QUÉZIA CRISTIANE DE OLIVEIRA MAIA CARVALHO

Atratores para sistemas dinâmicos e suas relações

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

FACULDADE DE MATEMÁTICA

2022

QUÉZIA CRISTIANE DE OLIVEIRA MAIA CARVALHO

Atratores para sistemas dinâmicos e suas relações

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Sistemas dinâmicos.

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo Collegari.

UBERLÂNDIA - MG

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

C331a
2022

Carvalho, Quézia Cristiane de Oliveira Maia, 1997-
Atratores para sistemas dinâmicos e suas relações [recurso eletrônico] / Quézia Cristiane de Oliveira Maia Carvalho. - 2022.

Orientador: Rodolfo Collegari.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2022.5347
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Matemática. I. Collegari, Rodolfo, 1987-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Glória Aparecida
Bibliotecária - CRB-6/2047

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO: Quézia Cristiane de Oliveira Maia Carvalho.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 12012MAT009.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Sistemas dinâmicos.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Atratores para sistemas dinâmicos e suas relações.

ORIENTADOR Prof. Dr. Rodolfo Collegari.

Esta dissertação foi **aprovada**, em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 29 de agosto de 2022, às 10h00min, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME	**ASSINATURA**
Prof. Dr. Rodolfo Collegari UFU - Universidade Federal de Uberlândia	______________________
Prof. Dra. Jaqueline da Costa Ferreira UFES - Universidade Federal do Espírito Santo	______________________
Prof. Dr. Rafael Antônio Rossato UFU - Universidade Federal de Uberlândia	______________________

Uberlândia-MG, 29 de agosto de 2022.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 160 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3239-4209/4154 - www.posgrad.famat.ufu.br - pgmat@famat.ufu.br

ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Matemática				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, 104, sigla do PPGMAT				
Data:	29 de agosto de 2022	Hora de início:	10:00	Hora de encerramento:	11:20
Matrícula do Discente:	12012MAT009				
Nome do Discente:	Quézia Cristiane de Oliveira Maia Carvalho				
Título do Trabalho:	Atratores para sistemas dinâmicos e suas relações				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Análise Funcional e Equações Diferenciais				
Projeto de Pesquisa de vinculação:					

Reuniu-se na Sala 1F-119 (Sala Multiuso da Faculdade de Matemática), Campus Santa Mônica, da Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática, assim composta: Professores Doutores: Jaqueline da Costa Ferreira - UFES; Rafael Antônio Rossato - FAMAT/UFU e Rodolfo Collegari - FAMAT/UFU, orientador da candidata.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Rodolfo Collegari, apresentou a Comissão Examinadora e a candidata, agradeceu a presença do público, e concedeu à Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação da Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir a candidata. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando a candidata:

Aprovada.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

Documento assinado eletronicamente por **Jaqueline da Costa Ferreira**, **Usuário Externo**, em

29/08/2022, às 11:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Rodolfo Collegari**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 29/08/2022, às 11:28, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Rafael Antonio Rossato**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 29/08/2022, às 11:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3850646** e o código CRC **FC03B4B1**.

Dedicatória

À minha família, amigos e em especial ao meu esposo, pelo incentivo e suporte em todos os momentos.

Agradecimentos

Agradeço imensamente à Universidade Federal de Uberlândia e à rede de ensino do Programa de Pós-graduação em Matemática - UFU que muito me amparou e me permitiu passar por essa maravilhosa experiência a qual me fez alcançar mais uma etapa de um grande sonho que me levará para minha jornada final: me tornar uma doutora em Matemática. Apesar das dificuldades, desafios e altos e baixos ao longo desse processo, aprendi que a perseverança é a maior virtude que me fez chegar onde estou hoje. Perseverança essa que adquiri por meio daqueles que estiveram ao meu lado, como os professores, o coordenador e principalmente meu orientador que dispôs todo seu tempo, dedicação e não mediu esforços para me oferecer as melhores ferramentas para meu aprendizado e desenvolvimento deste trabalho. Meu agradecimento especial aos professores Jaqueline da Costa Ferreira (UFES) e Rafael Antônio Rossato (UFU) por aceitarem fazer parte da banca avaliadora dessa dissertação. Acima de tudo agradeço a Deus por me suprir, me sustentar até aqui e ainda por me mostrar que seus sonhos são muito maiores e melhores que os meus.

CARVALHO , Q.C. *Sistemas dinâmicos.* 2022. xi + 48 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

O presente trabalho versa sobre a teoria dos sistemas dinâmicos, abordando o caso autônomo (*semigrupo*) e o caso não autônomo (*processo de evolução*), com um estudo detalhado sobre seus atratores. Apresentamos resultados que garantem a existência de atrator para os semigrupos e para os sistemas dinâmicos não autônomos. Neste segundo caso, estudamos os processos de evolução e os cociclos, através das dinâmicas pullbak e forwards. Além disso, vemos alguns resultados relacionando os diversos tipos de atratores.

Palavras-chave: sistemas dinâmicos, equações diferenciais, atratores.

CARVALHO , Q.C. *Dynamical systems.* 2021. xi + 48 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

The present work deals with the theory of dynamical systems, approaching the autonomous case (semigroup) and the non-autonomous case (evolution process), with a detailed study of its attractors. We present results that guarantee the existence of the attractor for the semigroups and for the non-autonomous dynamics systems. In this second case, we study the evolution processes and the cocycles, through pullbak and forward dynamics. In addition, we present some results relating the different types of attractors.

Keywords: dynamical systems, differential equations, attractors.

Sumário

Introdução

Um sistema dinâmico é uma família de operadores $\{S(t,s)\colon t \geq s\}$, definidos em um espaço métrico X e tomando valores nele mesmo, de modo que se o valor de uma determinada variável no instante s é x, seu valor em um instante futuro t será $S(t,s)x$. Sendo assim, conhecer o sistema dinâmico nos possibilita saber os valores de cada variável x em X no futuro, conhecendo-as no presente.

A família de operadores $\{S(t,s)\colon t \geq s\}$ mencionada acima deve cumprir as seguintes condições de compatibilidade para ser de fato um sistema dinâmico:

1. $S(t,t) = I$, para todo t, onde I é a identidade em X e

2. $S(t,\tau)S(\tau,s)x = S(t,s)x$, sempre que $t \geq \tau \geq s$ e $x \in X$.

Se t e s são tomados em $\mathbb{Z}$, $\{S(t,s)\colon t \geq s\}$ é um *sistema dinâmico discreto* e se t e s são tomados em $\mathbb{R}$, $\{S(t,s)\colon t \geq s\}$ é um *sistema dinâmico contínuo*. Além disso, algumas vezes um sistema dinâmico também deve cumprir a propriedade de continuidade:

3. A aplicação $\{(t,s,x) \in \mathbb{R}^2 \times X\colon t \geq s\} \ni (t,s,x) \mapsto S(t,s)x \in X$ é contínua.

No geral, definimos dois tipos de sistemas dinâmicos contínuos: os sistemas dinâmicos autônomos, usualmente chamados de **semigrupos** e os sistemas dinâmicos não autônomos, denominados **processos de evolução**.

Os semigrupos são os sistemas que satisfazem

$$S(t,s) = S(t-s,0) \quad \text{para quaisquer} \quad t \geq s.$$

Neste caso, se definirmos $T(t) = S(t,0)$ para cada $t \geq 0$ temos:

1. $T(0) = I$, onde I é a identidade em X;

2. $T(t)T(s) = T(t+s)$ para todos $t,s \geq 0$;

3. A aplicação $[0,\infty) \times X \ni (t,x) \mapsto T(t)x \in X$ é contínua.

E assim, a família $\{T(t)\colon t \geq 0\}$ com as propriedades anteriores é chamada de **semigrupo (contínuo)**. Além disso, pode se notar que a partir do semigrupo contínuo $\{T(t)\colon t \geq 0\}$, a família $\{S(t,s)\colon t \geq s\}$ dada por $S(t,s) = T(t-s)$ para todos $t \geq s$, define um sistema dinâmico autônomo.

Vale ressaltar que em um sistema dinâmico autônomo, a evolução do estado x ocupado em um instante s para o estado $S(t+s,s)x$ ocupado em um instante $t+s$ não depende de s, mas depende apenas de t.

Os sistemas dinâmicos são comumente associados às equações diferenciais, podendo ser elas ordinárias, parciais, funcionais ou de forma geral qualquer equação diferencial cuja solução satisfaça as condições que geram um sistema dinâmico. Assim, para que possamos trabalhar com modelos mais amplos, tomaremos o conjunto X como um espaço métrico ou, quando possível, um espaço de Banach, que pode ou não ter dimensão infinita.

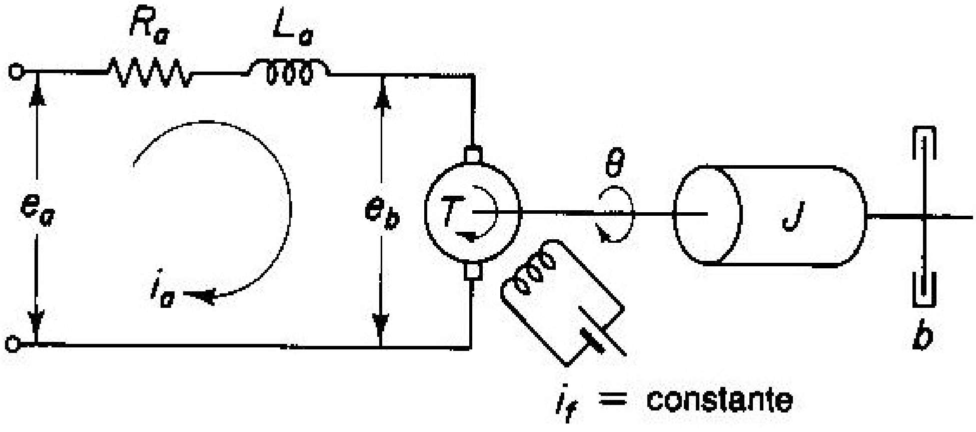
São exemplos de um sistema dinâmico: os movimentos de um pêndulo, um veículo, um satélite, o de crescimento de uma população de microorganismos, a variação do preço de um produto, entre outros. E as áreas de aplicação são indústrias de várias naturezas, medicina (por exemplo, para estudar o comportamento de uma certa epidemia), bioengenharia, economia, etc.

De modo a facilitar nossa compreensão, suponhamos que, em cada instante de tempo $s = 0,1,2,\ldots$, os "dados mais importantes" do nosso objeto de estudos são escritos na forma de um vetor $x(s)$. Se estes valores, no instante $s+1$ são dados como uma função dos valores no instante s, então o que estudamos é um sistema. Logo, um sistema dinâmico é tudo o que pode ser descrito por uma equação da forma

$$x(s+1) = f(x(s),u(s),s,\ldots) \quad s = 0,1,2,\ldots$$

onde s representa o "tempo (instante)", x o estado e u a entrada.

Apresentando uma situação para exemplificar, digamos que um motor elétrico, como o esquematizado abaixo, tenha uma certa tensão aplicada v, que passe por ele uma corrente elétrica i e que a velocidade angular do eixo é w. A partir dessas informações, podemos descrever o comportamento desse motor fazendo $x = (i,w)$ e $u = v$, sendo x um vetor. Assim, obtemos uma equação da forma $x(s+1) = f(x(s),v(s),s,...)$ que será nosso sistema dinâmico.



Quezia Cristiane de Oliveira Maia Carvalho

Uberlândia-MG, 29 de agosto de 2022.

Capítulo 1

Atratores para semigrupos

Para dar início ao nosso estudo de semigrupos assim como a busca por condições que garantam a existência de seu atrator global, antes de mais nada definiremos de forma geral um sistema dinâmico com suas propriedades, além de introduzirmos um exemplo para maior domínio do assunto.

Cabe ressaltar que o atrator global é um objeto que capta o comportamento assintótico de sistemas autônomos, isto é, desejamos observar o limite do comportamento de tais sistemas a medida que o tempo t cresce.

Definição 1.1: Sejam X um espaço métrico e $C(X)$ o conjunto das funções contínuas de X em X. Um **sistema dinâmico** em X é uma família $\{S(t,s) \colon t \geq s\} \subset C(X)$ satisfazendo:

1. $S(t,t)x = x$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in X$;
2. $S(t,\sigma) \circ S(\sigma,s) = S(t,s)$ para todo $t \geq \sigma \geq s$;
3. A aplicação $\{(t,s,x) \in \mathbb{R}^2 \times X \colon t \geq s\} \ni (t,s,x) \mapsto S(t,s)x \in X$ é contínua.

Exemplo 1.2: Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \quad t > s \\ x(s) = x_s \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $f \colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua e localmente Lipschitz contínua na segunda variável. Segundo essas condições e a teoria de equações diferenciais ordinárias, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.3: *Para cada $x_s \in \mathbb{R}^n$ e $s \in \mathbb{R}$, existem $\tau > s$ e uma função diferenciável contínua $\xi \colon [s,\tau) \to \mathbb{R}^n$ tal que $\xi(s) = x_s$ e $\dot{\xi}(t) = f(t,\xi(t))$ para todo $t \in (s,\tau)$. Esta função é chamada de solução do problema de valor inicial* (1.1)*. Além disso, valem as seguintes propriedades:*

(1) *(Unicidade da solução) Se existem σ, s com $\sigma > s$ e uma função diferenciável contínua $\eta \colon [s,\sigma) \to \mathbb{R}^n$ tais que $\eta(s) = x_s$ e $\dot{\eta}(t) = f(t,\eta(t))$ para todo $t \in (s,\sigma)$, então $\xi(t) = \eta(t)$ para todo $t \in [s, \min\{\sigma,\tau\})$;*

(2) *(Solução maximal) Existem* $\tau(s,x_s) > s$ *e uma solução* $x(\cdot,s,x_s)\colon [s,\tau_{s,x_s}) \to \mathbb{R}^n$ *de* (1.1) *tais que ou* $\tau(s,x_s) = \infty$ *ou* $\tau(s,x_s) < \infty$ *e*

$$\limsup_{t\to\tau(s,x_s)} \|x(t,s,x_s)\| = \infty,$$

e esta solução será chamada de ***solução maximal*** *de* (1.1)*;*

(3) *(Continuidade da solução) Definindo* $E = \{(t,s,x) \in \mathbb{R}^{n+2}\colon s \leq t < \tau(s,x)\}$*, a aplicação*

$$E \ni (t,s,x_s) \mapsto x(t,s,x_s) \in \mathbb{R}^n$$

é contínua.

Voltando ao Exemplo 1.2, supondo que exista uma constante $M > 0$ tal que

$$f(t,x)\cdot x < 0 \quad \text{para todos} \quad \|x\| \geq M \quad \text{e} \quad t \in \mathbb{R}$$

e se $x(\cdot) = x(\cdot,s,x_s)\colon [s,\tau(s,x_s)) \to \mathbb{R}^n$ é a solução maximal de de (1.1), temos:

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 = 2f(t,x(t))\cdot x(t).$$

Logo, pelo Teorema 1.3, $\tau(s,x_s) = +\infty$ para quaisquer $s \in \mathbb{R}$ e $x_s \in \mathbb{R}^n$. Assim, podemos definir $S(t,s)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $t \geq s$ por

$$S(t,s)x_s = x(t,s,x_s), \quad x,s \in \mathbb{R}^n.$$

Portanto, a única condição que precisamos analisar para concluir que $\{S(t,s)\colon t \geq s\}$ é um sistema dinâmico, sendo $X = \mathbb{R}^n$, é a condição (2) da Definição 1.1. A verificação dessa tal condição segue da unicidade da solução de (1.1) dada no Teorema 1.3, tendo em vista que $\xi(t) = x(t,\sigma,x(\sigma,s,x_s))$ e $\eta(t) = x(t,s,x_s)$ são duas soluções de

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \\ x(\sigma) = x(\sigma,s,x_s) \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Quando $f(t,x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, isto é, quando f não depende de t, então $[0,\infty) \ni t \mapsto x(t+\tau,\tau,x_0)$ e $[0,\infty) \ni t \mapsto x(t,0,x_0)$ são ambas soluções de

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x) \quad x > 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

e nesta situação, a família $\{T(t)\colon t \geq 0\}$ definida por $T(t)x_0 = x(t,0,x_0)$ para cada $t \geq 0$ forma um semigrupo contínuo de operadores em $X = \mathbb{R}^n$.

Observação 1.4: Quando f é uma função que depende de t e não só de x não podemos garantir que a família $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ definida pela solução forma um semigrupo contínuo de operadores em $\mathbb{R}^n$.

Após a colocação desse exemplo, podemos então partir para o objetivo principal dessa seção que é apresentar os semigrupos e as características que os tornam capaz de possuir um atrator global.

1.1 Semigrupos

Sejam X um espaço métrico (que pode ser chamado de **espaço de fase do semigrupo**) munido da métrica $d\colon X \times X \mapsto [0,\infty)$, $C(X)$ o conjunto das transformações contínuas de X em X e usando $\mathbb{T}$ para denotar o conjunto dos números inteiros ou dos números reais ($\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{T} = \mathbb{R}$), teremos os subconjuntos $\mathbb{T}^+ = \{t \in \mathbb{T}\colon t \geq 0\}$, $\mathbb{T}^- = \{t \in \mathbb{T}\colon t \leq 0\}$, $\mathbb{T}_t^- = t + \mathbb{T}^-$ e $\mathbb{T}_t^+ = t + \mathbb{T}^+$, podemos definir:

Definição 1.5: Um semigrupo é uma família $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\} \subset C(X)$ que satisfaz:

1. $T(0) = I$, onde I é a identidade em X,
2. $T(t+s) = T(t)T(s)$ para quaisquer $t,s \in \mathbb{T}^+$,

Diremos que um semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é **fortemente contínuo** se

3. A aplicação $\mathbb{T}^+ \times X \ni (t,x) \mapsto T(t)x \in X$ é contínua.

Observação 1.6: Quando $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, todo semigrupo é um semigrupo fortemente contínuo, pois a terceira condição na definição anterior é automaticamente satisfeita na topologia discreta. Além disso, como $T(n) = T(1)^n$, se escrevermos $T = T(1)$, o semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{Z}^+\}$ pode ser escrito na forma $\{T^n\colon n \in \mathbb{Z}^+\}$ e será visto como a família de operadores $\{T^n\colon n \in \mathbb{N}\} \subset C(X)$.

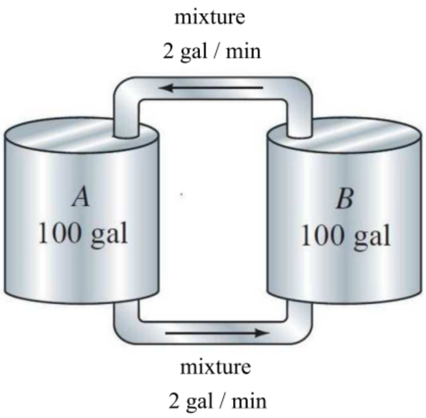
Ao longo desse trabalho iremos considerar apenas os semigrupos fortemente contínuos, os quais diremos simplesmente semigrupos.

Vejamos um exemplo de sistema dinâmico autônomo gerado por um sistema de equações lineares.

Exemplo 1.7 (ZILL 2011 [26], [27], adaptado): Dois tanques A e B estão preenchidos com 100 galões de salmoura cada um. Inicialmente, 100 libras (lb) de sal são dissolvidas na solução do tanque A e 50 libras (lb) de sal dissolvidas na solução do tanque B. Então o sistema é fechado e, depois de bem misturado, o liquido é bombeado somente entre os tanques, como mostra a Figura 1.1 abaixo.

