

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

LÓREN GRACE KELLEN MAIA AMORIM

**EQUAÇÕES DO 2º GRAU E O SISTEMA DIDÁTICO ZANKOVIANO: UM OLHAR
PARA O DESENVOLVIMENTO DO ESTUDANTE**

UBERLÂNDIA

2022

LÓREN GRACE KELLEN MAIA AMORIM

**EQUAÇÕES DO 2º GRAU E O SISTEMA DIDÁTICO ZANKOVIANO: UM OLHAR
PARA O DESENVOLVIMENTO DO ESTUDANTE**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Uberlândia, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Educação.

Linha de Pesquisa: Educação em Ciências e Matemática

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Fabiana Fiorezi de Marco.

UBERLÂNDIA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

A524e
2022 Amorim, Lóren Grace Kellen Maia, 1982-
Equações do 2º grau e o sistema didático Zankoviano [recurso eletrônico]: um olhar para o desenvolvimento do estudante / Lóren Grace Kellen Maia Amorim Amorim. - 2022.

Orientadora: Fabiana Fiorezi de Marco.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Educação.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.te.2022.5322>

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Educação. I. Marco, Fabiana Fiorezi de, 1974-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Educação. III. Título.

CDU: 37

Rejâne Maria da Silva
Bibliotecária - CRB-6/1925



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Educação
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1G, Sala 156 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3239-4212 - www.ppged.faced.ufu.br - ppged@faced.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Educação				
Defesa de:	Tese de Doutorado Acadêmico, 12/2022/316, PPGED				
Data:	Seis de junho de dois mil e vinte e dois	Hora de início:	[14:00]	Hora de encerramento:	[18:00]
Matrícula do Discente:	11813EDU026				
Nome do Discente:	LOREN GRACE KELLEN MAIA AMORIM				
Título do Trabalho:	"Equações do 2º grau e o sistema didático zankoviano: um olhar para o desenvolvimento do estudante"				
Área de concentração:	Educação				
Linha de pesquisa:	Educação em Ciência e Matemática				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	"Formação continuada de professores que ensinam matemática: um estudo sob a perspectiva histórico-cultural"				

Reuniu-se, através do serviço de Conferência Web da Rede Nacional de Pesquisa - RNP, da Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Educação, assim composta: Professores Doutores: Maria do Carmo de Sousa - UFSCar; Orlando Fernández Aquino - UNIUBE; Andréa Maturano Longarezi - UFU; Guilherme Saramago de Oliveira - UFU e Fabiana Fiorezi de Marco Matos - UFU, orientadora da candidata.

Iniciando os trabalhos a presidente da mesa, Dra. Fabiana Fiorezi de Marco Matos - UFU, apresentou a Comissão Examinadora e o candidata, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovada.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Fabiana Fiorezi de Marco Matos, Professor(a) do Magistério Superior**, em 06/06/2022, às 18:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.



Documento assinado eletronicamente por **Andrea Maturano Longarezi, Professor(a) do Magistério Superior**, em 07/06/2022, às 09:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.



Documento assinado eletronicamente por **ORLANDO FERNANDEZ AQUINO, Usuário Externo**, em 07/06/2022, às 09:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.



Documento assinado eletronicamente por **Maria do Carmo de Sousa, Usuário Externo**, em 07/06/2022, às 19:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.



Documento assinado eletronicamente por **Guilherme Saramago de Oliveira, Professor(a) do Magistério Superior**, em 09/06/2022, às 10:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3635290** e o código CRC **095D63A0**.

*À minha mãe, Gislene; ao meu pai, Paulo (in
memoriam); ao meu esposo, Wesley, pelo amor,
apoio e incentivo incondicional em toda as fases de
minha vida, dedico este trabalho.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por ser presente em todos os momentos da minha vida. Por me dar força, ser meu consolo durante essa caminhada e pelos sinais de ter escolhido o caminho certo.

Ao meu amado esposo, Wesley, pelo companheirismo incondicional, por ouvir meus desabafos, por não se importar com o meu isolamento e por dividir nosso tempo de lazer com os pesquisadores russos e estudiosos da Teoria Histórico-Cultural, uma vez que precisei aprofundar nas leituras de textos para compreender; pela ajuda nas digitações dos textos em espanhol; pela companhia nas madrugadas que passava acordada estudando, bem como pelos chocolates para me tranquilizar ou tentar amenizar a minha falta de humor. Agradeço por me apoiar e incentivar a ir atrás dos meus sonhos. Amo-te!

À minha mãe, Gislene, matriarca da família, que sempre, com amor e carinho, apoiou, cuidou, incentivou, aconselhou e orou para que conquistasse minhas metas acadêmicas. Sempre se doou para criar a mim e meus irmãos da melhor forma possível. Você é minha vida!

Sou agraciada pelos meus dois irmãos, Lauro e Lorena, que, juntamente da minha cunhada, Cristiane, e do meu cunhado, Arnaldo, com zelo, amor, carinho e oração, me ouviram, vibraram a cada passo, se desesperaram e estiveram presentes em toda essa jornada. Gratidão aos meus estimados sobrinhos, Maria Eduarda, Daniel, Paulo Victor e Sara, que proporcionaram momentos de alegria e descontração durante toda esta caminhada. Vocês são incríveis!

Sou grata pela minha sogra e meu sogro, Célia e Sandoval, que sempre demonstraram afeto, compreensão, acolhimento e cuidados quando precisei descansar para repor as energias. Além disso, não mediram esforços ao desistirem de estar com toda a família e amigos, na chácara, para me oferecerem um ambiente harmonioso e tranquilo para estudo. Agradeço a Deus pela vida de vocês!

Com grande aperto no coração, agradeço à minha avó materna, Maria Aparecida dos Santos Garcia (*in memoriam*), que, enquanto em vida, me apresentava em suas orações, torcia para meu sucesso acadêmico e sempre usava palavras de consolo quando me sentia ansiosa. Aos meus avós paternos, Maria Aparecida Maia e Baltazar Ferreira Maia (*in memoriam*), pelas risadas, boas horas de conversas, carinho e oração.

Aos meus amigos e irmãos em Cristo, Marta e Eurivaldo (*in memoriam*), pelos vinte e três anos de caminhada, com muitos conselhos e puxões de orelha, consolos, orações e amizade

verdadeira. Ao Sinvaldo, por acreditar que tudo daria certo e pelas orações. Deus abençoe vocês por tudo!

A toda a minha família, por ser presente e amorosa em todos os momentos! Vocês fazem parte do que sou hoje.

Durante todo esse processo de pesquisa, a minha gratidão aumentava cada dia mais pela minha admirada orientadora Prof.^a Dr.^a Fabiana Fiorezi de Marco, que, com muita sabedoria e cuidado, não mediu esforços em fazer leituras atenciosas, correções cautelosas, reuniões esclarecedoras e questionamentos que me colocaram em movimento e desenvolvimento. Grata pela sua ética, conhecimento, opiniões produtivas e competência. Gratidão!

Aos professores Andréa Maturano Longarezi, Elenita Pinheiro de Queiroz Silva, Maria do Carmo de Sousa, Maria Teresa Menezes Freitas e Orlando Fernández Aquino, que disponibilizaram tempo para ler, dar sugestões, enriquecer o trabalho com suas observações significativas e por compartilharem seus conhecimentos no exame de qualificação e na defesa deste estudo. Grata!

Agradeço à Mariana, que além de amiga, é minha irmã, que se sentou ao meu lado, me incentivou, torceu, orou, leu, corrigiu e deu o seu melhor para que me sentisse bem, confiante e alcançasse meu objetivo. Te amo, amiga!

À Beatriz, que se dedicou à leitura do texto, muitas vezes, renunciando ao seu tempo com a família, me dando suporte, contribuindo para o meu processo de *obutchénie* e desenvolvimento, mostrando apoio, gentileza e carinho. Amiga, você mora no meu coração e não paga aluguel!

Às minhas amigas, terapeutas e conselheiras, que se dedicaram às leituras dos textos, fazendo recomendações imperdíveis: Adriana, Bel, Daniela, Márcia e Sara. Mulheres deslumbrantes!

À minha amiga, Selma Vieira, e à minha amada sobrinha, Maria Eduarda Maia, pelas leituras criteriosas, pelas boas conversas e risadas. Aproveito para reforçar minha gratidão pelas traduções dos textos em espanhol para português que ambas fizeram. E à Duda, que ainda aceitou caminhar comigo, lado a lado, nas traduções dos textos do russo para o português. A estes, obrigada por fazerem companhia nesta tarefa árdua e que nos exigiu muito tempo. Não teria dado conta sem vocês. Obrigada!

Meus agradecimentos vão também para os estudantes protagonistas da pesquisa, aos professores de Ciências, Educação Física e Língua Portuguesa e gestores da escola onde a pesquisa foi desenvolvida. Obrigada por aceitarem e participarem desta proposta, acreditando

nos benefícios da pesquisa, e mostrarem grande respeito pelo trabalho. Há uma parte de vocês e da escola na minha história. GRATIDÃO!

Ao Grupo de Estudos e Pesquisas em Ensino de Matemática e Atividade Pedagógica, também ao Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática e Desenvolvimento Profissional Docente. Ambos, a cada encontro, me fizeram ter um olhar diferente sobre a Teoria Histórico-Cultural e contribuíram para meu desenvolvimento. Obrigada, Bruno, Eivelton, Leonardo, Sara e Sônia, pelos textos compartilhados, pelos pitacos e por me escutarem nos momentos em que eu precisava mais falar do que ouvir. Muito obrigada!

A todos os professores e colegas do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Uberlândia, pelas ricas discussões que contribuía para o meu desenvolvimento intelectual.

Termino este agradecimento com a frase do livro “O pequeno príncipe”: *“Aqueles que passam por nós não vão sós, não nos deixam sós. Deixam um pouco de si, levam um pouco de nós.”* E é isso. Em mim, carrego um pouco de cada um de vocês. GRATIDÃO ETERNA!

RESUMO

Esta pesquisa, fundamentada no materialismo histórico-dialético, assume relevância na área de Educação e de Educação Matemática devido ao acesso limitado, no Brasil, às obras e produções de L. V. Zankov e às contribuições dos elementos didáticos e metodológicos do sistema zankoviano para o processo de *obutchénie* e desenvolvimento de conceitos matemáticos e para a Teoria da *Obutchénie* Desenvolvimental. Na busca de resposta à questão central - *quais as contribuições do processo de obutchénie de equações do 2º grau baseado no sistema zankoviano para o desenvolvimento do estudante?* -, traçamos como objetivo geral analisar as contribuições do processo de *obutchénie* de equações do 2º grau baseado no sistema zankoviano para o desenvolvimento do estudante. Como objetivos específicos, buscamos investigar potencialidades e/ou limites de tarefa, composta por sete etapas, elaborada nos princípios do sistema zankoviano, para o desenvolvimento integral dos estudantes, e analisar possíveis contribuições de um experimento microciclo organizado na perspectiva do sistema zankoviano, para o processo de *obutchénie* do conceito de equações do 2º grau. Utilizamos o experimento microciclo como a metodologia de pesquisa, sendo realizado com 24 estudantes do nono ano do ensino fundamental de uma escola pública de Uberlândia- MG. Foi organizada uma tarefa educativa constituída de sete etapas. Para efeito de análise, organizamos o material empírico em dois isolados, constituídos por episódios e cenas, discutindo os movimentos viabilizados no desenrolar das etapas da tarefa, assim como as ações e reflexões dos estudantes perante as situações-problemas propostas. Por meio das análises realizadas, há evidências de que os estudantes se apropriaram do conceito de equações de 2º grau e da relevância dos conceitos de fluência, variável, campo de variação e linguagem algébrica para o processo de *obutchénie* da álgebra. Durante o processo, os estudantes justificaram suas ações mediante às necessidades que os impulsionaram, permitindo a atribuição de nova qualidade ao desenvolvimento do conhecimento teórico. Além disso, a tarefa organizada segundo os princípios zankovianos possibilitou o desenvolvimento dos estudantes nas dimensões cognitiva, ética, moral, emocional e volitiva, concatenado com a apropriação do conceito de equações do 2º grau.

Palavras-chaves: *Obutchénie*. Desenvolvimento integral do estudante. Equação do 2º grau. Sistema zankoviano. Educação Matemática.

ABSTRACT

This research, based on historical-dialectical materialism, assumes relevance in the area of Education and Mathematics Education due to the limited access, in Brazil, to the works and productions of L. V. Zankov and the contributions of the didactic and methodological elements of the Zankovian system to the process of *obutchénie* and development of mathematical concepts and to the Theory of Developmental *Obutchénie*. In the search for an answer to the central question - what are the contributions of the process of *obutchénie* of 2nd degree equations based on the Zankovian system for the development of the student? -we set as a general objective to analyze the contributions of the process of *obutchénie* of 2nd grade equations based on the Zankovian system for the development of the student. As specific objectives, we sought to investigate potentialities and/or limits of a task, composed of seven steps, elaborated in the principles of the Zankovian system, for the integral development of the students, and to analyze possible contributions of a microcycle experiment organized in the perspective of the Zankovian system, for the process of *obutchénie* of the 2nd degree equations concept. We used the microcycle experiment as the research methodology, being carried out with 24 ninth grade students from a public school in Uberlândia - MG. An educational task consisting of seven steps was organized. For analysis purposes, we organized the empirical material in two isolates, consisting of episodes and scenes, discussing the movements made possible in the unfolding of the stages of the task, as well as the students' actions and reflections when facing the proposed problem situations. Through the analyses performed, there is evidence that students have appropriated the concept of 2nd degree equations and the relevance of the concepts of fluency, variable, variation field and algebraic language for the process of *obutchénie* of algebra. During the process, students justified their actions by means of the needs that drove them, allowing the attribution of new quality to the development of theoretical knowledge. Moreover, the task organized according to Zankovian principles allowed the development of the students' cognitive, ethical, moral, emotional and volitive dimensions, concatenated with the appropriation of the concept of 2nd degree equations.

Keywords: *Obutchénie*. Integral development of the student. Equation of the 2nd degree. Zankovian system. Mathematics education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Resultados da pesquisa	72
Figura 2 - Resultados da pesquisa – 2ª fase.....	74
Figura 3 - Representação geométrica da expressão $x^2 + 10x$	95
Figura 4 - Método Al-Khowârizmî – Completando o quadrado	95
Figura 5 - Registro do estudante Henrique.....	124
Figura 6 - Registro do estudante João	124
Figura 7 - Registro da estudante Maria	124
Figura 8 - Registro do estudante Pedro	125
Figura 9 - Grupo A - Henrique, João, Maria e Pedro	133
Figura 10 - Registro do estudante Paulo.....	135
Figura 11 - Registro da estudante Fran.....	137
Figura 12 - Registro da estudante Luana	147
Figura 13 - Registro da estudante Sara.....	152
Figura 14 - Registro da dupla – Paula e Luana	155
Figura 15 - Quadro da etapa 6 - Direto do túnel do tempo.....	161
Figura 16 - Registro da estudante Sara.....	164
Figura 17 - Registro da estudante July	165
Figura 18 - Situação-problema da etapa 1 – Trajetória da bola.....	218
Figura 19 - Situação-problema da etapa 2 - Índice de massa corporal.....	220
Figura 20 - Print da tela do vídeo: Como o seu metabolismo influencia a perda de peso	221
Figura 21 - Texto Metabolismo lento ou acelerado?.....	222
Figura 22 - Situação-problema da etapa 6 - Direto do Túnel do tempo	229

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Resultados da busca no Banco de Teses e dissertações do sítio da CAPES	76
Quadro 2 - Organizador Curricular 9º ano - Unidade temática: Álgebra	85
Quadro 3 - Solução de uma equação pelo método algébrico de completar quadrado.....	96
Quadro 4 - Proposições do sistema didático zankoviano e a organização didática do processo de <i>obutchénie</i> de Equação do 2º grau	105
Quadro 5 - Descrição da composição dos grupos.....	109
Quadro 6 - Tarefa: Formação do conceito de equações do 2º grau	113
Quadro 7 - Composição dos isolados	118

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EaD	Educação a distância
GEPEDI	Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática e Desenvolvimento Profissional Docente
GPEMAPe	Grupo de Estudos e Pesquisas em Ensino de Matemática e Atividade Pedagógica
THC	Teoria Histórico-Cultural
ZDP	Zona de Desenvolvimento Possível

SUMÁRIO

1	COMO TUDO COMEÇOU.....	17
1.1	Caminhos trilhados para a escolha do objeto de estudo e a escolha da teoria de Zankov	18
1.2	A problemática e os objetivos da pesquisa	21
1.3	Os movimentos da pesquisa e as opções metodológicas de investigação	28
2	O SISTEMA ZANKOVIANO: PRESSUPOSTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS.....	31
2.1	Leonid Vladimirovich Zankov e a implantação do sistema didático desenvolvimental zankoviano na antiga União Soviética.....	32
2.2	Princípios psicológicos do sistema didático experimental de L. V. Zankov	40
2.3	Princípios didáticos do sistema zankoviano	48
2.3.1	Primeiro Princípio: <i>Obutchénie</i> em um nível desafiador de dificuldade.....	50
2.3.2	Segundo princípio: Enfatizar a <i>obutchénie</i> dos conhecimentos teóricos.....	52
2.3.3	Terceiro princípio: Ritmo ativo e crescente da <i>obutchénie</i>	53
2.3.4	Quarto princípio: Desenvolver a consciência dos estudantes em relação ao processo de <i>obutchénie</i>	55
2.3.5	Quinto princípio: Organizar aulas para promover o desenvolvimento intencional e sistemático de cada estudante	56
2.4	O processo de desenvolvimento dos estudantes no sistema zankoviano	57
2.4.1	Atividade de observação	58
2.4.2	Atividade mental ou do pensamento.....	59
2.4.3	Atividades práticas.....	62
2.5	Singularidades de uma boa aula para L. V. Zankov e as orientações metodológicas do sistema zankoviano	63
3	UM OLHAR PARA O CONCEITO DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU	70
3.1	Um olhar para as pesquisas acadêmicas sobre equação do 2º grau.....	71
3.2	Álgebra na BNCC e os conceitos algébricos desenvolvidos na pesquisa	83
3.3	Movimento das equações, realizado no Mundo Árabe e na Índia	92
3.3.1	No mundo Árabe.....	93
3.3.2	Índia	96
4	CAMINHOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA	98
4.1	O experimento didático-formativo como metodologia.....	99

4.2	Os primeiros passos da investigação	103
4.2.1	Etapas do sistema zankoviano e do experimento microciclo proposto nesta pesquisa	104
4.2.2	Caracterização da escola e dos estudantes participantes da pesquisa	106
4.3	Organização da tarefa proposta	110
4.4	Produção do material empírico e recursos utilizados.....	115
4.5	Isolados e os episódios	116
5	O MOVIMENTO DE APROPRIAÇÃO DO CONCEITO DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU E O DESENVOLVIMENTO INTEGRAL DO ESTUDANTE.....	119
5.1	Relação entre conceitos teóricos, emoção e a vontade.....	120
5.1.1	Episódio 1: A formação de atividades mentais para o desenvolvimento dos conceitos algébricos	121
5.1.1.1	<i>Cena 1.1: Compreendendo equações do 2º grau incompletas</i>	122
5.1.1.2	<i>Cena 1.2: Sistematização da obutchénie e desenvolvimento</i>	136
5.1.2	Episódio 2: Desenvolvimento de confiança impulsionada pela colaboração entre os envolvidos na apreensão do conceito de equação do 2º grau	148
5.1.2.1	<i>Cena 2.1: Diferentes formas de orientar o processo de obutchénie dos colegas à luz das interlocuções entre os integrantes dos grupos</i>	<i>149</i>
5.1.2.2	<i>Cena 2.2: Compreender as soluções para justificar e despertar nos colegas um novo olhar.....</i>	<i>156</i>
5.1.2.3	<i>Cena 2.3: Interlocuções que revelam momentos em que o trabalho em grupo foram fundamentais para o processo de obutchénie e desenvolvimento dos estudantes</i>	<i>166</i>
5.2	Desenvolvimento do estudante nas dimensões ética, moral e conscientização sobre saúde.....	171
5.2.1	Episódio 3: O processo de <i>obutchénie</i> de conceito de equações do 2º grau viabilizando o desenvolvimento integral do estudante.....	171
5.2.1.1	<i>Cena 3.1: Momentos propícios para o desenvolvimento da ética e da moral</i>	<i>172</i>
5.2.1.2	<i>Cena 3.2: Desdobramento da etapa índice de massa corporal para conscientização e apropriação de conceitos relacionados a saúde</i>	<i>181</i>
6	AS TRILHAS DA INVESTIGAÇÃO E O DESENVOLVIMENTO DA PESQUISADORA.....	195

REFERÊNCIAS.....	208
APÊNDICE 1 - TAREFA E AÇÕES DESENVOLVIDAS NO EXPERIMENTO DIDÁTICO PROPOSTO NESTA PESQUISA.....	217
APÊNDICE 2 - ETAPA 1: TRAJETÓRIA DA BOLA - PRIMEIRA, SEGUNDA, TERCEIRA E QUARTA AULAS.....	218
APÊNDICE 3 - ETAPA 2: ÍNDICE DE MASSA CORPORAL - QUINTA, SEXTA, SÉTIMA E OITAVA AULAS	220
APÊNDICE 4 - ETAPA 3: A ÁREA DO CAMPO DE FUTEBOL EM FUNÇÃO DA LARGURA DO CAMPO – NONA, DÉCIMA, DÉCIMA PRIMEIRA E DÉCIMA SEGUNDA AULAS.....	224
APÊNDICE 5 - ETAPA 4: COMPREENDENDO COMO OS ÁRABES RESOLVIAM EQUAÇÃO DO 2º GRAU - DÉCIMA TERCEIRA, DÉCIMA QUARTA, DÉCIMA QUINTA AULAS.....	226
APÊNDICE 6 - ETAPA 5: RESOLVENDO EQUAÇÕES DO 2º GRAU POR PRODUTOS NOTÁVEIS - DÉCIMA SEXTA, DÉCIMA SÉTIMA E DÉCIMA OITAVA AULAS.....	227
APÊNDICE 7 - ETAPA 6: DIRETO DO TÚNEL DO TEMPO - DÉCIMA NONA, VIGÉSIMA, VIGÉSIMA PRIMEIRA AULAS.....	228
APÊNDICE 8 - ETAPA 7: REGISTRANDO AS ATIVIDADES MENTAIS - VIGÉSIMA SEGUNDA, VIGÉSIMA TERCEIRA E VIGÉSIMA QUARTA AULA.....	231

1 COMO TUDO COMEÇOU...

Nós nos transformamos em nós mesmos por meio dos outros.¹
(VYGOTSKI, 1995, p. 118, tradução nossa)

Ter nas mãos ou na tela do computador o texto desta tese é a primeira atitude de quem se encontra impulsionado para leitura, o que, provavelmente, foi provocado pelo título. Em forma sintética, o título apresenta o que está descrito no texto e se caracteriza como um convite a um início de cumplicidade com a pesquisadora, a qual, por necessidade, se viu estimulada a investigar sobre o tema. A intenção é comunicar com outros pesquisadores e professores os resultados da relação da *obutchénie*² e desenvolvimento³ de estudantes de nono ano em aulas de matemática, que contribuiu para a apropriação do conceito de equações do 2º grau, além do desenvolvimento deles nas dimensões volitiva, emotiva, moral e ética, em virtude da relação com outro, como descrito na epígrafe, e pela individualidade, como complementa Zankov (1963, 1968, 1984).

