

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**Análise do Comportamento Dinâmico de Rotores Embarcados  
Quando da Ocorrência de Contato Mecânico**

**Marcelo Samora Sousa Júnior**

**Uberlândia**

**2022**

# **Análise do Comportamento Dinâmico de Rotores Embarcados Quando da Ocorrência de Contato Mecânico**

**Tese** apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do grau de **Doutor em Engenharia Mecânica**.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações  
Linha de pesquisa: Dinâmica de Sistemas Mecânicos

Orientador: Prof. Dr. Valder Steffen Jr. (UFU)

Co-orientador: Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavalini Jr. (UFU)

Uberlândia

2022

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU  
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

S725  
2022

Sousa Júnior, Marcelo Samora, 1991-  
Análise do Comportamento Dinâmico de Rotores  
Embarcados Quando da Ocorrência de Contato Mecânico  
[recurso eletrônico] / Marcelo Samora Sousa Júnior. -  
2022.

Orientador: Valder Steffen Jr.

Coorientador: Aldemir Aparecido Cavalini Jr.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia,  
Pós-graduação em Engenharia Mecânica.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.te.2022.499>

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Engenharia mecânica. I. Jr, Valder Steffen, 1952-,  
(Orient.). II. Jr, Aldemir Aparecido Cavalini, 1983-,  
(Coorient.). III. Universidade Federal de Uberlândia.  
Pós-graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título.

CDU: 621

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091

Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



## UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica  
Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902  
Telefone: (34) 3239-4282 - www.posmecanicaufu.com.br - secposmec@mecanica.ufu.br



### ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Tese de Doutorado Acadêmico, nº 339, COPEM				
Data:	13/09/2022	Hora de início:	08:00	Hora de encerramento:	10:15
Matrícula do Discente:	11723EMC012				
Nome do Discente:	Marcelo Samora Sousa Júnior				
Título do Trabalho:	Análise do Comportamento Dinâmico de Rotores Embarcados Quando da Ocorrência de Contato Mecânico				
Área de concentração:	Mecânica dos Sólidos e Vibrações				
Linha de pesquisa:	Dinâmica de Sistemas Mecânicos				
Projeto de Pesquisa de vinculação:					

Reuniu-se por meio de videoconferência a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Professores Doutores: Aldemir Aparecido Cavallini Junior - FEMEC/UFU; Roberto Mendes Finzi Neto - FEMEC/UFU; Edson Hideki Koroishi - UTFPR; Fabian Andres Lara Molina - UFTM e Valder Steffen Júnior - FEMEC/UFU, orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Dr. Valder Steffen Júnior, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimeada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

Documento assinado eletronicamente por **Valder Steffen Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 13/09/2022, às 10:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do



[Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.](#)

---



Documento assinado eletronicamente por **Aldemir Aparecido Cavalini Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 13/09/2022, às 10:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Edson Hideki Koroishi, Usuário Externo**, em 13/09/2022, às 10:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Fabian Andres Lara Molina, Usuário Externo**, em 13/09/2022, às 10:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Roberto Mendes Finzi Neto, Professor(a) do Magistério Superior**, em 13/09/2022, às 10:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **3897569** e o código CRC **16090CDE**.

---

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço aos meus pais, Wilma e Marcelo, pela criação, amor e cuidado que tiveram comigo desde o meu nascimento, nos momentos bons e ruins da minha vida. Agradeço aos meus irmãos, Rafael, Drielly e Nayara pelo amor e carinho que têm por mim, cada um com a sua maneira. Aos meus avós Sergio e Orlanda, Ilíu e Sebastiana que mesmo distantes fizeram com que me sentisse especial e confortável em suas presenças e que sempre acreditaram na minha pessoa. Agradeço também aos meus tios e primos por fazerem os momentos em família especiais e serão lembrados com muito carinho. Agradeço ao meu amigo e fisioterapeuta Silas pelas conversas, desabafos e aprendizados durante as sessões. Obrigado por acreditar em mim.

Prof. Dr. Valder Steffen Jr e Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavalini Jr, vocês são o meu exemplo e inspiração de como um professor na parte profissional e pessoal deve ser. Obrigado por me ensinar tudo o que sei hoje sobre dinâmica de rotação. Espero que eu tenha sido um bom aluno durante esses anos, me desculpa se errei e espero que hoje eu tenha atingido as suas expectativas quando lá no início comecei a trabalhar com vocês. Muito obrigado!

Obrigado a cada integrante do Laboratório de Mecânica de Estruturas Prof. José Eduardo Tannús Reis – LMEst desde uma pequena conversa até a explicação de um método novo para mim, cada um foi importante para que esse trabalho fosse realizado. Em especial ao Vinícius Nunes Carvalho, Geisa Zuffi, Paulo Barbosa e Vergílio.

Gostaria de agradecer ao INSA-Lyon e ao Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCos) pelo suporte e estrutura fornecidos durante o meu intercâmbio. Agradeço em especial aos Prof. Régis Dufour, Prof. Eric Chatelet e Yvon Briend pelos ensinamentos, ajuda e paciência que tiveram comigo durante o tempo que trabalhamos juntos.

Agradeço ao grupo PETMEC (Programa de Educação Tutorial da FEMEC) e aos meus amigos do intercâmbio realizado nos EUA. Foi um tempo de grande aprendizado profissional e pessoal, graças às pessoas envolvidas no grupo.

Agradeço aos meus amigos do ensino médio, superior e colegas que fizeram parte da minha história e que contribuíram para que ela fosse construída. Desejo que um dia eu possa retribuir além do que me foi presenteado.

À Universidade Federal de Uberlândia (UFU), a Faculdade de Engenharia Mecânica (FEMEC) e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica agradeço pela estrutura e suporte que foram imprescindíveis para mim, agradeço também aos funcionários de cada instituição que me ajudaram durante esses anos. Muito obrigado a todos.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia – Estruturas Inteligentes em Engenharia (INCT – EIE), Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), ao Programa Ciência Sem Fronteiras, ao Programa PrInt e a Petrobrás, agradeço o suporte financeiro das bolsas de estudo e mobilidade internacional que foram fundamentais para a realização das atividades deste trabalho.

*À minha família.*



# Resumo

Sousa Jr, M. S.. *Análise do Comportamento Dinâmico de Rotores Embarcados Quando da Ocorrência de Contato Mecânico*. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, 2022.

Este trabalho apresenta uma investigação numérica e experimental sobre o comportamento dinâmico de uma máquina rotativa embarcada quando ocorre o contato no seu disco. Uma máquina rotativa é considerada embarcada quando excitações na sua base são inseridas na modelagem matemática do sistema. Neste caso, o sistema estudado possui um disco e um eixo flexível suportado por mancais de rolamento. Para realizar a análise mencionada, um modelo de elementos finitos do rotor foi construído. O modelo matemático do rotor é obtido a partir das equações de Lagrange e do método de elementos finitos, considerando as energias de deformação e cinética do eixo e as energias cinéticas do disco e da massa desbalanceada. A base do sistema rotativo é considerada rígida. As equações de movimento do sistema são utilizadas para determinar as respostas de vibração do rotor a partir das excitações devido ao desbalanceamento e ao movimento da base. O fenômeno do contato foi inserido na modelagem do rotor embarcado. Foram avaliadas duas formulações do efeito de contato, o primeiro modelo é amplamente utilizado em trabalhos científicos e o segundo é decorrente de uma colaboração com o Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCos) do INSA-Lyon. As análises numéricas investigaram a ocorrência do contato devido a uma excitação de base. Os modelos de contato, excitações senoidais e do tipo impulso com diferentes amplitudes e frequências foram avaliadas. Os resultados numéricos foram comparados com os resultados experimentais obtidos a partir da bancada de teste construída. Diferentes ensaios experimentais foram realizadas nos domínios do tempo e da frequência, onde foram obtidos funções de resposta em frequência, órbitas e respostas ao desbalanceamento. As análises experimentais obtidas são apresentadas neste trabalho. Os resultados numéricos e experimentais obtidos apresentam boa concordância.

**Palavras-chave:** Dinâmica de Rotação. Rotores Embarcados. Contato Mecânico. Método de Elementos Finitos. Investigação Numérica e Experimental.

# Abstract

Sousa Jr, M. S.. *Analysis of the Dynamic Behavior of Onboard Rotors When Mechanical Contact Occurs*. PhD Dissertation - Federal University of Uberlândia, 2022.

This work presents a numerical and experimental investigation of the dynamic behavior of an onboard rotating machine in the case of rotor-stator contact. Onboard rotor is the one that is characterized by excitations at its base that are included in the mathematical model of the system. In this case, the system studied is composed by a single disk mounted on a flexible shaft supported by ball bearings. To perform the analysis, a finite element model of the rotor was built. The mathematical model of the rotor is obtained from the Lagrange's equations and the finite element method, considering the deformation and kinetic energies of the shaft and the kinetic energies of the disk and the unbalanced mass. The base of the rotating system is considered rigid. The equations of motion of the system are used to determine vibration responses from excitations due to unbalance and base motion. The contact phenomenon was included in the onboard rotor model. Two formulations of the contact effect were evaluated: the first model is widely used in scientific works and the second is the result of a partnership with Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCos) of INSA-Lyon. Numerical analyses investigated the occurrence of contact due to a base excitation. Contact models, sinusoidal and impulse-type excitations with different amplitudes and frequencies were evaluated. Numerical results were compared with experimental ones as obtained from the test bench. Different experimental tests were carried out both in time and frequency domains, so that frequency response functions, orbits, and unbalance responses were obtained. The experimental analyses for comparison purposes are also presented in this work. Simulation results exhibit good agreement with experimental ones.

**Keywords:** Rotordynamics. Onboard Rotors. Mechanical Contact. Finite Element Method. Numerical and Experimental Investigation.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xvii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xviii</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xviii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Contextualização . . . . .	1
1.2 Objetivos do Estudo . . . . .	5
1.3 Organização do Trabalho . . . . .	5
<b>2 Revisão Bibliográfica</b>	<b>7</b>
2.1 Rotores Embarcados . . . . .	7
2.2 Contato em Máquinas Rotativas . . . . .	12
<b>3 Modelo Matemático de Rotores Embarcados Quando da Ocorrência de Contato</b>	<b>18</b>
3.1 Rotores Embarcados . . . . .	18
3.1.1 Energias Cinética e Potencial . . . . .	18
3.1.2 Formulação em Elementos Finitos . . . . .	24
3.2 Modelos de Contato Mecânico . . . . .	35
3.2.1 Modelo 1 . . . . .	35
3.2.2 Modelo 2 . . . . .	37
<b>4 Simulações Numéricas</b>	<b>39</b>
4.1 Bancada de Testes . . . . .	39
4.2 Simulações do Rotor Embarcado com Contato . . . . .	44

4.2.1	Comparação dos Modelos de Contato . . . . .	44
4.2.2	Excitação Pulso . . . . .	53
4.2.3	Excitação Senoidal . . . . .	56
4.2.4	Excitação Senoidal Combinada . . . . .	64
4.2.5	Excitação Senoidal Angular . . . . .	68
4.2.6	Condição Crítica de Excitação pela Base e Contato . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Resultados Experimentais</b>	<b>75</b>
5.1	Bancada de Testes . . . . .	75
5.2	Análise Experimental do Modelo de Rotor Embarcado com Contato Mecânico . . . . .	80
5.2.1	Excitação do Tipo Impacto a 0 RPM . . . . .	82
5.2.2	Excitação do Tipo Impacto a 1200 RPM . . . . .	84
5.2.3	Excitação do Tipo Senoidal a 1200 RPM . . . . .	88
<b>6</b>	<b>Conclusão e Perspectivas Futuras</b>	<b>94</b>
	<b>Referências</b>	<b>99</b>

# Lista de Figuras

3.1	Representação esquemática de um rotor embarcado: referencial inercial $R_0(x_0, y_0, z_0)$ , referencial móvel da base $R_S(x_S, y_S, z_S)$ e o referencial móvel do disco $R(x, y, z)$ . . . . .	19
3.2	Transformação dos referencias do disco para o inercial. . . . .	19
3.3	Massa de desbalanceamento. . . . .	23
3.4	Coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais. Adaptado de: (CAVALINI et al., 2013). . . . .	24
3.5	Representação do elemento de disco. Adaptado de: (CAVALINI et al., 2013). . . . .	25
3.6	Graus de liberdade associados ao elemento finito do eixo. Adaptado de: (CAVALINI et al., 2013). . . . .	27
3.7	Modelo de contato utilizado em sistema rotativos. (ISHIDA; YAMAMOTO, 2012). . . . .	36
3.8	Representação esquemática do contato rotor-estator. Retirado de: (DURAN, 2014). . . . .	37
4.1	Máquina rotativa utilizada nas análises numéricas. . . . .	40
4.2	$FRFs$ numérica (—) e experimental (—) da máquina rotativa (em repouso). . . . .	42
4.3	Diagrama de Campbell do modelo EF numérico. . . . .	43
4.4	Zoom do Diagrama de Campbell. . . . .	43
4.5	Respostas de vibração numérica (—) e experimental (—) para a velocidade de 1600 RPM. . . . .	43
4.6	Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo pulso com amplitude de $1 \times 10^{-2}m$ e folga = $1,5 \times 10^{-4}m$ . . . . .	46

4.7	Respostas de vibração e força de contato do Modelo 2, para uma excitação do tipo pulso com amplitude de $1 \times 10^{-2} \text{m}$ e folga = $1,5 \times 10^{-4} \text{m}$ . . .	47
4.8	Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de $1 \times 10^{-4} \text{m}$ , frequência = 30Hz e folga = $1,5 \times 10^{-4} \text{m}$ . . . . .	49
4.9	Respostas de vibração e força de contato do Modelo 2, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de $1 \times 10^{-4} \text{m}$ , frequência = 30Hz e folga = $1,5 \times 10^{-4} \text{m}$ . . . . .	50
4.10	Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de $1 \times 10^{-5} \text{m}$ , frequência = 90Hz e folga = $1 \times 10^{-4} \text{m}$ . . . . .	51
4.11	Respostas de vibração e força de contato do Modelo 2, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de $1 \times 10^{-5} \text{m}$ , frequência = 90Hz e folga = $1 \times 10^{-4} \text{m}$ . . . . .	52
4.12	Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo pulso com amplitude de 0,1m e folga = $1,5 \times 10^{-4} \text{m}$ . . . . .	54
4.13	Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo pulso com amplitude de 0,5m e folga = $1,5 \times 10^{-4} \text{m}$ . . . . .	55
4.14	Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de $1 \times 10^{-5} \text{m}$ , frequência = 20Hz e folga = $1 \times 10^{-4} \text{m}$ . . . . .	57
4.15	Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de $1 \times 10^{-5} \text{m}$ , frequência = 40Hz e folga = $1 \times 10^{-4} \text{m}$ . . . . .	58
4.16	Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de $1 \times 10^{-5} \text{m}$ , frequência = 80Hz e folga = $1 \times 10^{-4} \text{m}$ . . . . .	59
4.17	Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de $1 \times 10^{-4} \text{m}$ , frequência = 20Hz e folga = $1 \times 10^{-4} \text{m}$ . . . . .	61

4.18 Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de $1 \times 10^{-4}m$ , frequência = 40Hz e folga = $1 \times 10^{-4}m$ . . . . .	62
4.19 Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de $1 \times 10^{-4}m$ , frequência = 80Hz e folga = $1 \times 10^{-4}m$ . . . . .	63
4.20 Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de $1 \times 10^{-4}m$ , frequência = 20Hz e folga = $1,5 \times 10^{-4}m$ . . . . .	65
4.21 Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de $1 \times 10^{-4}m$ , frequência = 40Hz e folga = $1,5 \times 10^{-4}m$ . . . . .	66
4.22 Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de $1 \times 10^{-4}m$ , frequência = 80Hz e folga = $1,5 \times 10^{-4}m$ . . . . .	67
4.23 Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de $1 \times 10^{-3}m$ , frequência = 30Hz e folga = $1 \times 10^{-4}m$ . . . . .	69
4.24 Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de $1 \times 10^{-3}m$ , frequência = 30Hz e folga = $5 \times 10^{-4}m$ . . . . .	70
4.25 Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de $1 \times 10^{-4}m$ , frequência = 20Hz e folga = $1,5 \times 10^{-4}m$ . . . . .	72
4.26 Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de $1 \times 10^{-3}m$ , frequência = 40Hz e folga = $1,5 \times 10^{-4}m$ . . . . .	73
5.1 Máquina rotativa utilizada nas análises experimentais. . . . .	76
5.2 FRFs numérica (—) e experimental (—) da máquina rotativa (em repouso). . . . .	78
5.3 Diagrama de Campbell do modelo EF numérico. . . . .	79
5.4 Zoom do Diagrama de Campbell. . . . .	79

5.5	Resultado numérico (—) e experimental (—) da máquina rotativa para a velocidade de 1200 RPM. . . . .	80
5.6	Bancada de testes fixada no excitador eletrodinâmico ( <i>shaker</i> ). . . . .	81
5.7	4 Pontos de contato com o disco. . . . .	82
5.8	Respostas de vibração do rotor ao longo da direção $x_S$ para uma aceleração pela base do tipo impacto com o rotor em repouso ( $\Omega = 0\text{RPM}$ ). Resultado numérico (—) e experimental (—). . . . .	84
5.9	Respostas de vibração do rotor ao longo da direção $x_S$ para uma aceleração pela base do tipo impacto, amplitude de $20,0\text{ m/s}^2$ , com o rotor operando em $\Omega = 1200\text{RPM}$ , sem condição de contato. Resultado numérico (—) e experimental (—). . . . .	86
5.10	Respostas de vibração do rotor ao longo da direção $x_S$ para uma aceleração pela base do tipo impacto , amplitude de $20,0\text{ m/s}^2$ , com o rotor operando em $\Omega = 1200\text{RPM}$ , condição de contato do Modelo 1. Resultado numérico (—) e experimental (—). . . . .	86
5.11	Respostas de vibração do rotor ao longo da direção $x_S$ para uma aceleração pela base do tipo impacto , amplitude de $20,0\text{ m/s}^2$ , com o rotor operando em $\Omega = 1200\text{RPM}$ , condição de contato do Modelo 2. Resultado numérico (—) e experimental (—). . . . .	87
5.12	Respostas de vibração do rotor ao longo da direção $x_S$ para uma aceleração pela base do tipo impacto , amplitude de $25,0\text{ m/s}^2$ , com o rotor operando em $\Omega = 1200\text{RPM}$ , sem condição de contato. Resultado numérico (—) e experimental (—). . . . .	87
5.13	Respostas de vibração do rotor ao longo da direção $x_S$ para uma aceleração pela base do tipo impacto, amplitude de $25,0\text{ m/s}^2$ , com o rotor operando em $\Omega = 1200\text{RPM}$ , condição de contato do Modelo 1. Resultado numérico (—) e experimental (—). . . . .	88
5.14	Respostas de vibração do rotor ao longo da direção $x_S$ para uma aceleração pela base do tipo impacto , amplitude de $25,0\text{ m/s}^2$ , com o rotor operando em $\Omega = 1200\text{RPM}$ , condição de contato do Modelo 2. Resultado numérico (—) e experimental (—). . . . .	88



5.15 Respostas de vibração do rotor ao longo da direção $x_S$ para um deslocamento pela base do tipo senoidal com o rotor operando em $\Omega = 1200\text{RPM}$ , sem condição de contato. Resultado numérico (—) e experimental (—). . . . .	89
5.16 Respostas de vibração do rotor ao longo da direção $x_S$ para um deslocamento pela base do tipo senoidal com o rotor operando em $\Omega = 1200\text{RPM}$ , condição de contato do Modelo 1. Resultado numérico (—) e experimental (—). . . . .	90
5.17 Respostas de vibração do rotor ao longo da direção $x_S$ para um deslocamento pela base do tipo senoidal com o rotor operando em $\Omega = 1200\text{RPM}$ , condição de contato do Modelo 2. Resultado numérico (—) e experimental (—). . . . .	90
5.18 Respostas de vibração do rotor ao longo da direção $x_S$ para um deslocamento pela base do tipo senoidal com o rotor operando em $\Omega = 1200\text{RPM}$ . Resultado numérico (—) e experimental (—). . . . .	91
5.19 Resposta de vibração do rotor ao longo da direção $x_S$ para um deslocamento pela base do tipo senoidal com amplitude de $0.01\text{mm}$ e $f=35\text{Hz}$ , para o rotor operando $\Omega = 1200\text{RPM}$ , sem condição de contato. Resultado numérico (—) e experimental (—). . . . .	92
5.20 Respostas de vibração do rotor ao longo da direção $x_S$ para um deslocamento pela base do tipo senoidal com amplitude de $0.01\text{mm}$ e $f=35\text{Hz}$ , para o rotor operando $\Omega = 1200\text{RPM}$ , condição de contato dos Modelo 1 e Modelo 2. Resultado numérico (—) (—) e experimental (—). . . . .	92
5.21 Respostas de vibração do rotor ao longo da direção $x_S$ para um deslocamento pela base do tipo senoidal com amplitude de $0.5\text{mm}$ e $f=35\text{Hz}$ , para o rotor operando $\Omega = 1200\text{RPM}$ , condição de contato dos Modelo 1 e Modelo 2. Resultado numérico (—) (—) e experimental (—). . . . .	93

# Lista de Tabelas

4.1	Parâmetros determinados pelo procedimento de ajuste do modelo. . . .	41
4.2	Valores das variáveis do Modelo 1 adotadas para as simulações numéricas. . . . .	44
4.3	Valores das variáveis do Modelo 2 adotadas para as simulações numéricas. . . . .	44
5.1	Parâmetros determinados pelo procedimento de ajuste do modelo. . . .	78
5.2	Valores das variáveis do Modelo 1 e Modelo 2 adotadas para as simulações numéricas. . . . .	82

# Lista de Símbolos

## Acrônimos

*BW* Backward Whirl – Precessão inversa

*EF* Elementos Finitos

*FRF* Função de Resposta em Frequência

*FRF<sub>exp</sub>* Função de Resposta em Frequência Experimental

*FRF<sub>num</sub>* Função de Resposta em Frequência Numérica

*FW* Forward Whirl – Precessão direta

*RPM* Rotação por minuto

## Símbolos Gregos

$\alpha$  Rotação angular em torno de  $z_0$  [rad]

$\alpha_S$  Rotação angular do eixo de coordenadas  $R_0$  em relação ao referencial  $R_S$  na direção  $x_S$  [rad]

$\beta$  Rotação angular em torno de  $x_3$  [rad]

$\beta_p$  Coeficiente da Matriz  $D_p$  [–]

$\beta_S$  Rotação angular do eixo de coordenadas  $R_0$  em relação ao referencial  $R_S$  na direção  $y_S$  [rad]

$\delta$  Folga radial [m]

$\gamma$  Rotação angular em torno de  $y_S$  [rad]

$\gamma_p$	Coeficiente da Matriz $D_p$	[—]
$\gamma_S$	Rotação angular do eixo de coordenadas $R_0$ em relação ao referencial $R_S$ na direção $z_S$	[rad]
$\Lambda$	Constante da função seno de excitação pela base	[—]
$\mu$	Coeficiente de atrito	[—]
$\Omega$	Velocidade de Rotação do Eixo	[RPM]
$\omega_x$	Velocidade angular do eixo de coordenadas $R$ em relação ao referencial $R_0$ na direção $x$	[rad/s]
$\omega_y$	Velocidade angular do eixo de coordenadas $R$ em relação ao referencial $R_0$ na direção $y$	[rad/s]
$\omega_z$	Velocidade angular do eixo de coordenadas $R$ em relação ao referencial $R_0$ na direção $z$	[rad/s]
$\phi$	Rotação angular em torno de $y$	[rad]
$\psi$	Rotação angular em torno de $z_S$	[rad]
$\rho$	Densidade do Material do Eixo	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\theta$	Rotação angular em torno de $x_1$	[rad]
$\xi$	Fator de amortecimento modal	[—]
$\Omega_{R_0}^{R_S}$	Velocidade angular de $R_S$ em relação a $R_0$	[rad/s]
$\Omega_{R_S}^R$	Velocidade angular de $R$ em relação a $R_S$	[rad/s]
$\Omega_R^{R_0}$	Velocidade angular de $R$ em relação a $R_0$	[rad/s]

## Símbolos Latinos

$f$	Vetor de força do sistema rotativo	[—]
$C$	Centro Geométrico do Eixo	[—]
$c_c$	Constante de amortecimento do contato	[Ns/m]

$c_e$	Constante de amortecimento do contato	$[Ns/m]$
$D$	Matriz de amortecimento do sistema rotativo	$[-]$
$d$	Distância entre a massa de desbalanceamento (ponto $D$ ) e o centro do eixo (ponto $C$ )	$[m]$
$D^*$	Matriz de efeito giroscópico/amortecimento do sistema rotativo relacionada com o movimento da base	$[-]$
$D_D^*$	Matriz de efeito giroscópico do disco relacionada com o movimento da base	$[-]$
$D_S^*$	Matriz de efeito giroscópico do eixo	$[-]$
$D_D$	Matriz clássica de efeito giroscópico do disco	$[-]$
$D_m$	Matriz de amortecimento do mancal	$[-]$
$D_p$	Matriz de amortecimento proporcional	$[-]$
$D_{S1}$	Matriz relacionada com a matriz de amortecimento do eixo	$[-]$
$D_{S2}$	Matriz relacionada com a matriz de amortecimento do eixo	$[-]$
$d_{xx}$	Coefficiente de amortecimento do mancal na direção $x_S$	$[Ns/m]$
$d_{xz}$	Coefficiente de amortecimento cruzado do mancal da direção $x_S$ com a direção $z_S$	$[Ns/m]$
$d_{zx}$	Coefficiente de amortecimento cruzado do mancal da direção $z_S$ com a direção $x_S$	$[Ns/m]$
$d_{zz}$	Coefficiente de amortecimento do mancal na direção $z_S$	$[Ns/m]$
$E$	Módulo de elasticidade do eixo	$[Pa]$
$f$	Frequência	$[Hz]$
$f^*$	Vetor de força do sistema rotativo relacionada com o movimento da base	$[-]$
$f_D^*$	Vetor de forças do disco relacionado com o movimento da base	$[-]$
$f_S^*$	Vetor de forças do eixo	$[-]$

$f_{cn}$	Força de contato normal	[N]
$f_{ct}$	Força de contato tangencial	[N]
$f_c$	Força de contato devido ao amortecimento	[N]
$f_f$	Força de contato devido a fricção	[N]
$f_k$	Força de contato devido a rigidez	[N]
$F_{mu}$	Força de sustentação do mancal na direção $x_S$	[N]
$F_{mw}$	Força de sustentação do mancal na direção $z_S$	[N]
$f_{S1}$	Vetor relacionado com o vetor de forças do eixo	[—]
$f_{S2}$	Vetor relacionado com o vetor de forças do eixo	[—]
$F_u$	Força devido aos desbalanceamento ao longo da direção $x$	[N]
$F_w$	Força devido aos desbalanceamento ao longo da direção $z$	[N]
$I$	Momento de área da seção transversal do eixo	[m <sup>4</sup> ]
$I_D$	Tensor de momentos de inércia de massa do disco	[kg.m <sup>2</sup> ]
$I_x$	Momento de inércia de área do eixo na direção $x$	[m <sup>4</sup> ]
$I_y$	Momento de inércia de área do eixo na direção $y$	[m <sup>4</sup> ]
$I_z$	Momento de inércia de área do eixo na direção $z$	[m <sup>4</sup> ]
$I_{Dp}$	Momento de inércia polar de massa do disco	[kg.m <sup>2</sup> ]
$I_{Dt}$	Momento de inércia lateral de massa do disco	[kg.m <sup>2</sup> ]
$j_0$	Folga radial	[m]
$K$	Matriz de rigidez do sistema rotativo	[—]
$K^*$	Matriz de rigidez do sistema rotativo relacionada com o movimento da base	[—]
$K_D^*$	Matriz de rigidez do disco relacionada com o movimento da base	[—]
$K_S^*$	Matriz de rigidez do eixo	[—]

$k_c$	Constante de rigidez do contato	$[N/m]$
$k_e$	Constante de rigidez do contato	$[N/m]$
$K_m$	Matriz de rigidez do mancal	$[-]$
$k_{ROT}$	Rigidez de rotação devido ao acoplamento	$[Nm/rad]$
$K_{S1}$	Matriz relacionada com a matriz de rigidez do eixo	$[-]$
$K_{S2}$	Matriz relacionada com a matriz de rigidez do eixo	$[-]$
$K_{S3}$	Matriz relacionada com a matriz de rigidez do eixo	$[-]$
$K_{S4}$	Matriz relacionada com a matriz de rigidez do eixo	$[-]$
$K_{Su}$	Matriz relacionada com a matriz de rigidez do eixo	$[-]$
$k_{xx}$	Coefficiente de rigidez do mancal na direção $x_S$	$[N/m]$
$k_{xz}$	Coefficiente de rigidez cruzado do mancal da direção $x_S$ com a direção $z_S$	$[N/m]$
$k_{zx}$	Coefficiente de rigidez cruzado do mancal da direção $z_S$ com a direção $x_S$	$[N/m]$
$k_{zz}$	Coefficiente de rigidez do mancal na direção $z_S$	$[N/m]$
$L$	Comprimento do Eixo	$[m]$
$M$	Matriz de massa do sistema rotativo	$[-]$
$M_S^*$	Matriz de massa do eixo	$[-]$
$M_D$	Matriz clássica de massa do disco	$[-]$
$m_D$	Massa do Disco	$[kg]$
$m_u$	Massa do Desbalanceamento	$[kg]$
$M_{S1}$	Matriz relacionada com a matriz de massa do eixo	$[-]$
$M_{S2}$	Matriz relacionada com a matriz de massa do eixo	$[-]$
$n$	Constante	$[-]$
$N_1$	Vetor de funções de forma de um elemento de viga associa ao vetor $q_u$	$[-]$

$N_2$	Vetor de funções de forma de um elemento de viga associa ao vetor $q_w$	[—]
$q_D$	Vetor de coordenadas generalizadas associado ao disco	[—]
$q_S$	Vetor de deslocamentos nodais associado ao eixo	[—]
$R$	Referencial Fixo ao disco	[—]
$r$	Deslocamento radial	[ $m$ ]
$R_0$	Referencial Inercial	[—]
$R_S$	Referencial Fixo na base do rotor	[—]
$S$	Área da secção transversal do eixo	[ $m^2$ ]
$t$	Tempo	[ $s$ ]
$T_D$	Energia Cinética do Disco	[—]
$T_S$	Energia Cinética do Eixo	[—]
$T_u$	Energia Cinética da Massa de Desbalanceamento	[—]
$U$	Energia de Deformação do Eixo	[—]
$u$	Translação do ponto $C$ ao longo da direção $x_S$	[ $m$ ]
$u_C$	Velocidade do disco expressa em $R_S$ com relação a $R_0$ na direção $x_S$	[ $m$ ]
$u_S$	Velocidade do eixo expressa em $R_S$ com relação a $R_0$ na direção $x_S$	[ $m$ ]
$v_C$	Velocidade do disco expressa em $R_S$ com relação a $R_0$ na direção $y_S$	[ $m/s$ ]
$v_S$	Velocidade do eixo expressa em $R_S$ com relação a $R_0$ na direção $y_S$	[ $m/s$ ]
$V_t$	Velocidade tangencial do centro do rotor	[ $m/s$ ]
$w$	Translação do ponto $C$ ao longo da direção $z_S$	[ $m$ ]
$w$	Vetor peso dos componentes do sistema rotativo	[—]
$w_C$	Velocidade do disco expressa em $R_S$ com relação a $R_0$ na direção $z_S$	[ $m$ ]
$w_S$	Velocidade do eixo expressa em $R_S$ com relação a $R_0$ na direção $z_S$	[ $m$ ]



$X$	Valor do vetor $\mathbf{r}_{OA}^{R_S}$ na direção $x_S$	[–]
$x$	Eixo de referência no ponto $R$	[–]
$x_0$	Eixo de referência no ponto $A$	[–]
$x_1$	Eixo de referência no ponto $R_1$	[–]
$x_2$	Eixo de referência no ponto $R_2$	[–]
$x_3$	Eixo de referência no ponto $R_3$	[–]
$x_4$	Eixo de referência no ponto $R_4$	[–]
$x_A$	Valor do vetor $\mathbf{r}_{OA}^{R_0}$ na direção $x$	[–]
$x_S$	Eixo de referência no ponto $O$	[–]
$Y$	Valor do vetor $\mathbf{r}_{OA}^{R_S}$ na direção $y_S$	[–]
$y$	Eixo de referência no ponto $R$	[–]
$y_0$	Eixo de referência no ponto $A$	[–]
$y_1$	Eixo de referência no ponto $R_1$	[–]
$y_2$	Eixo de referência no ponto $R_2$	[–]
$y_3$	Eixo de referência no ponto $R_3$	[–]
$y_4$	Eixo de referência no ponto $R_4$	[–]
$y_A$	Valor do vetor $\mathbf{r}_{OA}^{R_0}$ na direção $y$	[–]
$y_S$	Eixo de referência no ponto $O$	[–]
$Z$	Valor do vetor $\mathbf{r}_{OA}^{R_S}$ na direção $z_S$	[–]
$z$	Eixo de referência no ponto $R$	[–]
$z_0$	Eixo de referência no ponto $A$	[–]
$z_1$	Eixo de referência no ponto $R_1$	[–]
$z_2$	Eixo de referência no ponto $R_2$	[–]

$z_3$	Eixo de referência no ponto $R_3$	[–]
$z_4$	Eixo de referência no ponto $R_4$	[–]
$z_A$	Valor do vetor $\mathbf{r}_{OA}^{R_0}$ na direção $z$	[–]
$z_S$	Eixo de referência no ponto $O$	[–]
$\mathbf{v}_C^{R_S}$	Velocidade de translação do disco expressa em $R_S$ com relação a $R_0$	[m/s]
$\mathbf{v}_D^{R_S}$	Velocidade de translação do ponto $D$ expressa em $R_S$ com relação a $R_0$	[m/s]

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Contextualização

As pesquisas envolvendo o estudo do comportamento dinâmico de máquinas rotativas embarcadas está crescendo. O trabalho de Sousa et al. (2017) apresentou uma abordagem extensa sobre a temática de rotores embarcados. Nele é apresentada uma formulação para a análise dinâmica de rotores rígidos sujeitos a excitações pela base. A formulação permite seis movimentos na base da máquina e leva em conta características lineares. As equações do movimento foram obtidas a partir das equações de Lagrange. Diferentes excitações foram mostradas e discutidas pelos autores.

Reddy e Srinivas (2016) apresentaram a análise dinâmica de um rotor com excitação pela base. Neste caso, o sistema é composto por um eixo flexível, um disco rígido e mancais hidrodinâmicos. As forças não lineares dos mancais hidrodinâmicos foram determinadas e as equações do movimento discretizadas foram descritas usando o método de elementos finitos. Forças de desbalanceamento no disco foram consideradas. As regiões de instabilidade do rotor foram identificadas pela introdução de excitações senoidais na base do rotor.

Uma análise no modelo de elementos finitos de uma turbina a gás com excitações pela base foi realizada no trabalho de Verma e Bhore (2017). Um elemento de eixo de Timoshenko com 4 graus de liberdade em cada nó, efeito giroscópico e desbalanceamento foram considerados na análise. Os coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais foram incorporados no modelo de elementos finitos do rotor. O método beta de Newmark (LEE; KIM; KIM, 2006) foi utilizado para integrar as equações do

movimento do sistema rotativo. A influência da amplitude e da duração do tempo da excitação foram investigadas quanto ao comportamento dinâmico do rotor. As respostas nas posições dos mancais mostraram-se sensíveis à amplitude da excitação e à duração do tempo.

Recentemente, Briend et al. (2019) apresentaram um novo método para investigar a estabilidade de sistemas rotativos sujeitos a excitações pela base rotacionais multi-frequenciais. Combinando a análise modal e a construção de vetores dinâmicos específicos de Ritz, este método é capaz de lidar com complexos efeitos da dinâmica de rotação, como o amortecimento não proporcional, matrizes não adjuntas ou coeficientes paramétricos variáveis no tempo. O trabalho demonstrou a precisão e eficiência do método desenvolvido na determinação das respostas temporais e espectrais de modelos completos e reduzidos devido a excitações pela base. O método se destaca pela análise de estabilidade paramétrica através da teoria de Floquet. Os exemplos numéricos propostos englobam bancadas de testes em laboratório e rotores industriais suportados por mancais hidrodinâmicos.

Já o fenômeno do contato em rotores vem sendo estudado a mais tempo. Como mostra o trabalho de Padovan e Choy (1987) que é um dos primeiros autores a analisar o efeito do contato em máquinas rotativas. Foi realizada uma análise transiente do problema de atrito/contato entre rotor, pás e sua estrutura de revestimento, em alta rotação. De forma geral, o trabalho avaliou os efeitos do atrito da pá, desbalanceamento, rigidez da pá/rotor, amortecimento do sistema e características do contato de interface.

As interações de contato entre um conjunto de rotor e sua estrutura de revestimento estão entre as principais causas de falha em máquinas rotativas. Fadiga e fratura de componentes de uma turbina podem levar a consequências catastróficas (CHOY; RADOVAN; BATUR, 1989). No trabalho de Choy, Radovan e Batur (1989) foi apresentada uma análise abrangente de um sistema complexo de rotor-mancal-pás-carcaça durante as interações de contato entre os componentes. Os modos ortogonais acoplados do rotor-estator foram usados para obter o movimento relativo entre o rotor e a carcaça. As características dinâmicas do sistema foram examinadas no domínio do tempo e da frequência. Forças não lineares dos mancais também foram incluídas para aumentar a representatividade da simulação do sistema operacional.

Chang-Jian et al. (2010) estudaram a dinâmica do atrito-impacto em um rotor apoiado por mancais hidrodinâmicos. As forças hidrodinâmicas não lineares dos mancais, do contato rotor-estator e da rigidez não linear foram consideradas simultaneamente neste estudo. Os deslocamentos nas direções horizontal e vertical foram obtidos para várias condições de operação do rotor. Os resultados numéricos mostraram que o comportamento dinâmico do sistema varia com a velocidade de rotação e o desbalanceamento.

Vlajic, Champneys e Balachandran (2017) avaliaram a deformação torsional e o contato rotor-estator de um rotor Jeffcott modificado. O contato no estator foi estudado para as condições de forward (*FW*) e backward (*BW*). Neste trabalho foram investigados dois modelos: o de atrito de Coulomb e a lei generalizada de Coulomb. Foram utilizadas estimativas analíticas e análises numéricas de bifurcação para mapear as regiões de contato rotor-estator, para os casos com e sem o grau de liberdade torsional no modelo. Além disso, uma análise numérica para diferentes tipos de contato foi avaliada para a condição de backward (*BW*).

Yang et al. (2018) desenvolveram uma bancada rotor-estator para analisar a falha de acoplamento da carga axial e o atrito radial. O contato entre o disco e o estator foi dividido em quatro etapas: sem contato, baixo contato, contato e alto contato. O modelo de Coulomb foi utilizado para caracterizar o contato entre o rotor-estator. Os autores utilizam interpolação linear para prever o contato instantâneo entre o disco e o estator e os efeitos não-lineares do sistema submetidos a um contato axial e radial. Estes efeitos foram analisados pelo diagrama de bifurcação. A partir das órbitas e da forma das respostas de vibração foi possível identificar o tipo de contato que está ocorrendo.

O estudo da dinâmica de rotação vem sendo desenvolvido no LMEst-UFU já faz bastante tempo. Ultimamente, o foco são os rotores chamados inteligentes, ou seja, aqueles que são dotados de tecnologia capaz de identificar defeitos, encontrar soluções e implementar ações de controle capazes de garantir seu funcionamento seguro associado a um comportamento dinâmico que atende corretamente normas técnicas próprias, tudo realizado através da utilização de técnicas de inteligência artificial. No que tange a rotores embarcados, destacamos os trabalhos recentes que estão diretamente associados à investigação apresentada nesta tese de doutoramento. Segue

abaixo as dissertações e teses que se encontram dentro deste universo:

1. CAVALINI JR., A. A.. Detecção e identificação de trincas transversais incipientes em eixos horizontais flexíveis de máquinas rotativas. Universidade Federal de Uberlândia, 2013.
2. KOROISHI, E. H.. Controle de vibrações em máquinas rotativas utilizando atuadores eletromagnéticos. Universidade Federal de Uberlândia, 2013.
3. OLIVEIRA, M. V. F. d.. Caracterização numérica e experimental de uma bancada de rotor flexível suportada por mancais magnéticos ativos. Universidade Federal de Uberlândia, 2015.
4. BORGES, A. S.. Controle modal de rotores com mancais magnéticos: Projeto robusto. Universidade Federal de Uberlândia, 2016.
5. SOUSA JÚNIOR, M. S.. Análise do comportamento dinâmico de rotores embarcados. Universidade Federal de Uberlândia, 2017.
6. CARVALHO, V. N. Balanceamento robusto de máquinas rotativas com eixos flexíveis. Universidade Federal de Uberlândia, 2017.
7. BARBOSA, P. C. P. F., Análise do comportamento dinâmico de eixos de material composto em máquinas rotativas. Universidade Federal de Uberlândia, 2018.
8. DEL CLARO, V. T. S. Uma Contribuição ao Estudo de Rotores Embarcados com Eixo de Material Composto. Universidade Federal de Uberlândia, 2020.

