JOSÉ ELIAS FERREIRA DA SILVA

Modelos de urnas de Pólya em processos de difusão

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2022

JOSÉ ELIAS FERREIRA DA SILVA

Modelos de urnas de Pólya em processos de difusão

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática (Probabilidade).
Linha de Pesquisa: Geometria e Topologia.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Lambert.

UBERLÂNDIA - MG
2022

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

S586 2022

Silva, José Elias Ferreira da, 1990-
Modelos de urnas de Pólya em processos de difusão [recurso eletrônico] / José Elias Ferreira da Silva. - 2022.

Orientador: Rodrigo Lambert.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2022.436
Inclui bibliografia.

1. Matemática. I. Lambert, Rodrigo,1985-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 160 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3239-4209/4154 - www.posgrad.famat.ufu.br - pgmat@famat.ufu.br

ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Matemática				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, 103, PPGMAT				
Data:	25 de agosto de 2022	Hora de início:	10:00	Hora de encerramento:	12:30
Matrícula do Discente:	12012MAT007				
Nome do Discente:	José Elias Ferreira da Silva				
Título do Trabalho:	Modelos de urnas de Pólya em processos de difusão				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Geometria e Topologia				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Dinâmica de recorrência para processos misturadores, e lapsos em processos com memória infinita				

Reuniu-se em web conferência pela plataforma Mconf-RNP, em conformidade com a PORTARIA Nº 36, DE 19 DE MARÇO DE 2020 da COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR - CAPES, pela Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática, assim composta: Professores Doutores: Denise Duarte Scarpa Magalhães Alves - UFMG; Manuel Alejandro González Navarrete - UBB e Rodrigo Lambert - FAMAT/UFU orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Rodrigo Lambert, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o candidato:

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora

Documento assinado eletronicamente por **Manuel Alejandro González Navarrete**, **Usuário Externo**, em 25/08/2022, às 11:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo Lambert**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 25/08/2022, às 15:28, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Denise Duarte Scarpa Magalhães Alves**, **Usuário Externo**, em 25/08/2022, às 17:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3846754** e o código CRC **CF2B4B9F**.

Dedicatória

A todos que perderam um ente querido na pandemia de COVID-19, em especial, à família da Cristina, tia da minha esposa.

Agradecimentos

A todos que desejaram meu sucesso nesta jornada, meu “OBRIGADO”, por fim, quero agradacer:

Ao Deus todo poderoso, pela força, toda honra e glória por esta dissertação.

Aos meus pais que sempre acreditaram em mim.

À minha família, em especial, minha esposa e minha filha, pela paciência nas minhas ausências quando estava estudando.

Ao orientador Rodrigo que não mediu esforços para que este trabalho fosse desenvolvido e pelos momentos de aprendizagem em cada reunião.

Aos meus colegas de turma que passamos juntos pela pandemia de COVID-19, nos anos de 2020 e 2021, com aulas online, em especial ao Enio e a Quezia pelo auxílio e momentos de conversas.

Aos professores: Alonso, Geraldo, Victor, Daniel, Luis Renato e Rodolfo pelos ensinamentos nas aulas.

Aos servidores do PPMAT, pela ajuda sempre que necessitava.

Aos professores da banca: titulares e suplentes por terem aceitado o convite para participarem como banca examinadora deste trabalho.

SILVA, J. E. F. *Modelos de urnas de Pólya em processos de difusão.* 2022. 45p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Sabemos que as urnas de Pólya aparecem inicialmente em trabalhos de Markov 1905-1907. O objetivo deste trabalho é estudar a lei forte de grandes números para o modelo do passeio aleatório do elefante e obter um teorema limite funcional para um processo gaussiano com a forma explícita da matriz de covariância limite. Para isso, relacionamos o modelo citado anteriormente com as urnas de Pólya e utizamos resultados já existente deste último.

Palavras-chave: passeio aleatóro, urnas de pólya, processo de difusão, lei dos grandes números, teorema do limite central.

SILVA, J. E. F. *Pólya urns models in diffusion processes.* 2022. 45p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

We know that Pólya urns first appear in work by Markov 1905-1907. O purpose of this work is to study the strong law of large numbers for the elephant random walk model elephant random walk model and to obtain a functional limit theorem for a Gaussian process with the explicit form of the limit covariance matrix. For this, we relate the model cited model with Pólya's urns and use already-existing results from the latter.

Keywords: random walk, Pólya urns, diffusion processes, law of large numbers, central limit theorem.

Sumário

Introdução

Estudar a proporção de subpopulações em uma população com comportamento dinâmico desperta interesse de cientistas. Por exemplo, economistas com o problema da divisão de renda como em [4].

Entre os inúmeros modelos matemáticos usados para tentar entender tais proporções, as urnas de Pólya ocupam uma posição de destaque. Isso é explicado devido à sua fácil formulação, podendo ser introduzido de maneira elementar.

Usando liguagem matemática, uma urna de Pólya pode ser descrita simplesmente por um vetor estocástico e uma matriz de transição, onde as colunas da matriz determinam a forma como serão feitas as reposições de bolas na urna.

De maneira mais específica, uma urna com q tipo de cores de bolas pode ser definida da seguinte forma: primeiro, um vetor $q-$dimensional que determina a quantidade de bolas de cada após n sorteios.

$$X_n = (X_{n1}, X_{n2}, \cdots, X_{nq}) \ ,$$

onde X_0 indica a configuração inicial da urna. Em segundo lugar, uma matriz de reposição $q \times q$, dada por

$$M = (\vec{M}_1, \vec{M}_2, \cdots, \vec{M}_q) \ ,$$

onde $\vec{M}_i = (M_{i1}, M_{i2}, , M_{iq})$ indica o vetor de reposição da cor do tipo i, para $i = 1, 2, \cdots, q$.

A dinâmica da urna consiste em retirar uma bola, observar a sua cor, e recolocá-la de volta junto com mais uma quantidade de bolas definida pelo vetor de reposição daquela cor, se a bola retirada for da cor i, colocamos ela de volta junto com mais M_{i1} bolas da cor 1, M_{i2} bolas da cor 2, e assim sucessivamente, até adicionarmos M_{iq} bolas da cor q.

No último século, o modelo de urnas de Pólya começou a ser abordado por estatísticos e matemáticos de todo mundo. Alguns estudos apareceram inicialmente em trabalhos de Markov em 1907 [16]. Logo depois, Ehrenfest em 1907 [7] propôs o modelo para a mistura de gases. Na sequência, Eggenberger e Pólya em 1923 [6], com um modelo alternativo, popularizaram o assunto. Em seu modelo, buscaram modelar o contágio, as epidemias e outros fenômenos de disseminação de uma população.

Casos particulares de urnas de Pólya foram destacados no livro introdutório de Mahmoud[15], alguns desses resultados podem ser vistos na seção 1.1 dessa dissertação.

Recentemente, Janson[11] estendeu esses resultados para uma urna com matriz de reposição com entradas aleatórias. A ideia foi utilizar as definições, propriedades de probabilidade para descrever o valor esperado e variância e a utilização da teoria espectral para estabelecer as convergências, alguns desses resultados podem ser vistos nas seções 1.4 e 2.1 deste texto.

Por outro lado, estudar propriedades estatísticas de dinâmicas populacionais através de modelos estocásticos é um assunto que desperta interesse da comunidade científica há mais de um século. Desde a física com os modelos de difusão como em [14] até a epidemiologia com o estudo de processos de contágio [13], tais modelos se mostram extremamente versáteis no entendimento de problemas práticos.

A propriedade de memória longa observada em alguns modelos de urnas de Pólya foi usada para resolver problemas relacionados ao passeio do elefante e difusão de opiniões, fato observado em [8] e [9].

Entendemos por passeio aleatório um modelo que a cada passo escolhemos uma direção a ser seguida, um movimento aleatório. Alguns exemplos podem ser observados no capítulo (3).

O objetivo deste trabalho é estudar a lei forte de grandes números para o passeio aleatório do elefante e obter um teorema limite funcional para um processo gaussiano com a forma explícita da matriz de covariância limite.

Esse texto é organizado da seguinte maneira: No capítulo 1 apresentamos as urnas de Pólya-Eggenberger e conceitos básicos das urnas de Pólya com mais de duas cores, exibimos expressões para o valor esperado e variância e analisamos o comportamento assintótico. No capítulo 2 temos resultados de convergências e a construção da matriz de intensidade para o modelo de difusão de opinião. Finalmente, no capítulo 3 relacionamos o passeio aleatório do elefante com a urna de Pólya para obtenção de uma lei forte dos grandes números.

José Elias Ferreira da Silva
Uberlândia-MG, 25 de agosto de 2022.

Capítulo 1

Elementos da urna de Pólya

1.1 Urnas de Pólya com duas cores

O modelo de urna de Pólya consiste em um objeto contendo bolas de cores variadas. Ao realizar sorteios sucessivos repomos aquela escolhida anteriormente e acrescentamos uma quantidade de cada uma das outras cores.

Na referência [15], capítulo 3, o autor destaca resultados envolvendo urnas com duas cores, enfatizamos definições e afirmações para aquela denominada Pólya-Eggenberger.

Suponhamos que a urna possui bolas brancas e azuis, temos que a matriz de reposição da urna Pólya-Eggenberger é dada por

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} .$$

Para esta matriz, a dinâmica consiste em: retirar uma bola, observar a sua cor, recolocá-la de volta e acrescentar s bolas da cor escolhida. Observamos que a primeira coluna de M indica que se uma bola branca for sorteada, s bolas desta cor são inseridas na urna, da mesma forma, a segunda coluna mostra que caso seja sorteada é uma bola azul, s bolas desta cor são colocadas na urna.

O teorema a seguir indica a probabilidade de uma certa quantidade de bolas brancas serem escolhidas em um total de n retiradas.

Teorema 1.1 (Eggenberger e Polya, 1923)**.** *Seja $\tilde{W}_n$ o número de bolas brancas retiradas da urna de Pólya-Eggenberger após n sorteios. Então*

$$\mathbb{P}(\tilde{W}_n = k) = \frac{W_0(W_0+s)\dots(W_0+(k-1)s)\dots B_0(B_0+s)\dots(B_0+(n-k-1)s)}{\tau_0(\tau_0+s)\dots(\tau_0+(n-1)s)}\binom{n}{k} ,$$

onde W_0 e B_0 indicam o número de bolas brancas e azuis inicialmente na urna. O vetor (W_0, B_0) representa a configuração inicial no instante 0, além disso, temos que τ_0 é o total de bolas na urna antes do início dos sorteios.

Demonstração. Seja uma sequência onde aconteceram n sorteios de bolas da urna, na qual k delas são brancas e $n-k$ foram bolas azuis.

Suponha que $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ são os índices que representam o tempo de sorteio das bolas brancas.

Para τ_j indicando o total de bolas na urna após j passos, a probabilidade de uma sequência particular citada anteriormente é :

$$\frac{B_0}{\tau_0} \times \frac{B_0+s}{\tau_1} \times \frac{B_0+2s}{\tau_2} \times \ldots \times \frac{B_0+(i_1-2)s}{\tau_{i_1-2}} \times \frac{W_0}{\tau_{i_1-1}} \times \frac{B_0+(i_1-1)s}{\tau_{i_1}}$$
$$\times \ldots \times \frac{B_0+(i_2-3)s}{\tau_{i_1-2}} \times \frac{W_0+s}{\tau_{i_2-1}} \times \frac{B_0+(i_2-2)s}{\tau_{i_2}} \times \ldots \times \frac{B_0+(n-k-1)s}{\tau_{n-1}} \ .$$

Observamos que a expressão não depende dos índices, estes podem ser escolhidos de $\binom{n}{k}$ maneiras.

Portanto,

$$\mathbb{P}(\tilde{W}_n = k) = \frac{B_0}{\tau_0} \times \frac{B_0+s}{\tau_1} \times \frac{B_0+2s}{\tau_2} \times \ldots \times \frac{B_0+(i_1-2)s}{\tau_{i_1-2}} \times \frac{W_0}{\tau_{i_1-1}} \times \frac{B_0+(i_1-1)s}{\tau_{i_1}}$$
$$\times \ldots \times \frac{B_0+(i_2-3)s}{\tau_{i_1-2}} \times \frac{W_0+s}{\tau_{i_2-1}} \times \frac{B_0+(i_2-2)s}{\tau_{i_2}} \times \ldots \times \frac{B_0+(n-k-1)s}{\tau_{n-1}} \binom{n}{k} \ .$$

Dado que

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \tau_0 + s \\ \tau_2 &= \tau_0 + 2s \\ &\vdots \\ \tau_{n-1} &= \tau_0 + (n-1) \ ,\end{aligned}$$

substituindo e reorganizando a expressão anterior:

$$\mathbb{P}(\tilde{W}_n = k) = \frac{W_0(W_0+s)\ldots(W_0+(k-1)s)\ldots B_0(B_0+s)\ldots(B_0+(n-k-1)s)}{\tau_0(\tau_0+s)\ldots(\tau_0+(n-1)s)}\binom{n}{k} \ .$$

E isso finaliza a prova.

□

Na sequência, o resultado exibe expressões para o valor esperado e a variância do número de bolas brancas após n passos.

Corolário 1.1 (Eggenberger e Polya, 1923)**.** *Seja W_n o número de bolas brancas da urna de Pólya-Eggenberger após n sorteios. Então,*

$$\mathbb{E}[W_n] = \frac{W_0}{\tau_0} sn + W_0 \ ,$$

$$Var[W_n] = \frac{W_0 B_0 s^2 n(sn+\tau_0)}{\tau_0^2(\tau_0+s)} \ .$$

Demonstração. Seja $\tilde{W}_n$ o número de bolas brancas sorteadas da urna de Pólya-Eggenberger após n sorteios.

Temos que $W_n = s\tilde{W}_n + W_0$ para $\tilde{W}_n \in \{0, 1, 2, \ldots n\}$, de fato, segue de

$$\begin{aligned}W_1 &= W_0 + s\tilde{W}_1 \\ W_2 &= W_0 + s\tilde{W}_2 \\ &\vdots\end{aligned}$$

$$W_n = W_0 + s\tilde{W}_n \ .$$

Usando as propriedades do valor esperado temos:

$$\mathbb{E}[W_n] = s\mathbb{E}[\tilde{W}_n] + W_0 \ .$$

Por outro lado, por definição e usando o teorema anterior temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\tilde{W}_n] &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(\tilde{W} = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \frac{W_0(W_0+s)\dots(W_0+(k-1)s)\dots B_0(B_0+s)\dots(B_0+(n-k-1)s)}{\tau_0(\tau_0+s)\dots(\tau_0+(n-1)s)} \binom{n}{k} .
\end{aligned}$$

Reescrevendo $\mathbb{P}(\tilde{W}_n = k)$ em termos de fatorial

$$\begin{aligned}
P\left(\tilde{W}_n = k\right) &= s^k \frac{W_0}{s}\left(\frac{W_0}{s}+1\right)\dots\left(\frac{W_0}{s}+(k-1)\right) \\
&\quad \times \frac{s^{n-k}\frac{B_0}{s}\left(\frac{B_0}{s}+1\right)\dots\left(\frac{B_0}{s}+(n-k-1)\right)}{s^n\frac{\tau_0}{s}\left(\frac{\tau_0}{s}+1\right)\dots\left(\frac{\tau_0}{s}+(n-1)\right)} \binom{n}{k} .
\end{aligned}$$

Escrevendo a expressão acima em outra notação

$$P(\tilde{W}_n = k) = \binom{n}{k} \frac{\left\langle \frac{W_0}{s} \right\rangle_k \left\langle \frac{B_0}{s} \right\rangle_{n-k}}{\left\langle \frac{\tau_0}{s} \right\rangle_n} \ ,$$

onde

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{W_0}{s} \right\rangle_k &= \frac{W_0}{s}\left(\frac{W_0}{s}+1\right)\dots\left(\frac{W_0}{s}+(k-1)\right) \\
\left\langle \frac{B_0}{s} \right\rangle_{n-k} &= \frac{B_0}{s}\left(\frac{B_0}{s}+1\right)\dots\left(\frac{B_0}{s}+(n-k-1)\right) \\
\left\langle \frac{\tau_0}{s} \right\rangle_n &= \frac{\tau_0}{s}\left(\frac{\tau_0}{s}+1\right)\dots\left(\frac{\tau_0}{s}+(n-1)\right)
\end{aligned}$$

Usando a identidade $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ chegamos a

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\tilde{W}_n] &= \sum_{k=0}^{n} kP(\tilde{W}_n)\\
&= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\frac{\left\langle \frac{W_0}{s}\right\rangle_k \left\langle \frac{B_0}{s}\right\rangle_{n-k}}{\left\langle \frac{\tau_0}{s}\right\rangle_n}\\
&= n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}\frac{\left\langle \frac{W_0}{s}\right\rangle_k \left\langle \frac{B_0}{s}\right\rangle_{n-k}}{\left\langle \frac{\tau_0}{s}\right\rangle_n}\\
&= n\frac{\frac{W_0}{s}}{\frac{\tau_0}{s}}\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}\frac{\left\langle \frac{W_0+s}{s}\right\rangle_{k-1} \left\langle \frac{B_0}{s}\right\rangle_{n-k}}{\left\langle \frac{\tau_0+s}{s}\right\rangle_{n-1}}\\
&= \frac{W_0 n}{\tau_0}\underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j}\frac{\left\langle \frac{W_0+s}{s}\right\rangle_{j} \left\langle \frac{B_0}{s}\right\rangle_{(n-1)-j}}{\left\langle \frac{\tau_0+s}{s}\right\rangle_{n-1}}}_{1}\ .
\end{aligned}
$$

O somatório é 1, pois é a soma de todas as probabilidades para o número vezes que bola branca é sorteada em uma amostra de $n-1$ escolhas, quando a urna começa com W_0+s bolas brancas e B_0 bolas azuis.