A partir do problema dado, vamos construir um modelo matemático que nos permita estimar a quantidade de libras de sal $x(t)$ e $y(t)$ no instante t presente nos tanques A e B, respectivamente, levando em consideração que para determinar as concentrações das substâncias presentes no processo, teremos que construir um sistema dinâmico (autônomo nesse caso, pois veremos que as equações envolvidas não dependem de t).

Para criar nosso modelo matemático, igualaremos a *taxa de entrada da substância* em cada etapa do processo com a *taxa líquida de saída* da substância, quando esta é transferida. Assim, as equações



Fonte: Zill (2011, p. 115).

Figura 1.1: Tanque Misturador Bifásico

que irão compor nosso sistema serão da seguinte forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = \text{taxa de entrada - taxa de saída} \tag{1.2}$$

onde x_i são as variáveis do sistema com $i = \{1, 2\}$.

Dessa maneira, analisando o tanque A, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = (2gal/min)\cdot(\frac{y}{100}lb/gal) - (2gal/min)\cdot(\frac{x}{100}lb/gal) \\ \frac{dx}{dt} = \frac{2y}{100} - \frac{2x}{100}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

onde a concentração de sal no tanque A é $\frac{x(t)}{100}$ lb/gal e percebemos que o cano inferior transfere a mistura do tanque A para o B a uma taxa de $\frac{2x}{100}$ lb/min e o cano superior transfere de B para A a uma taxa de $\frac{2y}{100}$ lb/min.

Analisando o tanque B, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = (2gal/min)\cdot(\frac{x}{100}lb/gal) - (2gal/min)\cdot(\frac{y}{100}lb/gal) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{2x}{100} - \frac{2y}{100}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

onde o tanque B possui uma concentração de sal de $\frac{y}{100}$ lb/gal, transfere a mistura de B para A a uma taxa de $\frac{2y}{100}$ lb/min pelo cano superior e recebe a mistura do tanque A a uma taxa de $\frac{2x}{100}$ lb/min pelo cano inferior.

Sendo assim, a partir da equações (1.3) e (1.4), temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{2y}{100} - \frac{2x}{100} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{2x}{100} - \frac{2y}{100} \end{cases}$$

que resulta em

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{x}{50} + \frac{y}{50} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x}{50} - \frac{y}{50} \end{cases} \tag{1.5}$$

Chegamos a um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem cuja solução gera um sistema dinâmico contínuo, uma vez que as funções são ambas contínuas. Essa solução que buscamos representará o modelo matemático que descreve a quantidade de sal nos tanques A e B no instante t, como queríamos.

Para encontrar tal solução podemos aplicar o método dos autovalores e autovetores para sistemas lineares de EDOs. Para isso, devemos encontrar os autovalores λ e os autovetores C que satisfazem a equação $(C - \lambda I)V = 0$, onde V é a matriz composta pelos coeficientes do sistema (1.5).

Como somos muito bem familiarizados com o método usado para encontrar as soluções desse tipo de EDO, omitiremos essa parte, assumindo que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\frac{1}{25}$ e seus autovetores associados são $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $V_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, respectivamente.

Temos então as seguintes informações:

$$V = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{-1}{50} & \frac{1}{50} \\ \frac{1}{50} & \frac{-1}{50} \end{bmatrix}$$

e ainda do sistema 1.5, temos:

$$\dot{V} = CV \quad \Rightarrow \quad V = e^{Ct}$$

Portanto, temos a seguinte solução geral:

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{0t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-\frac{1}{25}t}$$

que equivale a

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-0,04t}$$

Logo, se consideramos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{2y}{100} - \frac{2x}{100} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{2x}{100} - \frac{2y}{100} \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0), x_0, y_0 \in \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

a solução do PVI é dada por

$$X(t) = \left(\frac{x_0 + y_0}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{y_0 - x_0}{2}\right) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-0,04t}$$

e a família $T: X \to X$ dada por

$$T(t)(x,y) = \left(\frac{x+y-[y-x]e^{-0{,}04t}}{2}, \frac{x+y+[y-x]e^{-0{,}04t}}{2} \right)$$

define um semigrupo em $X = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Apresentamos a seguir algumas definições importantes.

Definição 1.8: Sejam $\{T(t): t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo e $B \subset X$ um subconjunto de X. Definimos:

1. Para cada $t \in \mathbb{T}$, a **imagem** de B sob $T(t)$ é dada por

$$T(t)B = \{T(t)x: x \in B\}.$$

2. A **órbita positiva** de B é

$$\gamma^+(B) = \bigcup_{t \in \mathbb{T}^+} T(t)B.$$

3. Para $t, t' \in \mathbb{T}^+$ com $t < t'$, a **órbita parcial** de B entre t e t' é

$$\gamma^+_{[t,t']}(B) = \bigcup_{t \leq s \leq t'} T(s)B.$$

4. Para cada $t \in \mathbb{T}^+$, a **órbita de** B **começando em** t (ou órbita de $T(t)B$) será

$$\gamma^+_t(B) = \bigcup_{s \in \mathbb{T}^+} T(s+t)B = \bigcup_{s \in \mathbb{T}^+_t} T(s)B.$$

O conjunto ω-limite, definido logo abaixo, será um objeto fundamental para o estudo do comportamento assintótico de um semigrupo, pois este é o conjunto das interseções das órbitas de B começando em t, ou seja, onde a órbita de B se acumula.

Definição 1.9: Para $B \subset X$, o conjunto ω**-limite** de B é definido por

$$\omega(B) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} \overline{\gamma^+_t(B)}.$$

Definição 1.10: Dizemos que uma função $\xi: \mathbb{T} \to X$ é uma **solução global** para o semigrupo $\{T(t): t \in \mathbb{T}^+\}$ se vale que

$$\xi(t+s) = T(t)\xi(s), \text{ para quaisquer } t \in \mathbb{T}^+ \text{ e } s \in \mathbb{T}.$$

Definição 1.11: Uma **solução para trás** de $\{T(t): t \in \mathbb{T}^+\}$ é uma função $\xi: \mathbb{T}^- \to X$ que satisfaz

$$\xi(t+s) = T(t)\xi(s), \text{ para quaisquer } s \in \mathbb{T}^- \text{ e } t \in \mathbb{T}^+, \text{ com } t+s \in \mathbb{T}^-.$$

Observação 1.12: Sobre as definições acima, podemos ressaltar:

1. Se ξ é uma solução para trás (global) de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e $\xi(0) = x$, diremos que ξ é uma solução para trás (global) que passa pelo ponto x ou simplesmente uma solução para trás (global) por x.
2. Uma solução global constante será chamada de solução estacionária de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e o seu valor será chamado de ponto de equilíbrio, ponto fixo ou ponto estacionário do semigrupo.
3. Como $T(t)$ não é necessariamente injetora para cada $t \in \mathbb{T}^+$, se existir uma solução para trás (ou global) por x, ela pode não ser única.

Exemplo 1.13: Considere o semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Se $\mathbb{T}^+ = \mathbb{N}$ e $T = T(1)$, então a solução por x passa a ser a solução do problema discreto de valor inicial

$$\begin{cases} x_{n+1} = Tx_n, \, n \in \mathbb{N}, \\ x_0 = x. \end{cases}$$

A proposição a seguir nos dá algumas propriedades das soluções para trás e global.

Proposição 1.14: *Tomando $\xi\colon \mathbb{T} \to X$ e $x \in X$, são válidas as seguintes afirmações:*

1. *Se ξ é uma solução para trás de $\{T(t)\colon\; t \in \mathbb{T}^+\}$ por x e*

$$\eta(t) = \begin{cases} \xi(t), \; t \in \mathbb{T}^-, \\ T(t)x, \; t \in \mathbb{T}^+, \end{cases}$$

   então η é uma solução global de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ por x.

2. *Se ξ é uma solução global de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ por x, então*

$$\xi(t) = T(t)x, \text{ para todo } t \in \mathbb{T}^+.$$

3. *Se ξ é uma solução para trás de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ por x e $T(t)$ é injetora para cada $t \in \mathbb{T}^+$, então ξ é única, ou seja, se η é outra solução para trás de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ por x, então $\eta(t) = \xi(t)$ para todo $t \in \mathbb{T}^-$.*

Apresentamos uma caracterização do conjunto ω-limite e que nos auxiliará amplamente nas demonstrações dos resultados virão a seguir.

Teorema 1.15: *Se $B \subset X$, então o conjunto $\omega(B)$ é fechado e pode ser caracterizado por*

$$\omega(B) = \{y \in X\colon \exists \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+ \text{ e } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B \text{ tais que } t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \text{ e } y = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n\}.$$

Demonstração. Sejam $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo e $B \subset X$. Seja $y \in \omega(B)$, então $y \in \bigcap_{t\in\mathbb{T}^+} \overline{\gamma_t^+(B)}$. Logo, $y \in \overline{\gamma_t^+(B)}$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$, ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma sequência $\{y_k^n\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \gamma_n^+(B)$ tal que $y_k^n \xrightarrow{k\to\infty} y$. Agora, como $y_k^n \in \gamma_n^+(B)$ para todo $n,k \in \mathbb{N}$, existem $\{x_k^n\}_{n,k\in\mathbb{N}} \subset B$ e $\{q_k^n\}_{n,k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$ tais que

$$y_k^n = T(n+q_k^n)x_k^n.$$

Assim, se $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$, existe $k(n,\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k(n,\varepsilon) \Rightarrow d(y_k^n, y) = d(T(n+q_k^n)x_k^n, y) < \varepsilon.$$

Definimos então $t_n = n + q^n_{k(n,\frac{1}{n})}$ e $x_n = x^n_{k(n,\frac{1}{n})}$, logo

$$d(T(t_n)x_n, y) < \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Portanto $y = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n, t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ e $x_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, tomemos $y \in X$ e sequências $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$, tais que $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ e $y = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$. Logo, fixando $\tau \in \mathbb{T}^+$ temos $\{T(t_n)x_n\}_{t_n\geq\tau} \subset \gamma_\tau^+(B)$ e $y \in \overline{\gamma_\tau^+(B)}$. Portanto $y \in \omega(B)$, como queríamos.

□

Como desejamos estudar o comportamento assintótico dos semigrupos, introduziremos o conceito de semidistância de Hausdorff que usaremos para "medir" a proximidade entre objetos relacionados à dinâmica do sistema, como a atração, absorção e invariância sob a ação de um semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Definição 1.16: Dados A e B subconjuntos não vazios de X, a **semidistância de Hausdorff** de A até B é o número real não negativo $\operatorname{dist}_H(A,B)$ assim obtido:

$$\operatorname{dist}_H(A,B) = \sup_{x\in A} \inf_{y\in B} d(x,y).$$

Observação 1.17: Quando $A = \{a\}$ é um conjunto unitário, simplificaremos a notação escrevendo $d(a,B)$ ao invés de $\operatorname{dist}_H(\{a\},B)$, uma vez que $d(a,B)$ se reduz à distância usual de um ponto a um conjunto, isto é,

$$d(a,B) = \inf_{b\in B} d(a,b).$$

Além disso, a semidistância de Hausdorff não é comutativa, isto é, $\operatorname{dist}_H(A,B) \neq \operatorname{dist}_H(B,A)$ em geral. Por exemplo, se $A = [0,2]$ e $B = [1,4]$ então $\operatorname{dist}_H(A,B) = 1$ e $\operatorname{dist}_H(B,A) = 2$.

Não é via de regra que se a semidistância de Hausdorff $\operatorname{dist}_H(A,B) = 0$ então $A \cap B \neq \emptyset$. Por exemplo, se $A = \mathbb{Q} \cap (0,1)$ e $B = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0,1)$ então $\operatorname{dist}_H(A,B) = 0$ mas $A \cap B = \emptyset$.

Proposição 1.18: *Sejam A e B dois subconjuntos não-vazios de X, então* $\operatorname{dist}_H(A,B) = 0$ *se, e somente se,* $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Demonstração. Suponha que $\operatorname{dist}_H(A,B) = 0$. Então, tomando $a \in A$ arbitrário, temos $d(a,B) = 0$.

Assim, da definição de ínfimo, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um ponto $a_n \in B$ tal que $d(a,a_n) < \frac{1}{n}$. Logo $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ e, portanto $a \in \overline{B}$. Logo, $A \subset \overline{B}$, e assim, $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Agora, suponha que $\overline{A} \subset \overline{B}$. Pela definição, é suficiente provar que $d(x,B) = 0$, para todo $x \in A$. Logo, se $x \in A$ então

$$0 = d(x,A) = d(x,\overline{A}) \geq d(x,\overline{B}) = d(x,B),$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Uma vez definida a semidistância de Hausdorff podemos dar sentido aos conceitos de atração e absorção.

Definição 1.19: Sejam $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X e $A,B \subset X$. Diremos que A **atrai** B sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ se

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}_H(T(t)B,A) = 0.$$

Além disso, se existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t)B \subset A$ para todo $t \geq t_0$ então diremos que A **absorve** B sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Definição 1.20: Dados $C \subset X$ e $r > 0$, definimos a r-**vizinhança** de C, denotada por $\mathscr{O}_r(C)$, como a união de todas as bolas abertas centradas em pontos de C e raio r, isto é,

$$\mathscr{O}_r(C) = \bigcup_{a\in C} B(a;r) = \{x \in X\colon d(x,C) < r\}.$$

Observação 1.21: Se A absorve B sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, então A atrai B sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, porém a recíproca não é verdadeira. De fato, tomando o semigrupo $T(t)x_0 = x_0e^{-t}$ em $\mathbb{R}$, $A = \{0\}$ e $B = [-1,1]$, é fácil ver que A atrai B. Porém, fixando $x_0 = 1$, é fácil ver que não existe $t \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t)x_0 = e^{-t} = 0$. Portanto A não absorve B.

Por outro lado, a partir da definição de $r-$vizinhança, podemos deduzir que um subconjunto B é atraído por um subconjunto A se, e somente se, para todo $r > 0$ existe $\tau = \tau(r,B) \geq 0$ de modo que

$$T(t)B \subset \mathscr{O}_r(A),\ \forall t \geq \tau, \tag{1.6}$$

isto é, $\mathscr{O}_r(A)$ absorve B sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Definição 1.22: Diremos que $A \subset X$ é

(i) **positivamente invariante** por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ se $T(t)A \subset A$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$;

(ii) **negativamente invariante** por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ se $T(t)A \supset A$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$;

(iii) **invariante** por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ se $T(t)A = A$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, isto é, se A é positivamente e negativamente invariante por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Lema 1.23: *Um conjunto A é invariante sob $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ se, e somente se, consiste em uma coleção de órbitas globais.*

Demonstração. Se A é uma coleção de órbitas globais, então para qualquer $u_0 \in A$ existe uma solução global $u\colon \mathbb{R} \to X$ com $u(0) = u_0$. Assim, $T(t)u_0 = u(t) \in A$ para qualquer $t \geq 0$ (o que mostra que $T(t)A \subseteq A$) e $u_0 = T(t)u(-t)$ com $u(-t) \in A$ (que mostra que $A \subseteq T(t)A$). Segue que $T(t)A = A$ para todo $t \geq 0$, ou seja, que A é invariante.

Por outro lado, se A é invariante e $u_0 \in A$, podemos encontrar uma solução global $u\colon \mathbb{R} \to X$ tal que $u(0) = u_0$ e $u(t) \in A$ para todo $t \in \mathbb{R}$. De fato, para $t \geq 0$, nós definimos $u(t) = T(t)u_0$, que está em A, já que A é invariante. Para construir $u(t)$ para $t < 0$, usamos o processo de indução finita: como $T(1)A = A$, existe $u_{-1} \in A$ tal que $T(1)u_{-1} = u$. Seja $u(t) = T(t+1)u_{-1}$ para $-1 \leq t < 0$. Agora, existe um $u_{-2} \in A$ tal que $T(1)u_{-2} = u_{-1}$, e fazemos $u(t) = T(t+2)u_{-2}$ para $-2 \leq t < -1$, seguindo dessa maneira encontraremos solução global esperada $u(\cdot)$. $\square$

Definição 1.24: Sejam $x^* \in X$ e $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X. Se $T(t)x^* = x^*$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$ então diremos que x^* é um **ponto de equilíbrio** de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Observação 1.25: Podemos destacar os seguintes fatos sobre a definição de invariância:

1. Se x^* é um ponto de equilíbrio de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ então é claro que $A = \{x^*\}$ é um conjunto invariante por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.
2. Para $B \subset X$ e $t \in \mathbb{T}^+$, a órbita de B começando em t é positivamente invariante por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.
3. Se ξ é uma solução global de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e $B = \{\xi(t)\colon t \in \mathbb{T}\}$, então B é invariante por T.
4. Se ξ é uma solução para trás de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e $C = \{\xi(t)\colon t \in \mathbb{T}^-\}$, então C é negativamente invariante por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

1.2 Resultados de existência de atratores

Com os resultados vistos até aqui, já temos condições de inserir a noção de um atrator global e partir para o objetivo principal dessa seção que é desenvolver condições suficientes que nos garantam a existência desses atratores.

Definição 1.26: Um conjunto $\mathscr{A} \subset X$ é chamado de **atrator global** de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ se $\mathscr{A}$ é compacto, invariante por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e atrai subconjuntos limitados de X sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Proposição 1.27: *O atrator global de um semigrupo, quando existe, é único.*

Demonstração. Sejam $\mathscr{A}_1$ e $\mathscr{A}_2$ atratores globais para o semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, então como $\mathscr{A}_2$ é compacto, ele é um subconjunto limitado de X. Assim, dado que $\mathscr{A}_1$ é um atrator global, temos:

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}_H(T(t)\mathscr{A}_2, \mathscr{A}_1) = 0.$$

Agora, como $\mathscr{A}_2$ é invariante pelo semigrupo, então $T(t)\mathscr{A}_2 = \mathscr{A}_2$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Daí,

$$0 = \lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}_H(T(t)\mathscr{A}_2, \mathscr{A}_1) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}_H(\mathscr{A}_2, \mathscr{A}_1) = \mathrm{dist}_H(\mathscr{A}_2, \mathscr{A}_1).$$

Logo, segue da Proposição 1.18 que $\mathscr{A}_2 = \overline{\mathscr{A}_2} \subset \overline{\mathscr{A}_1} = \mathscr{A}_1$, pois $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ são fechados. De igual modo podemos mostrar que $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}_2$. Portanto, temos $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}_2$ e $\mathscr{A}_2 \subset \mathscr{A}_1$, o que mostra a igualdade dos dois conjuntos. $\square$

Teorema 1.28: *Se um semigrupo $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ em X possui atrator global $\mathscr{A}$, então $\mathscr{A}$ se expressa como a união de todos os subconjuntos invariantes limitados de X.*

Demonstração. Como $\mathscr{A}$ é limitado e invariante, então $\mathscr{A}$ está contido na união de todos os subconjuntos invariantes e limitados de X. Por outro lado, tomando B um subconjunto invariante e limitado de X, como $\mathscr{A}$ é o atrator global do semigrupo, $\mathscr{A}$ atrai B, ou seja, $\lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}_H(T(t)B, \mathscr{A}) = 0$. Porém, $T(t)B = B$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, logo $\mathrm{dist}_H(B, \mathscr{A}) = 0$ o que implica, pela Proposição (1.18), $B \subset \overline{B} \subset \overline{\mathscr{A}} = \mathscr{A}$, pois $\mathscr{A}$ é fechado. Portanto, $\mathscr{A}$ se expressa como a união dos subconjuntos invariantes limitados de X. $\square$

Como consequência desta proposição, temos o seguinte corolário que nos mostra uma caracterização dos atratores em termos de soluções do sistema.