Esta tese de doutoramento contribui para os estudos de máquinas rotativas, pois apresenta um aspecto pouco explorado na literatura. Assim, o comportamento dinâmico de máquinas rotativas excitadas pela base avaliando o contato mecânico entre o disco e o estator é apresentado neste trabalho. Foi construído um modelo matemático para sistemas rotativos embarcados, ou seja, são introduzidos no modelo deslocamentos e rotações que podem ocorrer pela base da máquina rotativa. O fenômeno de contato é inserido no disco, dentro do modelo matemático através do contato entre o disco e o estator. Simulações numéricas foram realizadas para estudar o comportamento dinâmico deste sistema, utilizou-se diferentes tipos de excitações pela base

e condições de contato nas análises. Foram realizados experimentos em laboratório para validar o modelo proposto, tendo sido obtidos resultados experimentais satisfatórios.

## 1.2 Objetivos do Estudo

O objetivo geral da tese é analisar o comportamento dinâmico de uma máquina rotativa excitada pela base quando ocorre o contato mecânico entre o disco e uma barreira física. Uma descrição detalhada dos objetivos específicos é apresentada a seguir:

1. Expandir as linhas de pesquisa em máquinas rotativas do LMEst;
2. Apresentar de forma clara e abrangente o modelo matemático do sistema rotativo e do efeito do contato, derivado a partir das equações de Lagrange e do método de elementos finitos;
3. Analisar o comportamento dinâmico de uma máquina rotativa considerando excitações oriundas de sua base e o contato gerado a partir destas excitações;
4. Validar experimentalmente os resultados obtidos com o modelo de elementos finitos adotado para diferentes condições de operação do rotor e excitação da base.

## 1.3 Organização do Trabalho

Este trabalho foi dividido em seis capítulos; neste primeiro capítulo foi apresentada uma contextualização do tema principal da tese. Segue uma breve descrição dos outros capítulos:

- **Capítulo 1 - Introdução**
- **Capítulo 2 - Revisão Bibliográfica:** Neste capítulo foi realizado um levantamento bibliográfico acerca dos fenômenos envolvidos no comportamento dinâmico de rotores embarcados e do fenômeno de contato em máquinas rotativas.

Foram estudados os modelos de elementos finitos de máquinas rotativas, modelos de contato, as condições de operação de rotores embarcados, as forças exercidas sobre o sistema nesta condição, além da análise acerca das publicações científicas relevantes na área;

- **Capítulo 3 - Modelo Matemático de Rotores Embarcados e Contato:** As etapas do desenvolvimento do modelo de elementos finitos aplicado aos rotores embarcados são descritas neste capítulo. O equacionamento dos modelos de contato e como estes foram inseridos no modelo da máquina rotativa embarcada são apresentados.
- **Capítulo 4 - Análise Numérica do Modelo Matemático:** Este capítulo compreende simulações numéricas com o modelo do rotor embarcado considerando os efeitos provocados pelo contato. Comparação entre os modelos de contato propostos, análise da representatividade do modelo matemático para diferentes tipos de excitação, amplitude e frequência são estudadas.
- **Capítulo 5 - Resultados Experimentais:** Estuda-se aqui o comportamento dinâmico de uma máquina rotativa embarcada quando da ocorrência de contato. Uma máquina rotativa foi projetada e construída visando representar um sistema rotativo embarcado na presença de forças de contato. Os experimentos foram realizados com um excitador eletrodinâmico de 2 graus de liberdade. Experimentos iniciais ( $FRFs$  e respostas de vibração) são realizados para validar o modelo numérico sem excitações pela base. Em seguida, diferentes condições de operação e excitações pela base são analisadas para correlacionar os modelos implementados (rotor + contato) com os dados experimentais. As respostas experimentais de vibração são comparadas com os resultados obtidos a partir do modelo de elementos finitos do rotor, considerando as mesmas condições de operação e excitação aplicadas na bancada de teste, tendo como objetivo validar o modelo numérico implementado.
- **Capítulo 6 - Conclusão:** As considerações finais acerca do trabalho realizado, publicações e perspectivas de trabalhos futuros são apresentadas nesta etapa.



# Capítulo 2

## Revisão Bibliográfica

### 2.1 Rotores Embarcados

Uma máquina rotativa é considerada embarcada quando em sua modelagem excitações que ocorrem pela sua base são inseridas no modelo. Duchemin, Berlioz e Ferraris (2006) foram um dos primeiros a estudar esses efeitos no comportamento dinâmico de sistemas rotativos. Os trabalhos de Al-Wedyan, Tahat e Mutasher (2008), El-Saeidy e Sticher (2010) e Dakel, Baguet e Dufour (2014) contribuíram para o avanço das pesquisas nessa temática dentro da área de dinâmica de máquina rotativas.

Yi, Qiu e Han (2018) investigaram em seu trabalho os efeitos provocados por movimentos angulares da base causam nas respostas dinâmicas de um rotor assimétrico. As seções transversais do disco e do eixo foram consideradas assimétricas. A base rígida do sistema gira em torno dos três eixos de coordenadas cartesianas com velocidades angulares que variam no tempo. Foi utilizado um modelo de elementos finitos para obter a equação do movimento para todos os componentes da máquina rotativa (disco e elementos de eixo assimétricos).

Devido às assimetrias do rotor e dos movimentos angulares da base rígida, o modelo de elementos finitos possui coeficientes de massa, efeito giroscópio e rigidez que são variáveis em relação ao tempo. Regiões de instabilidade paramétrica, órbitas, respostas sob excitação, assimetria do eixo e movimentos angulares de base foram discutidas e comparadas com referências. As excitações periódicas de base mudam os espectros de frequência, além do aparecimento de múltiplas ressonâncias.

Liu et al. (2018) argumentaram em seu trabalho que em uma máquina rotativa

embarcada com mancais hidrodinâmicos, as forças hidrodinâmicas do mancal são afetadas pelo acoplamento entre o rotor e o movimento da base. As equações do movimento dos subsistemas disco rígido e eixo elástico são derivadas do princípio de Lagrange e o método dos elementos finitos. A modelagem dos mancais é baseada na hipótese do mancal curto e na condição de contorno de Hahn, sendo que um modelo modificado da força do filme de óleo do mancal hidrodinâmico é derivado pela introdução da velocidade do movimento pela base. Sob excitações senoidais e de translação da base, as respostas dinâmicas do sistema mancal e rotor embarcado são calculadas por um algoritmo de integração de passo de tempo conforme proposto por Newmark.

Foram utilizadas resposta no tempo, transformadas rápidas de Fourier, órbitas e mapas de Poincaré, para analisar o comportamento dinâmico deste sistema; além disso, foram comparados resultados com o modelo de força do filme de óleo de Capone. Foi investigada a influência da amplitude e frequência no modelo de força do filme de óleo, mostrando que a velocidade convectiva dos mancais não deve ser ignorada em alguns casos extremos.

Nos meios de transporte, dispositivos como turbo compressores automotivos e turbinas de aeronaves são exemplos de rotores embarcados. As vibrações desses rotores são induzidas não apenas pela excitação da massa de desbalanceamento, mas também por vários movimentos de sua base. A dinâmica de um rotor embarcado montado em mancais hidrodinâmicos de comprimento finito foi investigada na presença de movimentos da base que criam excitações paramétricas de múltiplas frequências (BRIEND et al., 2020).

O modelo de rotor embarcado é desenvolvido e baseado no elemento finito de viga giroscópico de Timoshenko com dois nós e seis graus de liberdade por nó para movimentos 3D (deslocamentos transversais e axiais, bem como rotações devido à flexão e à torção). As equações do movimento destacam termos paramétricos variantes no tempo devido ao desequilíbrio de massa, às rotações da base, ao acoplamento entre ambos os fenômenos e à combinação da massa de desbalanceamento e translações do suporte.

Esses termos paramétricos podem gerar uma instabilidade dinâmica pois contribuem na geração de excitação interna. Para os resultados apresentados, foram utiliza-

das excitações paramétricas de frequência única e multifrequencial. Portanto, Briend et al. (2020) avaliaram o rotor sendo excitado por rotações senoidais simples e combinadas ou por um desequilíbrio de massa rotativa combinado com translações de suporte senoidais para examinar a estabilidade do ponto de equilíbrio estático através da teoria de Floquet.

Hou et al. (2019) avaliaram um complexo comportamento de bifurcação causado por manobras de voo em um sistema de rotor de aeronave com não linearidade do tipo Duffing. Durante as manobras de voo pode acontecer o fenômeno de impacto/atrito, acompanhado de comportamentos não lineares complexos, como movimentos periódicos, sub-harmônicos e quase periódicos. A formulação de um método de equilíbrio harmônico combinado com um procedimento de domínio alternado de frequência/tempo (método HB-AFT) para derivar as soluções periódicas aproximadas do sistema foi elaborada. As ramificações da solução para o movimento periódico 1-T (oscilação síncrona) e o movimento periódico 2-T (oscilação sub-harmônica) são rastreados. A teoria de Floquet auxilia na análise das estabilidades das soluções periódicas obtidas.

As mudanças no número ou na estabilidade das soluções levam à identificação dos pontos de bifurcação, que podem ser classificados qualitativamente em três tipos, a saber: ponto de bifurcação de Neimark-Sacker (NSBP), ponto de bifurcação de Hopf quasi-periódico (QPHBP) e ponto de bifurcação sela (SNBP). Além disso, a excitação pela base constante afeta significativamente a instabilidade, bem como a bifurcação do sistema rotativo. No caso de uma excitação menor e constante, a região de rotação em relação aos movimentos quase periódicos pode desaparecer, acompanhada de um PBP (*pitchfork bifurcation point*) em vez dos dois NSBPs e um QPHBP. A análise de bifurcação fornece uma visão detalhada do fenômeno não linear complexo induzido pela excitação. Os resultados obtidos também contribuem para um melhor entendimento dos comportamentos dinâmicos não lineares dos sistemas de rotores de aeronaves durante as manobras de voo.

Os mancais magnéticos ativos (AMBs) estão sendo continuamente explorados para aplicações industriais devido a sua operação sem atrito. Para aplicações deste mancais em motores de uma aeronave ou no eixo propulsor de um navio, este sistema estaria sujeito a excitações paramétricas devido à base móvel do sistema que, por sua

vez, causa instabilidade no mesmo.

Soni, Dutt e Das (2019) estudaram máquinas rotativas com AMB com foco na estabilidade paramétrica. Uma nova lei de controle baseada na relação constitutiva de um material viscoelástico, chamada lei de controle de quatro elementos, foi desenvolvida. Devido à presença de termos da excitação de base nas matrizes que descrevem o movimento do sistema, este pode ser classificado como um sistema periódico linear. A análise de estabilidade é realizada usando a teoria de Floquet-Liapunov sobre estabilidade de um sistema periódico, para a qual uma matriz de transição de estado aproximada é encontrada primeiro e a estabilidade do sistema é então decidida com base no valor absoluto do autovalor. Três diferentes movimentos de base (*roll*, *pitch* e *yaw*) foram considerados para avaliar o desempenho da lei de controle proposta. Os resultados das simulações revelam que a lei de controle proposta tem melhores características de estabilidade do que a lei de controle proporcional-integral-derivada (PID).

De acordo com Jarroux et al. (2020) a estabilidade das máquinas rotativas é um grande desafio para as unidades flutuantes de produção e armazenamento de petróleo (FPSO), turbinas a vapor ou compressores centrífugos. O uso de mancais magnéticos ativos (AMB) em turbomáquinas permite a operação em altas velocidades, como ocorre em sistemas mecatrônicos para diagnósticos, contribuindo inclusive para diminuir toda a área de instalação dos equipamentos. As excitações de base podem induzir o contato da máquina com os seus mancais de escora do tipo rolamento (TDB), que são utilizados em casos de emergência quando os mancais AMB falham.

Em seu estudo, Jarroux et al. (2020) avaliaram a estabilidade de uma máquina rotativa com mancais magnéticos durante excitações pela sua base. Foi analisado o efeito combinado das forças de desbalanceamento, movimento da base e não linearidades de contato. Além disso, foi avaliado em uma bancada de teste a capacidade de um controlador proporcional-integral-derivado (PID) em manter o sistema rotativo estável. Os resultados mostraram que o controlador foi eficiente durante e após a aplicação das excitações. Os mancais magnéticos utilizados foram superdimensionados para a bancada de teste estudada. Um projeto novo foi realizado utilizando os dados do sistema, requerendo uma nova discussão sobre a capacidade do controlador para esta nova configuração do sistema.

Yang et al. (2020) propuseram um método prático para avaliar a robustez e estabilidade de máquinas rotativas, utilizando excitação eletromagnética e funções de resposta em frequência (*FRFs*) do sistema durante o seu funcionamento. As excitações foram geradas a partir de um motor com excentricidade estática e adicionando uma corrente senoidal ao motor. O modelo proposto foi validado utilizando uma bancada apoiada por mancais magnéticos radiais. As *FRFs* medidas utilizando a excitação eletromagnética foram utilizadas para determinar as frequências naturais e os fatores de amortecimento. A eficácia em medir as características dinâmicas do sistema rotativo sob várias condições de rotação foi discutida neste trabalho.

Um sistema rotativo modelado por forças não lineares de rolamento e considerando excitação pela base foi modelado a partir do método dos elementos finitos, e sua resposta sob excitação pela base foi estudada por Feng et al. (2020). Os resultados mostram que a resposta do rotor é a superposição da resposta ao impulso básico e a resposta ao desbalanceamento. A energia de excitação relacionada ao impulso pode ser dispersa enquanto a velocidade de rotação e a frequência do impulso estão próximas uma da outra. Quando a diferença de fase da excitação por desbalanceamento é de  $180^\circ$ , a amplitude da resposta do sistema foi a menor encontrada. A confiabilidade do modelo de rotor estudado foi verificada por meio de experimentos.

A tecnologia de mancais magnéticos ativos (AMB) permite as máquinas rotativas, operarem em altas velocidades de operação, montadas sobre mancais quase sem atrito. No caso de fortes excitações pela base, o rotor pode entrar em contato com seus mancais de escora (TDBs), que são usados como segurança no caso de falha do fornecimento de energia que garante o funcionamento adequado dos AMBs (JARROUX et al., 2021). Uma investigação numérica e experimental dessas condições operacionais onde vibrações induzidas por atrito podem desencadear instabilidades nos AMB foi realizada por Jarroux et al. (2021).

Um modelo de elementos finitos do sistema (rotor-AMB-TDB) foi desenvolvido e validado experimentalmente usando um equipamento em escala de laboratório e montado sobre um excitador eletrodinâmico (*shaker*). Primeiramente foi realizada a validação do modelo sem considerar as excitações pela base, analisando as respostas devido ao desbalanceamento e quando o sistema toca no TDB. Em seguida foram feitas análises no domínio do tempo e da frequência diante de excitações pela base

harmônicas e do tipo impulso. Nos testes com excitação harmônica, foram observadas combinações particulares dos movimentos da base e da dinâmica rotativa do sistema dependendo da relação frequência entre o movimento da base e a velocidade de rotação. As interações TDB produziram achatamento das órbitas do rotor. Apesar de algumas instabilidades transitórias, o controlador foi capaz de manter o sistema estável e a confiabilidade do modelo permaneceu próxima dos resultados experimentais.

Chen et al. (2022) comentam em seu trabalho que o número de pesquisas sobre o comportamento dinâmico do sistema com rotor simples sob excitação pela base cresce e que poucos estudos trataram da dinâmica de sistemas de rotor duplo, especialmente os sistemas de rotor duplo contra-rotativos usados em motores de avião. O desbalanceamento de massa e a gravidade são excitações inevitáveis para a maioria das máquinas rotativas. Foram investigadas as propriedades de vibração de um sistema de rotor duplo contra-rotativo com os efeitos acoplados de movimentos de base, desbalanceamento e gravidade. Utilizando o princípio de Lagrange associado ao método dos elementos finitos, um modelo geral para os sistemas de rotor duplo com excitações pela base foi estabelecido usando elementos de viga de Timoshenko. Os resultados revelaram que diferentes modos de precessão ( $FW$  e  $BW$ ) podem ser mutuamente excitados. Este estudo contribui para o melhor entendimento deste sistema complexo de rotor duplo excitado pela base.

## 2.2 Contato em Máquinas Rotativas

O trabalho de Dimarogonas e Sandor (1969) foi um dos primeiros dedicados ao contato em máquinas rotativas. Foi avaliada a dinâmica do sistema quando as forças de atrito entre o rotor e o estator causam calor e instabilidade nas respostas de vibração. Neste contexto, o efeito do atrito é observado a mais de 40 anos e vários pesquisadores fizeram testes e prepararam discussões analíticas simplificadas do problema sendo que, à época, uma investigação numérica e experimental abrangente ainda não tinha sido realizada (DIMAROGONAS; SANDOR, 1969). Foi proposto neste trabalho obter uma melhor compreensão deste fenômeno através de uma análise detalhada utilizando um modelo aceitável do efeito de atrito. As características do atrito no contato, a resposta dinâmica do rotor, e os mancais são responsáveis pelo controle do

fenômeno.

O Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (INSA-Lyon) já realizou alguns estudos envolvendo o contato em máquinas rotativas. Legrand (2005) apresentou na sua tese resultados que preveem uma velocidade de rotação crítica do motor acima da qual, e sob certas condições, as amplitudes de vibração se tornam grandes ocasionando o contato. Além disso, o estudo permitiu uma melhor compreensão do fenômeno durante a interação.

No trabalho de doutorado de Duran (2014) foi estudado a dinâmica multi-contato não linear de conjuntos rotor/estator, e aplicou-se estes conceitos em turbo-motores de helicópteros. Foi realizada uma investigação dos modelos que exprimem o contato rotor-estator, analisando diferentes parâmetros do sistema. O método de elementos finitos foi utilizado para realizar a modelagem dos diferentes rotores analisados.

Jarroux (2017) investigou o fenômeno de contato de forma semelhante aos trabalhos citados anteriormente, situação em que a máquina rotativa era suportada por mancais magnéticos. Foi avaliada a capacidade dos controladores PID utilizados nestes sistemas e o comportamento do rotor nas situações de *run-up* e *run-down* quando o mancal de escora é mais solicitado.

De acordo com Tannous et al. (2015), as análises dinâmicas do atrito rotor-estator eram naquela época realizadas usando modelos 1D. O custo computacional dessas análises era pequeno e não trazia confiabilidade para os resultados. Neste trabalho foram analisados e comparados os resultados de contato rotor-estator 1D e 3D, para diferentes condições de contato. Uma massa de desbalanceamento foi utilizada para causar as vibrações da máquina rotativa em uma dada velocidade. Avaliando as órbitas do rotor verificou-se que as respostas dos modelos 3D e 1D ficaram próximas. O modelo 1D sofre com suas limitações; já o modelo 3D permitiu melhorar significativamente os resultados de simulação.

Xu et al. (2016) desenvolveram um modelo de falha para contato em um sistema de rotores conectados. Para isso, foi utilizada uma placa elástica como estrutura de contato. A deformação elástica da chapa, penetração de contato, e o suporte da placa durante o atrito da chapa com o disco foram considerados na modelagem. A teoria de contato de Hertz e o modelo de Coulomb foram empregados para os cálculos da força de atrito/contato e posteriormente inseridas na modelagem do suporte da

placa. Um modelo unidimensional de elementos finitos do sistema duplo de rotores foi utilizado para obter as respostas dinâmicas durante o atrito entre o disco e a chapa elástica. Os resultados apresentados no espectro de frequência mostram que durante o impacto, além das frequências fundamentais do sistema rotativo, aparecem múltiplas frequências características do atrito entre o rotor e a chapa.

Um rotor do tipo Jeffcott modificado considerando as condições de deformação torcional e o contato rotor-estator é objeto de estudo do trabalho científico de Vlajic, Champneys e Balachandran (2017). Analisou-se o rotor para as condições de *FW* (*forward whirling*) e *BW* (*backward whirling*) com contato contínuo. Os modelos de atrito de Coulomb simples e uma lei de Coulomb generalizada com dependência cúbica da velocidade de escorregamento relativa foram utilizadas nas análises. Análises numéricas de bifurcação foram feitas para mapear as regiões entre a velocidade de rotação e o coeficiente de atrito, onde existe contato rotor-estator.

Em máquinas rotativas o fenômeno de contato entre o rotor e o estator é caracterizado por um comportamento de ricochete (JIE et al., 2018). Nessas condições de impacto intermitente a restrição de contato insere no sistema uma rigidez não-suave (*non-smooth stiffness*) quando ocorre o contato. Essa alta rigidez inserida pode causar efeitos nas características modais do sistema.

O trabalho de (JIE et al., 2018) avalia esta condição utilizando resultados numéricos e experimentais. A teoria de Floquet e o método de Hill são empregadas para obter as características modais do rotor. Os resultados apresentados mostram que a restrição não-suave produzida pelo impacto intermitente aumenta significativamente as frequências modais e as velocidades críticas da máquina rotativa. A restrição não-suave pode causar instabilidade no rotor, sendo que tais regiões de instabilidade dependem das variáveis: rigidez média da restrição, folga e tempo de contato.

Quando um rotor flexível entra em contato com seu estator, não-linearidades são induzidas pelo contato podendo resultar em uma grande variação nas respostas de deslocamento do rotor (EHEHALT et al., 2019). Os tipos de respostas que uma máquina rotativa pode apresentar e que são relatadas e analisadas na literatura incluem movimentos síncronos do rotor, *FW* e *BW*, movimentos sub e super-harmônicos e movimentos caóticos. Uma investigação experimental de Eehalt et al. (2019) estudou os padrões de movimento mencionados. Funções de resposta em frequência,



respostas de vibração e órbitas são analisadas para as condições de aceleração e desaceleração considerando a condição de contato.

Com o objetivo de entender o mecanismo de impacto em um ponto fixo em motores aeronáuticos, Wang, Jiang e Xu (2020) desenvolveram um rotor duplo, apoiado por mancais, massas de desbalanceamentos inseridas no disco e um ponto de contato/atrito. O modelo de elementos finitos foi baseado no elemento de viga de Timoshenko, e os efeitos giroscópico, inércia rotativa, deformações e cisalhamento são considerados na modelagem. Um modelo de contato foi desenvolvido para estimar as forças no ponto de contato e o modelo de Coulomb é utilizado para descrever o atrito.

As equações do movimento do sistema rotativo duplo foram resolvidas numericamente pelo método de Runge-Kutta. Os resultados numéricos mostram uma boa concordância com os resultados experimentais. Além disso, sob a condição de contato novos harmônicos aparecem quando comparados com os resultados sem contato.

Agnalt et al. (2020) relatam em seu trabalho que nos últimos anos foram observadas avarias em usinas hidrelétricas com rotores Francis de baixa velocidade. Nesses rotores o aparecimento de forças externas é causado por flutuações na pressão do fluido; já essas flutuações se devem à interação rotor-estator. Uma bancada de testes foi instrumentada para avaliar condições diferentes de pressão do fluido e ângulo da pá guia para explorar o comportamento dinâmico desse tipo de equipamento.

As operações de perfuração de petróleo ou extração geotérmica utilizam uma estrutura esbelta introduzida no interior do poço de perfuração, suspensa em uma torre e acionada por uma mesa rotativa na superfície. A estrutura de perfuração consiste em uma série de tubos pesados de perfuração que vão até o fundo do poço. O processo de perfuração envolve fenômenos dinâmicos não lineares, como *bit-bounce* e *stick-slip*, causados por múltiplos contatos da coluna de perfuração e o fluxo pulsante de lama (NGUYEN et al., 2020).

Os estados pré-carregados da coluna de perfuração devido à curvatura do poço e contatos entre o sistema e o poço e interações fluido-estrutura são determinados e levados em consideração nas análises dinâmicas do trabalho de Nguyen et al. (2020). A dinâmica transiente da coluna de perfuração é simulada e o movimento orbital de vários nós é analisado. A convergência dos resultados e a redução do tempo computacional obtidos pelo método CB são investigados e discutidos. O modelo de contato

apresentado por este artigo científico se assemelha com um dos modelos de contato apresentados neste trabalho.

Briend et al. (2021) em um trabalho recente estudaram o contato rotor-estator, causado por excitações de base. Até agora, essa instabilidade, em particular no caso do atrito direto entre o eixo e o estator, foi mostrada apenas por experimentos quando uma perturbação devido a um desequilíbrio de massa durante a aceleração ou desaceleração causa o impacto. O objetivo do trabalho foi demonstrar que este fenômeno pode também ser causado por forças externas provenientes do movimento da base. Para esta análise foram considerados resultados numéricos e experimentais.

Um modelo de elementos finitos do rotor combinando excitações pela base com o impacto (contato) eixo-estator é proposto pela primeira vez. Este modelo é validado com uma bancada de máquina rotativa suportada por mancais hidrodinâmicos impondo um movimento harmônico na base e montada em um sistema hidráulico de excitação multiaxial. A influência de parâmetros importantes no comportamento dinâmico do sistema também é avaliado, como as não linearidades do rolamento hidrodinâmico, a amplitude e a direção das translações da base e o coeficiente de atrito seco.

Phadatare e Pratiher (2021) investigaram os fenômenos de contato rotor-carcaça de um sistema rotativo em alta velocidade. Em sua análise foi considerado um sistema constituído por um rotor com eixo flexível, um disco rígido, massa de desbalanceamento e o contato entre o disco e a carcaça. Um modelo matemático não-linear foi elaborado para estudar a estabilidade do sistema em regime permanente. Estudou-se o comportamento do rotor analisando os diagramas de bifurcação variando os parâmetros de atrito, coeficiente de flexão, velocidade de rotação do eixo e a massa de desbalanceamento. Quando o impacto entre o disco e a carcaça ocorre (condição de contato) sistema perde sua estabilidade levando ao aparecimento de respostas caóticas. Os resultados obtidos contribuem para prever e identificar as condições paramétricas nas quais o contato entre carcaça e disco não ocorrem.

Na literatura atual, trabalhos como o de Silva et al. (2022) estudam o fenômeno de contato em máquina rotativas. A detecção precoce do atrito na carcaça do rotor ajuda a evitar danos permanentes ou falhas catastróficas, economiza custos de manutenção e diminui o tempo de inatividade das máquinas rotativas. Em turbinas a gás,

a detecção do atrito só é possível com o uso de sensores na carcaça (SILVA et al., 2022).

Em trabalhos anteriores, o *Wavelet Synchrosqueezed Transform (WSST)* foi proposto para detecção do atrito em turbinas a gás utilizando os sinais medidos por um acelerômetro. Em busca de realizar detecções melhores, bancos de filtros adaptativos foram criados para separação dos efeitos do atrito dos sinais do acelerômetro. Os resultados obtidos do banco de filtros adaptativos mostram uma separação entre os regimes com atrito e sem atrito dentro de um conjunto de resultados experimentais medidos na máquina. Por fim, é demonstrado que a combinação do WSST e do filtro ortogonal adaptativo supera outras metodologias para a detecção precoce do atrito na carcaça do rotor.

Esta seção demonstra que o fenômeno de contato em máquinas rotativas vem sendo estudado amplamente ao longo dos anos. Diferentes modelos matemáticos são propostos para melhor representar a interação das superfícies envolvidas no contato/atrito. O desenvolvimento de novos modelos matemáticos tem como objetivo obter modelos mais precisos. Os equipamentos são atualizados constantemente como forma de melhorar o seu desempenho, portanto a folga entre o rotor e a carcaça é cada vez mais reduzida. Estes estudos ajudam a prever e controlar situações de risco durante o funcionamento destes sistemas mecânicos, tão comumente utilizados no setor industrial. Deste modo, a prevenção de desgastes precoces e quebras prematuras levam a um melhor acompanhamento da vida útil destes equipamentos.

Nota-se que é pequeno o número de trabalhos que aborda a temática desta tese, que consiste na análise teórica e experimental de rotores embarcados com contato mecânico no disco.

# Capítulo 3

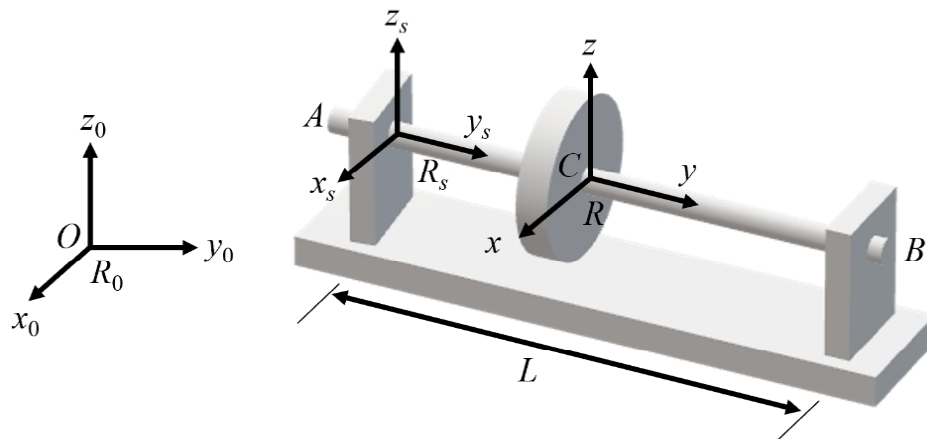
## Modelo Matemático de Rotores Embarcados Quando da Ocorrência de Contato

Os conceitos associados ao modelo de elementos finitos de rotores embarcados são apresentados neste capítulo. As equações de Lagrange e o método de elementos finitos são utilizados para obter as equações do movimento do sistema rotativo embarcado. Além disso, será apresentada a formulação de dois modelos de contato mecânico.

### 3.1 Rotores Embarcados

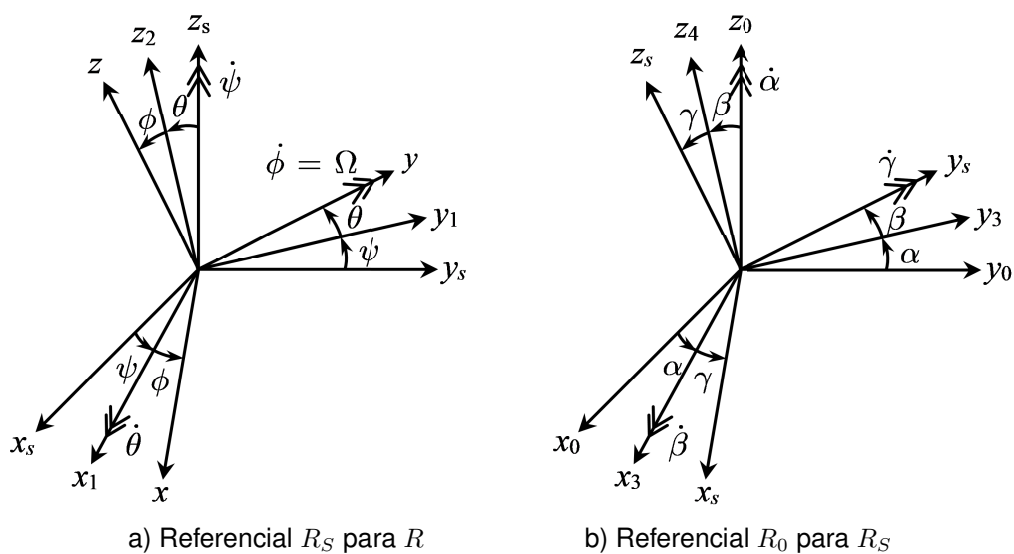
#### 3.1.1 Energias Cinética e Potencial

O comportamento dinâmico de máquinas rotativas de base fixa pode ser representado adotando dois referenciais, a saber, o referencial inercial  $R_0(x_0, y_0, z_0)$  e o referencial móvel  $R(x, y, z)$  fixo ao rotor (disco). Entretanto, um eixo de referência adicional  $R_S(x_S, y_S, z_S)$  fixo a base do rotor, deve ser considerado na representação de rotores embarcados. A Fig 3.1 mostra os três eixos de referência (SOUSA et al., 2017).



**Figura 3.1.** Representação esquemática de um rotor embarcado: referencial inercial  $R_0(x_0, y_0, z_0)$ , referencial móvel da base  $R_S(x_s, y_s, z_s)$  e o referencial móvel do disco  $R(x, y, z)$ .

Os ângulos de Euler são usados para descrever a orientação ao longo dos três sistemas de coordenadas. Nesse caso, o movimento do referencial  $R$  (disco) em relação ao referencial  $R_S$  (base do rotor, ver Fig. 3.2a) é descrito pelos ângulos:  $\psi$  (rotação em torno de  $z_s$ , Eq. (3.1)),  $\theta$  (rotação em torno de  $x_i$ ; eixo intermediário  $x$ , Eq. (3.2)) e  $\phi$  (rotação em torno de  $y$ , Eq. (3.3)). Diferentemente, o movimento do referencial  $R_S$  (base do rotor) em relação ao referencial  $R_0$  (inercial) é definido pelos ângulos:  $\alpha$  (rotação em torno de  $z_0$ , Eq. (3.4)),  $\beta$  (rotação em torno de  $x_i$ ; eixo intermediário  $x$ , Eq. (3.5)) e  $\gamma$  (rotação em torno de  $y_s$ , Eq. (3.6); ver Fig. 3.2b).



**Figura 3.2.** Transformação dos referenciais do disco para o inercial.

$$Rot_{z_s} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1) \quad Rot_{x_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$Rot_y = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$Rot_{z_0} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4) \quad Rot_{x_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$Rot_{y_s} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & 0 & \sin(\gamma) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\gamma) & 0 & \cos(\gamma) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Essas rotações permitem o cálculo da velocidade angular no referencial  $R$  descrita no referencial  $R_S$ , sendo dada pela Eq. (3.7), enquanto que a velocidade angular do referencial  $R_S$ , descrita no sistema de coordenadas  $R_0$ , é escrita conforme a Eq. (3.8). Conseqüentemente, é possível encontrar a velocidade angular do referencial  $R$  (fixo ao disco), descrita no referencial  $R_0$  (inercial), dada pela Eq. (3.9).

$$\Omega_R^{R_S} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \cos \phi - \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

$$\Omega_{R_S}^{R_0} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\beta} \cos \gamma - \dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma \\ \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta \\ \dot{\beta} \sin \gamma + \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha}_S \\ \dot{\beta}_S \\ \dot{\gamma}_S \end{array} \right\} \quad (3.8)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_R^{R_0} = \boldsymbol{\Omega}_{R_S}^{R_0} + \boldsymbol{\Omega}_R^{R_S} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

onde (  $\dot{\phantom{x}}$  ) indica a primeira derivada com relação ao tempo.

As coordenadas  $x_A$ ,  $y_A$  e  $z_A$  descrevem a posição da origem  $A$  do referencial da base do rotor (ver Fig. 3.1) no eixo de referência  $R_0$  (Eq. (3.10)). O mesmo vetor representado no referencial móvel  $R_S$  (disco), é dado pela Eq. (3.11).

$$\mathbf{r}_{OA}^{R_0} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{r}_{OA}^{R_S} = \begin{pmatrix} (x_A \cos \alpha + y_A \sin \alpha) \cos \gamma - [z_A \cos \beta + (x_A \sin \alpha - y_A \cos \alpha) \sin \beta] \sin \gamma \\ z_A \sin \beta - (x_A \sin \alpha - y_A \cos \alpha) \cos \beta \\ (x_A \cos \alpha + y_A \sin \alpha) \sin \gamma + [z_A \cos \beta + (x_A \sin \alpha - y_A \cos \alpha) \sin \beta] \cos \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

O vetor que dá a posição do ponto  $C$  (centro do disco) em relação ao ponto  $A$  (origem do referencial móvel da base do rotor) e o ponto  $O$  (origem do referencial inercial) são apresentados pela Eqs. (3.12) e (3.13), respectivamente, conforme descrito no sistema de referência  $R_S$ .

$$\mathbf{r}_{AC}^{R_S} = \begin{pmatrix} u \\ y \\ w \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{r}_{OC}^{R_S} = \mathbf{r}_{OA}^{R_S} + \mathbf{r}_{AC}^{R_S} = \begin{pmatrix} X + u \\ Y + y \\ Z + w \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

onde  $u$  e  $w$  são os deslocamentos laterais do eixo descritos no referencial  $R_S$  ao longo das direções  $x_S$  e  $z_S$ , respectivamente, e  $y$  é a posição do disco ao longo da direção  $y_S$ .

Na Eq. (3.14) é apresentada a energia cinética do disco ( $T_D$ ).

$$T_D = \frac{1}{2} m_D (\mathbf{v}_C^{R_S})^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_R^{R_0} I_D \boldsymbol{\Omega}_R^{R_0} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{v}_C^{R_S} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_{OC}^{R_S}) + \boldsymbol{\Omega}_R^{R_0} \times \mathbf{r}_{OC}^{R_S} = \begin{Bmatrix} \dot{X} + \dot{u} + \dot{\beta}_S (Z + w) - \dot{\gamma}_S (Y + y) \\ \dot{Y} + \dot{\gamma}_S (X + u) - \dot{\alpha}_S (Z + w) \\ \dot{Z} + \dot{w} + \dot{\alpha}_S (Y + y) - \dot{\beta}_S (X + u) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{v}_C \\ \dot{w}_C \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

$$I_D = \begin{bmatrix} I_{Dt} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Dp} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dt} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

onde  $m_D$  é a massa do disco,  $\mathbf{v}_C^{R_S}$  é velocidade absoluta do ponto  $C$ ,  $\boldsymbol{\Omega}_R^{R_0}$  é o vetor da velocidade angular (Eq. (3.9)). O momento de inércia de massa do disco  $I_D$  na Eq. (3.16) é composto pelos momentos de inércia de massa do disco relacionados com as direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente (referencial móvel  $R$ ; ver Fig. 3.1). Os momentos de inércia do disco são dados pelos momentos de inércia lateral  $I_{Dt}$  e o polar  $I_{Dp}$ .

A energia cinética do eixo ( $T_S$ ) é dada pela Eq. (3.17)

$$T_S = \frac{1}{2} \rho S \int_0^L (\dot{u}_S^2 + \dot{v}_S^2 + \dot{w}_S^2) dy + \frac{1}{2} \rho \int_0^L [I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2] dy \quad (3.17)$$

onde  $\rho$  é a densidade do material do eixo,  $S$  é a seção transversal de área do eixo,  $L$  é o comprimento do eixo e  $\dot{u}_S$ ,  $\dot{v}_S$  e  $\dot{w}_S$  são obtidas de forma semelhante a Eq. (3.15). Os momentos de inércia de área do eixo  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$  são relacionados com as direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

A Fig. 3.3 representa uma massa de desbalanceamento inserida no disco.



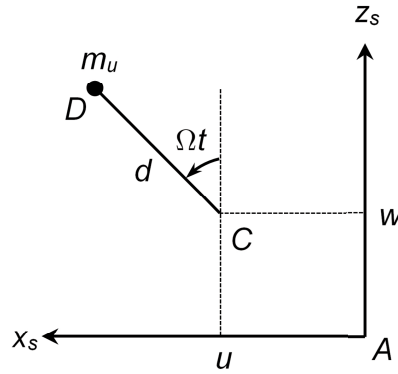


Figura 3.3. Massa de desbalanceamento.

A energia cinética da massa de desbalanceamento ( $T_u$ ) é mostrada a seguir:

$$T_u = \frac{1}{2} m_u (\mathbf{v}_D^{R_0})^2 \quad (3.18)$$

$$\mathbf{v}_D^{R_S} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_{OD}^{R_S}) + \boldsymbol{\Omega}_{R_S}^{R_0} \times \mathbf{r}_{OD}^{R_S} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{X} + \dot{u} + d\Omega \cos \Omega t + \dot{\beta}_S (Z + w + d\Omega \cos \Omega t) - \dot{\gamma}_S (Y + y) \\ \dot{Y} + \dot{\gamma}_S (X + u + d\Omega \sin \Omega t) - \dot{\alpha}_S (Z + w + d\Omega \cos \Omega t) \\ \dot{Z} + \dot{w} - d\Omega \sin \Omega t + \dot{\alpha}_S (Y + y) - \dot{\beta}_S (X + u - d\Omega \sin \Omega t) \end{array} \right\} \quad (3.19)$$

A variável  $t$  representa o tempo e  $d$  é a distância da massa de desbalanceamento  $m_u$  a partir do centro geométrico do eixo na posição do disco. A velocidade absoluta da massa de desbalanceamento (ponto  $D$ ) é dada por  $\mathbf{v}_D^{R_S}$  e é escrita no referencial  $R_S$ .