Portanto

$$\mathbb{E}[\tilde{W}_n] = \frac{W_0 n}{\tau_0}\ .$$

Com isso, de $\mathbb{E}[W_n] = s\mathbb{E}[\tilde{W}_n] + W_0$ temos que

$$\mathbb{E}[W_n] = \frac{W_0}{\tau_0}sn + W_0\ .$$

Para demonstrar a variância o processo é semelhante, basta usar a expressão $Var(\tilde{W}_n) = \mathbb{E}(\tilde{W}_n^2) - [\mathbb{E}(\tilde{W}_n)]^2$ e o segundo momento,

$$\mathbb{E}(\tilde{W}_n^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2\mathbb{P}(\tilde{W}_n = k)\ .$$

□

Na seção 1.4, analisaremos o comportamento assintótico do valor esperado e da variância.

Estabelecemos no próximo teorema a convergência da proporção de bolas brancas retiradas da urna, em distribuição, para uma variável aleatória com a distribuição beta. Detalhamos algumas passagens da demonstração das referências, antes disso, consideremos o seguinte lema.

Lema 1.1. *Dado $x \in [0,1]$, se $(Y_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias $Bin(n,u)$, então $\mathbb{P}(n^{-1}Y_n \leq x) \longrightarrow 0$, se $x < u$ e $\mathbb{P}(n^{-1}Y_n \leq x) \longrightarrow 1$, se $u < x$.*

Demonstração. Observemos que se $(Y_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias $Bin(n,u)$, então

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{n} \leq x\right) = \mathbb{P}(Y_n \leq \lfloor nx \rfloor) = \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k} \ .$$

E pela Lei Fraca dos Grandes Números

$$\frac{Y_n}{n} \xrightarrow{p} u \ .$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ vale

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_n}{n} - u\right| > \epsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\frac{Y_n}{n} < u - \epsilon\right\} \cup \left\{\frac{Y_n}{n} > u + \epsilon\right\}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \ .$$

O que implica que

(i) $\mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{n} < u - \epsilon\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(ii) $\mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{n} > u + \epsilon\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Como vale para qualquer ϵ, seja $\epsilon_1 > 0$ e tomemos $x = u - \epsilon_1$, então $x < u$ e

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{n} \leq x\right) = \mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{n} \leq u - \epsilon_1\right) \leq \mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{n} < u - \frac{\epsilon_1}{2}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \ .$$

Agora dado $\epsilon_2 > 0$ tomemos $x = u + \epsilon_2$, temos que $u < x$ e

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{n} \leq x\right) = \mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{n} \leq u + \epsilon_2\right) = 1 - \cancelto{0}{\mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{n} > u + \epsilon_2\right)} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \ .$$

□

Teorema 1.2. *[Eggenberger e Polya, 1923] Seja $\tilde{W}_n$ o número de bolas brancas retiradas da urna de Pólya-Eggenberger após n sorteios. Então*

$$\frac{\tilde{W}_n}{n} \xrightarrow{d} Beta\left(\frac{W_0}{s}, \frac{B_0}{s}\right)$$

Demonstração. Assuma que W_0 e B_0 sejam maiores que 0.

Do corolário 1.1 temos que:

$$P\left(\tilde{W}_n = k\right) = \frac{W_0}{s}\left(\frac{W_0}{s}+1\right)\ldots\left(\frac{W_0}{s}+(k-1)\right) \times \frac{\frac{B_0}{s}\left(\frac{B_0}{s}+1\right)\ldots\left(\frac{B_0}{s}+(n-k-1)\right)}{\frac{\tau_0}{s}\left(\frac{\tau_0}{s}+1\right)\ldots\left(\frac{\tau_0}{s}+(n-1)\right)} \binom{n}{k} .$$

Usando a propriedade da função Gama observamos que

$$\frac{W_0}{s}\left(\frac{W_0}{s}+1\right)\ldots\left(\frac{W_0}{s}+(k-1)\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{W_0}{s}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{W_0}{s}\right)}$$

$$\frac{B_0}{s}\left(\frac{B_0}{s}+1\right)\dots\left(\frac{B_0}{s}+(n-k-1)\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{B_0}{s}+n-k\right)}{\Gamma\left(\frac{B_0}{s}\right)}$$

$$\frac{\tau_0}{s}\left(\frac{\tau_0}{s}+1\right)\dots\left(\frac{\tau_0}{s}+(n-1)\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{\tau_0}{s}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{\tau_0}{s}\right)}$$

Assim, para $x \in [0,1]$, a função de distribuição acumulada das bolas brancas sorteadas é:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\tilde{W}_n \leq nx\right) &= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{\Gamma\left(\frac{W_0}{s}+k\right)\Gamma\left(\frac{B_0}{s}+n-k\right)}{\Gamma\left(\frac{W_0}{s}\right)\Gamma\left(\frac{B_0}{s}\right)\Gamma\left(\frac{\tau_0}{s}+n\right)/\Gamma\left(\frac{\tau_0}{s}\right)}\binom{n}{k} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{\tau_0}{s}\right)}{\Gamma\left(\frac{B_0}{s}\right)\Gamma\left(\frac{W_0}{s}\right)}\sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor}\binom{n}{k}\frac{\Gamma\left(\frac{W_0}{s}+k\right)\Gamma\left(\frac{B_0}{s}+n-k\right)}{\Gamma\left(\frac{\tau_0}{s}+n\right)}
\end{aligned}$$

Usando a relação da função Gama temos que

$$\mathbb{P}\left(\tilde{W}_n \leq nx\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{\tau_0}{s}\right)}{\Gamma\left(\frac{B_0}{s}\right)\Gamma\left(\frac{W_0}{s}\right)}\sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor}\binom{n}{k}\int_0^1 u^{\frac{W_0}{s}+k-1}(1-u)^{\frac{B_0}{s}+n-k-1}du\ .$$

Disso, segue que

$$\mathbb{P}\left(\tilde{W}_n \leq nx\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{\tau_0}{s}\right)}{\Gamma\left(\frac{B_0}{s}\right)\Gamma\left(\frac{W_0}{s}\right)}\int_0^1 u^{\frac{W_0}{s}-1}(1-u)^{\frac{B_0}{s}-1}\sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor}\binom{n}{k}u^k(1-u)^{n-k}du\ .$$

Logo, usando o teorema da convergência dominada como o autor em [1] e o Lema 1.1, segue que

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\frac{\tilde{W}_n}{n}\le x\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{\tau_0}{s}\right)}{\Gamma\left(\frac{B_0}{s}\right)\Gamma\left(\frac{W_0}{s}\right)}\int_0^1 u^{\frac{W_0}{s}-1}(1-u)^{\frac{B_0}{s}-1}\sum_{k=0}^{\lfloor nx\rfloor}\binom{n}{k}u^k(1-u)^{n-k}du \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{\tau_0}{s}\right)}{\Gamma\left(\frac{B_0}{s}\right)\Gamma\left(\frac{W_0}{s}\right)}\int_0^1 u^{\frac{W_0}{s}-1}(1-u)^{\frac{B_0}{s}-1}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\lfloor nx\rfloor}\binom{n}{k}u^k(1-u)^{n-k}du \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{\tau_0}{s}\right)}{\Gamma\left(\frac{B_0}{s}\right)\Gamma\left(\frac{W_0}{s}\right)}\int_0^1 u^{\frac{W_0}{s}-1}(1-u)^{\frac{B_0}{s}-1}\mathbb{1}_{\{u<x\}}(u)du \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{\tau_0}{s}\right)}{\Gamma\left(\frac{B_0}{s}\right)\Gamma\left(\frac{W_0}{s}\right)}\int_0^x u^{\frac{W_0}{s}-1}(1-u)^{\frac{B_0}{s}-1}du \\
&= \frac{1}{\beta\left(\frac{W_0}{s},\frac{B_0}{s}\right)}\int_0^x u^{\frac{W_0}{s}-1}(1-u)^{\frac{B_0}{s}-1}du \\
&= \mathbb{P}(Z_n\le x)\text{ onde }Z_n\sim Beta\left(\frac{W_0}{s},\frac{B_0}{s}\right)
\end{aligned}
$$

Portanto, $\frac{\tilde{W}_n}{n}\xrightarrow{d} Beta\left(\frac{W_0}{s},\frac{B_0}{s}\right)$.

□

Observamos que os resultados apresentados até aqui são particulares. Em 2004, em [11], foi desenvolvida uma teoria que generaliza esses cálculos, tal estudo será apresentado nas próximas seções.

1.2 Definições e propriedades para urnas com duas ou mais cores

Nesta seção exibimos os conceitos básicos para o desenvolvimento do restante do texto e um lema, observamos que a nossa base teórica são [11] e [12].

Consideremos a urna de Pólya com q bolas de cores diferentes com $q\ge 2$. A composição da urna no tempo n é dada pelo vetor $X_n=(X_{n1},X_{n2},\cdots,X_{nq})$, onde X_{ni} é o número de bolas de cor i.

A dinâmica da urna consiste em: retirar uma bola, observar a sua cor, recolocá-la de volta e junto acrescentar uma quantidade de bolas das outras cores definida pelo vetor de reposição.

Para cada cor i temos o peso (atividade) $a_i\ge 0$ e o vetor coluna de reposição $\xi_i=(\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{iq})$, este geralmente é aleatório e satisfaz quase-certamente(q.c.)

$$\xi_{ij}\ge 0,\ i\ne j\ , \tag{1.1}$$

$$\xi_{ii}\ge -1\ . \tag{1.2}$$

Nas aplicações do capítulo 3, assumiremos que $\xi_{ii} \geq 0$, com isso há reposição da bola sorteada.

Temos que a matriz de reposição será dada por $M = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_q)$.

Definição 1.1. *A matriz intensidade da urna de Pólya é a matriz $q \times q$ dada por*

$$A := (a_j \mathbb{E}(\xi_{ji}))_{i,j=1}^{q} \ . \tag{1.3}$$

Observemos que quando $a_j = 1$, $A = \mathbb{E}(M)$, isto é, $A_{ij} = \mathbb{E}(\xi_{ji})$ e a j-coluna de A é a mudança esperada quando uma bola do tipo j é sorteada. Em particular, quando o vetor de reposição é determinístico temos que $M = A$.

A escolha da bola de cor i ocorre com probabilidade

$$\frac{a_i X_{ni}}{\sum_{j=1}^{q} a_j X_{nj}} \ .$$

E ainda, se cada $a_i = 1$, a bola é sorteada aleatoriamente uniformemente.

Logo, a urna é atualizada por $X_{n+1} = X_n + \xi_i$, onde ξ_i é o vetor de reposição que é utilizado quando é sorteada a cor i no (n+1)-ésimo sorteio.1

Assumimos que X_0 e o vetor aleatório ξ_i são tais que, quase certamente (q.c.), para $n \geq 0$

$$X_{ni} \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{q} a_i X_{ni} > 0 \ ,$$

as condições acima tornam a urna sustentável, isto é, o processo não para por falta de bolas a serem removidas.

Os itens (1.1) e (1.2) indicam que podemos adicionar, mas não remover bolas de outros tipos que não a sorteada.

Se a urna ficar vazia ou, mais geralmente, não houver bolas com atividade restante diferentes de zero, o processo para, ou seja, extingue.

Usaremos o processo de urna utilizando um processo de ramificação de Markov de tempo contínuo multitipo $\mathcal{X}(t) = (\mathcal{X}_1(t), \mathcal{X}_2(t), \cdots, \mathcal{X}_q(t))$. Este processo é definido usando os mesmos valores de a_i e ξ_i definidos anteriormente e o vetor inicial $\mathcal{X}(0) = X_0$.

Assim uma bola (partícula) vive um tempo exponencialmente distribuido com média a_1^{-1}, ou seja, deixa de existir com intensidade a_i. E quando morre, é substituido por um conjunto de bolas com distribuição $(\xi_{ij} + \delta_{ij})_{j=1}^{q}$ todos os tempos de vida e descendência composições sendo independentes.

Alternativamente, quando $\xi_{ij} \geq 0$ q.c., a bola vive para sempre e em tempos aleatórios de acordo com o processo de Poisson com intensidade a_i, dando origem a um novo gupo de bolas com distribuição dada por ξ_i.

Seja $\tau_0 = 0$ e τ_n, $n \geq 1$, o n-ésimo tempo que a bola morre (se divide). O processo $(\mathcal{X}(\tau_n))_{n=0}^{\infty}$ é igual (em distibuição) a $(X_n)_{n=0}^{\infty}$; portanto, teoremas de limites para X_n podem ser derivados de teoremas de limites para $\mathcal{X}(t)$.

Os processos $\mathcal{X}(t)$, $t \geq 0$ e X_n, $n \geq 0$ (estes serão considerados como vetores colunas) são os mesmos até uma mudança de tempo (extensão do parâmetro n para valores reais), mas como $\mathcal{X}(t)$, cresce exponencialmente, as escalas de tempo são diferentes.

Dizemos que a cor do tipo i domina j, $i \succ j$, se for possível encontrar uma bola do tipo j em uma urna começando com uma única bola do tipo i.

A relação $\succ$ é reflexiva e transitiva, então temos as classes de equivalência $\mathcal{C}_1, \cdots \mathcal{C}_v$, é tal que i e j pertencem à mesma classe se e somente se $i \succ j$ e $j \succ i$, além disso, $\succ$ induz uma ordem parcial entre as classes de equivalência.

Dizemos que tipo i é dominante se $i \succ j$ para cada tipo j, e a classe $\mathcal{C}_k$ é dominante se algum $i \in \mathcal{C}_k$ é dominante.

Observemos que se ordenarmos as classes e pegarmos os tipos nessa ordem, A se torna uma matriz triangular em blocos, por isso o conjunto de autovalores das restrições de A às classes de equivalências $\mathcal{C}_k$.

Dizemos que um autovalor pertence a uma classe se é um autovalor da restrição de A a esta classe.

A urna, ou o processo de ramificação, ou A é irredutível (ou regular positiva, que é equivalente em tempo contínuo) se houver apenas uma classe de equivalência. Logo, se $i \succ j$ para quaisquer tipos i e j é equivalente a todos os tipos estarem dominados.

Iremos considerar as seguintes condições básicas (A1)-(A6):

(A1) $\xi_{ij} \geq 0$ se $i \neq j$ e $\xi_{ii} \geq -1$ valem.

(A2) $\mathbb{E}(\xi_{ij}^2) < \infty$, para todo i, $j = 1, \ldots, q$.

(A3) O maior autovalor real λ_1 de A é positivo.

(A4) O maior autovalor real λ_1 de A é simples.

(A5) Existe um tipo dominante i com $X_{0i} > 0$ ($\mathcal{X}(0)_i > 0$), isto é, começamos com pelo menos uma bola dominante.

(A6) λ_1 pertence à classe dominante.

Assumimos que as classes são ordenadas de modo que $\mathcal{C}_1$ seja a classe dominante.

Observemos que quando A é irredutível valem (A4), (A5) e (A6).

Dizemos que o processo se extingue essencialmente se em algum momento não houver mais bolas de nenhum tipo dominante.