Dessa forma, destacamos que esta pesquisa, realizada de março de 2018 a maio de 2022, se desenvolve como parte de um projeto de maior abrangência, intitulado “Formação continuada de professores que ensinam matemática: um estudo sob a perspectiva histórico-cultural”, financiado pela FAPEMIG (Processo APQ-03108-17), coordenado pela orientadora da pós-graduanda, cujo texto da tese ora se apresenta. A pesquisa se inscreve, também, na linha de pesquisa “Educação em Ciências e Matemática”, do Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade Federal de Uberlândia e no Grupo de Estudos e Pesquisas em Ensino de Matemática e Atividade Pedagógica (GEPEMAPE)⁴.

¹ “[...] que pasamos a ser nosotros mismos a través de otros [...]” (VYGOTSKI, 1995, p. 118).

² “*Obutchénie* é interação entre alunos e professores, a inter-relação entre a *utchenia* (aprendizagem) e os esforços profissionais do professor (se essa interação for compreendida com a noção de ‘atividade’, então a *obutchénie* pode ser caracterizada como uma correlação entre atividade de estudo e atividade pedagógica).” (DAVIDOV, 1996, p. 252 *apud* LONGAREZI; DIAS DE SOUSA, 2018, p. 457, tradução das autoras). De acordo com Longarezi (2017, 2020a, 2020b, 2021b) e Longarezi e Silva (2018), não há um consenso em relação à tradução do termo para português, o qual é referenciado nas obras em português como ensino, como aprendizagem, educação, instrução ou estudo, porém compreendemos que nenhuma contempla o todo do conceito e optamos por utilizar sua forma transliterada ao longo da tese.

³ Optamos por utilizar a relação *obutchénie* e desenvolvimento fundamentado em Vigotsky (2007b, p. 39), que ressalta que “o processo de desenvolvimento não coincide com a *obutchénie*, o processo de desenvolvimento segue a *obutchénie*, a que gera a área do desenvolvimento potencial.” No texto em espanhol, traduziu-se o termo *obutchénie* por aprendizagem, mas como mencionado na nota anterior, essa tradução dificulta a compreensão apropriada do conceito e também modifica a ideia proposta pelo autor. Por isso, optamos pela sua forma transliterada.

⁴ O Grupo de Estudos e Pesquisa em Ensino de Matemática e Atividade Pedagógica (GEPEMAPE), criado em 2015 pela Prof.^a Dr.^a Fabiana Fiorezi de Marco, é formado por pesquisadores e estudantes de pós-graduação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECM/FAMAT) e do Programa de Pós-

Com o intuito de instigar o leitor a conhecer toda a caminhada da pesquisa, apresentamos, inicialmente, os caminhos trilhados até a escolha do objeto de estudo e do sistema de Leonid Vladimirovich Zankov (L. V. Zankov), a problemática, os objetivos e, por último, mencionamos, de forma sucinta, o que o leitor encontrará nas seções deste texto. Esta primeira seção do texto, intitulada “*Como tudo começou...*”, apresenta minúcias de momentos pessoais da pesquisadora e, sendo assim, a narrativa, em alguns instantes, será apresentada em uma escrita redigida na primeira pessoa.

1.1 Caminhos trilhados para a escolha do objeto de estudo e a escolha da teoria de Zankov

A gênese da pesquisa relaciona-se com a minha trajetória de professora⁵, vivenciada em duas etapas na Educação Básica e na minha experiência no Ensino Superior como tutora a distância do curso de Graduação em Licenciatura Plena em Matemática (EaD).

O entrelaçar dessas experiências, ora na rede Municipal, como professora do 6º ao 9º ano, vice-diretora e formadora de Matemática; outrora na rede estadual, como professora do 1º ao 3º ano do ensino médio; ora na rede privada, como professora de 8º ano, 9º ano e 3º ano do ensino médio e outrora na rede Federal, como professora do 5º ano e como tutora de algumas disciplinas, compõem os traços da minha personalidade, além de os traços da pesquisadora.

Essas foram as conjunturas favoráveis para gerar em mim várias indagações relacionadas ao processo de *obutchénie* de equação de 2º grau e ao desenvolvimento do estudante, discutidas nesta pesquisa. Tempo de muito trabalho e estudo, em que a necessidade de contribuir para o desenvolvimento dos estudantes mediante à apropriação de conceitos matemáticos abrangendo perspectivas como humana, social, cultural e afetiva.

Diante dessas inquietações, o desejo de compreender a Teoria Histórico-Cultural (THC) surgiu no decorrer do meu processo formativo e dos diálogos estabelecidos com os meus pares. Assim, participei do curso “A organização do ensino de geometria com professores da Educação Básica”, realizado de outubro de 2016 a março de 2017, sob a coordenação da Prof.^a Dr.^a Fabiana Fiorezi de Marco, com carga horária de 40 horas. O curso teve como objetivo

Graduação em Educação (PPGED/FACED), da linha de pesquisa Educação em Ciências e Matemática, ambos da Universidade Federal de Uberlândia (UFU/MG). Disponível em: <http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/1512313974318192> e <https://gepemapeufu.wixsite.com/gepemape>. Acesso em: 13 maio 2022.

⁵ A minha formação como professora ocorreu em 2007, em Licenciatura Plena em Matemática. Logo em seguida, iniciei minha trajetória docente como professora do ensino fundamental II e, desde 2012, sou professora efetiva na Rede Municipal de Uberlândia. Cursei especialização em Geometria pela Universidade Federal de Uberlândia (2010) e Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia (2016).

oferecer fundamentos teórico-metodológicos de geometria para a formação do professor de matemática, possibilitando vivência, produção, reflexão, proposição, análise e síntese de atividades de ensino em geometria.

Nesse curso, comecei a compreender um pouco a teoria e fomos desafiados a elaborar, em dupla, uma tarefa que abarcasse os conceitos de geometria, considerando seu movimento lógico-histórico. Planejar essa tarefa foi um desafio, pois não utilizava tal metodologia para ensinar e, na maioria das vezes, explorava a história da matemática apenas como curiosidade no desenvolvimento dos conteúdos.

Mesmo com pouco conhecimento relacionado à THC e com algumas inquietações que surgiram durante minhas experiências como professora do Ensino Fundamental (anos finais), do Ensino Médio e como tutora do curso de Graduação em Licenciatura Plena em Matemática, emergiu a escolha do objeto de estudo desta pesquisa: analisar as contribuições do processo de *obutchénie* de equações do 2º grau baseado no sistema zankoviano para o desenvolvimento integral⁶ do estudante.

Ao longo desses 14 anos de docência, percebi que os estudantes demonstravam muitas dificuldades em compreender os conceitos algébricos, por não terem desenvolvido o pensamento algébrico e a linguagem algébrica. Além disso, não atribuíam qualidade para o estudo de equação do 2º grau, mesmo que utilizasse diferentes métodos e recursos.

As dificuldades apresentadas por estudantes têm sido investigadas por diversos pesquisadores brasileiros, como Panossian (2008), que se empenhou em identificar a gênese de algumas dificuldades expressas pelos estudantes no que tange ao conhecimento algébrico; Lanner de Moura e Sousa (2008), que relatam que uma parte dos estudantes que buscam o curso Pedagogia se deve ao fato das dificuldades em conceitos matemáticos, em especial, com a álgebra, na Educação Básica.

As pesquisas realizadas por Pinto (1997) e Scarlassari (2007) concluíram que a dificuldade de estudante de 6ª série⁷ estava relacionada à interpretação das variáveis nas expressões algébricas.

Segundo Booth e Cook (1995), as dificuldades dos estudantes em compreender os conteúdos de álgebra levam a alguns erros que, na maioria das vezes, são comuns. O autor, no projeto de pesquisa *Strategies and Errors in Secondary Mathematics* (SESM), realizado no Reino Unido de 1980 a 1983, observou que os erros são atribuídos a aspectos tais como: “a) o foco da atividade algébrica e a natureza das ‘respostas’; b) notações e convenções em álgebra;

⁶ Utilizamos por sinônimos os termos “desenvolvimento integral” e “desenvolvimento geral”.

⁷ A 6ª série refere-se ao 7º ano atual.

c) o significado das letras e das variáveis; e, d) os tipos de relações e métodos usados em aritmética.” (BOOTH; COOK, 1995, p. 24).

Iniciei o doutorado decidida a investigar sobre o processo de *obutchénie* de equações do 2º grau e, após uma sugestão de leitura sobre o sistema zankoviano, percebi suas singularidades e possibilidades. Assim, enquanto buscava compreender o sistema zankoviano, as leituras, os estudos e os diálogos realizados no GEPEMAPE e no Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática e Desenvolvimento Profissional Docente (GEPEDI)⁸ foram fundamentais para compreensão da teoria histórico-cultural, visto que os momentos vivenciados me permitiam estar em atividade.

Além dessas leituras, consegui cursar duas disciplinas oferecidas pelo PPGED, *Tópicos Especiais em Educação em Ciências e Matemática II e Conhecimento Escolar e Ensino de Ciências e Matemática*, cujo foco estava na THC, na Atividade Pedagógica e na AOE. Nestas aulas, os diálogos e reflexões provocadas nos colocavam em movimento. Também, tive a feliz sorte de participar de três aulas relacionadas ao sistema zankoviano que foram ofertadas na disciplina *Tópico especiais em Saberes e Práticas Educativas: Didática Geral: bases psicológicas e pedagógicas* ministrada pelas professoras Andréa Maturano Longarezi, Camila Turati Pessoa e Flávia da Silva Ferreira Asbahr, estudo esse que revelou um leque de obras produzidas por L. V. Zankov que não eram de meu conhecimento.

As leituras realizadas nos grupos GEPEMAPE e GEPEDI, bem como nas disciplinas, foram substanciais para o meu desenvolvimento e base para estudos minuciosos relacionados à teoria de Vigotski e para as orientações metodológicas e princípio didático zankoviano que foram fundamentais para a elaboração da tarefa⁹ desenvolvida nas turmas de nonos anos de uma escola municipal de Uberlândia.

Após algumas leituras, decidi investigar sobre as contribuições da relação *obutchénie* e desenvolvimento em relação ao sistema proposto de Leonid Vladimirovich Zankov, considerando que nele é necessário valorizar as esferas da emoção e da vontade no

⁸ Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática Desenvolvemental e Profissionalização Docente (GEPEDI), criado em 2008 sob a liderança dos professores doutores Andréa Maturano Longarezi e Roberto Valdes Puentes, com a participação de pesquisadores doutores de diferentes instituições e estudantes de graduação e pós-graduação da Universidade Federal de Uberlândia. O grupo está vinculado à Linha de Pesquisa Saberes e Práticas Educativas do Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGED/FACED), da Universidade Federal de Uberlândia (UFU/MG). Site: <http://www.gepedi.faced.ufu.br/node/115>. Instagram: @didaticadesenvolvemental.ufu. Facebook: <https://instagram.com/didaticadesenvolvemental.ufu?igshid=YmMyMTA2M2Y=>. Acesso em: 14 jul. 2022.

⁹ Compreendemos que a tarefa, no sistema zankoviano, precisa ser desafiadora e apresentar qualidades novas que permitam que o intelecto do estudante seja desenvolvido com conteúdos novos e diversos, viabilizando que conhecimentos anteriores sejam reintroduzidos à medida que novos surjam. Além disso, é necessário que a tarefa contribua para o desenvolvimento do conhecimento teórico e abarque a assimilação das dependências e leis que regem os fenômenos, com intuito de compreender os conceitos para além dos aspectos externos. (ZANKOV, 1963, 1968, 1984).

desenvolvimento do pensamento, visando à transformação do estudante na sua totalidade. Além disso, o sistema zankoviano visa proporcionar um ambiente educacional que antecipa e cultiva o potencial dos estudantes. (AQUINO, 2017).

A organização e a sistematização da *obutchénie* precisam ativar os processos de desenvolvimento psicointelectuais do estudante, visto que a *obutchénie* precede o desenvolvimento. (VYGOSTSKY, 2007a). Leonid Vladimirovich Zankov enfatiza que uma boa aula necessita contemplar as seguintes características: perspectiva interdisciplinar; apresentação gradativa aumentada dos temas; elemento de promoção da curiosidade e inclusão de todos os envolvidos no processo. (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997).

Essas particularidades foram outros pontos determinantes para que eu decidisse apreender e pesquisar os princípios propostos por L. V. Zankov, visto que interdisciplinaridade é um tema que gosto de estudar e tive a oportunidade de vivenciar suas contribuições para o processo de *obutchénie* em minha pesquisa de mestrado¹⁰.

Assim, findamos este item e passamos a apresentar, de forma sucinta, o método adotado e algumas particularidades dos princípios vigotskianos presentes na pesquisa, bem como sua problemática e objetivos.

1.2 A problemática e os objetivos da pesquisa

Ancorados nas ideias de Lev Vigotsky de que o desenvolvimento do estudante acontece na relação social, acreditamos ser necessária uma organização de *obutchénie* que contemple essas particularidades e esteja relacionada com o lógico-histórico do conceito a ser formado.

Neste sentido, a fim de que este estudo se desenvolva como uma evidência singular dos motivos sociais e historicamente determinados, é fundamental partir de uma necessidade do sujeito que seja também orientada e condicionada por necessidades sociais e articuladas às outras áreas do conhecimento. Tal fato pode oportunizar que a relação *obutchénie* e desenvolvimento seja estabelecida pelos métodos específicos, utilizados com intuito de aprimorar o conteúdo em sala de aula.

Além disso, após estudar Kopnin (1978), Smith (1958), Hofmann (1961), Ríbnikov (1987), Sousa (2004) e Lanner de Moura e Sousa (2005, 2008), consideramos que o lógico-

¹⁰ AMORIM, L. G. K. M. *Interdisciplinaridade, modelagem matemática, tecnologias e escrita no ensino e aprendizagem de função do 1º grau*. Dissertação de mestrado. Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática. UFU. Uberlândia, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/18303?locale=pt_BR. Acesso em: 21 maio 2022.

histórico da álgebra simbólica é formado pelo desenvolvimento histórico da álgebra não simbólica: retórica, sincopada e geométrica. Este fato nos remete a uma condensação de um longo processo histórico humano que nos mostra que “no universo, nada é estático, fixo, imutável, pronto e acabado — ao contrário, tudo se transforma, tudo está em constante movimento, tudo flui, tudo varia; que a linguagem do universo do qual somos parte é contrária à permanência.” (BOHM, 1980 *apud* LANNER DE MOURA; SOUSA, 2008, p. 67-68).

Acreditamos que, juntamente com os aspectos lógico-históricos da álgebra, as singularidades do sistema zankoviano nos permitem repensar a prática docente e olhar para os estudantes de forma integral, com intuito de propor uma *obutchénie* que proporcione a formação humana destes. Desse modo, esta pesquisa, intitulada *Equações do 2º grau e o sistema didático zankoviano: um olhar para o desenvolvimento do estudante*, tem como questão central: Quais as contribuições do processo de *obutchénie* de equações do 2º grau baseado no sistema zankoviano para o desenvolvimento do estudante?

Em busca de respostas a esse questionamento, foi necessário ter um olhar especial para uma metodologia de *obutchénie*, que tem como princípio a participação ativa do estudante na sua formação, de forma que a tarefa educativa contribua para o desenvolvimento deles em suas diferentes dimensões: cognitiva, mental, moral, ética, emocional e volitiva. (ZANKOV, 1968). Além disso, a tarefa, ao ser planejada, precisa ser fundamentada nos cinco princípios do sistema zankoviano descritos na seção 2.

A partir do estudo das obras de L. V. Zankov, estabelecemos os objetivos da pesquisa, as ações e a tarefa do professor e do estudante, objetivando o desenvolvimento integral deste.

O sistema zankoviano propõe o

[...] desenvolvimento geral de qualidades como: inteligência, vontade, sentimentos internos e valores morais. [...] o desenvolvimento de processos mentais, como o pensamento visual (pensando em imagens), o pensamento visual ativo, figuração verbal e o pensamento teórico. (FEROLA, 2017, p. 820)

Comungamos das ideias de L. V. Zankov, de que o desenvolvimento integral envolve qualidades como inteligência, vontade, sentimentos internos e valores morais, bem como o desenvolvimento de processos mentais, por exemplo, o conhecimento teórico. Assim, consideramos ser relevante um estudo que abarque os conceitos de equações do 2º grau fundamentadas na teoria de L. V. Zankov, visto que essas dificuldades têm perdurado até o presente momento e o sistema zankoviano ainda é pouco estudado no Brasil, apresentando singularidades que podem contribuir para o desenvolvimento integral do estudante.

Em consonância com a questão central, esta pesquisa apresenta como objetivo geral: Analisar as contribuições do processo de *obutchénie* de equações do 2º grau baseado no sistema zankoviano para o desenvolvimento do estudante.

Como objetivos específicos tem-se:

1. Investigar potencialidades e/ou limites de tarefa, composta por sete etapas, elaborada nos princípios do sistema zankoviano para o desenvolvimento integral dos estudantes.
2. Analisar possíveis contribuições de um experimento microciclo organizado na perspectiva do sistema zankoviano, para o processo de *obutchénie* do conceito de equações do 2º grau.

Como método de investigação, esta pesquisa se fundamenta nas ideias de Zankov (1984, p. 16, tradução nossa), que ressalta que “[...] o objetivo da pesquisa é destacar a lógica pedagógica objetiva, que, à primeira vista, parece estar em conflito com a existência de certos objetivos e tarefas no processo didático.”¹¹, já que a lógica objetiva revela, em certa ordem, uma relação circunstancial entre fenômeno e processo, que determina a realidade objetiva. O experimento formativo é a metodologia de pesquisa e contempla, segundo Aquino (2017), quatro etapas: a revisão de literatura, a elaboração do sistema didático experimental, o desenvolvimento do experimento e, finalmente, a análise e produção do relatório. Essas etapas serão detalhadas na seção 4.

A tarefa foi elaborada e fundamentada em um sistema didático que permitisse integrar os sujeitos, apropriar do conceito de equações do 2º grau e possibilitar o desenvolvimento integral do estudante, que advém da qualidade da interação com o mundo, como afirma Zankov (1984).

Na revisão da literatura, observamos que ainda há poucas referências sobre o sistema zankoviano traduzidas para língua portuguesa, o que exigiu mais empenho no sentido de compreender os pressupostos teóricos, metodológicos e psicológicos, os princípios didáticos e a forma de planejamento e execução das etapas da tarefa pelos estudantes. Também foi substancial pesquisar os aspectos lógico-históricos do conceito de equação do 2º grau, objeto matemático da investigação. Essa revisão bibliográfica, primeira etapa do experimento, está presente nas seções 2 e 3.

¹¹ “[...] hincapié en que el objetivo de la investigación consiste en evidenciar la lógica pedagógica objetiva, por cuando, a primera vista, parecería estar en pugna, con la existencia de determinados objetivos y tareas en el proceso didáctico.” (ZANKOV, 1984, p. 16).

Embasados no referencial teórico de L. V. Zankov que, por sua vez, apoia-se em L. S. Vigotsky e em S. L. Rubinstein, cuja base epistemológica está fundamentada no materialismo histórico e dialético, o qual compreendemos como método de conhecimento e que nos proporciona “a interpretação do movimento entre os acontecimentos produzidos historicamente (a realidade objetiva) e o desenvolvimento do pensamento” (PANOSSIAN, 2014, p. 79), buscamos incorporar na nossa pesquisa o materialismo histórico e dialético, para podermos acompanhar as ações que os estudantes perpassaram e não somente o produto final do processo. Ademais, com esse método, podemos investigar as mais simples manifestações dos participantes e, ao nos concentrar sobre estas, delineando abstrações, temos condições de compreender o movimento de apropriação dos conceitos dos estudantes pertencentes a este estudo.

Assim, o sistema zankoviano, além de nos possibilitar o diálogo com o materialismo histórico e dialético durante o desenvolvimento do experimento microciclo¹², nos permite investigar a presença de alguns princípios vigotskianos, como as relações intrapsíquicas e interpsíquicas, a Zona de Desenvolvimento Possível, o sentido e os significado das palavras e as funções psíquicas.

Na elaboração da tarefa, foi necessário pensarmos situações-problema nas quais os estudantes desenvolvessem ações individuais e coletivas, oportunizando a apropriação dos conceitos da álgebra, como fluência, variável e campo de variação, e conceito de equações do 2º grau, conduzindo à sistematização da *obutchénie* e desenvolvimento do estudante, ancorado nas relações intrapsíquicas (atividade individual) e constituindo-se com base nas relações interpsíquicas (atividade coletiva). “É nesse movimento do social ao individual que se dá a apropriação de conceitos e significações, ou seja, que se dá a apropriação da experiência social da humanidade.” (MOURA *et al.*, 2010, p. 83).

A *obutchénie* não garante o desenvolvimento, mas cria possibilidades para o desenvolvimento, quando realizada por meio de uma ação colaborativa. Compreendemos que a *obutchénie* organizada de forma intencional se faz importante para incentivar o estudante, sendo inevitável a presença do outro no percorrer do processo, buscando fomentar seu desenvolvimento.

¹² Longarezi (2019c), apoiada em Zuckerman (2011), ressalta que o experimento microciclo tem o objetivo de analisar hipóteses associadas às possibilidades de desenvolvimento funcional e pode acontecer em um curto espaço de tempo, ou seja, pode ser efetivado em dias ou semanas.

Na zona de desenvolvimento possível (ZDP)¹³ do estudante, estão presentes “a compreensão consciente e o uso voluntário de conceitos, aquelas propriedades insuficientemente desenvolvidas dos conceitos espontâneos”¹⁴ (VIGOTSKI, 2007a, p. 377, tradução nossa), as quais manifestam e se transformam em colaboração com outro mais experiente. Isso é possível, visto que o:

[...] desenvolvimento de conceitos científicos pressupõe um certo nível de conceitos espontâneos, um nível no qual a compreensão consciente e a voluntariedade aparecem na zona de desenvolvimento possível, e, por outro lado, que os conceitos científicos transformam e elevam conceitos espontâneos a um nível superior, formando sua zona de desenvolvimento possível, já que o que a criança sabe fazer hoje em colaboração, ela saberá fazer amanhã por conta própria. (VIGOTSKI, 2007a, p. 377, tradução nossa)

Compreendemos que, para Vigotski (2007a), o desenvolvimento dos conceitos científicos, da mesma forma que os espontâneos, não termina, mas inicia no instante que o estudante assimila um significado pela primeira vez, o qual está relacionado ao conceito científico. O conceito espontâneo se revela sem uma organização consistente e sistemática, enquanto o conceito científico está interligado por outros conceitos, de forma que a sistematização da *obutchénie* no âmbito escolar desempenha a função importante na sua “aquisição onde os conceitos novos e mais abstratos transformam o significado dos conceitos elementares e cotidianos.” (DIAS, 2019, p. 114).

Dessa forma, a *obutchénie*, como processo transformador, lança mão de recursos mediadores, instrumentos e signos, para agir sobre o objeto.