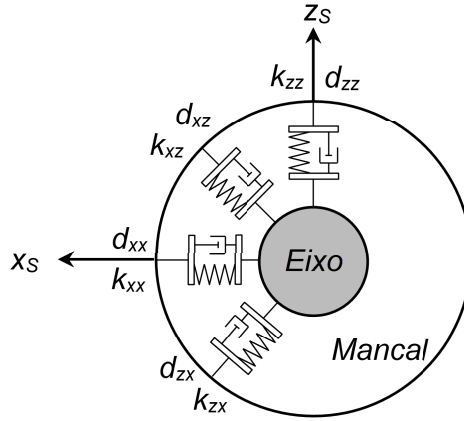
De acordo com (DUCHEMIN; BERLIOZ; FERRARIS, 2006), o movimento da base do rotor não muda a energia potencial do eixo ( $U$ ). A energia potencial depende somente do movimento lateral do eixo (deslocamentos  $u$  e  $w$ ), os quais são obtidos em relação à base do rotor. Assim a energia potencial é dada pela Eq. (3.20).

$$U = \frac{1}{2} EI \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (3.20)$$

onde  $E$  é o módulo de Young do material do eixo, e  $I$  é o momento de área da seção transversal do eixo.

Os mancais são representados por coeficientes de rigidez e amortecimento ( $k$  e

$c$ , respectivamente), introduzidos nas equações do movimento do rotor embarcado (referencial  $R_S$ ) a partir do trabalho virtual das forças de sustentação que atuam no eixo. A disposição dos coeficientes de rigidez ( $k_{xx}$ ,  $k_{xz}$ ,  $k_{zx}$  e  $k_{zz}$ ) e dos coeficientes de amortecimento ( $d_{xx}$ ,  $d_{xz}$ ,  $d_{zx}$  e  $d_{zz}$ ) entre o mancal e o eixo é ilustrada pela Fig. 3.4.



**Figura 3.4.** Coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais. Adaptado de: (CAVALINI et al., 2013).

O trabalho virtual das forças que atuam sobre o eixo é apresentado na Eq. (3.21), que está associado as direções  $x_S$  e  $z_S$ .

$$\delta \mathbf{W} = F_{mu} \delta u + F_{mw} \delta w \quad (3.21)$$

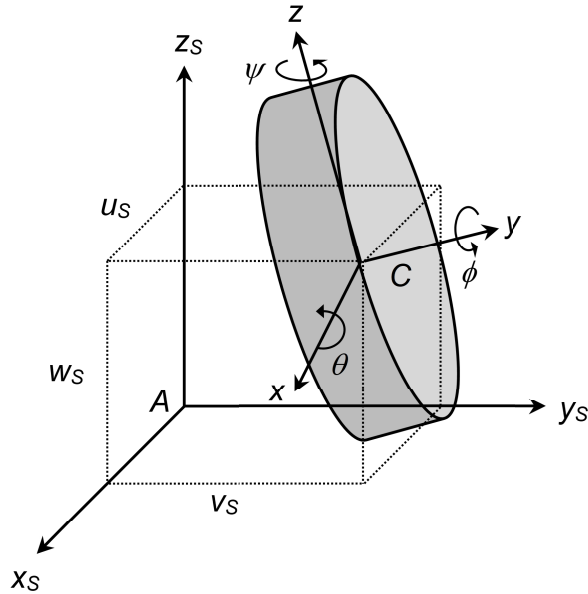
As forças de sustentação dos mancais  $F_{mu}$  e  $F_{mw}$  são dadas pela Eq. (3.22). As matrizes de rigidez ( $K_m$ ) e amortecimento ( $D_m$ ), mostradas na Eq. (3.22), são incorporadas convenientemente nas matrizes em nível global do modelo EF do rotor.

$$\begin{bmatrix} F_{mu} \\ F_{mw} \end{bmatrix} = - \underbrace{\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix}}_{K_m} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xz} \\ d_{zx} & d_{zz} \end{bmatrix}}_{D_m} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

### 3.1.2 Formulação em Elementos Finitos

Na formulação pelo método de elementos finitos o disco é considerado rígido e é modelado por um único elemento de massa  $m_D$  com centro de massa no ponto  $C$ . O elemento disco possui quatro graus de liberdade, dois associados à translação ao

longo das direções  $x$  e  $z$  do referencial  $R$  (deslocamentos laterais  $u$  e  $w$ ) e dois de rotação,  $\theta$  e  $\psi$ , como mostra a Fig. 3.5.



**Figura 3.5.** Representação do elemento de disco. Adaptado de: (CAVALINI et al., 2013).

A Eq. (3.23) apresenta o vetor dos graus de liberdade do disco. Assim, aplicando a equação de Lagrange em relação ao vetor de coordenada generalizada  $\mathbf{q}_D$ , obtém-se a matriz de inércia do disco  $\mathbf{M}_D$  e as matrizes adicionais  $\mathbf{D}_D^*$ ,  $\mathbf{K}_D^*$  e o vetor  $\mathbf{f}_D^*$  associadas ao movimento da base.

$$\mathbf{q}_D = \begin{bmatrix} u & w & \theta & \psi \end{bmatrix}^T \quad (3.23)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_D}{\partial \dot{\mathbf{q}}_D} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial \mathbf{q}_D} = \mathbf{M}_D \ddot{\mathbf{q}}_D + \mathbf{D}_D^* \dot{\mathbf{q}}_D + \mathbf{K}_D^* \mathbf{q}_D - \mathbf{f}_D^* \quad (3.24)$$

onde:

$$\mathbf{M}_D = \begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dt} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

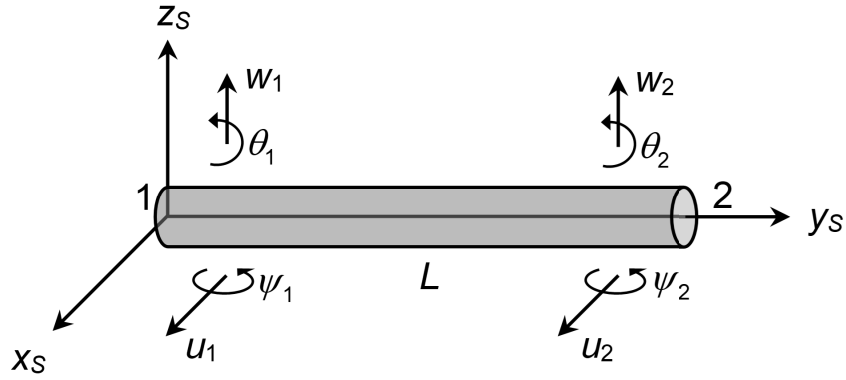
$$\mathbf{D}_D^* = \begin{bmatrix} 0 & 2\dot{\beta}_s m_D & 0 & 0 \\ -2\dot{\beta}_s m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\dot{\beta}_s I_{Dt} - \dot{\beta}_s I_{Dp} - I_{Dp}\Omega \\ 0 & 0 & -2\dot{\beta}_s I_{Dt} + \dot{\beta}_s I_{Dp} + I_{Dp}\Omega & 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{K}_D^* = \begin{bmatrix} (-\dot{\gamma}_s^2 - \dot{\beta}_s^2) m_D & (\dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s + \ddot{\beta}_s) m_D & 0 & 0 \\ (\dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s - \ddot{\beta}_s) m_D & (-\dot{\alpha}_s^2 - \dot{\beta}_s^2) m_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\dot{\gamma}_s^2 - \dot{\beta}_s^2) I_{Dt} + & (-\dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s + \ddot{\beta}_s) I_{Dt} + \\ & & (-\dot{\gamma}_s^2 + \dot{\beta}_s^2 + \dot{\beta}_s \Omega) I_{Dp} & \dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s I_{Dp} \\ 0 & 0 & (-\dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s - \ddot{\beta}_s) I_{Dt} + & (\dot{\alpha}_s^2 - \dot{\beta}_s^2) I_{Dt} + \\ & & (\dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s + \ddot{\beta}_s) I_{Dp} & (-\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2 + \dot{\beta}_s \Omega) I_{Dp} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{f}_D^* = \begin{bmatrix} [(-\dot{\gamma}_s^2 - \dot{\beta}_s^2)X + (\dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s + \ddot{\beta}_s)Z + (\dot{\alpha}_s \dot{\beta}_s - \ddot{\gamma}_s)Y + (\dot{\alpha}_s \dot{\beta}_s - \ddot{\gamma}_s)y - 2\dot{\gamma}_s \dot{Y} + 2\dot{\beta}_s \dot{Z} + \ddot{X}] m_D \\ [(\dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s - \ddot{\beta}_s)X + (-\dot{\alpha}_s^2 - \dot{\beta}_s^2)Z + (\dot{\gamma}_s \dot{\beta}_s - \ddot{\alpha}_s)Y + (\dot{\gamma}_s \dot{\beta}_s + \ddot{\alpha}_s)y + 2\dot{\alpha}_s \dot{Y} - 2\dot{\beta}_s \dot{X} + \ddot{Z}] m_D \\ (\dot{\gamma}_s \dot{\beta}_s + \ddot{\alpha}_s) I_{Dt} + (-\dot{\gamma}_s \dot{\beta}_s - \dot{\gamma}_s \Omega) I_{Dp} \\ (\dot{\gamma}_s - \dot{\alpha}_s \dot{\beta}_s) I_{Dt} + (\dot{\alpha}_s \dot{\beta}_s + \dot{\alpha}_s \Omega) I_{Dp} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

O modelo EF do eixo é derivado com base na teoria de viga de Euler-Bernoulli com seção transversal circular e diâmetro constante, conforme mostra o elemento finito de comprimento  $L$  apresentado na Fig. 3.6. O elemento finito do eixo possui dois nós, sendo que cada nó possui quatro graus de liberdade, sendo dois deslocamentos e duas rotações (deslocamentos  $u_1, u_2, w_1$  e  $w_2$ ; rotações  $\theta_1, \theta_2, \psi_1$  e  $\psi_2$ ).

O vetor nodal dos graus de liberdade do eixo é apresentado na Eq. (3.29). Foram adotadas as funções de forma hermitianas como mostra a Eq. (3.30). As equações de Lagrange aplicadas ao vetor de coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}_s$  são exibidas na Eq. (3.31).



**Figura 3.6.** Graus de liberdade associados ao elemento finito do eixo. Adaptado de: (CAVALINI et al., 2013).

$$\mathbf{q}_S = \left[ u_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad \psi_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \theta_2 \quad \psi_2 \right]^T \quad (3.29)$$

$$\mathbf{N}_1(y) = \left[ 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; \quad -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \quad \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \quad \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (3.30)$$

$$\mathbf{N}_2(y) = \left[ 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; \quad y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \quad \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \quad -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_S}{\partial \dot{\mathbf{q}}_S} \right) - \frac{\partial T_S}{\partial \mathbf{q}_S} = \mathbf{M}_S^* \ddot{\mathbf{q}}_S + \mathbf{D}_S^* \dot{\mathbf{q}}_S + \mathbf{K}_S^* \mathbf{q}_S - \mathbf{f}_S^* \quad (3.31)$$

As matrizes  $\mathbf{M}_S^*$ ,  $\mathbf{D}_S^*$ ,  $\mathbf{K}_S^*$  e o vetor  $\mathbf{f}_S^*$  são termos adicionais devido as excitações pela base, onde:

$$\mathbf{M}_S^* = \mathbf{M}_{S1} + \mathbf{M}_{S2} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{M}_{S1} = \frac{L\rho S}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{M}_{S2} = \frac{\rho I_t}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{D}_S^* = \mathbf{D}_{S1} + \mathbf{D}_{S2} \quad (3.35)$$

$$\mathbf{D}_{S1} = \frac{\rho \dot{\beta}_s S}{15L} \begin{bmatrix} 0 & \frac{78}{7} L^2 & \frac{11}{7} L^3 & 0 & 0 & \frac{27}{7} L^2 & -\frac{13}{14} L^3 & 0 \\ -\frac{78}{7} L^2 & 0 & 0 & \frac{11}{7} L^3 & -\frac{27}{7} L^2 & 0 & 0 & -\frac{13}{14} L^3 \\ -\frac{11}{7} L^3 & 0 & 0 & \frac{2}{7} L^4 & -\frac{13}{14} L^3 & 0 & 0 & -\frac{3}{14} L^4 \\ 0 & -\frac{11}{7} L^3 & -\frac{2}{7} L^4 & 0 & 0 & -\frac{13}{14} L^3 & \frac{3}{14} L^4 & 0 \\ 0 & \frac{27}{7} L^2 & \frac{13}{14} L^3 & 0 & 0 & \frac{78}{7} L^2 & -\frac{11}{7} L^3 & 0 \\ -\frac{27}{7} L^2 & 0 & 0 & \frac{13}{14} L^3 & -\frac{78}{7} L^2 & 0 & 0 & -\frac{11}{7} L^3 \\ \frac{13}{14} L^3 & 0 & 0 & -\frac{3}{14} L^4 & \frac{11}{7} L^3 & 0 & 0 & \frac{2}{7} L^4 \\ 0 & \frac{13}{14} L^3 & \frac{3}{14} L^4 & 0 & 0 & \frac{11}{7} L^3 & -\frac{2}{7} L^4 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{D}_{S2} = -\frac{\rho I_t \Omega}{15L} \begin{bmatrix} 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ 0 & -3L & -4L^2 & 0 & 0 & 3L & L^2 & 0 \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \\ 0 & -3L & L^2 & 0 & 0 & 3L & -4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{K}_S^* = \mathbf{K}_{S1} + \mathbf{K}_{S2} + \mathbf{K}_{S3} + \mathbf{K}_{S4} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{K}_{S1} = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} -156 \dot{\beta}_s^2 - 156 \dot{\gamma}_s^2 & 156 \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s & 22 L \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s & 22 L(\dot{\beta}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2) & \dots \\ 156 \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s & -156 \dot{\alpha}_s^2 - 156 \dot{\beta}_s^2 & -22 L(\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) & -22 L \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s & \dots \\ 22 L \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s & -22 L(\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) & -4 L^2(\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) & -4 L^2 \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s & \dots \\ 22 L(\dot{\beta}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2) & -22 L \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s & -4 L^2 \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s & -4 L^2(\dot{\beta}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2) & \dots \\ -54 \dot{\beta}_s^2 - 54 \dot{\gamma}_s^2 & 54 \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s & 13 L \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s & 13 L(\dot{\beta}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2) & \dots \\ 54 \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s & -54 \dot{\alpha}_s^2 - 54 \dot{\beta}_s^2 & -13 L(\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) & -13 L \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s & \dots \\ -13 L \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s & 13 L(\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) & 3 L^2(\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) & 3 L^2 \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s & \dots \\ -13 L(\dot{\beta}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2) & 13 L \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s & 3 L^2 \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s & 3 L^2(\dot{\beta}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2) & \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -54 \dot{\beta}_s^2 - 54 \dot{\gamma}_s^2 & 54 \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s & 13 L \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s & -13 L(\dot{\beta}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2) \\ 54 \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s & -54 \dot{\alpha}_s^2 - 54 \dot{\beta}_s^2 & 13 L(\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) & 13 L \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s \\ 13 L \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s & -13 L(\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) & 3 L^2(\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) & 3 L^2 \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s \\ 13 L(\dot{\beta}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2) & -13 L \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s & 3 L^2 \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s & 3 L^2(\dot{\beta}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2) \\ -156 \dot{\beta}_s^2 - 156 \dot{\gamma}_s^2 & 156 \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s & -22 L \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s & -22 L(\dot{\beta}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2) \\ 156 \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s & -156 \dot{\alpha}_s^2 - 156 \dot{\beta}_s^2 & 22 L(\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) & 22 L \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s \\ -22 L \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s & 22 L(\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) & -4 L^2(\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) & -4 L^2 \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s \\ -22 L(\dot{\beta}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2) & 22 L \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s & -4 L^2 \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s & -4 L^2(\dot{\beta}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2) \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\mathbf{K}_{S2} = \frac{\rho S \ddot{\beta}_s}{30L} \begin{bmatrix} 0 & \frac{78}{7} L^2 & \frac{11}{7} L^3 & 0 & 0 & \frac{27}{7} L^2 & -\frac{13}{14} L^3 & 0 \\ -\frac{78}{7} L^2 & 0 & 0 & \frac{11}{7} L^3 & -\frac{27}{7} L^2 & 0 & 0 & -\frac{13}{14} L^3 \\ -\frac{11}{7} L^3 & 0 & 0 & \frac{2}{7} L^4 & -\frac{13}{14} L^3 & 0 & 0 & -\frac{3}{14} L^4 \\ 0 & -\frac{11}{7} L^3 & -\frac{2}{7} L^4 & 0 & 0 & -\frac{13}{14} L^3 & \frac{3}{14} L^4 & 0 \\ 0 & \frac{27}{7} L^2 & \frac{13}{14} L^3 & 0 & 0 & \frac{78}{7} L^2 & -\frac{11}{7} L^3 & 0 \\ -\frac{27}{7} L^2 & 0 & 0 & \frac{13}{14} L^3 & -\frac{78}{7} L^2 & 0 & 0 & -\frac{11}{7} L^3 \\ \frac{13}{14} L^3 & 0 & 0 & -\frac{3}{14} L^4 & \frac{11}{7} L^3 & 0 & 0 & \frac{2}{7} L^4 \\ 0 & \frac{13}{14} L^3 & \frac{3}{14} L^4 & 0 & 0 & \frac{11}{7} L^3 & -\frac{2}{7} L^4 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$



$$\mathbf{K}_{S3} = -\frac{\rho I_t}{30L} \begin{bmatrix} 36 \dot{\alpha}_s^2 + 36 \dot{\beta}_s^2 & 36 \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s + 36 \ddot{\beta}_s & 3L(\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s + \ddot{\beta}_s) & -3L(\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) & \dots \\ 36 \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s + 36 \ddot{\beta}_s & 36 \dot{\beta}_s^2 + 36 \dot{\gamma}_s^2 & 3L(\dot{\beta}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2) & -3L(\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s + \ddot{\beta}_s) & \dots \\ 3L(\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s + \ddot{\beta}_s) & 3L(\dot{\beta}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2) & 4L^2(\dot{\beta}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2) & -4L^2(\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s + \ddot{\beta}_s) & \dots \\ -3L(\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) & -3L(\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s + \ddot{\beta}_s) & -4L^2(\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s + \ddot{\beta}_s) & 4L^2(\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) & \dots \\ -36 \dot{\alpha}_s^2 - 36 \dot{\beta}_s^2 & -36 \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s - 36 \ddot{\beta}_s & -3L(\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s + \ddot{\beta}_s) & 3L(\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) & \dots \\ -36 \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s - 36 \ddot{\beta}_s & -36 \dot{\beta}_s^2 - 36 \dot{\gamma}_s^2 & -3L(\dot{\beta}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2) & 3L(\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s + \ddot{\beta}_s) & \dots \\ 3L(\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s + \ddot{\beta}_s) & 3L(\dot{\beta}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2) & -L^2(\dot{\beta}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2) & L^2(\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s + \ddot{\beta}_s) & \dots \\ -3L(\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) & -3L(\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s + \ddot{\beta}_s) & L^2(\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s + \ddot{\beta}_s) & -L^2(\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) & \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -36 \dot{\alpha}_s^2 - 36 \dot{\beta}_s^2 & -36 \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s - 36 \ddot{\beta}_s & 3L(\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s + \ddot{\beta}_s) & -3L(\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) \\ -36 \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s - 36 \ddot{\beta}_s & -36 \dot{\beta}_s^2 - 36 \dot{\gamma}_s^2 & 3L(\dot{\beta}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2) & -3L(\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s + \ddot{\beta}_s) \\ -3L(\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s + \ddot{\beta}_s) & -3L(\dot{\beta}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2) & -L^2(\dot{\beta}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2) & L^2(\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s + \ddot{\beta}_s) \\ 3L(\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) & 3L(\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s + \ddot{\beta}_s) & L^2(\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s + \ddot{\beta}_s) & -L^2(\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) \\ 36 \dot{\alpha}_s^2 + 36 \dot{\beta}_s^2 & 36 \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s + 36 \ddot{\beta}_s & -3L(\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s + \ddot{\beta}_s) & 3L(\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) \\ 36 \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s + 36 \ddot{\beta}_s & 36 \dot{\beta}_s^2 + 36 \dot{\gamma}_s^2 & -3L(\dot{\beta}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2) & 3L(\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s + \ddot{\beta}_s) \\ -3L(\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s + \ddot{\beta}_s) & -3L(\dot{\beta}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2) & 4L^2(\dot{\beta}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2) & -4L^2(\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s + \ddot{\beta}_s) \\ 3L(\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) & 3L(\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s + \ddot{\beta}_s) & -4L^2(\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s + \ddot{\beta}_s) & 4L^2(\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{K}_{S4} = \frac{\rho I_t \dot{\beta}_s (\dot{\beta}_s + \Omega)}{15L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{f}_S^* = \mathbf{f}_{S1} + \mathbf{f}_{S2} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{f}_{S1} = \rho S \left[ \begin{array}{l} (\frac{3}{20}\dot{\alpha}_s\dot{\beta}_s - \frac{3}{20}\dot{\gamma}_s)L^2 + [(-\frac{1}{2}\dot{\beta}_s^2 - \frac{1}{2}\dot{\gamma}_s^2)X + (\frac{1}{2}\ddot{\beta}_s + \frac{1}{2}\dot{\alpha}_s\dot{\gamma}_s)Z + \\ (\frac{1}{2}\dot{\alpha}_s\dot{\beta}_s - \frac{1}{2}\dot{\gamma}_s)Y - \dot{\gamma}_s\dot{Y} + \frac{1}{2}\ddot{X} + \dot{\beta}_s\dot{Z}]L \\ (\frac{3}{20}\ddot{\alpha}_s + \frac{3}{20}\dot{\beta}_s\dot{\gamma}_s)L^2 + [(\frac{1}{2}\dot{\alpha}_s\dot{\gamma}_s - \frac{1}{2}\ddot{\beta}_s)X + (-\frac{1}{2}\dot{\beta}_s^2 - \frac{1}{2}\dot{\alpha}_s^2)Z + \\ (\frac{1}{2}\ddot{\alpha}_s + \frac{1}{2}\dot{\beta}_s\dot{\gamma}_s)Y - \dot{\beta}_s\dot{X} + \frac{1}{2}\ddot{Z} + \dot{\alpha}_s\dot{Y}]L \\ (\frac{1}{30}\ddot{\alpha}_s + \frac{1}{30}\dot{\beta}_s\dot{\gamma}_s)L^3 + [(\frac{1}{12}\dot{\alpha}_s\dot{\gamma}_s - \frac{1}{12}\ddot{\beta}_s)X + (-\frac{1}{12}\dot{\beta}_s^2 - \frac{1}{12}\dot{\alpha}_s^2)Z + \\ (\frac{1}{12}\ddot{\alpha}_s + \frac{1}{12}\dot{\beta}_s\dot{\gamma}_s)Y + \frac{1}{12}\ddot{Z} - \frac{1}{6}\dot{\beta}_s\dot{X} + \frac{1}{6}\dot{\alpha}_s\dot{Y}]L^2 \\ (\frac{1}{30}\dot{\gamma}_s - \frac{1}{30}\dot{\alpha}_s\dot{\beta}_s)L^3 + [(\frac{1}{12}\dot{\beta}_s^2 + \frac{1}{12}\dot{\gamma}_s^2)X + (-\frac{1}{12}\ddot{\beta}_s - \frac{1}{12}\dot{\alpha}_s\dot{\gamma}_s)Z + \\ (-\frac{1}{12}\dot{\alpha}_s\dot{\beta}_s + \frac{1}{12}\dot{\gamma}_s)Y - \frac{1}{12}\ddot{X} + \frac{1}{6}\dot{\gamma}_s\dot{Y} - \frac{1}{6}\dot{\beta}_s\dot{Z}]L^2 \\ (\frac{7}{20}\dot{\alpha}_s\dot{\beta}_s - \frac{7}{20}\dot{\gamma}_s)L^2 + ((-\frac{1}{2}\dot{\beta}_s^2 - \frac{1}{2}\dot{\gamma}_s^2)X + (\frac{1}{2}\ddot{\beta}_s + \frac{1}{2}\dot{\alpha}_s\dot{\gamma}_s)Z + \\ (\frac{1}{2}\dot{\alpha}_s\dot{\beta}_s - \frac{1}{2}\dot{\gamma}_s)Y - \dot{\gamma}_s\dot{Y} + \frac{1}{2}\ddot{X} + \dot{\beta}_s\dot{Z}]L \\ (\frac{7}{20}\ddot{\alpha}_s + \frac{7}{20}\dot{\beta}_s\dot{\gamma}_s)L^2 + [(\frac{1}{2}\dot{\alpha}_s\dot{\gamma}_s - \frac{1}{2}\ddot{\beta}_s)X + (-\frac{1}{2}\dot{\beta}_s^2 - \frac{1}{2}\dot{\alpha}_s^2)Z + \\ (\frac{1}{2}\ddot{\alpha}_s + \frac{1}{2}\dot{\beta}_s\dot{\gamma}_s)Y - \dot{\beta}_s\dot{X} + \frac{1}{2}\ddot{Z} + \dot{\alpha}_s\dot{Y}]L \\ (-\frac{1}{20}\ddot{\alpha}_s - \frac{1}{20}\dot{\beta}_s\dot{\gamma}_s)L^3 + [(-\frac{1}{12}\dot{\alpha}_s\dot{\gamma}_s + \frac{1}{12}\ddot{\beta}_s)X + (\frac{1}{12}\dot{\beta}_s^2 + \frac{1}{12}\dot{\alpha}_s^2)Z + \\ (-\frac{1}{12}\ddot{\alpha}_s - \frac{1}{12}\dot{\beta}_s\dot{\gamma}_s)Y - \frac{1}{12}\ddot{Z} + \frac{1}{6}\dot{\beta}_s\dot{X} - \frac{1}{6}\dot{\alpha}_s\dot{Y}]L^2 \\ (-\frac{1}{20}\dot{\gamma}_s + \frac{1}{20}\dot{\alpha}_s\dot{\beta}_s)L^3 + [(-\frac{1}{12}\dot{\beta}_s^2 - \frac{1}{12}\dot{\gamma}_s^2)X + (\frac{1}{12}\ddot{\beta}_s + \frac{1}{12}\dot{\alpha}_s\dot{\gamma}_s)Z + \\ (\frac{1}{12}\dot{\alpha}_s\dot{\beta}_s - \frac{1}{12}\dot{\gamma}_s)Y + \frac{1}{12}\ddot{X} - \frac{1}{6}\dot{\gamma}_s\dot{Y} + \frac{1}{6}\dot{\beta}_s\dot{Z}]L^2 \end{array} \right] \quad (3.44)$$

$$\mathbf{f}_{S2} = \rho I_t \begin{bmatrix} \ddot{\gamma}_s + (2\Omega + \dot{\beta}_s)\dot{\alpha}_s \\ -\ddot{\alpha}_s + (2\Omega + \dot{\beta}_s)\dot{\gamma}_s \\ 0 \\ 0 \\ -\ddot{\gamma}_s + (-2\Omega - \dot{\beta}_s)\dot{\alpha}_s \\ \ddot{\alpha}_s + (-2\Omega - \dot{\beta}_s)\dot{\gamma}_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Inserindo a Eq. (3.30) na equação da energia potencial do eixo (Eq. (3.20)) e substituindo a equação resultante nas equações de Lagrange, tem-se:

$$\frac{\partial U_S}{\partial \mathbf{q}_S} = \mathbf{K}_{Su} \mathbf{q}_S \quad (3.46)$$

onde a matriz  $\mathbf{K}_{Su}$  é dada por:

$$\mathbf{K}_{Su} = \frac{EI_t}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 2L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 0 & -6L & 4L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

A massa de desbalanceamento é considerada nas equações do movimento somente pela sua energia cinética, como mostra a Eq. (3.18). Portanto, aplicando as equações de Lagrange, segue:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_u}{\partial \dot{\mathbf{q}}_D} \right) - \frac{\partial T_u}{\partial \mathbf{q}_D} = m_u d \begin{bmatrix} (\dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s + \ddot{\beta}_s) \cos(\Omega t) + (-\dot{\gamma}_s^2 - \dot{\beta}_s^2 - 2\dot{\beta}_s \Omega - \Omega^2) \sin(\Omega t) \\ (\dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s - \ddot{\beta}_s) \sin(\Omega t) + (-\dot{\alpha}_s^2 - \dot{\beta}_s^2 - 2\dot{\beta}_s \Omega - \Omega^2) \cos(\Omega t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Assim, as forças devido à massa de desbalanceamento,  $F_u$  e  $F_w$ , são aplicadas ao nó do modelo de elementos finitos ao longo das direções  $x$  e  $z$ , para uma massa em uma posição angular  $\Omega$ . Assim:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \\ F_\theta \\ F_\psi \end{bmatrix} = m_u d \begin{bmatrix} (\dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s + \ddot{\beta}_s) \cos(\Omega t) + (-\dot{\gamma}_s^2 - \dot{\beta}_s^2 - 2\dot{\beta}_s \Omega - \Omega^2) \sin(\Omega t) \\ (\dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s - \ddot{\beta}_s) \sin(\Omega t) + (-\dot{\alpha}_s^2 - \dot{\beta}_s^2 - 2\dot{\beta}_s \Omega - \Omega^2) \cos(\Omega t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

A partir das energias cinética e potencial dos sub-sistemas de uma máquina rotativa e utilizando as equações de Lagrange obtém-se as equações do movimento na sua forma matricial, dada pela equação abaixo.

$$(\mathbf{M}) \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{D}^*) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}^*) \mathbf{q} = \mathbf{w} + \mathbf{f} + \mathbf{f}^* \quad (3.50)$$

onde ( $\ddot{\quad}$ ) denota a segunda derivada com relação ao tempo e  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_s$

As matrizes  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{K}$  são as matrizes de EF de massa, amortecimento/giroscópica e rigidez do sistema eixo-disco-mancal, respectivamente;  $\mathbf{q}$  é o vetor de deslocamento nodal dos graus de liberdade do eixo. As matrizes  $\mathbf{D}^*$  e  $\mathbf{K}^*$  e o vetor de força  $\mathbf{f}^*$ , são termos adicionais associados ao movimento da base do sistema. O vetor  $\mathbf{f}$  contém as forças devido ao desbalanceamento e  $\mathbf{w}$  é o vetor peso dos subsistemas rotativos. Foi utilizado o software Maple® para a formulação das equações e obtenção das matrizes que compõem as equações do movimento. As matrizes e vetores do modelo de rotores embarcados apresentados neste trabalho foram construídas a partir de uma formulação própria.

## 3.2 Modelos de Contato Mecânico

Na literatura existem muitos trabalhos que avaliam o fenômeno do contato em máquinas rotativas. Dentre esses estudos, modelos da interação entre o rotor e a estrutura que o cerca (estator/carcaça) são apresentados. O foco deste trabalho não é propriamente o de avaliar os modelos e sim entender melhor o comportamento dinâmico de máquinas rotativas embarcadas quando da ocorrência de contato mecânico. Para isso foram escolhidos dois modelos de contato para analisar esse efeito em rotores embarcados. Assim, o primeiro modelo é baseado no trabalho de Ishida e Yamamoto (2012), um modelo mais simples e amplamente utilizado nas análises de contato em trabalhos científicos (Modelo 1); já o segundo utiliza uma técnica de suavização das forças de contato (Modelo 2) (DURAN, 2014). A cooperação entre o Laboratório de Mecânica de Estruturas - LMEst da UFU (Brasil) e o Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCos) do INSA-Lyon (França) possibilitou uma melhor compreensão desses dois fenômenos combinados (rotor embarcado+contato). Os modelos de contato estudados e inseridos no modelo de rotor embarcado serão apresentados a seguir.

### 3.2.1 Modelo 1

O sistema rotor-estator é um exemplo onde o contato pode ocorrer durante o movimento de rotação do rotor. Quando há excitação pela base, o fenômeno do contato é ainda mais potencializado. Esse contato pode causar oscilações auto-excitadas. O primeiro modelo de contato é baseado no livro de Ishida e Yamamoto (2012). No capítulo 9, seção 5 se discute a respeito do chamado *rubbing* (roçamento) e apresenta-se a formulação desse fenômeno nas máquinas rotativas.

O modelo do rotor e o sistema de coordenadas utilizados para a formulação das forças de contato é apresentado na (Fig. 3.7).

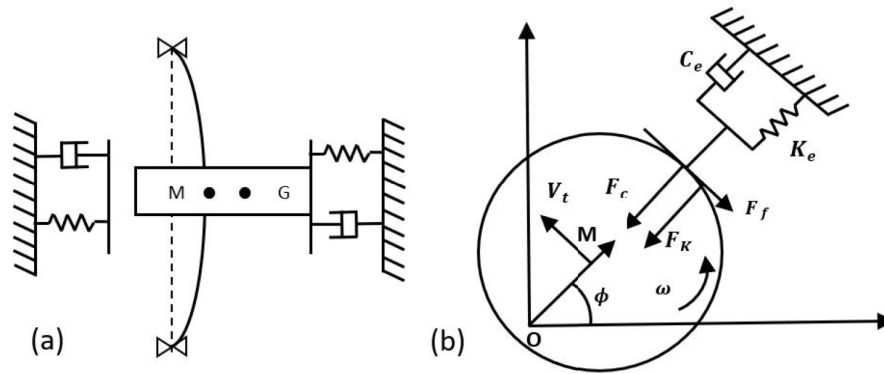


Figura 3.7. Modelo de contato utilizado em sistema rotativos. (ISHIDA; YAMAMOTO, 2012).

A formulação das forças  $f_k$ ,  $f_c$  e conseqüentemente  $f_f$  é apresentada a seguir.

$$f_k = \begin{cases} -k_e(r - \delta) \frac{r}{|r|} & \text{for } r \geq \delta \\ 0 & \text{for } r < \delta \end{cases} \quad (3.51)$$

$$f_c = \begin{cases} -c_e \dot{r} \frac{r}{|r|} & \text{for } r \geq \delta \\ 0 & \text{for } r < \delta \end{cases} \quad (3.52)$$

$$f_f = |F_f| = \mu(|f_k + f_c|) \quad (3.53)$$

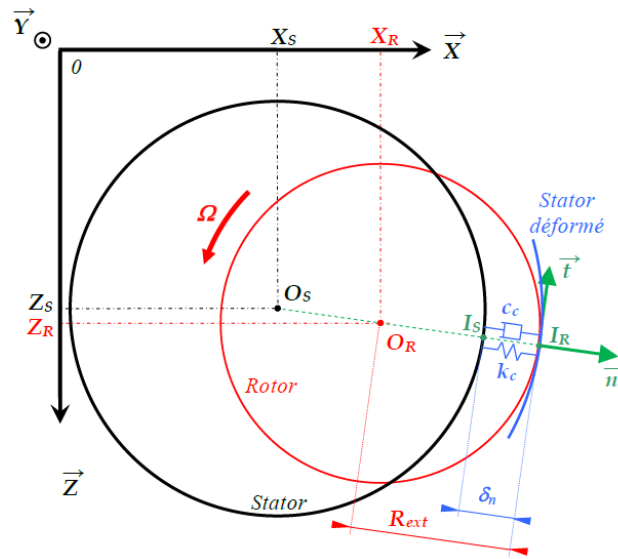
onde  $k_e$  e  $c_e$  são as constantes equivalentes da rigidez e amortecimento, respectivamente e  $\mu$  é o coeficiente de atrito. O vetor deslocamento radial é representado pela variável  $r$  e a folga/espacamento entre o rotor e o estator no momento do contato é dado por  $\delta$ . A velocidade tangencial do centro do rotor é  $V_t$ . Quando  $(V_t + \omega r) > 0$  a força de atrito ( $f_f$ ) está no sentido oposto da direção de  $V_t$  e na mesma direção quando  $(V_t + \omega r) < 0$ .

Portanto, para o modelo de atrito/contato de Ishida e Yamamoto (2012) as equações do movimento do rotor embarcado, Eq. (3.50), quando inseridas as forças de contato, é dado por:

$$(\mathbf{M}) \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{D}^*) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}^*) \mathbf{q} = \mathbf{w} + \mathbf{f} + \mathbf{f}^* + (\mathbf{f}_k + \mathbf{f}_c + \mathbf{f}_f) \quad (3.54)$$

### 3.2.2 Modelo 2

Em sua tese, Duran (2014) fez a investigação do contato em turbo motores. A Fig. 3.8 mostra a representação esquemática do contato e das suas componentes de força adotadas durante a interação entre os sistemas. Nguyen et al. (2020) utilizaram do mesmo modelo de contato para estudar um modelo dinâmico de uma coluna de perfuração de petróleo onde ocorrem os chamados multi-contatos entre a broca e a parede de perfuração.



**Figura 3.8.** Representação esquemática do contato rotor-estator. Retirado de: (DURAN, 2014).

A força normal e tangencial de contato são representadas por:

$$f_{cn} = -(K_c(G)G + C_c(G)\dot{G})\vec{n} \quad (3.55)$$

$$f_{ct} = -\mu(v_g)(K_c(G)G + C_c(G)\dot{G})\vec{t} \quad (3.56)$$

onde:

$$K_c(G) = \frac{k_c}{2} \left[ \frac{2}{\pi} \arctan(\pi \lambda_k G) + 1 \right] \quad (3.57)$$

$$C_c(G) = \frac{c_c}{2} \left[ \frac{2}{\pi} \arctan(\pi \lambda_c G) + 1 \right] \quad (3.58)$$

De acordo com Duran (2014), os parâmetros  $k_c$  e  $c_c$  são a rigidez e o amortecimento associados ao contato. A função  $\arctan$  e os dois parâmetros  $\lambda_k$  e  $\lambda_c$  asseguram a continuidade dessas funções em torno de  $G = 0$ . O deslocamento radial é dado por  $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ , onde  $\vec{n} = (u/r \vec{x}) + (v/r \vec{y})$ ,  $G = r - j_0$  é a penetração do rotor na seção transversal,  $\dot{G} = (\dot{u}u + \dot{v}v)/r$  é a velocidade de penetração e  $j_0$  é a folga. Por fim, a velocidade de deslizamento é dada por  $v_g = (u\dot{v} - v\dot{u})/r + (\Omega + \dot{\theta}_z)R_e$ . O coeficiente de atrito  $\mu$ , que depende de  $v_g$ , utilizado para descrever o momento do contato é dado por:

$$\mu(v_g) = \frac{v_g}{2v_r} \left( \frac{1 - \xi}{1 + \frac{1-\xi}{2v_r\mu_d} |v_g|} + \frac{1 + \xi}{\left(1 + \frac{1-\xi}{2v_r\mu_d} |v_g|\right)^2} \right) \quad (3.59)$$

com  $\xi = \sqrt{1 - \mu_d/\mu_s}$ ,  $\mu_d$  e  $\mu_s$  são os coeficientes de atrito dinâmico e estático, respectivamente, e  $v_r$  é o parâmetro regularizador.

As equações do movimento do rotor embarcado considerando a interação entre o rotor e o estator (contato) apresentadas por Duran (2014), são dadas pela equação matricial abaixo dada pela Eq. (3.60).

$$(\mathbf{M}) \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{D}^*) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}^*) \mathbf{q} = \mathbf{w} + \mathbf{f} + \mathbf{f}^* + (\mathbf{f}_{cn} + \mathbf{f}_{ct}) \quad (3.60)$$



# Capítulo 4

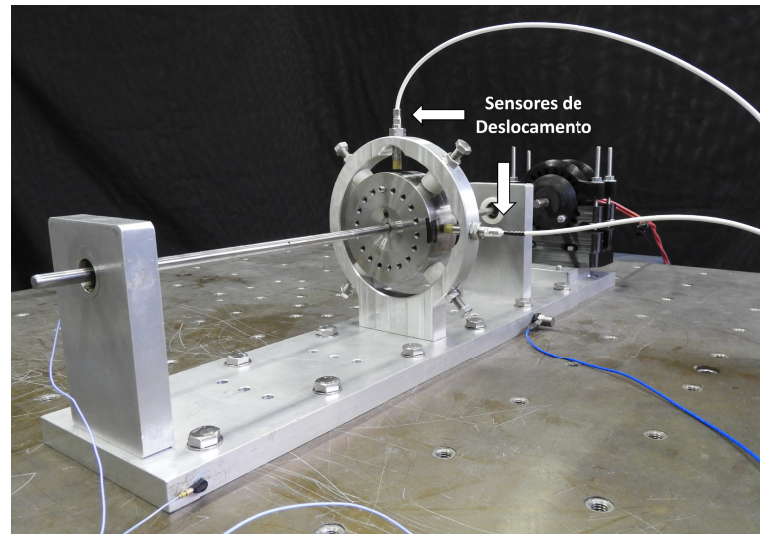
## Simulações Numéricas

Foram realizadas simulações numéricas obtidas a partir do modelo de elementos finitos (modelo EF) do rotor embarcado e do contato, conforme aplicado a uma bancada de testes. O objetivo é analisar condições de movimento de excitação pela base que leve à ocorrência de contato, caracterizando o comportamento dinâmico do sistema rotativo nestas condições. Foram comparados os resultados para os dois modelos de contato apresentados no capítulo anterior. Avaliou-se as respostas devido a diferentes tipos de excitação.