Lema 1.2. *Se A é irredutível, (A1) e (A2) valem, $\sum_j \mathbb{E}(\xi_{ij}) \geq 0$ para todo i e $\sum_j \mathbb{E}(\xi_{ij} > 0)$ para algum i, então as condições básicas (A1)-(A6) são válidos e a extinção é impossível.*

Demonstração. As condições implicam que o número total de bolas nunca diminui, o que garante a não extinção. Como o processo é irredutível, valem as suposições (A4)-(A6). Finalmente, temos (A3) pelo teorema de Perron-Frobenius. □

1.3 Teoria espectral para matriz de intensidade

Nesta seção destacamos a teoria espectral para a matriz de intensidade observadas em [11] e [12].

Considerando a definição (1.1), $A+\alpha I$ é uma matriz não negativa se α é grande o suficiente, pela teoria de Perron–Frobenius, A tem o maior autovalor real λ_1 tal que todos os outros autovalores λ satisfazem Re$\lambda < \lambda_1$.

Sejam os autovalores de A denotados por $\lambda_1, \cdots, \lambda_q$, assumimos que sejam ordenados com partes reais decrescentes, isto é, $\lambda_1 \geq \text{Re } \lambda_2 \geq Re\lambda_3 \geq \cdots$

Quando citarmos autovetor à direita, este será da matriz A e quando escrito autovetor à esquerda estaremos nos referindo ao autovetor da matriz transposta $A^{'}$.

Dado $a = (a_1, \cdots, a_q)$ o vetor coluna peso (atividade), e sejam u_1, v_1 os autovetores a esquerda e direita de A correspondente ao maior autovalor λ_1. Assim, os vetores satisfazem: $u^{'}A = \lambda_1 u^{'}$, $Av_1 = \lambda_1 v_1$.

Pela suposição básica (A4), u_1 e v_1 são únicos até fatores escalares e pela Teoria de Perron-Frobenius, aplicando para $A + \alpha I$ para adequado α, eles podem ser escolhidos não-negativos.

Se o processo é irredutível, todas as entradas de u_1 e v_1 são estritamente positivas. Dessa afirmação aplicada à restrição da classe dominante $\mathcal{C}_1$ junto com a suposição básica (A6) que $v_{1i} > 0$ para cada i, enquanto $u_{1i} > 0$ se $i \in \mathcal{C}_1$ e $u_{1i} = 0$, caso contrário.

Os produtos escalares $u_1 \cdot v_1$ e $a \cdot v_1$ são positivos, e podemos assumir que v_1 e u_1 são normalizados tais que

$$a \cdot v_1 = a^{'} v_1 = v_1^{'} a = 1 \; , \tag{1.4}$$

$$u_1 \cdot v_1 = u^{'} v_1 = v_1^{'} u_1 = 1 \ , \tag{1.5}$$

isso determina a escolha de u_1 e v_1.

A seguir usaremos a decomposição de Jordam da matriz A.

Temos que existe uma decomposição do espaço complexo $\mathbb{C}^q$ como soma direta $\bigoplus_\lambda E_\lambda$ de autoespaços generalizados E_λ.

Além disso, $A - \lambda I$ é um operador nilpotente em E_λ, com I a matriz identidade e λ variando sobre o conjunto $\sigma(A)$, temos que existem projeções P_λ que comutam com A e satisfazem

$$\sum_{\lambda \in \sigma(A)} P_\lambda = I \ , \tag{1.6}$$

$$AP_\lambda = P_\lambda A = \lambda P_\lambda + N_\lambda \ , \tag{1.7}$$

onde $N_\lambda = P_\lambda N_\lambda = N_\lambda P_\lambda$ é nilpotente. Além disso, $P_\lambda P_\mu = 0$ quando $\lambda \neq \mu$.

Seja d_λ o inteiro tal que $N_\lambda^{d_\lambda} \neq 0$, mas $N_\lambda^{d_\lambda + 1} = 0$. Logo, na foma de Jordan de A, o maior bloco de Jordan com λ na diagonal tem tamanho $d_\lambda + 1$.

Como $d_\lambda = 0$ se e somente se $N_\lambda = 0$, isso ocorre para todo λ se e somente se A é diagonalizável. O que ocorre quando A possui um conjunto de q autovetores linearmente independentes.

Observemos que tomando as transpostas em (1.6) e (1.7), que $P_\lambda^{'}$ e $N_\lambda^{'}$ são as projeções e operadores nilpotentes para $A^{'}$.

Como assumimos que λ_1 é um autovalor simples, $N_{\lambda_1} = 0$ e $d_{\lambda_1} = 0$, e P_{λ_1} é a projeção unidimensional, segue que

$$P_{\lambda_1} = v_1 u_1^{'} \ . \tag{1.8}$$

Sabemos que as matrizes exponenciais podem ser definidas como séries de potências, por exemplo, $e^{tA} = \sum_{j=0}^{\infty} t^j A^j / j!$. Temos, usando (1.7) e a propriedade comutativa,

$$\begin{aligned} P_\lambda e^{tA} = e^{tA} P_\lambda = P_\lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} (P_\lambda A)^j = P_\lambda e^{tP_\lambda A} \\ = P_\lambda e^{\lambda t P_\lambda + tN_\lambda} = P_\lambda e^{\lambda t P_\lambda} e^{tN_\lambda} \\ = P_\lambda e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{d_\lambda} \frac{t^j}{j!} N_\lambda^j \ . \end{aligned}$$

e então, por (1.6),

$$e^{tA} = \sum_\lambda \sum_{j=0}^{d_\lambda} \frac{t^j}{j!} e^{\lambda t} P_\lambda N_\lambda^j \ .$$

Consideremos os conjuntos $\Lambda_I := \{\lambda \in \sigma(A) : Re\lambda < \lambda_1/2\}$, $\Lambda_{II} := \{\lambda \in \sigma(A) : Re\lambda = \lambda_1/2\}$ e $\Lambda_{III} := \{\lambda \in \sigma(A) : Re\lambda > \lambda_1/2\}$. Portanto, $\sigma(A) = \Lambda_I \cup \Lambda_{II} \cup \Lambda_{III}$, assim podemos definir $P_I = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} P_\lambda$ a projeção na soma dos autoespaços generalizados com $Re\lambda < \lambda_1/2$.

Sejam as seguintes matrizes que serão usadas posteriormente

$$B_i = \mathbb{E}(\xi_i \xi_i^{'}) \tag{1.9}$$

$$B := \sum_{i=1}^{q} v_{1i} a_i \mathbb{E}(\xi_i \xi_i^{'}) \tag{1.10}$$

$$\Sigma_I := \int_0^\infty P_I e^{sA} B e^{sA'} P_I' e^{-\lambda_1 s} ds \tag{1.11}$$

Para escrevermos expressões explícitas para as variâncias assintóticas, com $s \geq 0$, sejam

$$\phi(s, A) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n!} A^{n-1} = \int_0^s e^{tA} dt \ , \ e \tag{1.12}$$

$$\psi(s, A) := e^{sA} - \lambda_1 v_1 a' \phi(s, A) \ . \tag{1.13}$$

Observação 1.1. *Seja ξ_* o vetor aleatório obtido escolhendo ξ_i para o tipo aleatório i, com probabilidade $a_i v_{1i}$ do tipo i. Temos que ξ_* é a distribuição assintótica das bolas adicionadas.*

Então, de (1.9) temos $B = \mathbb{E}(\xi_* \xi_*')$. Como, $\mathbb{E}(\xi_*) = \sum_{i=1}^q a_i v_{1i} \mathbb{E}(\xi_i)$ e usando a definição (1.3) da matriz intensidade,

$$\sum_{n=1}^{q} v_{1i} a_i \mathbb{E}(\xi_i) = \left(\sum_{n=1}^{q} v_{1i} a_i \mathbb{E}(\xi_i) \right)_{j=1}^{q} = \left(\sum_{n=1}^{q} v_{1i} A_{ji} \right)_{j=1}^{q} = A v_1 = \lambda_1 v_1 \ , \tag{1.14}$$

com a matriz de covariância de ξ_* dada por

$$\hat{B} := \mathbb{E}(\xi_* \xi_*') - (\mathbb{E}(\xi_*))(\mathbb{E}(\xi_*')) = B - \lambda_1^2 v_1 v_1' \ .$$

Temos que $P_\lambda v_1$ quando $\lambda \neq \lambda_1$, podemos substituir B por $\hat{B}$ em (1.11).

Observação 1.2. *Suponhamos que $a_1 = 1$ e $\sum_j \xi ij = m$ para cada i e algum número fixo m; em outras palavras, as atividades são iguais e sempre adicionamos exatamente m bolas. Denotemos $\mathbf{1}$ o vetor $(1, 1, \cdots, 1)'$,*

$$(\mathbf{1}A)_i = \sum_{j=1}^{q} A_{ji} = \sum_{j=1}^{q} \mathbb{E}(\xi_{ij}) = m \ ,$$

para cada i, então $\mathbf{1}A = m\mathbf{1}$,logo $\lambda_1 = m$ e $\mathbf{1}$ é um autovetor esquerdo, das normalizações (1.4) e (1.5) segue que $u_1 = a = \mathbf{1}$. Por (1.8), $P_{\lambda_1} x = v_1 u_1' x = (\mathbf{1} \cdot x) v_1 = (\sum_i x_1) v_1$ para cada vetor $x = (x_i)_1^q$.

Na próxima seção escrevemos expressões para o valor esperado e variância para a composição da urna no tempo n.

1.4 Valor esperado e variância da composição da urna

Os conceitos e resultados explorados nesta seção, inspirados em [12], exibem expressões para valor esperado e variância, além disso, será analisado o comportamento assintótico.

Assumiremos por simplicidade que o vetor X_0 seja determinístico.

Usaremos a notação assintótica $a_n = O(b_n)$ que significa a_n/b_n é limitada e $a_n = o(b_n)$ indica que $a_n/b_n \longrightarrow 0$. Várias propriedades podem ser conferidas em [3].

Definição 1.2. *Dizemos que a urna é balanceada se*

$$\sum_{j=1}^{q} a_j \xi_{ij} = b > 0 \ . \tag{1.15}$$

A urna ser balanceada indica que um número constante de bolas são inseridas na urna a cada passo.

E ainda, podemos escrever a equação acima como

$$a \cdot \xi_i = b \ .$$

Sejam os autovalores de A denotado por $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q$ assumimos que eles são ordenados com partes reais decrescentes, $Re\lambda_1 \geq Re\lambda_2, \cdots$. Quando as partes reais são iguais, em ordem decrescente $v_j := v_{\lambda_j}$. Em particular, se $\lambda_1 > Re\lambda_2$, então $v_j \leq v_2$ para cada autovalor λ_j com $Re\lambda_j = Re\lambda_2$.

Sendo a urna balanceada, por (1.3) e (1.15) segue que

$$a^{'}A = \left(\sum_{i=1}^{q} a_i(A)_{ij}\right)_j = \left(\sum_{i=1}^{q} a_i a_j \mathbb{E}(\xi_{ji})\right)_j = (a_j\mathbb{E}(a \cdot \xi_j))_j = ba^{'} \tag{1.16}$$

isto é, $a^{'}$ é autovetor esquerdo de A com b seu autovalor, logo $b \in \sigma(A)$, seja b o maior autovalor, ou seja,

$$\lambda_1 = b \tag{1.17}$$

A equação acima é consequência do teorema de Perron-Frobenius e suporemos válida nos resultados deste capítulo, sem perda de generalidade.

Assumiremos nos teoremas que $Re\lambda_2 < \lambda_1$, com isso $\lambda_1 = b$ é um autovalor simples, logo os autovetores esquerdo e direito correspondentes $u_1^{'}$ e v_1 são únicos após a normalização.

Por (1.16), podemos supor que $u_1 = a$, além disso, seja v_1 normalizado por

$$u_1 \cdot v_1 = a \cdot v_1 = 1 \tag{1.18}$$

Então a projeção P_{λ_1} é dada por

$$P_{\lambda_1} = v_1 u_1^{'} \tag{1.19}$$

Portanto, quando a urna é balanceada, para cada vetor $v \in \mathbb{R}^q$,

$$P_{\lambda_1} v = v_1 u_1^{'} v = v_1 a v = (a \cdot v) v_1 \ . \tag{1.20}$$

O autovalor dominante λ_1 é simples, e $\mathrm{Re}\lambda_2 < \lambda_1$, se por exemplo, a matriz A é irredutível.

A proposição a seguir estabelece expressões para média e variância após o n-ésimo passo.

Proposição 1.1. *Tem-se que* $\mathbb{E}(X_n) = F_{0,n}X_0$ *onde* $F_{0,n} = \prod_{k=0}^{n-1}(I + w_k^{-1}A)$ *e* $Var(X_n) = \sum_{i=1}^{n} F_{i,n}\mathbb{E}(Y_i Y_i^{'})F_{i,n}^{'}$, *com* $F_{i,n} := \prod_{i \leq k < n}(I + w_k^{-1}A), 0 \leq i \leq n$.

Demonstração. Sejam I_n a cor da bola no n-ésimo sorteio,

$$\Delta X_n := X_{n+1} - X_n \tag{1.21}$$

e

$$w_n := a \cdot X_n \tag{1.22}$$

o peso (atividade) total da urna.

Consideremos a $\mathcal{F}_n$ σ-álgebra gerada por $X_1, \ldots, X_n$.

Por definição, temos que:

$$\mathbb{P}(I_{n+1} = j|\mathcal{F}_n) = \frac{a_j X_{nj}}{w_n} \tag{1.23}$$

Usando definição de valor esperado condicional, a igualdade anterior e (1.23) segue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\Delta X_n|\mathcal{F}_n) &= \sum_{j=1}^{q} \mathbb{P}(I_{n+1} = j|\mathcal{F}_n)\mathbb{E}(\xi_j) \\
&= \frac{1}{w_n}\sum_{j=1}^{q} a_j X_{nj}\mathbb{E}(\xi_j) \\
&= \frac{1}{w_n}\left(\sum_{j=1}^{q}(A)_{ij}X_{nj}\right)_i \\
&= \frac{1}{w_n}A \cdot X_n
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Defina

$$Y_n := \Delta X_{n-1} - \mathbb{E}(\Delta X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) \tag{1.25}$$

Temos que Y_n é uma $\mathcal{F}_n$-mensurável e

$$\mathbb{E}(Y_n|\mathcal{F}_{n-1}) = 0 \tag{1.26}$$

De fato, usando a definição da variável aleatória Y_n e as propriedades de valor esperado

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_n|\mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}(\Delta X_{n-1} - \mathbb{E}(\Delta X n - 1|\mathcal{F}_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}) \\
&= \mathbb{E}(\Delta X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(\Delta X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}) \\
&= \mathbb{E}(\Delta X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) - \mathbb{E}(\Delta X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por (1.25), (1.21) e (1.24) segue que

$$X_{n+1} = X_n + Y_{n+1} + w_n^{-1}AX_n = (I + w_n^{-1}A)X_n + Y_{n+1} \tag{1.27}$$

onde I é a matriz identidade.
Por recorrência, para $n \geq 0$

$$X_n = \prod_{k=0}^{n-1}(I + w_k^{-1}A)X_0 + \sum_{l=1}^{n}\prod_{k=l}^{n-1}(I + w_k^{-1}A)X_l \tag{1.28}$$

De fato, usando (1.27) temos que

$$
\begin{aligned}
X_1 = (I + w_0^{-1}A)X_0 + Y_1 & \\
X_2 = (I + w_1^{-1}A)X_1 + Y_2 &= (I + w_1^{-1}A)[(I + w_0^{-1}A)X_0 + Y_1] + Y_2 \\
&= \prod_{k=0}^{1}(I + w_k^{-1}A)X_0 + (I + w_1^{-1}A)Y_1 + Y_2 \\
X_3 = (I + w_2^{-1}A)X_2 + Y_3 &= \prod_{k=0}^{2}(I + w_k^{-1}A)X_0 + \prod_{i=1}^{2}(I + w_i^{-1}A)Y_1 + (I + w_2^{-1}A)Y_2 + Y_3 \\
&= \prod_{k=0}^{2}(I + w_k^{-1}A)X_0 + \sum_{l=1}^{3}\prod_{k=l}^{2}(I + w_k^{-1}A)X_l \\
&\vdots \\
X_n &= \prod_{k=0}^{2}(I + w_k^{-1}A)X_0 + \sum_{l=1}^{n}\prod_{k=l}^{n-1}(I + w_k^{-1}A)X_l
\end{aligned}
$$

Com $\prod_{k=n}^{n-1}(I + w_k^{-1}A)X_l = Y_n$

Lembremos que a urna é balanceada se $a \cdot \Delta X_n = b$, de (1.21) e (1.22), w_n é determinístico dado por

$$w_n = w_0 + nb \tag{1.29}$$

Defina a matriz

$$F_{i,j} := \prod_{i \leq k < j}(I + w_k^{-1}A), 0 \leq i \leq j$$

Usando a definição acima em (1.28) temos que

$$X_n = F_{0,n}X_0 + \sum_{l=1}^{n} F_{l,n}Y_l \tag{1.30}$$

De (1.26), $\mathbb{E}(Y_l) = 0$ e de $F_{i,j}$ e X_0 não serem variáveis aleatórias temos que

$$\mathbb{E}(X_n) = F_{0,n}X_0 \tag{1.31}$$

Usando (1.30) e a igualdade anterior podemos escrever

$$X_n - \mathbb{E}(X_n) = \sum_{l=1}^{n} F_{l,n}Y_l$$

Daí, podemos calcular a matriz de covariância

$$
\begin{aligned}
Var(X_n) &= \mathbb{E}((X_n - \mathbb{E}(X_n))((X_n - \mathbb{E}(X_n))^{'}) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(F_{i,n}Y_i)(F_{j,n}Y_j)^{'}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}((F_{i,n}Y_i)(F_{j,n}Y_j)^{'}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}F_{i,n}\mathbb{E}(Y_iY_j^{'})F_{j,n}^{'} \ .
\end{aligned} \tag{1.32}
$$

Além disso, observamos que se $i > j$, da equação (1.26), $\mathbb{E}(Y_i|\mathcal{F}_j) = 0$, dado que Y_j é $\mathcal{F}_j$-mensurável temos que

$$\mathbb{E}(Y_i Y_j^{'}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y_i|\mathcal{F}_j)Y_j^{'}) = 0$$

e para $i < j$ basta considerar a transposta, logo os termos que não estão na diagonal principal desaparecem em (1.32), portanto segue que:

$$Var(X_n) = \sum_{i=1}^{n} F_{i,n}\mathbb{E}(Y_i Y_i^{'})F_{i,n}^{'} \ . \tag{1.33}$$

□

Na sequência, por meio de observações e lemas, vamos deduzir estimativas para $F_{i,n}$, estas serão usadas para obter média e variância assintótica.