Corolário 1.29: *Se um semigrupo $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ em X possui atrator global $\mathscr{A}$, então $\mathscr{A}$ é a união de todas as órbitas globais limitadas do semigrupo.*

Observação 1.30: Um resultado muito importante em espaços métricos que será usado na demonstração do Lema a seguir nos diz que se toda sequência que "converge para um conjunto compacto" possui uma subsequência que converge para algum elemento desse conjunto compacto. Mais precisamente, se $K \subset X$ é compacto e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em X com $d(x_n, K) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, então $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente com limite em K.

Lema 1.31: *Sejam $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X e $B \subset X$. Então $\omega(B)$ é positivamente invariante por $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Além disso, se $\omega(B)$ é compacto e atrai B sob a ação de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$, então $\omega(B)$ é invariante.*

Demonstração. Se $\omega(B) = \emptyset$ não há o que provar. Suponhamos então $\omega(B) \neq \emptyset$ e fixemos $t \in \mathbb{T}^+$. Do Teorema 1.15, se $y \in \omega(B)$, existem sequências $\{t_n\} \subset \mathbb{T}^+$ e $\{x_n\} \subset B$ tais que $T(t_n)x_n \to y$. Como $T(t)$ é contínua, segue que $T(t + t_n)x_n = T(t)T(t_n)x_n \to T(t)y$ e então $T(t)y \in \omega(B)$. Assim $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$ e como $t \in \mathbb{T}^+$ é arbitrário, $\omega(B)$ é positivamente invariante por $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Nos resta agora provar que se $\omega(B)$ é compacto e atrai B sob a ação de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$, então $\omega(B)$ é negativamente invariante por $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$:

Tomando $x \in \omega(B)$ fixo, existem sequências $t_n \to \infty$ e $\{x_n\} \subset B$ tais que $T(t_n)x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Como $t_n \to \infty$, para $t \in \mathbb{T}^+$ fixo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n > t$ para todo $n \geq n_0$. Logo, $T(t)T(t_n - t)x_n =$

$T(t_n)x_n \to x$ quando $n \to \infty$. Como $\omega(B)$ é compacto e atrai B temos:

$$d(T(t_n - t)x_n, \omega(B)) \leq \mathrm{dist}_H(T(t_n - t)B, \omega(B)) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Segue da Proposição 1.30 que $\{T(t_n - t)x_n\}$ tem uma subsequência convergente (que denotaremos por $\{T(t_n - t)x_n\}$). Se $T(t_n - t)x_n \to y$, temos $y \in \omega(B)$ e $T(t)y = x$. Isto mostra que $\omega(B) \subset T(t)\omega(B)$, o que conclui o resultado. □

Lema 1.32: *Sejam $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X e $B \subset X$. Se existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ é compacto, então $\omega(B)$ é não-vazio e compacto, $\omega(B)$ atrai B sob a ação de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e $\omega(B)$ é invariante por $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$.*

Demonstração. Para todo $t \in \mathbb{T}^+, t \geq t_0, \overline{\gamma_t^+(B)}$ é não vazio e compacto e como a família $\{\overline{\gamma_t^+(B)} \colon t \geq t_0\}$ tem a propriedade da interseção finita, temos $\omega(B) = \bigcap_{t \geq t_0} \overline{\gamma_t^+(B)}$ é não-vazio e compacto. Vejamos agora que $\omega(B)$ atrai B sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$:

Supondo que tal sentença seja falsa, existirão $\varepsilon_0 > 0$ e sequências $\{x_n\} \subset B$ e $\{t_n\} \subset \mathbb{T}^+$, com $t_n \to \infty$ tais que

$$d(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \varepsilon_0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{1.7}$$

Todavia, como $\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ é compacto e $\{T(t_n)x_n \colon n > n_1\} \subset \overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ para algum $n_1 \in \mathbb{N}$, existem subsequências $t_{n_j} \to \infty$ de $\{t_n\}, \{x_{n_j}\}$ de $\{x_n\}$ e $y \in X$ tais que $T(t_{n_j})x_{n_j} \to y$ quando $j \to \infty$. Assim, $y \in \omega(B)$. Mas (1.7) nos dá $0 = d(y, \omega(B)) \geq \varepsilon_0$, contradição! Logo $\omega(B)$ atrai B sob a ação de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Por fim, via Lema 1.31, segue a invariância de $\omega(B)$ por $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ o que conclui a demonstração. □

Proposição 1.33: *Dados um semigrupo $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e K um subconjunto compacto de X, se K atrai um conjunto compacto K_1, então $\gamma^+(K_1)$ é relativamente compacto e $\emptyset \neq \omega(K_1) \subset K$.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que

$$T(t)K_1 \subset \mathscr{O}_{\frac{\varepsilon}{2}}(K), \text{ para todo } t \geq t_0.$$

Como $\cup_{0 \leq t \leq t_0} T(t)K_1$ é compacto, então $\gamma^+(K_1) \cup K$ é totalmente limitado. Logo, $\overline{\gamma^+(K_1) \cup K}$ é compacto (pois é completo) e ainda podemos concluir que $\gamma^+(K_1)$ é relativamente compacto.

Note que, como $\overline{\gamma_t^+(K_1)}$ é compacto e não vazio para todo $t \in \mathbb{T}^+$ e $\gamma_t^+(K_1) \subset \gamma_s^+(K_1)$ para $s \leq t$, ou seja, a família $\{\overline{\gamma_t^+(K_1)}\}_{t \in \mathbb{T}^+}$ possui a propriedade da interseção finita, então

$$\omega(K_1) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} \overline{\gamma_t^+(K_1)} \neq \emptyset.$$

Por fim, dados $y \in \omega(K_1)$ e $\delta > 0$, existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que

$$y \in \overline{\gamma_{t_0}^+(K_1)} \subset \mathscr{O}_\delta(K),$$

isto é, $\mathrm{dist}_H(y, K) \leq \delta$ e como δ é arbitrário, $y \in K$ e segue o resultado. □

Proposição 1.34: *Sejam $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X e $K\subset X$ um compacto que atrai a si mesmo sob a ação de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$. Então $\omega(K)=\bigcap_{t\in\mathbb{T}^+}T(t)K$.*

Demonstração. Claramente $\bigcap_{t\in\mathbb{T}^+}T(t)K\subset\omega(K)$. Por outro lado, usaremos a Proposição 1.33 com $K_1=K$ para garantir que $\omega(K)\subset K$ e $\gamma^+(K)$ é relativamente compacta. Por fim, do Lema 1.32 temos $\omega(K)$ não vazio, compacto, invariante por $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ e atrai K sob a ação de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$. Portanto,

$$\omega(K)=T(t)\omega(K)\subset T(t)K \text{ para todo } t\in\mathbb{T}^+.$$

□

As principais propriedades do conjunto $\omega(B)$ necessárias ao estudo dos atratores globais sempre se verificam para os semigrupos assintoticamente compactos, nos quais focaremos a partir desse ponto.

Definição 1.35: Um semigrupo $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ em X é dito **assintoticamente compacto** se dado $B\subset X$ não vazio, fechado, limitado e positivamente invariante por $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$, existe um conjunto compacto $J\subset B$ que atrai B sob a ação de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$.

Lema 1.36: *Sejam $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ um semigrupo assintoticamente compacto em X e $B\subset X$ não vazio para o qual existe $t_0\in\mathbb{T}^+$ tal que $\gamma_{t_0}^+(B)$ é limitado. Então $\omega(B)$ é não vazio e compacto, $\omega(B)$ atrai B sob a ação de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ e $\omega(B)$ é invariante por $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$.*

Demonstração. Como $T(t)$ é contínua e $T(t)\gamma_{t_0}^+(B)\subset\gamma_{t_0}^+(B)$, então $T(t)\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}\subset\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ para todo $t\geq 0$. Logo, $\gamma_{t_0}^+(B)$ é não vazio, fechado, limitado e positivamente invariante por $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$. Já da compacidade assintótica de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$, existe um compacto $J\subset\gamma_{t_0}^+(B)$ que atrai $\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ sob a ação de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$, isto é,

$$\operatorname{dist}_H(T(t)\overline{\gamma_{t_0}^+(B)},J)\xrightarrow{t\to\infty}0,$$

então $\emptyset\neq\omega(B)\subset J$. Como $\omega(B)$ é fechado e J é compacto, obtemos $\omega(B)$ compacto.

Para finalizar, vejamos que $\omega(B)$ atrai B sob a ação de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$, para isso suponhamos por absurdo que $\omega(B)$ não atrai B, então existem $\varepsilon_0>0$ e sequências $t_n\to\infty$ e $\{x_n\}\subset B$ tais que $d(T(t_n)x_n,\omega(B))>\varepsilon_0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Além disso, da compacidade de J e da Observação 1.30, existem subsequências $\{x_{n_j}\}$ de $\{x_n\}$, $t_{n_j}\to\infty$ e $z\in J$ tais que $T(t_{n_j})x_{n_j}\to z$ quando $j\to\infty$. Assim, $z\in\omega(B)$ e $0=d(z,\omega(B))\geq\varepsilon_0$, contradição! Logo, $\omega(B)$ atrai B. Portanto, $\omega(B)$ é não vazio, compacto e atrai B sob a ação de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$. Por último, segue do Lema 1.31 a invariância de $\omega(B)$ por $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$. □

Definição 1.37: Um semigrupo $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ é dito **eventualmente limitado** se para cada limitado $B\subset X$ existe $t_B\in\mathbb{T}^+$ tal que $\gamma_{t_B}^+(B)$ é limitado. Diremos que $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ é **limitado** se $\gamma^+(B)$ é limitado sempre que B for limitado.

De maneira mais simples, o semigrupo será limitado quando órbita positiva de qualquer subconjunto limitado de X é um limitado de X e será eventualmente limitado quando para cada subconjunto limitado $B\subset X$ existe $t_B\in\mathbb{T}^+$ tal que a órbita de B começando em t_B é limitada em X.

Vale ressaltar que como subconjuntos limitados de X nem sempre são relativamente compactos, o fato de $T(t) \in \mathbb{C}(X)$ não implica que $T(t)$ leva limitados de X em subconjuntos limitados de X.

Proposição 1.38: *Seja $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X. Suponhamos que quando $\{x_n\} \subset X$ é limitada e $\{T(t_n)x_n\}$ é limitada com $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ implica que $\{T(t_n)x_n\}$ é relativamente compacta. Então $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto. Reciprocamente, se $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo assintoticamente compacto e eventualmente limitado, então para todas as sequências $\{x_n\} \subset X$ limitada e $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, temos $\{T(t_n)x_n\}$ relativamente compacto.*

Demonstração. Para a primeira parte, seja $B \subset X$ um conjunto fechado, limitado e não vazio tal que $T(t)(B) \subset B, \forall t \in \mathbb{T}^+$. Pelas hipóteses, é fácil ver que $\omega(B) \subset B$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B. Logo, $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto.

Por outro lado, suponha que $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo assintoticamente compacto e eventualmente limitado e sejam $\{x_n\}$ uma sequência limitada em X e $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. Então, existe $t_0 > 0$ tal que $B = \overline{\gamma^+_{t_0}(\{x_n\})}$ é um conjunto limitado. Assim, como B é positivamente invariante e $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto, existe um compacto $J \subset X$ que atrai B. Em particular $\{T(t_n)x_n\}$ converge para J quando n tende a infinito. Portanto, $\{T(t_n)x_n\}$ é relativamente compacto. □

Note que se um semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ em um espaço métrico X possui atrator global $\mathscr{A}$, então o semigrupo é necessariamente eventualmente limitado. De fato, seja $B \subset X$ limitado e fazendo $\varepsilon = 1$ na definição de atração teremos $\mathscr{O}_1(\mathscr{A})$ é limitado. Além do mais, como vimos em (1.6), existe $\tau = \tau(B)$ de modo que $\gamma^+_\tau(B) \subset \mathscr{O}_1(\mathscr{A})$, donde segue que $\gamma^+(B)$ é limitado. Em particular, se $\xi\colon \mathbb{R} \to X$ é uma solução global para o semigrupo, então o conjunto $\{\xi(t)\colon t \geq \tau\}$ é limitado, para todo $\tau \in \mathbb{R}$.

Definição 1.39: Um conjunto $B \subset X$ limitado que absorve pontos/limitados/compactos de X sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é chamado de **conjunto ponto/limitado/compacto dissipativo**.

Definição 1.40: Diremos que um semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é **ponto dissipativo (limitado dissipativo/compacto dissipativo)** se existir um conjunto não-vazio limitado $B \subset X$ que atrai pontos (subconjuntos limitados/subconjuntos compactos) de X sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Podemos livremente trocar "atrai" por "absorve" na definição acima sem mudar o significado da definição. Isto é, $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é ponto/limitado/compacto dissipativo se, e somente se, existe $B \subset X$ não-vazio limitado que absorve pontos/limitados/compactos de X sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Isso ocorre pois as noções de atração e absorção são equivalentes no sentido de que um semigrupo é dissipativo se, e somente se, existe um subconjunto limitado A que atrai cada um dos subconjuntos limitados de X. Com efeito, da definição da semidistância de Hausdorff, se D absorve cada um dos limitados de X, então ele atrai cada um dos subconjuntos limitados de X. Reciprocamente, supondo que A atrai todos os limitados e fixando um $\varepsilon > 0$ qualquer, é imediato de (1.6) que fazendo $D = \mathscr{O}_\varepsilon(A)$, vale que D é limitado e satisfaz a definição de dissipatividade, como queríamos.

1.2.1 Atrator global: caso ponto dissipativo

Nesta subseção apresentaremos um resultado de existência de atrator global para uma classe de semigrupos. Mais especificamente, veremos que todo semigrupo assintoticamente compacto, eventualmente limitado e ponto dissipativo possui atrator global.

Lema 1.41: *Seja $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo ponto dissipativo e assintoticamente compacto. Se a órbita positiva $\gamma^+(K)$ é limitada sempre que $K \subset X$ é compacto, então $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é compacto dissipativo.*

Demonstração. Como $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é ponto dissipativo, existe um conjunto não vazio e limitado B_0 que absorve pontos de X. Seja $U = \{x \in B_0\colon \gamma^+(x) \subset B_0\}$, como B_0 absorve pontos sob a ação do semigrupo, então U é não vazio. Ainda, vê-se claramente que $\gamma^+(U) = U$, U é limitado e absorve pontos sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. No mais, temos $T(t)\overline{\gamma^+(U)} \subset \overline{\gamma^+(U)}$ para $t \in \mathbb{T}^+$. Assim, da compacidade assintótica de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, existe um conjunto compacto K, com $K \subset \overline{\gamma^+(U)} = \overline{U}$ que atrai U sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Logo, K atrai pontos sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Além disso, reiteramos que existe uma vizinhança V de K tal que $\gamma_t^+(V)$ é limitada para algum $t \in \mathbb{T}^+$. Supondo que a afirmação é falsa, existirão sequências $x_n \in X, x_n \to y \in K$ e $t_n \to \infty$ tais que $\{T(t_n)x_n\}$ não é limitada. Consideremos $A = \{x_n\colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$. Logo, A é compacto e $\gamma^+(A)$ não limitada, o que contradiz a hipótese.

Agora, sejam V uma vizinhança de K e $t_V \in \mathbb{T}^+$ tal que $\gamma_{t_V}^+(V)$ é limitada. Como K atrai pontos sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e $T(t)$ é contínua, para cada $x \in X$, existe uma vizinhança W_x de x e $t_x > 0$ tal que $T(t)W_x \subset \gamma_{t_V}^+(V)$ para $t \geq t_x$, isto é, $\gamma_{t_V}^+(V)$ absorve uma vizinhança de x para cada $x \in X$. Portanto, segue facilmente que $\gamma_{t_V}^+(V)$ absorve subconjuntos compactos de X e que $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é compacto dissipativo. □

Teorema 1.42: *Seja $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo eventualmente limitado, ponto dissipativo e assintoticamente compacto. Então $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global $\mathscr{A}$.*

Demonstração. Como $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto, ponto dissipativo e eventualmente limitado segue do Lema 1.41 que $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é compacto dissipativo.

Seja C um conjunto compacto dissipativo para $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e considere $B = \{x \in C\colon \gamma^+(x) \subset C\}$. Assim B absorve subconjuntos compactos de X sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, $T(t)\overline{B} \subset \overline{B}$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, e como $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto, existe um conjunto compacto $K \subset \overline{B}$ que atrai B. Logo, K atrai subconjuntos compactos de X e o conjunto $\mathscr{A} = \omega(K)$ é não vazio, compacto e invariante sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Ademais, se $J \subset X$ é compacto então $\omega(J) \subset K$ e então $\omega(J) = T(s)\omega(J) \subset T(s)K$, para cada $s \in \mathbb{T}^+$. Segue da Proposição 1.34 que $\omega(J) \subset \bigcap_{s\in\mathbb{T}^+} T(s)K = \omega(K)$ e consequentemente $\omega(K)$ atrai J.

Seja B um subconjunto limitado de X, como $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado e assintoticamente compacto, segue do Lema 1.36 que $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$

e atrai B sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Assim, como $\omega(B)$ é compacto e invariante, do parágrafo anterior temos $\omega(B) \subset \mathscr{A}$. Portanto, $\mathscr{A}$ atrai B e enfim $\mathscr{A}$ é o atrator global de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. $\square$

A seguir veremos que vale a recíproca do teorema anterior, isto é, todo semigrupo que possui atrator global é assintoticamente compacto, ponto dissipativo e eventualmente limitado.

Lema 1.43: *Seja $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo limitado dissipativo. Então $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado.*

Demonstração. Como $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é limitado dissipativo, dado um conjunto limitado $B \subset X$, existe um subconjunto limitado B_0 que atrai B. Logo, existe $t_0 > 0$ tal que $\gamma_{t_0}^+(B) \subset \mathscr{O}_1(B_0)$, isto é, $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado. $\square$

Proposição 1.44: *Se $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ possui um atrator global então $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado, ponto dissipativo e assintoticamente compacto.*

Demonstração. Para mostrar que $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado e ponto dissipativo, do Lema 1.43, mostremos que $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é limitado dissipativo. Sejam $\mathscr{A}$ atrator global e $B_0 = \mathscr{O}_1(\mathscr{A})$. Como $\mathscr{A}$ atrai limitados, se $B \subset X$ é um conjunto limitado, existe $t_0 > 0$ tal que $T(t)B \subset B_0$ para todo $t \geq t_0$, isto é, $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é limitado dissipativo.

Agora, sejam $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ uma sequência limitada e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$, com $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $B = \{x_n\colon n \in \mathbb{N}\}$. Então, B é um conjunto não-vazio e limitado e

$$d_H(T(t_n)x_n, \mathscr{A}) \leq d_H(T(t_n)B, \mathscr{A}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Logo, $\{T(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é relativamente compacto e, consequentemente, $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto. $\square$

Corolário 1.45: *Um semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ possui atrator global se, e somente se, $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é ponto dissipativo, eventualmente limitado e assintoticamente compacto.*

1.2.2 Condições suficientes para a existência de atratores

Nesta subseção apresentaremos alguns resultados a fim de se garantir que um semigrupo tenha um atrator global.