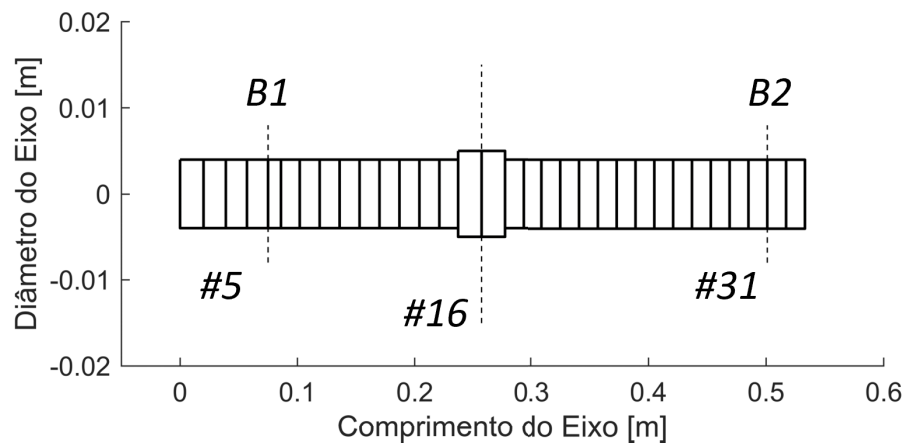
### 4.1 Bancada de Testes

A máquina rotativa utilizada para as análises realizadas neste capítulo é apresentada na Fig. 4.1a. O sistema é composto por um eixo de aço flexível com 550 mm de comprimento e 8 mm de diâmetro. Um disco de aço é montado no eixo, com 100 mm de diâmetro externo e 40 mm de espessura. As peças rotativas são suportadas por dois mancais autocompensadores de esferas. Um motor elétrico DC aciona o sistema rotativo. Sensores de deslocamento (Meggitt TQ-412 com alcance de 4 mm) são usados para medir os deslocamentos laterais (horizontal e vertical) na posição do disco. As medições foram realizadas pelo analisador Agilent® (modelo 35670A) em uma faixa de 0 a 250 Hz e passos de 0,25 Hz.

O modelo EF do sistema possui 32 elementos de eixo mostrados na Fig. 4.1b. O módulo de Young, a densidade e o coeficiente de Poisson do eixo são 185 GPa, 7745 kg/m<sup>3</sup> e 0,29, respectivamente. O disco está localizado no nó #16 com massa de



a) Bancada de testes



b) Modelo EF

**Figura 4.1.** Máquina rotativa utilizada nas análises numéricas.

2,314 kg ( $\rho = 7750 \text{ kg/m}^3$ ). Os mancais  $B_1$  e  $B_2$  estão localizados nos nós #5 e #31, do modelo EF, respectivamente. As respostas de vibração do sistema foram obtidas no nó onde o disco está localizado (graus de liberdade  $S_{16xs}$  e  $S_{16zs}$ ).

Os parâmetros desconhecidos do modelo EF do rotor foram determinados utilizando um procedimento de otimização, conforme apresentado por Cavalini et al. (2016). O método de otimização utilizado foi a Evolução Diferencial (ED) e foi desenvolvido por Price, Storn e Lampinen (2006).

Assim, o método da ED foi aplicado para obter os coeficientes de rigidez ( $k$ ) e amortecimento ( $c$ ) dos mancais e a rigidez de rotação ( $k_{ROT}$ ) para o acoplamento entre o motor elétrico e o eixo (nó #1 do modelo EF). O procedimento de ajuste do modelo

é baseado nas funções de resposta em frequência ( $FRFs$ ) determinadas usando o modelo EF e as  $FRFs$  experimentais correspondentes. As  $FRFs$  experimentais foram obtidas para a bancada de teste em repouso (condição de base fixa e velocidade de rotação nula) aplicando forças de impacto (usando um martelo de impacto) nas direções  $x_S$  e  $z_S$  do disco. Os sinais de resposta foram medidos pelos dois sensores de deslocamento posicionados nas mesmas direções das forças de impacto, resultando em duas  $FRFs$  (Fig. 4.2).

O processo de otimização foi executado 10 vezes e o melhor resultado é mostrado a seguir. Para todos os casos, 100 indivíduos foram considerados na população inicial do otimizador e apenas as regiões próximas aos picos das  $FRF_{exp}$  foram consideradas para construir a função objetivo dada pela Eq. (4.1). A Tabela 4.1 apresenta os valores determinados para os parâmetros desconhecidos, bem como o espaço de projeto associado a cada variável desconhecida.

$$Objetivo = \sum_{i=1}^n \frac{\|\mathbf{FRF}_{exp,i} - \mathbf{FRF}_{num,i}\|}{\|\mathbf{FRF}_{exp,i}\|} \quad (4.1)$$

onde  $n$  é o número de  $FRFs$  usadas no processo de otimização  $FRF_{exp}$  representa as  $FRFs$  experimentais medidas na máquina rotativa e  $FRF_{num}$  são as funções de resposta em frequência numéricas correspondentes determinadas usando o modelo EF do rotor.

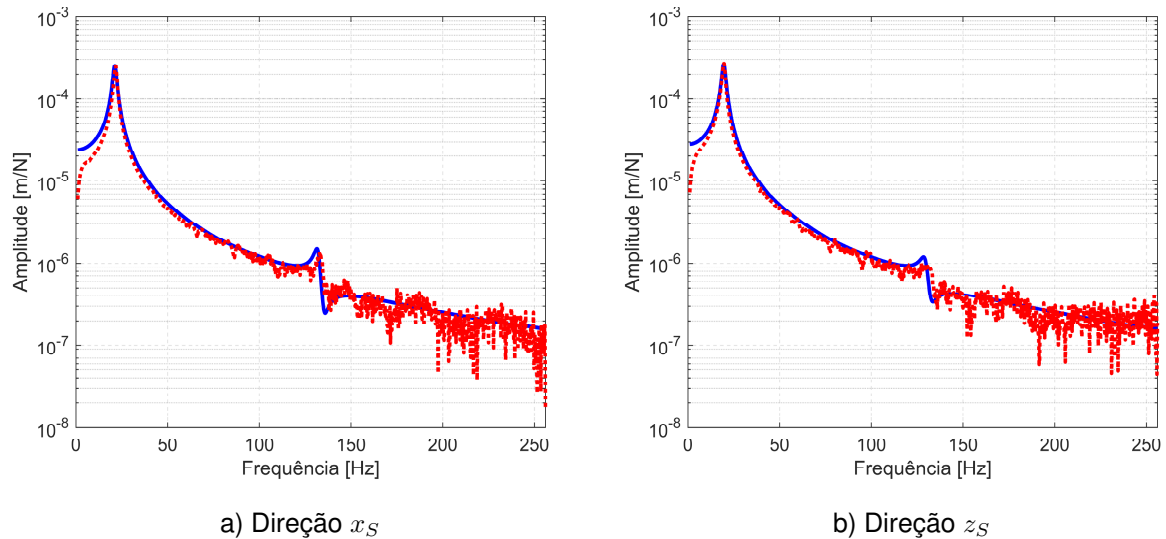
**Tabela 4.1.** Parâmetros determinados pelo procedimento de ajuste do modelo.

Parâmetros	Limite Inferior	Valor	Limite Superior
<i>Mancal1</i> $k_{xx}$	$5.0 \times 10^9$	$1.36 \times 10^{11}$	$5.0 \times 10^{11}$
<i>Mancal1</i> $k_{zz}$	$5.0 \times 10^9$	$1.67 \times 10^{11}$	$5.0 \times 10^{11}$
<i>Mancal2</i> $k_{xx}$	$5.0 \times 10^9$	$4.11 \times 10^{11}$	$5.0 \times 10^{11}$
<i>Mancal2</i> $k_{zz}$	$5.0 \times 10^9$	$2.91 \times 10^{11}$	$5.0 \times 10^{11}$
$\xi_1$	0.045	0.0527	0.075
$\xi_2$	0.040	0.0475	0.050
$\xi_3$	0.012	0.0157	0.022
$\xi_4$	0.008	0.0117	0.020
$k_{ROT_x}$	50	203.36	500
$k_{ROT_z}$	500	959.27	5000

\* $k$ : rigidez [N/m];  $\xi$ : fator de amortecimento modal;  $k_{ROT}$ : rigidez de rotação [Nm/rad].

A Figura 4.2a apresenta uma comparação entre a  $FRF$  numérica e a experimental obtidas na direção  $x_S$  usando o modelo EF ajustado. As  $FRFs$  medidas na direção  $z_S$

são mostradas na Fig. 4.2b. Observe que os resultados numéricos estão satisfatoriamente próximos dos que foram medidos na bancada de teste de rotor, demonstrando a representatividade do modelo EF ajustado.



**Figura 4.2.** *FRFs* numérica (—) e experimental (---) da máquina rotativa (em repouso).

O diagrama de Campbell, determinado a partir do modelo EF representativo da máquina rotativa, é apresentado na Fig. 4.3, na qual as velocidades críticas de *BW* e *FW* são, aproximadamente, 1173 RPM e 1308 RPM, respectivamente (ver Fig. 4.4). As respostas de vibração da bancada de máquina rotativa foram medidas pelos sensores localizados no disco (correspondendo aos graus de liberdade do modelo,  $S_{16x_s}$  e  $S_{16z_s}$ ). A Figura 4.5a apresenta os resultados numéricos (modelo ajustado) e experimentais para a velocidade de rotação de 1600 RPM na direção horizontal, considerando apenas um desbalanceamento de 9,3 g.mm, sem balanceamento preliminar. As respostas de vibração associadas à direção vertical são apresentadas na Fig. 4.5b. Observe que os resultados numéricos também se acham satisfatoriamente próximos daqueles que correspondem às respostas de vibração medidas.

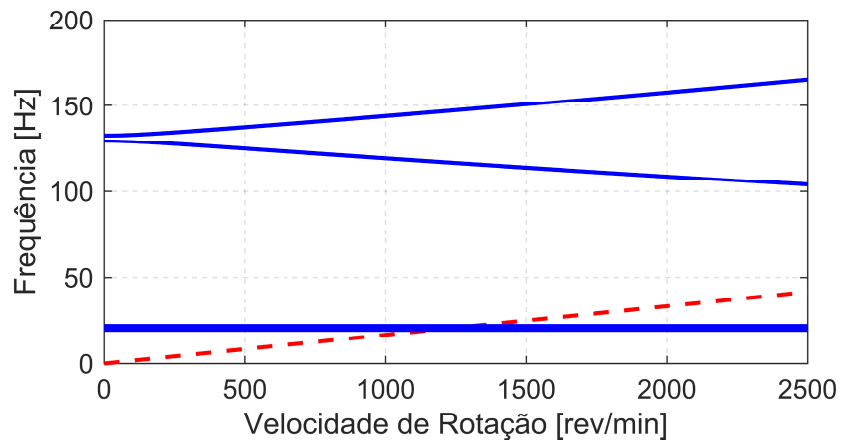


Figura 4.3. Diagrama de Campbell do modelo EF numérico.

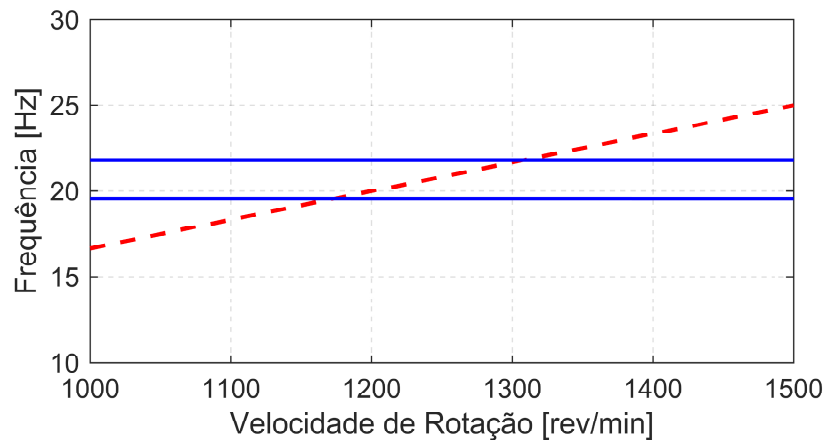
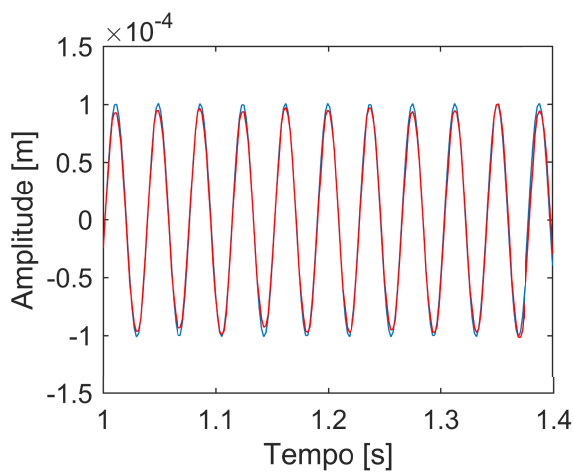
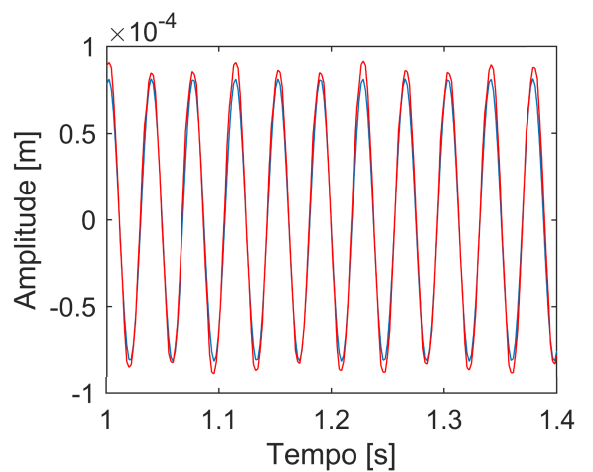


Figura 4.4. Zoom do Diagrama de Campbell.



a) Direção horizontal ( $S_{16xs}$ )



b) Direção vertical ( $S_{16zs}$ )

Figura 4.5. Respostas de vibração numérica (—) e experimental (—) para a velocidade de 1600 RPM.

## 4.2 Simulações do Rotor Embarcado com Contato

Nesta seção, o comportamento dinâmico do modelo EF de rotor embarcado com contato mecânico é avaliado considerando diferentes excitações pela base e folgas radiais ( $\delta$ ). Para todas as simulações apresentadas o contato rotor-estator foi considerado no disco, ou seja, na posição do nó #16 (modelo EF) plano de medição  $S_{16}$ .

### 4.2.1 Comparação dos Modelos de Contato

No Capítulo 3 foi apresentada a formulação de dois modelos de contato em máquinas rotativas. O Modelo 1 é baseado no trabalho de Ishida e Yamamoto (2012) e o Modelo 2 na tese de doutorado de Duran (2014). Cada modelo possui o seu próprio equacionamento das forças que aparecem durante o instante do contato/atrito. Para cada modelo são apresentados abaixo os valores adotados das variáveis usadas durante as simulações numéricas.

**Tabela 4.2.** Valores das variáveis do Modelo 1 adotadas para as simulações numéricas.

<i>Variável</i>	<i>Valor</i>
$k_e$	$5.0 \times 10^8 [N/m]$
$c_e$	$100 [Ns/m]$
$\mu$	0.1

**Tabela 4.3.** Valores das variáveis do Modelo 2 adotadas para as simulações numéricas.

<i>Variável</i>	<i>Valor</i>
$k_c$	$5.0 \times 10^8 [N/m]$
$c_c$	$100 [Ns/m]$
$\mu_d$	0.1
$\mu_s$	0.1
$\lambda$	$1 \times 10^{50}$
$v_r$	0.1

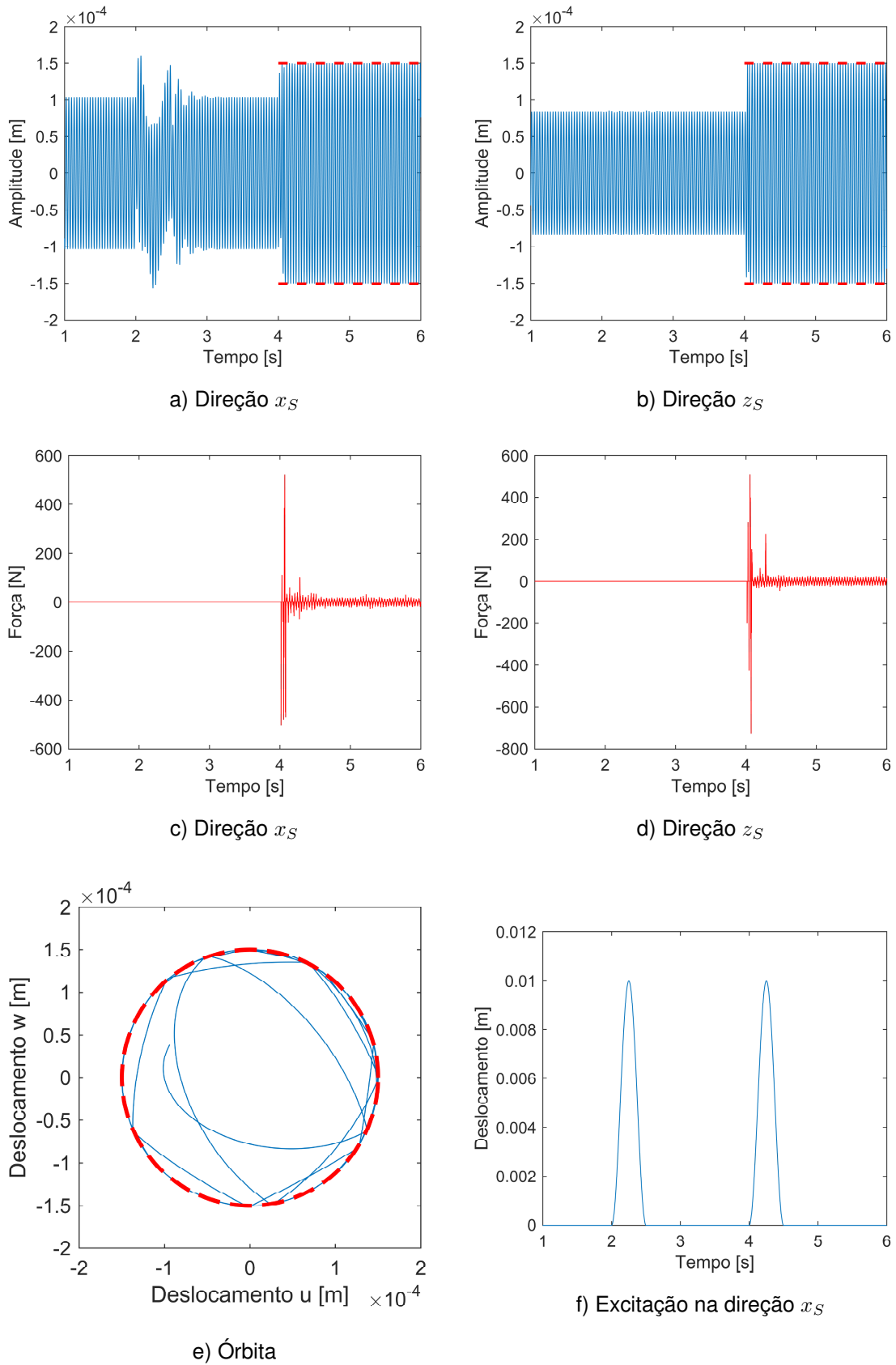
Os valores adotados para tais variáveis são baseados nas referências de cada modelo (ISHIDA; YAMAMOTO, 2012; DURAN, 2014). Nota-se que os valores escolhidos para as variáveis de rigidez, amortecimento e coeficiente de atrito de cada modelo são iguais. Foi escolhido utilizar os mesmos valores, de forma a permitir uma comparação de resultados entre eles e adotando as mesmas condições para ambos. Simulações

do tipo pulso e excitação senoidal foram utilizadas para efeito de comparação entre os Modelo 1 e Modelo 2.

Primeiramente, foi realizada uma simulação de 6s com  $d_t = 0,0001s$ , onde nos segundos 2 e 4 da simulação duas excitações do tipo pulso, com amplitude de 0,01m na direção  $x_S$  (ver Figs. 4.6f e 4.7f), são inseridas na base do rotor. Somente no tempo igual a 4s da simulação a condição de contato é imposta, como mostra as linhas (- -) nas respostas de vibração e órbitas. Neste caso, uma folga radial de  $1,5 \times 10^{-4}m$  foi utilizada. A velocidade do rotor  $\Omega$  foi fixada em 1600 RPM conforme ajuste apresentado anteriormente.

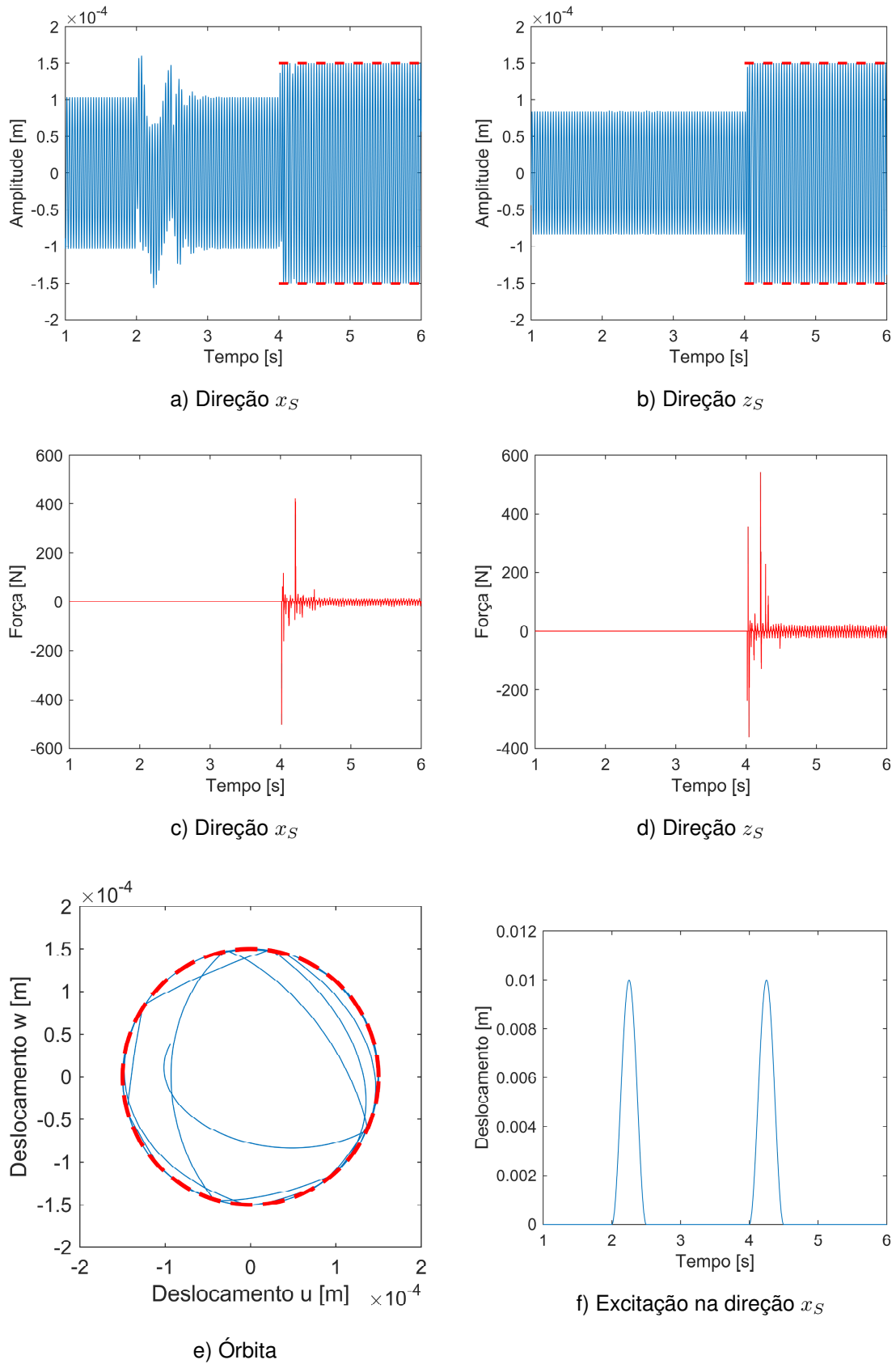
As Figuras 4.6 e 4.7 mostram as respostas de vibração e as forças numéricas obtidas para os Modelo 1 e Modelo 2, respectivamente. As respostas de vibração na direção  $x_S$  são mostradas nas Figs. 4.6a e 4.7a e na direção  $z_S$  nas Figs. 4.6b e 4.7b. As forças de contato devido ao toque do rotor com o estator na direção  $x_S$  são apresentadas nas Figs. 4.6c e 4.7c e na direção  $z_S$  nas Figs. 4.6d e 4.7d. Por último, a órbita do rotor após o contato (tempo de simulação de 4s até 6s) é apresentada nas Figs. 4.6e e 4.7e para os dois modelos.

Analisando as respostas dos Modelo 1 e Modelo 2 devido ao pulso, as resposta de vibração nas direções  $x_S$  e  $z_S$  e as órbitas, são idênticas. Os sinais da força de contato apresentam poucas diferenças. Nota-se que as excitações pela base mudam o comportamento na direção  $x_S$  do rotor no período da simulação (de 2s à 3s), quando a condição de contato juntamente com a excitação pela base é inserida e ocorre contato, fazendo com que o rotor aumente seu nível de amplitude de vibração, mantendo-se dentro do valor adotado para a folga radial.



**Figura 4.6.** Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo pulso com amplitude de  $1 \times 10^{-2} \text{m}$  e folga =  $1,5 \times 10^{-4} \text{m}$ .





**Figura 4.7.** Respostas de vibração e força de contato do Modelo 2, para uma excitação do tipo pulso com amplitude de  $1 \times 10^{-2} \text{m}$  e folga =  $1,5 \times 10^{-4} \text{m}$ .

Uma segunda análise é realizada com a finalidade de comparar as respostas nu-

méricas dos modelos de Ishida e Yamamoto (2012) e Duran (2014). Nesse caso foi inserido um deslocamento na base na direção  $x_S$  do tipo senoidal que segue a seguinte equação:

$$x_S = \Lambda \sin\left(\frac{2\pi f}{60}t\right) \quad (4.2)$$

Para as Figs. 4.8 e 4.9 os valores de  $\Lambda$ ,  $f$  e  $\delta$  são  $1 \times 10^{-4}$ m, 30Hz e  $1,5 \times 10^{-4}$ m. A velocidade de rotação do rotor foi fixada em 1600 RPM, com um tempo de simulação de 6s. No tempo de 2s da simulação é aplicada a excitação pela base e no tempo de 4s as condições do contato/atrito representadas pelas linhas (- -) são consideradas.

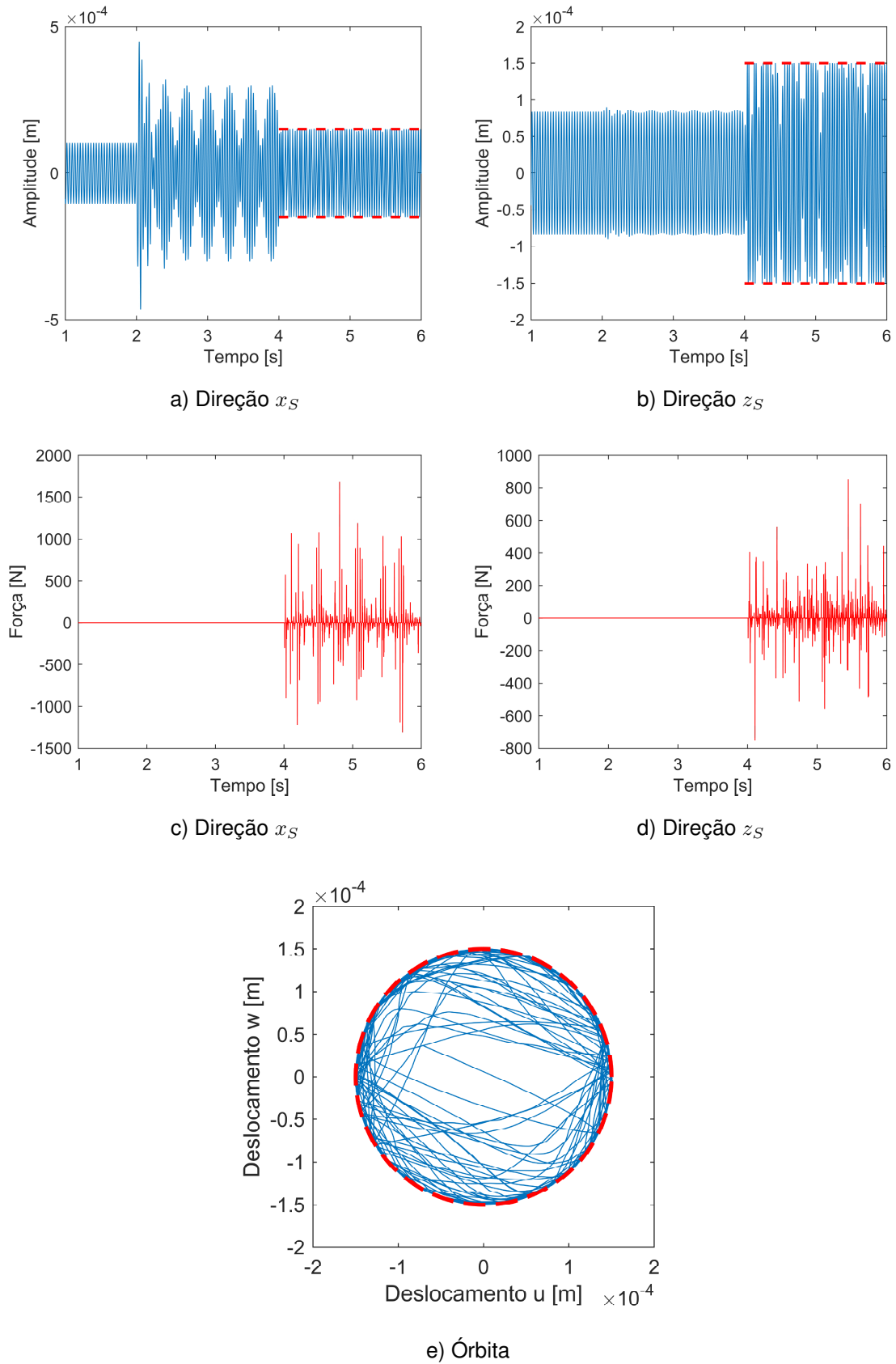
As respostas de vibração devido à excitação pela base e o contato entre o rotor e o estator na direção  $x_S$  são apresentadas nas Figs. 4.8a e 4.9a, Modelo 1 e Modelo 2, respectivamente. O mesmo se aplica para a direção  $z_S$  (Figs. 4.8b e 4.9b). As Figs. 4.8e e 4.9e são as órbitas do rotor durante a condição de contato (tempo 4s a 6s). As forças de contato nas direções  $x_S$ , Figs. 4.8c e 4.9c, na direção  $z_S$ , Figs. 4.8d e 4.9d.

Quando comparados os Modelo 1 e Modelo 2, as órbitas, as respostas de vibração e as forças de contato na direção  $x_S$  e  $z_S$  são diferentes. Analisando as respostas de vibração e órbitas, o Modelo 2 tende a estabilizar na região limite do deslocamento (valor da folga radial) diferentemente do Modelo 1 que apresenta um comportamento oscilatório. Os níveis de força do Modelo 1 são maiores, enquanto que o Modelo 2 apresenta picos de força em níveis menores.

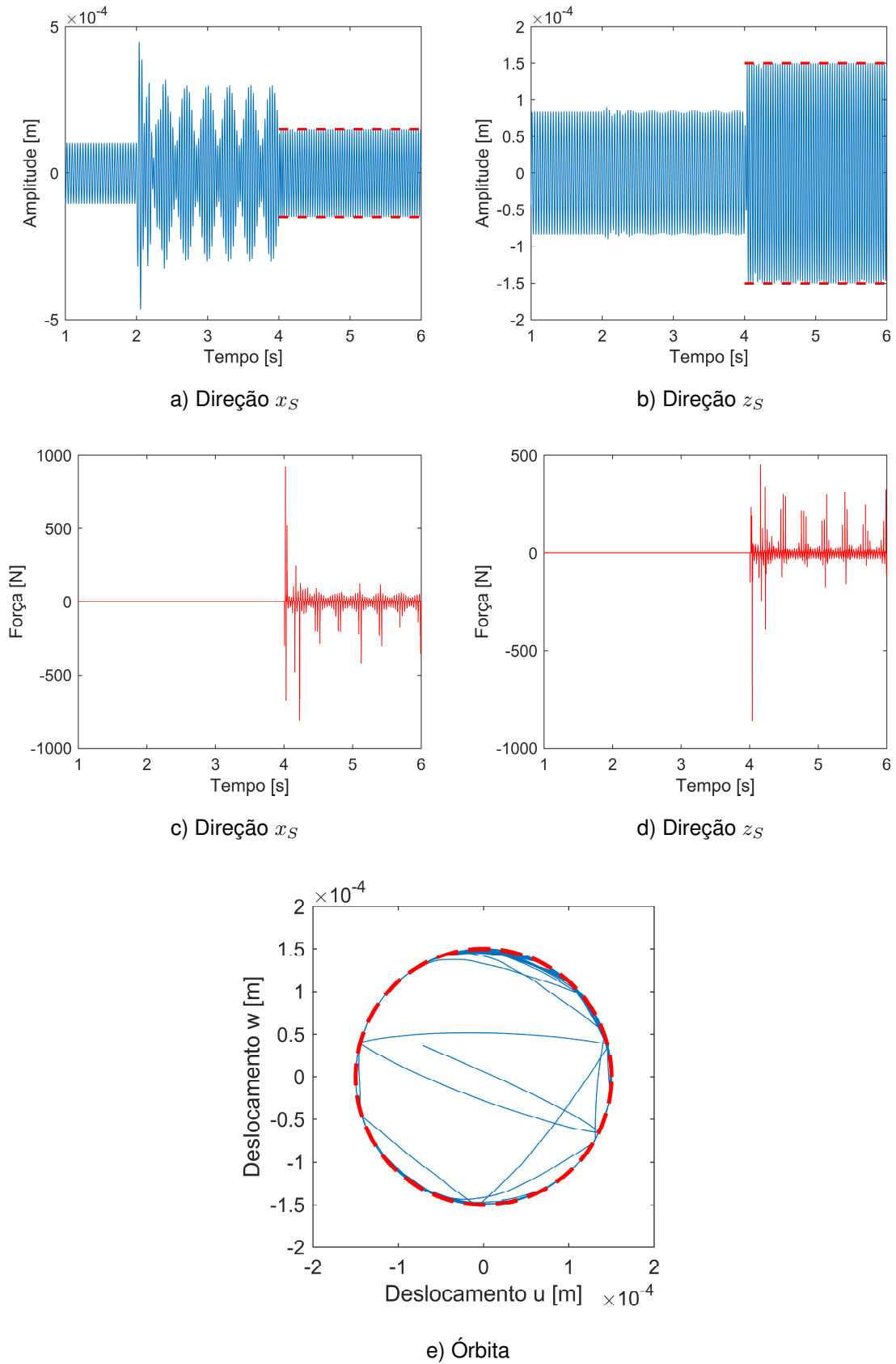
As Fig. 4.10 (Modelo 1) e 4.11 (Modelo 2), mostram os resultados numéricos para um deslocamento dado pela Eq. (4.2) (excitação senoidal). Nesse caso, para  $\Lambda = 1 \times 10^{-5}$ m,  $f = 90$ Hz e a folga radial é igual a  $1 \times 10^{-4}$ m.

As respostas de vibração nas direções  $x_S$  e  $z_S$  do Modelo 1 são apresentadas nas Figs. 4.10a e 4.10b, respectivamente. As Figs. 4.10c e 4.10d mostram as forças de contato do Modelo 1 nas direções  $x_S$  e  $z_S$ , respectivamente. A Fig. 4.10e é a órbita descrita pelo rotor durante a condição de contato. De forma semelhante os resultados obtidos pelo Modelo 2 são apresentados na Fig. 4.11.

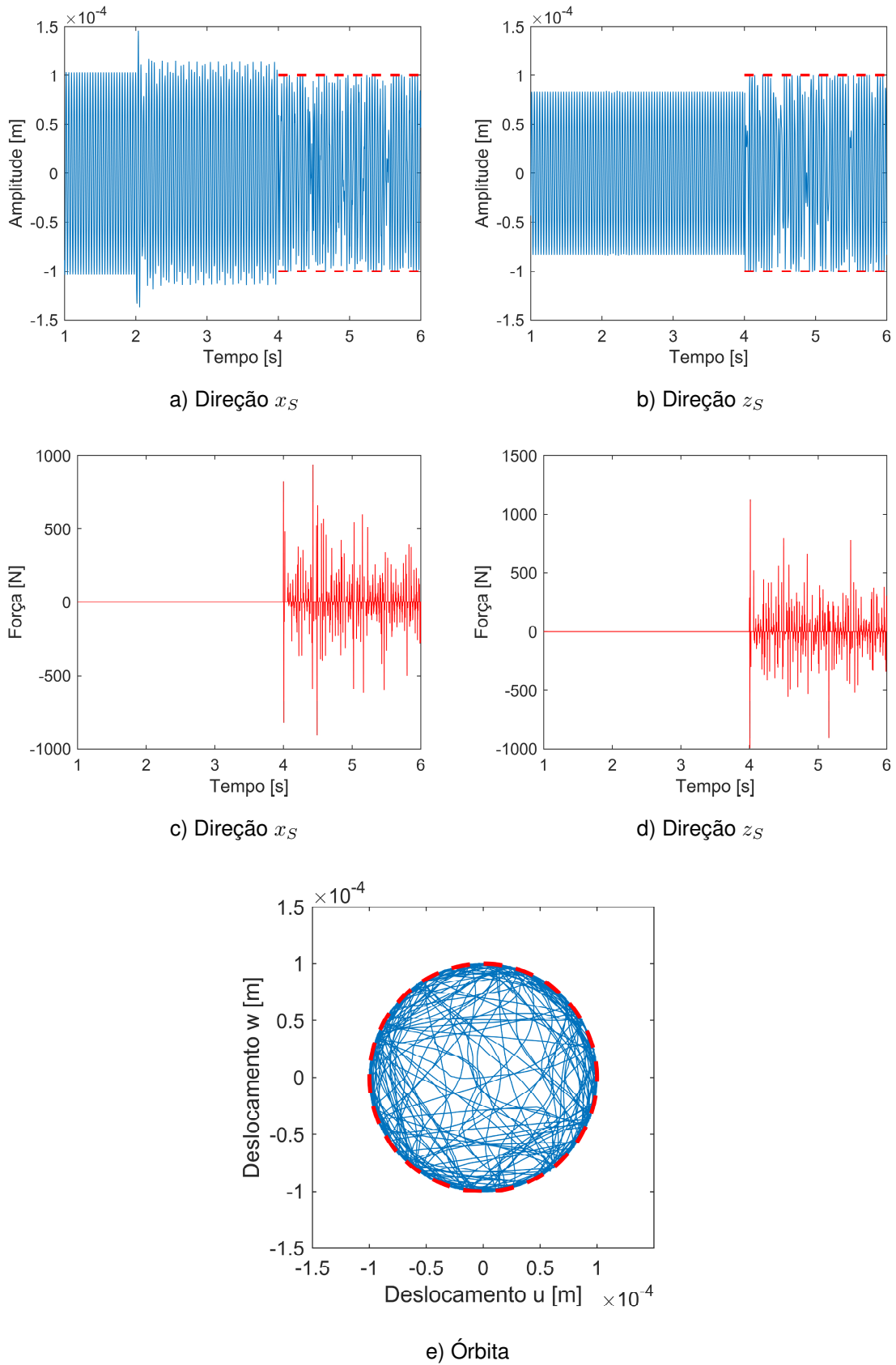
Analisando os resultados obtidos para os Modelo 1 e Modelo 2, considerando uma excitação do tipo seno com amplitude  $1 \times 10^{-5}$ m e frequência de 90Hz (Figs. 4.10 e 4.11), esses se parecem com aqueles da análise feita para o caso com excitação senoidal com  $\Lambda = 1 \times 10^{-4}$ m e  $f = 30$ Hz (Figs. 4.8 e 4.9).