A invenção e o uso dos signos como meios auxiliares para solucionar um dado problema psicológico (lembrar, comparar coisas, relatar, escolher, etc.) é análoga à invenção e uso dos instrumentos, só que agora no campo psicológico. O signo age como instrumento de atividade psicológica de maneira análoga ao papel de um instrumento no trabalho. (VYGOTSKY, 1991, p. 39)

Vygotsky (1991) ressalta que os signos são mediadores semióticos das relações dos homens com a cultura humana, proporcionando o desenvolvimento psíquico. Logo, os instrumentos e os signos são importantes mediadores da atividade.

¹³ Optamos pela expressão “possível” e não “proximal” ou “imediate” ou “próximo” ou “iminente”, considerando o rigor da tradução do termo, anunciado por Puentes e Longarezi (2013), e a concatenação com a própria sistematização teórica que sustenta o conceito.

¹⁴ “[...] a comprensión consciente y el uso voluntario de los conceptos, esas propiedades insuficientemente desarrolladas de los conceptos espontâneos del escolar [...]” (VIGOTSKI, 2007a, p. 377).

A função do instrumento é servir como condutor da influência humana sobre o objeto da atividade; ele é orientado externamente; deve, necessariamente, levar a mudanças nos objetos. Constitui um meio pelo qual a atividade humana externa é dirigida para o controle e domínio da natureza. O signo, por outro lado, não modifica em nada o objeto da operação psicológica. Constitui um meio da atividade interna dirigido para o controle do próprio indivíduo; o signo é orientado internamente. (VYGOTSKY, 1991, p. 41)

Lev Vigostski ressalta que o ser humano, em sua trajetória, está em constante interação com os outros seres, ao mesmo tempo que procura entender e interagir com o mundo à sua volta, em um movimento entre ele e a linguagem. Visto que, paulatinamente, vai se integrando ao mundo por meio da linguagem, se assume o papel de comunicação entre os indivíduos que, por meio dela, se constituem sujeitos estabelecendo os significados aos objetos, aos seres, às circunstâncias, tornando-se seres históricos e culturais.

Comungamos da ideia de Vygotsky (1991), quando menciona que:

[...] a capacitação especificamente humana para a linguagem habilita as crianças a providenciarem instrumentos auxiliares na solução de tarefas difíceis, a superar a ação impulsiva, a planejar uma solução para um problema antes de sua execução e a controlar seu próprio comportamento. Signos e palavras constituem para a criança, primeiro e acima de tudo, um meio de contato social com outras pessoas. As funções cognitivas e comunicativas da linguagem tornam-se, então, a base de uma forma nova e superior de atividade nas crianças distinguindo-as dos animais. (VYGOTSKY, 1991, p. 24)

As palavras sofrem modificações de acordo com o ambiente social e as pessoas, alterando o sentido, conforme as relações e o desenvolvimento do meio social. Os sentidos são sistemas inconstantes que buscam consolidar-se. Referem-se ao significado da palavra, concebido por cada indivíduo, e estão relacionados com a circunstância e uso da palavra. Já o significado é estabilizado, sendo:

[...] apenas uma das zonas de sentido, a mais estável e precisa. Uma palavra adquire o seu sentido no contexto em que surge; em contextos diferentes, altera o seu sentido. O significado permanece estável ao longo de todas as alterações do sentido. O significado dicionarizado de uma palavra nada mais é do que uma pedra no edifício do sentido, não passa de uma potencialidade que se realiza de formas diversas da fala. (VYGOTSKY, 1991, p. 125)

O significado refere-se ao sistema de relações objetivas que se constituiu no movimento de desenvolvimento das palavras, estabelecido por todas as pessoas que as utilizam.

A teoria vigotskiana anuncia o ser humano com um ser social, enfatizando que a *obutchénie* no ambiente escolar necessita desenvolver o sujeito enquanto indivíduo. Essa qualidade também é ressaltada no sistema zankoviano.

Ao compreender as características do sistema zankoviano e algumas particularidades da teoria de Lev Vigostki, elaboramos a tarefa e fomos a campo desenvolver o experimento. Este foi realizado em uma escola pública situada na cidade de Uberlândia-MG, que atende estudantes da Educação Infantil e Ensino Fundamental. Além disso, a escola dispõe de três salas destinadas ao Atendimento Educacional Especializado (AEE). Tal escola foi escolhida porque oferece condições apropriadas e necessárias ao experimento, tais como: autorização da direção da escola, estudantes e pais que autorizaram sua participação, professores de outras disciplinas que se interessaram em planejar aulas conjuntas e com tema em comum. Além disso, optamos por desenvolver a tarefa nas turmas em que a professora-pesquisadora lecionava devido à dificuldade que ela tinha de conseguir organizar o horário para se deslocar para outra escola, pois trabalhava nos três períodos.

Apresentada a questão central, os objetivos e o local onde desenvolvemos o experimento, nesta pesquisa, defendemos a seguinte tese: a organização intencional do processo de *obutchénie* de equações do 2º grau fundamentado nas particularidades do sistema zankoviano, pode propiciar o desenvolvimento integral de estudantes.

Essa tese tem sua origem na ideia de que esse sistema tem como um dos pressupostos o desenvolvimento humano em todas as suas linhas e dimensões: cognitivo, mental, físico, ético, moral, afetivo, volitivo.

Esperamos que este estudo, do ponto de vista científico, possa contribuir para uma *obutchénie* que promova a apropriação do conceito de equações do 2º grau e que possa “despertar o pensamento independente, inquieto, ligado a emoções vivas”¹⁵ (ZANKOV, 1984, p. 62, tradução nossa), e que seja fonte de inspiração para novos estudos e aprofundamentos que contribuam para a disseminação do sistema zankoviano.

A contribuição social deste trabalho está na utilização dos princípios didáticos e metodológicos na organização de tarefa, a qual poderá subsidiar a organização do planejamento do processo de *obutchénie* de equações do 2º grau e a formação contínua de professores.

Uma vez que o objeto de estudo já foi apresentado, bem como a tese, a questão central e os objetivos da pesquisa, a seguir, apresentamos os movimentos da pesquisa e as opções metodológicas de investigação.

¹⁵ “[...] despertar el pensamiento independiente, inquieto, del escolar, ligado a emociones vivas.” (ZANKOV, 1984, p. 62).

1.3 Os movimentos da pesquisa e as opções metodológicas de investigação

Conforme anunciado, neste item, apresentamos, de forma resumida, o que está dissertado nas próximas quatro seções da tese.

Na segunda seção, intitulada “*O sistema zankoviano: Pressupostos Teóricos e Metodológicos*”, abordamos a biografia de Leonid V. Zankov e a implantação do sistema didático experimental na União Soviética, as orientações metodológicas, os princípios didáticos que orientam o sistema zankoviano, as particularidades e os objetivos da teoria de L. V. Zankov, assim como as singularidades de uma boa tarefa nesse sistema didático, cujo foco está na transformação do ser humano. (ZANKOV, 1984).

Para a consecução desse propósito, a seção se divide em cinco subitens inter-relacionados. O primeiro contempla a biografia de Leonid V. Zankov e a implantação do sistema didático experimental na União Soviética. O segundo se refere aos princípios psicológicos do sistema didático experimental de L. V. Zankov. O terceiro subitem diz respeito aos cinco princípios didáticos do sistema zankoviano. O quarto aborda o processo de desenvolvimento dos estudantes no sistema zankoviano, o qual acontece em três unidades: a atividade de observação, a atividade mental ou do pensamento, e as atividades práticas. O último menciona as singularidades de uma boa aula para L. V. Zankov e as orientações metodológicas do sistema zankoviano. Nessa seção, nos embasamos teoricamente em Aquino (2013, 2017), Ferola (2019), Ferola e Longarezi (2021), Guseva e Sosnowski (1997), Guseva e Solomonovich (2017), Puentes e Aquino (2018), Pereira (2020) e Zankov (1963, 1968, 1984).

A terceira seção, intitulada “*Um olhar para o conceito de equações do 2º grau*”, refere-se ao objeto matemático deste estudo – equação do 2º grau. Nesta, dialogamos com Caraça (1951), Cedro (2004), Brasil (2017), Eves (2002), Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Garbi (2009), Hogben (1970), Kaput (2008), Kopnin (1978), Lalande (1993), Lins e Gimenez (1997), Lanner de Moura e Sousa (2005, 2008), Morgado (1999), Panossian (2014), Pitombeira (2004), Rosa (2009), Sousa (2004, 2018) e Sousa, Panossian e Cedro (2014). A primeira subseção, intitulada “*Um olhar para as pesquisas acadêmicas sobre equação do 2º grau*”, apresenta, de forma detalhada, os resultados das pesquisas acadêmicas sobre equação do 2º grau realizadas de 2013 a 2020. Este estudo foi realizado com o intuito de conhecer o que já foi pesquisado na área, como um direcionamento e aperfeiçoamento desta pesquisa de doutorado, contribuindo para a formulação da seguinte indagação: o que diferencia a presente pesquisa de doutorado das teses e dissertações produzidas entre 2013 a 2020?

O estudo nos deu subsídio para afirmar que a presente pesquisa de doutorado se diferencia das demais por propor a organização e realização de um experimento microciclo com intuito de analisar as contribuições do processo de *obutchénie* de equações do 2º grau baseado no sistema zankoviano para o desenvolvimento integral do estudante. Com isso, esperamos que o ineditismo deste estudo e a busca por preenchimento da lacuna teórica metodológica da temática contribuam para a pesquisa educacional brasileira na perspectiva histórico-cultural, no que tange à *Obutchénie* Desenvolvidamental.

O segundo item da seção 3, nomeado “*Álgebra na BNCC e os conceitos algébricos desenvolvidos na pesquisa*”, contempla, de forma sucinta, a proposição da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), anunciando em quais aspectos nossa pesquisa se aproxima e/ou se distancia do que está proposto neste documento normativo. No último item, denominado “*Movimento das equações, realizado no Mundo Árabe e na Índia*”, apresentamos como os árabes e os indianos resolviam as equações do 2º grau, que são fatos abarcados na tarefa, que permitem aos estudantes vivenciarem uma parte do processo, compreendendo que a matemática é uma ciência em constante movimento.

A quarta seção, intitulada “*Caminhos metodológicos da pesquisa*”, aborda o experimento didático-formativo como a metodologia de pesquisa, descrevendo as singularidades do sistema zankoviano, relevantes para o planejamento do microciclo e o contexto da pesquisa caracterizando a escola, os participantes, o procedimento e os instrumentos utilizados na apreensão do fenômeno, no desenvolvimento do processo e na análise dos resultados. Nosso estudo fundamentou-se nas ideias de Aquino (2013, 2014, 2017), Cedro e Nascimento (2017), Ferola (2019), Ferola e Longarezi (2021), Guseva e Sosnowski (1997), Guseva e Solomonovich (2017), Lanner de Moura e Sousa (2005), Longarezi (2019c), Marco (2009), Moura (2004), Nechaeva e Roshchina (НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006), Pereira (2020), Puentes e Aquino (2018), Zankov (1963, 1968, 1977, 1984, 2017) e Vygotski (1995).

Na quinta seção, nomeada “*O movimento de apropriação do conceito de equações do 2º grau e o desenvolvimento integral do estudante*”, utilizamos o conceito de isolado (CARAÇA, 1951) como princípio teórico-metodológico para a compreensão do fenômeno. Após a leitura e releitura do material produzido, emergiram dois isolados: a) Relação entre conceitos teóricos, emoção e a vontade; b) Desenvolvimento do estudante nas dimensões ética, moral e conscientização sobre saúde.

Já na última seção, intitulada “*As trilhas da investigação e o desenvolvimento da pesquisadora*”, apresentamos algumas considerações sobre a pesquisa, dialogando com os resultados encontrados e o desenvolvimento integral do estudante, ou seja, inferindo em quais

aspectos a organização da *obutchénie* favoreceu o desenvolvimento do estudante, e ressaltamos uma possível resposta para a questão de pesquisa e como os objetivos foram alcançados. Nesse item, também descrevemos os momentos de angústias e de júbilo vivenciados em cada etapa da pesquisa, apresentamos reflexões sobre o sistema zankoviano, resultantes dos momentos vivenciados no campo de pesquisa.

Aqui, apresentamos o resumo do que será explorado nas próximas seções. Doravante, cada seção será dissertada de forma minuciosa e a escrita iniciará com uma abordagem sobre o sistema zankoviano, com foco nos pressupostos teóricos e metodológicos.

2 O SISTEMA ZANKOVIANO: PRESSUPOSTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

No começo do inverno, eu caminhei pela estrada da floresta. O tempo estava nublado, sem vento. De noite, caiu muita neve. Ela cobriu a terra e as árvores. Parando, olhei para a floresta, na qual não havia o menor movimento. Eu queria ver uma foto da floresta de inverno. Mas, ai de mim! Tudo se mesclou em uma massa cinza-branca, galhos e até árvores não podiam ser distinguidos... No dia seguinte, a floresta era a mesma, generosamente coberta de neve. O céu clareou das nuvens e o sol brilhou. Agora, as árvores, galhos, até os menores, eu vi em toda a beleza deslumbrante. Seus contornos se dobraram: as dobras de cada ramo repetiam uma camada de neve, e isso, por assim dizer, enfatizava sua identidade individual. Algo semelhante acontece na sala de aula. Sem o sol do amor de um professor pelas crianças, os estudantes se fundem em uma massa sem forma.¹⁶

(ZANKOV, 1975, s. p.)

A leitura desse texto escrito por Zankov (1975) nos retrata a importância de nós, professores, olharmos para os nossos estudantes como seres únicos, providos de belezas, inquietações e singularidades que os diferenciam dos outros, mas que carregam em si um pouco de cada um que os rodeia. Assim, no intuito de ser sol nos dias de inverno na vida de cada um de nossos estudantes, encontramos, no sistema zankoviano, uma sustentação teórica e metodológica que permite nos aproximar e orientar cada um no seu processo de desenvolvimento.

Assim, para nos preparar e compreender os pressupostos teóricos e metodológicos do sistema zankoviano, mergulhamos em estudos que tratavam do tema. Tentamos observar como as especificidades inerentes a esse sistema contribuem para a organização e sistematização da *obutchénie* e desenvolvimento, considerando as singularidades dos sujeitos e o meio social em que estão inseridos.

¹⁶ “В начале зимы я шел по лесной дороге. Погода была облачная, безветренная. Ночью выпал обильный снег. Он покрыл землю и деревья. Остановившись, смотрел я на лес, в котором не было ни малейшего движения. Мне хотелось разглядеть картину зимнего леса. Но — увы! — все слилось в бело-серую массу, веток и даже деревьев нельзя было различить... На завтра лес стоял такой же, щедро покрытый снегом. Небо очистилось от туч, и сияло солнце. Теперь деревья, ветки, даже самые маленькие, я видел во всей ослепительной красоте. Их очертания удваивались: изгибы каждой ветки повторял слой снега, и этим как бы подчеркивалось их индивидуальное своеобразие. Нечто подобное происходит и в классе. Без солнца любви учителя к детям.” (ZANKOV, 1975, s. p.).

Na presente seção, apresentamos a biografia de Leonid V. Zankov e a implantação do sistema didático experimental na União Soviética. Abordamos as conjecturas, os princípios psicológicos e didáticos, as orientações metodológicas, o processo de desenvolvimento dos estudantes no sistema zankoviano, assim como as singularidades de uma boa aula e as orientações metodológicas desse sistema didático.

2.1 Leonid Vladimirovich Zankov e a implantação do sistema didático desenvolvimental zankoviano na antiga União Soviética

Leonid Vladimirovich Zankov nasceu em 23 de abril de 1901, na cidade de Varsóvia, Polônia, e faleceu em 27 de novembro de 1977, na cidade de Moscou, Rússia. Segundo Guseva e Sosnowski (1997), L. V. Zankov começou sua carreira pedagógica antes de se matricular na Universidade Estadual de Moscou. Iniciou como professor em uma pequena escola no período da Guerra Civil Russa e, em seguida, atuou como diretor de uma escola que se localizava em uma pequena colônia de agricultores.

Leonid Vladimirovich Zankov foi um psicólogo soviético, estudante de Lev Vigotsky, integrante do círculo de L. S. Vigotski e conduziu pesquisas científicas muito relevantes, na União Soviética. Formou-se na *Faculty of Social Sciences of Moscow State University*, na década de 1920, especializou-se em psicologia da memória, psicologia do desenvolvimento anormal (defectologia) e pesquisa e prática educacional. Foi o fundador de uma das teorias educacionais mais eminentes, denominada sistema didático desenvolvimental zankoviano (1957-1977). (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997).

L. V. Zankov iniciou sua carreira acadêmica no Instituto Experimental de Defectologia de Moscou, que foi fundado em 1929, e atuou como diretor neste instituto, no período de 1944 a 1947. Em 1942, defendeu sua tese de doutorado, cujo tema foi “psicologia da memória” e, em 1945, foi eleito membro correspondente da Academia de Ciências Pedagógicas da República Socialista Federativa Soviética da Rússia. Já em 1955, foi ascendido a Membro pleno da Academia de Ciências Pedagógicas da URSS e, em 1968, tornou-se membro titular da academia. L. V. Zankov, de 1951 a 1955, foi diretor do Instituto Científico de Teoria e História da Pedagogia, sob a égide da Academia de Ciências Pedagógicas. (BLANK; ARGINSKAJA; KATS, 2021).

As pesquisadoras Guseva e Sosnowski (1997) relatam que L. V. Zankov foi um escritor prolífico, produzindo mais de 120 publicações acadêmicas, 15 livros, dentre eles, “Didática e Vida” (*Didaktika i zhizn'*, 1968) e “Conversas com Professores” (*Besedy s uchiteliami*, 1970).

Aquino (2013) e Puentes e Aquino (2018) mencionam que L. S. Vigotski foi mentor de L. V. Zankov, e este seguiu as suas concepções, desenvolveu o sistema didático experimental que foi implementado em um ambiente pós-guerra na antiga União Soviética, cuja matriz teórica é a tese vigotskiana de que

[...] o período de escolaridade como um todo é o período ótimo para o ensino de operações que exigem consciência e controle deliberado; o ensino destas operações impulsiona ao máximo o desenvolvimento das funções psicológicas superiores na altura de sua maturação. (VIGOTSKY, 1934/2007 *apud* PUENTES; AQUINO, 2018, p. 449)

Assim como o sistema zankoviano, outros estudos foram fundamentados na tese de L. S. Vigotsky sobre a teoria da *obutchénie* baseada na atividade, entre os anos de 1924 a 1934, por Rubinstein, Leontiev, Galperin e Elkonin. Essas pesquisas contribuíram para o surgimento do termo “*Obutchénie* Desenvolvimental da Atividade”, que possibilitou o surgimento de opiniões epistemológicas diferentes, reforçando as divergências teóricas e críticas entre os representantes. Contudo, as pesquisas de L. V. Zankov, Rubinstein, Leontiev, Galperin e Elkonin fomentaram uma grande produção intelectual, científica e acadêmica “[...] de uma riqueza conceitual, epistemológica e metodológica que não tem igual na história da didática contemporânea” (PUENTES; AQUINO, 2018, p. 347-348), resultando na produção de sistemas didáticos específicos, visto que não existe apenas uma *Obutchénie* Desenvolvimental. (LONGAREZI, 2019a, 2019b, 2019c, 2020a; LONGAREZI; SILVA, 2018; PUENTES, 2017; PUENTES; LONGAREZI, 2017a, 2017b; PUENTES; AMORIM; CARDOSO, 2017).

“[...] não há uma didática desenvolvimental única ou mesmo uma única teoria histórico-cultural [...]; o que nos remete à compreensão da importante participação dos diferentes grupos e coletivos que trabalharam fortemente à época.” (LONGAREZI; SILVA, 2018, p. 573-574).

Diante disso, para compreender o sistema zankoviano, é importante atentar aos fundamentos que embasaram seus princípios epistemológicos. L. V. Zankov foi orientado de L. S. Vigotski, pesquisou e produziu teoricamente embasado nas principais teses da Teoria Histórico-Cultural (THC), que também é conhecida como Psicologia Histórico-Cultural. A THC surgiu pós-revolução russa, em 1917, e resultou da produção de uma teoria marxista-leninista do desenvolvimento humano, cuja concepção de ser humano e da natureza humana é substancialmente materialista e dialética. A psicologia marxista “tornou-se, de fato, uma ciência experimental com uma ampla e diversa inserção prática. Isso representou uma enorme conquista para a área.” (LONGAREZI, 2021a, p. 38-39).

Longarezi (2020a) ressalta o legado produzido em torno da Psicologia Histórico-Cultural, resultado do esforço e produção conjunta de:

[...] S. L. Rubinstein (1889-1960), L. S. Vigotski (1896-1934), G. D. Lukov (1910-1968), V. I. Asnin (1904-1956), A. V. Zaporozhets (1905-1981), P. I. Zinchenko (1903-1969), L. I. Bozhovich (1908-1981) e inúmeros outros psicólogos, filósofos, filólogos e didatas soviéticos; tendo em S. L. Rubinstein e L. S. Vigotski seus principais precursores. (LONGAREZI, 2020a, p. 9)

A Psicologia Histórico-Cultural trouxe contribuições sobre diferentes assuntos, como a situação material e histórica do homem, sua contribuição na formação da consciência, o vínculo entre o pensamento e a linguagem, os processos de *obutchénie* e desenvolvimento humano (NÚÑEZ, 2009; PALANGANA, 2001).

Longarezi (2017) ressalta que L. S. Vigotski e colaboradores, ao dispor de uma psicologia marxista, difundem as bases epistemológicas para a elaboração de uma *obutchénie* que seja dialética e materialista, uma *obutchénie* que desenvolva. A *obutchénie* que propicie o desenvolvimento de novas formações psíquicas é denominada de “*Obutchénie* Desenvolvimental”, e a ciência que estrutura e sistematiza os modos e condições objetivos e subjetivos para que esta *obutchénie* aconteça é a “Didática Desenvolvimental” (PUENTES; AQUINO, 2018).

A didática desenvolvimental, enquanto ciência interdisciplinar, vinculada à Pedagogia e à Psicologia Pedagógica, ocupa-se da organização adequada da atividade de *obutchénie*-desenvolvimento, tendo a *obutchénie* intencional como seu objeto e condição e o desenvolvimento das neoformações e da personalidade integral do estudante, especialmente do pensamento teórico, como objetivo. Em outras palavras, a didática se ocupa do estudo dos princípios mais gerais de organização adequada da atividade de *obutchénie*, tendo as leis do desenvolvimento mental da criança, as particularidades das idades e as características individuais como condições desse processo. (PUENTES; LONGAREZI, 2017a, p. 207)

Diferentes sistemas compõem a *Obutchénie* Desenvolvimental, como Galperin-Talízina, Elkonin-Davidov-Repkin e Zankoviano. Os sistemas de Elkonin-Davidov-Repkin e de Galperin-Talízina estão fundamentados nas teses de L. S. Vigotsky e tiveram como principais referências teóricas, no campo da psicologia, “os representantes da escola de Moscou (A. N. Leontiev, P. Ya. Galperin, D. B. Elkonin, entre outros), centrada no estudo da atividade, definindo funções psicológicas como formas internas de atividade.” (GONZÁLEZ REY, 2016 *apud* PUENTES; AQUINO, 2018, p. 351).