Definição 1.46: Um semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é dito **eventualmente compacto** se dado $B \subset X$ limitado, existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $\overline{T(t_B)B}$ é compacto.

Note que se $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente compacto, então ele é condicionalmente eventualmente compacto (relembre esta definição através da Proposição 1.38).

Teorema 1.47: *Seja $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo fortemente contínuo, ponto dissipativo e eventualmente compacto. Então $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global $\mathscr{A}$.*

Demonstração. Como $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente compacto, segue da Proposição 1.38 que ele é assintoticamente compacto. Assim, mostraremos que o semigrupo é eventualmente limitado e por fim faremos uso do Teorema 1.42 para garantir a existência ao atrator global para $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Dado um conjunto limitado B, como $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente compacto, existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $\overline{T(t_B)B}$ é compacto. Logo, é necessário somente mostrar que a órbita de subconjuntos compactos de X são limitadas, pois $T(t)T(t_B)B \subset T(t)\overline{T(t_B)B}$. Seja $B_0 \subset X$ limitado que absorve pontos sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, então tomando $\mathscr{O}_\varepsilon(B_0)$ para algum $\varepsilon > 0$ no lugar de B_0, podemos assumir que B_0 é aberto.

Tomemos $K \subset X$ um compacto, então dado $x \in K$, existe $s_x \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(s)x \in B_0$ para todo $s \geq s_x$. Como B_0 é aberto, vem da continuidade de $T(s_x)$ que existe uma vizinhança W_x de x tal que $T(s_x)W_x \subset B_0$. Definindo $t_x = t_{B_0} + s_x$ obtemos $T(t_x)W_x \subset T(t_{B_0})B_0$.

Agora, da compacidade de K, existem $x_1, \cdots, x_p$ tais que $K \subset \cup_{i=1}^p W_{x_i}$. Tomemos $\tau = \tau(K) = \max\{t_{x_i} : 1 \leq i \leq p\}$ e por construção $K_0 = \overline{T(t_{B_0})B_0}$ e $K_1 = \gamma^+_{[0,\tau(K_0)]}(K_0)$ que são compactos em X.

Afirmação: $T(t)K_0 \subset K_1$ para $t \in \mathbb{T}^+$.

De fato, para $t \geq \tau(K_0)$, temos:

$$T(t)K_0 \subset \cup_{i=1}^p T(t - t_{x_i})T(t_{x_i})W_{x_i} \subset \cup_{i=1}^p T(t - t_{x_i})K_0.$$

Se $t - t_{x_i} \leq \tau(K_0)$, então $T(t - t_{x_i})K_0 \subset K_1$.

Caso contrário, temos:

$$T(t - t_{x_i})K_0 \subset \cup_{i=1}^p T(t - t_{x_i})W_{x_j} \subset \cup_{i=1}^p T(t - t_{x_i} - t_{x_j})K_0.$$

Se $t - t_{x_i} - t_{x_j} \leq \tau(K_0)$, temos $T(t - t_{x_i} - t_{x_j})K_0 \subset K_1$.

Do contrário, o processo se repete em um número finito de passos.

Assim, obtemos $T(t)K_0 \subset K_1$ para $t \geq \tau(K_0)$. Para $0 \leq t \leq \tau(K_0)$, temos $T(t)K_0 \subset K_1$ por definição de K_1 e a afirmação está provada.

Donde segue claramente que para $t \geq t_{B_0}$:

$$T(t)B_0 \subset T(t - t_{B_0})T(t_{B_0})B_0 \subset T(t - t_{B_0})K_0 \subset K_1.$$

Obtemos assim para um compacto K de X que $T(t)K \subset K_1$ para $t \geq \tau(K)$, uma vez que $T(t)K \subset \cup_{i=1}^p T(t - t_{x_i})T(t_{x_i})W_{x_i} \subset \cup_{i=1}^p T(t - t_{x_i})K_0 \subset K_1$.

Portanto, a órbita de um subconjunto compacto de X é limitada. $\square$

Este último teorema do capítulo é útil para obter a compacidade assintótica em espaços de Banach e é usado de forma recorrente em conjunto com a Fórmula da Variação das Constantes para Equações Parabólicas.

Teorema 1.48: *Seja X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$ e $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X.*

Suponha que para cada $t \in \mathbb{T}$ podemos escrever $T(t) = S(t) + K(t)$, com $S(t)$ e $K(t)$ satisfazendo:

(i) *Para cada conjunto limitado B em X, existe um $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $K(t)B$ é relativamente compacto para todo $t \geq t_B$;*

(i) *Para cada subconjunto limitado B de X, existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que*

$$s_B(t) = \sup_{x \in B} \|S(t)x\|_X < \infty \text{ para todo } t \geq t_B$$

e $s_B(t) \xrightarrow{t \to \infty} 0.$

Então $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto.

Além disso, se

(a) *$\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é limitado dissipativo*

ou

(b) *$\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é fortemente contínuo, ponto dissipativo e eventualmente limitado,*

então ele possui um atrator global $\mathscr{A}$.

Demonstração. Dados um conjunto B não vazio, fechado, limitado e positivamente invariante por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e $\varepsilon > 0$, tomando $s \in \mathbb{T}^+$ tal que $s \geq t_B$ e $s_B(s) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $K(s)B$ é relativamente compacto, existem $N = N(s,B)$ em $\mathbb{N}$ e $y_1, \cdots, y_N$ em $K(s)B$ tais que $K(s)B \subset \cup_{i=1}^N B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_i)$. Donde temos:

$$\omega(B) = \cap_{t \in \mathbb{T}^+} \overline{T(t)B} \subset \overline{T(s)B} \subset \overline{S(s)B} + \overline{K(s)B} \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) + \cup_{i=1}^N B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_i) \subset \cup_{i=1}^N B_{\varepsilon}(y_i).$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, $\omega(B)$ é totalmente limitado. Logo, $\omega(B)$ é fechado e totalmente limitado no espaço de Banach X e portanto compacto. Além disso, podemos ver facilmente que $\omega(B)$ é não vazio, pois para cada sequência $\{x_n\}$ em B e $t_n \in \mathbb{T}^+$ com $t_n \to \infty$, a sequência $\{T(t_n)x_n\} = \{K(t_n)x_n + S(t_n)x_n\}$ possui uma subsequência convergente. Agora, procedendo como na demonstração do Lema 1.32, concluímos que $\omega(B)$ atrai B sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, o que mostra que $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto. Finalmente, as demais afirmações seguem do Corolário 1.45. □

Um dos maiores empecilhos no estudo dos sistemas dinâmicos é conseguir uma boa descrição da estrutura geométrica de seu atrator global. Por isso, temos uma classe importante de sistemas dinâmicos autônomos chamados semigrupos gradientes, para os quais se conhece muito bem a estrutura dos atratores. Assim, para finalizar esse capítulo, deixamos um exemplo de um sistema gradiente.

Exemplo 1.49: Sejam $N \in \mathbb{N}$ e f uma função $C^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$ tal que para alguma constante $C > 0$ tem-se:

$$|\nabla f(x)| \leq C(1 + |x|) \text{ para qualquer } x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.8}$$

Consideremos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = -\nabla f(x), \ t > 0 \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{1.9}$$

onde $\nabla f(x)$ representa o gradiente da função f avaliado no ponto $x \in \mathbb{R}^N$.

Seja $\nabla f \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ um campo de vetores de classe $C^1(\mathbb{R}^N)$ que implica localmente Lipschitz, e levando em conta (1.8), teremos que o operador solução associado ao problema (1.9) define um semigrupo (de fato um grupo) no espaço métrico $\mathbb{R}^N$. Em outras palavras, definindo para $t \geq 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $T(t)x_0 := x(t, x_0)$, onde $x(\cdot, x_0) \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}^N$ é a única solução (em sentido clássico) do problema (1.9), resultando que $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo em $\mathbb{R}^N$.

Por fim, supondo que $\nabla f \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ possua somente um número finito de pontos de equilíbrio em $\mathbb{R}^N$, digamos, $\Psi := \{z_1^*, z_2^*, \cdots, z_n^*\}$.

Nestas condições, a função $f \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é denominada Função de Lyapunov para o semigrupo $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ com respeito ao conjunto Ψ.

Capítulo 2

Atratores para processos de evolução

Neste capítulo visamos introduzir o conceito de processos de evolução, também chamados sistemas dinâmicos não-autônomos. Além disso, vamos apresentar a teoria dos atratores para tais sistemas, agora vistos como atratores pullback. O nosso principal objetivo é estudar quais condições um processo de evolução deve satisfazer para garantir a existência de um atrator desse tipo.

Vale lembrar que o atrator global, cuja definição lembraremos a seguir, é um objeto que capta o comportamento assintótico de sistemas autônomos. O propósito deste capítulo é então apresentar o "atrator pullback", que será o tipo de atrator apropriado para uso com processos não autônomos, como veremos em breve. No mais, damos uma atenção à forma como esta definição não autônoma se relaciona com a autônoma.

A seguir, introduzimos um exemplo de um sistema dinâmico não autônomo que é uma particularização da equação da onda.

Exemplo 2.1: Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}$, um domínio aberto e conexo, limitado, com fronteira $\partial\Omega$ suave (de classe pelo menos $C^2(\mathbb{R})$) e $\tau \in \mathbb{R}$ um tempo inicial. Consideremos a seguinte equação diferencial parcial:

$$\varepsilon(t)u_{tt}(x,t) + \alpha u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + f(u(x,t)) = g(x),\ t > \tau$$

onde $u\colon \Omega \times [\tau,\infty) \to \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ é uma constante e $a,b\colon \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, sujeita às restrições:

1. $u(x,t) = 0$ para todos $x \in \partial\Omega$ e $t \in [\tau,\infty)$ (condição de fronteira de Dirichlet);

2. $u(x,\tau) = a(x)$ e $u_t(x,\tau) = b(x)$ (condições iniciais).

Tal problema é conhecido como **equação da onda com velocidade de propagação variável com o tempo**. Nitidamente, a dependência de t da função ε nos dá um caráter não autônomo a esta equação.

Cabe ressaltar que o coeficiente $\varepsilon(t)$ é uma função positiva decrescente que tende a zero para t suficientemente grande. Além disso, quando $\varepsilon(t) \equiv \varepsilon$ é uma constante positiva a equação se torna um processo autônomo, conhecido como **equação da onda amortecida**.

2.1 Processos de Evolução

Começamos esta seção com a definição precisa de um processo de evolução (ao qual chamaremos apenas de processo algumas vezes) e relembramos a definição de um semigrupo.

Recorde que a dinâmica ocorre em um espaço de fase X (espaço métrico) com uma métrica $d(\cdot,\cdot)\colon X\times X\to[0,\infty)$. Para mais, $\mathbb{T}$ denota $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$, $\mathbb{T}_t^+=\{s\in\mathbb{T}\colon s\geq t\}$, $\mathbb{T}_t^-=\{s\in\mathbb{T}\colon s\leq t\}$, $C(X)$ é o conjunto das transformações contínuas de X nele mesmo e $\mathscr{P}=\{(t,s)\in\mathbb{T}^2\colon t\geq s\}$.

Definição 2.2: Um **processo de evolução em** X é uma família de transformações $\{S(t,s)\colon (t,s)\in\mathscr{P}\}$ em $C(X)$ com as seguinte propriedades:

1. $S(t,t)=I$, para todo $t\in\mathbb{T}$,
2. $S(t,s)=S(t,\tau)S(\tau,s)$, para todo $t\geq\tau\geq s$,
3. $\mathscr{P}\times X\ni(t,s,x)\mapsto S(t,s)x\in X$ é contínua.

Além disso, se X é um espaço vetorial normado e $S(t,s)$ é linear para cada $(t,s)\in\mathscr{P}$ diremos que $\{S(t,s)\colon (t,s)\in\mathscr{P}\}$ é um processo de evolução linear.

O que podemos observar em um processo de evolução é que a transformação $S(t,s)$ no instante inicial s toma cada estado x do sistema e o evoluciona para o estado $S(t,s)x$ no tempo final t.

Ainda, dado um $\sigma\in\mathbb{T}$ fixo, o operador $S(\sigma+\tau,\tau)$ pode ser um operador distinto para cada valor de $\tau\in\mathbb{T}$. Assim, além do tempo decorrido σ, o instante inicial τ também pode representar um fator importante no nosso processo.

Os processos de evolução para os quais $S(t,s)=S(t-s,0)$ para todo $t\geq s$ são chamados **processos de evolução autônomos**, estes processos são tais que o tempo decorrido determina sua evolução.

Como visto no Capítulo 1, a família de operadores $\{T(t)\colon t\geq 0\}$ em $C(X)$ dados por $T(t):=S(t,0)$, $t\geq 0$ que satisfaz as propriedades

1. $T(0)=I$;
2. $T(t+s)=T(t)T(s)$, para todo $t,s\geq 0$;
3. $[0,\infty)\times X\ni(t,x)\mapsto T(t)x\in X$ é contínua.

é chamada de **semigrupo**.

Como também, dado um semigrupo $\{T(t)\colon t\geq 0\}$, a família $\{S(t,s)\colon (t,s)\in\mathscr{P}\}$ definida por $S(t,s)=T(t-s), t\geq s$ é um processo de evolução. Além disso, se X for um espaço vetorial normado e $T(t)$ um semigrupo tal que toda $T(t)$ é linear, então teremos que $\{T(t)\colon t\geq 0\}$ é um semigrupo linear.

Vale ressaltar que num processo de evolução autônomo $\{S(t,s)\colon (t,s)\in\mathscr{P}\}$, o comportamento das soluções quando t tende a infinito (*"dinâmica forwards"*), é o mesmo que o comportamento das soluções quando s tende a menos infinito (*"dinâmica pullback"*). No entanto, focaremos aqui na *dinâmica pullback* e em suas mais importantes propriedades, conforme descreveremos a seguir.

Para introduzir a noção de atrator para um processo de evolução, necessitamos que outros conceitos sejam levados em consideração. Assim, para começar, relembre que se $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo que possui um atrator global $\mathscr{A}$, então $\mathscr{A}$ é compacto, invariante e atrai subconjuntos limitados de X sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Uma caracterização desse atrator é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 2.3: *Se um semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ possui atrator global $\mathscr{A}$, então ele pode ser visto como*

$$\mathscr{A} = \{y \in X\colon \text{ existe uma solução global limitada } y\colon \mathbb{T} \to X \text{ com } y(0) = y\}. \tag{2.1}$$

Demonstração. A parte que qualquer $y \in \mathscr{A}$ está em uma solução global limitada é uma consequência do Lema 1.23 e do fato de $\mathscr{A}$ ser limitado. Por outro lado, se $y(\cdot)$ é uma solução global limitada, então $\mathscr{A}$ atrai $Y = \cup_{t\in\mathbb{T}} y(t)$. Como $y(0) = T(t)y(-t)$, segue que $\operatorname{dist}(y(0), \mathscr{A}) \leq \operatorname{dist}(T(t)Y, \mathscr{A})$ para qualquer $t \geq 0$ e assim $\operatorname{dist}(y(0), \mathscr{A}) = 0$. Portanto, como $\mathscr{A}$ é fechado segue que $y(0) \in \mathscr{A}$. $\square$

Na segunda parte da prova, usamos uma ideia que será fundamental para a definição de um atrator no caso não autônomo. Estudamos o comportamento em um tempo fixo (nesse caso $t = 0$) tomando um limite "pullback", dado por

$$y(0) = \lim_{t\to\infty} T(t)y(-t).$$

Ou seja, consideramos uma condição inicial cada vez mais no passado, na qual o semigrupo é capaz de atuar por intervalos de tempo cada vez maiores.

Cabe ainda ressaltar que, em geral, um subconjunto A de X não será fixado por um processo de evolução $\{S(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$. Por fim, a noção de invariância precisa ser enfraquecida para uma noção que nos permita construir soluções globais. Com isto, apresentamos a seguinte definição para fechar a seção.

Definição 2.4: Uma família $\{\mathscr{A}(t) \subset X : t \in \mathbb{T}\}$ é **invariante sob a ação de** $\{S(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$ se $S(t,s)\mathscr{A}(s) = \mathscr{A}(t)$ para todo $(t,s) \in \mathscr{P}$.

2.2 Construindo a definição de atrator

A fim de desenvolver uma noção adequada dos atratores para processos de evolução, enunciamos alguns exemplos que nos auxiliarão nesse propósito. Para isso, devemos levar em consideração as propriedades que um atrator deve conter. Como vimos no capítulo anterior, ele deve atrair os subconjuntos em algum sentido apropriado, ser único, conter uma dinâmica importante, além da definição se aplicar a uma ampla gama de exemplos e também é importante ter um atrator que seja muito menor que o todo espaço de fase. Vejamos alguns casos:

Exemplo 2.5: Considere os problemas de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha x(t) + t \\ x(s) = x_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} \dot{y} = -\alpha y(t) + \operatorname{sen}(t) \\ y(s) = y_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

cujas soluções são dadas, respectivamente, por

$$x(t,s,x_0) = \left(x_0 + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha}s\right)e^{-\alpha(t-s)} + \frac{1}{\alpha}t - \frac{1}{\alpha^2} \tag{2.4}$$

e

$$y(t,s;y_0) = \left(y_0 - \frac{1}{1+\alpha^2}[\alpha \operatorname{sen}(s) - \cos(s)]\right)e^{-\alpha(t-s)} + \frac{1}{1+\alpha^2}[\alpha \operatorname{sen}(t) - \cos(t)]. \tag{2.5}$$

Nessas condições, as famílias $\{S_i(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\} \subset \mathbb{C}(\mathbb{R})$, $i = 1,2$, tais que

$$S_1(t,s)x_0 = x(t,s,x_0) \text{ e } S_2(t,s)y_0 = y(t,s,y_0)$$

definem dois processos de evolução em $\mathbb{R}$.

Vamos então analisar a relevância do instante inicial s no estudo das propriedades assintóticas das soluções dos processos de evolução $\{S_i(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$, $i = 1,2$ dados acima:

Primeiramente, note que todas as soluções de (2.2) e (2.3) existem globalmente. No entanto, as soluções de (2.2) são ilimitadas (para frente e para trás), enquanto as soluções de (2.3) são limitadas (para frente). Em ambos os casos, é fácil de ver que nenhuma destas soluções converge para algum valor fixo e, além disso, não existe um subconjunto fixo (que independe de t) que é invariante e que atrai conjuntos limitados. Em (2.2), mesmo a presença do termo $-\alpha x(t)$ representando uma dissipação no sistema, a ideia de atração é perdida. Já em (2.3), o candidato natural $[-(1+\alpha^2)^{-1}, (1+\alpha^2)^{-1}]$ para conjunto atrator, apesar de atrair conjuntos limitados, não é um conjunto invariante. Portanto, não existe conjunto "atrator" no mesmo sentido do caso autônomo.

Por outro lado, ainda que todas as soluções explodam quando t tende a infinito, a influência dos termos de dissipação podem ser vistas no sentido de que todas as soluções de (2.2) se aproximam assintoticamente da solução $x(t) = \frac{t}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}$ quando $t \to \infty$, uniformemente para conjuntos limitados de condições iniciais, e as soluções de (2.3) se aproximam assintoticamente da solução $y(t) = \frac{1}{1+\alpha^2}[\alpha \operatorname{sen}(t) - \cos(t)]$, quando $t \to \infty$, novamente de maneira uniforme para conjuntos limitados de condições iniciais. De fato, basta ver que

$$\lim_{t\to\infty} |x(t,s,x_0) - x(t)| = \lim_{t\to\infty} |y(t,s,y_0) - y(t)| = 0$$

para quaisquer $s, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, sendo os limites uniformes para x_0, y_0 tomados em conjuntos limitados de $\mathbb{R}$.

