac{b}{k}\right)}{\text{sen}(\mu)} = \frac{\sinh\left(\frac{c}{k}\right)}{\text{sen}(\nu)};$$

(3) *Primeira Lei dos Cossenos Hiperbólica:*

$$\cosh\left(\frac{c}{k}\right) = \cosh\left(\frac{a}{k}\right) \cosh\left(\frac{b}{k}\right) - \sinh\left(\frac{a}{k}\right) \sinh\left(\frac{b}{k}\right) \cos(\nu);$$

(4) *Segunda Lei dos Cossenos Hiperbólica:*

$$\cosh\left(\frac{c}{k}\right) = \frac{\cos(\lambda) \cos(\mu) + \cos(\nu)}{\sin(\lambda) \sin(\mu)}.$$

Note que, fazendo k grande, nossos triângulos são “pequenos”.

Do desenvolvimento da função $f(x) = \sinh(x)$ em série de potências, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ (*Fórmula de Taylor*), em torno de $x_0 = 0$, temos:

$$\begin{aligned} \sinh(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh^{(n)}(0)}{n!} x^n = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \Rightarrow \\ \sinh\left(\frac{x}{k}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{x}{k}\right)^{2n+1} = \frac{x}{k} + \frac{x^3}{3!k^3} + \frac{x^5}{5!k^5} + \dots \end{aligned}$$

O raio de convergência desta série de potências é infinito. De fato, pelo teste da razão:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(2(n+1)+1)!} \left(\frac{x}{k}\right)^{2(n+1)+1}}{\frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{x}{k}\right)^{2n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(2n+3)!} \left(\frac{x}{k}\right)^{2n+3}}{\frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{x}{k}\right)^{2n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} \left(\frac{x}{k}\right)^2 = \left(\frac{x}{k}\right)^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} = 0 < 1, \end{aligned}$$

ou seja, a série é convergente para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Analogamente, do desenvolvimento da função $g(x) = \cosh(x)$ em série de potências, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$, em torno de $x_0 = 0$, temos:

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \Rightarrow \\ \cosh\left(\frac{x}{k}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{x}{k}\right)^{2n} = 1 + \frac{x^2}{2!k^2} + \frac{x^4}{4!k^4} + \dots \end{aligned}$$

O raio de convergência desta série de potências também é infinito. De fato, pelo teste da razão:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(2(n+1))!} \left(\frac{x}{k}\right)^{2(n+1)}}{\frac{1}{(2n)!} \left(\frac{x}{k}\right)^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(2n+2)!} \left(\frac{x}{k}\right)^{2n+2}}{\frac{1}{(2n)!} \left(\frac{x}{k}\right)^{2n}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \left(\frac{x}{k}\right)^2 = \left(\frac{x}{k}\right)^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1, \end{aligned}$$

ou seja, a série é convergente para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Deste modo, para valores muito grandes de k em relação a $|x|$ (que designremos por $k \gg |x|$) podemos considerar:

$$\boxed{\sinh\left(\frac{x}{k}\right) \cong \frac{x}{k}} \quad \text{e} \quad \boxed{\cosh\left(\frac{x}{k}\right) \cong 1 + \frac{x^2}{2k^2}}, \quad \text{para } k \gg |x|.$$

Assim, podemos fazer a substituição das funções \cosh e \sinh pelas aproximações polinomiais acima:

(1) *Teorema de Pitágoras Hiperbólico:*

$$\begin{aligned} \cosh\left(\frac{c}{k}\right) &= \cosh\left(\frac{b}{k}\right) \cosh\left(\frac{a}{k}\right) \Rightarrow 1 + \frac{c^2}{2k^2} \cong \left(1 + \frac{b^2}{2k^2}\right) \left(1 + \frac{a^2}{2k^2}\right) \Rightarrow 1 + \frac{c^2}{2k^2} \cong 1 + \frac{a^2}{2k^2} + \frac{b^2}{2k^2} + \frac{a^2 b^2}{4k^4} \Rightarrow \\ c^2 &\cong a^2 + b^2 + \frac{a^2 b^2}{2k^2}. \end{aligned}$$

Para k muito grande, ou seja, $k \gg a, b, c$ temos

$$\boxed{c^2 \cong a^2 + b^2}$$

que é, aproximadamente, o *Teorema de Pitágoras Euclidiano*.

(2) *Lei dos Senos Hiperbólica:*

$$\frac{\sinh\left(\frac{a}{k}\right)}{\operatorname{sen}(\lambda)} = \frac{\sinh\left(\frac{b}{k}\right)}{\operatorname{sen}(\mu)} = \frac{\sinh\left(\frac{c}{k}\right)}{\operatorname{sen}(\nu)} \Rightarrow \frac{\frac{a}{k}}{\operatorname{sen}(\lambda)} \cong \frac{\frac{b}{k}}{\operatorname{sen}(\mu)} \cong \frac{\frac{c}{k}}{\operatorname{sen}(\nu)} \Rightarrow \boxed{\frac{a}{\operatorname{sen}(\lambda)} \cong \frac{b}{\operatorname{sen}(\mu)} \cong \frac{c}{\operatorname{sen}(\nu)}}$$

que é, aproximadamente, a *Lei dos Senos Euclidiana*.