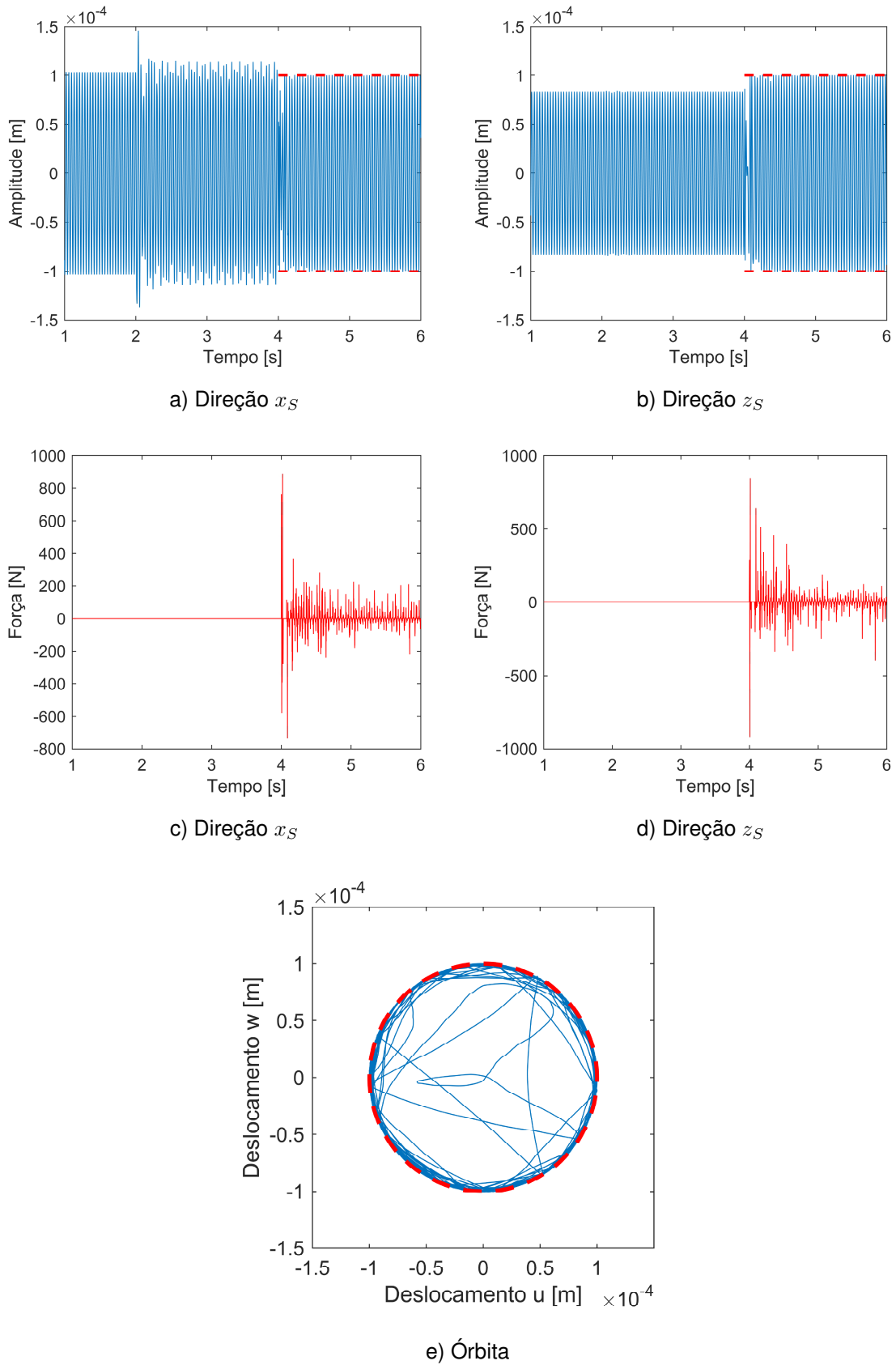
**Figura 4.8.** Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de  $1 \times 10^{-4}$  m, frequência = 30 Hz e folga =  $1,5 \times 10^{-4}$  m.



**Figura 4.9.** Respostas de vibração e força de contato do Modelo 2, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de  $1 \times 10^{-4}$  m, frequência = 30 Hz e folga =  $1,5 \times 10^{-4}$  m.



**Figura 4.10.** Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de  $1 \times 10^{-5}$  m, frequência = 90Hz e folga =  $1 \times 10^{-4}$  m.



**Figura 4.11.** Respostas de vibração e força de contato do Modelo 2, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de  $1 \times 10^{-5}$  m, frequência = 90Hz e folga =  $1 \times 10^{-4}$  m.

## 4.2.2 Excitação Pulso

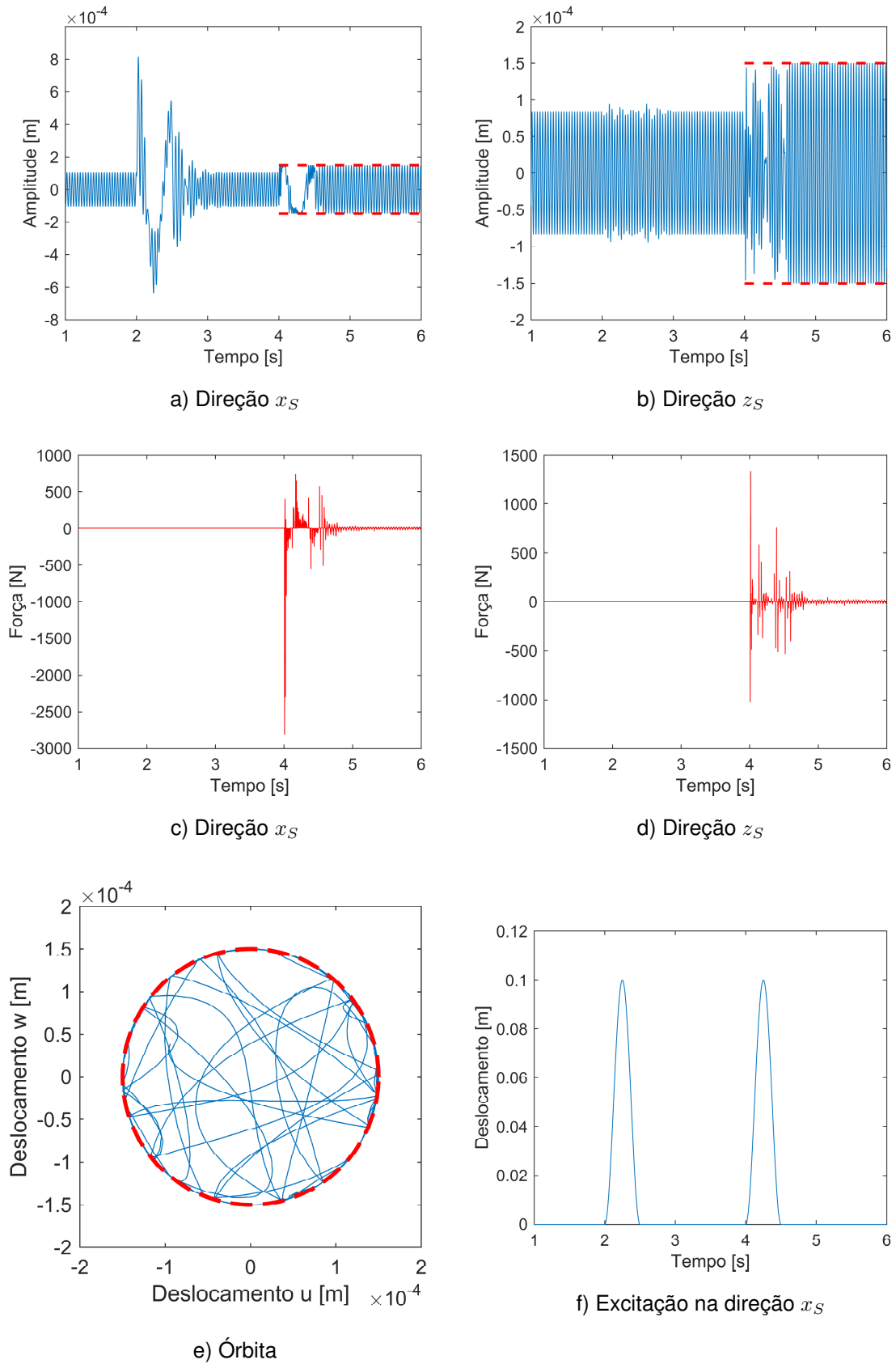
Nas análises seguintes foi escolhido utilizar o Modelo 1 de contato, primeiramente por se tratar de um modelo mais simples (quantidade menor de variáveis para ajustar) e com um tempo computacional menor nas simulações.

Com a finalidade de estudar ainda mais o fenômeno de contato em máquinas rotativas embarcadas, as próximas análises utilizaram uma excitação do tipo pulso na direção  $x_S$  com grandes amplitudes. O tempo de simulação foi de 6s com  $dt = 0,0001s$ . Os pulsos foram gerados nos tempos iguais a 2 e 4 segundos com amplitudes de 0,1m (Fig. 4.12) e 0,5m (Fig. 4.13). A condição de contato foi inserida no tempo igual a 4s e as linhas (- -) mostram os limites/folga radial adotada para cada caso. As simulações foram feitas com o rotor operando a 1600 RPM.

Uma folga radial de  $1,5 \times 10^{-4}m$  foi utilizada para as simulações da Fig. 4.12. As respostas de vibração e força de contato na direção  $x_S$  são apresentadas nas Figs. 4.12a e 4.12c. Os mesmos resultados obtidos na direção  $z_S$  são apresentados nas Figs. 4.12b e 4.12d.

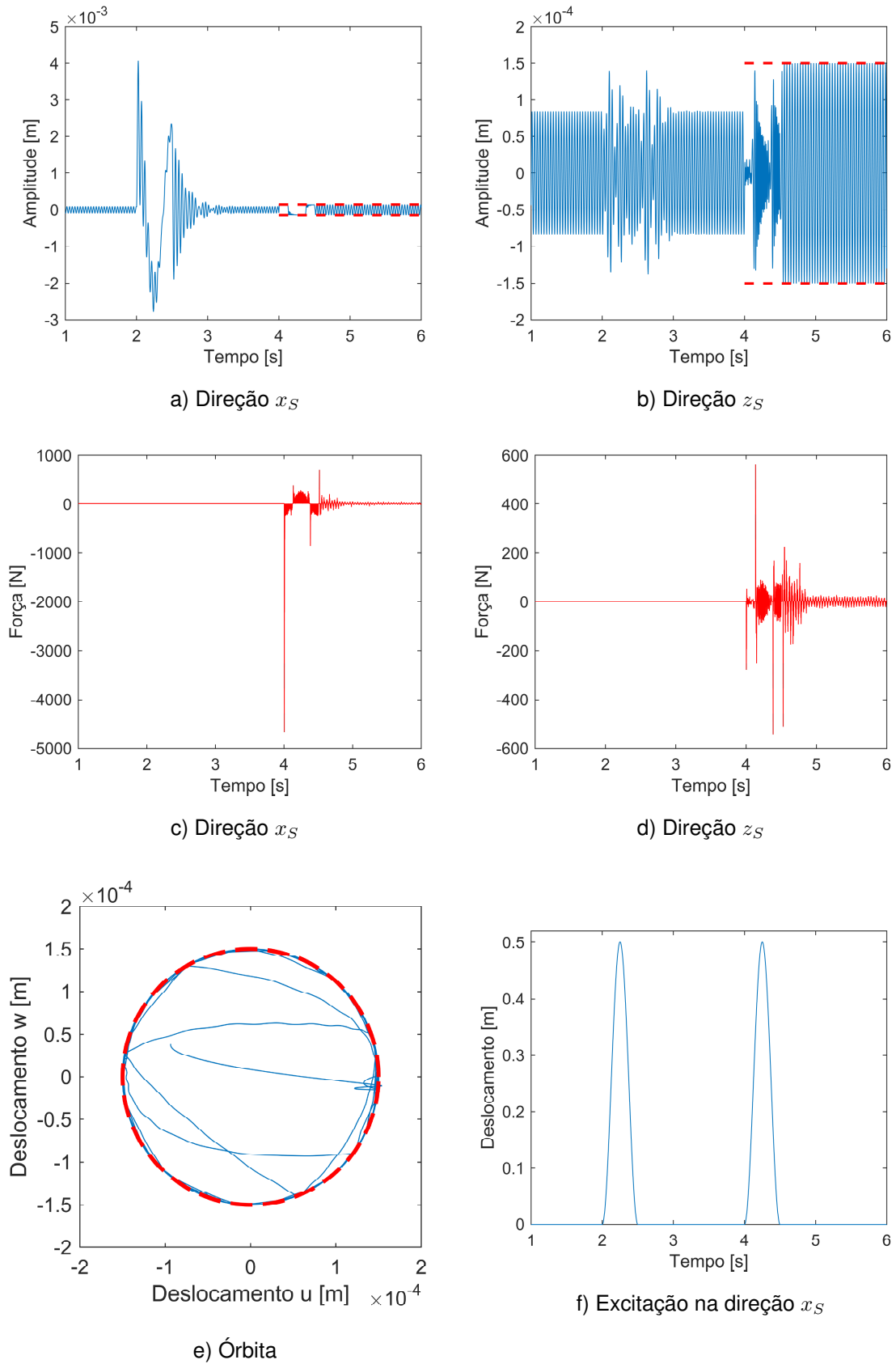
Para a mesma excitação com amplitude de 0,5m (Fig. 4.13e), as respostas de vibração obtidas nas direções  $x_S$  e  $z_S$  são mostradas nas Figs. 4.13a e 4.13b, respectivamente. As forças de contato nas direções  $x_S$  e  $z_S$  são apresentadas nas Figs. 4.13c e 4.13d.

Os grandes deslocamentos da base impostos na direção  $x_S$  mudaram de forma considerável os sinais de vibração do rotor, tanto na direção  $x_S$  como na direção  $z_S$  para as duas amplitudes testadas (Fig. 4.12 e Fig. 4.13). As respostas de vibração, quando a condição de contato é aplicada, apresentam no início um comportamento caótico, níveis de força elevados, porém, a partir do tempo igual a 5s da simulação o rotor estabiliza próximo da região do estator e os valores da força de contato diminuem.



**Figura 4.12.** Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo pulso com amplitude de  $0,1\text{m}$  e folga  $= 1,5 \times 10^{-4}\text{m}$ .





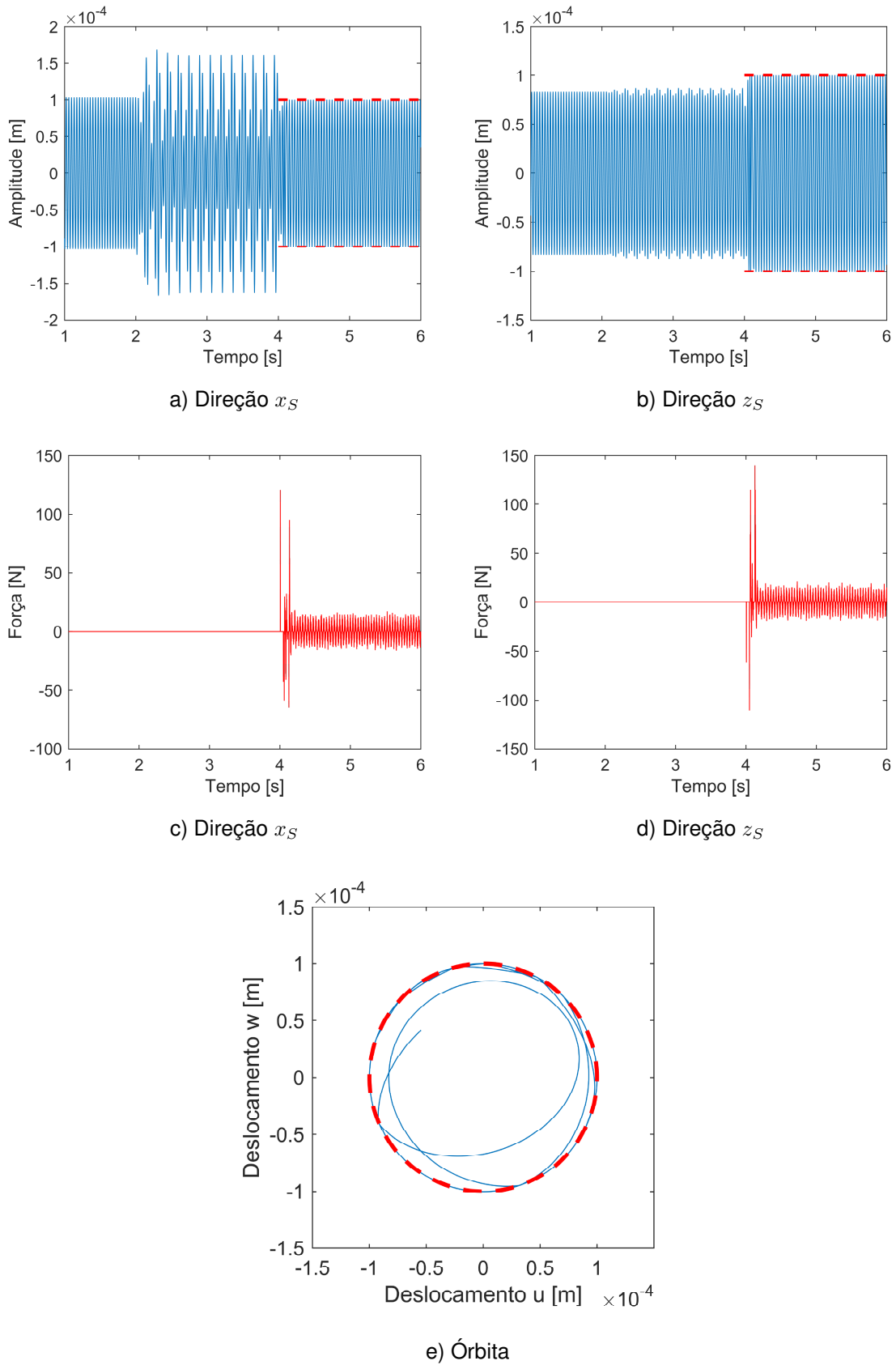
**Figura 4.13.** Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo pulso com amplitude de 0,5m e folga =  $1,5 \times 10^{-4}$ m.

### 4.2.3 Excitação Senoidal

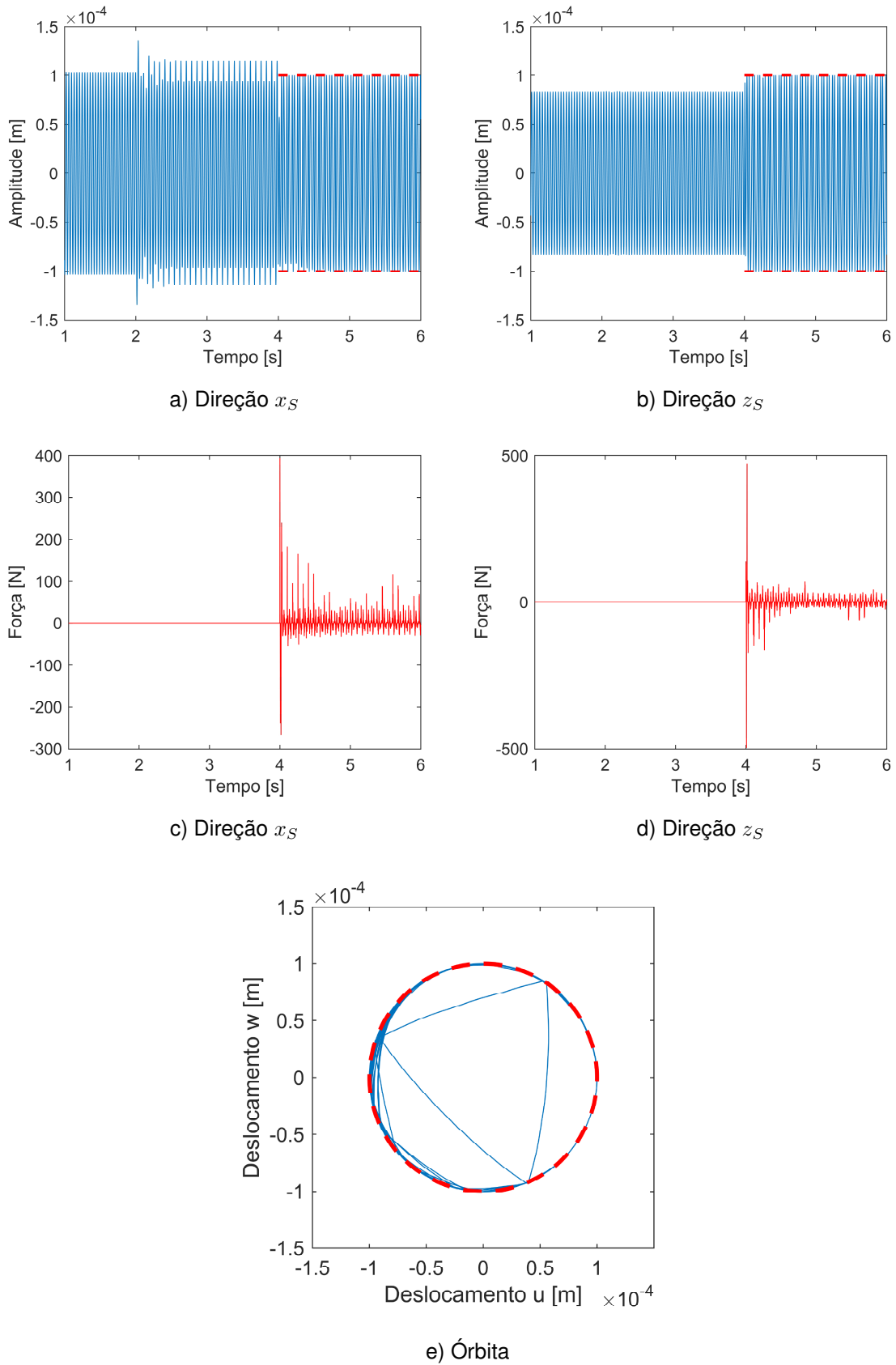
Para a máquina rotativa considerada (Fig. 4.1), os resultados obtidos para um tempo de simulação igual a 6s com um passo de tempo  $dt = 0,0001s$ , usando uma excitação senoidal aplicada ao longo da direção  $x_S$ , dada pela Eq. (4.2), são apresentados nesta seção. A variável  $\Lambda$  foi fixada como sendo igual a  $1 \times 10^{-5}m$  e  $f = 20Hz$ ,  $40Hz$  e  $80Hz$  (Figs. 4.14, 4.15 e 4.16, respectivamente). Os valores de  $f$  escolhidos têm como objetivo de analisar o comportamento dinâmico do rotor devido a excitações pela base para diferentes frequências. Nesse caso, o Modelo 1 foi utilizado, a folga radial adotada foi igual a  $1 \times 10^{-4}m$ , linhas (- -), e a velocidade de operação do rotor  $\Omega$  mantida em 1600 RPM.

As respostas de vibração, órbitas e forças de contato para as frequências de 20Hz, 40Hz e 80Hz são apresentadas nas Figs. 4.14, 4.15 e 4.16, respectivamente.

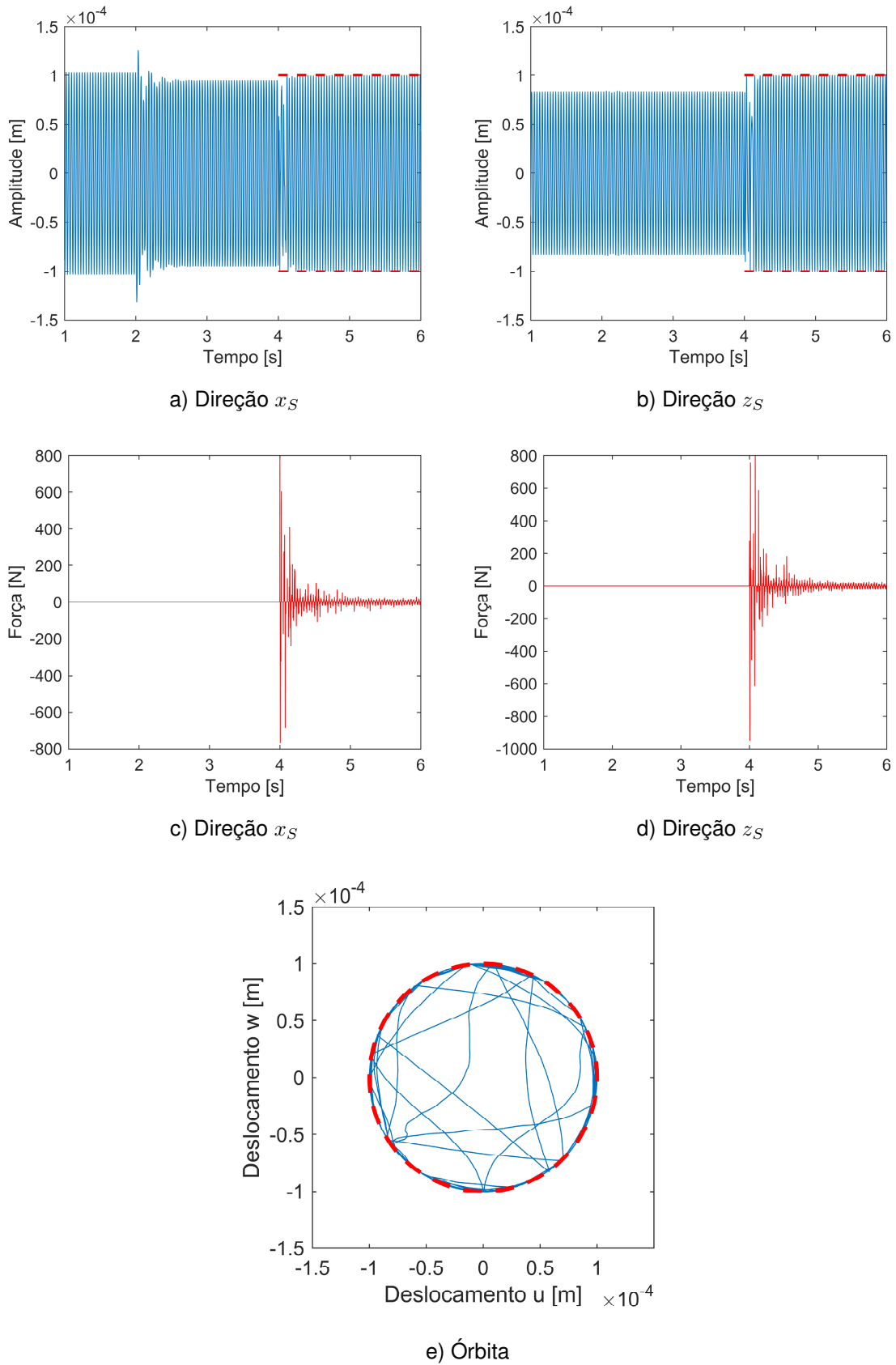
Como esperado, quando a condição de contato é aplicada, as respostas de vibração tendem a manter-se dentro dos limites da folga  $\delta$ , o que se observou para os três casos (ver Figs. 4.14e, 4.15e e 4.16e ). O comportamento da força de contato se dá por níveis elevados no início e diminuem (não desaparecem) quando o rotor estabiliza, o que indica que o contato ainda está acontecendo, só que em menor nível. Nota-se que para o caso de  $f = 80Hz$  as amplitudes da resposta de vibração na direção  $x_S$  diminuem, diferentemente dos outros casos.



**Figura 4.14.** Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de  $1 \times 10^{-5}$  m, frequência = 20Hz e folga =  $1 \times 10^{-4}$  m.



**Figura 4.15.** Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de  $1 \times 10^{-5}$  m, frequência = 40Hz e folga =  $1 \times 10^{-4}$  m.

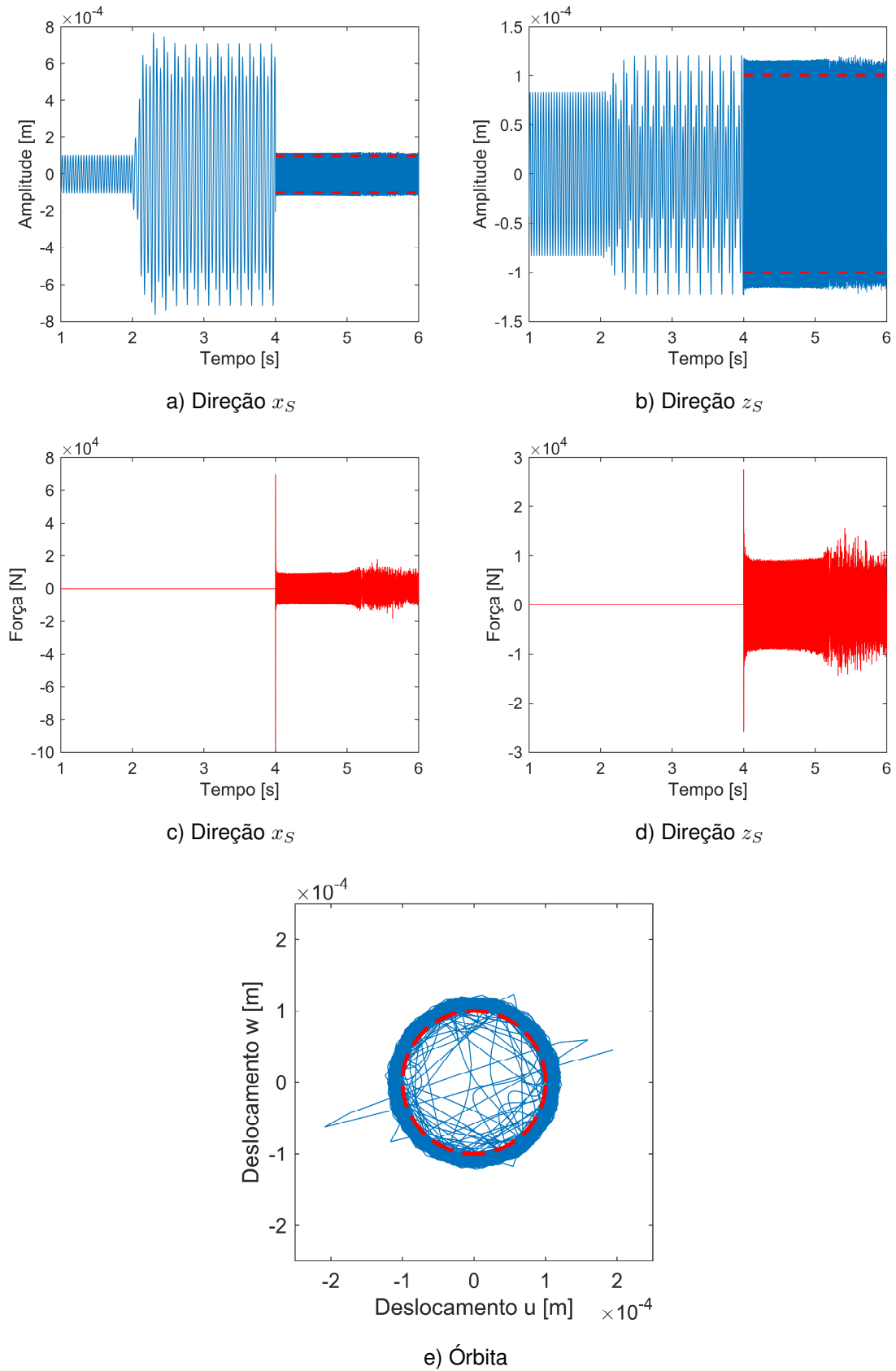


**Figura 4.16.** Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de  $1 \times 10^{-5}$  m, frequência = 80Hz e folga =  $1 \times 10^{-4}$  m.

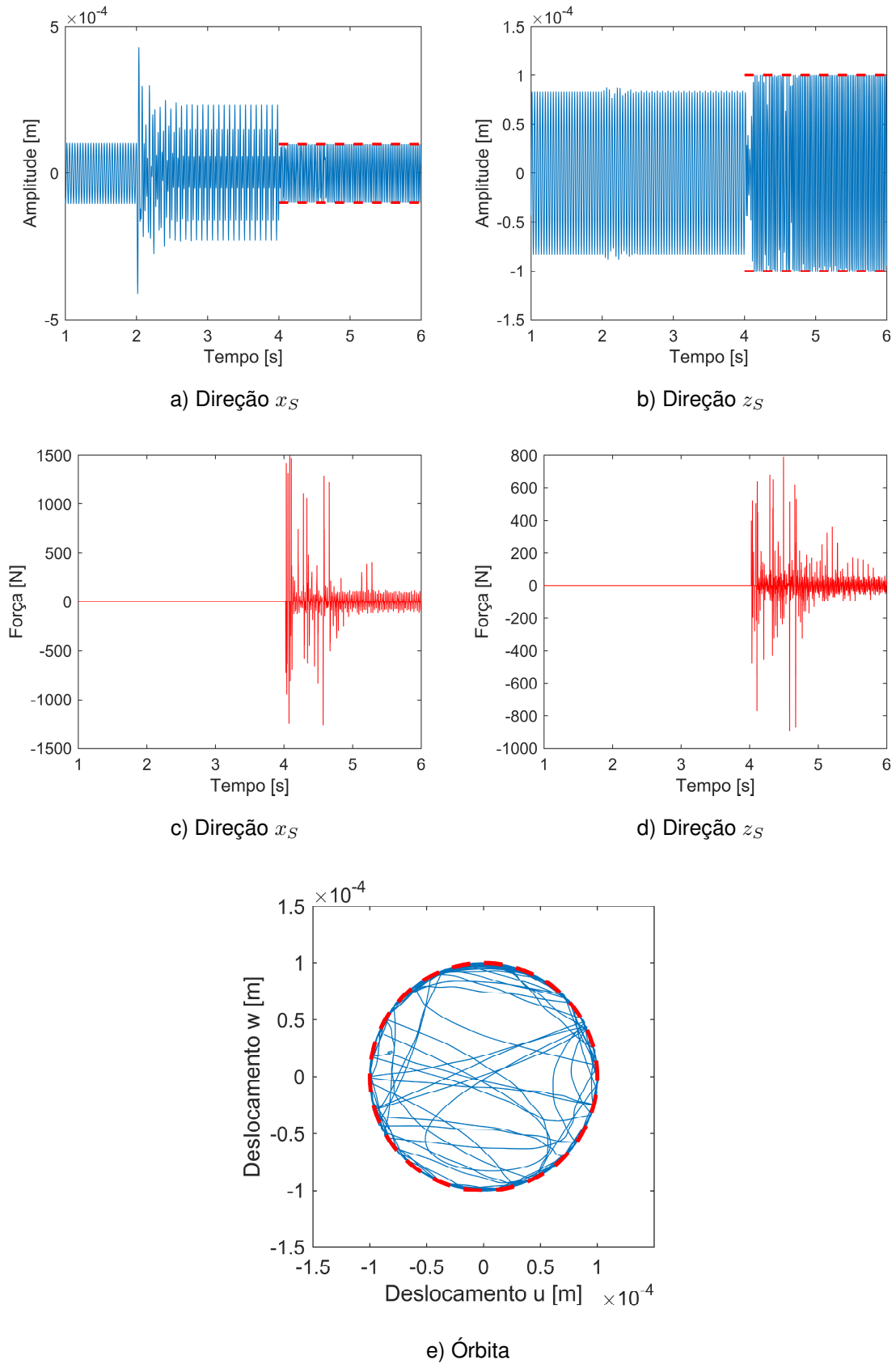
As figuras a seguir mostram os resultados considerando uma excitação senoidal

aplicada ao longo da direção  $x_S$  como mostra a Eq. (4.2). Neste caso,  $\Lambda$  é igual a  $1 \times 10^{-4} \text{m}$  e  $f$  como sendo 20Hz, 40Hz e 80Hz (Figs. 4.14, 4.15 e 4.16, respectivamente). O valor da folga radial utilizada para as simulações foi de  $1 \times 10^{-4} \text{m}$  e a velocidade de operação do rotor  $\Omega$  igual a 1600 RPM.

Como esperado, as amplitudes de vibração ao longo da direção  $x_S$  foram alteradas de maneira mais significativa devido ao movimento da base. Para as frequências de 40Hz e 80Hz (Figs. 4.15 e 4.16), os resultados encontrados atenderam as expectativas, ou seja, após a condição de contato ser aplicada as respostas de vibração nas duas direções ficaram dentro dos limites impostos pela folga radial. Nota-se que, para a frequência de 20Hz, esta condição não atendeu o esperado. É importante ressaltar que para os resultados de  $f = 20 \text{Hz}$  a amplitude de vibração do rotor com a excitação pela base era próxima de  $7 \times 10^{-4} \text{m}$ , e que após a condição de contato, o rotor teria que apresentar níveis próximos de  $1 \times 10^{-4} \text{m}$ , ou seja, uma redução brusca na amplitude. Essa redução na amplitude provoca contato com níveis de força elevados (da ordem de  $10^4$ ), o que pode fazer com que a solução do problema não seja convergente.

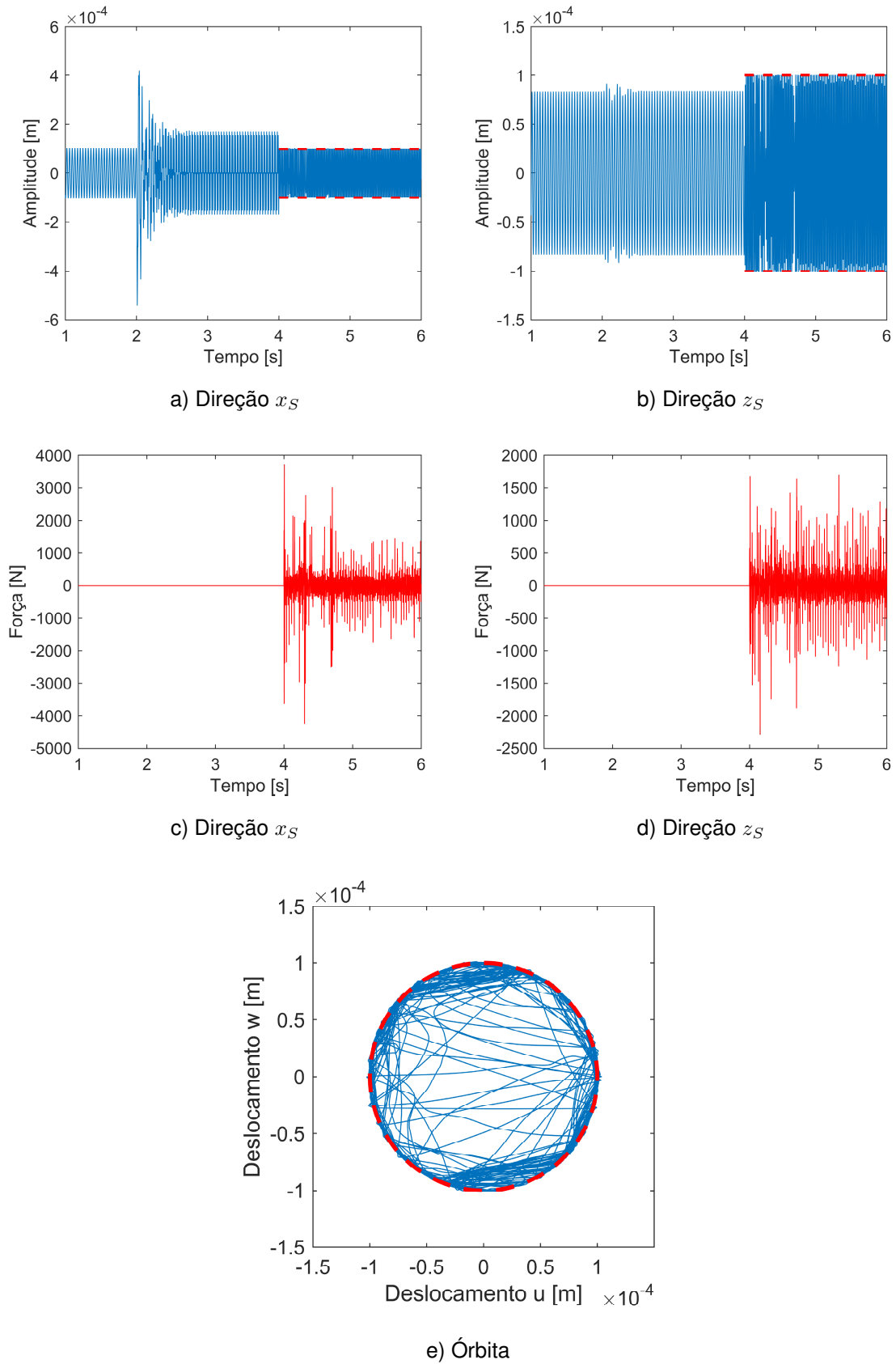


**Figura 4.17.** Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de  $1 \times 10^{-4}$  m, frequência = 20Hz e folga =  $1 \times 10^{-4}$  m.