Dessa maneira, vamos considerar as famílias

$$\left\{\mathscr{A}_1(t)=\frac{1}{\alpha}t-\frac{1}{\alpha^2}\right\}_{t\in\mathbb{R}} \text{ e } \left\{\mathscr{A}_2(t)=\frac{1}{1+\alpha^2}[\alpha\mathrm{sen}\,(t)-\cos(t)]\right\}_{t\in\mathbb{R}} \tag{2.6}$$

e fazer algumas observações:

Primeiramente, note que para cada $i=1,2$

$$S_i(t,s)\mathscr{A}_i(s)=\mathscr{A}_i(t), \text{ para quaisquer } (t,s)\in\mathscr{P},$$

isto é, a família $\{\mathscr{A}_i(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é invariante (em um certo sentido). Além disso, para todo conjunto limitado $B\subset\mathbb{R}$

$$\lim_{t\to\infty} d(S_i(t,s)B,\mathscr{A}_i(t))=0, \text{ para quaisquer } s\in\mathbb{R},$$

isto é, a família $\{\mathscr{A}_i(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ atrai conjuntos limitados.

Portanto, chamar a família $\{\mathscr{A}_i(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ de atrator global para o processo $\{S_i(t,s)\colon (t,s)\in\mathscr{P}\}$, $i=1,2$, nos parece, a primeira vista, algo bem coerente. Note que $\{\mathscr{A}_1(t)\colon t\in\mathbb{R}\}$ é um conjunto ilimitado enquanto $\{\mathscr{A}_2(t)\colon t\in\mathbb{R}\}$ é limitado, pois $\mathscr{A}_2(t)\in[-(1+\alpha^2)^{-1},(1+\alpha^2)^{-1}]$, para todo $t\in\mathbb{R}$.

O exemplo anterior pode nos sugerir uma primeira tentativa para definição de atrator no caso não-autônomo:

Tentativa de definição de atrator: *Uma família $\{\mathscr{A}(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ é um atrator para o processo de evolução $\{S(t,s)\colon (t,s)\in\mathscr{P}\}$ se $\mathscr{A}(t)$ for compacto para todo $t\in\mathbb{T}$, e a família $\{\mathscr{A}(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ é invariante e atrai conjunto limitados quando $t\to\infty$, isto é,*

$$\lim_{t\to\infty} d(S(t,s)B,\mathscr{A}(t))=0.$$

Contudo, uma família de conjunto satisfazendo as propriedades de atrator propostas acima existirá apenas em situações bem restritas. Vejamos um exemplo a seguir no qual a definição de atrator proposta não se parece adequada.

Exemplo 2.6: Considere a equação diferencial

$$\dot{x}=h(t)x-x^3 \tag{2.7}$$

onde $h\colon\mathbb{R}\to[0,1]$ é uma função continuamente diferenciável tal que $h(t)=0$ para $t\leq 0$ e $h(t)=1$ para $t\geq 1$.

Afirmamos que neste simples caso, o processo de evolução gerado não possui atrator de acordo com a definição acima. Isso se deve ao fato que a maior parte da dinâmica assintótica forwards se encontra associada à soluções que explodem em tempo finito para trás, ou seja, tais soluções tendem a infinito se considerado os tempos finitos para trás.

Logo, não poderemos adotar esta definição para o nosso atrator buscado, já que ela serviria apenas para uma pequena classe de processos com propriedades bem específicas, como por exemplo $\{S(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$ uniformemente assintoticamente compacto no sentido de [9].

Voltando ao Exemplo 2.5, podemos observar que a relação entre a condição inicial e os estados para valores de tempo muito grandes nas equações (2.2) e (2.3) é distinta (já que $\{\mathscr{A}_1(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$ é um conjunto ilimitado enquanto $\{\mathscr{A}_2(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$ é limitado), e portanto, podemos dizer que temos duas dinâmicas assintóticas distintas para cada uma das equações. No entanto, em ambos os casos, as famílias $\{\mathscr{A}_i(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, que atraem as soluções quando $t \to \infty$, também pode ser obtida como o "limite pullback"

$$\lim_{s\to-\infty} S_i(t,s)x,\, x \in \mathbb{R}.$$

Este limite pullback determina uma família de conjuntos com uma propriedade de atração e este fato será muito importante para a extensão do conceito de atração do caso autônomo para o caso não autônomo.

Novamente no Exemplo 2.5, podemos notar que as famílias $\{\mathscr{A}_i(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, $i = 1,2$, definidas em (2.6) satisfazem

$$\lim_{s\to-\infty} \sup_{x_0\in B} \operatorname{dist}(S_i(t,s)x_0, \mathscr{A}_i(t)) = 0,\, t \in \mathbb{R},\, B \subset \mathbb{R} \text{ limitado},\, i = 1,2 \tag{2.8}$$

isto é, a família $\{\mathscr{A}_i(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ "atrai pullback" (e uniformemente para condições iniciais em conjuntos limitados) soluções dos PVIs (2.2) e (2.3), $i = 1,2$.

O limite (2.8) nos apresenta uma noção diferente de atração a qual, juntamente com a noção de invariância, nos levará ao conceito de atrator pullback para os processos de evolução.

Por fim, ressaltamos que a atração pullback ($s \to -\infty$) e a atração forwards ($t \to \infty$) nem sempre estão ligadas uma a outra. Como por exemplo, na equação (2.7), em que a única solução global é $x = 0$ e o conjunto $\mathscr{A}(t)$ obtido como o limite pullback de conjuntos limitados é $\{0\}$. Ao passo que o conjunto $[-1,1]$ atrai subconjuntos limitados de $\mathbb{R}$ quando $t \to \infty$ e nenhum conjunto fechado menor que este tem esta propriedade (confira [6]; [7]).

2.3 Atratores Pullback

Para dar início a essa seção, apresentamos algumas definições e resultados importantes os quais nos darão condições suficientes para anunciar nossa tão esperada definição de um atrator pullback, além de sua relação com os atratores globais para semigrupos.

Definição 2.7: Dados um processo de evolução $\{S(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$ e um conjunto $B \subset X$, definimos:

1. Para cada $(t,s) \in \mathscr{P}$, a **imagem de B sob** $S(t,s)$ por

$$S(t,s)B = \{S(t,s)b\colon b \in B\}.$$

2. A **órbita de B a partir do instante** $s \in \mathbb{T}$ é dada por

$$\gamma^s(B) = \bigcup_{t \geq s} S(t,s)B.$$

3. A **órbita pullback de B no instante** $t \in \mathbb{T}$ é dada por

$$\gamma_p(B,t) = \bigcup_{s \leq t} S(t,s)B.$$

Definição 2.8 (Atração/Absorção pullback/invariância): Sejam $\{S(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$ um processo de evolução em X, $\{B(t)\}_{t\in\mathbb{T}} \subset X$ uma família de conjuntos em X e $t \in \mathbb{T}$.

1. Diremos que o conjunto $B(t)$ **atrai pullback** subconjuntos limitados de X no instante t sob a ação de $\{S(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$ se

$$\lim_{s\to-\infty} \mathrm{dist}_H(S(t,s)D, B(t)) = 0.$$

para cada subconjunto D de X limitado. Além disso, diremos que a família $\{B(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ atrai pullback subconjuntos limitados de X sob a ação de $\{S(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$ se $B(t)$ atrai pullback subconjuntos limitados de X no instante t sob a ação de $\{S(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$, para cada $t \in \mathbb{T}$.

2. Diremos que o conjunto $B(t)$ **absorve pullback** subconjuntos limitados de X no instante t sob a ação de $\{S(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$ se

$$\exists T = T(t,D) \leq t \text{ tal que } S(t,s)D \subset B(t), \forall s \leq T,$$

para cada subconjunto D de X limitado. Além disso, diremos que a família $\{B(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ absorve pullback subconjuntos limitados de X sob a ação de $\{S(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$ se $B(t)$ absorve pullback subconjuntos limitados de X no instante t sob a ação de $\{S(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$, para cada $t \in \mathbb{T}$.

3. Diremos que $\{B(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ é invariante pelo processo de evolução $\{S(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$ se

$$S(t,s)B(s) = B(t), \text{ para todo } (t,s) \in \mathscr{P}.$$

Precisamos destacar que nas definições acima o tempo final é mantido fixo à medida que o tempo inicial retrocede para $-\infty$. É importante perceber que isso não é o mesmo que voltar no tempo, pois aqui a evolução sempre vai para um instante futuro t partindo de um instante inicial s que tende a $-\infty$. (Veja [7]; [13]; [14]; [15]; [16]; [21]).

Definição 2.9: Seja $\{S(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$ um processo de evolução em um espaço métrico X. Diremos que uma família $\{\mathscr{A}(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ de subconjuntos compactos de X é um **atrator pullback** para $\{S(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$ se esta é invariante, atrai pullback subconjuntos limitados de X e é a família de conjuntos fechados minimal com a propriedade de atrair pullback subconjuntos limitados, isto é, se existe outra família $\{C(t)\colon t \in \mathbb{T}\}$ de conjuntos fechados que atrai pullback subconjuntos limitados de X, então $\mathscr{A}(t) \subseteq C(t)$, para todo $t \in \mathbb{T}$.

Observação 2.10: A minimalidade imposta na Definição 2.9 é uma condição adicional relativa à teoria de atratores para semigrupos. No entanto, ela é essencial para garantir a unicidade dos atratores pullback. A inclusão dessa exigência vem da necessidade de enfraquecer a propriedade de invariância, dada a natureza não autônoma dos processos de evolução e da possibilidade de os atratores pullback serem ilimitados em $-\infty$, isto é, $\cup_{s\leq t}\mathscr{A}(t)$ pode ser ilimitado, para todo $t\in\mathbb{T}$. No entanto, essa tal exigência de minimalidade pode ser excluída se tomarmos $\cup_{s\leq t}\mathscr{A}(t)$ ilimitada para todo $t\in\mathbb{T}$. Mesmo se $\{T(t)\colon t\geq 0\}$ é um semigrupo e $\{S(t,s)=T(t-s)\colon (t,s)\in\mathscr{P}\}$ seu processo de evolução autônomo associado, pode existir uma família $\{\mathscr{A}(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ de conjuntos compactos e invariantes que atraem pullback subconjuntos limitados e que não é minimal, conforme exemplo a seguir.

Exemplo 2.11: Seja $\{T(t)\colon t\geq 0\}$ um semigrupo em $\mathbb{R}$ tal que $T(t)x=e^{-t}x$ e considere o processo de evolução $\{S(t,s)\colon (t,s)\in\mathscr{P}\}$ dado por $S(t,s)x=T(t-s)x=e^{-(t-s)}x$, para todo $(t,s)\in\mathscr{P}$. Então, a família $\{[-e^{-t},e^{-t}]\}_{t\in\mathbb{R}}$ é invariante e atrai subconjuntos limitados de $\mathbb{R}$ e $[-e^{-t},e^{-t}]$ é compacto para cada $t\in\mathbb{T}$. No entanto, não minimal já que o conjunto $\{0\}$ atrai subconjuntos limitados para $t\in\mathbb{R}$.

Vejamos a seguir um exemplo que generaliza o Exemplo 2.5.

Exemplo 2.12: Considere a equação diferencial

$$\begin{cases}\dot{x}=-\alpha x(t)+f(t)\\ x(s)=x_0\end{cases}\tag{2.9}$$

cuja solução explícita é dada por

$$x(t)=e^{-\alpha(t-s)}x(s)+\int_s^t e^{-\alpha(t-r)}f(r)dr.\tag{2.10}$$

Assim, se

$$\lim_{s\to-\infty}\int_s^t e^{-\alpha(t-r)}f(r)dr$$

existir para todo $t\in\mathbb{R}$, então a família $\{\mathscr{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ tal que

$$\mathscr{A}(t)=\lim_{s\to-\infty}\int_s^t e^{-\alpha(t-r)}f(r)dr,\, t\in\mathbb{R}$$

é o atrator pullback para o processo de evolução gerado por (2.9). Vale destacar também que, se $x(t)$ for uma solução de (2.9) então

$$\begin{aligned}x(t)-\mathscr{A}(t)&=e^{-\alpha(t-s)}x(s)+\int_s^t e^{-\alpha(t-r)}f(r)dr-\lim_{s\to-\infty}\int_s^t e^{-\alpha(t-r)}f(r)dr\\ &=e^{-\alpha(t-s)}x(s)-\lim_{\sigma\to-\infty}\int_\sigma^s e^{-\alpha(t-r)}f(r)dr\\ &=e^{-\alpha(t-s)}\left[x(s)-\lim_{\sigma\to-\infty}\int_\sigma^s e^{-\alpha(s-r)}f(r)dr\right]\\ &=^{-\alpha(t-s)}[x(s)-\mathscr{A}(s)]\end{aligned}$$

e, portanto, a família $\{\mathscr{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, além de "atrair pullback", também "atrai forward".

No exemplo anterior vemos que a atração pullback e a atração forward são equivalentes, porém isso não ocorre em geral. No entanto, se a taxa de atração for uniforme (com no exemplo anterior), vale o seguinte resultado:

Proposição 2.13 (CHEBAN 2002 [7]): *Sejam $\{S(t,s)\colon (t,s)\in\mathscr{P}\}$ um processo de evolução em X, $\{\mathscr{A}(t)\}_{t\in\mathbb{T}}\subset X$ uma família de conjuntos invariantes e $B\subset X$ um conjunto limitado. Então*

$$\lim_{s\to\infty}\sup_{t\in\mathbb{R}}\operatorname{dist}(S(t,t-s)B,\mathscr{A}(t))=0$$

se, e somente se,

$$\lim_{s\to\infty}\sup_{t\in\mathbb{R}}\operatorname{dist}(S(t+s,t)B,\mathscr{A}(t+s))=0.$$

Vale lembrar, a partir de (2.1) que se um semigrupo possui um atrator global, então este é o conjuntos dos estados iniciais pelos quais se passa uma solução global limitada. Veremos que no caso não-autônomo valerá o mesmo para o atrator pullback quando $\cup_{t\in\mathbb{T}}\mathscr{A}(t)$ for um conjunto limitado. Neste caso teremos

$$\mathscr{A}(t)=\{\xi(t)\colon \xi\colon\mathbb{T}\to X \text{ é solução global limitada de } \{S(t,s)\colon (t,s)\in\mathscr{P}\}\}. \tag{2.11}$$

Definição 2.14: Diremos que a solução global $\xi\colon\mathbb{T}\to X$ de um processo de evolução $\{S(t,s)\colon (t,s)\in\mathscr{P}\}$ é **limitada para trás ou limitada no passado** se existe $\tau\in\mathbb{T}$ tal que o conjunto $\{\xi(t)\colon t\le\tau\}$ é limitado. De modo análogo, diremos que a solução global $\xi\colon\mathbb{T}\to X$ é **limitada para frente ou limitada no futuro** se existe $\tau\in\mathbb{T}$ tal que o conjunto $\{\xi(t)\colon t\ge\tau\}$ é limitado.

Observação 2.15: Note que, se um processo de evolução $\{S(t,s)\colon (t,s)\in\mathscr{P}\}$ possui um atrator pullback $\{\mathscr{A}(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ e $\xi\colon\mathbb{T}\to X$ é uma solução limitada para trás então $\xi(t)\in\mathscr{A}(t)$ para todo $t\in\mathbb{T}$, uma vez que $\{\mathscr{A}(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ atrai pullback o conjunto limitado $\{\xi(t)\colon t\le\tau\}$, para todo $\tau\in\mathbb{R}$.

De modo análogo ao caso autônomo, temos a seguinte caracterização do atrator em termos das soluções globais limitadas (para trás).

Proposição 2.16: *Sejam $\{S(t,s)\colon (t,s)\in\mathscr{P}\}$ um processo de evolução e $\{\mathscr{A}(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ atrator pullback. Suponha que a família $\{\mathscr{A}(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ é limitada no passado, isto é, existem $\tau\in\mathbb{T}$ e um conjunto limitado B tal que $\mathscr{A}(t)\subset B$, para todo $t\le\tau$. Então*

$$\mathscr{A}(t)=\{\xi(t)\colon \xi\colon\mathbb{T}\to X \textit{ é solução limitada para trás } \{S(t,s)\colon (t,s)\in\mathscr{P}\}\}.$$

Como consequência, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.17: *Seja $\{S(t,s)\colon (t,s)\in\mathscr{P}\}$ um processo de evolução e $\{\mathscr{A}(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ atrator pullback.*

Suponha que $\cup_{t\in\mathbb{T}}\mathscr{A}(t)$ é um conjunto limitado. Então

$$\mathscr{A}(t) = \{\xi(t)\colon\ \xi\colon \mathbb{T}\to X \text{ é solução limitada } \{S(t,s)\colon\ (t,s)\in\mathscr{P}\}\}.$$

Demonstração. Da proposição anterior basta ver que toda solução limitada para trás também é limitada para frente. De fato, se $x\in\mathscr{A}(s)$ então, pela invariância da família $\{\mathscr{A}(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$, a solução para frente que passa por x está contida em $\mathscr{A}(t)$, para todo $t\geq s$. □

Para finalizar a seção, introduzimos um teorema que nos permitirá estabelecer uma relação que estende de maneira fácil o conceito de atratores globais para semigrupos aos atratores pullback dos processos de evolução autônomos.

Teorema 2.18: *Sejam $\{T(t)\colon\ t\geq 0\}$ um semigrupo e $S(t,s)=T(t-s),(t,s)\in\mathscr{P}$ o processo de evolução associado. Então, $\{T(t)\colon\ t\geq 0\}$ tem um atrator global $\mathscr{A}$ se, e somente se, $\{S(t,s)\colon\ (t,s)\in\mathscr{P}\}$ tem um atrator pullback $\{\mathscr{A}(t)\colon\ t\in\mathbb{T}\}$. Em qualquer um dos casos, $\mathscr{A}(t)=\mathscr{A}$ para todo $t\in\mathbb{T}$.*

Demonstração. Primeiramente suponha que $\{T(t)\colon\ t\geq 0\}$ tem um atrator global $\mathscr{A}$. Então, é claro que a família $\{\mathscr{A}(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ tal que $\mathscr{A}(t)=\mathscr{A}$, para todo $t\in\mathbb{T}$, atrai pullback subconjuntos limitados de X para $\{T(t-s)\colon\ (t,s)\in\mathscr{P}\}$. No mais, a minimalidade segue do fato que $\mathscr{A}$ é limitado e como $\mathscr{A}$ é atrator, ele é invariante, então $S(t,s)\mathscr{A}=T(t-s)\mathscr{A}=\mathscr{A}$ para todo $(t,s)\in\mathscr{P}$.