(3) *Primeira Lei dos Cossenos Hiperbólica:*

$$\begin{aligned} \cosh\left(\frac{c}{k}\right) &= \cosh\left(\frac{a}{k}\right) \cosh\left(\frac{b}{k}\right) - \sinh\left(\frac{a}{k}\right) \sinh\left(\frac{b}{k}\right) \cos(\nu) \Rightarrow \\ 1 + \frac{c^2}{2k^2} &\cong \left(1 + \frac{b^2}{2k^2}\right) \left(1 + \frac{a^2}{2k^2}\right) - \frac{a}{k} \frac{b}{k} \cos(\nu) = 1 + \frac{a^2}{2k^2} + \frac{b^2}{2k^2} + \frac{a^2 b^2}{4k^4} - \frac{ab}{k^2} \cos(\nu) \Rightarrow \\ c^2 &\cong a^2 + b^2 - 2ab \cos(\nu) + \frac{a^2 b^2}{2k^2}. \end{aligned}$$

Para k muito grande, ou seja, $k \gg a, b, c$ temos

$$\boxed{c^2 \cong a^2 + b^2 - 2ab \cos(\nu)}$$

que é, aproximadamente, a *Lei dos Cossenos Euclidiana*.

(4) *Segunda Lei dos Cossenos Hiperbólica:*

$$\cosh\left(\frac{c}{k}\right) = \frac{\cos(\lambda) \cos(\mu) + \cos(\nu)}{\operatorname{sen}(\lambda) \operatorname{sen}(\mu)} \Rightarrow 1 + \frac{a^2}{2k^2} \cong \frac{\cos(\lambda) \cos(\mu) + \cos(\nu)}{\operatorname{sen}(\lambda) \operatorname{sen}(\mu)}.$$

Para k muito grande, ou seja, $k \gg a, b, c$ temos

$$\begin{aligned} 1 &\cong \frac{\cos(\lambda) \cos(\mu) + \cos(\nu)}{\operatorname{sen}(\lambda) \operatorname{sen}(\mu)} \Rightarrow \operatorname{sen}(\lambda) \operatorname{sen}(\mu) \cong \cos(\lambda) \cos(\mu) + \cos(\nu) \Rightarrow -\cos(\nu) \cong \cos(\lambda + \mu) \Rightarrow \\ \cos(\pi - \nu) &\cong \cos(\lambda + \mu) \Rightarrow \pi - \nu \cong \lambda + \mu \Rightarrow \boxed{\pi \cong \lambda + \mu + \nu}. \end{aligned}$$

que é, aproximadamente, um equivalente ao *Quinto Postulado de Euclides (P5.2)*.

Conclusão: Para unidades de medida muito pequenas, os triângulos hiperbólicos são “quase” euclidianos, ou então, o plano hiperbólico é “localmente euclidiano”.



Seção de Exercícios Propostos: *Trigonometria Hiperbólica*

Exercício 6.1 Considere a seguinte tabela:

Trigonometria Hiperbólica	Trigonometria Euclidiana
$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$	$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
$1 - \operatorname{tgh}^2(x) = \operatorname{sech}^2(x)$	$1 + \operatorname{tg}^2(x) = \operatorname{sec}^2(x)$
$\sinh(x \pm y) = \sinh(x) \cosh(y) \pm \cosh(x) \sinh(y)$	$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$
$\cosh(x \pm y) = \cosh(x) \cosh(y) \pm \sinh(x) \sinh(y)$	$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$
$\operatorname{tgh}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tgh}(x) \pm \operatorname{tgh}(y)}{1 \pm \operatorname{tgh}(x) \operatorname{tgh}(y)}$	$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg}(x) \pm \operatorname{tg}(y)}{1 \mp \operatorname{tg}(x) \operatorname{tg}(y)}$
$\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh(x)-1}{2}$	$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos(x)}{2}$
$\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh(x)+1}{2}$	$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos(x)}{2}$
$\operatorname{tgh}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh(x)-1}{\cosh(x)+1}$	$\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}$
$\operatorname{tgh}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)+1} = \frac{\cosh(x)-1}{\sinh(x)}$	$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$
$\sinh(x) = 2 \sinh\left(\frac{x}{2}\right) \cosh\left(\frac{x}{2}\right)$	$\sin(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$
$\cosh(x) = \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{x}{2}\right)$	$\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$
$\sinh(x) \pm \sinh(y) = 2 \sinh\left(\frac{x \pm y}{2}\right) \cosh\left(\frac{x \mp y}{2}\right)$	$\sin(x) \pm \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x \pm y}{2}\right) \cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right)$
$\cosh(x) + \cosh(y) = 2 \cosh\left(\frac{x+y}{2}\right) \cosh\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
$\cosh(x) - \cosh(y) = 2 \sinh\left(\frac{x+y}{2}\right) \sinh\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Sendo $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, mostre que as relações trigonométricas da primeira coluna da tabela são verdadeiras.