Observação 1.3. *Por simplicação, seja $b = 1$, sem perda de generalidade, pois podemos dividir todas as atividades por b, seja $\hat{a} = a/b$, isso define a mesma evolução da urna e temos que $\hat{a} \cdot \xi_i = b/b = 1$ para cada i, assim a urna continua equilibrada com b=1.*

E ainda, a matriz intensidade A de (1.3) é dividada por b, então os autovalores λ_i são divididos por b, com as projeções P_λ sendo as mesmas e as partes de nilpotentes divididas por b, em ambos os casos os índices são deslocados e com a normalização dada em (1.18), $u_1 = a$ é dividido por b, enquanto que v_1 é multiplicado por b. Logo, $\lambda_1 v_1$, B e $\lambda_1 \sum_I$ são invariantes, portanto os teoremas seguirão do caso $b = 1$.

Observação 1.4. *Temos de (1.17) que $\lambda_1 = 1$.*

Observação 1.5. *Observemos que $F_{i,j} = f_{i,j}(A)$, onde $0 \leq i \leq j$ e $f_{i,j}(A)$ é o polinômio*

$$\begin{aligned} f_{i,j}(z) &= \prod_{i \leq k \leq j} (I + w_k^{-1} z) \\ &= \prod_{i \leq k \leq j} \frac{w_k + z}{wk} \\ &= \prod_{i \leq k \leq j} \frac{k + w_0 + z}{k + w_0} \\ &= \frac{\Gamma(j + w_0 + z)/\Gamma(i + w_0 + z)}{\Gamma(j + w_0)/\Gamma(i + w_0)} \\ &= \frac{\Gamma(j + w_0 + z)}{\Gamma(j + w_0)} \cdot \frac{\Gamma(i + w_0)}{\Gamma(i + w_0 + z)} \end{aligned}$$

Do cálculo funcional, na teoria espectral, podemos definir $f(A)$ não apenas para polinômios $f(z)$, mas para qualquer função que é analítica em uma vizinhança do espectro $\sigma(A)$.

Além disso, se K é um conjunto compacto que contém $\sigma(A)$ em seu interior, então existe uma constante C (esta depende de A e K) de modo que para cada f analítica em uma vizinhança de K,

$$||f(A)|| \leq C \sup_{z \in K} |f(z)|$$

Lema 1.3. *Para qualquer função inteira $f(\lambda)$, e qualquer $\lambda \in \sigma(A)$*

$$f(A)P_\lambda = \sum_{m=0}^{v_\lambda} \frac{1}{m!} f^m(\lambda) N_\lambda^m P_\lambda$$

Demonstração. Temos como expansão da série de Taylor que $f(\lambda+z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} f^m(\lambda) z^m$ pode ser vista como uma identidade algébrica para polinômios em z. Assim segue que,

$$f(A)P_\lambda = f(\lambda I + N_\lambda P_\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} f^m(\lambda) N_\lambda^m P_\lambda$$

onde $N_\lambda^m = 0$ quando $m > v_\lambda$.

□

Lema 1.4. *i) Para todo i fixo, quando $j \longrightarrow \infty$,*

$$f_{i,j}(z) = j^z \frac{\Gamma(i+w_0)}{\Gamma(i+w_0+z)}(1+o(1)) \tag{1.34}$$

uniformemente para z em qualquer conjunto compacto fixo no plano complexo.

ii) Quando $i, j \longrightarrow \infty$ com $i \leq j$,

$$f_{i,j}(z) = j^z i^{-z}(1+o(1)) \tag{1.35}$$

unifomente para z em qualquer conjunto compacto fixo no plano complexo.

Demonstração. Tanto o item i) quanto ii) seguem da igualdade

$$f_{i,j}(z) = \frac{\Gamma(j+w_0+z)}{\Gamma(j+w_0)} \cdot \frac{\Gamma(i+w_0)}{\Gamma(i+w_0+z)}$$

e da consequência da fórmula de Stiling

$$\frac{\Gamma(x+z)}{\Gamma(x)} = x^z(1+o(1))$$

uniformemente para z em um compacto e com $x \longrightarrow \infty$.

Temos que $\Gamma(i+w_0)/\Gamma(i+w_0+z)$ é uma função inteira para qualquer $i \geq 0$. De fato, dado que $w_0 \geq 0$, a função $\Gamma(j+w_0+z)/\Gamma(j+w_0)$ tem pólos, mas para z no compacto fixado, esta função é analítica quando j é suficientemente grande.

□

Lema 1.5. *Seja $m \geq 0$*

i) Para cada $i \geq 0$ fixo, quando $j \longrightarrow \infty$,

$$f_{i,j}^{(m)}(z) = j^z (\log j)^m \frac{\Gamma(i+w_0)}{\Gamma(i+w_0+z)} + o(j^z \log^m j) \tag{1.36}$$

uniformemente para z em um conjunto compacto fixado no plano complexo.

ii) Quando $i, j \longrightarrow \infty$ com $i \leq j$,

$$f_{i,j}^{(m)}(z) = \left(\frac{j}{i}\right)^z \left(\log \frac{j}{i}\right)^m + o\left(\left(\frac{j}{i}\right)^z \left(1 + \log \frac{j}{i}\right)^m\right) \tag{1.37}$$

uniformemente para z em um conjunto compacto fixado no plano complexo.

Demonstração. i) Seja $g_j(z) = j^{-z} f_{i,j}(z)$, então por (1.34),

$$g_j(z) = \frac{\Gamma(i+w_0)}{\Gamma(i+w_0+z)}(1+o(1)) = O(1) \text{ quando } j \longrightarrow \infty \tag{1.38}$$

uniforme em cada conjunto compacto, portanto pelas estimativas de Cauchy, para qualquer $l \geq 1$,

$$g_j^l(z) = O(1) \text{ quando } j \longrightarrow \infty \tag{1.39}$$

uniforme em cada conjunto compacto.

Segue da Fórmula de Leibniz para a m-ésima derivada do produto,

$$\begin{aligned} f_{i,j}^{(m)}(z) &= \frac{d^m}{dz^m}(j^z g_j(z)) \\ &= \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \frac{d^l}{dz^l} j^z \cdot g_j^{(m-l)}(z) \\ &= \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} (\log j)^l j^z g_j^{(m-l)}(z) \end{aligned} \tag{1.40}$$

Agora aplicamos (1.38) e (1.39).

ii) De forma similar, para $1 \leq i \leq j$, seja $h_{i,j}(z) = (i/j)^z f_{i,j}(z)$, logo de (1.35),

$$h_{i,j}(z) = 1 + o(1) \text{ quando } i,j \longrightarrow \infty \ ,$$

uniforme em cada conjunto compacto, e pelas estimativas de Cauchy, para qualquer $l \geq 1$,

$$h_{i,j}^{(l)}(z) = \frac{d^l}{dz^l}(h_{i,j}(z) - 1) = o(1) \text{ quando } i,j \longrightarrow \infty \ ,$$

uniforme em cada conjunto compacto. Segue da Regra de Leibniz,

$$\begin{aligned} f_{i,j}^{(m)}(z) &= \frac{d^m}{dz^m}((j/i)^z h_{i,j}(z)) \\ &= \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \frac{d^l}{dz^l}(j/i)^z \cdot h_{i,j}^{(m-l)}(z) \\ &= \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} (\log (j/i))^l (j/i)^z h_{i,j}^{(m-l)}(z) \ , \end{aligned}$$

Portanto, usamos (1.38) e (1.39) para concluir a demonstração. □

Observação 1.6. *Aplicando as estimativas obtidas a $F_{i,j}$, observamos que pelo Lema 4.3,*

$$F_{i,j} P_\lambda = f_{i,j}(A) P_\lambda = \sum_{m=0}^{v_\lambda} \frac{1}{m!} f_{i,j}^{(m)}(\lambda) N_\lambda^m P_\lambda \ , \tag{1.41}$$

onde $v_\lambda \geq 0$ é o inteiro tal que $N_\lambda^{v_\lambda} \neq 0$, mas $N_\lambda^{v_\lambda+1} = 0$.

Lema 1.6. *Se $b = 1$, então, para $n \geq 2$ e $\lambda \in \sigma(A)$,*

$$F_{0,n} P_\lambda = n^\lambda \log^{v_\lambda} n \frac{\Gamma(w_0)}{v_\lambda! \Gamma(w_0 + \lambda)} N_\lambda^{v_\lambda} P_\lambda + o(n^{Re\lambda} \log^{v_\lambda} n) \ .$$

Demonstração. Das igualdades (1.41) e (1.36),

$$F_{0,n} P_\lambda = \sum_{m=0}^{v_\lambda} \frac{1}{m!} f_{0,n}^{(m)}(\lambda) N_\lambda^m P_\lambda = \frac{1}{v_\lambda!} f_{0,n}^{(v_\lambda)}(\lambda) N_\lambda^{v_\lambda} P_\lambda + \sum_{m=0}^{v_\lambda - 1} O(n^\lambda \log^m n) \ .$$

Com isso, aplicamos (1.36) novamente.

□

Lema 1.7. *Se $b = 1$, então, para $1 \leq i \leq j$ e $\lambda \in \sigma(A)$,*

$$F_{i,j}P_\lambda = O\left((j/i)^{Re\lambda}(1 + \log(j/i))^{v_\lambda}\right) \ . \tag{1.42}$$

E Para algum $v \geq v_\lambda$, quando $i, j \longrightarrow \infty$ com $i \leq j$ e $\lambda \in \sigma(A)$,

$$\begin{aligned} F_{i,j}P_\lambda = \frac{1}{v!}\left(\frac{j}{i}\right)^\lambda \log^v\left(\frac{j}{i}\right) N_\lambda^v P_\lambda + o\left(\left(\frac{j}{i}\right)^{Re_\lambda} \log^v\left(\frac{j}{i}\right)\right) \\ + O\left(\left(\frac{j}{i}\right)^{Re\lambda}\left(1 + \log^{v-1}\left(\frac{j}{i}\right)\right)\right) \ . \end{aligned} \tag{1.43}$$

Demonstração. Basta usar (1.41) e (1.37) para mostrar (1.42) , e para provar (1.43) notemos que o somatório de (1.41) pode ser extendido para $m \leq v$ como N_λ^m, então $m > v$. Assim usamos (1.37) para cada termo $m = v$. □

Lema 1.8. *Se $Re\lambda_2 < \lambda_1 = b = 1$, então para $0 \leq i \leq j$,*

$$F_{i,j}P_{\lambda_1} = f_{i,j}(\lambda_1)P_{\lambda_1} = \frac{j + w_0}{i + w_0}P_{\lambda_1} \ .$$

Demonstração. Como λ_1 é autovalor simples, então $v_{\lambda_1} = 0$. Portanto, de (1.41) segue que $F_{i,j}P_{\lambda_1} = f_{i,j}(\lambda_1)P_{\lambda_1}$. E de (1.40) temos que

$$f_{i,j}(\lambda_1) = f_{i,j}(1) = \frac{j + w_0}{i + w_0}. \tag{1.44}$$

Logo

$$F_{i,j}P_{\lambda_1} = f_{i,j}(\lambda_1)P_{\lambda_1} = \frac{j + w_0}{i + w_0}P_{\lambda_1} \ .$$

□

O teorema a seguir possibilita o cálculo do valor esperado assintótico.

Teorema 1.3. *Se a Urna de Pólya é sustentável e balanceada e $Re\lambda_2 < \lambda_1$, então para $n \geq 2$,*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n) &= (n\lambda_1 + a \cdot X_0)v_1 + O(n^{Re\lambda_2/\lambda_1} \log^{v_2} n) \\ &= n\lambda_1 v_1 + O(n^{Re\lambda_2/\lambda_1} \log^{v_2} n + 1) \\ &= n\lambda_1 v_1 + o(n) \ . \end{aligned}$$

Em particular, se $Re\lambda_2 < 1/2\lambda_1$,

$$\mathbb{E}(X_n) = n\lambda_1 v_1 + o(n^{1/2}) \ .$$

Demonstração. Das igualdades (1.31) e (1.6),

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} F_{0,n}P_\lambda X_0 \ . \tag{1.45}$$

E para cada autovalor $\lambda \neq \lambda_1$, do lema (1.7) segue que,

$$F_{0,n}P_\lambda X_0 = O(n^{Re\lambda} \log^{v_\lambda} n) = O(n^{Re\lambda_2} \log^{v_2} n) \ . \tag{1.46}$$

E por (1.20),

$$P_{\lambda_1}X_0 = (a \cdot X_0)v_1 = w_0 v_1 \ .$$

Além disso, de (1.44),

$$F_{0,n}P_{\lambda_1}X_0 = \frac{n+w_0}{w_0}P_{\lambda_1}X_0 = \frac{n+w_0}{w_0}w_0v_1 = (n+w_0)v_1 \ . \tag{1.47}$$

Portanto, para $\lambda_1 = 1$ e dos itens (1.45), (1.46) e (1.47) segue o resultado.

□

Lema 1.9. *Para cada n, $P_{\lambda_1}Y_n = 0$.*

Demonstração. Do fato da urna ser balanceada temos que $a \cdot \Delta X_n = b$ não é aleatório e, portanto, por (1.25),

$$a \cdot Y_n := a \cdot \Delta X_{n-1} - \mathbb{E}(a \cdot \Delta X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) = b - b = 0 \ .$$

Com isso, o resultado segue de (1.20). □

Lema 1.10. *Temos que $Var(X_n) = \sum_{\lambda \neq \lambda_1} \sum_{\mu \neq \lambda_1} \sum_{i=1}^{n} = T_{i,n,\lambda,\mu}$, onde*

$$T_{i,n,\lambda,\mu} = F_{i,n}P_\lambda \mathbb{E}(Y_iY_i^{'})P_\lambda^{'}F_{i,n}^{'} \ .$$

Demonstração. De (1.6) podemos reescrever definição de $Var(X_n)$ dada em (1.33),

$$Var(X_n) = \sum_{\lambda \neq \lambda_1} \sum_{\mu \neq \lambda_1} \sum_{i=1}^{n} F_{i,n}P_\lambda \mathbb{E}(Y_iY_i^{'})P_\lambda^{'}F_{i,n}^{'} \ . \tag{1.48}$$

Seja $T_{i,n,\lambda,\mu} = F_{i,n}P_\lambda \mathbb{E}(Y_iY_i^{'})P_\lambda^{'}F_{i,n}^{'}$, do lema (7.1) temos que $P_\lambda \mathbb{E}(Y_iY_i^{'}) = \mathbb{E}(P_{\lambda_1}Y_iY_i^{'}) = 0$, analogamente, usando a transposta $\mathbb{E}(Y_iY_i^{'})P_{\lambda_1}^{'} = 0$. Logo, $T_{i,n,\lambda,\mu} = 0$, quando $\lambda = \lambda_1$ ou $\mu = \lambda_1$.