Por outro lado, suponha que $\{T(t-s)\colon\ (t,s)\in\mathscr{P}\}$ tem um atrator pullback $\{\mathscr{A}(t)\colon\ t\in\mathbb{T}\}$. Então, $\{T(t)\colon\ t\geq 0\}$ tem um atrator global $\mathscr{A}$ e $\mathscr{A}\subset\mathscr{A}(t)$ para cada $t\in\mathbb{T}$. Ainda, a família $\{\tilde{\mathscr{A}}(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$, tal que $\tilde{\mathscr{A}}(t)=\mathscr{A}$ para todo $t\in\mathbb{T}$, atrai pullback subconjuntos limitados de X. Por fim, da minimalidade do atrator pullback, $\tilde{\mathscr{A}}(t)=\mathscr{A}\supset\mathscr{A}(t)$, completando a demonstração. □

2.4 Existência de atratores pullback

Da mesma forma que a noção de ω-limite teve uma grande relevância para o estudo dos semigrupos, ela também desempenhará uma importante função para a teoria de atratores pullback para processos de evolução, por isso começamos com sua definição. Recorde que $\mathbb{T}_t^-=\{s\in\mathbb{T}\colon\ s\leq t\}$.

Definição 2.19: Seja $\{S(t,s)\colon\ (t,s)\in\mathscr{P}\}$ um processo de evolução em um espaço métrico X e B um subconjunto de X. O **ω-limite pullback de B no instante** t é definido por

$$\omega(B,t)=\bigcap_{\sigma\leq t}\overline{\bigcup_{s\leq\sigma}S(t,s)B},$$

ou, de maneira equivalente, por

$$\omega(B,t)=\{y\in X\colon\ \exists\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{T}_t^-, s_k\xrightarrow{k\to\infty}-\infty,\text{ e }\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\text{ tal que } y=\lim_{k\to\infty}S(t,s_k)x_k\}. \quad (2.12)$$

Observação 2.20: Se $\{T(t)\colon\ t\geq 0\}$ é um semigrupo e $S(t,s)=S(t-s),\ (t,s)\in\mathscr{P}$, então $\omega(B,t)=\bigcap_{s\geq 0}\overline{\bigcup_{r\geq s}S(r)B}$ independe de t e coincide com a definição do conjunto ω-limite ($\omega(B)$ de B) para semigrupos.

Os resultados adiante têm provas análogas às exibidas para os sistemas dinâmicos autônomos, como o lema a seguir que é similar ao Lema 1.31, apresentado no Capítulo 1. Por esta razão, mostraremos apenas alguns deles para estabelecer essa relação de similaridade.

Lema 2.21: *Sejam $\{S(t,s)\colon (t,s)\in\mathscr{P}\}$ um processo em um espaço métrico X e $B\subset X$. Então:*

1. *$S(t,s)\omega(B,s)\subset\omega(B,t)$ para cada $(t,s)\in\mathscr{P}$.*
2. *Se $\omega(B,s)$ é compacto e atrai pullback B no instante s, então $S(t,s)\omega(B,s)=\omega(B,t)$, $(t,s)\in\mathscr{P}$.*
3. *Se $\omega(B,s)$ atrai pullback B no instante s para cada $s\le t$, $\bigcup_{s\le t}\omega(B,s)\subset B$ e B é um conjunto conexo então $\omega(B,t)$ é conexo.*

Demonstração. Seja $B\subset X$.

1. Se $\omega(B,t)=\emptyset$, não há o que mostrar. Consideremos então $\omega(B,s)\neq\emptyset$. Assim, da continuidade de $S(t,s)$ e de (2.12), temos $S(t,s)\omega(B,s)\subset\omega(B,t)$.
2. Seja $x\in\omega(B,t)$, existem sequências $\sigma_k\to-\infty$, $\sigma_k\le t$ e $x_k\in B$ tais que $S(t,\sigma_k)x_k\xrightarrow{k\to\infty}x$. Como $\sigma_k\to-\infty$, existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que $\sigma_k\le s$ para todo $k\ge k_0$. Daí, $S(t,s)S(s,\sigma_k)x_k=S(t,\sigma_k)x_k\to x$ para $k\ge k_0$. Como $\omega(B,s)$ atrai pullback B no instante s, temos $\operatorname{dist}(S(s,\sigma_k)x_k,\omega(B,s))\xrightarrow{k\to\infty}0$. Disto e da compacidade de $\omega(B,s)$, podemos ver que $\{S(s,\sigma_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência (que novamente denotaremos por $S(s,\sigma_k)x_k$) que converge para algum $y\in\omega(B,s)$. Por fim, da continuidade de $S(t,s)$ segue $S(t,s)y=x$. Portanto $\omega(B,t)=S(t,s)\omega(B,s)$.
3. Suponhamos por absurdo que $\omega(B,t)$ é desconexo, então $\omega(B,t)$ é uma união disjunta de dois conjuntos compactos (consequentemente separados por uma distância positiva), porém $\omega(B,t)$ atrai pullback B, o que contradiz o fato que $S(t,s)B$ ser conexo e conter $\omega(B,t)$. Portanto, $\omega(B,t)$ é conexo.

□

Corolário 2.22: *Se $\mathscr{A}(t)$ é compacto e atrai pullback C no tempo t, onde C é um conjunto conexo que contém $\mathscr{A}(t)$, então $\mathscr{A}(t)$ é conexo. Em particular, se X é um espaço de Banach ou um espaço métrico no qual as bolas são conexas, então o atrator pullback é conexo, caso ele exista.*

Lema 2.23: *Seja $\{S(t,s)\colon (t,s)\in\mathscr{P}\}$ um processo de evolução em um espaço métrico X. Suponha que B é um subconjunto não vazio de X e que, para cada $t\in\mathbb{T}$, existe $\sigma_t\le t$ tal que $\overline{\bigcup_{s\le\sigma_t}S(t,s)B}$ é compacto. Então, para todo $t\in\mathbb{T}, \omega(B,t)$ é não vazio, compacto, atrai pullback B no instante t e $\{\omega(B,t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ é invariante.*

Demonstração. Como $\overline{\bigcup_{s\le\sigma}S(t,s)B}$ é não vazio e compacto para cada $\sigma\le\sigma_t$, então $\omega(B,t)$ é não vazio e compacto. Vejamos que $\omega(B,t)$ atrai pullback B no instante t. Para tal, suponhamos por absurdo que isso não ocorra, então existe $\varepsilon > 0$ e sequências $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em B, $\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{T}$ com $\sigma_k \leq t$, $\sigma_k \xrightarrow{k\to\infty} -\infty$, tais que $\mathrm{dist}(S(t,\sigma_k)x_k, \omega(B,t)) > \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Agora, como $\overline{\bigcup_{s\leq\sigma_t} S(t,s)B}$ é compacto e $\{S(t,\sigma_k)x_k\}_{k\geq k_0} \subset \overline{\bigcup_{s\leq\sigma_t} S(t,s)B}$, para algum $k_0 \in \mathbb{N}$, então $\{S(t,\sigma_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente para algum $y \in \omega(B,t)$, que é uma contradição. Portanto, $\omega(B,t)$ atrai pullback B no instante t. Por fim, do Lema 2.21, $\omega(B,t)$ é invariante e a prova está completa. $\square$

2.5 Resultados principais

O primeiro resultado dessa seção sobre a existência de atratores pullback é uma generalização de um resultado semelhante ao dado para processos autônomos (veja [1]; [11]; [17]; [20]; [24]).

Teorema 2.24: *Seja $\{S(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$ um processo de evolução em um espaço métrico X. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. *$\{S(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$ tem um atrator pullback $\{\mathscr{A}(t)\colon t \in \mathbb{T}\}$.*
2. *Existe uma família de conjuntos compactos $\{K(t)\colon t \in \mathbb{T}\}$ que atrai pullback subconjuntos limitados de X sob a ação de $\{S(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$.*

Em qualquer um dos casos, teremos

$$\mathscr{A}(t) = \overline{\bigcup\{\omega(B,t)\colon B \subset X, B \text{ limitado}\}}. \tag{2.13}$$

Demonstração. Primeiramente suponhamos que $\{S(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$ tem um atrator pullback $\{\mathscr{A}(t)\colon t \in \mathbb{T}\}$. Então, cada $\mathscr{A}(t)$ é compacto e atrai-pullback subconjuntos limitados de X no instante t.

Por outro lado, suponhamos que $\{K(t)\colon t \in \mathbb{T}\}$ atrai pullback subconjuntos limitados de X sob a ação de $\{S(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$. Segue diretamente da caracterização (2.12) que $\omega(B,t) \subset K(t)$, para todo $B \subset X$ limitado e para todo $t \in \mathbb{T}$. Afirmamos que $\omega(B,t)$ atrai B no instante t. De fato, se isso não ocorresse, teríamos $\varepsilon > 0$, uma sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{T}$ com $s_n \to -\infty$ e uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em B tais que $\mathrm{dist}(S(t,s_n)x_n, \omega(B,t)) > \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Porém, $K(t)$ atrai pullback B no instante t, então $\mathrm{dist}(S(t,s_n)x_n, K(t)) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Daí, $\{S(t,s_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente para algum $x_0 \in K(t)$. Portanto, $x_0 \in \omega(B,t)$, o que nos leva a uma contradição. Do Lema 2.21, segue a invariância de $\omega(B,t)$.

Agora, definindo $\mathscr{A}(t)$ por (2.13), é claro que $\mathscr{A}(t)$ é compacto e atrai pullback subconjuntos limitados de X. No mais, a invariância de $\mathscr{A}(t)$ segue da invariância de cada família $\{\omega(B,t)\colon t \in \mathbb{T}\}$. De fato, dado $x_0 \in \mathscr{A}(s)$, existe $x_n \in \omega(B_n,s)$ com $x_n \to x_0$ quando $n \to \infty$, então $S(t,s)x_n = y_n \in \omega(B_n,t)$. Da continuidade de $S(t,s)$, $S(t,s)x_n = y_n \to S(t,s)x_0$, o que implica que $S(t,s)x_0 \in \mathscr{A}(t)$. Além disso, se $y_0 \in \mathscr{A}(t)$, existe $y_n \in \omega(B_n,t)$ com $y_n \to y_0$ quando $n \to \infty$. Da invariância da família $\omega(B_n,t)$, existe $x_n \in \omega(B_n,s)$ com $S(t,s)x_n = y_n$, no entanto, cada $S(t,s)x_n \in S(t,s)\omega(B_n,s) \subset S(t,s)\mathscr{A}(s)$. Como este último conjunto é compacto e não depende de n, obtemos $\lim_{n\to\infty} S(t,s)x_n = y_0 \in S(t,s)\mathscr{A}(s)$.

Finalmente, se $\hat{\mathscr{A}}(t)$ é fechado e atrai pullback subconjuntos limitados de X no instante t então $\omega(B,t) \subseteq \hat{\mathscr{A}}(t)$, para todo subconjunto limitado B de X. Portanto, $\mathscr{A}(t) \subseteq \hat{\mathscr{A}}(t)$, para todo $t \in \mathbb{T}$ isto é, $\mathscr{A}(t)$ é a família de conjuntos fechado minimal com a propriedade de atrair pullback subconjuntos limitados. $\square$

A seguir temos uma definição que nos permite garantir a existência de atratores pullback sem precisar exibir uma família de conjuntos compactos que atrai pullback subconjuntos limitados.

Definição 2.25: Um processo de evolução $\{S(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$ em um espaço métrico X é dito **pullback assintoticamente compacto** se para cada $t \in \mathbb{T}$, existe uma sequência $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{T}_t^-$, com $s_k \xrightarrow{k\to\infty} -\infty$, e uma sequência limitada $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em X tais que a sequência $\{S(t,s_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente.

Observação 2.26: Se $\{T(t)\colon t \geq 0\}$ é um semigrupo, o processo $\{S(t,s) = T(t-s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$ é pullback assintoticamente compacto se, e somente se, existe uma sequência $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{T}_t^-$, com $s_k \xrightarrow{k\to\infty} -\infty$, e uma sequência limitada $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em X tais que a sequência $\{S(t,s_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente, isto é, o semigrupo $\{T(t)\colon t \geq 0\}$ é assintoticamente compacto (veja a Proposição 1.38).

Lema 2.27: *Se $\{S(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$ é um processo de evolução pullback assintoticamente compacto e B é um subconjunto não vazio e limitado de X para o qual existe $\sigma_t \in \mathbb{T}_t^-$ tal que $\bigcup_{\tau\leq\sigma_t} S(t,\tau)B$ é limitado, para todo $t \in \mathbb{T}$, então $\omega(B,t)$ é não vazio, compacto, atrai pullback B no instante t e $\{\omega(B,t)\colon t \in \mathbb{T}\}$ é invariante.*

Demonstração. Observe que para quaisquer sequências $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em B e $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{T}_t^-, s_k \xrightarrow{k\to\infty} -\infty$, temos $\{S(t,s_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ limitado. Segue do fato que $\{S(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$ é pullback assintoticamente compacto que existe $y \in X$ e subsequência de $\{S(t,s_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (que denotaremos da mesma forma), tal que $y = \lim_{k\to\infty} S(t,s_k)x_k$. Daí obtemos $y \in \omega(B,t)$ e $\omega(B,t)$ não vazio.

Agora, dada uma sequência $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $\omega(B,t)$, existem $x_k \in B$ e $s_k \in \mathbb{T}_t^-, s_k \leq -k$ tais que $d(S(t,s_k)x_k, y_k) \leq \frac{1}{k}$. Como $\{S(t,s_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente, segue que $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente e $\omega(B,t)$ é compacto.

Além disso, suponhamos que $\omega(B,t)$ não atrai pullback B no instante t. Dessa forma, existem $\varepsilon > 0$ e sequências $x_k \in B$ e $\{s_k\} \in \mathbb{T}_t^-$ com $s_k \xrightarrow{k\to\infty} -\infty$, tais que a distância $d(S(t,s_k)x_k, \omega(B,t)) > \varepsilon$. Do fato que $\{S(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$ é pullback assintoticamente compacto e do fato que $\bigcup_{s\leq\sigma_t} S(t,s)B$ é limitado, existe uma subsequência de $\{S(t,s_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (que denotaremos da mesma forma) e $y \in X$ tal que $S(t,s_k)x_k \xrightarrow{k\to\infty} y$. Assim, temos $y \in \omega(B,t)$, contradição! Portanto, $\omega(B,t)$ atrai pullback B.

Por fim, a invariância de $\omega(B,t)$ segue do Lema 2.21 e o resultado está provado. $\square$

Definição 2.28: Diremos que um processo de evolução $\{S(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$ em um espaço métrico X é **pullback limitado** se para cada $t \in \mathbb{T}, \gamma_p(B,t)$ é limitado sempre que $B \subset X$ é limitado.

Observação 2.29: Se $\{T(t)\colon t \geq 0\}$ é um semigrupo, o processo de evolução $\{S(t,s) = T(t-s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$ é pullback limitado se, e somente se, o semigrupo $\{T(t)\colon t \geq 0\}$ é limitado.

Definição 2.30: Um processo de evolução $\{S(t,s)\colon (t,s)\in\mathscr{P}\}$ é dito **pullback eventualmente compacto** se ele é pullback limitado e existe $\tau\geq 0$ de modo que se B é um subconjunto limitado de X e $t\in\mathbb{T}$, então $\overline{S(t,t-\tau)B}$ é compacto.

Observação 2.31: Um semigrupo $\{S(t)\colon t\geq 0\}$ é eventualmente compacto se é limitado e existe $t_0>0$ tal que $\overline{S(t_0)B}$ é compacto, para cada $B\subset X$ limitado.

O seguinte lema nos da uma condição suficiente para que um processo venha a ser pullback assintoticamente compacto.

Lema 2.32: *Seja $\{S(t,s)\colon (t,s)\in\mathscr{P}\}$ um processo de evolução em um espaço métrico X. Se $\{S(t,s)\colon (t,s)\in\mathscr{P}\}$ é pullback eventualmente compacto, então $\{S(t,s)\colon (t,s)\in\mathscr{P}\}$ é pullback assintoticamente compacto.*

Demonstração. Sejam τ segundo a Definição 2.30, $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em X e $\{s_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{T}_t^-$ com $s_j\xrightarrow{j\to\infty}-\infty$. Se tomarmos $B=\{S(t-\tau,s)x_j\colon j\in\mathbb{N}$ e $(t-\tau,s)\in\mathscr{P}\}$, podemos notar que B é limitado e portanto $S(t,t-\tau)B$ é relativamente compacto e contém $\{S(t,s_j)x_j\colon j\in\mathbb{N}\}$. Assim, $\{S(t,s_j)x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente e, portanto, $\{S(t,s)\colon (t,s)\in\mathscr{P}\}$ é pullback assintoticamente compacto. □

Definição 2.33: Dizemos que o processo $\{S(t,s)\colon (t,s)\in\mathscr{P}\}$ é **pullback limitado dissipativo** se existe uma família de conjuntos limitados $\{B(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ tais que $B(t)$ atrai pullback limitados no tempo t, para todo $t\in\mathbb{T}$.

Teorema 2.34: *Se $\{S(t,s)\colon (t,s)\in\mathscr{P}\}$ é pullback limitado dissipativo (Definição 2.28) e pullback assintoticamente compacto (Definição 2.25), então $\mathscr{A}(t)$ dado por*

$$\mathscr{A}(t)=\bigcup\{\omega(B,t)\colon B\subset X,\ B \text{ limitado}\} \tag{2.14}$$

é limitado, atrai pullback subconjuntos limitados de X no instante t, a família $\{\mathscr{A}(t)\colon t\in\mathbb{T}\}$ é invariante e se $\{C(t)\colon t\in\mathbb{T}\}$ atrai pullback subconjuntos limitados de X, então $\mathscr{A}(t)\subset\overline{C(t)}$ para todo $t\in\mathbb{T}$.

Demonstração. Antes de mais nada, podemos verificar que as hipóteses do Lema 2.27 estão satisfeitas, então dado um subconjunto não vazio e limitado B de X, teremos $\omega(B,t)$ não vazio, compacto, atrai pullback B no instante t e $\{\omega(B,t)\colon t\in\mathbb{T}\}$ invariante. Portanto, $\mathscr{A}(t)$ definido por (2.14) atrai pullback subconjuntos limitados de X no instante t para cada $t\in\mathbb{T}$ e $\{\mathscr{A}(t)\colon t\in\mathbb{T}\}$ é invariante.

Agora, se $C(t)$ atrai pullback subconjuntos limitados de X no instante t, então $\omega(B,t)\subset\overline{C(t)}$ para cada subconjunto limitado B de X e assim $\mathscr{A}(t)\subset\overline{C(t)}$. Daí, como existe uma família $\{B(t)\colon t\in\mathbb{T}\}$ de conjuntos limitados que atrai pullback subconjuntos limitados de X, temos em particular que $\mathscr{A}(t)$ é limitado. □

Teorema 2.35: *Se $\{S(t,s)\colon (t,s)\in\mathscr{P}\}$ é pullback limitado dissipativo e pullback eventualmente compacto, então a família $\{\mathscr{A}(t)\colon t\in\mathbb{T}\}$ definida por (2.14) atrai pullback subconjuntos limitados* *de X, é invariante, $\mathscr{A}(t)$ é relativamente compacto e se $\{B(t)\colon t \in \mathbb{T}\}$ atrai pullback subconjuntos limitados de X, então $\mathscr{A}(t) \subset \overline{B(t)}$ para todo $t \in \mathbb{T}$.*

Demonstração. Partindo do Lema 2.32, temos as hipóteses do Teorema 2.34 satisfeitas. Logo, só nos resta mostrar que $\mathscr{A}(t)$ é relativamente compacto para cada $t \in \mathbb{T}$. De fato, como $\mathscr{A}(t)$ é limitado para cada $t \in \mathbb{T}$, dado τ como na Definição 2.30, temos

$$\mathscr{A}(t) = S(t, t-\tau)\mathscr{A}(t-\tau),$$

que é relativamente compacto para cada $t \in \mathbb{T}$. $\square$

Vale ressaltar que os resultados vistos até aqui não nos garantem a compacidade de $\mathscr{A}(t)$, mesmo se tratando de um espaço X de dimensão finita. Podemos perceber então uma diferença entre os processos de evolução não-autônomos e os autônomos. Assim, a fim de chegar a essa compacidade, acrescentamos algumas novas hipóteses aos sobre os processos de evolução.