Segundo Puentes e Aquino (2018), o sistema zankoviano teve sua base teórica fundamentada nas pesquisas de Lev Vigotsky, Leontiev, Ushinski e Rubinstein, cujo foco dos estudos está na organização psicológica da consciência e da personalidade. Assim, a maior contribuição de L. V. Zankov e de seus colaboradores foi no campo da didática desenvolvimental, ao realizar experimentos didáticos de longa duração para provar a tese de L. S. Vigotsky.

Zankov (1984) considera que a relação entre a *obutchénie* e o desenvolvimento precisa ser estabelecida pelos métodos específicos a serem utilizados para o desenvolvimento dos objetos de conhecimento em sala de aula, de forma a conduzir o desenvolvimento integral ótimo e ponderar as emoções dos estudantes no processo. Reforça que, no experimento didático experimental, é preciso incluir o conhecimento empírico, sendo esse o ponto de partida para o pensamento teórico.

O autor completa, ainda, que não se pode limitar os conhecimentos empíricos ou teóricos. A “correlação e as inter-relações que deve haver entre uns e outros dependem da atitude didática, e da peculiaridade de cada matéria de estudo.”¹⁷ (ZANKOV, 1984, p. 36, tradução nossa). Com isso, o processo de *obutchénie* que permite o desenvolvimento será mais abrangente e receptivo às necessidades e vontades dos estudantes, gerando um ambiente propício para o desenvolvimento integral ótimo.

O sistema zankoviano, até o presente momento, é pouco divulgado no Brasil e seu cuidado com o desenvolvimento cognitivo, afetivo e emocional na estruturação da *obutchénie* despertou o interesse da pesquisadora em compreender e analisar as suas contribuições para a formação global do estudante. Além disso, a pesquisadora se identificou com as particularidades da tarefa que precisam ser contempladas nesse sistema, com os princípios didáticos e psicológicos desse modelo.

Guseva e Sosnowski (1997) relataram que, no início da década de 1950, L. V. Zankov e alguns colegas da Academia de Ciências Pedagógicas da República Russa realizaram um estudo comparativo de uma apresentação oral e de uma apresentação, utilizando recursos de ensino visuais. A pesquisa foi desenvolvida em 25 escolas primárias e os resultados apontaram que o desenvolvimento dos estudantes nas primeiras séries¹⁸ era muito lento. A pesquisa posterior a essa observação revelou que o desenvolvimento lento dos estudantes das primeiras

¹⁷ “La correlación y las interrelaciones que debe haber entre los unos y los otros dependen de la actitud didáctica, y también de la peculiaridad de cada materia de estudio.” (ZANKOV, 1984, p. 36).

¹⁸ Optamos em utilizar série, uma vez que os anos escolares citados nos textos de L. V. Zankov não correspondem aos anos escolares do Brasil.

séries estava relacionado estritamente com o conteúdo curricular e a prática monótona da repetição.

Diante dessas informações, o laboratório de L. V. Zankov começou a trabalhar no desenvolvimento de “programas, materiais, currículos e livros escolares com base em seus princípios didáticos.”¹⁹ (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 26, tradução nossa). Como esse trabalho, muitos métodos e metodologias de grande importância para as áreas disciplinares individuais foram modificados e outros métodos de *obutchénie* foram desenvolvidos. A complexidade do método de pesquisa exige uma organização progressiva e dinâmica, que se altera em relação ao movimento anterior e à distinção de seu método. (ZANKOV, 1984).

O sistema didático de L. V. Zankov foi implementado em três etapas e, segundo Zankov (1984), as premissas teóricas, as tarefas, os métodos de investigação e as bases dos novos caminhos de *obutchénie* foram estabelecidas antes de iniciar o trabalho na classe experimental, servindo como uma conexão em todo o processo de investigação.

O projeto piloto começou em setembro de 1957, com uma única turma de estudantes de uma escola primária de Moscou, em que foi criado um laboratório pedagógico, para que os pesquisadores pudessem acompanhar a sala experimental. A turma era ministrada por N. V. Kuznetsova, um graduado universitário com especialidade em Educação Infantil. (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997).

Zankov (1984) ressalta que seria um erro começar o experimento em muitas classes simultaneamente e que, na primeira etapa, no processo de trabalho prático instrucional-educacional, foi possível prever e repensar cada situação do processo didático e, posteriormente, analisá-las. Paralelamente, ao longo de quatro anos, os pesquisadores estudaram a vida dos estudantes da sala experimental como um todo e de cada estudante, considerando suas peculiaridades individuais.

Diante do problema pedagógico da metodologia de *obutchénie* e do desenvolvimento, L. V. Zankov e sua equipe consideraram importante ampliar a rede de classes experimentais, com intuito de realizar o experimento em condições diversas. Assim, iniciou-se a segunda etapa do experimento, que atingiu mais de vinte escolas urbanas e rurais, em cidades diferentes tanto russas como bilíngues, no caso das ex-repúblicas soviéticas. (ZANKOV, 1984).

Zankov (1984) descreve que as salas experimentais eram formadas segundo o seguinte costume: as crianças que ingressavam na primeira série eram matriculadas pelos pais, que viviam no bairro próximo à escola. Os estudantes de cada turma experimental foram os mesmos

¹⁹ “[...] programs, materials, curricula and textbooks based on his didactic principles.” (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 26).

desde a primeira série do ensino primário até a sua conclusão, exceto nos casos em que os pais mudavam de bairro.

Os professores e os colaboradores de pesquisa se encontravam nas cidades de Moscou, Kalinin e Tula, uma vez por trimestre. Nesse encontro, eles discutiam os detalhes das aulas experimentais e, com a participação ativa dos professores, o trabalho de cada trimestre era planejado. (ZANKOV, 1984).

O autor enfatiza que, em preparação para a terceira etapa da pesquisa, foram elaborados manuais experimentais correspondentes ao sistema zankoviano, que passariam a ser adotados no ensino primário. Esses materiais foram organizados em livros para que os professores pudessem consultar.

Com endosso oficial, em 1964, o sistema zankoviano foi difundido por todo o sistema de educação primária Soviética. Depois de um ano, mais de 100 salas adotavam o sistema experimental de Zankov e, em 1966-67, mais de 1200 salas de aula passaram a fazer parte do experimento em diferentes territórios, regiões, repúblicas autônomas e constituintes da antiga União Soviética. (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997).

Neste período, os colaboradores dos institutos de pesquisa científica disponibilizavam relatórios para os professores das salas experimentais em seminários, assessoravam, visitavam as aulas, verificavam os trabalhos de controle que recebiam do laboratório e realizavam as primeiras análises. Assim, os institutos apresentavam ao laboratório relatórios sobre o trabalho experimental. (ZANKOV, 1984).

Zankov (1984) ressalta que, após a organização da disseminação das salas experimentais, procuraram alcançar o seguinte objetivo:

[...] dar a conhecer o novo sistema experimental a diversos setores de professores, induzi-los a refletir sobre os problemas do ensino, a ver que existem outros caminhos diferentes da metodologia tradicional e que, no desenvolvimento geral dos estudantes, maiores resultados poderiam ser alcançados do que com a metodologia tradicional. (ZANKOV, 1984, p. 28, tradução nossa)²⁰

A literatura anuncia que os estudantes participantes das salas experimentais, no primeiro nível primário, se destacavam em relação aos colegas que frequentaram salas de aulas tradicionais, e que o sistema zankoviano proporcionava o desenvolvimento do estudante. “As

²⁰ “[...] el de dar conocer a vastos sectores de maestros el nuevo sistema experimental, inducirles a reflexionar sobre los problemas de enseñanza, a que vieran que existen otras vías diferentes de la metodología tradicional y que, en el desarrollo general de los escolares, podían lograrse mayores resultados que con la metodología tradicional.” (ZANKOV, 1984, p. 28).

evidências indicaram que aqueles anos de dedicação por parte de pesquisadores e educadores produziram um modelo educacional integral eficaz.”²¹ (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 27, tradução nossa).

Com o seu início promissor, o sistema de L. V. Zankov tinha tudo para despontar e ser utilizado em todo país, mas isso não aconteceu. Apesar de todo o progresso do sistema zankoviano, Guseva e Sosnowski (1997) salientam que, em 1969, infelizmente, diminuiu consideravelmente a quantidade de salas experimentais que praticavam o sistema de L. V. Zankov, de forma que, nas décadas posteriores, restaram poucas salas experimentais desenvolvendo a metodologia proposta.

Um dos fatores que impactaram o declínio repentino da prática do sistema zankoviano está relacionado ao período em que este foi introduzido, visto que, naquele momento, o comunismo buscava garantir o coletivo, a cooperativa e o comunal. Assim, era desejado que os educadores soviéticos priorizassem os valores hegemônicos de sua sociedade, reproduzissem a cultura soviética e não promovessem mudanças sociais. Logo, o sistema didático experimental de L.V. Zankov, com destaque no desenvolvimento individual do estudante, era incoerente com o sistema vigente e, além disso, excedia o que era incumbido à educação. Outros movimentos contrários ao sistema de L. V. Zankov afirmavam que este era complexo e que era necessário simplificá-lo. (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997).

Guseva e Sosnowski (1997) relatam que o sistema zankoviano representava uma ameaça ao *status quo*, visto que uma particularidade foi a organização da educação primária em três anos de escolaridade, ao invés dos quatro anos como era no ensino tradicional²². Com isso, houve muitas objeções à proposta, que impossibilitaram a sua implementação e, conseqüentemente, a forma como o sistema de L. V. Zankov foi praticado nas salas de aula não alcançou os resultados previstos caso tivesse sido adotado dentro da sua estrutura ideal. Mas L. V. Zankov já ressaltava a importância da implementação do seu modelo em um contexto educacional compatível: “A *obutchénie* irá promover o desenvolvimento integral dos estudantes, não por meio da aplicação de princípios didáticos desconectados, mas apenas por

²¹ “The evidence indicated that those years of dedication on the part of researchers and educators had produced an effective comprehensive educational model. Given its auspicious beginning, it would have been reasonable to expect a gradual conversion of the entire early years program tngú the Zankov system. But this did not happen. There are several explanations for the sudden waning of interest in this methodology.” (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 27).

²² Segundo Zankov (1963, 1968, 1984), no ensino tradicional russo, o foco estava na formação de habilidade em detrimento ao conhecimento teórico e o ponto forte são as notas, isto é, a ênfase está no desenvolvimento das habilidades e da manipulação de símbolos linguísticos e matemáticos.

meio da implementação do sistema didático completo.”²³ (ZANKOV, 1975 *apud* GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 27, tradução nossa).

Assim, agregar particularidades de um sistema em outro com metodologias distintas pode gerar resultados não esperados, como aconteceu com o sistema zankoviano, no período de 1960 a 1969, nas escolas primárias na Rússia. Nas escolas primárias russas, o ensino estava centrado no professor e valorizava o ensino mnemônico; com isso, o sistema de Zankov, fundamentado em modelo pedagógico integrado, tornou-se diluído na prática. Ou seja, implementar partes do sistema zankoviano entrelaçado com outro sistema teria muita chance de não alcançar o desenvolvimento integral do estudante.

O sistema zankoviano seria eficaz se utilizado como sistema didático, ao invés de ações e princípios didáticos isolados que não se relacionam. O sistema considera a relação entre a parte e o todo, condizente com a postura dialética, permite considerar os sujeitos envolvidos, a sua realidade, os métodos para a organização e sistematização da *obutchénie*, as circunstâncias, os objetos de conhecimento, corroborando para o desenvolvimento integral ótimo do estudante.

No sistema zankoviano, havia a preocupação em estudar a relação entre a formação do pensamento humano e as emoções, com intuito de compreender o sujeito como um ser completo e integral, divulgando a relevância das funções exercidas pelos métodos que mobilizam o campo da emoção e da vontade, que estão relacionadas com necessidades denominadas por L. V. Zankov como espirituais²⁴. (ZANKOV, 1984).

Segundo o autor, a emoção se “caracteriza como a atitude do homem perante o mundo, na direção daquilo que experimenta e realiza na forma de sentimento direto.”²⁵ (ZANKOV, 1984, p. 63, tradução nossa). Revela o estado do sujeito e sua atitude na presença do objeto e, normalmente, se define por sua polarização, ou seja, com indício positivo ou negativo: satisfação ou insatisfação, alegria ou tristeza, entre outros. (ZANKOV, 1984).

Geralmente, os tipos de emoções “são destacados em virtude das esferas da atividade psíquica do homem e das várias facetas da atitude do homem para com o mundo: intelectual, moral e estética.”²⁶ (ZANKOV, 1984, p. 63, tradução nossa). No ambiente escolar, as emoções podem variar conforme as particularidades dos componentes curriculares e o material utilizado.

²³ “Teaching will advance the general development of students not through application of disconnected didactic principled but only through implementation of the integrated didactic system.” (ZANKOV, 1975 *apud* GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 27).

²⁴ Compreendido como aquilo que é mais profundo na formação do caráter humano.

²⁵ “La emoción se caracteriza como la actitud del hombre ante el mundo, hacia aquello que experimenta y realiza en forma de sentimiento directo.” (ZANKOV, 1984, p. 63).

²⁶ “Las emociones expresan el estado del sujeto y su actitud ante el objeto. Las emociones, por lo general, se caracterizan por su polarización, es decir, que tienen signo positivo o negativo: satisfacción – insatisfacción, alegría – tristeza, etc.” (ZANKOV, 1984, p. 63).

O laboratório de L. V. Zankov foi fechado após a sua morte, em 1977, sendo que suas ideias foram preservadas pelos professores que participaram do experimento inicial e puderam contemplar os resultados dessa proposta no desenvolvimento geral dos estudantes.

Ressaltamos que, na organização de nosso experimento para esta pesquisa, consideramos os conceitos, princípios e orientações metodológicas de L. V. Zankov na elaboração e desenvolvimento de um experimento que pode ser determinado como um sistema didático pela base zankoviana, porém com um tempo limitado, devido às condições objetivas e subjetivas relacionadas a uma pesquisa de doutorado. Mas acreditamos que o tempo destinado ao experimento na escola foi suficiente para analisar as inquietações e o desenvolvimento dos estudantes, pois segundo Aquino (2014, p. 4652), “P. Ya. Galperin (2001) verificou que um espaço de três a quatro meses é suficiente para testar os resultados de uma metodologia de *obutchénie* e seu impacto no desenvolvimento dos escolares.”

Em síntese, o sistema zankoviano leva em consideração as características da personalidade dos estudantes, compreendendo que as emoções têm uma força motivadora que pode ascender ou reduzir a atividade vital. (ZANKOV, 1984)

No próximo item, anunciamos os princípios psicológicos que fundamentam o sistema didático zankoviano.

2.2 Princípios psicológicos do sistema didático experimental de L. V. Zankov

Analisando os postulados de alguns autores, em especial de L. S. Vigotski e L. V. Zankov, no que tange às bases do *Obutchénie* Desenvolvimental, compreendemos que a *obutchénie* que proporciona novas formações psicológicas é desenvolvimental. Segundo Puentes (2019, p. 6), as bases de uma teoria da *obutchénie* desenvolvimental foram determinadas como frutos, principalmente, do trabalho realizado pelos integrantes dos sistemas didáticos zankoviano e Elkonin-Davidov-Repkin, “bem como das pesquisas experimentais realizadas pelos grupos de Sh. A. Amonashvili sobre o papel da comunicação no desenvolvimento e de V. S. Bibler, especialmente no campo da ‘escola do diálogo de culturas’.”

Vale ressaltar que não existe apenas uma teoria da *obutchénie* desenvolvimental, como mencionou Davidov (1995), visto que há “divergências filosóficas, psicológicas e pedagógicas significativas” no que diz respeito à relação entre *obutchénie* e desenvolvimento (PUENTES, 2019, p. 6). Davidov (1995, p. 10) enfatiza que “[...] agora existem várias teorias bastante conhecidas de aprendizagem desenvolvimental. O tempo dirá qual delas, individualmente ou

em síntese com as outras, se justificará.” Em nosso estudo, nos fundamentamos na teoria de *obutchénie* e desenvolvimento proposto no sistema zankoviano.

L. V. Zankov, analisando o método de ensino na Rússia no seu tempo, concluiu que este não trabalhava com as capacidades mentais, como a observação, o pensamento e as emoções. Diante disso, ele recomenda outra abordagem didática, que proporcione o desenvolvimento integral do estudante.

O sistema zankoviano acredita que a relação entre o ensino e o desenvolvimento é determinada pelos métodos específicos utilizados para o tratamento dos conteúdos em sala de aula. Seus estudos comprovaram que a escola não utilizava métodos suficientemente eficazes e, portanto, não explorava ao máximo as reservas psíquicas dos estudantes para seu desenvolvimento, em especial, as mentais, tais como a atividade de observação, pensamento e uma atitude positiva para o processo de *obutchénie*. (PUENTES; AQUINO, 2018, p. 458)

Nos livros *Дидактика и жизнь* (Didática e vida, 1968) e *La enseñanza y el desarrollo* (1984), escritos por L. V. Zankov, encontramos o objeto de estudo, o método, a organização e os anúncios dos pressupostos psicológicos do sistema didático zankoviano.

No que tange ao objeto de estudo, Zankov (1984, p. 15, tradução nossa) declara que “consiste em evidenciar a lógica pedagógica objetiva na correspondência entre *obutchénie* e desenvolvimento.”²⁷ Com isso, Zankov (1968, 1984) buscava analisar a *obutchénie* que promovesse o desenvolvimento integral ótimo, o qual “refere-se ao desenvolvimento diversificado da atividade mental. O desenvolvimento integral, neste sentido, difere do desenvolvimento mental, na medida em que inclui não apenas processos cognitivos, mas também a vontade e os sentimentos.”²⁸ (ZANKOV, 1968, p. 25, tradução nossa). Para isso, baseava-se na concepção marxista-leninista de que o desenvolvimento é social, visto que por meio das influências sociais que se gera desenvolvimento e, nas teses vigotskianas, em relação a *obutchénie* e desenvolvimento, compreendendo que *obutchénie* precisa prenunciar o desenvolvimento.

Na busca de determinar a lógica objetiva do processo de *obutchénie*, fica evidente que a ação, ou tarefa realizada, não traz à tona esta lógica, porém orienta o trabalho didático. Atingir um resultado e um objetivo não demonstra a lógica da ação desenvolvida. A lógica “expressa

²⁷ “El objeto del estudio consiste en evidenciar la lógica pedagógica objetiva en la correspondencia entre enseñanza y desarrollo.” (ZANKOV, 1984, p. 15).

²⁸ “[...] подразумевается разностороннее развитие психической деятельности. Общее развитие в этом смысле отличается от умственного тем, что охватывает не только познавательные процессы, но также волю и чувства.” (ЗАНКОВ, 1968, p. 25).

uma certa ordem, uma relação causal, necessária ou estável entre os fenômenos e os processos da realidade objetiva.”²⁹ (ZANKOV, 1984, p. 17, tradução nossa). Logo, na elaboração dos processos e da tarefa para o experimento microciclo, esta lógica e a intencionalidade necessitam ser consistentes, de modo a assegurar o desenvolvimento ótimo almejado.

Nesse sentido, Zankov (1984), apoiado em Lenin, ressalta que, “para conhecer realmente o objeto, todos os seus aspectos, todos os seus vínculos e ‘mediações’ devem ser abraçados e estudados. Jamais o conseguiremos por completo, mas a exigência da multilateralidade nos prevenirá contra os erros e o estancamento.”³⁰ (LENIN *apud* ZANKOV, 1984, p. 20, tradução nossa). Logo, o desenvolvimento do estudante precisa ser organizado considerando vinculações do homem com o mundo exterior, considerando as diferentes facetas do sistema didático, abrangendo suas relações internas e externas.

L. V. Zankov, em relação ao estudo do pensamento e seu desenvolvimento, apoia-se em V. I. Lenin e L. Vigotski, assumindo que há a unidade das contraposições realidade-fantasia e objeto-representação, e ressalta que, em qualquer generalização, está presente a “fantasia”. Segundo Pereira (2020, p. 35), essa conjectura revela a ascensão do abstrato ao concreto, de forma implícita, visto que a “representação é um momento abstrato, porém é contraditória e pode não traduzir a concreticidade do fenômeno/objeto, daí a necessidade da busca da essência, traduzida no concreto pensado.”

Além disso, estudo complexo da relação entre *obutchénie* e desenvolvimento não pode ser investigado de maneira abstrata e geral, é necessário compreender a partir de fatos mais amplos e diversos, de forma a conduzir ao desenvolvimento objetivo das relações entre as variáveis. Nesse sentido, Engels orienta que:

Hoje, todos nós concordamos que toda ciência, seja natural ou histórica, tem a partir dos fatos dados e, portanto, tratando-se das Ciências Naturais, das diversas formas objetivas e dinâmicas da matéria; em que, por conseguinte, nas ciências naturais teóricas, as concatenações não devem se construir e se impor aos fatos, senão se descobrir nestes e, uma vez descobertas, demonstrar se por via experimental, até onde seja possível.³¹ (ENGELS *apud* ZANKOV, 1984, p. 20, tradução nossa)

²⁹ “[...] expresa cierto orden, una relación causal, necesaria y estable entre los fenómenos y los procesos de la realidad objetiva.” (ZANKOV, 1984, p. 17).

³⁰ “Para conocer de verdad el objeto hay que abarcar y estudiar todos sus aspectos, todos sus vínculos y ‘mediaciones’. Jamás lo conseguiremos por completo, pero la exigencia de la multilateralidad nos prevendrá contra los errores y el anquilosamiento.” (LENIN *apud* ZANKOV, 1984, p. 20).

³¹ “Hoy, todos estamos conformes en que toda ciencia, sea natural o histórica, tiene que partir de los hechos dados, y por tanto, tratándose de las Ciencias Naturales, de las diversas formas objetivas y dinámicas de la materia; en que por conseguinte, en las Ciencias naturales teórica las concatenaciones no deben construirse e imponerse a los hechos, sino descubrirse en éstos y, una vez descubiertas, demostrarse por via experimental, hasta donde sea posible.” (ENGELS *apud* ZANKOV, 1984, p. 20).

Zankov (1984) ressalta que, no experimento didático desenvolvido, buscou cumprir todas as exigências da metodologia marxista-leninista, sendo toda organização da investigação respaldada nesta, buscando obter os dados fidedignos e multilaterais que se necessitava para encontrar uma resposta para o problema reconhecido pelos pesquisadores.