Exercício 6.2 Sejam r uma reta com pontos ideais Ω e Ω' e H um horocírculo com centro em Ω passando por $C \in r$. Sejam $A \in H$ tal que $A\Omega \perp A\Omega'$ e $B \in \widehat{AC}$ sendo $B \neq A$.

(i) Considere a reta $s \perp B\Omega$ em B . Mostre que $r \cap s \neq \emptyset$. (faça uma figura com os dados do exercício)

(ii) Considere $E \in r$ tal que $BE \perp r$. Sendo α , s e S os comprimentos de BE , \widehat{BC} e \widehat{AC} , respectivamente, mostre que $s = S \sinh(\alpha)$.

Exercício 6.3 (i) Por que não é possível definir um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no plano hiperbólico exatamente como se define no plano euclidiano? Dê um exemplo de par ordenado de números reais que não poderia ser representado como um ponto do plano hiperbólico, caso o sistema de coordenadas definido no plano hiperbólico seja cartesiano ortogonal.

(ii) Fixemos o sistema de coordenadas hiperbólicas (veja a teoria). Seja P um ponto do plano hiperbólico e P_x e P_y as projeções ortogonais de P nos eixos Ox e Oy , respectivamente. Mostre que $d(P, P_x) > d(O, P_y)$.

Capítulo 6. Trigonometria Hiperbólica

Exercício 6.4 Fixemos o sistema de coordenadas hiperbólicas (veja a teoria) no Disco de Poincaré.

- (i) Mostre que a equação de uma curva equidistante de O_x é $y = k$, sendo $|k|$ a distância da curva ao eixo O_x .
- (ii) Mostre que a equação de uma reta r perpendicular ao eixo O_x é $x = k$, sendo $|k|$ a distância do ponto P_x ao ponto O , sendo P_x projeção ortogonal de $P \in r$ qualquer no eixo O_x .

Exercício 6.5 Fixemos o sistema de coordenadas hiperbólicas (veja a teoria) no Disco de Poincaré. Chamemos os pontos ideais do eixo O_x de Ω_+ e Ω_- .

- (i) Mostre que o horocírculo de centro de centro Ω_+ que passa por $P(a, 0)$ possui equação $e^{x-a} = \cosh(y)$.
- (ii) Mostre que o horocírculo de centro de centro Ω_- que passa por $P(a, 0)$ possui equação $e^{a-x} = \cosh(y)$.

Exercício 6.6 Fixemos o sistema de coordenadas hiperbólicas (veja a teoria) no Disco de Poincaré. Chamemos os pontos ideais do eixo O_x de Ω_{x+} e Ω_{x-} . Tomemos uma reta r perpendicular ao eixo O_x passando por $P(a, 0)$ e chamemos os pontos ideais desta reta r de Ω_{r+} e Ω_{r-} , sendo Ω_{r+} representado no bordo superior do Disco de Poincaré.

- (i) Mostre que a reta que possui pontos ideais Ω_{x+} e Ω_{r+} tem equação $e^{x-a} \operatorname{tgh}(y) = 1$.
- (ii) Mostre que a reta que possui pontos ideais Ω_{x-} e Ω_{r+} tem equação $e^{a-x} \operatorname{tgh}(y) = 1$.
- (iii) Mostre que a reta que possui pontos ideais Ω_{x-} e Ω_{r-} tem equação $-e^{a-x} \operatorname{tgh}(y) = 1$.
- (iv) Mostre que a reta que possui pontos ideais Ω_{x+} e Ω_{r-} tem equação $-e^{x-a} \operatorname{tgh}(y) = 1$.

Exercício 6.7 Considere a fórmula $A(\mathcal{T}) = -\frac{1}{k} \delta(\mathcal{T})$, da área de um triângulo hiperbólico \mathcal{T} , com $k = -1$, ou seja, $A(\mathcal{T}) = \delta(\mathcal{T})$, sendo $\delta(\mathcal{T})$ o defeito do triângulo \mathcal{T} .

Considere um triângulo com lados medindo 2, 3 e 4 unidades de comprimento hiperbólico. Calcule o comprimento das três alturas, a medida dos três ângulos internos, o raio da circunferência inscrita e a área do triângulo.

Exercício 6.8 Considere a fórmula $A(\mathcal{T}) = -\frac{1}{k} \delta(\mathcal{T})$, da área de um triângulo hiperbólico \mathcal{T} , com $k = -1$, ou seja, $A(\mathcal{T}) = \delta(\mathcal{T})$, sendo $\delta(\mathcal{T})$ o defeito do triângulo \mathcal{T} .

É possível construir um quadrilátero regular com ângulos internos medindo 45° ? Justifique.