**Figura 4.18.** Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de  $1 \times 10^{-4}$  m, frequência = 40Hz e folga =  $1 \times 10^{-4}$  m.





**Figura 4.19.** Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de  $1 \times 10^{-4}$  m, frequência = 80Hz e folga =  $1 \times 10^{-4}$  m.

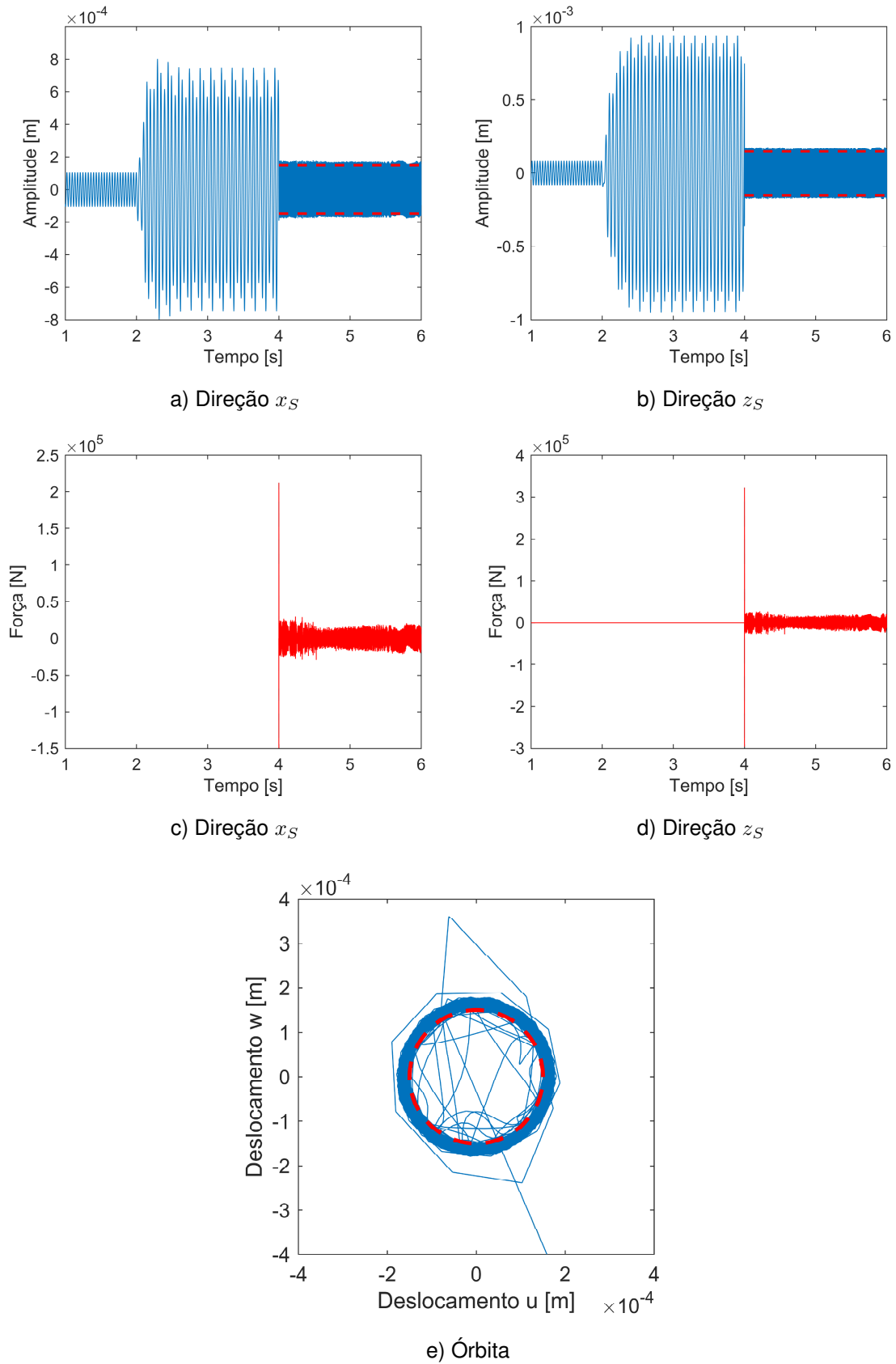
#### 4.2.4 Excitação Senoidal Combinada

Para os resultados apresentados a seguir foi utilizado o modelo de Ishida e Yamamoto (2012) (Modelo 1), considerando os valores apresentados na Tab. 4.2. Nesse caso, foram aplicados dois deslocamentos senoidais de forma simultânea ao longo das direções  $x_S$  e  $z_S$ . As excitações são iguais e dadas pela Eq. (4.2), para  $\Lambda$  como sendo igual a  $1 \times 10^{-4}$  m e  $f = 20$  Hz, 40 Hz e 80 Hz (Figs. 4.20, 4.21 e 4.22, respectivamente). O tempo de simulação foi de 6 s com  $dt = 0,0001$  s. As excitações foram aplicadas a partir do tempo igual a 2 s da simulação e a condição de contato com uma folga radial igual a  $1,5 \times 10^{-4}$  m representadas pela linhas (- -). A velocidade de operação do rotor  $\Omega$  foi de 1600 RPM.

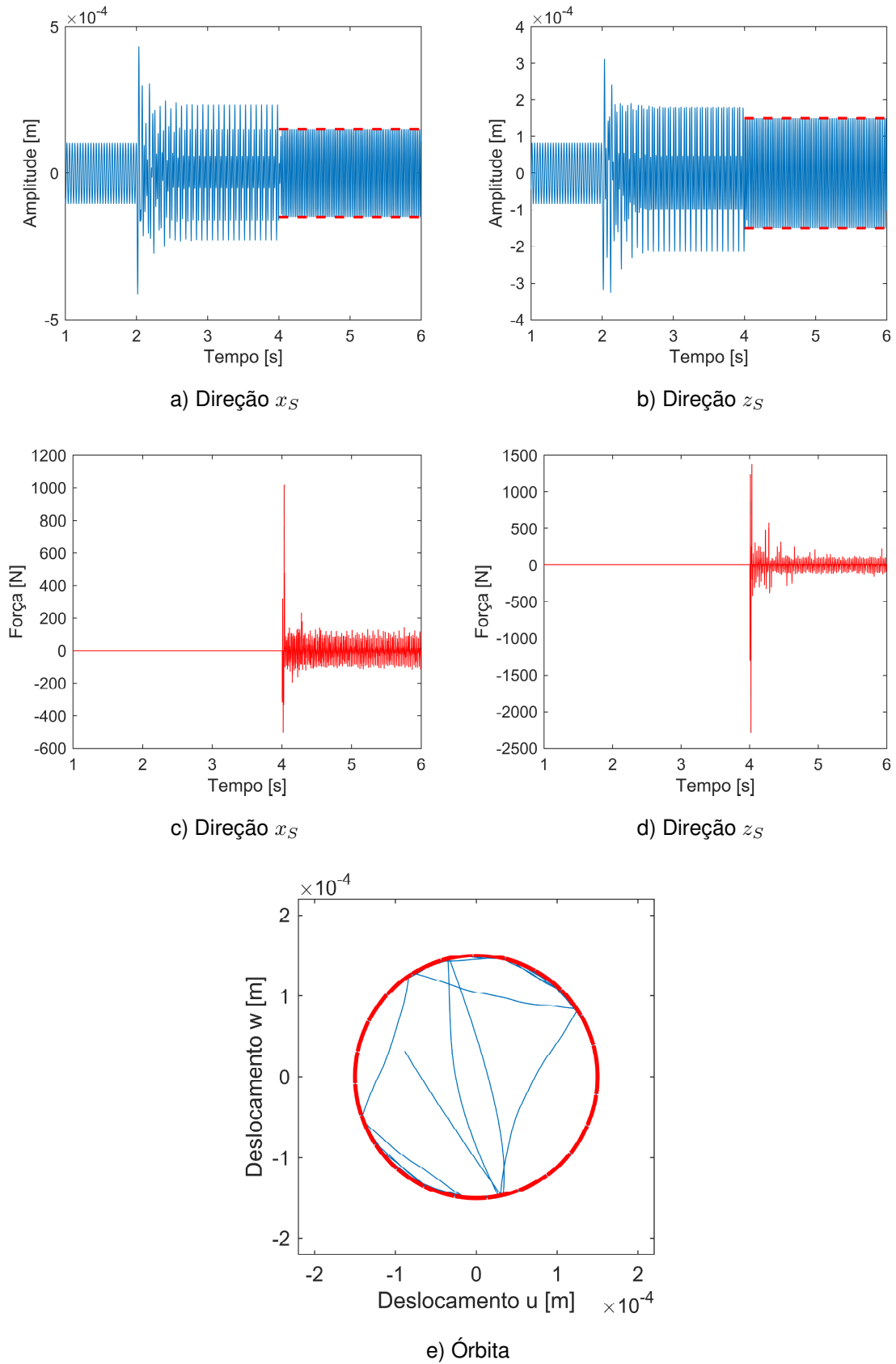
As Figs. 4.20a, 4.21a e 4.22a mostram o sinal de deslocamento ao longo da direção  $x_S$ , para cada valor de frequência analisado. As forças de contato obtidas na direção  $x_S$  são apresentadas nas Figs. 4.20c, 4.21c e 4.22c.

As respostas de vibração na direção  $z_S$  para  $f = 20$  Hz, 40 Hz e 80 Hz são representados pelas Figs. 4.20b, 4.21b e 4.22b, respectivamente. As Figs. 4.20d, 4.21d e 4.22d, mostram as forças medidas ao longo da direção  $z_S$ .

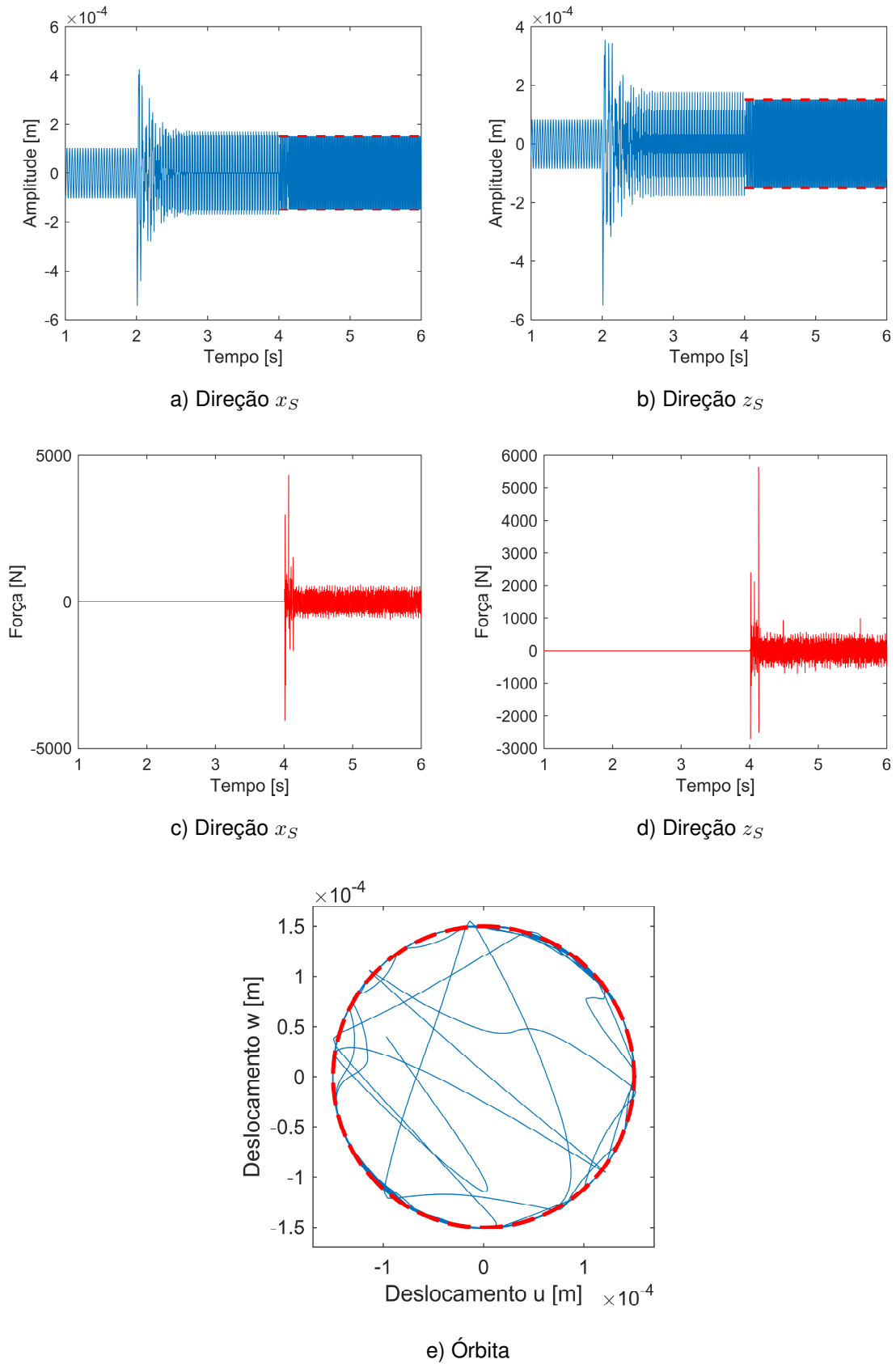
Nota-se que os resultados para  $f = 20$  Hz divergiram e as amplitudes de vibração do rotor ultrapassaram os limites estabelecidos pela folga ( $\delta$ ). Esse fenômeno é chamado de penetração, ou seja, quando o deslocamento radial é maior que a folga considerada. Para os casos de  $f = 40$  Hz e 80 Hz, os resultados atenderam ao esperado. As respostas de vibração do sistema mudaram de acordo com o deslocamento da base e as condições de contato utilizadas.



**Figura 4.20.** Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de  $1 \times 10^{-4}$  m, frequência = 20Hz e folga =  $1,5 \times 10^{-4}$  m.



**Figura 4.21.** Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de  $1 \times 10^{-4}$  m, frequência = 40Hz e folga =  $1,5 \times 10^{-4}$  m.



**Figura 4.22.** Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de  $1 \times 10^{-4}$  m, frequência = 80Hz e folga =  $1,5 \times 10^{-4}$  m.

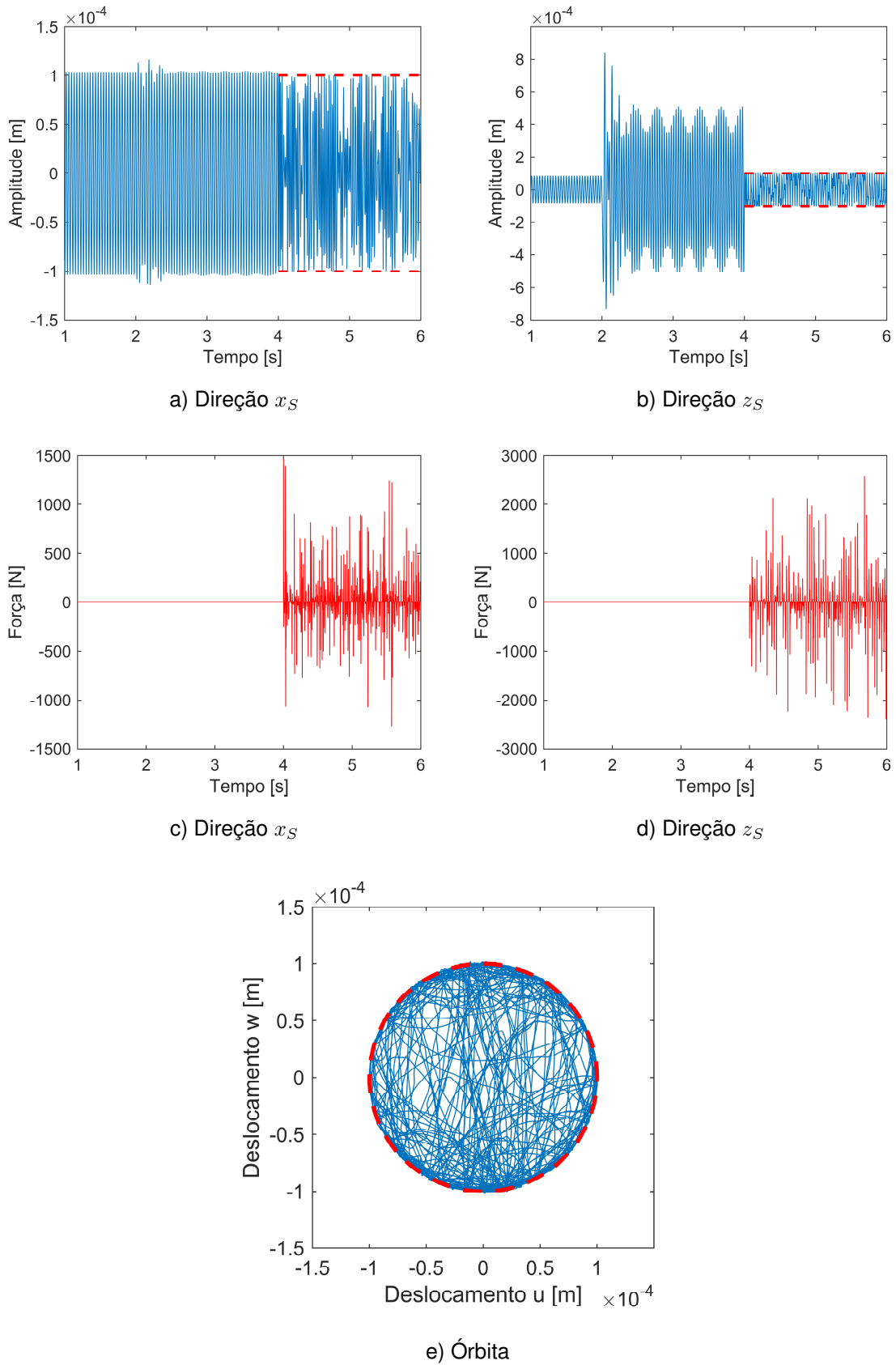
### 4.2.5 Excitação Senoidal Angular

A Fig.4.23 mostra os deslocamentos laterais e forças obtidos a partir de uma excitação angular  $\alpha_S$  (em torno de  $x_S$ , ver Figura 3.1). No caso da Fig.4.24 foi realizado um movimento angular  $\gamma_S$  (em torno de  $z_S$ , ver Figura 3.1).

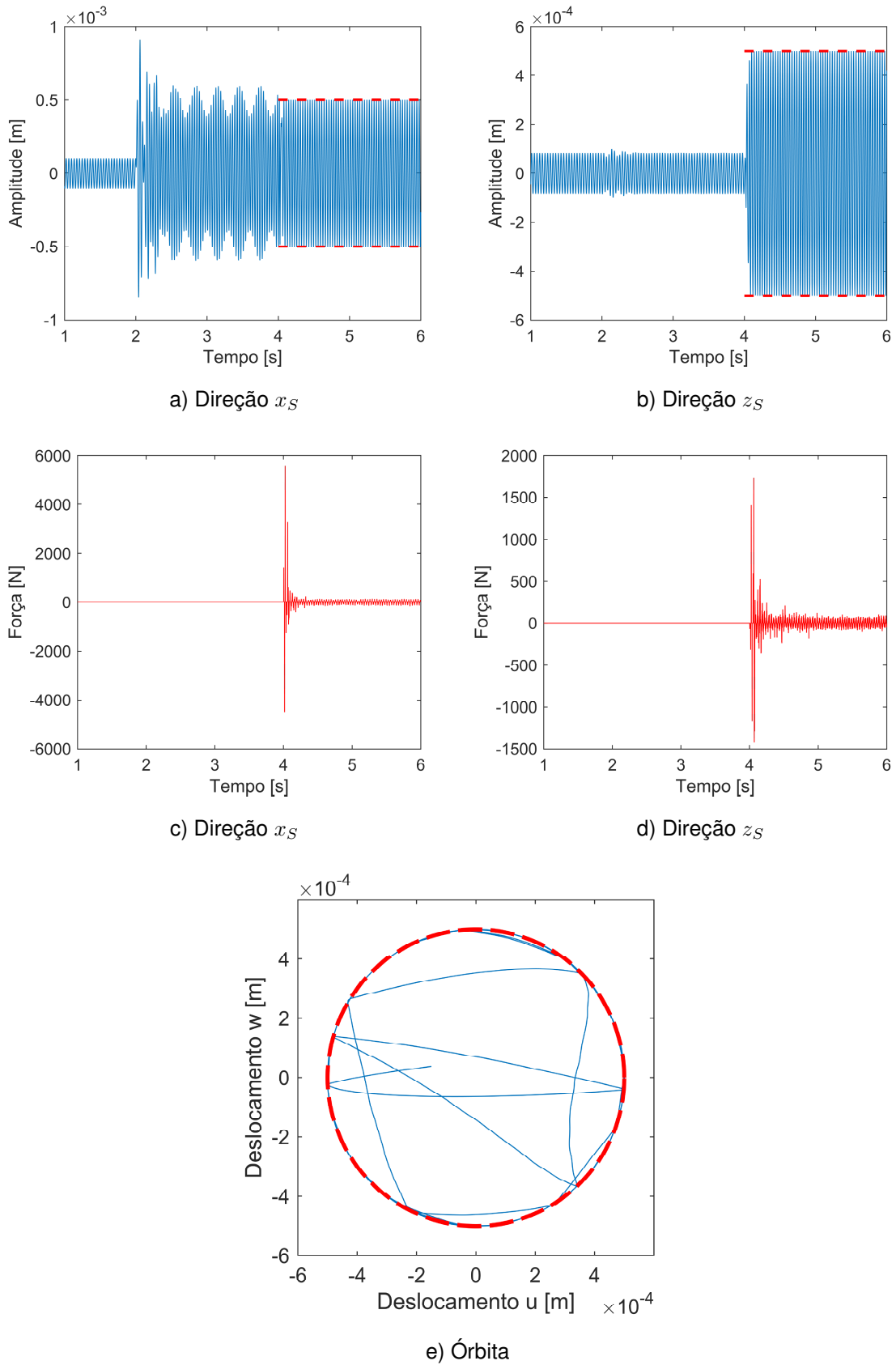
Para ambas as condições de excitação foi utilizado o Modelo 1 de contato, tempo de simulação de 6s com passo de tempo  $dt = 0,0001s$ . As excitações foram aplicadas a partir do tempo igual a 2s da análise e a condição de contato entre os tempos iguais a 4 e 6 segundos. A velocidade de operação do rotor  $\Omega$  foi de 1600 RPM.

Os movimentos angulares impostos são da forma dada pela Eq.(4.2). Para a rotação  $\alpha_S$  os valores de  $\Lambda = 1 \times 10^{-3}$ ,  $f = 30\text{Hz}$  e  $\delta = 1 \times 10^{-4}\text{m}$  são adotados. Para a rotação  $\gamma_S$  os valores utilizados foram  $\Lambda = 1 \times 10^{-3}$ ,  $f = 30\text{Hz}$  e folga radial igual a  $5 \times 10^{-4}\text{m}$ .

Nota-se que para os dois casos as respostas de vibração respeitam as condições impostas pela excitação pela base e pelo contato. Como esperado, as amplitudes de vibração ao longo da direção  $z_S$  (Fig.4.23b) foram alteradas de maneira mais significativa devido ao movimento de rotação  $\alpha_S$  da base. Para o caso da rotação  $\gamma_S$  as respostas de vibração mais afetadas ocorreram ao longo da direção  $x_S$  (Fig.4.24a).



**Figura 4.23.** Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de  $1 \times 10^{-3}$  m, frequência = 30Hz e folga =  $1 \times 10^{-4}$  m.



**Figura 4.24.** Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de  $1 \times 10^{-3}$  m, frequência = 30Hz e folga =  $5 \times 10^{-4}$  m.



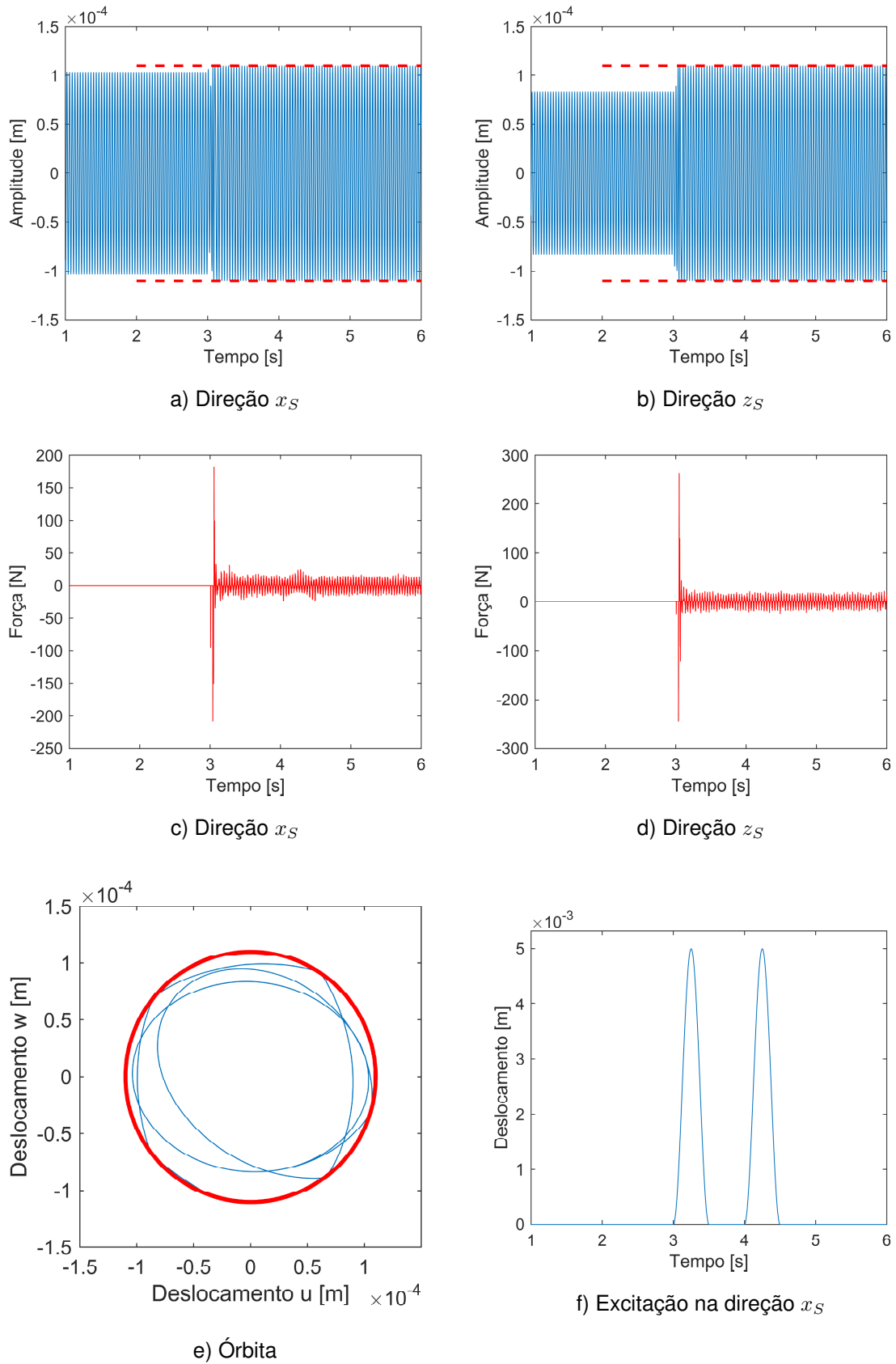
## 4.2.6 Condição Crítica de Excitação pela Base e Contato

As simulações apresentadas anteriormente atenderam a seguinte ordem: primeiro, inserindo uma excitação pela base, ou seja, após a aplicação da excitação pela base o rotor entra em regime permanente para esta condição, e depois, aplicando os limites estabelecidos pelo contato. Neste caso, será avaliado o comportamento (embarcado+contato) onde as condições de contato são adotadas antes da excitação, o que se aproxima mais da realidade.

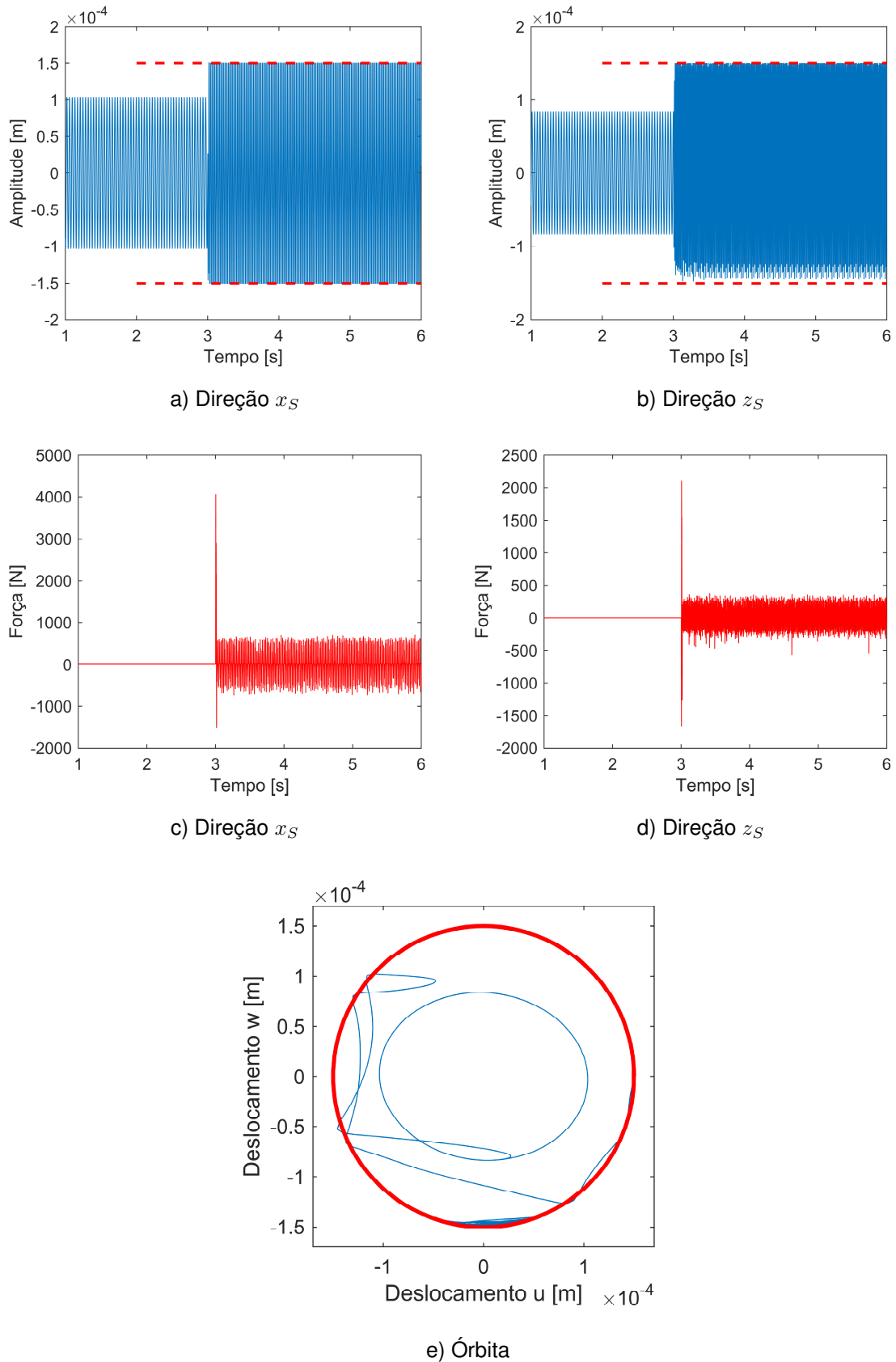
Para analisar este caso foram utilizadas uma excitação do tipo pulso e uma excitação senoidal, ambas aplicadas ao longo da direção  $x_S$ . O tempo de simulação foi de 6s, a condição de contato foi adotada a partir do tempo 2s da análise e as excitações foram inseridas entre os tempos de 3s e 6s da simulação.

A excitação do tipo pulso com amplitude de 5mm é apresentada na Fig.4.25f, enquanto que a excitação senoidal utilizada na Fig.4.26 é dada pela Eq.(4.2), com  $\Lambda = 1 \times 10^{-3}$ ,  $f = 40\text{Hz}$  e folga radial =  $1,5 \times 10^{-4}\text{m}$ .

Nota-se que, mesmo com a condição de contato pré-existente ambas as respostas não divergiram da solução esperada. Como esperado, a partir do tempo de 3s da simulação numérica, as amplitudes de vibração do sistema aumentam até atingirem a barreira física (estator) causando contato, como consequência das excitações inseridas pela base. Nas simulações anteriores notou-se que quando a excitação é inserida o rotor passa por um regime transiente, o que pode gerar instabilidade nas respostas e fazer divergir a solução. Portanto, mesmo com a condição de contato já existindo, os resultados apresentados não divergiram.



**Figura 4.25.** Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de  $1 \times 10^{-4}$  m, frequência = 20Hz e folga =  $1,5 \times 10^{-4}$  m.



**Figura 4.26.** Respostas de vibração e força de contato do Modelo 1, para uma excitação do tipo senoidal com amplitude de  $1 \times 10^{-3}$  m, frequência = 40Hz e folga =  $1,5 \times 10^{-4}$  m.

As análises numéricas realizadas neste capítulo ajudam no estudo do sistema ro-

tativo excitado pela base quando da ocorrência de contato mecânico. Na maioria das simulações realizadas a solução do problema convergiu, ou seja, as respostas de vibração ficaram limitadas pela condição de contato estabelecida. Os valores dos parâmetros da condição de contato foram baseados na literatura para cada modelo. Nota-se que o valor de rigidez da condição de contato é naturalmente alto, o que pode gerar valores elevados da força de contato em alguns casos.

Analisando os resultados numéricos dos Modelo 1 e Modelo 2 nota-se que existem diferenças nas respostas de vibração e força. O Modelo 2 apresentou uma melhor estabilidade das respostas de vibração durante a condição de contato. Durante as simulações numéricas notou-se que o tempo de simulação do Modelo 1 é menor do que o verificado para o Modelo 2, situação essa já esperada pois o Modelo 2 é mais complexo e considera um número maior de parâmetros. Desta forma, o Modelo 1 foi utilizado para a maioria das simulação numéricas deste capítulo.

# Capítulo 5

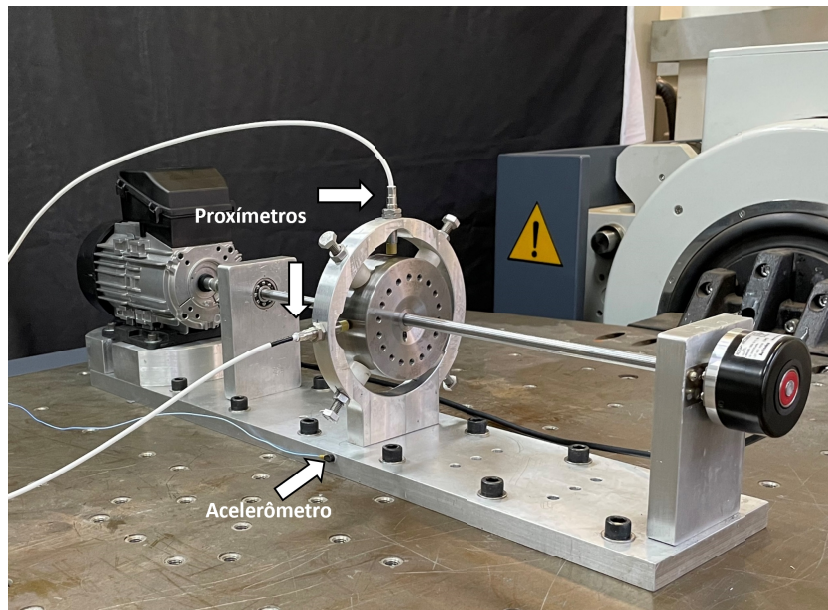
## Resultados Experimentais

Este capítulo apresenta a validação experimental do modelo EF de rotores embarcados com contato mecânico apresentado neste trabalho. Foi construída uma bancada de testes própria para a realização dos experimentos. Vale ressaltar que a bancada de teste utilizada neste capítulo é diferente da utilizada no Capítulo 4. Os resultados experimentais das funções de resposta em frequência e sinais no tempo foram utilizados para ajustar o modelo numérico de elementos finitos (EF). O comportamento dinâmico da máquina rotativa foi estudado a partir de diferentes excitações e condições de contato impostas ao sistema.

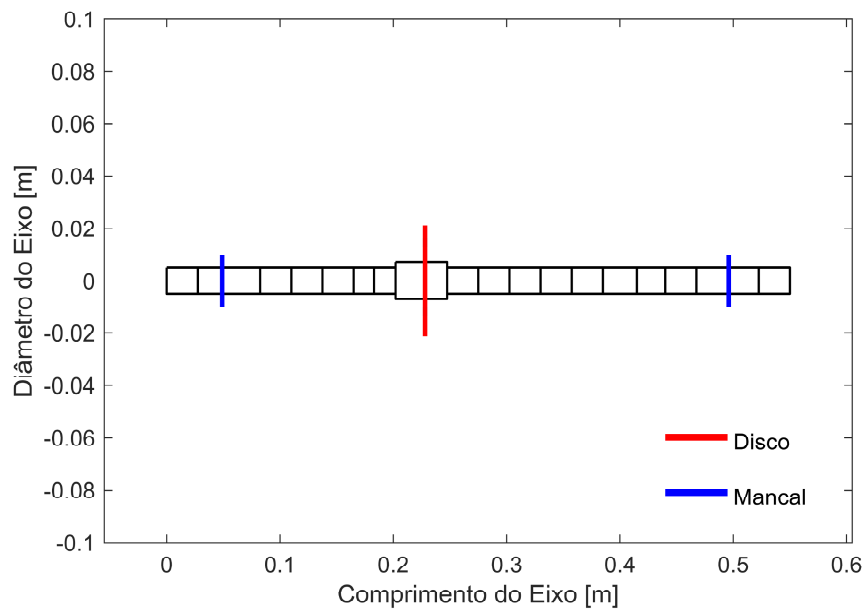
### 5.1 Bancada de Testes

A Fig. 5.1a mostra a bancada de testes de rotor utilizada como referência na análise do comportamento dinâmico do sistema, sendo esta matematicamente representada por um modelo com 21 elementos finitos (modelo EF; Fig. 5.1b). A bancada é composta por um eixo de aço flexível com 550 mm de comprimento e 10 mm de diâmetro ( $E = 190$  GPa e  $\rho = 7806$   $kg/m^3$ ), um disco rígido D (nó #10; 2,300 kg; conforme o modelo EF) de aço com 100 mm de diâmetro e 40 mm de espessura ( $\rho = 7842$   $kg/m^3$ ), e dois rolamentos autocompensadores de esfera (B1 e B2, localizados nos nós #3 e #20, respectivamente). Os sensores de deslocamento (Meggit TQ-412 com alcance de 4 mm) são montados ortogonalmente no nó #10 ( $S_{10xs}$  e  $S_{10zs}$ ) para coletar a vibração do disco. O sistema é acionado por um motor elétrico DC. As medições foram realizadas pelo analisador Agilent® (modelo 35670A) em uma faixa de 0 a 250

Hz e passos de 0,25 Hz.



a) Bancada de testes



b) Modelo elementos finitos (EF) da bancada de testes

**Figura 5.1.** Máquina rotativa utilizada nas análises experimentais.

Um procedimento de ajuste foi usado para obter um modelo EF representativo (Fig. 5.1b). Nesse sentido, uma técnica de otimização heurística (Evolução Diferencial (PRICE; STORN; LAMPINEN, 2006)) foi usada para determinar os parâmetros desconhecidos do modelo. Os parâmetros são os coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais (B1 e B2) e uma rigidez de rotação ( $k_{ROT}$ ) devido ao acoplamento

entre o motor elétrico e o eixo (adicionado em torno das direções ortogonais  $x_S$  e  $z_S$  do nó #1.

As  $FRFs$  experimentais foram obtidas para a bancada de teste em repouso (condição de base fixa e velocidade de rotação nula) aplicando forças de impacto (usando um martelo de impacto) nas direções  $x_S$  e  $z_S$  do disco. Os sinais de resposta foram medidos pelos dois sensores de deslocamento posicionados nas mesmas direções das forças de impacto, resultando em duas  $FRFs$  (Fig. 5.2).