Portanto, $Var(X_n) = \sum_{\lambda \neq \lambda_1} \sum_{\mu \neq \lambda_1} \sum_{i=1}^{n} = T_{i,n,\lambda,\mu}$.

□

Na proposição a seguir exibimos uma expressão para variância assintótica.

Proposição 1.2. *Se $\lambda_1 = 1$, então para $n \geq 2$,*

$$Var(X_n) = \begin{cases} O(n), \textit{para } Re\lambda_2 < \dfrac{1}{2} \ , \\ O(n \log^{2v_2+1} n), \textit{para } Re\lambda_2 = \dfrac{1}{2} \ , \\ O(n^{2Re\lambda_2} \log^{2v_2} n), \textit{para } Re\lambda_2 > \dfrac{1}{2} \ , \end{cases} \tag{1.49}$$

Em particular, se $\lambda_2 < \lambda_1 = 1$, então

$$Var(X_n) = o(n^2) \ . \tag{1.50}$$

Demonstração. Segue de (A2) uma das suposições básicas que $\mathbb{E}(Y_n Y_n^{'}) = O(1)$. Usando o lema (1.7), se λ e μ são dois autovalores, então, para $1 \leq i \leq n$,

$$T_{i,n,\lambda,\mu} = F_{i,n} P_\lambda \mathbb{E}(Y_i Y_i^{'})(F_{i,n} P_\lambda)^{'} = O((n/i)^{Re\lambda + Re\mu}(1 + \log(n/i))^{v_\lambda + v_\mu}) \ . \tag{1.51}$$

Se $Re\lambda + Re\mu \geq 1$, notemos que isso implica que

$$T_{i,n,\lambda,\mu} = O((n/i)^{Re\lambda + Re\mu}(\log^{v_\lambda + v_\mu} n) \ . \tag{1.52}$$

Enquanto que se $Re\lambda + Re\mu < 1$, seja α com $Re\lambda + Re\mu < \alpha < 1$, de (1.51) temos que

$$T_{i,n,\lambda,\mu} = O((n/i)^\alpha) \ . \tag{1.53}$$

Por soma sobre i obtemos de (1.52) e (1.53)

$$\sum_{i=1}^{n} T_{i,n,\lambda,\mu} = \begin{cases} O(n), \text{se } Re\lambda + Re\mu < 1 \ , \\ O(n \log^{v_\lambda + v_\mu + 1} n), \text{se } Re\lambda + Re\mu = 1 \ , \\ O(n^{Re\lambda + Re\mu} \log^{v_\lambda + v_\mu} n), \text{se } Re\lambda + Re\mu > 1 \ . \end{cases} \tag{1.54}$$

O resultado (1.49) segue de (1.48) somando (1.54) sobre o número finito $\lambda, \mu \in \sigma(A)$ λ_1 e observando que nossas estimativas são maiores para $\lambda = \mu = \lambda_2$. A estimativa mais simples (1.50) é uma consequência imediata. □

Na sequência, destacamos dois resultados de convergências e aplicamos em um exemplo.

Capítulo 2

Convergências e matriz de intensidade

2.1 Resultados de convergência

Nesta seção temos resultados de convergência, estes podem ser consultados na referência [11] e são importantes para a aplicação do último capítulo.

Teorema 2.1. *Assumimos que as condições básicas (A1)-(A6) são válidas e que é satisfeita a condição essencial de não extinção . Então para $n \to \infty$,*

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{q.c.} \lambda_1 v_1 \ .$$

onde λ_1 e v_1 são o autovalor dado nas condições básicas e o autovetor associado ao λ_1, respectivamente.

Demonstração. Suponhamos que adicionamos uma bola do tipo $q+1$ sempre que uma bola se divide, estas bolas tem $a_{q+1} = 0$ e $\xi_{q+1} = 0$ e portanto nunca se divide. Isso não afeta o processo das bolas dos tipos $1, \cdots, q$, mas adiciona um número de divisões.

Temos que as suposições básicas (A1)–(A6) valem para o processo modificado também. Escrevemos $\sim$ sobre os símbolos para denotar o processo modificado e várias quantidades definida.

Escrevendo vetores e matrizes em forma de bloco, correspondendo a um produto $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$, vemos que, para $i = 1, \cdots, q$,

$$\tilde{\xi}_i = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \tilde{a} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \ , \tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ a' & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Consequentemente, os autovalores $\tilde{\Lambda} = \Lambda \cup \{0\}$, em particular, $\tilde{\lambda_1} = \lambda_1$. Temos que $\tilde{A}$ tem os autovetores colunas correspondentes a

$$\tilde{u_1} = (u_1, 0) \text{ e } \tilde{v_1} = (v_1, \lambda_1^{-1}) \tag{2.1}$$

.

Finalmente, escolhemos o vetor coluna $b = (0, 1)$, o que significa que $\tau_b(n)$ é primeiro tempo que temos n bolas do tipo q+1, ou seja, o n-nésimo tempo τ_n, e assim $\tilde{X}_n = \mathcal{X}(\tau_b(n))$. Por (2.1), temos $b \cdot \tilde{v}_1 = \lambda_1^{-1}$.

Podemos agora aplicar o teorema 3.15 da referência[11] a $\tilde{X}_n = \tilde{\mathcal{X}}(\tau_b(n))$, e o resultado segue da (3.10) da referência [11].

□

Teorema 2.2. *Assumimos que as condições básicas (A1)-(A6), $Re\lambda_2 < \frac{1}{2}\lambda_1$ e que é satisfeita a condição essencial de não extinção.Temos para $n \to \infty$,*

$$\frac{(X_n - n\lambda_1 v_1)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, \Sigma) \ ,$$

onde a matriz de covariância é dada por

$$\Sigma = \int_0^\infty \psi(s,A)B\psi(s,A)^{'}e^{-\lambda_1 s}\lambda_1 ds - \lambda_1^2 v_1 v_1^{'} \ ,$$

com $\phi(s,A)$ *e* $\psi(s,A)$ *dadas em* (1.12) *e* (1.13)*.*

Demonstração. Continuamos o argumento da prova do teorema anterior 3.21. Temos de (1.9) e (1.10), para $i = 1, ..., q$,

$$\tilde{B}_i = \mathbb{E}\left(\begin{pmatrix}\xi_i \\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1^{'} & 1\end{pmatrix}\right) = \mathbb{E}\begin{pmatrix}\xi_i\xi_i^{'} & \xi_i \\ \xi_i^{'} & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}B_i & \mathbb{E}(\xi_i) \\ \mathbb{E}(\xi_i^{'}) & 1\end{pmatrix} \ ,$$

e assim, usando (1.10), (1.14) e $a \cdot v = 1$,

$$\tilde{B} = \sum_{i=1}^{q+1}\tilde{v}_{1i}\tilde{a}_i\tilde{B}_i = \sum_{i=1}^{q} v_{1i}a_i\tilde{B}_i = \begin{pmatrix}B & \lambda_1 v_1 \\ \lambda_1 v'_1 & 1\end{pmatrix} \ . \tag{2.2}$$

Além disso, $Re\tilde{\lambda}_2 = \max(Re\lambda_2, 0) < \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_1$, então podemos aplicar o corolário 3.16 da referência [11] a $\tilde{X}_n = \mathcal{X}(\tau_b(n))$, obtendo uma Gaussiana $\tilde{V}_b$. Ignorando as bolas do tipo q+1, obtemos $n^{-1/2}(X_n - \lambda_1 n v_1) \xrightarrow{d} V$, com $V = (I,0)\tilde{V}_b$.

A matriz de covariância de $\tilde{V}_b$ é dada pela equação (3.3) da referência [11] , com a adição de todas as cores. Nós temos, por indução,

$$\tilde{A}^n = \begin{pmatrix}A^n & 0 \\ a^{'}A^{n-1} & 0\end{pmatrix} \ , n \geq 1$$

e assim

$$e^{s\tilde{A}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!}\tilde{A}^n = \begin{pmatrix}e^{sA} & 0 \\ a^{'}\phi(s,A) & 1\end{pmatrix} \ .$$

Por isso

$$\begin{aligned}\left(I - \frac{\tilde{v}_1 b^{'}}{b \cdot \tilde{v}_1}\right)e^{s\tilde{A}} &= \left(\begin{pmatrix}I & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) - \lambda_1\left(\begin{pmatrix}v_1 \\ \lambda_1^{-1}\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}e^{s\tilde{A}} \\ &= \begin{pmatrix}I & -\lambda_1 v_1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{sA} & 0 \\ a^{'}\phi(s,A) & 1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\Psi(s,A) & -\lambda_1 v_1 \\ 0 & 0\end{pmatrix} \ .\end{aligned}$$

logo, de (2.2) e de (3.13) junto com o Lema 11.4(i) de [11],

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(VV^{'}) &= \lambda_1\int_0^\infty(\Psi(s,A) - \lambda_1 v_1)\tilde{B}(\Psi(s,A) - \lambda_1 v_1)^{'}e^{-\lambda_1 s}\,ds \\ &= \lambda_1\int_0^\infty(\Psi(s,A)B\Psi(s,A)^{'} - \lambda_1^2 v_1 v_1^{'}\Psi(s,A)^{'}\,ds \\ &- \int_0^\infty \lambda_1^2\Psi(s,A)v_1v_1^{'} + \lambda_1^2 v_1 v_1^{'})e^{\lambda_1 s}\,ds \\ &= \lambda_1\int_0^\infty(\Psi(s,A)B\Psi(s,A)^{'} - \lambda_1^2 v_1 v_1^{'})e^{-\lambda_1 s}\,ds \ .\end{aligned}$$

O que prova o resultado. □

Exemplo 2.1. *Seja a urna de Friedman dada pela matriz de reposição* $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Assim, $q = 2$, $a_1 = a_2 = 1$ *e os vetores colunas da matriz intensidade* A *são* $\xi_1 = (\alpha, \beta)$ *e* $\xi_2 = (\beta, \alpha)$ *para inteiros* α *e* β. *Logo, cada vez que uma bola é retirada , ela é reposta juntamente com* α *bolas do mesmo tipo e* β *de tipo contrário.*

Assumimos que $\alpha \geq -1$, $\beta \geq 0$ *e* $\alpha + \beta > 0$ *para que a urna seja sustentável.*

Se $\beta = 0$, *temos a urna de Pólya-Eggenberger , na qual falham as condições básicas (A4), (A5) e (A6), então os resultados deste capítulo não se aplicam.*

Sabemos do teorema 1.2 que $\tilde{X}_n/n$ *converge em distribuição para uma distribuição Beta em vez de uma constante, onde* $\tilde{X}_n$ *é a proporção de cada uma das bolas retiradas .*

Dado que $X_n = s\tilde{X}_n + X_0$, *com* X_0 *a composição inicial da urna segue que* X_n/n *converge em distribuição para uma distribuição Beta.*

Se $\beta > 0$, *nossas condições básicas valem, logo pelo teorema (2.1)* $\dfrac{X_n}{n} \xrightarrow{q.c.} \lambda_1 v_1$.

Temos que os autovalores de A *são* $\lambda_1 = \alpha + \beta$ *e* $\lambda_2 = \alpha - \beta$, *sejam os autovetores a direta e esqueda, respectivamente,* $v_1 = \dfrac{1}{2}(1,1)'$, $v_2 = \dfrac{1}{2}(1,-1)'$,$u_1 = (1,1)'$ *e* $u_2 = (1,-1)'$.

Por definição, $B = \dfrac{1}{2}B_1 + \dfrac{1}{2}B_2 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2 & 2\alpha\beta \\ 2\alpha\beta & \alpha^2+\beta^2 \end{pmatrix}$, *com* $B_i = \mathbb{E}(\xi_i \xi_i')$.

Notemos que $\lambda_2 < \lambda_1/2$ *é equivalente a* $\alpha < 3\beta$ *e que* $\Lambda_I = \{\lambda_2\}$, $\Lambda_{II} = \emptyset$ $\Lambda_{III} = \{\lambda_1\}$, *então* $\Sigma_{II} = 0$, *além disso,* $P_I = P_{\lambda_2} = v_2 u_2' = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $P_I e^{sA} = e^{\lambda_2 s} P_I$.

Portanto, da definição, segue que

$$\Sigma_I = P_I B P_I' \int_0^\infty e^{2\lambda_2 - \lambda_1} ds = \frac{(\alpha-\beta)^2}{4(3\beta-\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Portanto, pelo teorema (2.2)

$$n^{-1/2}\left(X_n - n\frac{\alpha+\beta}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2}{4(3\beta-\alpha)}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right) .$$

Embora tenha sido considerado o espaço complexo para o cálculo dos autovalores nos capítulos anteriores, estes números a seguir serão reais.

Devido a sua importância, na sequência exibimos a matriz de intensidade para o modelo de difusão de opiniões opostas.

2.2 Modelo de difusão de opiniões opostas

Como motivação para o próximo capítulo, iremos apresentar nesta seção a construção das matrizes intensidades para dois modelos: difusão de opiniões opostas [8].

Consideremos uma população na qual duas opiniões opostas A e B se espalham. Suponha que este processo de difusão começa com $N_0 + M_0$ semeadores, onde N_0 é o número inicial de indivíduos que têm opinião A e M_0 o número daqueles que têm opinião B.

Cada indivíduo na população tem uma das três características intrínsecas a seguir: seguidor de tendência, contra a tendência ou indiferente a tendência. Essa característica intrínseca é imputada independentemente a cada indivíduo e segue uma variável aleatória ternária, definida a seguir.

Definição 2.1. *Para* $\alpha, \beta \in (0,1)$ *tal que* $0 \leq \alpha + \beta \leq 1$ *o processo de tendência* $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *é uma i.i.d sequência de variáveis aleatórias ternárias (que também é independente das proporções atuais das decisões A e B sobre a população) tal que, para cada* $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(Y_n = y) = \begin{cases} \alpha, \textit{ se } y = +1, \textit{ seguidor de tendências} \\ \beta, \textit{ se } y = -1, \textit{ contra a tendência} \\ 1-\alpha-\beta, \textit{ se } y = 0, \textit{ indiferente} \end{cases},$$

Definição 2.2. *O modelo de difusão de tendência aleatória é um processo estocástico* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *com valores em* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *dado pelas seguintes probabilidades,*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1|(\mathcal{F}_n, Y_n)) = a + bY_n \frac{N_n}{N_n + M_n} \ , \tag{2.3}$$

onde N_n *(respectivamente* M_n*) é o número de decisões A (respectivamente o número de decisões B) tomadas até a etapa n,* $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n(N_n, M_n)$ *é a filtração relacionada às variáveis aleatórias* N_n *e* M_n.

Da definição (2.1), temos que Y_n *é independente de* $\mathcal{F}_n$, *para todo* $n \geq 1$. *Os parâmetros a e b satisfazem* $0 \leq a + b \leq 1$, *e também a seguinte condição: se* $\beta \neq 0$, *então* $b \leq a$.

Exemplo 2.2. *A qualquer momento n, um cliente pode comprar um produto* ($X_n = 1$) *por necessidade ou por pressão social (histórico de venda). No presente modelo de difusão, consideramos as probabilidades condicionais (2.3).*

Seja parâmetro a é a quantidade referente à necessidade e parâmetro b a quantidade referente à pressão social do produto, associado ao $(n+1)$*-ésimo cliente.*

Então, se $Y_n = 1$, *o indivíduo é um seguidor de tendências, e a pressão social aumentará a probabilidade de o cliente comprar o produto. Se* $Y_n = -1$, *o consumidor está contra a tendência, então a pressão social diminuirá a probabilidade de ele comprar o produto. Por fim, se* $Y_n = 0$, *o cliente se comporta sem levar em conta a pressão social.*

Para construção da matriz de intensidade, fornecemos uma relação explícita entre a distribuição de $(N_n, M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e urnas com duas cores, por exemplo, branca e azul.

Consideremos os seguintes vetores colunas de substituição $\xi_1 = (\xi_{11}, \xi_{12})'$ (branca) e $\xi_2 = (\xi_{21}, \xi_{22})'$ (azul), com $\xi_i \in \{(0,1)', (1,0)'\}$. Logo, uma única bola é recolocada a cada vez e a matriz de substituição aleatória dada por $M = (\xi_1, \xi_2)$.