Definição 2.36: Diremos que um processo de evolução $\{S(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$ é **pullback fortemente limitado dissipativo** se, para cada $t \in \mathbb{T}$, existir um subconjunto limitado $B(t)$ de X que absorve pullback subconjuntos limitados de X no instante τ para cada $\tau \leq t$, isto é, dado qualquer subconjunto limitado D de X e $\tau \leq t$, existe $s_0(\tau, D)$ tal que $S(\tau, s)D \subset B(t)$, para todo $s \leq s_0(\tau, D)$.

Observação 2.37: A família $\{B(t)\colon t \in \mathbb{T}\}$ dada acima não precisa ter união limitada, entretanto podemos escolhê-la de modo que a ter $\bigcup_{s \leq t} B(s)$ limitado, para cada $t \in \mathbb{T}$.

O último resultado apresentado a seguir nos leva ao objetivo principal da seção, apresentando condições suficientes para garantir a existência de um atrator pullback.

Teorema 2.38: *Se um processo de evolução $\{S(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo e pullback assintoticamente compacto, então $\{S(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$ tem um atrator pullback $\{\mathscr{A}(t)\colon t \in \mathbb{T}\}$ com a propriedade que $\bigcup_{s \leq t} \mathscr{A}(s)$ é limitado para cada $t \in \mathbb{T}$.*

Demonstração. Primeiramente, seja $\mathscr{A}(t) = \bigcup\{\omega(B,t)\colon B \subset X,\ B \text{ limitado}\}$ como em (2.14), então o Teorema 2.34 nos assegura, para cada $t \in \mathbb{T}$, que $\mathscr{A}(t)$ atrai pullback subconjuntos limitados de X no instante t. Como também, se $\{B(t)\colon t \in \mathbb{T}\}$ atrai pullback subconjuntos limitados de X, então $\mathscr{A}(t) \subset \overline{B(t)}$ para todo $t \in \mathbb{T}$.

Agora, como $\{S(t,s)\colon t \geq s \in \mathbb{T}\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo, existe um subconjunto limitado $B(t)$ de X que absorve pullback subconjuntos limitados de X no instante τ, para cada $\tau \leq t$. Daí, considerando $B(t)$ como um subconjunto limitado fixo de X, já que $\omega(B(t),t)$ atrai pullback $B(t)$ no instante t, ele atrai pullback todo subconjunto limitado de X no instante t.

Com efeito, basta mostrar que dado um subconjunto limitado D de X, $\omega(D,t) \subset \omega(B(t),t)$. Para isso, seja $x_0 \in \omega(D,t)$, então existem sequências $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{T}_t^-$ com $s_k \xrightarrow{k\to\infty} -\infty$ e $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em D tais que $S(t,s_k)x_k \xrightarrow{k\to\infty} x_0$. Logo, uma vez que $\{S(t,s)\colon (t,s) \in \mathscr{P}\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo, dada uma sequência $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{T}_t^-$ com $\tau_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$, existe uma sequência $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

com $\gamma_n \leq \tau_n$ tal que $S(\tau_n, s)D \subset B(t)$, para todo $s \leq \sigma_n$. Assim, dado que $s_k \xrightarrow{k\to\infty} -\infty$, para cada τ_n, existe $k_n \geq n$ tal que $s_{k_n} \leq \tau_n$ e $S(\tau_n, s_{k_n})x_{k_n} \in B(t)$. Portanto,

$$S(t, s_{k_n})x_{k_n} = S(t, \tau_n)S(\tau_n, s_{k_n})x_{k_n} \in S(t, \tau_n)B(t),$$

implicando $x_0 \in \omega(B(t),t)$. Logo, $\mathscr{A}(t) \subset \omega(B(t),t)$ e finalmente, como $\omega(B(t),t) \subset \mathscr{A}(t)$ temos $\mathscr{A}(t) = \omega(B(t),t)$. Segue disto que $\mathscr{A}(t)$ é compacto, como queríamos. □

Exemplo 2.39 (CARVALHO 2012 [5]. ***Uma bifurcação sela-nó*****):** Seguindo [18], podemos estudar uma versão não autônoma da equação diferencial ordinária simples

$$\dot{x} = a - bx^2, \quad b > 0,$$

que modela uma bifurcação sela-nó. Para $a < 0$ todas as trajetórias tendem a $-\infty$; para $a = 0$, as soluções positivas tendem a zero e as soluções negativas explodem para $-\infty$ em um tempo finito; e para $a > 0$, existe uma solução de atração única $\sqrt{a/b}$ para subconjuntos compactos em $(-\sqrt{a/b}, +\infty)$, enquanto $-\sqrt{a/b}$ é instável. Vamos denotar o operador solução para essa equação autônoma por $T_{a,b}(t)$.

Aqui consideramos

$$\dot{x} = a - b(t)x^2, \quad x(s) = x_0, \tag{2.15}$$

onde $a \in \mathbb{R}$ e $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínuo com $b(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e

$$\int_{-\infty}^{0} b(t)dt = \int_{0}^{\infty} b(t)dt = +\infty. \tag{2.16}$$

Veremos que essa equação não autônoma se comporta de maneira semelhante à sua contrapartida autônoma (quando b não depende de t, ou seja, b é uma constante). Como também, analisaremos a equação considerando um processo em um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$, e mesmo neste caso simples, faremos uso da possibilidade de definir atratores pullback em espaços métricos.

Primeiro, notemos que se $a < 0$, então $\dot{x} \leq a$ e $S(t,s)x_0 \to -\infty$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, tanto quanto $t \to +\infty$ ("forwards") e como $s \to -\infty$ ("pullback"); enquanto se $a = 0$, então a equação pode ser resolvida explicitamente para produzir

$$S(t,s)x_s = \frac{x_s}{1 + x_s \int_s^t b(r)dr}.$$

Usando (2.16), segue que se $x_s > 0$, então $S(t,s)x_s \to 0$ com $t \to +\infty$ ou $s \to -\infty$, considerando que se $x_s < 0$, então a solução "explode" para $-\infty$ em um tempo finito (seja em forwards ou pullback).

O comportamento para $a > 0$ é mais interessante. Vamos assumir que $b(t)$ é limitado acima e abaixo, isto é, existe b_0 e b_1 com $0 < b_0 \leq b_1$ tal que

$$b_0 \leq b(t) \leq b_1.$$

A equação é então simples de analisar, pois a solução de (2.15) é limitada acima e abaixo pelas equações autônomas

$$\dot{x} = a - b_0 x^2 \text{ e } \dot{x} = a - b_1 x^2,$$

respectivamente (ambos com $x(s) = x_0$), ou seja,

$$T_{a,b_1}(t-s)x_0 \leq S(t,s)x_0 \leq T_{a,b_0}(t-s)x_0.$$

Vejamos que o intervalo $[-\sqrt{a/b_1}, +\infty)$ é positivamente invariante para os três sistemas (as equações não autônomas e equações autônomas "limitantes").

Vamos considerar o processo $S(\cdot,\cdot)$ restrito a $[-\sqrt{a/b_1}, +\infty)$, que é um espaço métrico completo quando nós usamos a distância usual em $\mathbb{R}$. Para qualquer conjunto limitado $B \subset [-\sqrt{a/b_1}, +\infty)$ existe um $\tau_0(B)$ tal que

$$S(t,s)B \subset \left[\frac{1}{2}\sqrt{a/b_1}, 2\sqrt{a/b_0}\right], \quad \text{para } t - s \geq \tau_0(B); \tag{2.17}$$

em particular, há um conjunto pullback absorvente fechado limitado (e portanto compacto). Podemos agora aplicar o Teorema 2.24 para deduzir a existência de um atrator de pullback $\mathscr{A}(t)$ para (2.15) em $[-\sqrt{a/b_1}, +\infty)$. Como o atrator é um subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ (Corolário 2.22), deve ser de fato um intervalo,

$$\mathscr{A}(t) = [a_-(t), a_+(t)] \subset I_a = [\sqrt{a/b_1}, \sqrt{a/b_0}];$$

como o espaço de fase é unidimensional, o processo preserva a ordem e portanto $a_\pm(\cdot)$ são soluções globais de (2.15). Mostraremos agora que de fato $a_-(t) = a_+(t)$ para todo t. Para isso, considere a diferença $z(t) = a_+(t) - a_-(t)$ que satisfaz a equação

$$\dot{z} = -b(t)(a_+^2(t) - a_-^2(t)) = -b(t)[a_+(t) + a_-(t)]z \leq -\frac{\sqrt{a/b_1}}{2} b(t)z.$$

Integrando, obtemos:

$$z(t) \leq z(s)\exp\left(-\frac{\sqrt{a/b_1}}{2}\int_s^t b(r)dr\right).$$

Fazendo $s \to -\infty$ e usando (2.16) temos que $z(t) = 0$, ou seja, que $a_+(t) = a_-(t)$. Então o atrator pullback consiste em uma única solução global (positiva) $a(t)$.

Ressaltamos que neste exemplo, a solução global $a(t)$ também atrai forwards; usando (2.17), qualquer solução $x(\cdot)$ é eventualmente limitado inferiormente por $\frac{1}{2}\sqrt{a/b_1}$ e o argumento anterior pode ser repetido (substituindo $a_-(\cdot)$ e $a_+(\cdot)$ por $x(\cdot)$ e $a(\cdot)$, devidamente ordenados) para mostrar que $|x(t) - a(t)| \to 0$ como $t \to +\infty$.

O artigo de Langa et al. (2002) [18] considera a situação menos direta onde $0 < b(t) \leq b$ e $b(t) \to 0$, preservando a condição de integral (2.16). Neste caso, o atrator pullback ainda é um atrator pullback que atrai uma solução global positiva, mas esta solução global agora é ilimitada (ela tende a $+\infty$ como $|t| \to \pm\infty$), e existe também uma solução global negativa que, embora importante para a dinâmica, não é contido no atrator pullback (nem seu conjunto é instável).

Capítulo 3

Relação entre atratores pullback e atratores uniformes

Nesse capítulo abordaremos várias noções de atratores para sistemas dinâmicos e suas conexões, estabelecendo algumas relações entre eles. A principal referência para esse capítulo é [3].

3.1 Diferentes noções para atratores de equações diferenciais não autônomas

Em se tratando de atratores para equações diferenciais não autônomas como

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t,u), \quad t > \sigma \\ x(\sigma) = u_0 \in X \end{cases} \tag{3.1}$$

duas abordagens importantes foram desenvolvidas:

A teoria dos atratores uniformes, um conjunto mínimo compacto (não invariante) que atrai forwards (para frente) conjuntos uniformemente limitados com respeito a um tempo inicial e a teoria dos atratores pullback, uma família de conjuntos compactos que é invariante e atrai pullback (mas, em geral, não forwards) conjuntos limitados. Nessa seção, iremos relacionar essas diferentes noções para tirar proveito da invariância na teoria dos atratores pullback e a atratividade forwards na teoria dos atratores uniformes.

Começamos com a discussão das possíveis noções de "atratores" para sistemas dinâmicos não autônomos.

3.1.1 Sistemas dinâmicos não autônomos

Existe um método geral que nos fornece um caminho para formar o espaço base para uma equação diferencial não autônoma. A origem desse método é considerar a família de não linearidades como um fluxo de base impulsionado pelo deslocamento linear aplicado à não linearidade $f(t,\cdot)$ que ocorre na equação original.

Vamos considerar $f \in C(\mathbb{R},X)$, o conjunto de funções contínuas limitadas de $\mathbb{R}$ em X munido com a métrica ρ. Denotemos por Σ_0 o conjunto de todas as translações de f,

$$\Sigma_0(f) = \{f(s+\cdot) \colon s \in \mathbb{R}\},$$

e defina o operador $\theta_t \colon C(\mathbb{R},X) \to C(\mathbb{R},X)$ por

$$\theta_t f(\cdot) = f(\cdot + t).$$

Para a dependência autônoma e periódica esta construção produz um espaço base fechado Σ_0. Entretanto, para termos não autônomos mais gerais (por exemplo, quase periódicos) é conveniente considerar o fecho de Σ_0 com respeito a ρ:

$$\Sigma := \Sigma_\rho(f) = \text{ fecho de } \Sigma_0(f) \in C(\mathbb{R},X) \text{ com respeito a } \rho,$$

conhecido como "hull" das funções f no espaço $(C(\mathbb{R},X);\rho)$ (veja [10], [23]). Assim, a continuidade de θ_t em Σ_0 se estende à continuidade de θ_t em Σ.

Observamos que podemos também considerar $f \in C(\mathbb{R}^+,X)$. Nesse caso θ_t define um semigrupo em Σ, o fecho de $\{f(s+\cdot) \colon s \geq 0\}$.

Assim, tentaremos analisar as equações diferenciais não autônomas como a combinação de um fluxo básico $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ em Σ e, para cada $\sigma \in \Sigma$, o semifluxo $\mathbb{R}^+ \times X \ni (t,u_0) \mapsto \varphi(t,\sigma)u_0 \in X$ onde, para cada $u_0 \in X$, $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto \varphi(t,\sigma)u_0 \in X$ é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{u} = \sigma(t,u), \quad t > 0 \\ u(0) = u_0 \in X. \end{cases}$$

Então a família de funções

$$(t,\sigma) \in \mathbb{R}^+ \times \Sigma \mapsto \varphi(t,\sigma) \in C(X),$$

satisfaz

1. $\varphi(0,\sigma) = Id_X$ para todo $\sigma \in \sum$,

2. $\mathbb{R}^+ \times \Sigma \times X \ni (t,\sigma) \mapsto \varphi(t,\sigma)u \in X$ é contínua, e

3. (propriedade cociclo) para todo $t \geq s$, $s \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \Sigma$,

$$\varphi(t+s,\sigma) = \varphi(t,\theta_s\sigma)\varphi(s,\sigma).$$

Da última propriedade de φ, o denominamos **semifluxo cociclo**. Estas propriedades definem um semifluxo cociclo e sua relação com a equação diferencial (3.2) não é mais necessária. Em todo caso, podemos interpretar $\varphi(t,\sigma)u$ como a solução em um tempo t que se iniciou em um estado u no tempo zero sujeito ao termo de condução não autônomo $\sigma \in \Sigma$.

Juntos, φ e θ determinam o problema não autônomo (3.1) e o par $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$ será chamado **sistema dinâmico não autônomo em** (X,Σ). Agora, dado um sistema dinâmico não autônomo (φ,θ) em (X,Σ), podemos também definir um **semigrupo ou sistema dinâmico autônomo associado** (veja [22], [23]) $\Pi(\cdot)$ em $\mathbb{X} = X \times \Sigma$ (com a métrica $d_{\mathbb{X}}((x,\sigma),(\overline{x},\overline{\sigma})) = d(x,\overline{x}) + \rho(\sigma,\overline{\sigma}))$ definindo

$$\Pi(t)(u,\sigma) = (\varphi(t,\sigma)u, \theta_t\sigma), \quad t \geq 0.$$

Essas propriedades de semigrupo de θ_t e a propriedade de cociclo de φ garantem que $\Pi(\cdot)$ satisfaça as propriedades de semigrupo.

Assim, dada uma equação diferencial não autônoma como (3.1), precisamos lidar com quatro sistemas dinâmicos diferentes, mas intimamente relacionados:

(a) O *semigrupo de condução* $\{\theta_t : t \geq 0\}$ em Σ associado à dinâmica das não linearidades dependentes do tempo que aparecem na equação, e é definido por $(\theta_t f)(\cdot,\cdot) = f(t+\cdot,\cdot)$,

(b) o *semifluxo produto skew* $\{\Pi(t) : t \geq 0\}$ definido no espaço produto $X \times \Sigma$,

(c) o *sistema dinâmico não autônomo* associado $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$ com $\varpi(t,\theta_s f)u_0 = u(t+s,f,u_0)$,

(d) e o processo de evolução $S(t,s)u_0 = u(t-s,\theta_s f)u_0$.

Notamos que cada um dos quatro tipos de sistemas dinâmicos descritos acima pode ter um atrator associado:

(i) um atrator global Ξ para o semigrupo de condução θ_t,

(ii) um atrator global $\mathbb{A}$ para o semifluxo produto skew $\Pi(t)$,

(iii) um atrator cociclo $\{A(\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma}$ para o semifluxo cociclo φ,

(iv) um atrator pullback $\{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ para o processo de evolução $S(t,s)$,

(v) e o atrator uniforme $\mathscr{A} = \Pi_X \mathbb{A} := \{u \in X : \text{ existe } \sigma \in \Sigma \text{ com } (u,\sigma) \in \mathbb{A}\}$ para o processo de evolução $S(t,s)$.

3.1.2 Relação entre atratores

O objetivo agora é relacionar os diferentes conceitos de "atratores" para sistemas dinâmicos não autônomos. Essas relações serão úteis para entender a dinâmica no atrator uniforme.

Dados um sistema dinâmico não autônomo $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$, suponhamos que o semigrupo do semifluxo produto skew associado $\{\Pi(t) : t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathbb{A}$ em $X \times \Sigma$. Sabemos que

$\{\Pi(t)\colon t \geq 0\}$ tem um atrator se, e somente se, existe um conjunto compacto $\mathbb{K} \subset X \times \Sigma$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\Pi(t)\mathbb{B}, \mathbb{K}) = 0, \tag{3.2}$$

para algum subconjunto limitado $\mathbb{B}$ de $X \times \Sigma$.

Primeiro relacionamos a compacidade assintótica de $\{\Pi(t)\colon t \geq 0\}$ com uma condição equivalente para $(\varphi, \theta)_{(X,\Sigma)}$.

Proposição 3.1: *Se $(\varphi, \theta)_{(X,\Sigma)}$ é um sistema dinâmico não autônomo, o semigrupo de condução $\{\theta_t\colon t \geq 0\}$ tem um atrator Ξ e $\{\Pi(t)\colon t \geq 0\}$ é o semifluxo produto skew associado em $X \times \Sigma$, então as duas propriedades a seguir são equivalentes:*

(i) *existe um subconjunto compacto $\mathbb{K}$ de $X \times \Sigma$ tal que para todo subconjunto limitado $\mathbb{B}$ de $X \times \Sigma$*

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\Pi(t)\mathbb{B}, \mathbb{K}) = 0;$$

(i) *existe um subconjunto compacto K de X tal que para todo subconjunto limitado B de X*

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\varphi(t,\sigma)B, K) = 0,$$

com o limite sendo uniforme para σ em subconjuntos limitados de Σ.

Demonstração. Primeiramente suponha válida a propriedade (i). Sejam $K = \Pi_X\mathbb{K}$, B um conjunto limitado de X e Υ um subconjunto limitado de Σ. Considere $\mathbb{B} := B \times \Upsilon$. Então $\mathbb{B}$ é limitado em $X \times \Sigma$ e $\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\Pi(t)\mathbb{B}, \mathbb{K}) = 0$. Assim, como

$$\operatorname{dist}(\varphi(t,\sigma)B, K) \leq \operatorname{dist}(\Pi(t)\mathbb{B}, \mathbb{K}),$$

para todo $\sigma \in \Upsilon$, vale (ii).