Em relação ao método experimental geral, Zankov (1984) esclarece:

É própria do experimento, na sua qualidade de método científico geral, a mudança sistemática das condições da observação do fenômeno e de suas relações com outros fenômenos com o que se expressa à ação ativa sobre o objeto de estudo. A aplicação do experimento na investigação científica permite estudar as relações de determinadas facetas do processo e achar as causas que condicionam a *necessidade* de que apareça o fenômeno dado. Desse modo, o experimento permite evidenciar as leis da esfera da realidade objeto de estudo.³² (ZANKOV, 1984, p. 21, *itálico do autor, tradução nossa*)

Zankov (1984, p. 21, tradução nossa) completa que “a lei expressa certa ordem da relação necessária e estável entre os fenômenos, mediante a qual uma mudança em um de seus elementos provoca outra mudança absolutamente concreta nos demais”³³ e menciona que, segundo Hegel, a lei é sempre “estreita, incompleta e aproximada”³⁴ (LENIN *apud* ZANKOV, 1984, p. 21), porque traduz os elementos fixos. Assim, ao buscar anunciar a relação “estável e necessária entre a estrutura de *obutchénie* e o processo geral de desenvolvimento dos estudantes”³⁵ (ZANKOV, 1984, p. 21), foi preciso compreender esses procedimentos e organizar a investigação conforme a singularidade do processo didático e do desenvolvimento dos estudantes.

O autor relata que o processo didático foi constituído pela atividade de estudo dos estudantes e pela atividade do professor. Esclarece que o fundamental do sistema didático experimental foi “sua ideia, seus princípios, os programas de estudo elaborados e os manuais

³² “Es propio del experimento, en su calidad de método científico general, el cambio sistemático de las condiciones de la observación del fenómeno y de sus relaciones con otros fenómenos, con lo que se expresa la acción activa sobre el objeto del estudio. La aplicación del experimento en la investigación científica permite estudiar las relaciones de determinadas facetas del proceso y hallar las causas que condicionan la *necesidad* de que aparezca el fenómeno dado. De ese modo, el experimento permite evidenciar las leyes de la esfera de la realidad objeto del estudio.” (ZANKOV, 1984, p. 21).

³³ “La ley expresa cierto orden de la relación necesaria y estable entre los fenómenos, mediante la cual, un cambio en uno de los fenómenos suscita otro cambio absolutamente concreto en los demás.” (ZANKOV, 1984, p. 21).

³⁴ “[...] toda ley es estrecha, incompleta, aproximada.” (LENIN *apud* ZANKOV, 1984, p. 21).

³⁵ “[...] evidenciar la ligazón estable y necesaria entre la estructura de la enseñanza y el proceso de desarrollo general de los escolares se requiere la busca de tales procedimientos y tal organización de la investigación que sean adecuados al especificismo del proceso didáctico y del desarrollo de los escolares.” (ZANKOV, 1984, p. 21).

criados. As particularidades do trabalho de cada professor foram consideradas causas individuais, e não essenciais.”³⁶ (ZANKOV, 1984, p. 22, tradução nossa).

Outra fundamentação presente no sistema didático zankoviano e proposta por V. I. Lenin está relacionada ao fato de que “[...] a atividade consequente do homem é uma forma do processo objetivo”³⁷, presente na síntese que o segundo redigiu sobre *A Ciência da Lógica*, de Hegel. (LENIN *apud* ZANKOV, 1984, p. 16, tradução nossa).

Zankov (1984, p. 17) assume que “a lógica objetiva, descoberta mediante a investigação científica, expressa certa ordem, uma relação causal, necessária e estável entre os fenômenos e os processos da realidade objetiva.”³⁸ Logo, ao citar a investigação da relação objetiva entre a estrutura da *obutchénie* e o desenvolvimento do estudante, o autor ressalta que “em nossa investigação [significa] que a estrutura da *obutchénie* é causa de certo processo do desenvolvimento geral dos escolares.”³⁹ (ZANKOV, 1984, p. 17).

Diante das características apresentadas, pode-se inferir que tanto o sistema didático experimental quanto a metodologia do ensino tradicional são maneiras diferentes de organização da *obutchénie*, mas que ambas são fundamentais para o desenvolvimento mental dos estudantes. Porém, faz-se necessário repensar a organização do ensino tradicional para alcançar o desenvolvimento integral do estudante.

No que tange aos aspectos psicológicos, segundo Aquino (2013), Zankov (1984) fundamenta-se nas teses de alguns representantes da psicologia histórico-cultural, como L. S. Vigotski, S. L. Rubinstein e A. N. Leontiev.

A primeira tese, no que concerne ao aspecto psicológico do sistema zankoviano, está fundamentada na teoria de Vigotski, para o qual “a fonte da evolução histórica da conduta não há que buscá-la no interior do homem, senão fora dele, no meio social ao qual pertence.”⁴⁰ (VIGOTSKI *apud* ZANKOV, 1984, p. 8). Assim, “o desenvolvimento da psique da criança é de natureza social, e que a fonte do desenvolvimento é a cooperação e a *obutchénie*.”⁴¹ (ZANKOV, 1984, p. 8).

³⁶ “[...] su idea, sus principios, los programas de estudio, los manuales, etc. Las causas no esenciales, individuales, son las particularidades de la labor de cada maestro dado.” (ZANKOV, 1984, p. 22).

³⁷ “[...] que la actividad consecuente del hombre es una forma del proceso objetivo.” (LENIN *apud* ZANKOV, 1984, p. 16).

³⁸ “La lógica objetiva, descubierta mediante la investigación científica, expresa cierto orden, una relación causal, necesaria y estable entre los fenómenos y los procesos de la realidad objetiva.” (ZANKOV, 1984, p. 17).

³⁹ “[...] que la estructura de la enseñanza es la causa de cierto proceso del desarrollo general de los escolares.” (ZANKOV, 1984, p. 17).

⁴⁰ “La fuente de la evolución histórica de la conducta no hay que buscarla en el interior del hombre -escribió Vigotski- sino fuera de él, en el medio social al cual pertenece...” (VIGOTSKI *apud* ZANKOV, 1984, p. 8).

⁴¹ “[...] la psiquis del niño es de naturaleza social, que la fuente del desarrollo es la cooperación y la enseñanza.” (VIGOTSKI *apud* ZANKOV, 1984, p. 8).

O autor concorda com L. Vigotski sobre “o princípio de etapas concernentes à idade.”⁴² (ZANKOV, 1984, p. 8). E fundamentado nesse pesquisador, Zankov (1984, p. 8) revela que “as características próprias de cada etapa são a mudança das relações interfuncionais, ou seja, *a mudança da estrutura funcional da consciência.*”⁴³ Com isso, “na primeira infância, se diferencia e abre a via principal de desenvolvimento da *percepção* dominante no sistema de relações interfuncionais, enquanto na idade pré-escolar, essa função central dominante é a *memória.*”⁴⁴ (VIGOTSKI *apud* ZANKOV, 1984, p. 8).

Outra tese formulada por L. Vigotski e, posteriormente, desenvolvida por S. Rubinstein, presente no sistema zankoviano, refere-se à unidade entre a consciência e a atividade. Rubinstein, ressalta que:

A psique, que se forma na atividade – a consciência em atividade-, manifestasse no comportamento [...]. Aparece a tarefa – diferente do simples sentimento de conhecer o psíquico por meio do descobrimento das relações objetivas com as que objetivamente se determina. (RUBINSTEIN, 1946 *apud* ZANKOV, 1984, p. 9)

Logo, percebemos que a unidade entre a consciência e a atividade permite conhecer o conteúdo da personalidade, de compreender seus sentimentos e sua consciência, por meio dos aspectos externos do comportamento, das ações e dos produtos humanos. Tais singularidades contribuíram para que Leontiev caracterizasse as diferentes idades, concluindo que, na idade da pré-escola, a atividade dominante era o jogo, enquanto, no Ensino Fundamental, passa ser o estudo, e o jogo passa a ser uma atividade secundária.

O sistema zankoviano também é integrado à teoria de A. N. Leontiev sobre o *desenvolvimento da psique da criança em relação com a atividade*, como fundamento para os estudos experimentais:

O primeiro que devemos assinalar a esse respeito consiste no seguinte: no processo de desenvolvimento da criança, sob influxo das circunstâncias concretas de sua vida, muda o lugar que ocupa objetivamente no sistema de relações humanas [...]. A atividade principal é aquela em cuja forma aparece e no interior da qual se diferenciam outros tipos novos de atividade... na qual se formam ou se reestruturam os processos psíquicos parciais... da qual... dependem as mutações psicológicas fundamentais da personalidade da criança

⁴² “[...] principio de etapas concernientes a la edad.” (VIGOTSKI *apud* ZANKOV, 1984, p. 8).

⁴³ “Considera que la base de los rasgos propios de cada etapa es el cambio de las relaciones interfuncionales, es decir, el cambio de la estructura funcional de la conciencia.” (VIGOTSKI *apud* ZANKOV, 1984, p. 8).

⁴⁴ “En la primera infancia se diferencia y abre la vía principal del desarrollo la percepción dominante en el sistema de relaciones interfuncionales, mientras que, en la edad preescolar, esa función central dominante es la memoria.” (VIGOTSKI *apud* ZANKOV, 1984, p. 8).

que se observam em dito período de desenvolvimento.⁴⁵ (LEONTIEV *apud* ZANKOV, 1984, p. 9, tradução nossa)

Zankov (1984) ressalta que, conforme a ciência psicológica foi se desenvolvendo, a pedagogia pôde basear cada vez mais nos seus dados. O aspecto psicológico “torna-se um elemento importante na observação dos problemas pedagógicos, em particular, o problema da *obutchénie* e do desenvolvimento.” (ZANKOV, 1984, p. 9-10, tradução nossa).⁴⁶

Outro construto vigotskiano que Zankov apoiou para o desenvolvimento da sua pesquisa está relacionado à zona de desenvolvimento possível. L. V. Zankov reconhece que a *obutchénie* precisa atuar não em funções já maduras, ou seja, no nível de desenvolvimento real, mas nas que estão em processo de maturação, isto é, no nível de desenvolvimento potencial, estabelecendo uma zona de desenvolvimento produto, da distância entre a real e a potencial, a qual é denominada zona de desenvolvimento possível (ZDP). Na ZDP, ocorrem processos internos e externos, ambos importantes para o desenvolvimento da criança. Nas palavras de Vigotski,

A importância da *obutchénie* procede do fato de que ela cria a zona de desenvolvimento possível, ou seja, estimula o interesse da criança pelo ambiente que, por sua vez, desperta processos internos de desenvolvimento. Uma vez acendido, o desenvolvimento só avançará por meio da interação com o ambiente real e dentro do contexto das relações interpessoais. Contudo, apesar deste requisito de estímulos externos, o crescimento ou amadurecimento intelectual será uma realização interna e individual de cada criança.⁴⁷ (VYGOTSKY *apud* GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 17, tradução nossa)

Logo, a *obutchénie* e o desenvolvimento não coincidem em suas trajetórias, como concluiu L. S. Vigotski, com o qual concordou Zankov (1984). Ademais, não se pode garantir que uma organização *obutchénie* irá promover o desenvolvimento ótimo do estudante, visto

⁴⁵ “Lo primero que debemos señalar a este respecto - escribe- consiste en lo siguiente: en el proceso de desarrollo del niño, bajo el influjo de las circunstancias concretas de su vida, cambia el lugar que ocupa objetivamente en el sistema de las relaciones humanas [...] La actividad principal - prosigue A. Leóntiev - es aquella en cuya forma aparecen y en el interior de la cual se diferencian otros tipos nuevos de actividad... en la cual se forman o se reestructuran los procesos psíquicos parciales... de la cual... dependen las mutaciones psicológicas fundamentales de la personalidad del niño que se observan en dicho período de desarrollo.” (LEONTIEV *apud* ZANKOV, 1984, p. 9).

⁴⁶ “El aspecto psicológico deviene un elemento importante en la observación de los problemas pedagógicos, en particular, del problema de la enseñanza y el desarrollo.” (ZANKOV, 1984, p. 9-10).

⁴⁷ “The significance of teaching derives from the fact that it creates the zone of proximal development, i. e. stimulates a child's interest in the environment which in turn awakens internal developmental processes. Once kindled, development will evolve only through interaction with real surroundings and within the context of peer relationships. Yet despite this requisite of external stimuli, the resulting intellectual growth or maturation becomes the inner accomplishment of the individual child.” (VYGOTSKY *apud* GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 17).

que o desenvolvimento pressupõe as relações interpessoais e precisa de estímulo externo, mas ele está sujeito ao processo interno de cada estudante.

Outra teoria decorrente da fisiologia e da psicologia, proposta por I. Pávlov (1849-1936), que foi sustentação para a criação do experimento didático proposto por Zankov (1984), está relacionada à particularidade sistematizadora do funcionamento do córtex dos grandes hemisférios cerebrais, consistente em que “‘o sistema coordenado e equilibrado dos processos internos’ aparece como resultado de efeitos constantes e precisos dos excitantes no sistema. Isso significa que o sistema dos processos internos é condicionado por certo sistema de ações externas.”⁴⁸ (PÁVLOV *apud* ZANKOV, 1984, p. 19, tradução nossa).

L. V. Zankov (1984, p. 19, tradução nossa) reconhece que “a existência de um ‘sistema coordenado’ dos processos internos se refere à essência do desenvolvimento da psique da criança”⁴⁹, e que essa ideia é fundamentada no critério de L. Vigotski, que se refere ao desenvolvimento intelectual do escolar. Vigotski ressalta que a assimilação dos conceitos exerce uma importante função no desenvolvimento da criança, visto que “somente no sistema o conceito pode adquirir qualidade de consciente e arbitrário. O consciente e o sistemático são sinônimos em plena medida com referência aos conceitos.”⁵⁰ (VIGOTSKI *apud* ZANKOV, 1984, p. 19). Essas teorias expostas por I. Pávlov e L. Vigotski são fundamentais tanto por seu conteúdo específico quanto para ideias científicas gerais que orientam a investigação. Diante disso, Zankov (1984) se embasa nelas, considerando que estas têm influência positiva na ação pedagógica experimental sobre o desenvolvimento dos estudantes do Ensino Fundamental. Desse modo, o “conteúdo do experimento não está composto por disciplinas isoladas, nem pelo uso particular de métodos e procedimentos de ensino, senão por um sistema didático que compreende todo o Ensino Fundamental.” (AQUINO, 2013, p. 206).

Nesta seção, apresentamos os princípios teóricos e psicológicos que fundamentaram o sistema proposto por L. V. Zankov e, na próxima, anunciamos os princípios didáticos do sistema zankoviano.

⁴⁸ “Uno de los aspectos principales de la doctrina del fisiólogo soviético I. Pavlov (1849-1936), sobre la cualidad sistematizadora del funcionamiento de la corteza de los grandes hemisferios cerebrales, consiste en que ‘el sistema coordinado y equilibrado de los procesos internos’ aparece como resultado de efectos constantes y precisos de los excitantes en el sistema. Dicho de otro modo, el sistema de los procesos internos es condicionado por cierto sistema de acciones externas.” (PÁVLOV *apud* ZANKOV, 1984, p. 19).

⁴⁹ “La existencia de un ‘sistema coordinado’ de los procesos internos, al parecer, se refiere a la esencia del desarrollo de la psiquis del niño.” (ZANKOV, 1984, p. 19).

⁵⁰ “[...] solamente en el sistema, el concepto puede adquirir calidad de consciente y arbitrario. Lo consciente y lo sistemático son sinónimos en plena medida con referencia a los conceptos...” (VIGOTSKI *apud* ZANKOV, 1984, p. 19).

2.3 Princípios didáticos do sistema zankoviano

Segundo Zankov (1984), os princípios do sistema experimental são desenvolvidos na estruturação dos objetos de conhecimento e na estrutura metodológica do trabalho referente ao assunto do estudo. As conjecturas do sistema se encontram na forma homogênea e dependente, pois os princípios estão ligados uns aos outros, não podendo, no trabalho do professor, serem separados em fases ou adotados sozinhos em diferentes momentos. Mesmo com tudo interligado, cada função apresenta o seu desempenho no método, trazendo as suas particularidades na relação com os demais princípios.

A estrutura do sistema zankoviano está fundamentada na ideia de promover a *obutchénie* que permita o desenvolvimento integral dos estudantes e, neste, o papel orientador e regulador do processo de *obutchénie*, nas suas diversas formas, diz respeito aos princípios didáticos.

Zankov (1984) relata que, no ensino tradicional, o conhecimento não é o foco principal, tendo como ponto forte as excelentes notas dos estudantes. Com poucas perspectivas, o ensino tradicional faz com que aumentem as dificuldades, as tensões e bloqueios nos estudantes, tornando algo pouco provável o conhecimento aprofundado e necessário fora da escola. No sistema experimental zankoviano, a busca pela manifestação de novos princípios que conduzem a eclosão e aprofundamento do impulso interior para o estudo vai além de notas ou atividades obrigatórias. Tem-se o “enriquecimento com novos e novos conhecimentos, a reflexão, o desejo de chegar por si mesmo à verdade, a realização de tarefas difíceis, tudo isto caracteriza o impulso interior intenso e estável.”⁵¹ (ZANKOV, 1984, p. 34, tradução nossa).

Zankov (1984) anuncia que os esforços acontecem no desenvolvimento das tarefas, porém, ao consubstanciar com outra tarefa que permita o desenvolvimento dos conceitos, o esforço fica desprovido de todo caráter doloroso, que é repleto de todas as pressões externas.

O sistema experimental tem como objetivo evidenciar as possibilidades da escola de gerar circunstâncias que contribuam para o desenvolvimento do estudante, levando em consideração a necessidade de oportunizar um ambiente para as individualidades. Claro que não se pode reduzir o trabalho coletivo, considerando que, para C. Marx, “o desenvolvimento de um indivíduo está condicionado ao desenvolvimento de todos os outros com quem está em

⁵¹ “El enriquecimiento con nuevos y nuevos conocimientos, la reflexión, el deseo de llegar por sí mismo a la verdad, la realización de difíciles tareas, todo ello caracteriza el impulso interior intenso y estable.” (ZANKOV, 1984, p. 34).

troca direta e indireta.”⁵² (MARX *apud* ZANKOV, 1984, p. 34, tradução nossa). Para aprender, necessita-se de troca de informação, de contato, diálogo, de algo que motive a busca pelo conhecimento, que traga satisfação e prazer para o estudante.

Assim, fica evidente que, no sistema zankoviano, é preciso valorizar o desenvolvimento do coletivo e, também, da individualidade. O segundo não significa o isolamento ou desagregação, mas necessidade de se ter um espaço diversificado e com tarefas que valorizem as particularidades do indivíduo, possuindo diretrizes ideológicas próprias e que revelem os impulsos e desejos dos estudantes, considerando estes como seres humanos constituídos de outras características e traços da personalidade previstos para determinada fase de seu desenvolvimento.

Dessa maneira, Zankov (1984) estabelece cinco princípios didáticos sobre como orientar a estruturação do conteúdo e da metodologia de *obutchénie* que representam uma unidade, não podendo ser apreendidos separadamente ou independentemente. Esses princípios são apresentados na obra de Zankov (1968, 1984, 2017) e nas obras de alguns autores contemporâneos, como Aquino (2013, 2017), Ferola (2019), Ferola e Longarezi (2021), Garcia e Miranda (2022), Guseva e Sosnowski (1997), Guseva e Solomonovich (2017), Pereira (2020), dentre outros.

Os princípios foram determinados, essencialmente, na primeira etapa do experimento, porém foram aprimorados durante as outras fases subsequentes. Os princípios são:

- I. *Obutchénie* em um nível desafiador de dificuldade;
- II. Enfatizar a *obutchénie* dos conhecimentos teóricos;
- III. Ritmo ativo e crescente da *obutchénie*;
- IV. Desenvolver a consciência dos estudantes em relação ao processo de *obutchénie*;
- V. Organizar aulas para promover o desenvolvimento intencional e sistemático de cada estudante.

Os princípios agem em planos distintos e têm funções específicas, mas que interligam entre si, sendo o campo de ação dos quatro primeiros princípios definido pelo último, considerando que, para alcançar os objetivos de cada princípio, a organização da *obutchénie* é fundamental. (ZANKOV, 1984).

⁵² “El desarrollo de un individuo se halla condicionado por el desarrollo de todos los demás con quienes se halla en intercambio directo e indirecto.” (MARX *apud* ZANKOV, 1984, p. 34).

2.3.1 Primeiro Princípio: *Obutchénie* em um nível desafiador de dificuldade

O princípio *Obutchénie em um nível desafiador de dificuldade* contribui para que o estudante reconheça suas capacidades e oferece um espaço de desenvolvimento, estimulando os processos típicos da atividade psíquica do estudante na compreensão dos conceitos e significados a serem apreendidos. Nesse processo, quando os estudantes têm o domínio de alguns conteúdos, estes precisam conduzir, ao mesmo tempo, o aprimoramento dos conhecimentos posteriores. (ZANKOV, 1984).

Segundo Zankov (1984), o grau de dificuldade é proporcionado pela observação do seu nível. Esse fato parece anunciar que o nível de dificuldade coloca por terra o próprio princípio, mas essa interpretação é errada, pois o nível tem caráter relativo, sendo necessário atuar nos diversos níveis de dificuldade do estudo.

Vale ressaltar que o nível da dificuldade não busca diminuir a dificuldade em si, mas exerce um papel indispensável no desenvolvimento do princípio. Então, se a tarefa proposta for compreendida pelo estudante e a dificuldade não for observada pelo mesmo, de forma que não ocorra a apropriação da tarefa apresentada, a *obutchénie* seguirá imperceptível pelo caminho da memória mecânica. Conseqüentemente, a *obutchénie* em um nível desafiador de dificuldade deixará de ser um fator positivo, tornando-se um fator negativo. (ZANKOV, 1984).

O professor, no desenvolvimento do seu trabalho, precisa observar constantemente o processo e os resultados da assimilação de conhecimentos e habilidades de cada estudante, fazendo uma avaliação mais precisa e qualitativa. Nesse caso, a avaliação não pode ser global e somativa.

Os resultados da avaliação sobre o processo de assimilação de conhecimentos e habilidades são materiais complementares que permitem ao professor especificar o nível de dificuldade a ser praticada com toda a turma e com cada estudante, em consonância com a assimilação individual da tarefa proposta.

Conforme o princípio *obutchénie em um nível desafiador de dificuldade*, se estabelece a estrutura do objeto de *obutchénie*, a tarefa não é apenas mais ampla e complexa, mas apresenta singularidades qualitativas, devido à

[...] conexão indissolúvel do referido princípio com outro, que exige o papel norteador dos saberes teóricos no Ensino Fundamental. Portanto, não se leva em conta qualquer dificuldade, mas sim aquela que consiste no conhecimento

da interdependência dos fenômenos, seu vínculo interno substancial.⁵³ (ZANKOV, 1984, p. 31, tradução nossa)

Diante disso, o papel norteador dos conhecimentos teóricos não desvaloriza a relevância da formação de um conjunto de conhecimentos e habilidades dos estudantes. A formação precisa ser fundamentada no desenvolvimento integral, que necessita de uma compreensão mais aprofundada de conceitos, relações e dependências.

No sistema experimental de Zankov, o principal princípio é o da *obutchénie em um nível desafiador de dificuldade* e este depende de outro princípio, que é o *Ritmo ativo e crescente da obutchénie*. Portanto, a diminuição indevida do ritmo, concernente a exercícios mnemônicos e maçantes do que foi estudado, torna-se obstáculo e impossibilita a *obutchénie em um nível desafiador de dificuldade*, considerando que “o estudo da escola caminha preferencialmente ‘por caminhos trilhados’.”⁵⁴ (ZANKOV, 1984, p. 31-32, tradução nossa).