A dinâmica da urna é a seguinte: Se escolhermos vetor de substituição ξ_1 significa que vamos repor ξ_{11} bolas brancas e ξ_{12} bolas azuis. E caso seja escolhido ξ_2, repomos a urna com ξ_{21} bolas brancas e ξ_{22} bolas azuis.

Seja a matriz de intensidade dada por:

$$A = \mathbb{E}(M) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(\xi_{11}) & \mathbb{E}(\xi_{21}) \\ \mathbb{E}(\xi_{12}) & \mathbb{E}(\xi_{22}) \end{pmatrix} .$$

Notemos que $\mathbb{P}(\xi_{ij} = 1) = \mathbb{E}(\xi_{ij})$, para todo i, j. Se no tempo n obtivermos r bolas brancas, representemos por $R_n = r$, então as probabilidades de repor uma bola branca (sucesso) ou uma bola azul (fracasso) no tempo $n+1$, condicionada a uma proporção r/T_n de bolas brancas, com T_n o número total de bolas no tempo n, são, respectivamente,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_{n+1} = r+1 | R_n = r) &= \mathbb{P}(\xi_{11} = 1)\frac{r}{T_n} + \mathbb{P}(\xi_{21} = 1)\left(1 - \frac{r}{T_n}\right) \\ &= \mathbb{E}(\xi_{21}) + (\mathbb{E}(\xi_{11}) - \mathbb{E}(\xi_{21}))\frac{r}{T_n} \ , \end{aligned} \tag{2.4}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_{n+1}=r|R_n=r) &= 1-\mathbb{P}(R_{n+1}=r+1|R_n=r)\\ &= \mathbb{E}(\xi_{22})+(\mathbb{E}(\xi_{11})-\mathbb{E}(\xi_{22}))\frac{r}{T_n}\ .\end{aligned} \tag{2.5}$$

No caso do modelo de difusão de tendência aleatória na definição 2, observemos que, como Y_n e (N_n, M_n) são independentes temos que a "probabilidade média"de um sucesso é dada por

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1}=1|\mathcal{F}_n) &= \sum_{y\in\{-1,0,+1\}}\mathbb{P}(X_{n+1}=1|\mathcal{F}_n, Y_n=y)\mathbb{P}(Y_n=y)\\ &= a+b(\alpha-\beta)\frac{N_n}{N_n+M_n}\ .\end{aligned} \tag{2.6}$$

e a "probabilidade média"de um fracasso é dada por

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1}=0|\mathcal{F}_n) &= 1-\mathbb{P}(X_{n+1}=1|\mathcal{F}_n)\\ &= 1-a-b(\alpha-\beta)\frac{N_n}{N_n+M_n}\end{aligned} \tag{2.7}$$

Por meio das equações (2.4), (2.5),(2.6) e (2.7), obtemos as entradas da matriz A resolvendo o sistema:

$$\begin{cases}\mathbb{E}(\xi_{21})=a\\ \mathbb{E}(\xi_{22})=1-a\\ \mathbb{E}(\xi_{11})-\mathbb{E}(\xi_{21})=b(\alpha-\beta)\\ \mathbb{E}(\xi_{12})-\mathbb{E}(\xi_{22})=-b(\alpha-\beta)\end{cases}$$

Portanto, obtemos a seguinte matriz de intensidade

$$A=\begin{pmatrix} a+b(\alpha-\beta) & a\\ 1-a-b(\alpha-\beta) & 1-a\end{pmatrix}\ .$$

Capítulo 3

Passeio aleatório

Neste último capítulo analisamos o comportamento assintótico da posição do elefante e os resultados apresentados com detalhes são de acordo com a referência [9]. Iniciamos com a construção da matriz de intensidade para o passeio aleatório unidimensional.

3.1 Passeio aleatório unidimensional

Além dos conceitos de [17], nesta seção utilizamos as definições e notação de [9], com o objetivo de construir a matriz de intensidade.

O Passeio Aleatório do Elefante (PAE) é um passeio unidimensional S_n, $n \in \mathbb{N}$, na qual o início em 0, no tempo 0, este é representado por $S_0 = 0$. A variável aleatória S_n assume valor no conjunto dos números inteiros.

Iremos definir outra variável aleatória, inicialmente, X_1 assume o valor 1 com probabilidade $q \in [0,1]$ ou valor -1 com probabilidade $1-q$. Em outras palavras, o primeiro passo do PAE vai para direita com probabilidade q, ou vai para esquerda com probabilidade $1-q$.

Em um momento posterior, $n \geq 2$, seja o número $n^{'}$ aleatório uniformemente entre os números anteriores $\{1, 2, \cdots, n-1\}$, assim temos que

$$X_n = \begin{cases} +X_{n'}, \text{com probabilidade } p \\ -X_{n'}, \text{com probabilidade } 1-p \end{cases}$$

onde $p \in [0,1]$ é um parâmetro de memória do modelo.

No tempo $n \geq 1$, a posição do passeio é dada por $S_n = S_{n-1} + X_n$ onde X_n assume o valores em $\{-1, +1\}$.

Além disso, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ e nesta construção temos que as escolhas aleatórias são independentes.

Denotando $N(n, +1) = \#\{i \in 1, 2, \cdots n : X_i = +1\}$, o número de $+1$ passos dados até o n-ésimo passo, e $N(n, -1) = \#\{i \in 1, 2, \cdots n : X_i = -1\}$ o número de -1 passos realizados até o n-ésimo passo, assim a posição do elefante é dada por $S_n = N(n, +1) - N(n, -1)$.

Portanto, a probabilidade condicional de o $(n+1)$-passo ser na direção $+1$ é dado por

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | N(n, +1), N(n, -1)) = p\frac{N(n, +1)}{n} + (1-p)\frac{N(n, -1)}{n} \ ,$$

onde $n = N(n, +1) + N(n, -1)$.

Na sequência faremos a conexão das Urnas de Pólya com o modelo PAE.

Seja um urna de tempo discreto com bolas de duas cores; digamos branca e azul. A composição da urna no tempo $n \in \mathbb{N}$ é dada pelo vetor $U_n = (U_{n1}, U_{n2})$, onde U_{n1} representa o número de bolas brancas e U_{n2} de bolas azuis, ambos no tempo n.

Iniciemos a composição da urna com o vetor coluna $U_1 = \xi_1 = (\xi_{11}, \xi_{12})$ (podendo ser aleatório) tomando os valores $\{(1,0)(0,1)\}$.

Com isso, a urna evolui de acordo com a bola retirada, de forma aleatória uniformemente de acordo a seguinte dinâmica: Para $n \in \{2,3,4,\cdots\}$ sorteamos uma bola e observamos sua cor, colocamos ela de volta e adicionamos com probabilidade p a bola de mesma cor, e com probabilidade $1-p$ a bola de cor contrária.

Então atualizamos U_n, para que esta descreva a composição da urna após $(n-1)$ sorteios.

A conexão com o modelo PAE ocorre da seguinte forma: Se $(S_n,\ n \in \mathbb{N})$ é um PAE começando $S_0 = 0$ tal que $S_1 = \xi_1 - \xi_2$, então

$$(S_n, n \in \mathbb{N}) =^d (U_{n1} - U_{n2}, n \in \mathbb{N}) \ .$$

Em outras palavras, a diferença entre o número de bolas brancas e azuis na urna acima evolui como um PAE com primeiro passo igual a $\xi_1 - \xi_2$.

Observamos que a dinâmica da urna de Pólya é a seguinte: inicia com U_{01} bolas brancas e U_{02} bolas azuis e são feito sorteios sequencialmente.

Após cada sorteio, a bola é recolocada e outra bola da mesma cor é adicionada à urna. Assim temos a seguinte relação, $N(n,+1) = U_{n1}$, $N(n,-1) = U_{n2}$ e a urna Pólya é modificada no sentido de que, em cada sorteio, é utilizada a mesma cor com probabilidade p e a cor oposta com $1-p$.

Neste caso, a matriz de intensidade é dada por

$$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} \ .$$

3.2 Passeio aleatório multidimensional

Nesta seção generalizamos o conceito de passeio aleatório, construimos a matriz de intensidade e em seguida estabelemos convergências. A nossa base teórica é [9].

Inicialmente, definimos uma variável aleatória em tempo discreto $(X_i)_{i\geq 1}$. O n-ésimo passo denota um movimento dado em uma direção, dado por $X_n \in E$ o conjunto de escolhas e $|E| = K$.

Neste contexto, temos que $K = 2d$ ou $K = 2d+1$ com uma das possibilidades um elefante ficar parado, então, denotamos o conjunto de direções por

$$E_d = \begin{cases} (e_1, -e_1, \cdots, e_d, -e_d) \text{ , se K é par }, \\ (e_1, -e_1, \cdots, e_d, -e_d, \mathbf{0}) \text{ se K é ímpar }, \end{cases}$$

onde $(e_1, \cdots, e_d)$ é a base canônica do espaço euclidiano $\mathbb{R}^d$, $\mathbf{0}$ denota não movimento.

Seja $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ a posição d-dimensional do elefante no tempo n. O (n+1)-passo é obtido lançando uma moeda, seja a variável discreta Y_n, temos que:

i) Se $Y_n = 1$, com probabilidade θ, escolhemos uniformemente ao acaso $t \in \{1, 2, ..., n\}$, então X_{n+1} é igual a X_t com probabilidade p, caso contrário, X_{n+1} segue qualquer uma das outras direções com probabilidade uniforme $\dfrac{1-p}{K-1}$.

ii) Se $Y_n = 0$, então $X_{n+1} = e_1$ com probabilidade p ou qualquer uma das outras direções com probabilidade uniforme $\dfrac{1-p}{K-1}$.

Seja $\mathcal{F}_n$ a σ-álgebra gerada pela sequência $X_1, X_2, \cdots, X_n$. Observemos que $\mathcal{F}_n$ e Y_n são independentes. Então, para definir a direção do $n+1$-ésimo passo, caso necessário, selecionamos $t \in 1, 2, \cdots, n$ uniformemente, com isso temos as seguintes probabilidades condicionais para $x \in E_d$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x | Y_n = 1, \mathcal{F}_n) = \begin{cases} p, \text{ se } X_t = x \\ \dfrac{1-p}{K-1}, \text{ caso contrário} \end{cases},$$

e

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x | Y_n = 0, \mathcal{F}_n) = \begin{cases} p, \text{ se } x = e_1 \\ \dfrac{1-p}{K-1}, \text{ caso contrário} \end{cases},$$

Definindo $N(n,x) = |\{i \in \{1, \cdots, n\} : X_i = x\}|$ o número de passos na direção $x \in E_d$ até o tempo n, obtemos

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x | \mathcal{F}_n) = \begin{cases} p + \theta \left(\dfrac{1-Kp}{K-1}\right)\left(1 - \dfrac{N(n,e_1)}{n}\right), \text{ se } x = e_1 \\ \dfrac{1-p}{K-1} + \theta \left(\dfrac{1-Kp}{K-1}\right)\left(\dfrac{N(n,x)}{n}\right), \text{ se } x \neq e_1 \end{cases}, \tag{3.1}$$

De fato, para o caso $x = e_1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = x | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = e_1 | Y_n = 1, \mathcal{F}_n) \cdot \mathbb{P}(Y_n = 1 | \mathcal{F}_n) \\
&+ \mathbb{P}(X_{n+1} = e_1 | Y_n = 0, \mathcal{F}_n) \cdot \mathbb{P}(Y_n = 0 | \mathcal{F}_n) \\
&= \left[\left(\frac{N(n,e_1)}{n}\right) \cdot p + \left(\frac{N(n,e_1)}{n}\right) \cdot \left(\frac{1-p}{K-1}\right)\right] \cdot \theta + p \cdot (1-\theta) \\
&= \left[\left(\frac{N(n,e_1)}{n}\right) p + \left(1 - \frac{N(n,e_1)}{n}\right)\left(\frac{1-p}{K-1}\right) - p\right] \theta + p \\
&= \left[\left(\frac{N(n,e_1)}{n}\right) p + \left(\frac{1-p}{K-1}\right) - \left(\frac{N(n,e_1)}{n}\right)\left(\frac{1-p}{K-1}\right) - p\right] \theta + p \\
&= p + \theta \left(\frac{1-Kp}{K-1}\right)\left(1 - \frac{N(n,e_1)}{n}\right).
\end{aligned}$$

O caso $x \neq e_1$ é análogo.

A posição do elefante pode ser obtida por meio de um processo auxiliar, que evolui como modelo de urna com K cores. Nesse sentido, a posição do elefante é dada por:

$$S_n =^d \begin{cases} (U_{1,n} - U_{2,n}, U_{3,n} - U_{4,n} \cdots, U_{(K-1),n} - U_{K,n}), \text{ se } K \text{ é par} \\ (U_{1,n} - U_{2,n}, U_{3,n} - U_{4,n} \cdots, U_{(K-2),n} - U_{(K-1),n}), \text{ se } K \text{ é ímpar} \end{cases}, \tag{3.2}$$

onde $U_n = (U_{1,n}, U_{2,n}, \cdots, U_{K,n})$ é o vetor que denota o número de bolas de cada uma das K cores, no tempo n.

Precisamos apresentar os vetores colunas aleatórios ξ_i, para $i \in \{1, ..., K\}$, que representam um número aleatório de bolas para ser adicionado à urna. Esses assumem valores em $\{e_1, ..., e_K\}$, isto é, na base canônica do espaço euclidiano $\mathbb{R}^K$, Os vetores denotam a cor da bola a ser adicionada.

Portanto, usando (3.1)

$$\mathbb{P}(\xi_1 = e_1) = p \text{ e } \mathbb{P}(\xi_1 = e_i) = \frac{1-p}{K-1} \text{ para } i \neq 1. \tag{3.3}$$

Além disso, para $j \neq 1$, temos que

$$\mathbb{P}(\xi_j = x) = \begin{cases} p + \theta\left(\dfrac{1-Kp}{K-1}\right), \text{ se } x = e_1 \\ \dfrac{1-p-\theta(1-Kp)}{K-1}, \text{ se } x = e_j \\ \dfrac{1-p}{K-1}, \text{ caso contrário} \end{cases}, \tag{3.4}$$

Portanto, obtemos a seguinte matriz de intensidade:

$$A = \begin{pmatrix} p & p + \theta\dfrac{1-Kp}{K-1} & \cdots & p + \theta\dfrac{1-Kp}{K-1} \\ \dfrac{1-p}{K-1} & \dfrac{1-p-\theta(1-Kp)}{K-1} & \cdots & \dfrac{1-p}{K-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1-p}{K-1} & \dfrac{1-p}{K-1} & \cdots & \dfrac{1-p-\theta(1-Kp)}{K-1} \end{pmatrix}.$$

Para esta matriz, o maior autovalor é $\lambda_1 = 1$, e para $j = 2, \cdots, K$ temos que

$$\lambda_j = \theta\left(\frac{Kp-1}{K-1}\right).$$

Agora, sejam os autovetores $u_1, \cdots, u_K$ e $v_1, \cdots, v_K$, à esquerda e à direita, respectivamente, isto é

$$u_i^{'}A = \lambda_i u_i^{'} ,$$

$$Av_i = \lambda_i v_i ,$$

e

$$u_i^{'}v_j = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases},$$

Com isso, temos que

$$u_1 = (1, 1, \cdots, 1)^{'} ,$$

a igualdade acima pode ser obtida da observação (1.2).

$$v_1 = ((K-1)(p-\lambda_2), 1-p, \cdots, 1-p)^{'}\frac{1}{(K-1)(1-\lambda_2)} ,$$

Além disso, para $j = 2, 3, \cdots, K$ obtemos

$$u_j = (1-p, \cdots, (K-1)\lambda_2 - (K-2) - p, \cdots, 1-p)^{'}\frac{1}{(K-1)(1-\lambda_2)} ,$$

onde o valor diferente está na j-ésima posição. Da mesma forma, $v_j = (1, 0, \cdots, -1, \cdots, 0)^{'}$, com -1 ocupando a j-ésima posição.

Nos resultados a seguir apresentamos a lei forte de grandes números para a posição média do elefante e obtemos um teorema limite funcional para um processo gaussiano com uma matriz de covariância limite. Detalhamos passagens das demonstrações dadas em [9], .

Observemos que pelo lema (A.2) A é irredutível, além disso pelo lema (1.2) valem as condições básicas (A1)-(A6) e a condição de não existência. Portanto, podemos aplicar os resultados do capítulo 5 para a matriz A.