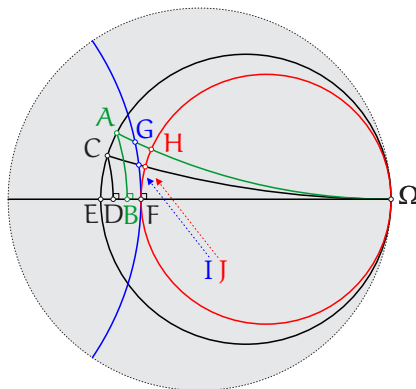
No caso afirmativo:

- Quanto é o comprimento dos lados desse quadrilátero?
- Quanto é o raio do círculo inscrito nesse quadrilátero?
- Quanto é o raio do círculo circunscrito a esse quadrilátero?
- Quanto é a área desse quadrilátero?

Exercício 6.9 Considere a fórmula $A(\mathcal{T}) = -\frac{1}{k} \delta(\mathcal{T})$, da área de um triângulo hiperbólico \mathcal{T} , com $k = -1$, ou seja, $A(\mathcal{T}) = \delta(\mathcal{T})$, sendo $\delta(\mathcal{T})$ o defeito do triângulo \mathcal{T} .

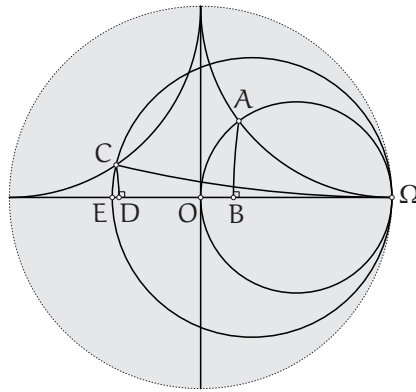
No Disco de Poincaré abaixo os comprimentos dos arcos de horocírculos \widehat{FJ} , \widehat{EC} e \widehat{EA} são, respectivamente, 0,4; 0,7 e 1,0. Além disso, o ângulo $\widehat{B\hat{A}\Omega}$ mede 45° .

- (i) Pedese o comprimento dos segmentos CJ , AH , EF , FI , IJ , CD , AB , FG e GH .
- (ii) Pedese a medida, em graus, dos ângulos $\widehat{DC\hat{\Omega}}$, $\widehat{F\hat{\Omega}}$ e $\widehat{FG\hat{\Omega}}$.
- (iii) Pedese a área dos triângulos $CD\Omega$, $AB\Omega$, $IF\Omega$ e $GF\Omega$.



Exercício 6.10 Considere a fórmula $A(\mathcal{T}) = -\frac{1}{k} \delta(\mathcal{T})$, da área de um triângulo hiperbólico \mathcal{T} , com $k = -1$, ou seja, $A(\mathcal{T}) = \delta(\mathcal{T})$, sendo $\delta(\mathcal{T})$ o defeito do triângulo \mathcal{T} .

No Disco de Poincaré abaixo, considere $EO = 1$.

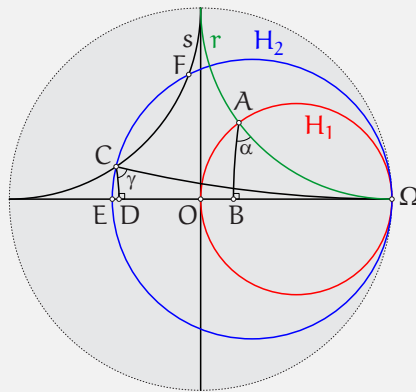


Então, $A(AB\Omega) > 2.A(CD\Omega)$, $A(AB\Omega) < 2.A(CD\Omega)$ ou $A(AB\Omega) = 2.A(CD\Omega)$? (justifique)

Resolução:

Na figura consideremos as retas perpendiculares horizontal e vertical como sendo os eixos coordenados no sistema de coordenadas hiperbólicas.

Chamemos de H_1 e H_2 os dois horocírculos, r e s as duas retas paralelas aos eixos coordenados e, α e γ as medidas dos ângulos $B\hat{A}\Omega$ e $D\hat{C}\Omega$, conforme abaixo:



Recordemos as equações de horocírculos e retas dadas nas Proposições 6.12 e 6.13.

Sendo $O(0,0)$ no sistema de coordenadas (ou seja, $a = 0$ nas proposições), a equação do horocírculo H_1 é $e^x = \cosh(y)$; a equação da reta r é $e^x \operatorname{tgh}(y) = 1$ e a equação da reta s é $e^{-x} \operatorname{tgh}(y) = 1$.

Sendo $EO = 1$, temos $E(-1,0)$ no sistema de coordenadas (ou seja, $a = -1$ nas proposições) e, portanto, a equação do horocírculo H_2 é $e^{x+1} = \cosh(y)$.

Para o cálculo das áreas dos triângulos em questão, precisamos das medidas α e γ em radianos.

Mas, sendo $AB\Omega$ e $CD\Omega$ triângulos retângulos generalizados, α e γ são medidas de ângulos de paralelismo associados às alturas AB e CD , respectivamente. Logo, se encontrarmos essas alturas, podemos utilizar a função ângulo de paralelismo para encontrar as medidas dos ângulos. Para encontrar as alturas, basta que conheçamos as coordenadas hiperbólicas de A e C , ou seja, as ordenadas de A e C representam as alturas AB e CD . Como A é o único ponto de intersecção de r e H_1 , para encontrarmos as coordenadas de A basta resolver o sistema de equações de r e H_1 . Como C é um dos pontos de intersecção de s e H_2 , temos que encontrar as soluções do sistema de equações de s e H_2 e analisar qual das soluções corresponde ao ponto C .