Agora suponha válida a propriedade (ii). Tomemos $\mathbb{K} = K \times \Xi$ que será compacto desde que K e Ξ sejam compactos e seja $\mathbb{B}$ um subconjunto limitado de $X \times \Sigma$, o qual está contido em algum conjunto da forma $B \times \Upsilon$, onde B é um subconjunto limitado de X e Υ é um subconjunto limitado de Σ. Como

$$\Pi(t)[B \times \Upsilon] \subseteq \left[\bigcup_{\sigma\in\Upsilon} \varphi(t,\sigma)B\right] \times \theta_t\Upsilon$$

então

$$\operatorname{dist}(\Pi(t)\mathbb{B}, \mathbb{K}) \leq \operatorname{dist}(\Pi(t)[B \times \Upsilon], K \times \Xi) \leq \sup_{\sigma\in\Upsilon} \operatorname{dist}(\varphi(t,\sigma)B, K) + \operatorname{dist}(\theta_t\Upsilon, \Xi).$$

Portanto, vale (i). □

Com base neste resultado, introduzimos a seguinte definição (para mais detalhes, veja também [10], [8], [12], [25]).

Definição 3.2: O sistema dinâmico não autônomo $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$ é dito **uniformemente assintoticamente compacto** se existe um conjunto compacto $K \subset X$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\sigma\in\Upsilon} \operatorname{dist}(\varphi(t,\sigma)B, K) = 0, \tag{3.3}$$

para todo subconjunto limitado B de X e um conjunto limitado Υ de Σ.

Acabamos de verificar que a compacidade assintótica uniforme de $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$ implica a compacidade assintótica de $\{\Pi(t)\colon t\geq 0\}$ e, portanto, $\{\Pi(t)\colon t\geq 0\}$ tem um atrator global $\mathbb{A}$. A questão natural é mostrar como isso pode ser interpretado para o semifluxo do cociclo. Podemos adotar uma primeira abordagem se quisermos nos concentrar no comportamento assintótico quando $t\to+\infty$. Note que a propriedade de atração de $\mathbb{A}$ implica que se definirmos $\mathscr{A} = \Pi_X \mathbb{A}$ então

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\sigma\in\Upsilon} \operatorname{dist}(\varphi(t,\sigma)B, \mathscr{A}) = 0, \tag{3.4}$$

para todos os subconjuntos B de X e Υ de Σ.

Enquanto a invariância de $\mathbb{A}$ sob a ação de $\{\Pi(t)\colon t\geq 0\}$ não é levada para $\mathscr{A}$ sob a ação do sistema dinâmico não autônomo $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$, a propriedade de minimalidade é preservada: o atrator global $\mathbb{A}$ é o menor conjunto fechado em $X\times\Sigma$ que atrai todos os conjuntos limitados, e sua projeção $\mathscr{A}$ é o subconjunto minimal fechado de X que atrai uniformemente (no sentido de (3.4)) para todos subconjuntos limitados B de X e Υ de Σ. Não é difícil ver que se $\tilde{\mathscr{A}} \subset X$ é atraído uniformemente então $\tilde{\mathscr{A}} \times \Xi$ é atraído por $\{\Pi(t)\colon t\geq 0\}$, donde $\mathbb{A} \subseteq \tilde{\mathscr{A}}\times\Xi$ e, portanto, $\mathscr{A} \subseteq \tilde{\mathscr{A}}$.

O que nos leva a definição de atrator uniforme.

Definição 3.3: O subconjunto compacto minimal de X que atrai uniformemente todos os subconjuntos limitados B de X e Υ de Σ é chamado de **atrator uniforme** para o sistema dinâmico não autônomo $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$.

Assim, vale o seguinte resultado.

Teorema 3.4: *Se $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$ é uniformemente assintoticamente compacto e o semigrupo de condução $\{\theta_t\colon t\geq 0\}$ tem um atrator global Ξ, então $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$ tem um atrator uniforme.*

Definição 3.5: Um **conjunto não autônomo** é uma família $\{D(\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma}$ de subconjuntos de X indexado em Σ. Dizemos que $\{D(\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma}$ é um conjunto não autônomo aberto (fechado, compacto) se cada fibra $D(\sigma)$ é um subconjunto aberto (fechado, compacto) de X.

Definição 3.6: Um conjunto não autônomo $\{D(\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma}$ é **invariante sob o sistema dinâmico não autônomo** $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$ se

$$\varphi(t,\sigma)D(\sigma) = D(\theta_t\sigma),$$

para todo $t\geq 0$ e cada $\sigma\in\Sigma$.

É imediato que um conjunto não autônomo $\{D(\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma}$ é invariante para $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$ se, e somente se, o subconjunto correspondente $\mathbb{D}$ de $X \times \Sigma$, dado por

$$\mathbb{D} = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} D(\sigma) \times \{\sigma\},$$

é invariante pelo semigrupo $\{\Pi(t)\colon t \geq 0\}$.

Dado um subconjunto $\mathbb{E}$ de $X \times \Sigma$, denotamos por $E(\sigma) = \{x \in X\colon (x,\sigma) \in \mathbb{E}\}$ a σ-seção de $\mathbb{E}$, portanto

$$\mathbb{E} = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} E(\sigma) \times \{\sigma\}. \tag{3.5}$$

Dado um conjunto não autônomo $\{E(\sigma)\}_{\sigma \in \Sigma}$, denotamos por $\mathbb{E}$ o conjunto definido por (3.5).

Observe que

$$\bigcup_{\sigma \in \Sigma} E(\sigma) = \Pi_X \mathbb{E}.$$

Podemos agora relacionar o conceito de atratores cociclo para um sistema dinâmico não autônomo $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$ com o atrator global para o semifluxo produto skew associado $\{\Pi(t)\colon t \geq 0\}$.

Definição 3.7: Suponhamos que Σ seja compacto e invariante (ou seja, o atrator global de $\{\theta_t\colon t \geq 0\}$ é Σ) e que $\{\theta_t\colon t \geq 0\}$ é um grupo sobre Σ e $\theta_t^{-1} = \theta_{-t}$, para todo $t > 0$. Um conjunto compacto não autônomo $\{A(\sigma)\}_{\sigma \in \Sigma}$ é chamado de **atrator cociclo** de $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$ se

(i) $\{A(\sigma)\}_{\sigma \in \Sigma}$ é invariante sobre o sistema dinâmico não autônomo $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$, ou seja, para todo $t \geq 0$, $\varphi(t,\sigma)A(\sigma) = A(\theta_t\sigma)$.

(ii) $\{A(\sigma)\}_{\sigma \in \Sigma}$ atrai pullback todos os subconjuntos $B \subset X$, isto é,

$$\lim_{t \to +\infty} \operatorname{dist}(\varphi(t,\theta_{-t}\sigma)B, A(\sigma)) = 0.$$

Observação 3.8: No caso de Σ não ser compacto e/ou não invariante, mas $\{\theta_t\colon t \geq 0\}$ possuir um atrator global Ξ e um grupo sobre Ξ, também podemos definir o atrator cociclo $\{A(\sigma)\}_{\sigma \in \Xi}$ para cada $\sigma \in \Xi$ e $\eta\colon \mathbb{R} \to \Xi$ através de σ sendo a única solução global limitada, se substituirmos a condição (ii) da Definição 3.7 por:

(ii') Para cada subconjunto limitado $B \subset X$ temos

$$\lim_{t \to \infty} \operatorname{dist}(\varphi(t,\eta(-t))B, A(\sigma)) = 0.$$

O próximo resultado pode ser encontrado em [15], Proposições 3.30 e 3.31 ou em [4], Teorema 3.4.

Teorema 3.9: *Seja $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$ um sistema dinâmico não autônomo, onde $\{\theta_t\colon t \geq 0\}$ tem um atrator global Ξ e é um grupo sobre Ξ, e seja $\{\Pi(t)\colon t \geq 0\}$ o semifluxo produto skew associado em $X \times \Sigma$ com um atrator global $\mathbb{A}$. Então $\{A(\sigma)\}_{\sigma \in \Xi}$ com $A(\sigma) = \{x \in X\colon (x,\sigma) \in \mathbb{A}\}$ é o atrator cociclo de $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$.*

Observação 3.10: Observe que caso Σ seja compacto e invariante, o atrator cociclo é definido em Σ, ou seja, nas condições do teorema anterior, existe o atrator cociclo $\{A(\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma}$ com $A(\sigma)=\{x\in X\colon (x,\sigma)\in\mathbb{A}\}$.

Acabamos de verificar que a existência de um atrator global para o semifluxo produto skew $\{\Pi(t)\colon t\geq 0\}$ implica a existência de um atrator cociclo para o sistema dinâmico não autônomo $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$. Porém, sem condições adicionais, o inverso não vale. De fato, podemos ver que o atrator cociclo não precisa ser um conjunto limitado (veja, por exemplo, [19]), enquanto o atrator global de $\{\Pi(t)\colon t\geq 0\}$ deve ser compacto.

No entanto, o resultado a seguir nos dá o inverso de modo parcial. Aqui assumimos que Σ é compacto, invariante e $\{\theta_t\colon t\geq 0\}$ um grupo sobre Σ. Como referência, podemos consultar [15], Proposição 3.32 ou [4], Teorema 3.4.

Teorema 3.11: *Suponhamos que $\{A(\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma}$ é o atrator cociclo de $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$, $\{\Pi(t)\colon t\geq 0\}$ é o semifluxo produto skew associado. Suponha que $\{A(\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma}$ seja atraído uniformemente, ou seja, para um subconjunto limitado Υ de Σ,*

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{\sigma\in\Upsilon}\operatorname{dist}(\varphi(t,\theta_{-t}\sigma)D,A(\sigma))=0,$$

e $\bigcup_{\sigma\in\Sigma}A(\sigma)$ é pré-compacto em X. Então o conjunto $\mathbb{A}$ associado com $\{A(\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma}$, dado por

$$\mathbb{A}=\bigcup_{\sigma\in\Sigma}A(\sigma)\times\{\sigma\}$$

é o atrator global do semigrupo $\{\Pi(t)\colon t\geq 0\}$.

Agora podemos reinterpretar os Teoremas 3.9 e 3.11.

Teorema 3.12: *Suponhamos que o sistema dinâmico não autônomo $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$ é uniformemente assintoticamente compacto. Então ele tem um atrator $\mathscr{A}$ e um atrator cociclo $\{a(\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma}$ e disso*

$$\bigcup_{\sigma\in\Sigma}A(\sigma)=\mathscr{A}. \tag{3.6}$$

Vamos agora relacionar os sistemas dinâmicos não autônomos (cociclos) com os processos de evolução.

Assumamos que $\{\theta_t\colon t\geq 0\}$ tem um atrator global Ξ (mas não necessariamente um grupo sobre Ξ). Para cada $\sigma\in\Xi$ e cada solução global $\eta\colon\mathbb{R}\to\Xi$ sobre σ de $\{\theta_t\colon t\geq 0\}$, podemos construir, via sistema dinâmico não autônomo $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$ um processo de evolução como se segue: para $t\geq s\in\mathbb{R}$ defina

$$S_{\sigma,\eta}(t,s)=\varphi(t-s,\eta(s)).$$

Então, dados $\sigma\in\Sigma$ e uma solução global $\eta\colon\mathbb{R}\to\Xi$ através de $\{\theta_t\colon t\geq 0\}$, dizemos que a família $\{S_{\sigma,\eta}(t,s)\colon t\geq s\}$ é o *processo de evolução associado*.

Para o caso em que $\{\theta_t : t \geq 0\}$ é de fato um grupo sobre o atrator global Ξ para cada $\sigma \in \Xi$ existe apenas uma solução global $\eta : \mathbb{R} \to \Xi$ através de σ de $\{\theta_t : t \geq 0\}$ e denotamos o processo de evolução associado simplesmente por $S_\sigma(\cdot,\cdot)$.

Definição 3.13: Dada uma solução global limitada $\eta : \mathbb{R} \to \Sigma$ do sistema de condução $\{\theta_t : t \geq 0\}$ e dois conjuntos não autônomos $\{D(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ e $\{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, dizemos que $\{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ **η-atrai-pullback** $\{D(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ se

$$\lim_{t\to\infty} d_H(\varphi(t,\eta(s-t))D(s-t)A(s)) = 0, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Definição 3.14: Um **universo** $\mathscr{D}$ é uma coleção de conjuntos não-autônomos não vazios que é fechado com respeito ao conjunto inclusão, ou seja, se $\{D^1(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \in \mathscr{D}$ e $D^2(t) \subset D^1(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então $\{D^2(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \in \mathscr{D}$. Um **conjunto compacto não autônomo** $\{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \in \mathscr{D}_\eta$ é chamado de $(\mathscr{D},\eta)$-atrator pullback de $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$ se

1. $\{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é η-invariante;
2. $\{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é η-atrator pullback para todas as famílias $\{D(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \in \mathscr{D}$.

O resultado a seguir é uma consequência do Teorema 3.11 e mostra a relação entre o atrator global de um semifluxo produto skew e o atrator pullback do processo de evolução, caso ele tenha. Para demonstração, veja [2], Teorema 2.7.

Teorema 3.15: *Assumamos que o semifluxo produto skew $\{\Pi(t) : t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathbb{A}$, consequentemente, o sistema de condução $\{\theta_t : t \geq 0\}$ tem um atrator global Ξ. Se $\eta : \mathbb{R} \to \Xi$ é uma solução limitada global para $\{\theta_t : t \geq 0\}$ então o processo de evolução $\{S_\eta(t,s) : t \geq s\}$ dado por*

$$S_\eta(t,s)u = \varphi(t-s,\eta(s))u, \quad u \in X,$$

possui um $(\mathscr{D},\eta)$-atrator pullback $\{\mathscr{A}_\eta(t) : t \in \mathbb{R}\}$ onde $\mathscr{D}$ é a coleção de conjuntos não autônomos $\{D(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ tal que $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} D(t)$ é limitado em X. Além disso,

$$\mathbb{A} = \left\{ \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathscr{A}_\eta(t) \times \{\eta(t)\}, \eta(\cdot) \textit{ é uma solução global limitada para } \{\theta_t : t \geq 0\} \right\}$$

Corolário 3.16: *Sob as hipóteses do Teorema 3.15, o sistema dinâmico não autônomo $(\varphi,\theta)_{(X,\Sigma)}$ tem um atrator uniforme $\mathscr{A}$ e*

$$\mathscr{A} = \Pi_x \mathbb{A} = \bigcup_{\eta} \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathscr{A}_\eta(t)$$

onde a primeira união é tomada sob todas as soluções globais limitadas $\eta : \mathbb{R} \to \Sigma$ de $\{\theta_t : t \geq 0\}$.

Referências Bibliográficas

[1] Babin, A.V. e Vishik, M.I.: *Attractors in Evolutionary Equations*. Studies in Mathematics and its Applications, 25, 1992.

[2] Bortolan, M. C., Caraballo, T., Carvalho, A. N. e Langa, J. A.: *Skew product semiflows and Morse decomposition*. Journal of Differential Equations, 255(8):2436–2462, 2013, ISSN 0022-0396. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039613002660.

[3] Bortolan, M.C., Carvalho, A.N. e Langa, J.A.: *Structure of attractors for skew product semiflows*. Journal of Differential Equations, 257(2):490–522, 2014, ISSN 0022-0396. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039614001521.

[4] Caraballo, T., Jara, J. C., Langa, J. A. e Liu, Z.: *Morse Decomposition of Attractors for Non-autonomous Dynamical Systems*. Advanced Nonlinear Studies, 13(2):309–329, 2013. https://doi.org/10.1515/ans-2013-0204.

[5] Carvalho, A. N., Langa, J. A. e Robinson, J.: *Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems*, volume 182. Springer Science & Business Media, 2012. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4581-4.

[6] Carvalho, A. N., Langa, J. A., Robinson, J. e Suárez, A.: *Characterization of non-autonomous attractors of a perturbed infinite-dimensional gradient system*. Journal of Differential Equations, 236(2):570–603, 2007.

[7] Cheban, D., Kloeden, P. E. e Schmalfuß, B.: *The relationship between pullback, forwards and global attractors of nonautonomous dynamical systems*. Nonlinear Dyn. Syst. Theory, 2(2):125–144, 2002.

[8] Chepyzhov, V. V. e Vishik, M. I.: *Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension*. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 73(3):279–333, 1994.

[9] Chepyzhov, V. V. e Vishik, M. I.: *Attractors for Equations of Mathematical Physics*. Colloquium Publications, 49, 2001.

[10] Chepyzhov, V. V. e Vishik, M. I.: *Attractors for equations of mathematical physics*, volume 49. American Mathematical Soc., 2002. https://doi.org/10.1090/coll/049.

[11] Hale, J.: *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*. Em *AMS*, 1988. https://doi.org/10.1007/978-3-642-86458-2_14.

[12] Haraux, A.: *Systemes dynamiques dissipatifs et applications*, volume 17. Elsevier Masson, 1991.

[13] Kloeden, P. E.: *Pullback attractors in nonautonomous difference equations*. Journal of Difference Equations and Applications, 6(1):33–52, 2000. https://doi.org/10.1080/10236190008808212.

[14] Kloeden, P. E.: *Pullback attractors of nonautonomous semidynamical systems*. Stochastics and Dynamics, 3(01):101–112, 2003. https://doi.org/10.1142/S0219493703000632.

[15] Kloeden, P. E. e Rasmussen, M.: *Nonautonomous dynamical systems*. Número 176 em *1*. American Mathematical Soc., 2011. https://doi.org/10.1090/surv/176/01.

[16] Kloeden, P. E. e Stonier, D. J.: *Cocycle attractors in nonautonomously perturbed differential equations*. Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems, 4(2):211–226, 1998.

[17] Ladyzhenskaya, O. A.: *Attractors for Semigroups and Evolution Equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991. https://doi.org/10.1017/CBO9780511569418.

[18] Langa, J. A., Robinson, J. e A, Suarez: *Stability, instability, and bifurcation phenomena in non-autonomous differential equations*. Nonlinearity (Bristol. Print), 15(3):887–903, 2002. https://doi.org/10.1088/0951-7715/15/3/322.

[19] Langa, J. A., Suárez, A. *et al.*: *Pullback permanence for non-autonomous partial differential equations*. Electronic Journal of Differential Equations, 2002 (72), 1-20., 2002.

[20] Robinson, J.: *Infinite-Dimensional Dynamical Systems: From Basic Facts to Actual Calculations, Cambridge Univ*. Pres, Cambridge, UK, 2001.

[21] Schmalfuss, B.: *Backward cocycles and attractors of stochastic differential equations*. Em *International Seminar on Applied Mathematics-Nonlinear Dynamics: Attractor Approximation and Global Behavior*, páginas 185–192, 1992.

[22] Sell, G. R.: *Nonautonomous differential equations and topological dynamics I. The basic theory*. Transactions of the American Mathematical Society, 127(2):241–262, 1967. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1967-0212313-2.

[23] Sell, G. R. e You, Y.: *Dynamics of evolutionary equations*, volume 143. Springer, 2002. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-5037-9.

[24] Temam, R.: *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*. New York, 68, 1988. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-0313-8.

[25] Vishik, M. I.: *Asymptotic behaviour of solutions of evolutionary equations*. Cambridge University Press, 1992. https://doi.org/10.1017/CBO9780511608780.

[26] Zill, D. G.: *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*. Thomson, 2003.

[27] Zill, D. G.: *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*. São Paulo: Cengage Learning, 2011.