O processo de ajuste no domínio da frequência (ou seja, comparação entre as funções de resposta em frequência numérica e experimental,  $FRFs$ ) foi realizado 10 vezes consecutivas, considerando 100 indivíduos na população inicial do otimizador, para determinar o mínimo da função objetivo considerada. A função objetivo adotada neste caso é apresentada pela Eq. (5.1). No entanto, neste caso apenas as regiões próximas aos picos associados às frequências naturais foram consideradas no ajuste.

$$Objetivo = \sum_{i=1}^n \frac{\|\mathbf{FRF}_{exp,i} - \mathbf{FRF}_{num,i}\|}{\|\mathbf{FRF}_{exp,i}\|} \quad (5.1)$$

onde  $n$  é o número de  $FRFs$  usadas no processo de minimização,  $\mathbf{FRF}_{exp}$  representa as  $FRFs$  experimentais medidas na máquina rotativa e  $\mathbf{FRF}_{num}$  são as respostas em frequência numéricas correspondentes determinadas usando o modelo EF do rotor.

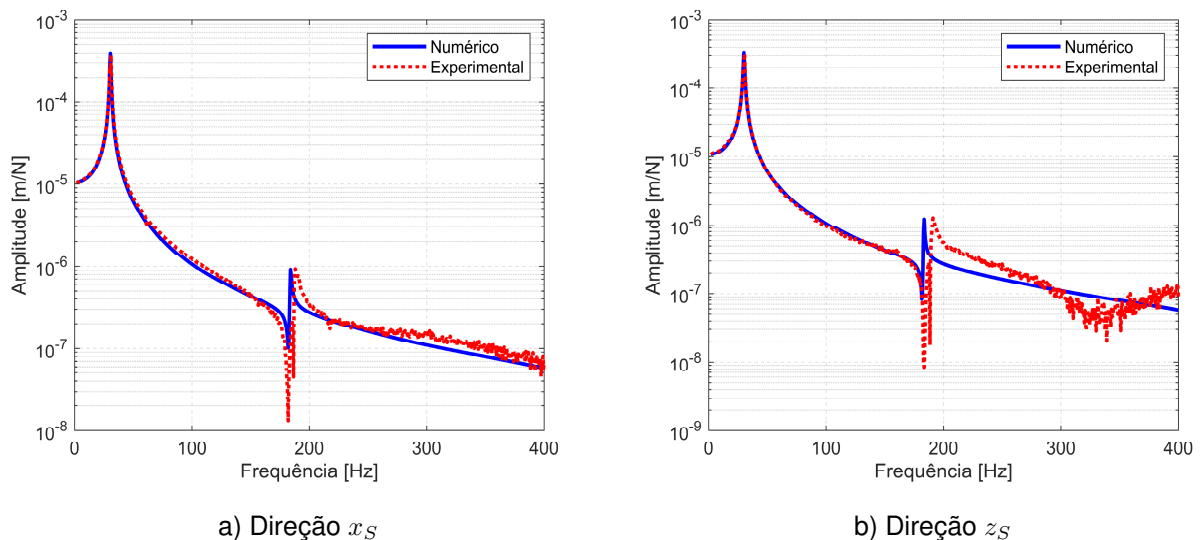
A Tabela 5.1 apresenta os valores obtidos para os parâmetros desconhecidos, bem como o espaço de projeto associado a cada variável desconhecida.

A Figura 5.2a compara as  $FRFs$  numérica e experimental obtidas na direção  $x_S$  usando o modelo EF ajustado. As  $FRFs$  obtidas na direção  $z_S$  são mostradas na Fig. 4.2b. Observe que os resultados numéricos para o primeiro modo estão satisfatoriamente próximos aos medidos na bancada de teste de rotor. Nota-se que para o segundo modo os resultados divergem em termos da frequência; supõem-se que parâmetros ainda desconhecidos da bancada de teste não foram inseridos no modelo numérico. Para a obtenção dos resultados experimentais a faixa de operação da bancada de teste não ultrapassou os 25 Hz (1500 RPM), ou seja, foi considerado apenas o primeiro modo da  $FRF$ .

**Tabela 5.1.** Parâmetros determinados pelo procedimento de ajuste do modelo.

Parâmetros	Limite Inferior	Valor	Limite Superior
<i>Mancal1</i> $k_{xx}$	$2.5 \times 10^{11}$	$2.61 \times 10^{11}$	$2.7 \times 10^{11}$
<i>Mancal1</i> $k_{zz}$	$8.1 \times 10^{11}$	$8.23 \times 10^{11}$	$8.4 \times 10^{11}$
<i>Mancal1</i> $c_{xx}$	$3.5 \times 10^3$	$3.78 \times 10^3$	$3.8 \times 10^3$
<i>Mancal1</i> $c_{zz}$	$5 \times 10^3$	$5.16 \times 10^3$	$5.2 \times 10^3$
<i>Mancal2</i> $k_{xx}$	$3.4 \times 10^{11}$	$3.55 \times 10^{11}$	$3.7 \times 10^{11}$
<i>Mancal2</i> $k_{zz}$	$8.2 \times 10^{11}$	$8.37 \times 10^{11}$	$8.5 \times 10^{11}$
<i>Mancal2</i> $c_{xx}$	$1.6 \times 10^3$	$1.76 \times 10^3$	$1.8 \times 10^3$
<i>Mancal2</i> $c_{zz}$	$1.8 \times 10^3$	$1.91 \times 10^3$	$2 \times 10^3$
$\xi_1$	0.0158	0.0159	0.016
$\xi_2$	0.012	0.013	0.014
$\xi_3$	0.0018	0.0019	0.002
$\xi_4$	0.0028	0.0029	0.003
$k_{ROTx}$	$2 \times 10^3$	$2.28 \times 10^3$	$2.3 \times 10^3$
$k_{ROTz}$	$2.8 \times 10^3$	$3.03 \times 10^3$	$3.1 \times 10^3$

\* $k$ : rigidez [N/m];  $c$ : amortecimento [Ns/m];  $\xi$ : fator de amortecimento modal;  $k_{ROT}$ : rigidez de rotação [Nm/rad].



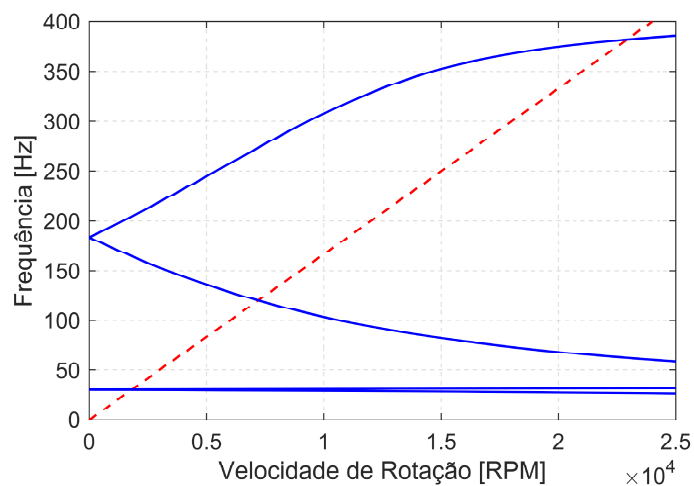
**Figura 5.2.** FRFs numérica (—) e experimental (---) da máquina rotativa (em repouso).

O diagrama de Campbell determinado a partir do modelo EF representativo da máquina rotativa é apresentado na Fig. 5.3, na qual as velocidades críticas de  $BW$  e  $FW$  são, aproximadamente 1797 RPM e 1829 RPM, respectivamente (ver Fig. 4.4).

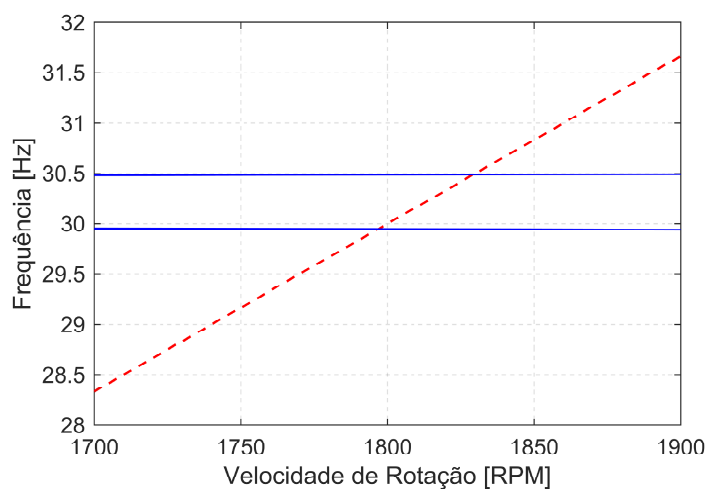
A Fig. 5.5 compara a as respostas de vibração na direção  $x_S$  (Fig. 5.5a),  $z_S$  (Fig. 5.5b) e as órbitas (Fig. 5.5c) numérica e experimental, esta medida no plano  $S_{10}$ . Neste caso, a velocidade de rotação do rotor é  $\Omega = 1200$  RPM e um desbalanceamento de 0,43 g.mm foi aplicado no disco, sem nenhum balanceamento preliminar



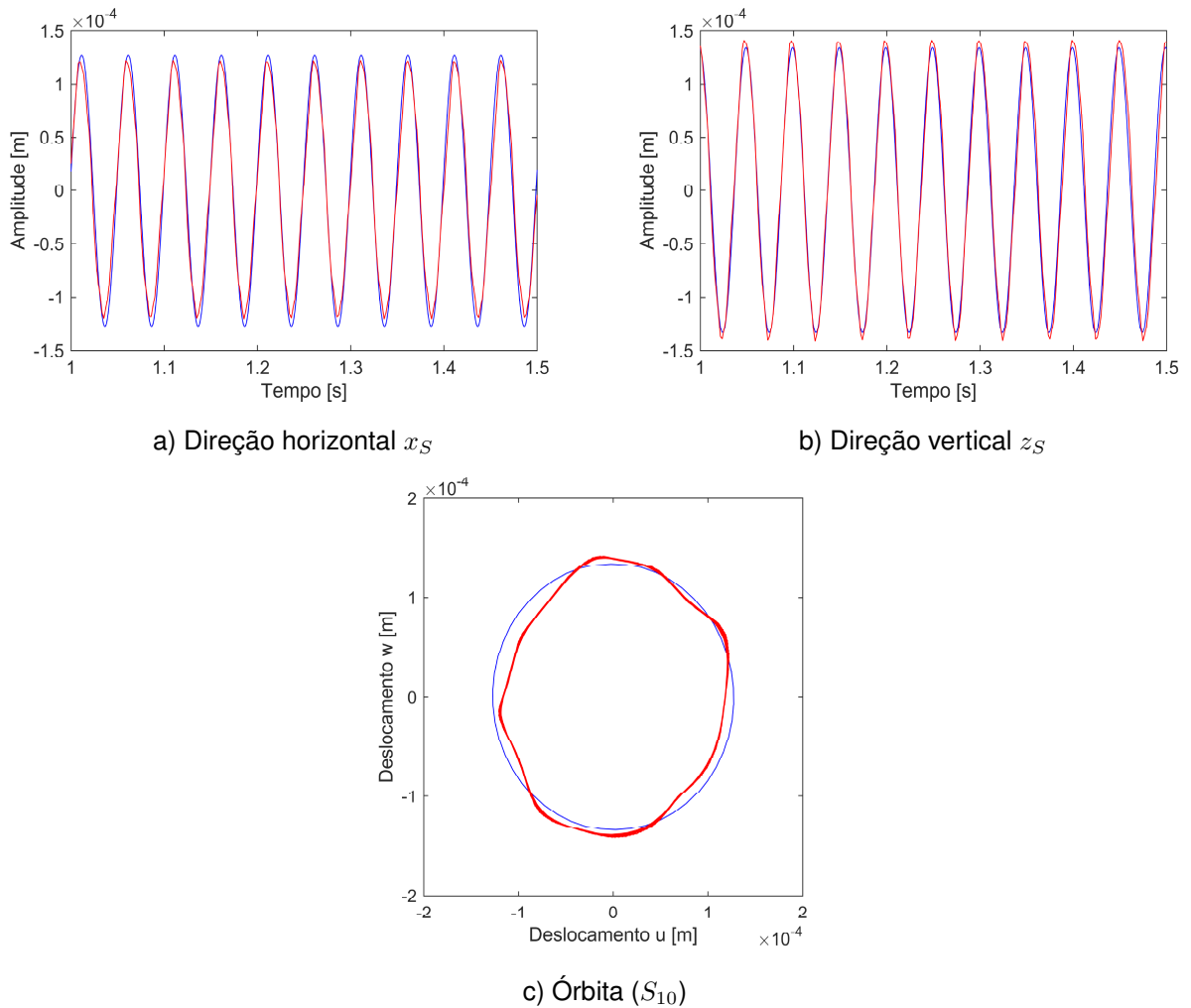
introduzido anteriormente. Observe que as respostas numéricas e experimentais são próximas, validando o procedimento de ajuste realizado.



**Figura 5.3.** Diagrama de Campbell do modelo EF numérico.



**Figura 5.4.** Zoom do Diagrama de Campbell.

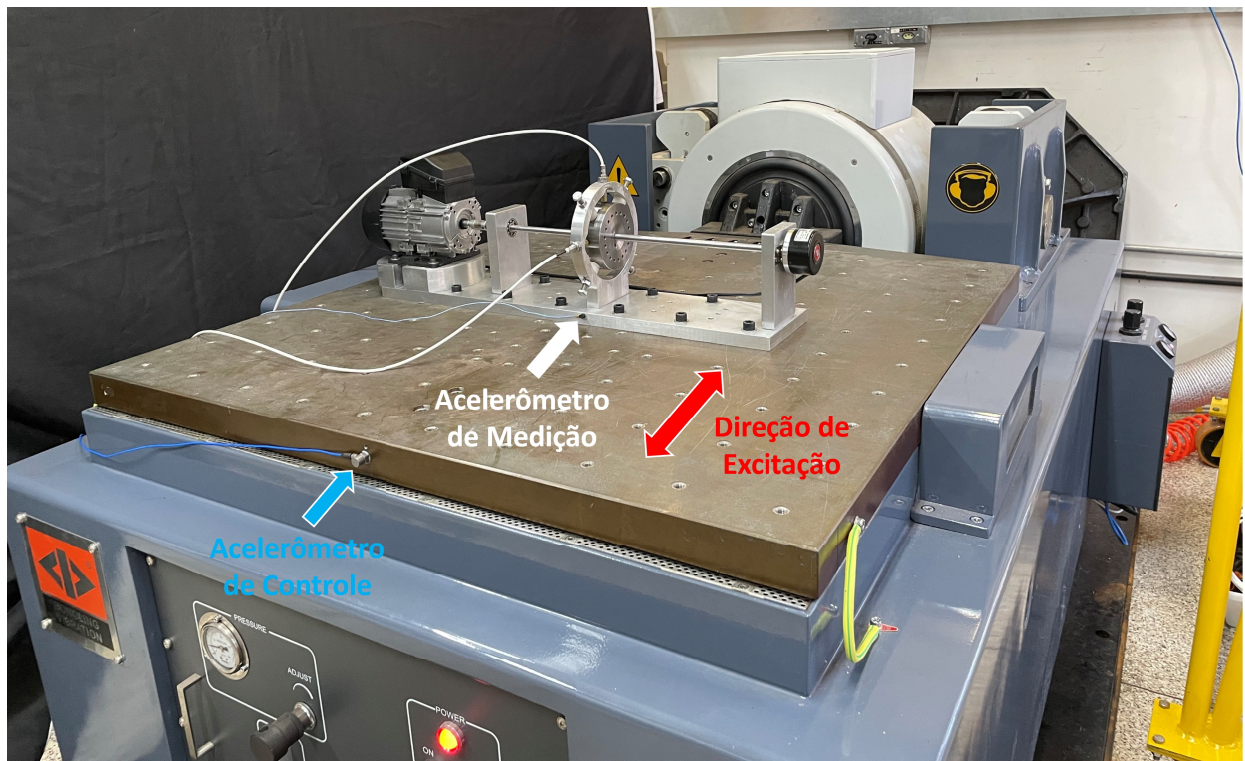


**Figura 5.5.** Resultado numérico (—) e experimental (—) da máquina rotativa para a velocidade de 1200 RPM.

## 5.2 Análise Experimental do Modelo de Rotor Embarcado com Contato Mecânico

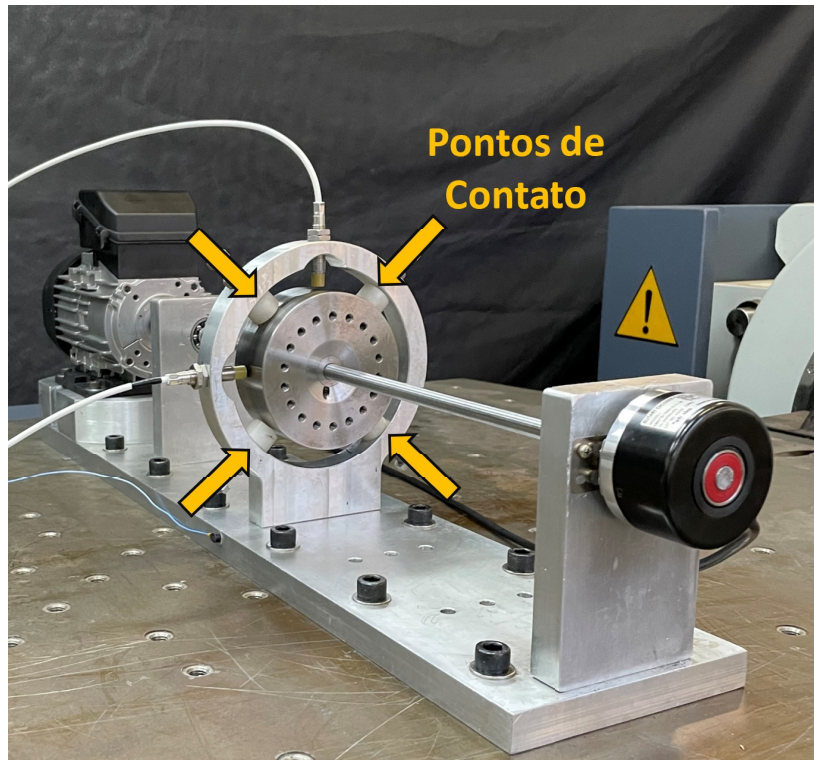
Nesta seção, o comportamento dinâmico da bancada de teste de rotor apresentado na Fig. 5.1 é avaliado considerando diferentes excitações pela base e condições de contato. As respostas de vibração da bancada são comparadas com os resultados numéricos obtidos usando o modelo EF proposto. Uma mesa vibratória (ver Fig. 5.6) foi usada para aplicar as excitações pela base na máquina rotativa. Neste caso, um acelerômetro (Acelerômetro de Medição, ver Fig. 5.6) foi instalado na base do rotor na mesma posição do disco (nó #10; do modelo EF) para medir os sinais de excitação

naquele ponto. Um acelerômetro adicional (Acelerômetro de Controle) é utilizado para realizar o controle da excitação (ver Fig. 5.6). Tratamento dos sinais e um processo de filtragem foram usados nos sinais medidos apresentados nesta seção. Além disso, todas as excitações aplicadas na base do rotor foram na direção  $x_S$  (Direção de Excitação, ver Fig. 5.6) que foi a mais influenciada pelas excitações da base. Assim, as respostas medidas ao longo da direção  $z_S$  não serão utilizadas.



**Figura 5.6.** Bancada de testes fixada no excitador eletrodinâmico (*shaker*).

Experimentalmente o contato na máquina rotativa foi dado no disco por 4 pontos como mostra a Fig.5.7. O pontos de contato foram posicionados nos ângulos de  $45^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $225^\circ$  e  $315^\circ$  dado um referencial (ver Fig.5.7). A folga radial ( $\delta$ ) entre o disco e cada ponto de contato foi ajustada com o auxílio de um calibre de folga.



**Figura 5.7.** 4 Pontos de contato com o disco.

Resultados numéricos do sistema embarcado+contato serviram para comparar com os resultados experimentais obtidos em cada caso conforme apresentado nas seções a seguir. Os parâmetros de contato para cada modelo (Modelo 1 e Modelo 2) adotados nas simulações numéricas são apresentados na Tab.5.2.

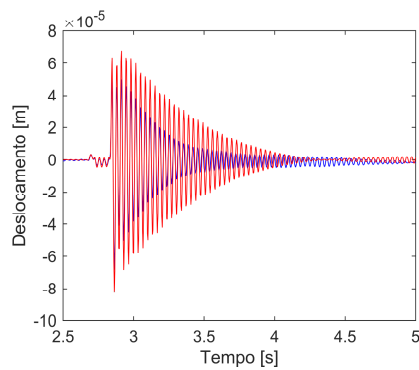
**Tabela 5.2.** Valores das variáveis do Modelo 1 e Modelo 2 adotadas para as simulações numéricas.

Variável	Modelo 1	Modelo 2
$k_e/k_c$	$5.0 \times 10^8 [N/m]$	$5.0 \times 10^8 [N/m]$
$c_e/c_c$	$100 [Ns/m]$	$100 [Ns/m]$
$\mu/\mu_s$	0.1	0.1
$\mu_d$	—	0.1
$\lambda$	—	$1 \times 10^{50}$
$v_r$	—	0.1

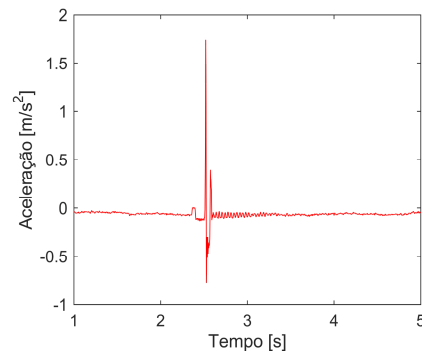
### 5.2.1 Excitação do Tipo Impacto a 0 RPM

Inicialmente, foi avaliado o comportamento do rotor apenas considerando a excitação pela base, sem a condição de contato. Foi considerada uma excitação pela base do tipo impacto para três amplitudes diferentes. As respostas de vibração da

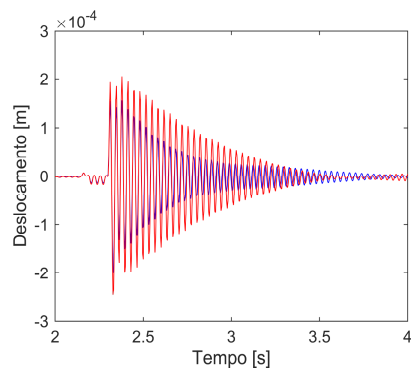
bancada de testes ao longo da direção  $x_S$  foram medidas no disco (sensor no plano  $S_{10}$ ): valores aproximados de  $1,5 \text{ m/s}^2$ ,  $6,0 \text{ m/s}^2$  e  $9,0 \text{ m/s}^2$  (Fig. 5.8a, Fig. 5.8c e 5.8e, respectivamente). As acelerações medidas na base pelo acelerômetro de medição (ver Fig. 5.6) para cada resposta de vibração são apresentadas nas Fig.5.8b, Fig.5.8d e Fig.5.8f. Neste caso, o rotor foi mantido em repouso  $\Omega = 0 \text{ RPM}$ . Note que o modelo EF reproduziu satisfatoriamente as respostas de vibração medidas na bancada de testes, existindo, entretanto, pequenas diferenças. É importante ressaltar que o objetivo do trabalho é avaliar a dinâmica rotativa do sistema, ou seja, com o rotor em operação. Essas diferenças para o rotor parado ( $\Omega = 0 \text{ RPM}$ ) são consideradas admissíveis.



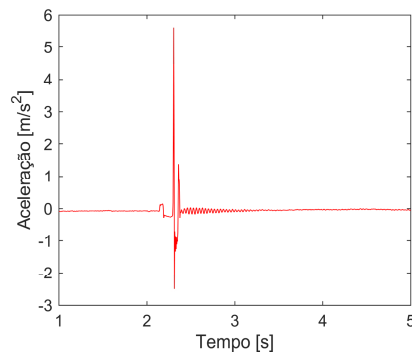
a) Direção  $x_S$



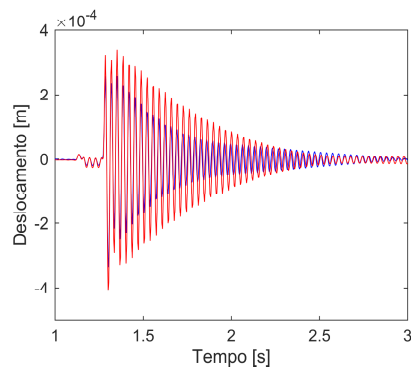
b) Aceleração da base na direção  $x_S$ ,  $\approx 1,5 \text{ m/s}^2$



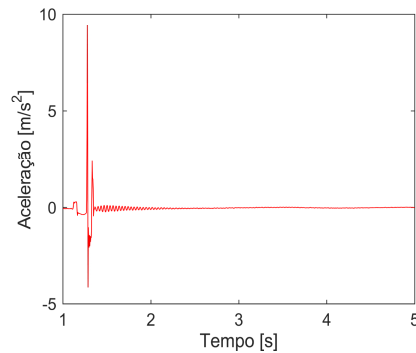
c) Direção  $x_S$



d) Aceleração da base na direção  $x_S$ ,  $\approx 6,0 \text{ m/s}^2$



e) Direção  $x_S$



f) Aceleração da base na direção  $x_S$ ,  $\approx 9,0 \text{ m/s}^2$

**Figura 5.8.** Respostas de vibração do rotor ao longo da direção  $x_S$  para uma aceleração pela base do tipo impacto com o rotor em repouso ( $\Omega = 0\text{RPM}$ ). Resultado numérico (—) e experimental (—).

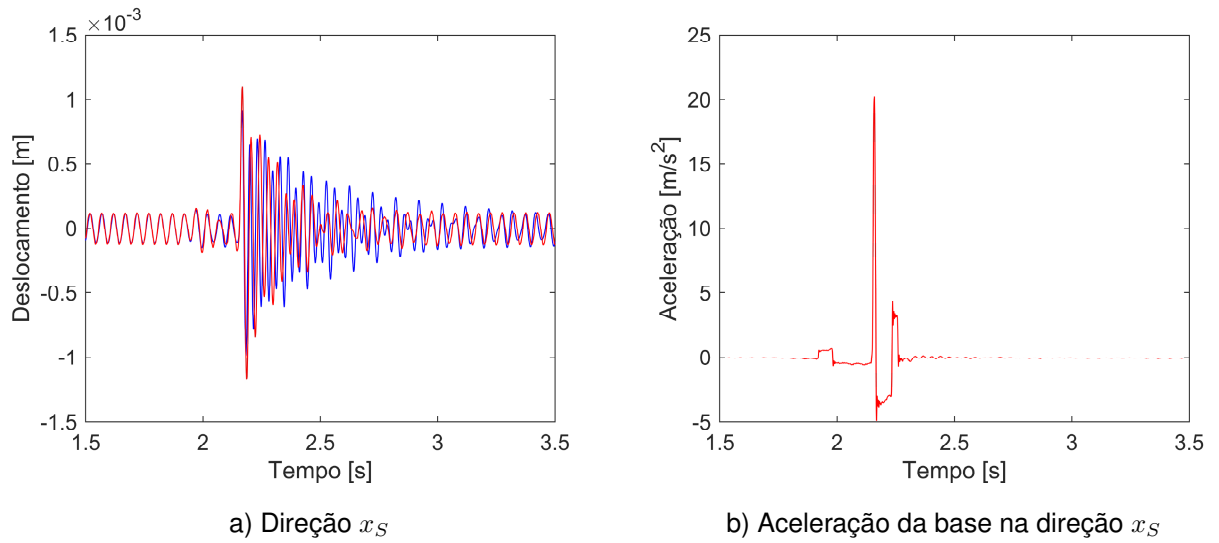
### 5.2.2 Excitação do Tipo Impacto a 1200 RPM

As Fig.5.9a e Fig.5.9b apresentam as respostas de vibração da bancada de testes medidas ao longo das direções  $x_S$  e a excitação pela base aplicada para o rotor operando a 1200 RPM. A máquina rotativa foi excitada na direção  $x_S$  (tempo de simulação completo de 8 s em intervalos de 0,001 s) com um impacto de  $20,0 \text{ m/s}^2$ . Neste

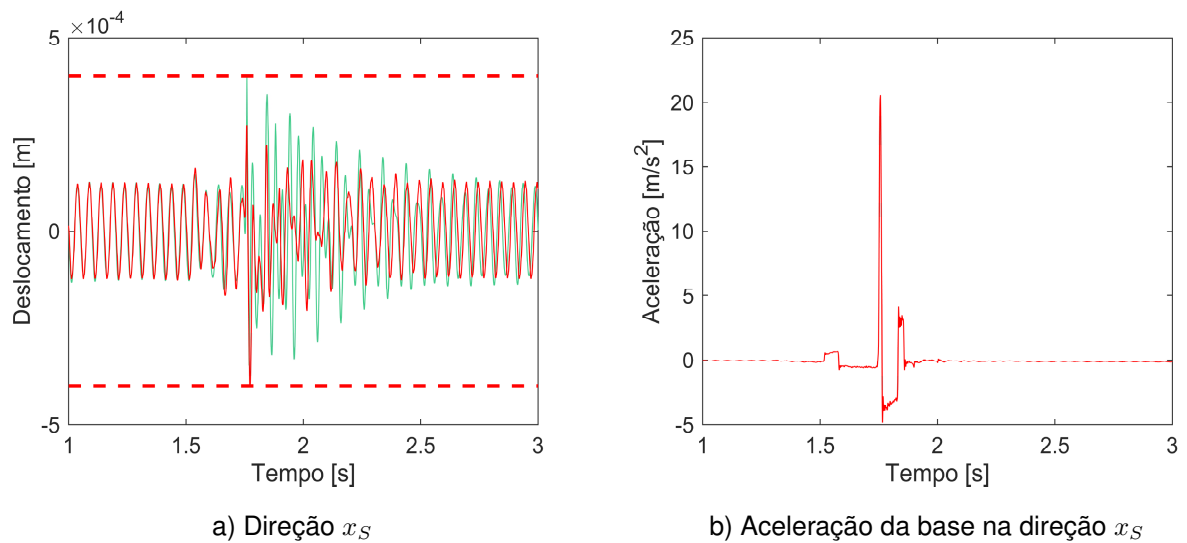
caso, são apresentadas as resposta do rotor embarcado sem a condição de contato. É possível observar que o modelo EF foi capaz de representar adequadamente o comportamento dinâmico do rotor ao longo da direção  $x_S$ ; porém, diferenças de frequência e amplitude durante o impacto são observadas.

Para a análise do comportamento dinâmico do rotor devido ao contato, utilizou-se a mesma excitação da Fig.5.9, do tipo impacto com amplitude de  $20,0 \text{ m/s}^2$ , como mostram as Fig.5.10b e Fig.5.11b. As respostas de vibração obtidas na direção  $x_S$  para as condições de contato dos Modelo 1 e Modelo 2 são apresentadas nas Fig.5.10a e Fig.5.11a, respectivamente. Foi utilizada uma folga radial ( $\delta$ ) de 0,4 mm (como mostram as linhas (- -)) para  $\Omega = 1200 \text{ RPM}$ . Nota-se, que sem a condição de contato as amplitudes de vibração são maiores do que com os limites do contato imposto, ou seja, numericamente e experimentalmente ocorreu de fato contato devido à excitação pela base que foi imposta.

A Fig.5.12 mostra as respostas de vibração da máquina rotativa medidas na direção  $x_S$  considerando as mesmas condições de excitação adotadas na Fig.5.9, porém com uma amplitude de  $25 \text{ m/s}^2$ . Pode-se observar que o modelo EF foi capaz de representar adequadamente o comportamento dinâmico do rotor ao longo da direção  $x_S$ . As Fig.5.13 (Modelo 1 de contato) e Fig.5.14 (Modelo 2 de contato) apresentam as respostas de vibração para as condições de contato. Como esperado, as respostas de vibração medidas na bancada de testes ao longo da direção  $x_S$  com a condição de contato imposta é menor do que a que foi encontrada sem a condição de contato (ver Fig.5.12). Nota-se que a resposta experimental em um dado momento ultrapassa o limite do contato (linhas (- -)). Tal efeito é chamado de penetração, quando o deslocamento da máquina é maior que a folga radial.

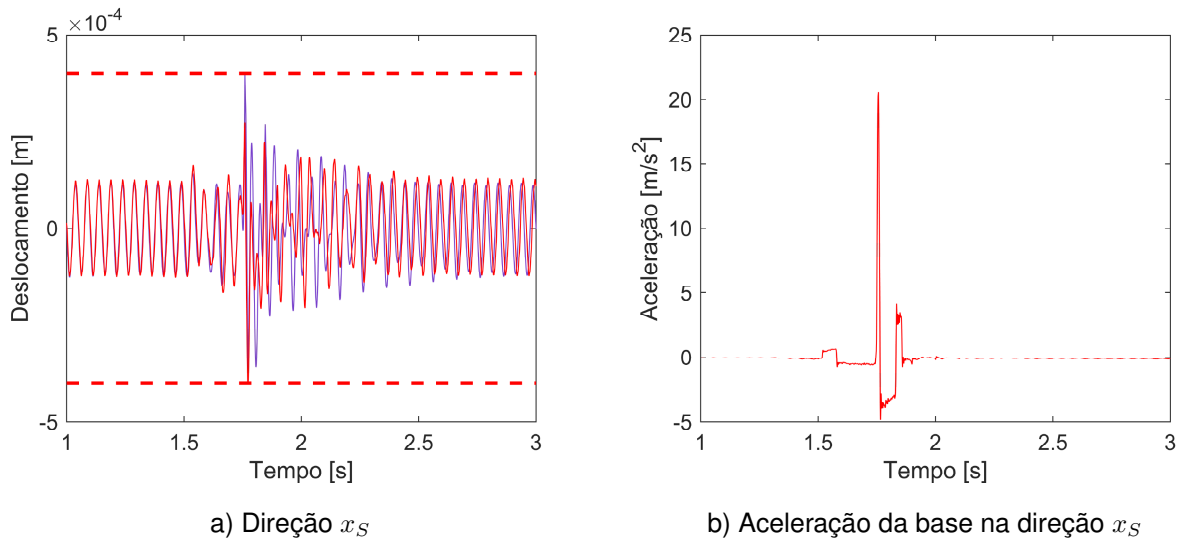


**Figura 5.9.** Respostas de vibração do rotor ao longo da direção  $x_S$  para uma aceleração pela base do tipo impacto, amplitude de  $20,0 \text{ m/s}^2$ , com o rotor operando em  $\Omega = 1200\text{RPM}$ , sem condição de contato. Resultado numérico (—) e experimental (—).

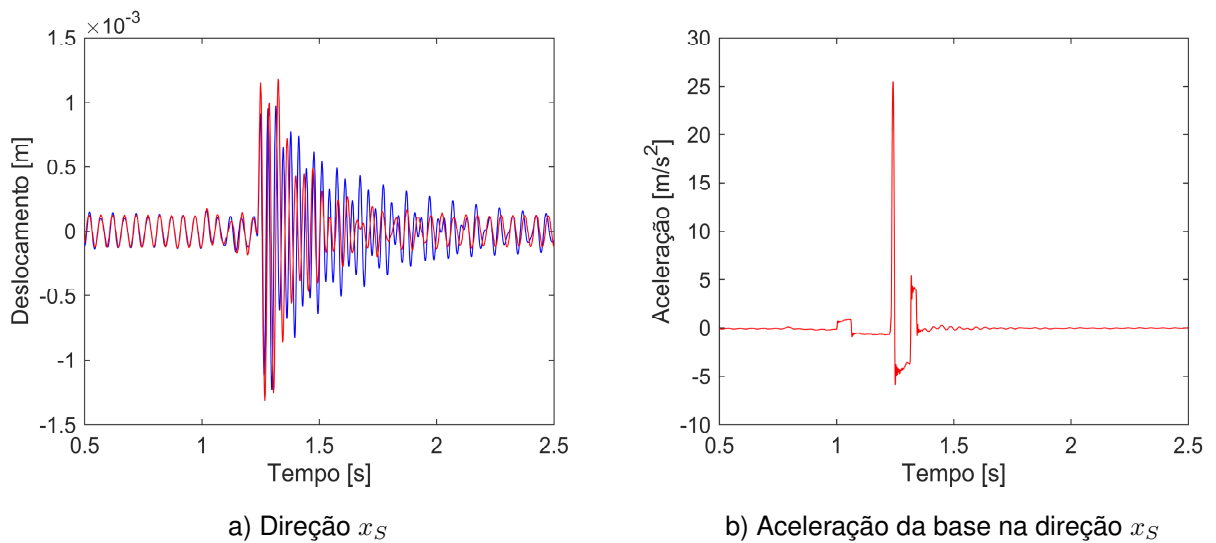


**Figura 5.10.** Respostas de vibração do rotor ao longo da direção  $x_S$  para uma aceleração pela base do tipo impacto, amplitude de  $20,0 \text{ m/s}^2$ , com o rotor operando em  $\Omega = 1200\text{RPM}$ , condição de contato do Modelo 1. Resultado numérico (—) e experimental (—).

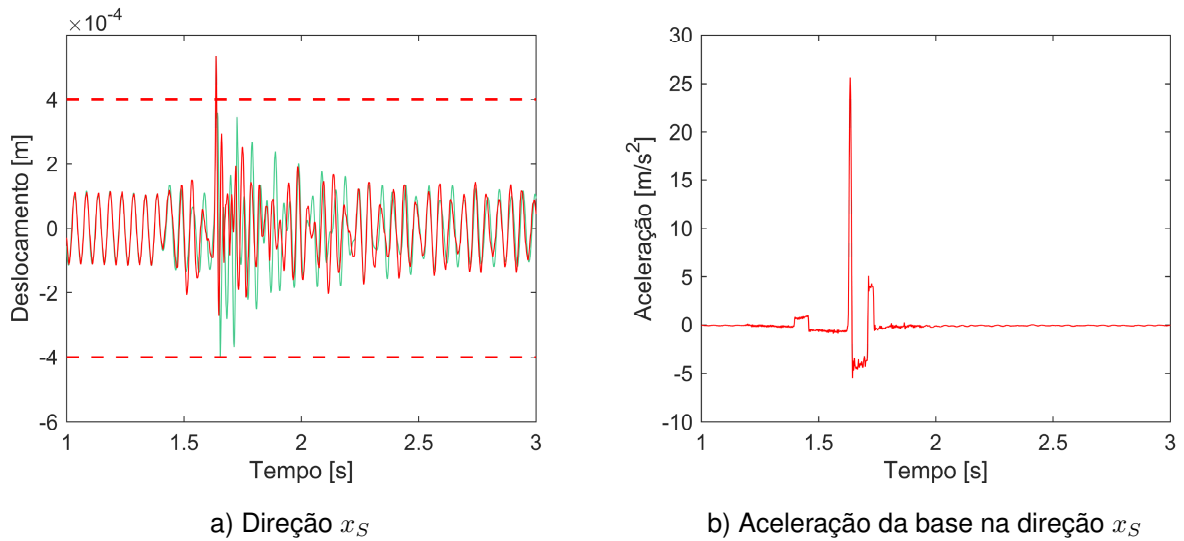




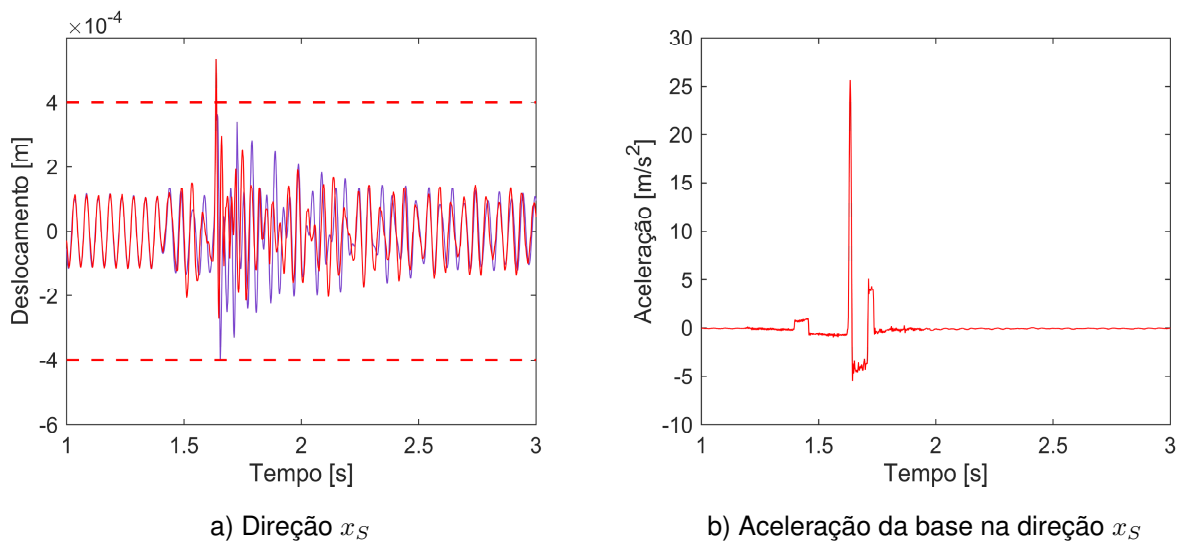
**Figura 5.11.** Respostas de vibração do rotor ao longo da direção  $x_S$  para uma aceleração pela base do tipo impacto , amplitude de  $20,0 \text{ m/s}^2$ , com o rotor operando em  $\Omega = 1200\text{RPM}$ , condição de contato do Modelo 2. Resultado numérico (—) e experimental (—).