O princípio *obutchénie em um nível desafiador de dificuldade* influencia na organização da *obutchénie* e nos manuais didáticos de todos os tipos, conteúdos de livros e apostilas, visto que requer um estudo mais aprofundado dos conceitos e uma organização de *obutchénie* que torne o estudante protagonista da sua *obutchénie*, contribuindo para que este avance de conceitos mais elementares e secundários para conceitos mais abrangentes.

Para que o estudante seja ativo no processo de *obutchénie* e que o objeto de conhecimento seja um elemento efetivo nos sistemas que transformarão em estruturas prontas, que serão mobilizadas quando o estudante precisar tomar decisões no seu dia a dia, é necessário compreender a complexidade da teia de conceitos.

Logo, para promover o desenvolvimento completo do estudante, a *obutchénie* precisa impulsionar as operações mentais complexas e, para que isso ocorra, Zankov (1984) diz que a tarefa precisa ser instigante.

Guseva e Sosnowski (1997) afirmam que o princípio *obutchénie em um nível desafiador de dificuldade* está fundamentado nas concepções de Vigotsky de

[...] que as atividades diárias da classe e o ambiente, em geral, devem regularmente expor o jovem estudante a situações novas ou desconhecidas, cujas resoluções desafiam e estendem as habilidades de resolução de problemas da criança. Além disso, para garantir o aprendizado ideal, as

⁵³ “[...] la ligación indisoluble del mencionado principio con otro, que exige el papel rector de los conocimientos teóricos en la enseñanza primaria. Por consiguiente, no se tiene en cuenta cualquier dificultad, sino aquella que consiste en el conocimiento de la interdependencia de los fenómenos, su ligazón interna sustancial.” (ZANKOV, 1984, p. 31).

⁵⁴ “[...] por cuanto el estudio del escolar marcha de preferencia ‘por caminos trilhados’.” (ZANKOV, 1984, p. 31-32).

crianças devem trabalhar sozinhas nos problemas das aulas.⁵⁵ (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 18-19, tradução nossa)

Portanto, nesse princípio, as tarefas e o ambiente precisam proporcionar aos estudantes o acesso a conjecturas desconhecidas e desafiantes que permitam a estes desenvolver a sua capacidade de tomar decisões. Zankov (1984) ponderava que o desenvolvimento integral não acontece quando os estudantes não têm a oportunidade de enfrentar e resolver desafios.

Vale ressaltar que o princípio *obutchénie em um nível desafiador de dificuldade* não pode ser compreendido como uma forma de superação externa de dúvidas que provocam tensão na atividade de estudo, mas como um movimento que considere a interdependência dos fenômenos e que permita que o estudante vivencie situações novas-complexas que o instiguem a resolver o problema dado, dando-lhe um decurso e orientação.

2.3.2 Segundo princípio: Enfatizar a *obutchénie* dos conhecimentos teóricos

Lev Vigotski e seus seguidores demonstraram interesse em estudar sobre a formação de conhecimentos teóricos. Zankov (1984), além de considerar e enfatizar a formação de conhecimento teórico nas suas pesquisas, ressaltou que, para se ter um desenvolvimento integral do estudante, tem que se levar em consideração o campo da emoção e da vontade.

Segundo Guseva e Sosnowski (1997), os estudos de L. V. Zankov em salas de aula de escolas básicas na Rússia demonstraram, de maneira empírica, que os estudantes prezam pela investigação e atividades pormenorizadas. No sistema zankoviano, eles são estimulados a exprimirem livremente observações sobre o objeto de estudo. O professor tem a função de orientá-los a observar os padrões e conexões evidentes no material e solicitar que anunciem a natureza dessas relações.

Para Zankov,

A ênfase na educação elementar deve ser nos conceitos e não no desenvolvimento da destreza na manipulação de símbolos linguísticos e matemáticos. As últimas habilidades são mais bem definidas em uma compreensão firme de padrões de linguagem fundamentais e matemáticos.⁵⁶

⁵⁵ “[...] that daily class activities and the environment, in general, should regularly expose the young learner to novel or unfamiliar situations whose resolutions both challenge and extend the child's problem-solving skills. Moreover, to ensure optimum learning children should be left to work through lesson problems on their own.” (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 18-19).

⁵⁶ “The emphasis in elementary education should be on concepts rather than on developing dexterity in manipulating linguistic and mathematical symbols. The latter skills are better set on a firm understanding of fundamental language patterns and mathematical.” (ZANKOV, 1966 *apud* GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 19).

(ZANKOV, 1966 *apud* GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 19, tradução nossa)

Este princípio aborda a importância do pensamento teórico para o desenvolvimento cognitivo do estudante e estima a formação de uma teia de conceitos e habilidades dos sujeitos. O pensamento teórico é mais do que definições ou termos, se forma na apreensão das dependências e leis que regem os fenômenos, na apropriação mais ampla e profunda dos conceitos. Contudo, o sistema zankoviano não defende a formação de um pensamento teórico puro, pois, para Zankov (1984, p. 36, tradução nossa), “o conhecimento empírico é o ponto de partida do caminho complexo que leva à abstração.”⁵⁷

2.3.3 Terceiro princípio: Ritmo ativo e crescente da *obutchénie*

Compete ao princípio *Ritmo ativo e crescente da obutchénie* um papel auxiliar em relação à *obutchénie em um nível desafiador de dificuldade*, mas tem uma função independente que necessita de um progresso incessante. O encadeamento do intelecto do estudante com tarefas diversas “cria condições favoráveis para uma compressão cada vez mais profunda dos dados obtidos, uma vez que fazem parte de um sistema amplamente desenvolvido.”⁵⁸ (ZANKOV, 1984, p. 32, tradução nossa).

O *Ritmo ativo e crescente da obutchénie* leva em consideração as necessidades intelectuais dos estudantes, sendo seus pensamentos estimulados pela pluralidade, oposto ao que acontece com a repetição de exercícios. Como pondera Zankov (1966 *apud* GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 19), “focar-se em exercícios sem fim e na monotonia da revisão excessiva produz preguiça mental, apatia espiritual e serve para obstruir, em vez de facilitar o desenvolvimento.”⁵⁹

No sistema experimental Zankoviano, é inaceitável a realização de exercícios mnemônicos e avançar não exprime ensinar uma quantidade expressiva de conceitos possíveis, reduzindo o tempo de estudo dos assuntos. Nas aulas, é essencial que os estudantes resolvam um quantitativo possível de problemas, de exercícios, entre outros. O ritmo acelerado de estudo precisa propiciar a descoberta das particularidades dos conhecimentos adquiridos,

⁵⁷ “[...] El conocimiento empírico es el punto de arranque del complejo camino que conduce a la abstracción.” (ZANKOV, 1984, p. 36).

⁵⁸ “[...] crea condiciones favorables para una comprensión más y más honda de los datos obtenidos, puesto que se enmarcan en un sistema ampliamente desarrollado.” (ZANKOV, 1984, p. 32).

⁵⁹ “Focus on endless drill and the monotony of excessive review produces mental laziness, spiritual apathy and serves to obstruct rather than facilitate development.” (ZANKOV *apud* GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 19).

oportunizando aprofundar e articular com outras áreas do conhecimento, sendo este princípio “mais qualitativo do que quantitativo.”⁶⁰ (ZANKOV, 1984, p. 32, tradução nossa). Vale ressaltar que o avançar não significa apressar as atividades em sala de aula e não forçar o desenvolvimento, mas oferecer condições para despertar e desenvolver o potencial do estudante.

Guseva e Sosnowski (1997) ressaltam que, no sistema experimental de Zankov, o ritmo não pode ser considerado como um fim em si mesmo, mas como um meio para o desenvolvimento dos estudantes. Nesse modelo, as revisões e repetições acontecem incorporadas aos novos conceitos, isto é, os conhecimentos empíricos são integrados ao novo conteúdo e precisam ser dominados pelos estudantes para que se consiga avançar. Para não haver interrupção na compreensão dos conceitos nem do ritmo no processo de *obutchénie*, torna-se necessário que os problemas sejam desafiadores, mobilizando ainda mais a utilização dos conceitos anteriores.

No sistema zankoviano, o conhecimento anterior é reestruturado com o novo conceito a ser apreendido, permitindo que o estudante, por meio do familiar, avance nos campos desconhecidos. O conhecimento prévio incorporado ao novo conceito “se torna sincronizado com o conjunto de conhecimentos em expansão dos estudantes.”⁶¹ (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 20, tradução nossa). Com isso, as informações adquiridas não ficam isoladas e o estudante tem uma concepção da “relação integral entre os elementos, da diversidade e versatilidade dessas relações, para garantir que esse conhecimento seja firmemente estabelecido na memória.”⁶² (ZANKOV, 1970 *apud* GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 20, tradução nossa).

Em síntese, no terceiro princípio, *Ritmo ativo e crescente da obutchénie*, a ideia de ritmo acelerado no estudo não está relacionada com a concepção de apressar as tarefas em sala de aula, visto que, no sistema zankoviano, não há pretensão de forçar o desenvolvimento. O intuito é de propiciar condições favoráveis que estimulem o desenvolvimento do estudante e isto é oportunizado ao propor problemas desafiadores que não valorizem a repetição.

⁶⁰ “[...] Este principio tiene un carácter más cualitativo que cuantitativo.” (ZANKOV, 1984, p. 32).

⁶¹ “[...] and becomes synchronous with the learners’ expanding pool of knowledge.” (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 20).

⁶² “[...] integral relationship between elements, of the diversity and versatility of these relationships, to ensure that such knowledge is firmly set in memory.” (ZANKOV, 1970 *apud* GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 20).

2.3.4 Quarto princípio: Desenvolver a consciência dos estudantes em relação ao processo de *obutchénie*

Segundo Zankov (1984), a função do pensamento teórico é evidenciada quando os estudantes compreendem o processo de estudo. Guseva e Sosnowski (1997) complementam que este princípio

[...] refere-se à autoconsciência do estudante em relação ao seu progresso ou desenvolvimento no decorrer de uma experiência de *obutchénie* em específica, por exemplo, um projeto, um curso específico etc. Esta autoconsciência ou automonitoramento da *obutchénie* envolve várias atividades mentais.⁶³ (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 20)

Assim, o processo de domínio dos conceitos e das habilidades torna-se objeto de consciência até determinados momentos e as diversas questões concernentes à compreensão do conceito e das habilidades são objeto de atenção constante por parte do estudante. Neste princípio, muitas questões surgem relacionadas ao domínio do conhecimento e das habilidades, tais como: “Como os conhecimentos a serem aprendidos estão ligados entre si? Quais são os vários aspectos a serem considerados no domínio da ortografia ou das operações computacionais? Qual é o mecanismo subjacente aos erros e à prevenção de erros?” (GUSEVA, 2019, p. 223). Desse modo, estas precisam ser objeto da atenção incansável dos estudantes.

Para exemplificar o quarto princípio, Zankov (1984) apresentou uma das fases da investigação da matemática relacionada à *obutchénie* da tabuada (fatos fundamentais das operações) propostas para os anos iniciais da escolarização. Zankov (1984) relata que o processo de estudo foi estruturado de

[...] forma que o estudante explique a si mesmo os fundamentos da disposição concreta do material, a necessidade de aprender seus elementos concretos, as causas do erro ao assimilá-los etc. Assim, por exemplo, a tabela correspondente a 3 é simplesmente oferecida para que possa ser aprendida, que começa assim: 3 - 9, e pergunta: “Por que na tabuada de número 3 não é necessário aprender o quanto é 3 por 2?”. Comparando as tabelas, o estudante encontra a resposta: na tabela correspondente a 3 não há 3 por 2, não é necessário aprender porque 3 por 2 = 6 e 2 por 3 = 6, e 2 por 3 = 6 é já está na tabela de 2.⁶⁴ (ZANKOV, 1984, p. 32, tradução nossa)

⁶³ “This refers to the learner's self-awareness of his or her progress or development in the course of a specific learning experience, for example, a project, a specific course, etc.” (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 20).

⁶⁴ “Nosotros estructuramos el proceso de estudio de manera que el alumno se explique a sí mismo los fundamentos de la disposición concreta del material, la necesidad de aprender sus elementos concretos, las causas de error al assimilarlos, etc. Así, por ejemplo, se le ofrece simplemente para que se la aprenda la tabla correspondiente al 3, que empieza así: 3 - 9, y se pregunta: ‘¿Por qué en la tabla de multiplicar del número 3 no es necesario

Logo, quando o estudante compreende a relação entre os fatores, determinada pela propriedade comutativa, parte constituinte do pensamento teórico concernente da operação de multiplicação, espera-se que ele compreenda o processo de estudo e avance em um ritmo mais rápido, exercendo a autoconsciência no processo de desenvolvimento do conceito.

2.3.5 Quinto princípio: Organizar aulas para promover o desenvolvimento intencional e sistemático de cada estudante

O campo de atuação dos quatro princípios do sistema experimental Zankoviano será delineado no quinto princípio, estabelecendo a relevância do professor organizar seu trabalho de forma intencional e sistemática para o desenvolvimento geral de todos os estudantes, incluídos aqueles com mais dificuldades no processo de *obutchénie*, já que estes precisam de um esforço sistemático maior que os demais para o seu desenvolvimento. Zankov (1984) considera que todos os estudantes podem progredir no seu desenvolvimento, com exceção dos com comprometimentos patológicos.

Guseva e Sosnowski (1997) mencionam que, para Zankov (1984), a segregação e a organização dos estudantes considerando o desempenho são antagônicas ao desenvolvimento e à essência da *obutchénie*, e que “o processo de desenvolvimento pode ser lento, pode ser desigual por uma variedade de razões - psicológicas, experiência pessoal” (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 21, tradução nossa)⁶⁵, no entanto, os estudantes, independente da sua dificuldade, precisam aprender juntos, visto que, para Zankov (1967), a aula é organização da *obutchénie* coletiva em que,

[...] dada a organização adequada de atividades, cada estudante dá uma contribuição única e valiosa para a vida comum da classe. Quando todos os estudantes fracos são agrupados... é negado o enriquecimento que advém do trabalho ao lado de estudantes mais fortes. Além disso, tais arranjos tendem a diminuir o autoconceito e a autoestima do estudante.⁶⁶ (ZANKOV, 1967 *apud* GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 21, tradução nossa)

aprender cuánto es 3 por 2?”. Comprando las tablas, el escolar halla la respuesta: en la tabla correspondiente al 3 no figura 3 por 2, no es necesario aprenderlo porque 3 por 2 = 6 y 2 por 3 = 6, y 2 por 3 = 6 figura ya en la tabla del 2.” (ZANKOV, 1984, p. 32).

⁶⁵ “The process of development may be slow, if may be uneven for a variety of reasons - psychological, personal experience.” (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 21).

⁶⁶ “Is a learning collective in which, given appropriate organization of activities, each student makes a unique and valuable contribution to the common life of the class? When all weak students are grouped together they... are denied the enrichment that comes from working alongside stronger learners Moreover, such arrangements tend

Então, no sistema zankoviano, há uma valorização do trabalho coletivo que estimula o desenvolvimento individual e, nesse movimento, o professor precisa intervir, recorrendo às contribuições dos colegas para promover o desenvolvimento cognitivo de cada estudante da turma.

As particularidades desses princípios fazem ecoar o que Vigotsky (1991) defendia:

Uma característica notável de atingir operações cognitivas avançadas é que a aquisição de tais funções no desenvolvimento da criança ocorre duas vezes. Primeiro, por meio da atividade coletiva ou social e, segundo, por meio da atividade independente do processo de pensamento da própria criança.⁶⁷ (VIGOTSKY, 1991 *apud* GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 21, tradução nossa)

Neste item, apresentamos as singularidades de cada princípio didático, compreendendo a unidade entre estes, visto que, como sistema integral, os princípios precisam ser desenvolvidos como um todo.

No próximo tópico, anunciamos as três unidades do desenvolvimento dos estudantes.

2.4 O processo de desenvolvimento dos estudantes no sistema zankoviano

Segundo Zankov (1984), a investigação do processo de desenvolvimento dos estudantes é uma parte orgânica e necessária de todo seu sistema didático, em busca de respostas em especial da seguinte indagação: “Que traços típicos deverão possuir o sistema didático que conduzirá a resultados ótimos no desenvolvimento geral dos estudantes?”⁶⁸ (ZANKOV, 1984, p. 89, tradução nossa).

Zankov (1984) defende que o desenvolvimento do estudante acontece em três unidades, seguindo o mesmo princípio proposto por Vigotsky (1956 *apud* ZANKOV, 1984, p. 88), de que “a divisão em unidades permite conhecer as leis concretas do todo.” Desse modo, são unidades do desenvolvimento dos estudantes: a atividade de observação, a atividade mental ou do pensamento e as atividades práticas.

to diminish learner's self-concept and self-esteem.” (ZANKOV, 1967, *apud* GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 21).

⁶⁷ “A notable feature of attaining advanced cognitive operations is that the acquisition of such functions in a child's development occurs twice. First through collective or social activity and secondly, through the independent activity of the child's own thought process.” (VIGOTSKY, 1991 *apud* GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 21).

⁶⁸ “[...] de qué rasgos típicos deberá poseer el sistema didáctico que reportará resultados óptimos en el desarrollo general de los escolares.” (ZANKOV, 1984, p. 89).

2.4.1 Atividade de observação

Zankov (1984) ressalta que, na atividade de observação, os processos de percepção são fundamentais, por isso escolheu trabalhar com tarefa que explorasse a observação no desenvolvimento do experimento. O objetivo da observação é o estudo do objeto, e seu conhecimento dá-se em destacar e contrastar, analisar suas partes, seus aspectos e suas particularidades. A atividade de observação se dá de maneiras diferentes para cada estudante.

O autor relata que, no início do experimento, ele e os colaboradores não se atentaram para as diferenças tipológicas entre a observação e percepção, e abordaram as mudanças gerais reveladas em determinadas condições de *obutchénie*.

Definiram que a observação é algo complexo e que a percepção está relacionada ao raciocínio, sendo este um dado considerável. Assim, no experimento, propôs-se a observação cuidadosa do objeto de estudo antes da proposição de uma atividade. A metodologia das experiências individuais propunha tarefas que corroborassem para que os estudantes ampliassem as possibilidades de observação.

Dessa maneira, os estudantes não receberam orientações estruturadas e foram instruídos a observarem atentamente os objetos. Os objetos observados foram: aves dissecadas, plantas do herbário, a pintura nomeada *A Costa Marítima de Udrias, de I. Shishkin*, e uma concha. Na tarefa em que os estudantes foram orientados a determinar que ave e que planta eram, com base na sua aparência exterior, enfatizavam a direção geral da observação, não se realizavam perguntas que impulsionassem a observar determinada parte ou característica do objeto.

A primeira experiência de observar a ave dissecada e a planta de herbário foi repetida no segundo ano de desenvolvimento do experimento, pois, no primeiro ano, não se teve nenhuma diferença entre os estudantes da classe não experimental e da classe experimental.

Os resultados mostraram que os estudantes da classe experimental investigavam mais os objetos, demonstrando-se motivados a saberem mais sobre o objeto de estudo, revelando, portanto, um impulso interior, estímulo interno ao estudo, ao passo que os estudantes da classe não experimental precisaram ser motivados pelo pesquisador, não havendo estímulo interno como na classe experimental.

Inferiu-se, então, que os estudantes da classe experimental possuíam um grande impulso interior ao conhecimento, ao contrário daqueles da classe não experimental.

2.4.2 Atividade mental ou do pensamento

O pensamento é estudado por diferentes ciências e a história do estudo do pensamento mostra que a lógica possui grande influência, em momentos até substituindo o estudo psicológico do pensamento.

Zankov (1984), ao destacar a atividade mental como uma das linhas de investigação do desenvolvimento geral dos estudantes, estava se referindo à psicologia do pensamento. Segundo Zankov (1984):

O progresso do pensamento na ontogenia surge, antes de mais nada, no fato de que se realizam suas mudanças qualitativas de caráter orientador: do inferior para o superior. A base do estudo do desenvolvimento da atividade mental do escolar é o postulado sobre a diversidade das formas de pensamento, de suas relações mútuas substanciais, de seu movimento intercondicionado.⁶⁹ (ZANKOV, 1984, p. 102, tradução nossa)

Assim, objetiva-se com a pesquisa psicológica sobre o pensamento e seu desenvolvimento apresentar a atividade mental como um processo e esclarecer as leis que o regulam. Zankov (1984) cita que, para S. Rubinstein (1946), no pensamento teórico, se desenvolve concomitantemente o evidente-imaginativo e o sensório-motor, sendo estes transformados e elevados a um grau superior, estabelecendo interrelações complexas que variam, dependendo do caso.

De acordo com Zankov (1984), a problemática do processo de *obutchénie* estruturou-se com a pesquisa do desenvolvimento mental nos estudantes. Na atividade mental investigada, estão presentes a análise e síntese, abstração e generalização, mas “estão subordinadas à consideração do objeto em certos aspectos, à coincidência de aspectos, à mudança de um aspecto, se for necessário no processo da sua realização.” (ZANKOV, 1984, p. 103)⁷⁰. Rubinstein considera, no processo mental, o objeto, no processo de pensamento, sempre entra em novas relações e, por isso, gera novas qualidades e fixa novos conceitos, como o cerne da atividade mental, ao ser observado.

⁶⁹ “El progreso del pensamiento en ontogenia aparece, ante todo y, sobre todo, en el hecho de que se operan sus cambios cualitativos que tienen un carácter orientador: de lo inferior a lo superior. La base del estudio del desarrollo de la actividad mental del escolar es el postulado acerca de la diversidad de las formas de pensamiento, de sus relaciones mutuas sustanciales, de su movimiento intercondicionado.” (ZANKOV, 1984, p. 102).

⁷⁰ “[...] empero se hallan subordinados a la consideración del objeto en determinados aspectos, a la coincidencia de los aspectos, al cambio de un aspecto, si ello resulta necesario en el proceso de su realización.” (ZANKOV, 1984, p. 103).

A metodologia utilizada por Zankov (1984) e seus colaboradores seguia os mesmos princípios que foram utilizados por Vigotsky, isto é, consistia em “descobrir o papel da palavra e o caráter de seu uso funcional no processo de formação do conceito...”⁷¹ (VIGOTSKY, 1956 *apud* ZANKOV, 1984, p. 102, tradução nossa). Para lograr o objetivo do estudo, submeteu-se a metodologia a modificações necessárias.

As qualidades que se apreciam diretamente das figuras, que nas investigações de Vigotski serviam de material auxiliar para evidenciar o papel funcional da palavra na formação do conceito, nós as convertemos em base para a observação dos objetos, em um ou vários de seus aspectos a um tempo. A análise e a síntese, a abstração e a generalização podiam atuar ora num plano evidente-metafórico, ora num plano verbal-lógico, em suas diversas correlações. Graças a isso, se criou a possibilidade de investigar a dinâmica da atividade mental por níveis reais, que levam das formas embrionárias de percepção do caráter comum dos objetos ao nível mais elevado possível. (ZANKOV, 1984, p. 103, tradução nossa)

Assim, a análise e síntese, abstração e generalização e suas possibilidades de atuação na análise do objeto, possibilitaram investigar a dinâmica da atividade mental em níveis reais, perpassando todo o Ensino Fundamental. Nesse método, os estudantes trabalharam com corpos redondos diferentes entre si, por sua forma, pela altura e pela cor.