Vamos ao ponto A :

$$\begin{cases} e^x = \cosh(y) \\ e^x \operatorname{tgh}(y) = 1 \end{cases} \Rightarrow \cosh(y) \operatorname{tgh}(y) = 1 \Rightarrow \sinh(y) = 1 \Rightarrow y = \sinh^{-1}(1) \cong 0,88137.$$

Logo, a ordenada de A é $0,88137$ e, portanto, $AB = 0,88137$.

A função ângulo de paralelismo fornece

$$\cos(\alpha) = \operatorname{tgh}(AB) \Rightarrow \alpha \cong \arccos(\operatorname{tgh}(0,88137)) \Rightarrow \alpha \cong 0,78540 \text{ rad.}$$

Obs.: $\alpha = \frac{\pi}{4}$ rad (ou seja, $\alpha = 45^\circ$).

Vamos ao ponto C:

$$\begin{aligned} \begin{cases} e^{x+1} = \cosh(y) \\ e^{-x} \operatorname{tgh}(y) = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} e^x e = \cosh(y) \\ \operatorname{tgh}(y) = e^x \end{cases} \Rightarrow e \operatorname{tgh}(y) = \cosh(y) \Rightarrow e \sinh(y) = \cosh^2(y) \Rightarrow \\ e \sinh(y) = 1 + \sinh^2(y) &\Rightarrow \sinh^2(y) - e \sinh(y) + 1 = 0 \Rightarrow \sinh(y) = \frac{e \pm \sqrt{e^2 - 4}}{2} \Rightarrow \\ y_0 = \sinh^{-1}\left(\frac{e - \sqrt{e^2 - 4}}{2}\right) &\cong 0,4257 \text{ e } y_1 = \sinh^{-1}\left(\frac{e + \sqrt{e^2 - 4}}{2}\right) \cong 1,5621. \end{aligned}$$

Para descobrirmos qual dos dois valores de y é realmente a ordenada de C (embora pareça ser y_0), precisamos calcular as respectivas abscissas. A menor delas corresponde ao ponto C. Utilizemos a equação $\operatorname{tgh}(y) = e^x$:

$$\begin{cases} x_0 = \ln(\operatorname{tgh}(y_0)) \\ x_1 = \ln(\operatorname{tgh}(y_1)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \ln(\operatorname{tgh}(0,4257)) \\ x_1 = \ln(\operatorname{tgh}(1,5621)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -0,912 \\ x_1 = -0,088 \end{cases}$$

De fato, sendo $x_0 < x_1$ temos que $y_0 = 0,4257$ é a ordenada do ponto C (y_1 é a ordenada do ponto F da figura acima).

Logo, $CD = 0,4257$.

A função ângulo de paralelismo fornece

$$\cos(\gamma) = \operatorname{tgh}(CD) \Rightarrow \gamma \cong \arccos(\operatorname{tgh}(0,4257)) \Rightarrow \gamma \cong 1,1574 \text{ rad.}$$

Obs.: $\gamma \cong 66,31^\circ$.

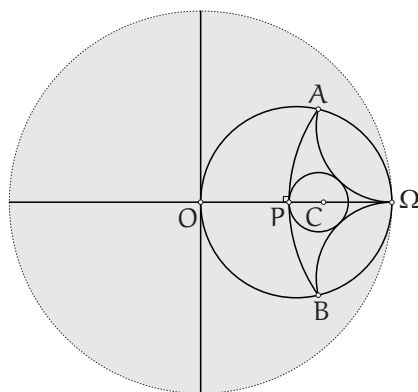
Finalmente as áreas:

$$\begin{aligned} A(AB\Omega) &= \pi - \left(\alpha + \frac{\pi}{2} + 0\right) = \pi - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + 0\right) \cong 0,78540 \\ 2.A(CD\Omega) &= 2\left(\pi - \left(\gamma + \frac{\pi}{2} + 0\right)\right) \cong 2\left(\pi - \left(1,1574 + \frac{\pi}{2} + 0\right)\right) \cong 0,82679 \end{aligned}$$

Logo, $A(AB\Omega) < 2.A(CD\Omega)$.

Exercício 6.11 Considere a fórmula $A(\mathcal{T}) = -\frac{1}{k}\delta(\mathcal{T})$, da área de um triângulo hiperbólico \mathcal{T} , com $k = -1$, ou seja, $A(\mathcal{T}) = \delta(\mathcal{T})$, sendo $\delta(\mathcal{T})$ o defeito do triângulo \mathcal{T} .

No Disco de Poincaré abaixo, considere $OH = 1$. Calcule a área do triângulo $AB\Omega$ e o raio CH do círculo de centro C inscrito ao triângulo $AB\Omega$.



Na figura consideremos as retas perpendiculares horizontal e vertical como sendo os eixos coordenados no sistema de coordenadas hiperbólicas.