**Figura 5.12.** Respostas de vibração do rotor ao longo da direção  $x_S$  para uma aceleração pela base do tipo impacto , amplitude de  $25,0 \text{ m/s}^2$ , com o rotor operando em  $\Omega = 1200\text{RPM}$ , sem condição de contato. Resultado numérico (—) e experimental (—).



**Figura 5.13.** Respostas de vibração do rotor ao longo da direção  $x_S$  para uma aceleração pela base do tipo impacto, amplitude de  $25,0 \text{ m/s}^2$ , com o rotor operando em  $\Omega = 1200\text{RPM}$ , condição de contato do Modelo 1. Resultado numérico (—) e experimental (—).



**Figura 5.14.** Respostas de vibração do rotor ao longo da direção  $x_S$  para uma aceleração pela base do tipo impacto, amplitude de  $25,0 \text{ m/s}^2$ , com o rotor operando em  $\Omega = 1200\text{RPM}$ , condição de contato do Modelo 2. Resultado numérico (—) e experimental (—).

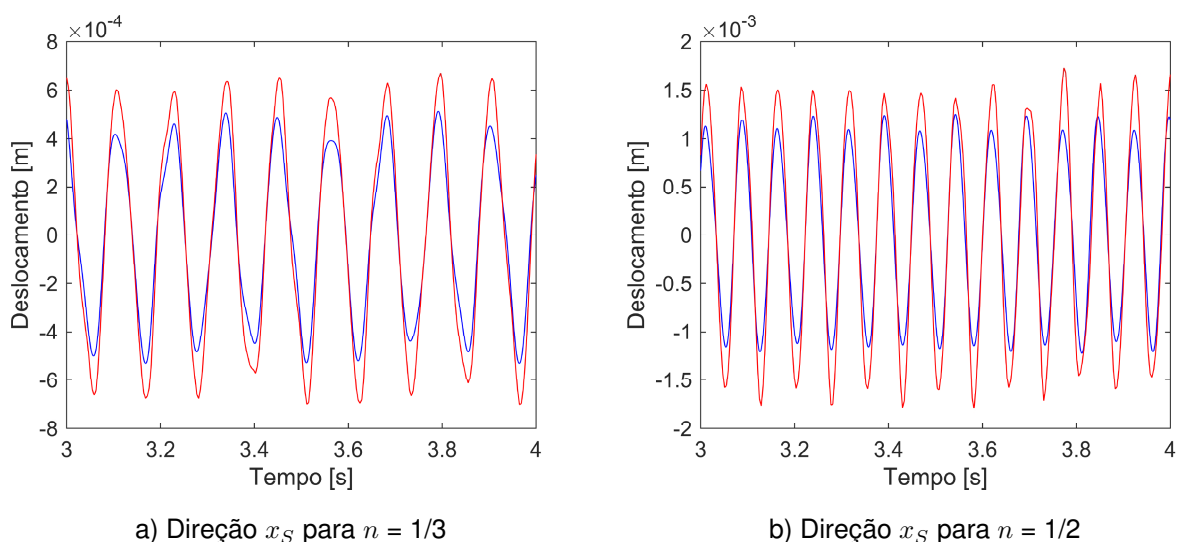
### 5.2.3 Excitação do Tipo Senoidal a 1200 RPM

A Fig.5.15 apresenta as respostas de vibração medidas ao longo da direção  $x_S$  da máquina rotativa juntamente com as curvas numéricas determinadas pelo modelo EF para o rotor em condição de embarcado, considerando uma excitação senoidal aplicada na direção  $x_S$  conforme mostra a Eq.(5.2).

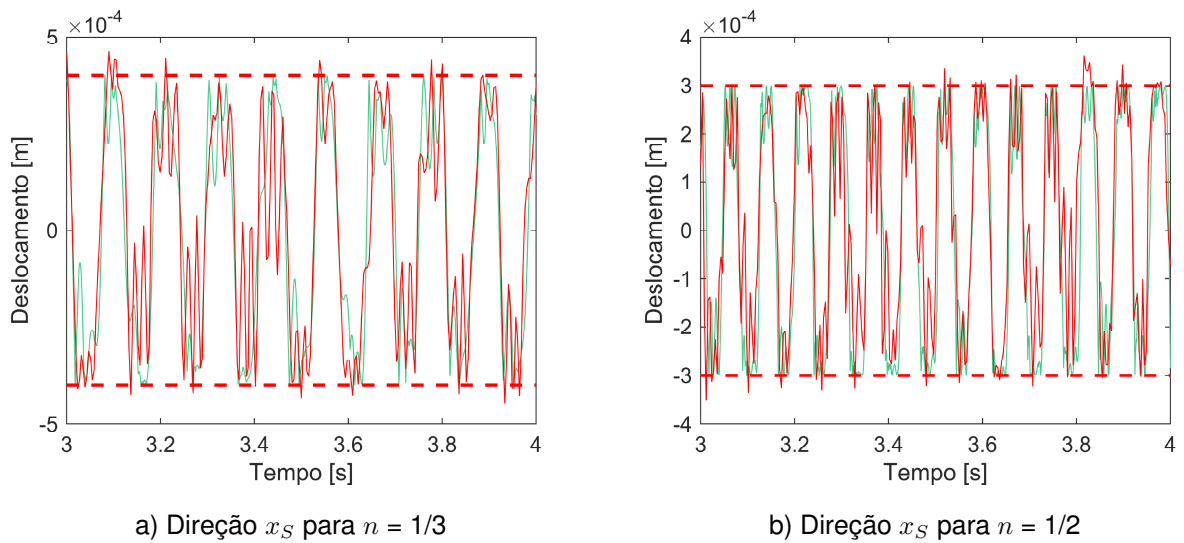
$$x_S = \Lambda \sin \left( \mathbf{n} \frac{2\pi \Omega_{CR} t}{60} \right) \quad (5.2)$$

onde  $\Lambda$  foi fixado como sendo igual a 5 mm e  $\mathbf{n}$  é uma constante utilizada para produzir excitações pela base com frequências de excitação subsíncronas da velocidade crítica do rotor ( $\Omega_{CR} = 1582$  RPM). Neste caso,  $\mathbf{n} = 1/3$  (8,78 Hz) e  $1/2$  (13,18 Hz) e os resultados numéricos são apresentados nas Fig.5.15a e Fig.5.15b, respectivamente. A velocidade de operação do rotor foi mantida em 1200 RPM. Como esperado, as respostas de vibração obtidas na direção  $x_S$  foram as mais influenciadas pela excitação pela base. Assim, as respostas medidas ao longo da direção  $z_S$  não serão apresentadas.

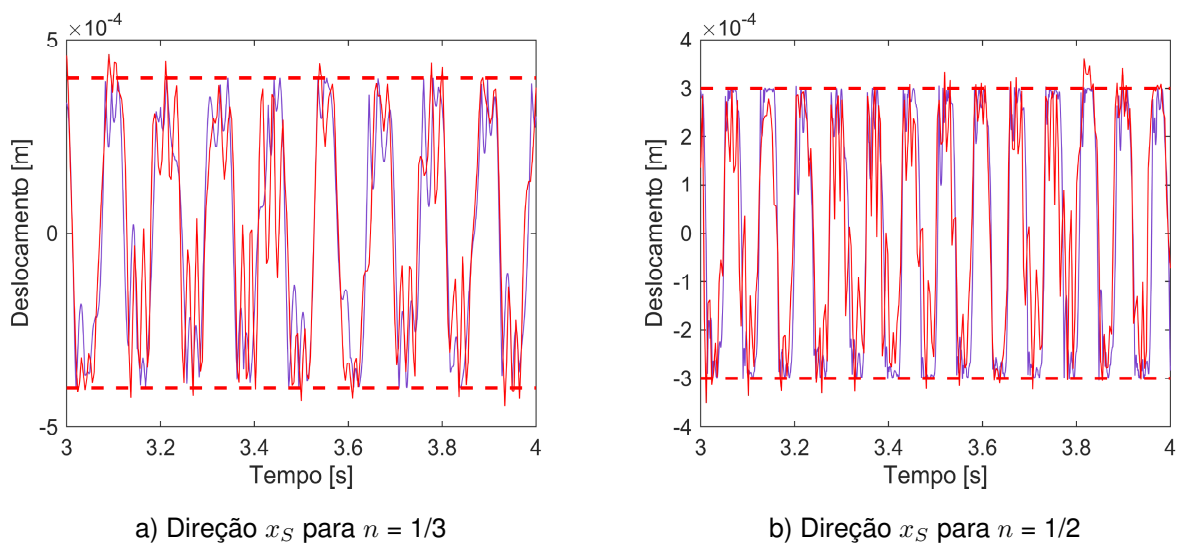
Considerando as mesmas condições de operação e a mesma excitação pela base da Fig.5.15, as Fig.5.16 e Fig.5.17 apresentam as respostas numéricas e experimentais da bancada de teste para as condições de contato do Modelo 1 e Modelo 2, respectivamente. Para  $\mathbf{n} = 1/3$  foi adotada uma folga radial de 0,3 mm e para  $\mathbf{n} = 1/2$  a folga radial é igual a 0,4 mm. Novamente, é possível observar que o modelo EF (embarcado+contato) foi capaz de representar satisfatoriamente o comportamento dinâmico do rotor. Nota-se que em alguns instantes ocorre a chamada penetração do rotor. Além disso, os dois modelos de contato apresentaram resposta semelhantes.



**Figura 5.15.** Respostas de vibração do rotor ao longo da direção  $x_S$  para um deslocamento pela base do tipo senoidal com o rotor operando em  $\Omega = 1200$  RPM, sem condição de contato. Resultado numérico (—) e experimental (—).



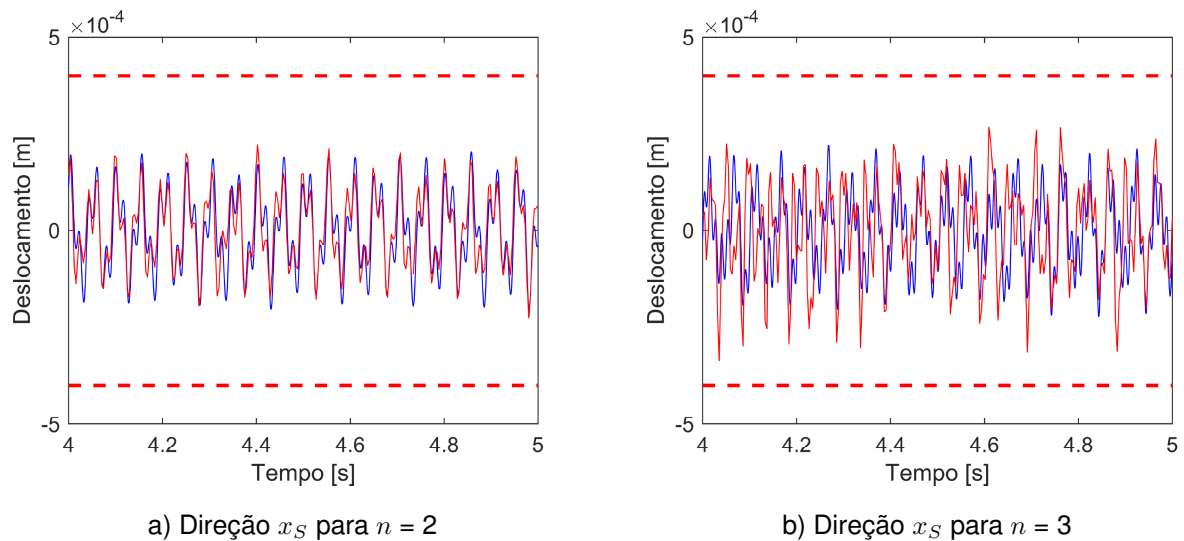
**Figura 5.16.** Respostas de vibração do rotor ao longo da direção  $x_S$  para um deslocamento pela base do tipo senoidal com o rotor operando em  $\Omega = 1200\text{RPM}$ , condição de contato do Modelo 1. Resultado numérico (—) e experimental (—).



**Figura 5.17.** Respostas de vibração do rotor ao longo da direção  $x_S$  para um deslocamento pela base do tipo senoidal com o rotor operando em  $\Omega = 1200\text{RPM}$ , condição de contato do Modelo 2. Resultado numérico (—) e experimental (—).

A Fig.5.18 apresenta as respostas de vibração numérica e experimental medidas ao longo da direção  $x_S$  da máquina rotativa, considerando a base do sistema sendo excitada ao longo da direção  $x_S$ , conforme a Eq.(5.2). Neste caso,  $n = 2$  (52,73 Hz) e 3 (79,1 Hz) (Fig.5.18a e Fig.5.18b, respectivamente) e a velocidade de operação do rotor  $\Omega$  foi mantida em 1200 RPM. Desta forma, excitações pela base com frequências supersíncronas da velocidade crítica do rotor ( $\Omega_{CR} = 1582\text{ RPM}$ ) foram aplicadas no sistema. Novamente, é possível observar que o modelo EF foi capaz de representar

satisfatoriamente o comportamento dinâmico do rotor; porém, as excitações pela base impostas não foram suficientes para que o contato acontecesse.



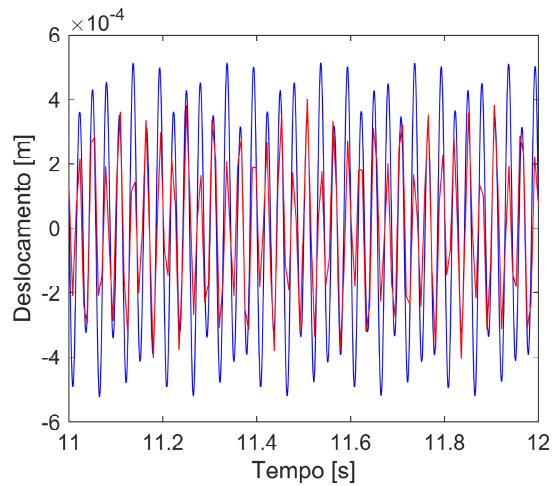
**Figura 5.18.** Respostas de vibração do rotor ao longo da direção  $x_S$  para um deslocamento pela base do tipo senoidal com o rotor operando em  $\Omega = 1200\text{RPM}$ . Resultado numérico (—) e experimental (—).

Por último, a Fig.5.19 apresenta a resposta de vibração do sistema na direção  $x_S$  devido a uma excitação conforme a equação a seguir:

$$x_S = \Lambda \sin\left(\frac{2\pi f}{60}t\right) \quad (5.3)$$

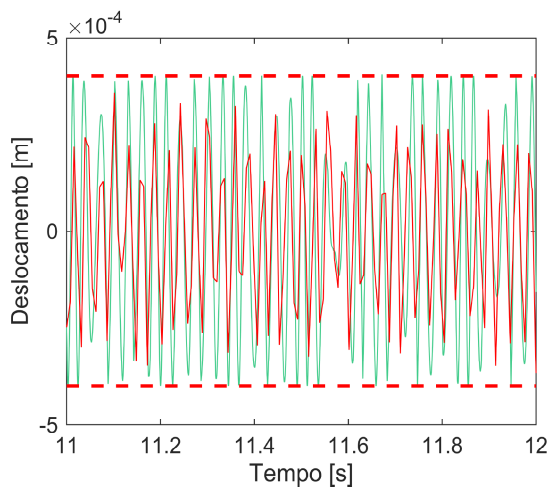
onde  $\Lambda$  igual a 0,01 mm e  $f = 35$  Hz. A velocidade de rotação do rotor foi fixada em 1200 RPM e para este caso não foi adotado a condição de contato. Note que as respostas de vibração numéricas e experimentais ao longo da direção  $x_S$  são similares. Para a mesma condição de operação e para a mesma excitação pela base da Fig.5.19, foram adotadas as condições de contato para os Modelo 1 e Modelo 2 e as repostas obtidas são apresentadas nas Fig.5.20a e Fig.5.20b, respectivamente. Nota-se que com as condições de contato adotadas o contato não aconteceu, experimentalmente.

Portanto, para a Fig.5.21 para a mesma excitação pela base (Eq.(5.3)) aumentou-se a amplitude ( $\Lambda$ ) da excitação para 0,05 mm, mantida as mesmas condições de operação da máquina. Nota que agora ocorre o contato entre o disco e o estator e que, para ambos os modelos (Modelo 1, Fig.5.21a e Modelo 2, Fig.5.21b), as respostas obtidas numericamente representam o comportamento dinâmico da bancada de teste devido as excitações pela base e as condições de contato.

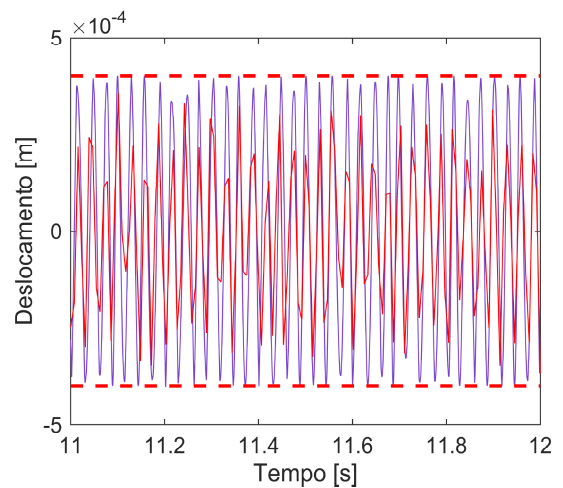


a) Direção  $x_S$

**Figura 5.19.** Resposta de vibração do rotor ao longo da direção  $x_S$  para um deslocamento pela base do tipo senoidal com amplitude de 0.01mm e  $f=35\text{Hz}$ , para o rotor operando  $\Omega = 1200\text{RPM}$ , sem condição de contato. Resultado numérico (—) e experimental (—).

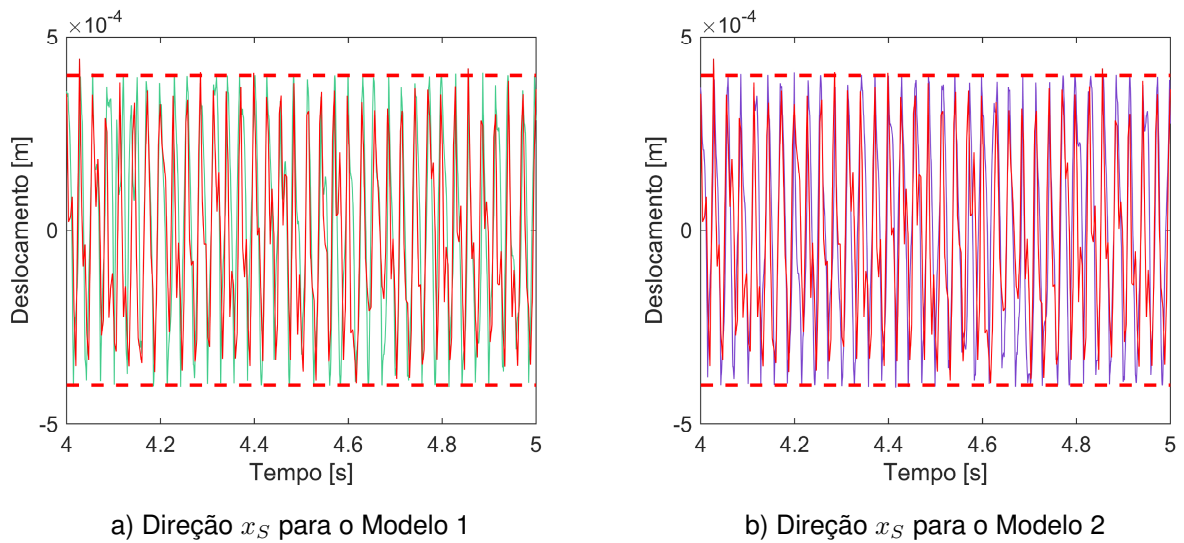


a) Direção  $x_S$  para o Modelo 1



b) Direção  $x_S$  para o Modelo 2

**Figura 5.20.** Respostas de vibração do rotor ao longo da direção  $x_S$  para um deslocamento pela base do tipo senoidal com amplitude de 0.01mm e  $f=35\text{Hz}$ , para o rotor operando  $\Omega = 1200\text{RPM}$ , condição de contato dos Modelo 1 e Modelo 2. Resultado numérico (—)|(—) e experimental (—).



**Figura 5.21.** Respostas de vibração do rotor ao longo da direção  $x_S$  para um deslocamento pela base do tipo senoidal com amplitude de 0.5mm e  $f=35\text{Hz}$ , para o rotor operando  $\Omega = 1200\text{RPM}$ , condição de contato dos Modelo 1 e Modelo 2. Resultado numérico (—)|(—) e experimental (—).

Os resultados experimentais apresentados neste capítulo são considerados bastante satisfatórios, dada a complexidade do sistema estudado. Para alguns casos o modelo matemático proposto foi capaz de representar adequadamente os resultados obtidos da bancada de teste. O mesmo ocorreu para a condição de contato quando analisados os modelo de contato. Neste capítulo os resultados obtidos a partir do Modelo 1 e do Modelo 2 não apresentaram diferenças.

# Capítulo 6

## Conclusão e Perspectivas Futuras

A temática deste trabalho dedicou-se à investigação do comportamento dinâmico de uma máquina rotativa embarcada quando ocorre o contato rotor-estator, resultados numéricos como experimentais foram utilizados nas análises. Poucos trabalhos científicos realizaram tal análise, ou seja, o contato em máquinas rotativas devido excitações pela base do sistema em muitos casos se restringe a simulações computacionais. Portanto, o trabalho se justifica por oferecer uma perspectiva diferente de trabalhos encontrados atualmente na área, pela validação experimental do modelo de rotores embarcados desenvolvido.

Primeiramente foi introduzido o tema sobre rotores embarcados mostrando as principais diferenças desses rotores com aqueles montados sobre base fixa. Em seguida, foram considerados modelos de contato e as suas aplicações em trabalhos anteriores. Diferentes trabalhos encontrados na literatura e voltados para a análise de várias configurações de máquina rotativa e contato entre o rotor-estator foram considerados nesta tese. Neste sentido, o comportamento dinâmico de sistemas rotativos quando o fenômeno do contato acontece foi avaliado no contexto do estado da arte deste tema importante da engenharia.

Nesta tese, foi apresentado um modelo matemático de rotores embarcados usando como referência o rotor montado sobre uma mesa vibratória para testes experimentais. O rotor embarcado é composto por diferentes subsistemas, a saber, eixo, disco, acoplamentos e mancais de rolamento. Além disso, o efeito giroscópico, que depende da velocidade de rotação, as excitações pela base e o contato foram considerados na composição do problema apresentado. Para cada subsistema e efeito/fenômeno



considerado foi apresentado o equacionamento utilizado para a construção do modelo final, até se chegar as equações globais do movimento do rotor embarcado prevendo a possibilidade de ocorrência de contato rotor-estator.

Nas análises numéricas realizadas no Capítulo 4 foi utilizada uma bancada de teste composta por um eixo, um disco e dois mancais conforme comentado anteriormente. Para efeitos de validação da máquina rotativa utilizada, foram apresentados o ajuste das variáveis desconhecidas, a validação do modelo EF, o Diagrama de Campbell, as FRFs e as respostas de vibração para uma determinada velocidade de rotação. Foi efetuada uma comparação numérica entre os dois modelos de contato apresentados (chamados neste trabalho de Modelo 1 e Modelo 2), utilizando os mesmos valores dos parâmetros para a condição de contato e as mesmas excitações pela base avaliadas no modelo. Foi investigada numericamente a influência da excitação do tipo pulso no comportamento dinâmico da bancada. Analisou-se a influência de diferentes excitações do tipo senoidal, variando amplitude e frequência. Foi constatado que para certos níveis de excitação o modelo numérico diverge, não conseguindo reproduzir respostas coerentes. Foi investigado o comportamento dinâmico do sistema rotativo e do contato a partir da excitação em duas direções ( $x_S$  e  $z_S$ ). Analisou-se o efeito da rotação pela base na condição do rotor embarcado incluído o contato. O comportamento da máquina rotativa também foi investigada numericamente para a condição crítica, onde a condição de contato já existe no momento em que as excitações pela base são inseridas no modelo. Foi constatado que as respostas não mudaram para esta condição.

No Capítulo 5 foi realizada a análise experimental de uma bancada de testes construída a fim de validar os modelos propostos no Capítulo 3. De forma semelhante ao que foi apresentado no Capítulo 4, o modelo da bancada de testes foi ajustado a partir de FRFs experimentais medidas diretamente no sistema rotativo. O comportamento dinâmico da bancada de testes foi investigado para diferentes tipos de excitação, níveis de aceleração, frequência de excitação, deslocamento da base e folga radial. Os resultados obtidos experimentalmente foram comparados com os resultados simulados. As respostas de vibração no domínio do tempo da máquina rotativa operando a uma dada velocidade de rotação sem excitação pela base foram comparadas com as respostas obtidas a partir do modelo matemático. Excitações do tipo impacto fo-

ram avaliadas para as condições da máquina parada ( $\Omega = 0$  RPM) e em operação ( $\Omega = 1200$  RPM). Os resultados obtidos experimentalmente e numericamente do rotor em repouso são semelhantes. Quando o rotor está em operação, os resultados experimentais para o caso de uma excitação do tipo impacto mostram que existe um acoplamento das direções, aspecto este que o modelo matemático não foi capaz de representar. As respostas de vibração do rotor para uma excitação sinusoidal ao longo da direção  $x_S$  foram avaliadas. Para estas excitações o modelo formulado foi capaz de reproduzir adequadamente o comportamento obtido experimentalmente. Portanto, o modelo EF desenvolvido neste trabalho representa de forma satisfatória o comportamento dinâmico de rotores embarcados quando da ocorrência de contato, ressaltando, entretanto, a dificuldade do modelo para algumas situações específicas.

As principais contribuições desta tese de doutorado podem ser assim resumidas:

- Desenvolvimento de um modelo matemático para representar sistemas rotativos embarcados com a possibilidade de contato rotor-estator;
- Apresentação de uma completa análise teórica do sistema, visando o estudo do comportamento dinâmico para a validação do modelo de rotor embarcado com contato rotor-estator;
- Apresentação e discussão de resultados experimentais que demonstram a capacidade do modelo proposto de representar o comportamento dinâmico de máquinas rotativas embarcadas quando ocorre contato rotor-estator. Estes resultados, quando comparados com as respostas obtidas numericamente, demonstram a eficiência da metodologia utilizada na modelagem do sistema.

Desde o início do doutorado, Agosto de 2017, até o presente momento, foram publicados 5 artigos em anais de congressos e 3 artigos em periódicos. São eles:

- Artigos em Anais de Congresso:

1. Sousa Jr, M.S., Del Claro, V.T., Ap Cavalini Jr, A. and Steffen Jr, V., 2017. Investigação Numérica e Experimental da Resposta Dinâmica de Rotores Embarcados à Excitação Senoidal da Base. In: **27º Simpósio do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica**, POSMEC, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.

2. Sousa, M., Del Claro, V., Cavalini, A. and Steffen, V., 2017, December. Experimental validation of an onboard rotor fe model. In **Proceedings of the 24th ABCM International Congress of Mechanical Engineering**, CO-BEM, Curitiba, Parana, Brazil.
  3. Sousa Jr, M.S., Lima, R.L., Ap Cavalini Jr, A. and Steffen Jr, V., 2018. Análise do Comportamento Dinâmico de Rotores Embarcados Sob Deslocamentos Angulares. In: **28º Simpósio do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica**, POSMEC, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.
  4. Barbosa, P.C., Del Claro, V.T., Sousa Jr, M.S., Cavalini Jr, A.A. and Steffen Jr, V., 2019. SHBT Based Modeling of Composite Hollow Shaft regarding its Dynamic Behavior Prediction. In **13th International Conference on Dynamics of Rotating Machines**, SIRM, Copenhagen, Denmark.
  5. Barbosa, P.C., Sousa Jr, M.S., Del Claro, V.T., Cavalini Jr, A.A. and Steffen Jr, V., 2019. Numerical Evaluation of an Onboard Composite Hollow Shaft. In **MECSOL 2019 - Proceedings of the 7th International Symposium on Solid Mechanics**, MECSOL, Sao Carlos, SP, Brazil.
- Artigos em Periódicos:
1. Briend, Y., Chatelet, E., Dufour, R., Andrianoely, M.A., Legrand, F., Sousa Jr, M.S., Steffen Jr, V. and Baudin, S., 2021. Dry-whip phenomenon in onboard rotordynamics: Modeling and experimentation. **Journal of Sound and Vibration**, 513, p.116398.
  2. Sousa, M.S., Barbosa, P.C., Del Claro, V.T., Nicoletti, R., Cavalini, A.A. and Steffen, V., 2021. Numerical prediction and experimental validation of an onboard rotor under bending. **Meccanica**, 56(10), pp.2631-2650.
  3. Del Claro, V.T., Sousa, M.S., Barbosa, P.C., Cavalini, A.A. and Steffen, V., 2022. Modeling of laminated thick-walled shaft rotor accounting for onboard dynamics. **Archive of Applied Mechanics**, pp.1-17.

Como sugestão de trabalhos futuros relacionados ao tema abordado neste trabalho de doutorado, é possível apontar:

- Investigação do motivo pelo qual o modelo EF, em alguns casos, não ser capaz de representar de forma adequada os resultados numéricos;
- Analisar a representatividade do modelo EF para outras condições de excitação (direção  $z_S$  e rotações) que podem ser aplicadas na base (neste caso, seria desejável prosseguir os estudos usando uma mesa vibratória com capacidade de introduzir vibração ao longo de três eixos e três rotações, ou seja, com seis graus de liberdade);
- Explorar diferentes configurações de rotores, como rotores suportados por mancais magnéticos e hidrodinâmicos, eixo de material composto, discos flexíveis e outros;
- Nos experimentos, avaliar a aplicação da condição de contato em toda a circunferência do disco (ao invés de 4 pontos de contato conforme foi o caso no sistema rotativo usado nesta tese);
- Avaliar o contato para diferentes materiais;
- Aplicação de técnicas de controle que consideram as vibrações geradas pela máquina rotativa embarcada visando mitigar as vibrações indesejadas que podem provocar o contato. Este tópico vai no sentido do estudo de máquinas inteligentes, tema que é do interesse do LMEst-UFU.

# Referências

AGNALT, E.; SOLEMSLIE, B. W.; STORLI, P.-T. S.; DAHLHAUG, O. G. The rotor-stator interaction onboard a low specific speed francis turbine. **International Journal of Fluid Machinery and Systems**, Turbomachinery Society of Japan, Korean Society for Fluid Machinery, Chinese . . . , v. 13, n. 2, p. 302–309, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.5293/IJFMS.2020.13.2.302>>.

AL-WEDYAN, H. M.; TAHAT, M. S.; MUTASHER, S. A. The behaviour of the jeffcott rotor under a vibrating base of fluid film bearing. Research Institute and Development. Suranaree University of Technology, 2008.

BRIEND, Y.; CHATELET, E.; DUFOUR, R.; ANDRIANOELY, M.-A.; LEGRAND, F.; JR, M. S. S.; JR, V. S.; BAUDIN, S. Dry-whip phenomenon in on-board rotordynamics: Modeling and experimentation. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 513, p. 116398, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116398>>.

BRIEND, Y.; DAKEL, M.; CHATELET, E.; ANDRIANOELY, M. A.; DUFOUR, R.; BAUDIN, S. Extended modal reduction for on-board rotor with multi-frequency parametric excitation. **Journal of Vibration and Acoustics**, p. 1–60, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.4044381>>.

BRIEND, Y.; DAKEL, M.; CHATELET, E.; ANDRIANOELY, M.-A.; DUFOUR, R.; BAUDIN, S. Effect of multi-frequency parametric excitations on the dynamics of on-board rotor-bearing systems. **Mechanism and Machine Theory**, Elsevier, v. 145, p. 103660, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2019.103660>>.

CAVALINI, A.; SANCHES, L.; BACHSCHMID, N.; JR, V. S. Crack identification for rotating machines based on a nonlinear approach. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 79, p. 72–85, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2016.02.041>>.

CAVALINI, A. A. et al. Detecção e identificação de trincas transversais incipientes em eixos horizontais flexíveis de máquinas rotativas. Universidade Federal de Uberlândia, 2013.

CHANG-JIAN, C.-W. et al. Couple stress fluid improve rub-impact rotor-bearing system–nonlinear dynamic analysis. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 34, n. 7, p. 1763–1778, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.apm.2009.09.021>>.

CHEN, L.; ZENG, Z.; ZHANG, D.; WANG, J. Vibration properties of dual-rotor systems under base excitation, mass unbalance and gravity. **Applied Sciences**, MDPI, v. 12, n. 3, p. 960, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/app12030960>>.

CHOY, F.; RADOVAN, J.; BATUR, C. Rub interactions of flexible casing rotor systems. **matrix**, v. 1000, p. M0, 1989.

DAKEL, M.; BAGUET, S.; DUFOUR, R. Steady-state dynamic behavior of an on-board rotor under combined base motions. **Journal of Vibration and Control**, Sage Publications Sage UK: London, England, v. 20, n. 15, p. 2254–2287, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/1077546313483791>>.

DIMAROGONAS, A.; SANDOR, G. Packing rub effect in rotating machinery. i. a state of the art review. **Wear**, Elsevier, v. 14, n. 3, p. 153–170, 1969. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0043-1648\(69\)90037-4](https://doi.org/10.1016/0043-1648(69)90037-4)>.

DUCHEMIN, M.; BERLIOZ, A.; FERRARIS, G. Dynamic behavior and stability of a rotor under base excitation. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 128, n. 5, p. 576–585, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.2202159>>.

DURAN, C. **Modélisation du comportement dynamique non-linéaire et transitoire de turbomoteur avec multitouches rotor/stator**. Tese (Doutorado) — Lyon, INSA, 2014.

EHEHALT, U.; ALBER, O.; MARKERT, R.; WEGENER, G. Experimental observations on rotor-to-stator contact. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 446, p. 453–467, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.01.008>>.

EL-SAEIDY, F. M.; STICHER, F. Dynamics of a rigid rotor linear/nonlinear bearings system subject to rotating unbalance and base excitations. **Journal of Vibration and Control**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 16, n. 3, p. 403–438, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/1077546309103565>>.

FENG, Z.; LUO, G.; YANG, Z.; ZHENG, N.; CHEN, W. Study on response characteristics of rotor-bearing system under sudden base excitation load. **Vibroengineering Procedia**, JVE International Ltd., v. 33, p. 1–5, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.21595/vp.2020.21708>>.

HOU, L.; CHEN, H.; CHEN, Y.; LU, K.; LIU, Z. Bifurcation and stability analysis of a nonlinear rotor system subjected to constant excitation and rub-impact. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 125, p. 65–78, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2018.07.019>>.

ISHIDA, Y.; YAMAMOTO, T. **Linear and nonlinear rotordynamics**. Wiley Online Library, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/9783527651894>>.

JARROUX, C. **Nonlinear transient dynamics of on-board rotors supported by Active Magnetic Bearings**. Tese (Doutorado) — Université de Lyon, 2017.

JARROUX, C.; MAHFOUD, J.; DEFOY, B.; ALBAN, T. Stability of rotating machinery supported on active magnetic bearings subjected to base excitation. **Journal of Vibration and Acoustics**, American Society of Mechanical Engineers, v. 142, n. 3, p. 031004, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.4046124>>.

JARROUX, C.; MAHFOUD, J.; DUFOUR, R.; LEGRAND, F.; DEFOY, B.; ALBAN, T. Investigations on the dynamic behaviour of an on-board rotor-amb system with

touchdown bearing contacts: modelling and experimentation. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 159, p. 107787, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2021.107787>>.

JIE, H.; PINGCHAO, Y.; ZHANG, D.; LIANG, Z. Modal characteristics analysis for a flexible rotor with non-smooth constraint due to intermittent rub-impact. **Chinese Journal of Aeronautics**, Elsevier, v. 31, n. 3, p. 498–513, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cja.2018.01.003>>.

LEE, A. S.; KIM, B. O.; KIM, Y.-C. A finite element transient response analysis method of a rotor-bearing system to base shock excitations using the state-space newmark scheme and comparisons with experiments. **Journal of Sound and vibration**, Elsevier, v. 297, n. 3-5, p. 595–615, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.04.028>>.

LEGRAND, M. **Modèles de prédiction de l'interaction rotor/stator dans un moteur d'avion**. Tese (Doutorado) — Ecole Centrale de Nantes; Université de Nantes, 2005.

LIU, Z.; LIU, Z.; LI, Y.; ZHANG, G. Dynamics response of an on-board rotor supported on modified oil-film force considering base motion. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 232, n. 2, p. 245–259, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/0954406216682052>>.

NGUYEN, K.-L.; TRAN, Q.-T.; ANDRIANOELY, M.-A.; MANIN, L.; BAGUET, S.; DUFOUR, R.; MAHJOUR, M.; MENAND, S. Nonlinear rotordynamics of a drillstring in curved wells: Models and numerical techniques. **International Journal of Mechanical Sciences**, Elsevier, v. 166, p. 105225, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.105225>>.

PADOVAN, J.; CHOY, F. Nonlinear dynamics of rotor/blade/casing rub interactions. **Journal of turbomachinery**, American Society of Mechanical Engineers, v. 109, n. 4, p. 527–534, 1987. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3262143>>.

PHADATARE, H. P.; PRATIHER, B. Large deflection model for rub-impact analysis in high-speed rotor-bearing system with mass unbalance. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, Elsevier, v. 132, p. 103702, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103702>>.

PRICE, K.; STORN, R. M.; LAMPINEN, J. A. **Differential evolution: a practical approach to global optimization**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006.

REDDY, M. R.; SRINIVAS, J. Vibration analysis of a support excited rotor system with hydrodynamic journal bearings. **Procedia Engineering**, Elsevier, v. 144, p. 825–832, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.05.093>>.

SILVA, A.; GONZÁLEZ-GUILLÉN, C.; RUIZ-GARCÍA, M.; DOMÍNGUEZ-JIMÉNEZ, M. E. Improving the sensitivity of early rub detection in rotating machines with an adaptive orthogonal filter. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 171, p. 108900, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2022.108900>>.

- SONI, T.; DUTT, J. K.; DAS, A. S. Parametric stability analysis of active magnetic bearing supported rotor system with a novel control law subject to periodic base motion. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, IEEE, v. 67, n. 2, p. 1160–1170, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TIE.2019.2898604>>.
- SOUSA, M.; CLARO, V. D.; CAVALINI, A.; STEFFEN, V. Numerical investigation on the dynamic behavior of an onboard rotor system by using the fem approach. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Springer, v. 39, n. 7, p. 2447–2458, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s40430-016-0640-5>>.
- TANNOUS, M.; CARTRAUD, P.; TORKHANI, M.; DUREISSEIX, D. Assessment of 3d modeling for rotor–stator contact simulations. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 353, p. 327–343, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.05.025>>.
- VERMA, T.; BHORE, S. Finite element analysis of gas turbine rotor with base excitation. **International Journal of Mechanical Engineering and Technology**, v. 8, p. 1362–1369, 07 2017.
- VLAJIC, N.; CHAMPNEYS, A. R.; BALACHANDRAN, B. Nonlinear dynamics of a jeffcott rotor with torsional deformations and rotor-stator contact. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, Elsevier, v. 92, p. 102–110, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.02.002>>.
- WANG, N.; JIANG, D.; XU, H. Effects of rub-impact on vibration response of a dual-rotor system-theoretical and experimental investigation. **Experimental Techniques**, Springer, v. 44, n. 3, p. 299–311, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s40799-019-00352-w>>.
- XU, H.; WANG, N.; JIANG, D.; HAN, T.; LI, D. Dynamic characteristics and experimental research of dual-rotor system with rub-impact fault. **Shock and Vibration**, Hindawi, v. 2016, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155/2016/6239281>>.
- YANG, R.; TSUNODA, W.; HAN, D.; ZHONG, J.; SHINSHI, T. Frequency response function measurement of a rotor system utilizing electromagnetic excitation by a built-in motor. **Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing**, The Japan Society of Mechanical Engineers, v. 14, n. 4, p. JAMDSM0043–JAMDSM0043, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1299/jamdsm.2020jamdsm0043>>.
- YANG, Y.; XU, Y.; YANG, Y.; CAO, D. Dynamics characteristics of a rotor-casing system subjected to axial load and radial rub. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, Elsevier, v. 99, p. 59–68, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.10.023>>.
- YI, Y.; QIU, Z.; HAN, Q. The effect of time-periodic base angular motions upon dynamic response of asymmetric rotor systems. **Advances in Mechanical Engineering**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 10, n. 3, p. 1687814018767172, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/1687814018767172>>.