Nessa primeira tarefa, o estudante recebia várias figuras e era informado que cada um possuía um nome e que deveria escolher figuras que, segundo seu julgamento, teria o mesmo nome e deveria explicar o porquê de nomeá-las de certa forma após a classificação.

Na primeira etapa, observou-se que:

- I. O estudante não entende que a tarefa de selecionar objetos de acordo com um determinado modelo o obriga a escolher objetos afins por causa de sua forma;
- II. O estudante entende a instrução como a tarefa de escolher os objetos relacionados, mas não pode considerar todas as figuras do mesmo ponto de vista. A seleção dos grupos não funciona;
- III. O estudante escolhe figuras relacionadas como pista, mas não é capaz de considerá-las simultaneamente de dois pontos de vista;
- IV. Ao selecionar, de acordo com um modelo, as figuras com o mesmo nome, ou seja, relacionadas as duas pistas, o estudante não consegue citar uma única pista comum;
- V. Após selecionar, de acordo com o modelo, as figuras de mesmo nome, ou seja, relacionadas segundo as duas indicações, ao estabelecer a operação, o estudante cita apenas uma das indicações comuns;

⁷¹ “Descubrir el papel de la palabra y el carácter de su empleo funcional em el proceso de la formación del concepto...” (VIGOTSKY, 1956 *apud* ZANKOV, 1984, p. 102)

VI. Depois de selecionar corretamente as figuras, de acordo com o modelo, o estudante cita as duas pistas que constituem a base do agrupamento das figuras;

VII. O estudante distribui as figuras em grupos de mesmo nome e determina o princípio do encontro das figuras em cada grupo, ou seja, a afinidade por altura e forma.⁷² (ZANKOV, 1984, p. 106-107, tradução nossa)

Na segunda etapa, na classe não experimental, os estudantes não conseguiram fazer a relação da figura com ou sem a ajuda do professor. A diferença também foi encontrada na verbalização da escolha. A segunda etapa revelou que a atividade mental se manifesta de forma mais interessante em estudantes que são das turmas experimentais do método empregado.

Observou-se que muitos estudantes das classes normais apresentam insegurança, sentem certa confusão, são, em sua maioria, indiferentes quanto ao acerto ou não da questão, têm necessidade de ajuda de terceiros e aprovação do pesquisador. Ao passo que os estudantes da turma experimental são mais seguros, justificam suas ações e embasam escolhas. Ao longo do processo, aparecem diferenças qualitativas nos dados quantitativos em ambas as classes, bem como nos resultados.

Mesmo com dados confiáveis, a metodologia não permitiu estudar grande número de estudantes e desenvolveu outra metodologia com o objetivo, também, de evidenciar a observação. Foi feito experimento coletivo na terceira etapa com estudantes de cada uma das séries experimentais, aos quais foi apresentado o problema de ervilhas: “Temos muitas ervilhas amarelas e verdes, grandes e pequenas. Em quantas partes devemos dividir as ervilhas de modo que em cada uma delas encaixem as ervilhas que são semelhantes por duas características? Quais ervilhas irão entrar em cada parte?”⁷³ (ZANKOV, 1984, p. 113, tradução nossa). O sentido dessa tarefa era o mesmo que o da metodologia anterior: de estudar um lado particular

⁷² “I. El alumno no comprende que la tarea de seleccionar los objetos de acuerdo con un modelo dado le obliga a escoger los objetos afines por su forma.

II El alumno comprende la instrucción como tarea de escoger los objetos afines, pero no puede considerar a todas las figuras desde un mismo punto de vista. La selección de los grupos no resulta.

III. El alumno elige las figuras afines en cuanto, a un indicio, pero no es capaz de considerarlas simultáneamente desde dos puntos de vista.

IV. Al seleccionar, de acuerdo con nm modelo, las figuras del mismo nombre, es decir, afines por los dos indicios, el actuante no es capaz de citar ni uno sólo de los indicios comunes.

V. Después de seleccionar, según el modelo, as figuras del mismo nombre, es decir, afines según los dos indicios, al fundamentar la operación, el alumno sólo cita uno de los indicios comunes

VI. Tras de seleccionar debidamente las figuras, según el modelo, el escolar cita los dos indicios que constituyen la base de la agrupación de las figuras.

VII. El alumno distribuye las figuras en grupos del mismo nombre y determina el principio de la reunión de las figuras en cada grupo, o sea, la afinidad por la altura y la forma.” (ZANKOV, 1984, p. 106-107).

⁷³ “[...] Tenemos un montón de guisantes amarillos y verdes, grandes y chicos. ¿En cuántas partes habrá que dividir los guisantes para que en cada una de ellas entren los guisantes que se parezcan por dos indicios? ¿Qué guisantes entrarán en cada parte?” (ZANKOV, 1984, p. 113).

da atividade mental, apesar de não se ter o objeto físico para observação e solução escrita, não mais verbal.

A orientação era para que se observassem os aspectos e se selecionasse as ervilhas em grupos. Para tanto, era importante ater-se às particularidades de cada uma, o que dificultou a compreensão das crianças dessa idade escolar. A solução desse problema permitiu descobrir as mudanças na atividade mental de cada uma das turmas.

Zankov (1984) ressalta que a diferença de desenvolvimento entre as crianças em idade escolar nas aulas experimentais e regulares revelou-se na sua atividade intelectual e de forma qualitativa referente à esfera dos impulsos inferiores.

Os estudantes das aulas experimentais “caracterizam-se pelas suas ações baseadas no seu próprio impulso, o desejo de mostrar os seus juízos, as suas consequências, a subordinação das ações e a explicação verbal à tarefa proposta.”⁷⁴ (ZANKOV, 1984, p. 117, tradução nossa).

Os estudantes das aulas normais, na sua maioria, agem como consequência de indução, de indicações externas; a sua incapacidade de controlar as suas ações e a sua indiferença quanto à questão de saber se a solução dada é ou não correta são característica deles.

Diante disso, a comparação entre os estudantes avançados das classes experimental e ordinária e os estudantes atrasados das mesmas classes mostra uma forte diferença no desenvolvimento da atividade mental.

Os dados quantitativos mostram diferenças qualitativas no processo e resultados do desenvolvimento da atividade mental entre os estudantes das aulas experimentais e regulares. As diferenças que apareceram estão em total acordo com a investigação do processo de resolução da tarefa em diferentes crianças em idade escolar.

2.4.3 Atividades práticas

Considerando o desenvolvimento das atividades práticas como necessário ao desenvolvimento da criança, a esfera sensorial, conceitos espaciais e a atividade mental aparecem de forma concreta. Assim, a “superação dos obstáculos relacionados com a realização da atividade prática, evidencia também certos aspectos emotivo-volitivos da atividade psíquica.”⁷⁵ (ZANKOV, 1984, p. 118).

⁷⁴ “[...] se caracterizan por sus acciones basadas en su propio impulso, en el deseo de mostrar sus juicios, su consecuencia, la subordinación de las acciones y de la explicación verbal a la tarea propuesta.” (ZANKOV, 1984, p. 117).

⁷⁵ “[...] La superación de los obstáculos relacionados con la realización de la actividad práctica, evidencia asimismo ciertos aspectos emotivo-volitivo de la actividad psíquica.” (ZANKOV, 1984, p. 118).

Os experimentos dessa etapa também foram realizados de forma individual. Os estudantes da segunda série tiveram que fazer uma caixa de papel conforme um modelo, trabalho inédito para eles. Havia um segundo modelo B com linhas que auxiliavam o processo de construção para aqueles que não conseguiam desenvolver o primeiro. (ZANKOV, 1984).

Os estudantes receberam instruções quanto à construção: “Olhe atentamente para aquela caixa e faça outra igual a ela.”⁷⁶ (ZANKOV, 1984, p. 119). Se o estudante encontrou dificuldades, ele recebeu o modelo B, como já citado, mesmo tendo dificuldades, ele foi recebendo partes da caixa separadamente e deveria dizer como tentou montar o objeto. Importante afirmar que, no experimento, o tempo não foi definido. (ZANKOV, 1984).

Essas experiências contêm relevâncias que são essenciais, visto que a particularidade das atividades práticas “consiste em que entre elas há uma relação peculiar entre o pensamento e a ação.”⁷⁷ (ZANKOV, 1984, p. 119).

O estudante realiza uma boa tarefa quando é capaz de ressaltar as operações necessárias e apresentar a sua ordem. Esse fato pode ser observado nas explicações verbais, que anunciam as características de todo o processo de reavaliação da atividade.

O experimento mostrou que os estudantes da classe não experimental tiveram resultados inferiores durante a execução da tarefa. A turma experimental apresentou resultado superior também no quesito tempo, com média de 17 minutos, enquanto na classe não experimental foi de 23 minutos.

2.5 Singularidades de uma boa aula para L. V. Zankov e as orientações metodológicas do sistema zankoviano

Guseva e Sosnowski (1997, p. 23, tradução nossa) reforçam que, na teoria de L. V. Zankov, “a curiosidade intelectual das crianças é melhor estimulada pelo inesperado, o aparentemente inexplicável, o surpreendente”⁷⁸, sobre o que Lev Vigotski afirmava que um fato com carga emocional facilita a absorção e retenção. Logo, na relação de *obutchénie* e desenvolvimento, os sentimentos precisam estar envolvidos.

L. V. Zankov ressalta que iniciar a aula com um elemento surpresa pode despertar o interesse do estudante, mas isso apenas se consolida caso ele sinta-se em um ambiente

⁷⁶ “[...] Fíjate atentamente em esa caja y confecciona otra igual.” (ZANKOV, 1984, p. 119).

⁷⁷ “[...] consiste en que ellas hay una relación peculiar entre el pensamiento y la acción.” (ZANKOV, 1984, p. 119)

⁷⁸ “[...] children's intellectual curiosity is best whetted by the unexpected, the seemingly inexplicable, the surprising.” (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 23).

receptivo, confortável, encorajador e respeitoso, características necessárias no seu sistema. Dessa forma, o estudante será livre para experimentar, solucionar problemas, acertar, errar e se expressar.

Para além do que já foi citado, é necessário propiciar ao estudante momentos de escolhas, noção de responsabilidade compartilhada entre ele e o professor, encorajamento a cada desafio, o que o leva a reconhecer-se como sujeito ativo e criativo do meio em que vive e se relaciona. O sistema zankoviano prescreve ao estudante “ouvir e escutar, olhar e ver, pensar e ponderar, evitar repetição, ser feliz e experimentar”⁷⁹. (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 23, tradução nossa).

O sistema zankoviano reconhece a sala de aula como viva, dinâmica e dialógica, onde o professor tem a função de promover ambiente colaborativo e o compartilhamento de responsabilidade e resultados. Nesse sistema, alcança-se o princípio didático, combinando conteúdo e metodologia de *obutchénie*.

Guseva e Sosnowski (1997, p. 24, tradução nossa) ressaltam que a metodologia didática de L. V. Zankov identifica quatro imperativos de uma boa aula: “Perspectiva interdisciplinar; apresentação exponencial do assunto; um elemento de incongruência ou dissonância; inclusão ou incorporação.”⁸⁰

A perspectiva interdisciplinar fomenta um currículo com integração interdisciplinar, o qual possibilita que o estudante desenvolva diversas habilidades durante a aquisição de conhecimento. Para além dos muitos conteúdos, os estudantes desenvolvem competências socioemocionais e cognitivas. Assim, o trabalho interdisciplinar permite o desenvolvimento integral do estudante, oportunizando relação e percepção do mundo que o cerca, o que precisa estar presente no planejamento das aulas, de forma que a relação *obutchénie* e desenvolvimento sejam de forma integral.

A apresentação exponencial do assunto, conforme Guseva e Sosnowski (1997), é uma *obutchénie* interrelacionada e interdependente, com base nos saberes de cada aula sequencialmente, corroborando para o maior conhecimento do estudante.

Nesse processo, os conceitos são incorporados avançando em questões que se seguem mais abstratas e em novos contextos. Mesmo reforçando frequentemente tais conceitos, na organização da *obutchénie*, não há monotonia ou repetição, como nos casos de simulação e

⁷⁹ “Listen and hear; Look and see; Think and ponder; No repeating (it is not interesting); Be happy and experience.” (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 23).

⁸⁰ “• Cross-disciplinary perspective; • Exponential presentation of subject matter; • An element of incongruity or dissonance; • Inclusivity or incorporation.” (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 24).

revisão. Para a apresentação do conteúdo, é imperativa a preparação cuidadosa, avaliando o que foi aprendido, relacionando-o e incorporando ao que será apresentado para o estudante.

O processo de apropriação de um conceito moroso é “enriquecido por todas as novas características, com constante introdução de um novo conhecimento, sua compreensão e conexão com o conhecimento existente.” (GUSEVA, 2019, p. 223).

Um elemento de incongruência ou dissonância faz com que o estudante foque sua atenção no assunto, obriga-o a comparar e analisar os fatores de dissonância, incita a investigação, pesquisa e pensamento crítico. Isso auxilia na consolidação do conhecimento, ao passo que a ausência desse elemento discordante tende a tolher a habilidade criativa e de resolução de problemas.

A individualidade do estudante é respeitada ao fato de o professor fazer uso da inclusão e incorporação e ajustar o conteúdo às suas particularidades. A inclusão e a incorporação também se referem:

A apresentação exponencial do conteúdo não se restringe a uma única disciplina, mas é um componente de todo um esquema didático ou pedagógico, cujas características devem ser aplicadas em todas as disciplinas ou em todas as áreas disciplinares da escola primária.⁸¹ (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 25, tradução nossa)

No sistema zankoviano, o progresso quantitativo não é medido ou objetivado, portanto, notas não movem o estudo, diferindo, dessa forma, do ensino tradicional, pois além de ser qualitativo, ele traz o professor como grande ator do desenvolvimento do estudante, trocando exercícios cansativos, mecânicos e repetitivos por atividades mais intrigantes e motivadoras.

No sistema zankoviano, um dos objetivos principais da “*obutchénie* consiste em despertar o pensamento independente, inquieto, do escolar, ligado a emoções vivas.”⁸² (ZANKOV, 1984, p. 62, tradução nossa). Logo, o método para o desenvolvimento, no sistema zankoviano, propicia ao estudante “o desenvolvimento de suas habilidades, talentos e iniciativa.”⁸³ (ZANKOV, 1968, p. 19, tradução nossa).

⁸¹ “[...] the exponential presentation of content is not restricted to a single discipline, but that it is a component of an entire didactic or pedagogical scheme whose features are to be applied across disciplines or in all subject areas in the primary school.” (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 25).

⁸² “Uno de los objetivos principales de nuestra enseñanza estriba en despertar el pensamiento independiente, inquieto, del escolar, ligado a emociones vivas.” (ZANKOV, 1984, p. 62).

⁸³ “развитие их способностей, талантов и инициативы.” (ЗАНКОВ, 1968, p. 19).

No sistema zankoviano, o sistema metodológico foi concebido fundamentado em algumas qualidades pedagógicas específicas, a saber: *a multilateralidade, o caráter do processo, as colisões e a variabilidade*. (ZANKOV, 1984; НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006).

A *multilateralidade*, na perspectiva de que os procedimentos metodológicos cumprem várias funções: “são meios que contribuem não apenas para a assimilação de conhecimentos e hábitos, mas também para o desenvolvimento dos estudantes, para trazer a real diversidade do desempenho mental dos estudantes, para a esfera do estudo.”⁸⁴ (ZANKOV, 1984, p. 222, tradução nossa). Sua singularidade e a unidade de sua orientação estão envolvidas devido ao fato de que, nos estudos, estão inclusas a emoção e a vontade. Para Zankov (1984), estas consistem nas necessidades espirituais do estudante e são concebidas com a raiz mais profunda da atividade. As emoções estão sujeitas a seu caráter, podendo ter efeito revigorante ou, pelo contrário, angustiante. Zankov (1984) enfatiza que:

As emoções positivas criam nos estudos o alto espiritual tão característico das aulas experimentais. Referimo-nos a emoções tais como admiração, deleite espiritual, alegria, simpatia. Também podem existir emoções que poderiam ser descritas como negativas: insatisfação (por exemplo, em relação a uma falta grave cometida por um colega de classe), desapontamento, dúvida. Estes tipos de emoções se tornam positivos (por exemplo, a satisfação de ter resolvido um problema corretamente após uma longa e difícil busca).⁸⁵ (ZANKOV, 1984, p. 222-223, tradução nossa)

Zankov (1984) referia-se à realidade com um único todo de significado, de intelecto e emoções nas suas dinâmicas interrelacionadas e que cada assunto das disciplinas de língua materna, matemática, música, arte entre outras, pode oferecer diversas oportunidades para experimentar as emoções e os sentimentos profundos. O autor ressalta que a ponte entre as emoções positivas ou negativas precisa ser o conhecimento e não as observações dos professores sobre o desempenho do trabalho.

No que tange ao *caráter do processo*, Zankov (1984, p. 223, tradução nossa) revela que o “processo não é uma simples mudança, mas toda uma série de etapas que se sucedem

⁸⁴ “[...] constituyen medios que contribuyen no sólo a asimilar los conocimientos y hábitos, sino al desarrollo de los escolares, a hacer que actúe en la esfera del estudio la diversidad real de la actuación psíquica de los escolares.” (ZANKOV, 1984, p. 222).

⁸⁵ “Las emociones positivas crean en los estudios et auge espiritual tan propio de las clases experimentales. Nos referimos a emociones tales como la admiración, el deleite espiritual, la alegría, la simpatía. También pueden darse emociones que antes bien podrían calificarse de negativas: el descontento (por ejemplo, en relación con una grave falta cometida por un compañero en clase) la decepción, la duda. Ese tipo de emociones se convierten en positivos (por ejemplo, la alegría, La satisfacción por haber resuelto correctamente un problema tras de largas y difíciles búsquedas).” (ZANKOV, 1984, p. 222-223).

geneticamente, uma após a outra”⁸⁶, em uma relação orgânica e integrada. Essa particularidade da metodologia atua nos diversos níveis do processo didático, isto é, “tanto na comunicação do conhecimento teórico, que evidencia, em um ou outro grau, a essência do material de estudo, quanto na ordem das tarefas dadas aos estudantes.”⁸⁷ (ZANKOV, 1984, p. 223). Nessa propriedade do método, é desenvolvida a “natureza multifacetada do processo de *obutchénie*”⁸⁸ (НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006, p. 84, tradução nossa), e que garante o “desenvolvimento integral contínuo do estudante.”⁸⁹ (НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006, p. 84).

L. V. Zankov salienta que a metodologia tradicional do Ensino Fundamental é caracterizada pelo isolamento de cada etapa do ano letivo, como uma unidade independente e completa, na qual só pode passar para outra etapa quando a anterior estiver completamente assimilada. Já no sistema zankoviano, as etapas estão interligadas, como tem sido demonstrado experimentalmente, que

[...] o verdadeiro conhecimento de cada elemento progride constantemente à medida que os outros elementos que se seguem são assimilados e à medida que se ganha consciência do conjunto único correspondente, até o ano escolar inteiro e sua continuação nas séries consecutivas. (ZANKOV, 1984, p. 223, tradução nossa)

Outra propriedade do método de *obutchénie* é denominada *colisões*. Нечаева e Рощина (2006, p. 87, tradução nossa) anunciam que as colisões são encontradas “sempre que conhecimentos e habilidades anteriores e novos são incorporados a uma estrutura unificada.”⁹⁰ Sendo assim, quando uma contradição é resolvida, uma estrutura mais significativa é formada, contribuindo para que se tenha uma compreensão mais profunda do fenômeno em estudo. As autoras relatam que, algumas vezes, para que se tenha uma nova maneira de fazer uma ação, é preciso que esta colida com as experiências anteriores. Nas palavras de L. V. Zankov, citado por Nechaeva e Roshchina, “para executar corretamente a nova tarefa, as formas de ação anteriores precisam ser atualizadas e, ao mesmo tempo, a experiência anterior precisa ser

⁸⁶ “[...] el proceso no es un simple cambio, sino toda una serie de etapas que genéticamente se suceden, que siguen una tras otra.” (ZANKOV, 1984, p. 223).

⁸⁷ “[...] tanto en la comunicación de los conocimientos teóricos, que evidencian, en uno u otro grado, la esencia del material de estudio como en el orden de las tareas que se dan a los escolares.” (ZANKOV, 1984, p. 223).

⁸⁸ “[...] Свойство многогранности учебного процесса находит свое развитие в следующем типическом свойстве методической сис темы в свойстве процессуальности. [...]” (НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006, p. 84).

⁸⁹ “[...] обеспечивающее непрерывное общее развитие ученика. [...]” (НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006, p. 84).

⁹⁰ “[...] обнаруживаются всякий раз, когда прежние и новые знания и навыки включаются в единую структуру.” (НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006, p. 87).

superada e as operações e sua sequência precisam ser encontradas que correspondam à nova tarefa recebida.”⁹¹ (ZANKOV *apud* НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006, p. 87).

As colisões são usadas para estimular a atividade de *obutchénie* nos estudantes. L.V. Zankov ressaltou que

[...] para um trabalho criativo ativo da mente, é muito importante que a pessoa, diante de algo obscuro, dando origem a uma pergunta, seja “surpreendida”, emocionalmente inflamada por esta pergunta, de modo que o obscuro, o incompreensível evoque nela a emoção do espanto.⁹² (ZANKOVA *apud* НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006, p. 87, tradução nossa)

A última particularidade do sistema metodológico é a *variabilidade* que tem a qualidade que se desprende da própria natureza do processo didático, variando de diferentes maneiras, considerando as condições concretas. Seu papel é “encontrar formas e meios de implementar um sistema metodológico de acordo com uma variedade de condições: a localização da instituição, seu tipo, o estilo individual do professor, as características da classe e de cada estudante.”⁹³ (НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006, p. 92, tradução nossa).

A *variabilidade* “tem seus limites, que são determinados por princípios didáticos.”⁹⁴ Logo, a flexibilização não altera o sistema como um todo, desde que as mudanças realizadas “sejam permitidas pelos princípios didáticos, que assumem um papel orientador e regular”⁹⁵ (ZANKOV, 1984, p. 224) e não podem ser alteradas.

A *variabilidade* do sistema metodológico, sua flexibilidade, possibilita mudanças no tempo planejado, métodos de trabalho, sequência de tarefas, sua natureza, dependendo da situação educacional específica. Essa propriedade do sistema metodológico “cria condições

⁹¹ “Для правильного выполнения нового задания нужна актуализация прежних способов действий, а в то же время преодоление прежнего опыта, поиски операций и их последовательности, соответствующих полученному теперь новому заданию.” (ЗАНКОВА *apud* НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006, p. 87).

⁹² “[...] Коллизии используются для возбуждения интенсивной учебной деятельности школьников. Л.В. Занков подчеркивал: «...для активной творческой работы мышления очень важно, чтобы человек, сталкиваясь с чем-то непонятным, рождающим вопрос, «удивился», эмоционально загорелся этим вопросом, чтобы непонятное вызвало в нем эмоцию удивления.» (ЗАНКОВА *apud* НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006, p. 87).