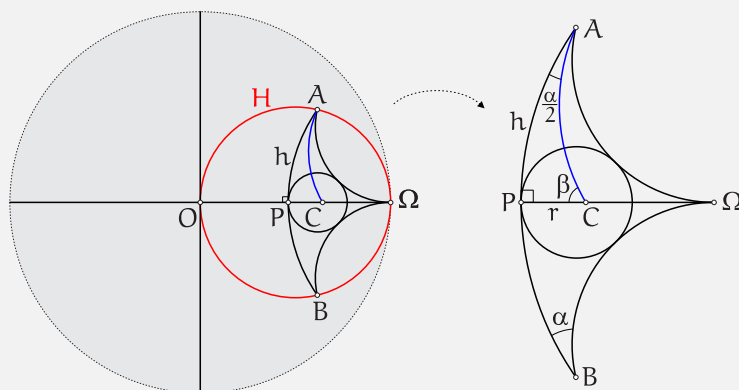
Chamemos de H o horocírculo de centro Ω que passa pela origem O e chamemos $AP = h$.

Sendo $OP = 1$, então as coordenadas de A são dadas por $A(1, h)$.

Mas $A \in H$ e a equação de H no sistema de coordenadas hiperbólicas é $e^x = \cosh(y)$ (Proposição 6.12 com $\alpha = 0$). Logo,

$$e^1 = \cosh(h) \Rightarrow h = \cosh^{-1}(e) \cong 1,6575.$$

Chamemos de α a medida do ângulo $\widehat{P\hat{A}\Omega}$ (que é congruente ao ângulo $\widehat{P\hat{B}\Omega}$), de β a medida do ângulo $\widehat{A\hat{C}P}$ e de r o raio do círculo, ou seja, $CP = r$, conforme a figura abaixo.



Sendo C o incentro do triângulo, então AC está sobre a bissetriz do ângulo $\widehat{P\hat{A}\Omega}$. Logo, a medida de $\widehat{P\hat{A}C}$ é $\frac{\alpha}{2}$. Sendo $AB\Omega$ triângulo retângulo generalizado, então α é a medida do ângulo de paralelismo relativa a altura $AP = h$. Logo, pela função ângulo de paralelismo temos

$$\cos(\alpha) = \operatorname{tgh}(h) \Rightarrow \alpha = \arccos(\operatorname{tgh}(1,6575)) = 0,37671 \text{ rad.}$$

Para o cálculo da área do triângulo $AB\Omega$ precisamos apenas de α :

$$A(AB\Omega) = \pi - (\alpha + \alpha + 0) = \pi - (0,37671 + 0,37671 + 0) = 2,3882.$$

Quanto ao raio r do círculo:

Pela Segunda Lei dos Cossenos aplicada ao triângulo APC:

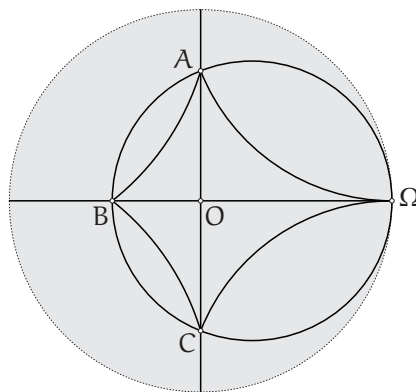
$$\cosh(h) = \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\pi}{2}) + \cos(\beta)}{\operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2})\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})} \Rightarrow e^1 = \frac{\cos(\beta)}{\operatorname{sen}(\frac{0,37671}{2})} \Rightarrow \beta = \arccos(e \operatorname{sen}(\frac{0,37671}{2})) \Rightarrow \beta = 1,0368 \text{ rad.}$$

Novamente, pela Segunda Lei dos Cossenos aplicada ao triângulo APC:

$$\cosh(r) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2})\cos(\beta) + \cos(\frac{\alpha}{2})}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})\operatorname{sen}(\beta)} \Rightarrow r = \cosh^{-1}\left(\frac{\cos(\frac{0,37671}{2})}{\operatorname{sen}(1,0368)}\right) \Rightarrow r = 0,52533.$$

Exercício 6.12 Considere a fórmula $A(\mathcal{T}) = -\frac{1}{k}\delta(\mathcal{T})$, da área de um triângulo hiperbólico \mathcal{T} , com $k = -1$, ou seja, $A(\mathcal{T}) = \delta(\mathcal{T})$, sendo $\delta(\mathcal{T})$ o defeito do triângulo \mathcal{T} .

No Disco de Poincaré abaixo, considere $OB = 1$. Calcule a área do quadrilátero generalizado $ABCO$.



Dicas:

- Para calcular AO utilize a equação do horocírculo;
- Para calcular AB utilize o Teorema de Pitágoras Hiperbólico;
- Para calcular os ângulos internos de ABO utilize a Lei dos Senos (duas vezes);
- Para calcular o ângulo de paralelismo de $AO\Omega$ utilize a expressão da função ângulo de paralelismo.