Teorema 3.1. *Seja $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a posição do elefante, logo temos a seguinte convergência quase-certa:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\frac{(1-\theta)(Kp-1)}{K-1+\theta(1-Kp)}(1,0,\cdots,0)'\ .$$

Demonstração. Seja $U_n=(U_{n1},U_{n2},\cdots,U_{nk})$ a composição de bolas na urna no tempo n.

Como $\lambda_1=1$ e $v_1=((K-1)(p-\lambda_2),1-p,\cdots,1-p)'\dfrac{1}{(K-1)(1-\lambda_2)}$, usando o teorema (2.1)

$$n^{-1}U_n\xrightarrow{q.c.}\lambda_1 v_1\ .$$

Segue que

$$\frac{U_{n1}-U_{n2}}{n}\xrightarrow{q.c.}v_{11}-v_{12}=\frac{(1-\theta)(Kp-1)}{(K-1)+\theta(1-Kp)}$$

$$\frac{U_{n3}-U_{n4}}{n}\xrightarrow{q.c.}v_{13}-v_{14}=0$$

$$\frac{U_{n5}-U_{n6}}{n}\xrightarrow{q.c.}v_{15}-v_{16}=0$$

$$\vdots$$

Portanto, da igualdade em distribuição dada em (3.2), segue que

$$\frac{S_n}{n}\xrightarrow{q.c.}\frac{(1-\theta)(Kp-1)}{K-1+\theta(1-Kp)}(1,0,\cdots,0)'\ .$$

O que conclui a demonstração. □

No próximo teorema, $D[0,\infty)$ denota o espaço das funções contínuas à direita e limitadas à esquerda (càdlàg). E ainda, trata da convergência para um processo gaussiano e fornece uma matriz de covariância limite explícita.

Teorema 3.2. *Seja $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, então*

i) Se $p<\dfrac{K+2\theta-1}{2\theta K}$, então para $n\to\infty$, em $D[0,\infty)$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left[S\lfloor tn\rfloor-\frac{tn(1-\theta)(Kp-1)}{K-1+\theta(1-Kp)}(1,0,\cdots,0)^T\right]\xrightarrow{d}W_t\ ,$$

onde W_t é um processo Gaussiano d-dimensional contínuo com $W_0=(0,0,\cdots,0)'$, $\mathbb{E}(W_t)=(0,0,\cdots,0)'$ e para $0<s\le t$,

$$\mathbb{E}(W_sW_t')=s\left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{\theta(Kp-1)}{K-1}}\omega\begin{pmatrix}(K+1)\alpha+\beta+p-1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 2\beta & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 2\beta\end{pmatrix}\ . \tag{3.5}$$

onde $\omega=\dfrac{(K-1)(1-p)}{\beta^2(K-1+2\theta(1-Kp))}$, $\alpha=(K-1)p+\theta(1-Kp)$ e $\beta=K-1+\theta(1-Kp)$.

ii) Se $p=\dfrac{K+2\theta-1}{2\theta K}$, então para $n\to\infty$, em $D[0,\infty)$

$$\frac{1}{\sqrt{n^t\log(n)}}\left[S\lfloor n^t\rfloor-n^t\frac{(K(2p-1)-1)}{K-1}(1,0,\cdots,0)^T\right]\xrightarrow{d}W_t\ ,$$

onde W_t é um processo Gaussiano d-dimensional contínuo com $W_0 = (1, 0, \cdots, 0)^T$, $\mathbb{E}(W_t) = (1, 0, \cdots, 0)^T$ e para $0 < s \leq t$,

$$\mathbb{E}(W_s W_t^{'}) = 4s \frac{1-p}{(K-1)^2}\left(p + \frac{K-3}{2}\right)\begin{pmatrix} (K+2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

Demonstração. i) Dado $U_n = (U_{n1}, U_{n2}, \cdots, U_{nK})$ a composição de bolas na urna no tempo n. Pelo teorema 8.2 temos a convergência, para determinar a matriz de covariância limite sejam $L_I = \{i : \lambda_i < \lambda_1/2\}$, logo $L_I = \{2, \cdots, K\}$.

Usando o lema 5.4 da referência [11] temos que $\Sigma = \Sigma_I$ e do lema 5.3-i) da referência [11] segue a forma explícita:

$$\Sigma_I = \sum_{j,k \in L_I} \frac{u_j^{'} B u_k}{\lambda_1 - \lambda_j - \lambda_k} v_j v_k^{'} \;;$$

onde $B = \sum_{i=1}^{K} v_{1i} B_i$ e $B_i = \mathbb{E}(\xi_i \xi_i^{'})$, então de (3.3)

$$B_1 = \begin{pmatrix} p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dfrac{1-p}{K-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dfrac{1-p}{K-1} \end{pmatrix},$$

e para $j \geq 2$, usando e (3.4) temos que

$$B_j = \begin{pmatrix} p + \theta\left(\dfrac{1-Kp}{K-1}\right) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dfrac{1-p}{K-1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dfrac{1-p}{K-1} + \theta\left(\dfrac{Kp-1}{K-1}\right) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dfrac{1-p}{K-1} \end{pmatrix},$$

A expressão $\dfrac{1-p}{K-1} + \theta\left(\dfrac{Kp-1}{K-1}\right)$ está na localizada j-ésima linha e j-ésima coluna. Do cálculo computacional realizado pelo autor em [9]

$$B = \frac{1}{(K-1) + \theta(1-Kp)} \begin{pmatrix} p(K-1) + \theta(1-Kp) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1-p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1-p \end{pmatrix},$$

Portanto,

$$u_i^{'} B u_j = \frac{1-p}{(K-1)^2 (1-\lambda_2)^2} \cdot \begin{cases} p-1, & \text{se } i \neq j \\ p - 1 + (K-1)(1-\lambda_2), & \text{se } i = j \end{cases},$$

e

$$v_i v_j^{'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} ,$$

com a j-ésima coluna contendo o -1 na primeira linha e a i-ésima linha contendo o -1 na primeira coluna.

Finalmente, obtemos

$$\Sigma_I = C \begin{pmatrix} (K-1)a & -a & -a & \dots & -a \\ -a & b & p-1 & \dots & p-1 \\ -a & p-1 & b & \dots & p-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a & p-1 & p-1 & \dots & b \end{pmatrix} , \tag{3.6}$$

onde $a = (K-1)(p-\lambda_2)$, $b = (p-1)+(K-1)(1-\lambda_2)$ e $C = \dfrac{1-p}{(K-1)^2(1-\lambda_2)^2(1-2\lambda_2)}$.

Esta é a matriz de covariância limite para as proporções U_n.

Temos pelo lema 5.3-iii) da referência[11] que

$$\Sigma = \sum_{j,k=2}^{q} \frac{\lambda_1 u^{'} D u_k}{\lambda_1 - \lambda_j - \lambda_k} w_j w_k^{'} ,$$

com $w_j := \lambda_j v_j - \lambda_1 (a \cdot v_j) v_1$.

Por outro lado, pelo teorema 3.31 e observação 5.7 da referência [11]

$$(n^{-1/2}(X_{\lfloor xn \rfloor} - xn\lambda_1 v_1) \xrightarrow{d} V(x) , \tag{3.7}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V(x)V^{'}(y)) &= \sum_{j,k\geq 2} x^{1-\lambda_j/\lambda_1} y^{\lambda_k/\lambda_1} \frac{\lambda_1 u_j^{'} D u_k}{\lambda_1 - \lambda_j - \lambda_k} w_j w_k^{'}, 0 \leq x \leq y , \\ &= \sum_{j,k\geq 2} x^{1-\lambda_j/\lambda_1} y^{\lambda_k/\lambda_1} \Sigma, 0 \leq x \leq y , \\ &= (K-1)^2 x^{1-\lambda_j/\lambda_1} y^{\lambda_k/\lambda_1} \Sigma_I, 0 \leq x \leq y . \end{aligned}$$

e pela igualdade

$$S_n =^d \begin{cases} (U_{1,n} - U_{2,n}, U_{3,n} - U_{4,n} \cdots , U_{(K-1),n} - U_{K,n}), \text{ se } K \text{ é par} \\ (U_{1,n} - U_{2,n}, U_{3,n} - U_{4,n} \cdots , U_{(K-2),n} - U_{(K-1),n}), \text{ se } K \text{ é ímpar} \end{cases} ,$$

e das propriedades

i) $Cov(U_{i,n} - U_{j,n}, U_{i,n} - U_{j,n}) = Var[U_{i,n} - U_{j,n}] = Var[U_{i,n}] + Var[U_{i,n}] - 2Cov(U_{i,n}, U_{j,n})$,

ii) $Cov(U_{a,n} - U_{b,n}, U_{k,n} - U_{l,n}) = Cov(U_{a,n}, U_{k,n}) - Cov(U_{a,n}, U_{l,n}) - Cov(U_{b,n}, U_{k,n}) + Cov(U_{b,n}, U_{l,n})$, com $0 < s \leq t$, temos que a seguinte matriz de covariância limite

$$\mathbb{E}(W_s W_t^{'}) = (K-1)^2 x^{1-\lambda_j/\lambda_1} y^{\lambda_k/\lambda_1} C \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1d} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{d1} & b_{d2} & \dots & b_{dd} \end{pmatrix} .$$

onde $b_{ij} = Cov(U_{n,(2i-1)} - U_{n,(2i)}, U_{n,(2j-1)} - U_{n,(2j)})$, logo temos que

$$\begin{aligned} b_{11} &= Cov(U_{n,1} - U_{n,2}, U_{n,1} - U_{n,2}) \\ &= (K-1)a + b + 2a \\ &= (K-1)[(K-1)(p-\lambda_2)] + [p-1+(K-1)(1-\lambda_2)] + 2(K-1)(p-\lambda_2) \\ &= (K-1)[(K-1)(p-\lambda_2) + (1-\lambda_2) + 2(p-\lambda_2)] + p - 1 \\ &= (K-1)[(K+1)(p-\lambda_2) + (1-\lambda_2)] + p - 1 \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{dd} &= \dots = b_{33} = b_{22} = Cov(U_{n,3} - U_{n,4}, U_{n,3} - U_{n,4}) \\ &= b + b - 2(p-1) \\ &= 2(p-1) + 2(K+1)(1-\lambda_2) - 2(p-1) \\ &= 2(K+1)(1-\lambda_2) \ , \end{aligned}$$

e para $i \neq j$, temos

$$\begin{aligned} b_{1j} &= Cov(U_{1,n} - U_{2,n}, U_{(2j-1),n} - U_{(2j),n}) \\ &= Cov(U_{1,n}, U_{(2j-1),n}) - Cov(U_{1,n}, U_{(2j),n}) \\ &- Cov(U_{2,n}, U_{(2j-1),n}) + Cov(U_{2,n}, U_{(2j),n}) \\ &= -a + a - (1-p) + (1-p) \\ &= 0 \ , \end{aligned}$$

e com $i, j \neq 1$

$$\begin{aligned} b_{ij} &= Cov(U_{(2i-1),n} - U_{(2i),n}, U_{(2j-1),n} - U_{(2j),n}) \\ &= Cov(U_{(2i-1),n}, U_{(2j-1),n}) - Cov(U_{(2i-1),n}, U_{(2j),n}) \\ &- Cov(U_{(2i),n}, U_{(2j-1),n}) + Cov(U_{(2i),n}, U_{(2j),n}) \\ &= (p-1) - (p-1) - (p-1) + (p-1) \\ &= 0 \ , \end{aligned}$$

Por fim, observamos a igualdade entre as expressões de 3.5 e 3.6,

$$\omega = \frac{(K-1)(1-p)}{[K-1+\theta(1-Kp)]^2(K-1+2\theta(1-Kp))} \ ,$$

de $\theta(1-Kp) = -(K-1)\lambda_2$,

$$\begin{aligned} \frac{(K-1)(1-p)}{[K-1+\theta(1-Kp)]^2(K-1+2\theta(1-Kp))} &= \frac{(K-1)(1-p)}{[(K-1)-(K-1)\lambda_2]^2 \cdot [(K-1)(1-2\lambda_2)]} \\ &= \frac{(1-p)}{[(K-1)(1-\lambda_2)]^2 \cdot (1-2\lambda_2)} \\ &= (K-1)^2 \cdot C \end{aligned}$$

ii) A prova deste item é similar ao anterior, basta usar teorema 3.23 e o corolário 5.3-(i) da referência [11] para obter a matriz de covariância limite.

□

Observação 3.1. *Fazendo $n \to \infty$, aplicando o teorema 1.3 para o item i) do teorema anterior*

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_n}{n}\right) \to \lambda_1 v_1 \ ,$$

além disso, usando o caso particular do lema 1.2 temos

$$Var\left(\frac{X_n}{n}\right) \to 0 \ ,$$

portanto a média da proporção limite converge para um ponto e isso implica que a variância da proporção converge para zero.

Referências Bibliográficas

[1] Afer, A. *Pólya Urn Models.* Bocconi University - PhD Program in Statistics, 2016.

[2] Conway, J. B. *Functions of One Complex Variable, Berlim.* Springer-Verlag, 1978. Disponível em https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6313-5.

[3] De Bruijn, N. G. *Asymptotic methods in analysis*, vol. 4. Courier Corporation, 1981.

[4] de Matos, J. D. *Distribuição de renda: fatores condicionantes e comparação entre as regiões metropolitanas pesquisadas pela PED.* Secretaria da Coordenação e Planejamento, Fundação de Economia e Estatística ..., 2005.

[5] Dunford, N., and Schwartz, J. T. *Linear operators, part 1: general theory*, vol. 10. John Wiley & Sons, 1988.

[6] Eggenberger, F., and Pólya, G. Über die statistik verketteter vorgänge. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 3*, 4 (1923), 279–289.

[7] Ehrenfest, P., and Ehrenfest-Afanassjewa, T. *Über zwei bekannte Einwände gegen das Boltzmannsche H-Theorem.* Hirzel, 1907.

[8] González-Navarrete, M. e Lambert, R. The diffusion of opposite opinions in a randomly biased environment. *Journal of Mathematical Physics 60*, 11 (2019), 113301. Disponível em https://doi.org/10.1063/1.5095762.

[9] González-Navarrete, M. Multidimensional walks with random tendency. In *Jornal of statistical physics, n. 181* (2020), pp. 1138–1148. Disponível em https://doi.org/10.1007/s10955-020-02621-0.

[10] Horn, R. A., and Johnson, C. R. *Matrix analysis.* Cambridge university press, 2012.

[11] Janson, S. Functional limit theorems for multitype branching processes and generalized pólya urns. *Stochastic Processes and their Applications 110*, 2 (2004), 177–245. Disponível em https://doi.org/10.1016/j.spa.2003.12.002.

[12] Janson, S. Mean and variance of balanced pólya urns. *Advances in Applied Probability 52*, 4 (2020), 1224–1248. Disponível em https://doi.org/10.48550/arXiv.1602.06203.

[13] Júnior, G. d. S., et al. Contágio competitivo em redes complexas quantificadas e direcionadas.

[14] Lima, I. S. L. Estudo da difusão de partículas confinadas.

[15] Mahmoud, H. *Pólya urn models.* Chapman and Hall/CRC, 2008. Disponível em https://doi.org/10.1201/9781420059847.

[16] Markov, A. Generalization of a problem on a sequential exchange of balls. In *Collected Works, Meeting of Physico-Mathematical Society of the Academy of Sciences* (1917).

[17] Schütz, G. M., and Trimper, S. Elephants can always remember: Exact long-range memory effects in a non-markovian random walk. *Physical Review E 70*, 4 (2004), 045101.

Apêndice A

Ferramentas: teoria espectral

Apresentamos a seguir conceitos e resultados da teoria espectral, por exemplo, o teorema de Perron-Frobenius, além disso, definições de funções de variáveis complexas. Por fim, destacamos que não apresentamos as demonstrações, estas podem ser conferidas em: [2] , [5] e [10]. Começamos definindo elementos para matrizes.

Definição A.1. *Seja $A \in M_n$ (conjunto das matrizes com n linhas e n colunas), o espectro de A, denotado por $\sigma(A)$, é o conjunto de todos os autovalores da matriz A.*

Definição A.2. *Seja $A \in M_n$, o raio espectral de A é $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$.*

Definição A.3. *$A \in M_n$ é positiva se $A > 0$, isto é, se $a_{ij} > 0$ e é não-negativa se $A \geq 0$, ou seja, $a_{ij} \geq 0$.*

Definição A.4. *A matriz $A \in M_n$ é redutível se há uma matriz de permutação $P \in M_n$ tal que*

$$P^{'}AP = \begin{pmatrix} B & C \\ 0_{n-r,r} & D \end{pmatrix}$$

com $0_{n-r,r}$ uma matriz com todas as entradas nulas, B, C e D não necessariamente com entradas iguais a zero.