Um Resumo de Algumas Fórmulas Trigonométricas Hiperbólicas

Teorema de Pitágoras Hiperbólico: Se ABC é um triângulo retângulo ordinário hiperbólico sendo c a medida da hipotenusa, a e b medidas dos catetos, então:

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b).$$

Leis Trigonométricas: Se ABC é um triângulo ordinário hiperbólico com lados medindo a, b, c e ângulos internos α, β, γ sendo “ α oposto ao lado a ”, “ β oposto ao lado b ” e “ γ oposto ao lado c ”, então:

- Lei dos Senos:

$$\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}.$$

- Primeira Lei dos Cossenos:

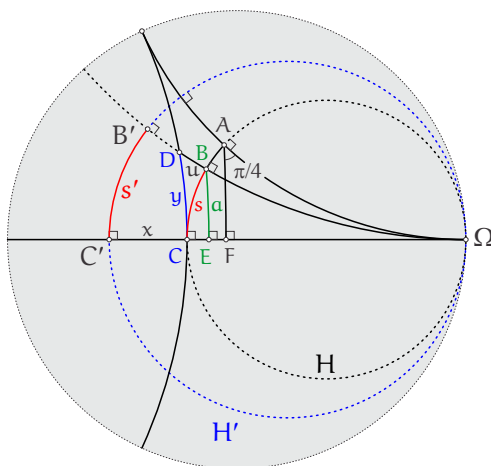
$$\begin{cases} \cosh(a) = \cosh(b) \cosh(c) - \sinh(b) \sinh(c) \cos(\alpha) \\ \cosh(b) = \cosh(a) \cosh(c) - \sinh(a) \sinh(c) \cos(\beta) \\ \cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \cos(\gamma) \end{cases}.$$

- Segunda Lei dos Cossenos:

$$\begin{cases} \cosh(a) = \frac{\cos(\beta) \cos(\gamma) + \cos(\alpha)}{\sin(\beta) \sin(\alpha)} \\ \cosh(b) = \frac{\cos(\alpha) \cos(\gamma) + \cos(\beta)}{\sin(\alpha) \sin(\gamma)} \\ \cosh(c) = \frac{\cos(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\gamma)}{\sin(\alpha) \sin(\beta)} \end{cases}$$

Horocírculos:

Na figura abaixo H e H' são horocírculos de centro Ω e raios $C\Omega$ e $C'\Omega$, respectivamente:



Temos $\widehat{AC} = 1$. Se $\widehat{BC} = s$ e $\widehat{B'C'} = s'$, então:

$$e^u = \cosh(y) \quad ; \quad s = \operatorname{tgh}(y) \quad ; \quad s = \sinh(a) \quad ; \quad s' = se^x$$

Comprimento e área de círculo hiperbólico de raio r:

- Comprimento:

$$c = 2\pi \operatorname{senh}(r).$$

- Área:

$$A = 4\pi \operatorname{senh}^2\left(\frac{r}{2}\right).$$

Função Ângulo de Paralelismo Estendida:

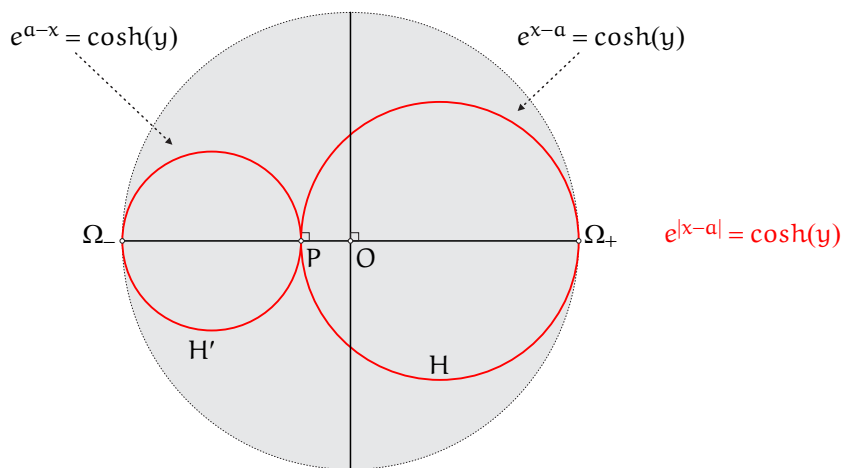
$$\begin{array}{l} \theta: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \theta(x) = \alpha \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \cos(\alpha) = \operatorname{tgh}(x) \text{ ou} \\ \operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sech}(x) \text{ ou} \\ \operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{cosech}(x) \text{ ou} \\ \operatorname{cotg}(\alpha) = \operatorname{senh}(x) \text{ ou} \\ \operatorname{sec}(\alpha) = \operatorname{cotgh}(x) \text{ ou} \\ \operatorname{cosec}(\alpha) = \operatorname{cosh}(x) \text{ ou} \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = e^{-x} \end{array}$$

Equações no Sistema de Coordenadas Hiperbólicas:

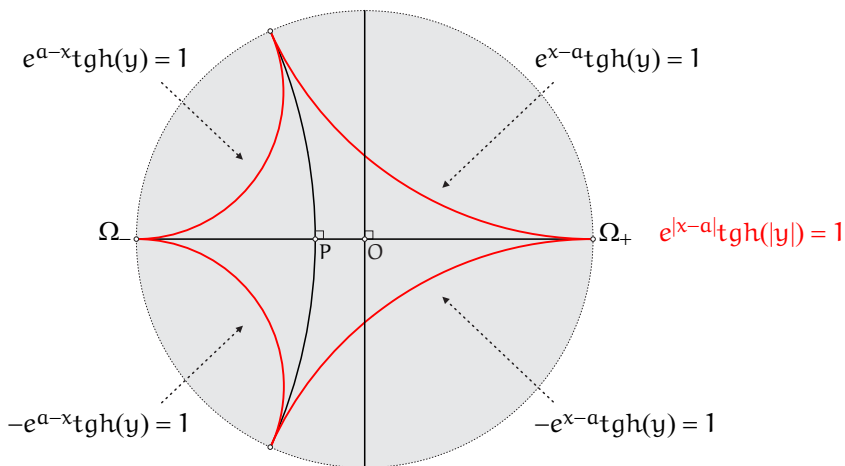
- Equação do **par de horocírculos** que passa por $P(a, 0)$ e centros nos pontos ideais do eixo O_x :

$$e^{|x-a|} = \operatorname{cosh}(y).$$



- Equação da **astroide generalizada** de diagonais perpendiculares em $P(a, 0)$ e quatro vértices ideais, sendo dois deles pontos ideais do eixo O_x :

$$e^{|x-a|} \operatorname{tgh}(|y|) = 1$$



Referências Bibliográficas

- [1] ARCARI, I. *Um Texto de Geometria Hiperbólica*. Campinas: Unicamp - Universidade Estadual de Campinas. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. 2008.
- [2] BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática. 1995.
- [3] BARBOSA, J. L. M. *Geometria Hiperbólica*. Goiânia: Instituto de Matemática e Estatística da UFG. 2002.
- [4] BONOLA, R. *Non-Euclidean Geometry: a critical and historical study of its development*. New York: Dover Publications, Inc. 1955.
- [5] CABRI-GEOMETRE-II. *Software de geometria dinâmica*. Site: cabri.com/en.
- [6] CARMO, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática. 2005.
- [7] COSTA, S. I. R. & SANTOS, S. A. “Geometrias Não-Euclidianas”. *Ciência Hoje*. Vol. 11, n.º. 65, agosto de 1990, pp. 14-23.
- [8] COUTINHO, L. *Convite às Geometrias Não-Euclidianas*. 2ª. ed. Rio de Janeiro: Editora Interciência. 2001.
- [9] COXETER, H. M. S. *Non-Euclidean Geometry*. 5th. ed. Toronto: University of Toronto Press. 1965.
- [10] DOUBNOV, I. *Erros nas Demonstrações Geométricas*. São Paulo: Atual Editora. 1996.
- [11] EVES, H. *Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula: Geometria*. São Paulo: Atual Editora. 1993.
- [12] GEOGEBRA. *Software livre de geometria dinâmica*. Site www.geogebra.org.
- [13] GREENBERG, M. J. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*. 3rd. ed. New York: W. H. Freeman and Company. 1993.
- [14] HEATH, T. L. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Vol 1 (Books I and II), Vol 2 (Books III-IX), Vol 3 (Books X-XIII). 2nd. ed. New York: Dover Publications, Inc. 1956.
- [15] HILBERT, D & COHN-VOSSEN, S. *Geometry and the Imagination*. New York: Chelsea Pub. Co. 1952.
- [16] KEISLER, H. J. *Elementary Calculus - An infinitesimal approach*. 3rd. ed. New York: Dover Publications. 2012.
- [17] KELLY, P. & MATTHEWS, G. *The Non-Euclidean Hyperbolic Plane: its structure and consistency*. New York: Springer Verlag. 1981.
- [18] MOISE, E. E. *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*. 3rd. ed. New York: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1990.
- [19] MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS. *Arquivo de História da Matemática da Universidade de Saint Andrews, Scotland*. Site: www-history.mcs.st-and.ac.uk.
- [20] NONEUCLID. *Software livre de geometria dinâmica para os modelos do disco e do semiplano de Poincaré para a geometria hiperbólica*. Site: www.cs.unm.edu/~joel/NonEuclid.
- [21] REZENDE, E. Q. F. & QUEIROZ, M. L. B. *Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas*. 2ª. ed. Campinas: Editora Unicamp. 2008.

Referências Bibliográficas

- [22] ROCHA, L. F. C. *Introdução à Geometria Hiperbólica Plana*. Rio de Janeiro: 16°. Colóquio Brasileiro de Matemática - IMPA. 1987.
- [23] ROTHE, F. *Several Topics from Geometry*. Site math2.uncc.edu/frothe.
- [24] TENENBLAT, K. *Introdução à Geometria Diferencial*. Brasília: Editora da Universidade de Brasília. 1988.