Definição A.5. *Dizemos que a matriz A é irredutível se não é redutível.*

A seguir o resultado que estabelece condições necessárias para o o raio espectral ser positivo.

Teorema A.1. *Seja $A = [a_{ij}] \in M_n$ não-negativa e ainda $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0$ para todo $i = 1, \cdots, n$ ou $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} > 0$ para todo $j = 1, \cdots, n$, então $\rho(A) > 0$. Em particular, $\rho(A) > 0$ se $n \geq 2$ e A é irredutível e não-negativa.*

A condição necessária e suficiente para que a matriz seja irredutível são estabelecidas nos dois próximos resultados.

Teorema A.2. *Seja $A = [a_{ij}] \in M_n$ não-negativa. Então A é irredutível se e somente se $(I + A)^{n-1} > 0$.*

O teorema Perron-Frobenius a seguir indica que o autoespaço de uma matriz não-negativa e irredutível relacionado com o raio espectral é unidimensional.

Teorema A.3 (Perron-Frobenius)**.** *Seja $A \in M_n$ não-negativa e irredutível então para $n \geq 2$*

a) $\rho(A) > 0$;

b) $\rho(A)$ é autovalor de A algebricamente simples;

c) Existe um único vetor real $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ tal que $Ax = \rho(A)x$ e $x_1 + \cdots + x_n = 1$, este vetor é positivo;

d) Existe um único vetor real $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ tal que $y^{'}A = \rho(A)y^T$ e $x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = 1$, este vetor é positivo;

Sejam $\mathcal{X}$ espaço complexo B de dimensão finita, T um operador linear em $B(\mathcal{X})$. Estudaremos propriedades do operador T.

Com I indicando o operador identidade em $\mathcal{X}$, temos que $T^0 = I$;

Além disso, se $p(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \lambda^i$ polinômio com coeficientes complexos, então definimos $p(T) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i T^i = \alpha_n T^n + \cdots + \alpha_1 T + \alpha_0 I$;

Definimos o espectro $\sigma(T)$ de um operador T com espaço B de dimensão finita é o conjunto dos números complexos λ tais que $(\lambda I - T)$ não é bijetora;

E ainda, o índice $v(\lambda)$ de um número complexo λ é o menor inteiro não-negativo v tal que $(\lambda I - T)^v x = 0$, para cada vetor x para qual $(\lambda I - T)^{v+1} x = 0$;

Temos que se $\lambda_0 \in \sigma(T)$, então existe $x_0 \neq 0$ tal que $(T - \lambda_0 I)x_0 = 0$, assim λ_0 é o autovalor e x_0 é o autovetor;

Na sequência a proposição garante a existência de autovalores para um operador.

Proposição A.1. *O espectro de um operador em um espaço de dimensão finita é um conjunto não vazio finito de pontos.*

Definimos $\mathcal{F}(T)$ a classe de todas as funções de variável complexa λ que são analítica em algum conjunto aberto contendo $\sigma(T)$. O conjunto aberto não precisa ser conexo e pode variar com a função em $\mathcal{F}(T)$;

Temos que se $f \in \mathcal{F}(T)$, seja p um polinômio tal que $f^m(\lambda) = p^m(\lambda)$, $m \leq v(\lambda) - 1$ para cada $\lambda \in \sigma(T)$, definimos $f(T) = p(T)$;

O teorema a seguir estabelce propriedades para funções em $\mathcal{F}(T)$.

Teorema A.4. *Se $f, g \in \mathcal{F}(T)$ e α, β são números complexos, então*

a) $\alpha f + \beta g \in \mathcal{F}(T)$ e $(\alpha f + \beta g)(T) = \alpha f(T) + \beta g(T)$;

b) $f \cdot g \in \mathcal{F}(T)$ e $(f \cdot g)(T) = f(T) \cdot g(T)$;

c) Se $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n \lambda^n$, então $f(T) = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n\ T^n$;

d) $f(T) = 0 \Leftrightarrow f^m(\lambda) = 0$, $\lambda \in \sigma(T), 0 \leq m \leq v(\lambda) - 1$.

Do item b, segue que $f(T)g(T) = g(T)f(T)$ para todas $f, g \in \mathcal{F}(T)$;

Definição A.6. *Uma função $f : G \to \mathbb{C}$ é analítica se f é continuamente diferenciável em G. f é inteira de for continuamente diferenciável em todo $\mathbb{C}$.*

Definição A.7. *Dizemos que um função f possui uma singularidade isolada $z = a$ se existir $R > 0$ tal que f está definida e é analítica em $B(a, R) - \{a\}$, mas não está definida em $z = a$.*

Definição A.8. *Uma singularidade isolada $z = a$ de uma função f é dita polo de f se*

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty\ .$$

Apêndice B

Caso particular

Calculamos a seguir, os autovalores e o autovetor associado ao maior daqueles. Além disso, realizamos os cálculos para determinar Σ_I, da demonstração do teorema (3.2), para o passeio unidimensional com parada, isto é, com três direções possíveis $(K = 3)$.

Sendo assim, temos que a matriz de intensidade é dada por

$$A = \begin{pmatrix} p & p + \theta\dfrac{1-3p}{2} & p + \theta\dfrac{1-3p}{2} \\ \dfrac{1-p}{2} & \dfrac{1-p-\theta(1-3p)}{2} & \dfrac{1-p}{2} \\ \dfrac{1-p}{2} & \dfrac{1-p}{2} & \dfrac{1-p-\theta(1-3p)}{2} \end{pmatrix}.$$

Logo, para o cálculo dos autovalores,

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} p-\lambda & p + \theta\dfrac{1-3p}{2} & p + \theta\dfrac{1-3p}{2} \\ \dfrac{1-p}{2} & \dfrac{1-p-\theta(1-3p)}{2} - \lambda & \dfrac{1-p}{2} \\ \dfrac{1-p}{2} & \dfrac{1-p}{2} & \dfrac{1-p-\theta(1-3p)}{2} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Usando o teorema de Laplace para o cálculo do determinante segue que

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I) = 0 \;\; \Rightarrow & \;\; (p-\lambda)\left\{\left(\frac{1-p-\theta(1-3p)}{2} - \lambda\right)^2 - \left(\frac{1-p}{2}\right)^2\right\} \\ + & \;\; 2\left(p + \frac{\theta(1-3p)}{2}\right)\left\{\left(\frac{1-p}{2}\right)^2 - [(\frac{1-p}{2})\cdot(\frac{1-p-\theta(1-3p)}{2} - \lambda)]\right\} \\ = & \;\; 0 \end{aligned}$$

Fazendo $\alpha = \left(p + \dfrac{\theta(1-3p)}{2}\right)$,

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I) = 0 \;\; \Rightarrow & \;\; (p-\lambda)\left\{\left(\frac{1-p}{2} + \alpha - \lambda\right)^2 - \left(\frac{1-p}{2}\right)^2\right\} \\ + & \;\; 2\left(p + \frac{\theta(1-3p)}{2}\right)\left\{\left(\frac{1-p}{2}\right)^2 - [(\frac{1-p}{2})\cdot(\frac{1-p-\theta(1-3p)}{2} - \lambda)]\right\} \\ = & \;\; 0 \\ \Rightarrow & \;\; -\lambda^3 + (1+2\alpha)\lambda^2 + (-\alpha^2 - 2\alpha)\lambda + \alpha^2 = 0 \end{aligned}$$

Portanto, os autovalores são 1 , $\theta\left(\dfrac{3p-1}{2}\right)$ e $\theta\left(\dfrac{3p-1}{2}\right)$.

Calculando $v_1=(x,y,z)$ tal que $(A-\lambda_1 I)v_1=0$, para $\beta=\dfrac{1-p}{2}$ e $\lambda_2=\theta\left(\dfrac{3p-1}{2}\right)$ temos o seguinte sistema

$$\begin{cases}(p-1)x+(p-\lambda_2))y+(p-\lambda_2)z=0\\ \beta x+(\beta+\lambda_2-1)y+\beta z=0\\ \beta x+\beta y+(\beta+\lambda_2-1)z=0\end{cases}.$$

Resolvendo chegamos a $y=z$ e $x=\left(\dfrac{\theta(1-3p)+2p}{1-p}\right)y$. Logo,

$$v_1=\left(\frac{\theta(1-3p)+2p}{1-p},1,1\right).$$

Portanto, multiplicando as coordenadas do vetor acima por $\dfrac{1-p}{2(1-\lambda_2)}$, segue que

$$\begin{aligned}v_1 &= (v_{11},v_{12},v_{13})\\ &= \left(\frac{2(p-\lambda_2)}{2(1-\lambda_2)},\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)},\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right).\end{aligned}$$

Sejam

$$B_1 = \begin{pmatrix}p & 0 & 0\\ 0 & \frac{1-p}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-p}{2}\end{pmatrix},$$

$$B_2=\begin{pmatrix}p+\theta\left(\frac{1-3p}{2}\right) & 0 & 0\\ 0 & \frac{1-p}{2}-\theta\left(\frac{3p-1}{2}\right) & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-p}{2}\end{pmatrix},$$

e

$$B_3=\begin{pmatrix}p+\theta\left(\frac{1-3p}{2}\right) & 0 & 0\\ 0 & \frac{1-p}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-p}{2}-\theta\left(\frac{3p-1}{2}\right)\end{pmatrix}$$

Sabemos que $\lambda_2=\theta\left(\dfrac{3p-1}{2}\right)$, substituindo nas matrizes B_2 e B_3, segue que

$$B_2=\begin{pmatrix}p-\lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1-p}{2}+\lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-p}{2}\end{pmatrix}$$

e

$$B_3 = \begin{pmatrix} p-\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1-p}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-p}{2}+\lambda_2 \end{pmatrix}$$

Logo, observamos que

$$B = \sum_{i=1}^{3} v_{1i} B_i = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{p-\lambda_2}{1-\lambda_2}\cdot p + 2\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\cdot(p-\lambda_2) \\ &= \frac{p-\lambda_2}{1-\lambda_2} \\ &= \frac{2p+\theta(1-3p)}{2+\theta(1-3p)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_{22} &= a_{33} \\ &= \left(\frac{p-\lambda_2}{1-\lambda_2}\right)\cdot\left(\frac{1-p}{2}\right) + \left(\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right)\cdot\left(\frac{1-p}{2}+\lambda_2\right) + \left(\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right)\cdot\left(\frac{1-p}{2}\right) \\ &= \left(\frac{p-\lambda_2}{1-\lambda_2}\right)\cdot\left(\frac{1-p}{2}\right) + \left(\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right)\cdot(1-p+\lambda_2) \\ &= \frac{1-p}{2(1-\lambda_2)} \\ &= \frac{1-p}{2+\theta(1-3p)} \end{aligned}$$

Agora, calculando $u_i^{'}Bu_j$, para $i,j\in\{2,3\}$,

$$\begin{aligned} u_3^{'}Bu_2 &= u_2^{'}Bu_3 \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{1-p}{2(1-\lambda_2)} & \dfrac{2\lambda_2-1-p}{2(1-\lambda_2)} & \dfrac{1-p}{2(1-\lambda_2)} \end{pmatrix} \\ &\cdot \begin{pmatrix} \dfrac{2p+\theta(1-3p)}{2+\theta(1-3p)} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1-p}{2+\theta(1-3p)} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-p}{2+\theta(1-3p)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{1-p}{2(1-\lambda_2)} \\ \dfrac{1-p}{2(1-\lambda_2)} \\ \dfrac{2\lambda_2-1-p}{2(1-\lambda_2)} \end{pmatrix} \\ &= \left[\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right]\cdot\left[\frac{2p-2\lambda_2}{2(1-\lambda_2)}\right]\cdot\left[\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right] + \left[\frac{2\lambda_2-1-p}{2(1-\lambda_2)}\right]\cdot\left[\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right] \\ &\cdot \left[\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right] + \left[\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right]\cdot\left[\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right]\cdot\left[\frac{2\lambda_2-1-p}{2(1-\lambda_2)}\right] \end{aligned}$$

-1

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right]\cdot\left[\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right]\cdot\left[\frac{2p-2\lambda_2+2\lambda_2-1-p+2\lambda_2-1-p}{2(1-\lambda_2)}\right] \\ &= \left[\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right]\cdot\left[\frac{p-1}{2(1-\lambda_2)}\right] \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
u_3^{'}Bu_3 &= u_2^{'}Bu_2 \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{1-p}{2(1-\lambda_2)} & \dfrac{2\lambda_2-1-p}{2(1-\lambda_2)} & \dfrac{1-p}{2(1-\lambda_2)} \end{pmatrix} \\
&\cdot \begin{pmatrix} \dfrac{2p+\theta(1-3p)}{2+\theta(1-3p)} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1-p}{2+\theta(1-3p)} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-p}{2+\theta(1-3p)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{1-p}{2(1-\lambda_2)} \\ \dfrac{2\lambda_2-1-p}{2(1-\lambda_2)} \\ \dfrac{1-p}{2(1-\lambda_2)} \end{pmatrix} \\
&= \left[\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right] \cdot \left[\frac{2p-2\lambda_2}{2(1-\lambda_2)}\right] \cdot \left[\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right] + \left[\frac{2\lambda_2-1-p}{2(1-\lambda_2)}\right] \cdot \left[\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right] \\
&\cdot \left[\frac{2\lambda_2-1-p}{2(1-\lambda_2)}\right] + \left[\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right] \cdot \left[\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right] \cdot \left[\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right] \\
&= \left[\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right] \cdot \left[\left(\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right)\left(\frac{2p-2\lambda_2}{2(1-\lambda_2)}\right) + \left(\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right)\left(\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right)\right] \\
&+ \left[\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right] \cdot \left[\left(\frac{2\lambda_2-1-p}{2(1-\lambda_2)}\right)\left(\frac{2\lambda_2-1-p}{2(1-\lambda_2)}\right)\right] \\
&= \left[\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right] \cdot \left(\frac{(1-p)(-1)(2\lambda_2-1-p)}{2(1-\lambda_2)}\right) \\
&+ \left[\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right] \cdot \left[\left(\frac{2\lambda_2-1-p}{2(1-\lambda_2)}\right)\left(\frac{2\lambda_2-1-p}{2(1-\lambda_2)}\right)\right] \\
&= \left[\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right] \cdot \left[\frac{(2\lambda_2-1-p)}{2(1-\lambda_2)}\right] \cdot \left[\cancelto{-1}{\frac{p-1+2\lambda_2-1-p}{2(1-\lambda_2)}}\right] \\
&= \left[\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right] \cdot \left[\frac{(p+1-2\lambda_2)}{2(1-\lambda_2)}\right]
\end{aligned}
$$

Além disso, calculando $v_l v_k^{'}$, onde $l, k \in \{2, 3\}$, segue que

$$v_2 v_3^{'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 v_2^{'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 v_2^{'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 v_3^{'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por fim,

$$\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 1 - 2\lambda_2 = 1 + \theta(1-3p)\ .$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\Sigma_I &= \frac{u_2^{'}Bu_3}{\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3}v_2v_3^{'} + \frac{u_3^{'}Bu_2}{\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3}v_3v_2^{'} + \frac{u_2^{'}Bu_2}{\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3}v_2v_2^{'} + \frac{u_3^{'}Bu_3}{\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3}v_3v_3^{'} \\
&= \frac{1}{1-2\lambda_2}\left[\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right]\cdot\left[\frac{p-1}{2(1-\lambda_2)}\right]\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \frac{1}{1-2\lambda_2}\left[\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right]\cdot\left[\frac{p-1}{2(1-\lambda_2)}\right]\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \frac{1}{1-2\lambda_2}\left[\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right]\cdot\left[\frac{(p+1-2\lambda_2)}{2(1-\lambda_2)}\right]\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \frac{1}{1-2\lambda_2}\left[\frac{1-p}{2(1-\lambda_2)}\right]\cdot\left[\frac{(p+1-2\lambda_2)}{2(1-\lambda_2)}\right]\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1-p}{2^2(1-\lambda_2)^2(1-2\lambda_2)}\begin{pmatrix} 4(p-\lambda_2) & -2(p-\lambda_2) & -2(p-\lambda_2) \\ -2(p-\lambda_2) & p-1+2(1-\lambda_2) & p-1 \\ -2(p-\lambda_2) & p-1 & p-1+2(1-\lambda_2) \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$