⁹³ “[...] Его функциональное значение состоит в том, чтобы найти пути и средства реализации методической системы в соответствии с разнообразными условиями: местом нахождения учебного заведения, его типом, индивидуальным стилем учителя, особенностями класса и каждого школьника.” (НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006, p. 92).

⁹⁴ “[...] La variabilidad del sistema metodológico tiene sus límites, que son determinados por los principios didácticos.” (ZANKOV, 1984, p. 224).

⁹⁵ “[...] sean permitidos por los principios didácticos, que asumen un papel directriz y regulador.” (ZANKOV, 1984, p. 224).

reais para a criatividade do professor, para a individualização do processo de *obutchénie*.”⁹⁶ (НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006, p. 91-92, tradução nossa).

Нечаева e Рощина (2006, p. 92) afirmam que a *variabilidade* e a flexibilidade são imprescindíveis para um sistema que trabalha com os conceitos de “‘desenvolvimento’, ‘criatividade’, ‘individualidade’.”⁹⁷

Portanto, ao optar por utilizar o sistema didático zankoviano, as orientações metodológicas precisam ser consideradas, assim como os princípios didáticos.

Nesta seção, aprofundamos nos estudos em relação às singularidades do sistema zankoviano, compreendendo seus princípios teóricos, psicológicos e didáticos, o processo de desenvolvimento dos estudantes, bem como a trajetória de seu criador, L. V. Zankov.

Na próxima seção, anunciamos os conteúdos matemáticos presentes nesta pesquisa, assim como as pesquisas que abarcam estes e buscamos apresentar quais aspectos da equação do 2º grau adotados neste estudo se aproximam e se distanciam do que é proposto na BNCC. (BRASIL, 2017).

⁹⁶ “Вариантность еще одно типическое свойство методической системы вытекает из самой природы учебно-воспитательного процесса, зависящего от многообразия варьирующихся конкретных условий, прежде всего учитывающего промощности детей.[...]” (НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006, p. 91-92).

⁹⁷ “[...] «развитие», «творчество», «индивидуальность».” (НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006, p. 92).

3 UM OLHAR PARA O CONCEITO DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU

O estudo da história do desenvolvimento do objeto cria, por sua vez, as premissas indispensáveis para a compreensão mais profunda de sua essência, razão porque, enriquecidos da história do objeto, devemos retomar mais uma vez a definição de sua essência, corrigir, completar e desenvolver os conceitos que o expressam. Deste modo, a teoria do objeto fornece a chave do estudo de sua história, ao passo que o estudo da história enriquece a teoria, corrigindo-a, completando-a e desenvolvendo.
(KOPNIN, 1978, p. 186)

Valemo-nos dos dizeres de Kopnin (1978) para iniciar e justificar a escrita desta seção, visto que o conhecimento da história do conceito nos retrata que a sua produção e desenvolvimento são substanciais para a organização da *obutchénie* que antecede ao desenvolvimento do conhecimento teórico.

Mas, antes de revelar o que será contemplado em cada item desta seção, organizamos uma síntese do que foi anunciado até aqui, estabelecendo uma relação entre as particularidades do experimento didático-formativo proposto por L. V. Zankov e o desenvolvimento de nosso estudo. Inicialmente, apresentamos os caminhos trilhados para escolha do nosso objeto de estudo – analisar as contribuições do processo de *obutchénie* de equações do 2º grau baseado no sistema zankoviano para o desenvolvimento integral do estudante –, e os fatores determinantes para a escolha de uma metodologia que contribuísse para o desenvolvimento integral do estudante, considerando as dimensões moral, ética, emocional, volitiva e cognitiva. Posteriormente, revelamos os cinco princípios didáticos do sistema zankoviano e as orientações metodológicas apresentadas por L. V. Zankov e seus colaboradores, os quais são essenciais para a organização do processo de *obutchénie* fundamentado em Zankov (1963, 1968, 1984). Por fim, apresentamos a organização das etapas da tarefa que depende intrinsecamente do conteúdo matemático e das particularidades do sistema zankoviano para concretização do objetivo real.

As seções 1 e 2 deste texto abarcam as duas primeiras etapas do processo descrito no parágrafo anterior. Dessa forma, nesta seção, abordamos o objeto matemático deste estudo, o conceito de equação do 2º grau numa perspectiva lógico-histórica, buscando elementos para a organização de um experimento didático-formativo que propicie a apropriação desse conceito.

Inicialmente, nosso olhar voltou-se para a produção de pesquisas de Mestrado e Doutorado, durante o período de 2013 a 2020. Em seguida, anunciamos o que propõe a Base

Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) para o ensino de álgebra, apresentando em quais aspectos nossa pesquisa se aproxima e se distancia do que está proposto nesse documento normativo. Por último, apresentamos, de forma sucinta, como os árabes e os indianos resolviam as equações do 2º grau.

Por fim, esta seção se torna importante para este estudo, pois a organização da *obutchénie* que considera as leis do movimento do pensamento necessita se aproximar do objeto, conhecendo as características histórico-lógico deste. Essas particularidades estão fundamentadas na base da dialética do materialismo, cujo foco está na totalidade, no movimento, na fluência e na interdependência. (CARAÇA, 1951). Além disso, os elementos apresentados nesta seção são utilizados na análise para investigar o processo de *obutchénie* e desenvolvimento dos estudantes.

3.1 Um olhar para as pesquisas acadêmicas sobre equação do 2º grau

Um estudo sobre as pesquisas relacionadas à equação do 2º grau, entre os anos de 2013 e 2020, foi realizado com o intuito de conhecer o que já foi pesquisado na área, como um direcionamento e aperfeiçoamento desta pesquisa de doutorado. Escolhemos os trabalhos publicados entre 2013 e 2020, visto que antes de 2013 muitos destes não estavam disponíveis no *site* da CAPES⁹⁸ e tínhamos o intuito de conhecer as pesquisas mais recentes.

Ressaltamos que, em nossa busca, a primeira investigação sobre as pesquisas que abarcaram o tema equação do 2º grau aconteceu em 2018, quando pesquisamos os trabalhos publicados de 2013 a 2018. Já em março de 2021, revisitamos o site da CAPES com o intuito de conhecer os trabalhos publicados depois do nosso primeiro estudo, as metodologias adotadas e os resultados obtidos. Refizemos nossas buscas, as quais possuem seus passos descritos nesta subseção, a título de organizar este texto.

Esse estudo foi realizado por meio de buscas no Banco de Teses e Dissertações da CAPES, em que foram utilizados como principais descritores: “equação do 2 grau”; “equação do 2º grau”; “equação do segundo grau”; “equações do 2 grau”, “equações do 2º grau”; “equações do segundo grau”.

Assim, esta etapa, nomeada *busca e seleção*, foi dividida em duas fases, compostas por sete buscas cada uma, sendo necessário um total de 14 buscas, refinadas pela escrita das sentenças entre aspas.

⁹⁸ Disponível em: <https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/>. Acesso em: 14 mar. 2021.

Na primeira fase da *busca e seleção*, foram utilizadas as sentenças: 1. “equação do 2 grau”; 2. “equação do 2º grau”; 3. “equação do segundo grau”. Essa fase foi dividida em duas partes.

Na primeira parte, utilizamos as sentenças apresentadas nos itens 1, 2 e 3, sendo realizadas três buscas:

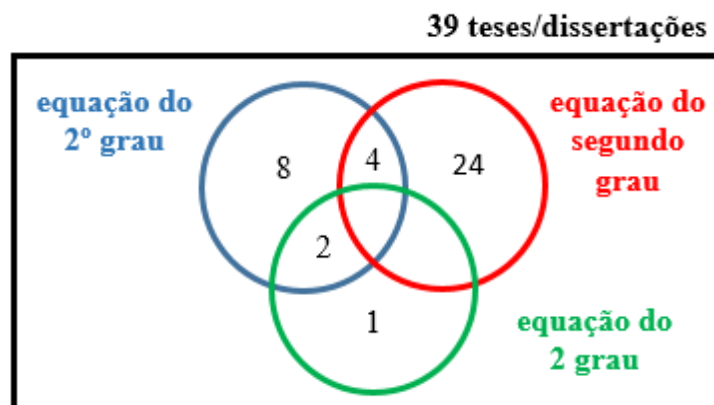
1. “equação do 2 grau”: nessa pesquisa, foram obtidos três resultados;
2. “equação do 2º grau”: obtivemos 14 resultados;
3. “equação do segundo grau”: nessa busca, encontramos 28 resultados.

Na segunda parte, para verificar possíveis repetições nos resultados, foram realizadas mais quatro buscas no referido *site*, combinando as sentenças:

4. “equação do segundo grau” “equação do 2 grau”: nessa pesquisa, encontramos 31 resultados, não havendo repetições de teses e dissertações utilizando a busca a partir dessas expressões;
5. “equação do segundo grau” “equação do 2º grau”: obtivemos 38 resultados, sendo encontrados quatro trabalhos repetidos;
6. “equação do 2 grau” “equação do 2º grau”: 15 resultados, com dois trabalhos repetidos;
7. “equação do segundo grau” “equação do 2º grau” “equação do 2 grau”: nessa combinação, foram encontrados 39 resultados.

Para melhor compreensão, os resultados estão apresentados na Figura 1:

Figura 1 - Resultados da pesquisa



Fonte: Dados da pesquisadora.

Após as sete buscas, nesta primeira fase, foram obtidos 39 resultados. Desse total, a partir da análise dos títulos e das datas de defesas das teses e dissertações, foram selecionados

21 trabalhos que se relacionam com o tema “Equação do 2º grau”, entre os anos de 2013 e 2020. Sobre as outras 18 pesquisas, ou o período não condizia com o investigado, ou apenas citaram o termo equação do 2º grau, mas o foco do estudo não era esse.

Em fase de término dos primeiros levantamentos, constatamos a necessidade de pesquisar as seguintes sentenças: **8.** “equações do 2º grau”, **9.** “equações do 2 grau” e **10.** “equações do segundo grau”. Desde então, essas novas buscas foram divididas em duas partes, constituindo, assim, a segunda fase da *busca e seleção*.

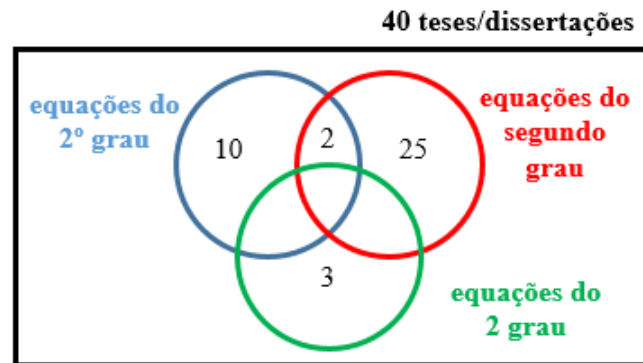
Na primeira parte, foram feitas três buscas, utilizando as seguintes sentenças: **8.** “equações do 2 grau”, **9.** “equações do 2º grau” e **10.** “equações do segundo grau”. Para a oitava sentença, foram obtidos três resultados, para a nona, foram constatados 12 resultados e, para décima sentença, 27 resultados.

Na segunda parte, utilizando essas três novas sentenças, com o intuito de verificar possíveis repetições, foram realizadas mais quatro buscas no *site*, agora, combinando as sentenças dos itens 8, 9 e 10:

- 11.** “equações do segundo grau” “equações do 2 grau”: nesta pesquisa, obtivemos 30 resultados, sem repetições de dissertações/teses nos resultados;
- 12.** “equações do segundo grau” “equações do 2º grau”: foram encontrados 37 resultados, sendo que dois trabalhos foram repetidos na busca;
- 13.** “equações do 2 grau” “equações do 2º grau”: obtivemos 15 resultados, sem repetições;
- 14.** “equações do segundo grau” “equações do 2º grau” “equações do 2 grau”: para a combinação dessas três sentenças, obtivemos 40 resultados. Com o resultado da combinação proposta nesse item, percebemos que não há dissertações/teses que estejam presentes nas três buscas realizadas nos itens 11, 12 e 13.

Para melhor compreensão dos resultados, apresentamos estes na figura a seguir:

Figura 2 - Resultados da pesquisa – 2ª fase



Fonte: Dados da pesquisadora.

Como constatado, na 2ª fase, foram obtidos 40 trabalhos. Após a análise dos títulos e datas de defesa das dissertações e teses, foram selecionados 29 trabalhos relacionados ao tema “equações do 2º grau” entre os anos de 2013 e 2020, sendo que 13 já constavam na 1ª fase da pesquisa. Dessa forma, nessa 2ª fase, restaram apenas 16 trabalhos para serem analisados.

Terminadas as buscas, partimos para a leitura dos resumos, com o objetivo de refinar os achados, de forma a afunilar o olhar para as pesquisas que contemplassem seus estudos relacionados ao Ensino Fundamental e ao Ensino Médio, coincidindo, dessa maneira, com o objeto de pesquisa desta tese.

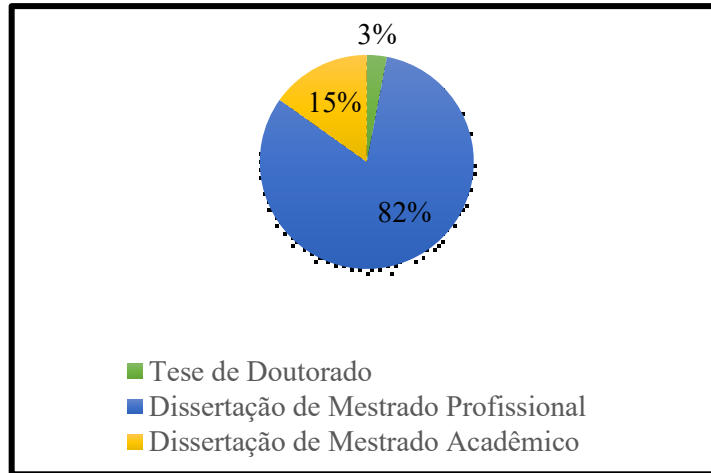
Consideramos as teses e dissertações que abordaram a equação do 2º grau para o Ensino Médio, visto que, nelas, o conceito de equação do 2º grau é desenvolvido interligado com o conceito de funções de 2º grau, aproximando-se do objeto de estudo presente nesta pesquisa de doutorado.

A primeira leitura dos 37 resumos, sendo 21 da primeira fase da pesquisa e 16 da segunda, permitiu refinar um pouco mais a escolha das teses e dissertações, visto que 33 trabalhos, sendo uma tese e 32 dissertações, contemplavam o ensino de equação do 2º grau para as etapas de Ensino Fundamental e Médio; uma pesquisa considerou os estudantes de licenciatura plena em Matemática e diz respeito à prática docente; outras três analisaram livros didáticos de matemática para as etapas de Ensino Fundamental e Médio.

Tal seleção possibilitou a elaboração do Gráfico 1. Do total de dissertações, 27 se inseriam na categoria de Mestrado Profissional⁹⁹ e cinco na de Mestrado Acadêmico.

⁹⁹ “Mestrado Profissional” é a designação do Mestrado que enfatiza estudos e técnicas diretamente voltadas ao desempenho de um alto nível de qualificação profissional. Esta ênfase é a única diferença em relação ao acadêmico. Confere, pois, idênticos grau e prerrogativas, inclusive para o exercício da docência, e, como todo programa de pós-graduação stricto sensu, tem a validade nacional do diploma condicionada ao reconhecimento prévio do curso. (Parecer CNE/CES 0079/2002).

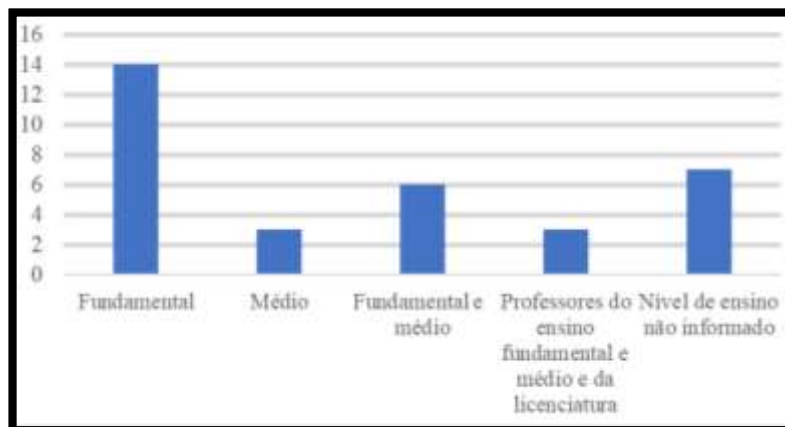
Gráfico 1 - Classificação das pesquisas quanto ao grau de titulação



Fonte: Dados da pesquisadora.

A partir das análises dos 33 trabalhos, foi possível fazer algumas constatações: o nível de ensino mais contemplado foi o Ensino Fundamental, com 14 pesquisas; três abordaram estudos voltados para estudantes de Ensino Médio; seis para estudantes dos ensinos Fundamental e Médio; três trabalhos focalizaram os estudos, estabelecendo propostas para serem desenvolvidas por professores de licenciatura e dos ensinos Fundamental e Médio; sete não direcionaram os estudos para nenhum nível de ensino, porém foram elaboradas diretivas para serem desenvolvidas com estudantes de nono ano do Fundamental e Ensino Médio. O Gráfico 2 permite uma melhor visualização quantitativa da distribuição por categorias dos trabalhos analisados.

Gráfico 2 - Diferentes olhares na investigação sobre equações do 2º grau



Fonte: Dados da pesquisadora.

Considerando os 33 trabalhos relacionados ao ensino de equações do 2º grau para o Ensino Fundamental e Médio, os resultados podem ser visualizados no Quadro 1. Vale ressaltar que os trabalhos estão organizados no quadro por ano e autoria em ordem alfabética.

Quadro 1 - Resultados da busca no Banco de Teses e dissertações do sítio da CAPES

Dissertações / teses		Titulação
2013		
1	BEZERRA, Leandro Guimaraes Ferreira. Resolução de equações do segundo grau pelo método geométrico. 30/09/2013. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Instituição de Ensino: Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.	Mestrado Profissional
2	CASTELO, Joao Alfredo Montenegro. Resolução de equações quadráticas: um resgate histórico dos métodos e uma proposta de aplicação da sequência Fedathi no seu ensino. 02/02/2013. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Instituição de Ensino: Universidade Federal do Ceará, Rio de Janeiro. Biblioteca Depositária: Matemática, UFC.	Mestrado Profissional
3	GUADAGNINI, Miriam Do Rocio. O uso da fatoração na resolução de equações do 2º grau por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. 27/02/2013. Mestrado em Educação Matemática. Instituição de Ensino: Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande. Biblioteca Depositária: Mestrado em Educação Matemática/CCET/UFMS.	Mestrado Acadêmico
4	JUNIOR, Flodoaldo Moreno. Métodos de resolução de equações do segundo e do terceiro grau. 2013. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Instituição de Ensino: Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Rio de Janeiro. Biblioteca Depositária: undefined.	Mestrado Profissional
5	MAURICIO, Henrique Aparecido. Da equação do 2º grau aos métodos numéricos para resolução de equações. 2013. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Instituição de Ensino: Universidade Federal de Juiz de Fora, Rio de Janeiro. Biblioteca Depositária: Biblioteca Central da UFJF.	Mestrado Profissional
6	OLIVEIRA, Aldeck Menezes De. Equações de 2º Grau em Geometria Plana. 2013. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Instituição de Ensino: Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, Rio de Janeiro. Biblioteca Depositária: undefined.	Mestrado Profissional
7	RUFINO, Francisco Aldrin Armstrong. Métodos Algébricos e Geométricos das Equações Polinomiais de grau maior ou igual a dois. 2013. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Instituição de Ensino: Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, Rio de Janeiro. Biblioteca Depositária: Biblioteca Central da UFPB.	Mestrado Profissional
8	SCHUVAAB, Jair Luis. Resolução de equações algébricas até quarto grau: uma abordagem histórica. 2013. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Instituição de Ensino: Universidade Estadual de Maringá, Rio de Janeiro. Biblioteca Depositária: Biblioteca Central da Universidade Estadual de Maringá.	Mestrado Profissional

Continua...

Continuação

Dissertações / teses		Titulação
9	SILVA, Ramon De Abreu E. Funções quadráticas e suas aplicações no ensino médio . 2013. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Instituição de Ensino: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro. Biblioteca Depositária: IMPA.	Mestrado Profissional
10	SOARES, Jobson Hugo De Sousa. Função Quadrática . 2013. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Instituição de Ensino: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Rio de Janeiro. Biblioteca Depositária: Biblioteca Central da UFRN.	Mestrado Profissional
11	VALE, Alberton Fagno Albino Do. As diferentes estratégias de resolução da equação do segundo grau . 2013. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Instituição de Ensino: Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Rio de Janeiro. Biblioteca Depositária: Orlando Teixeira-UFERSA.	Mestrado Profissional
2014		
12	MORAES, Alisson Gleike. Uma contribuição ao ensino-aprendizagem da matemática na educação básica: Aplicação das funções quadráticas no lançamento de foguetes confeccionados com garrafa pet . 2014. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Instituição de Ensino: Universidade Federal de Rondônia, Rio de Janeiro. Biblioteca Depositária: Biblioteca da UNIR.	Mestrado Profissional
13	PRADO, Elza Maria Dos Santos Do. Um novo olhar sobre o ensino de equação e função do segundo grau . 2014. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Instituição de Ensino: Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Rio de Janeiro. Biblioteca Depositária: Biblioteca do Centro de Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro.	Mestrado Profissional
14	SILVA, Alberto Heleno Rocha Da. Simetrias para o ensino de equações e funções na educação básica . 2014. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Instituição de Ensino: Universidade Federal de Alagoas, Rio de Janeiro. Biblioteca Depositária: Biblioteca Digital do PROFMAT.	Mestrado Profissional
2015		
15	LIMA, Vilmar De Almeida. Resolução geométrica de equações do segundo grau com utilização de régua e compasso . 2015. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Instituição de Ensino: Universidade Federal de São João Del-Rei, Rio de Janeiro. Biblioteca Depositária: undefined.	Mestrado Profissional
16	SILVA, Maisa Goncalves Da. Potencialidades da atividade de estudo no desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica dos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental . 2015. Mestrado em Educação. Instituição de Ensino: Universidade de Uberaba, Uberaba. Biblioteca Depositária: Biblioteca Central da Universidade de Uberaba.	Mestrado Acadêmico

Continua...

Continuação

Dissertações / teses		Titulação
2016		
17	ALMEIDA, Fernando Emilio Leite De. O contrato didático e as organizações matemáticas e didáticas: analisando suas relações no ensino da equação do segundo grau a uma incógnita. 2016. Doutorado em Ensino das Ciências. Instituição de Ensino: Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife. Biblioteca Depositária: undefined.	Doutorado
18	BARBOSA, Marcos Alberto. Desenvolvendo aplicativos para dispositivos móveis através do Mit App Inventor 2 nas aulas de Matemática. 2016. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Instituição de Ensino: Universidade Estadual de Santa Cruz, Rio de Janeiro. Biblioteca Depositária: BC – UESC.	Mestrado Profissional
19	COUTINHO, Renata Paixão. Uma aplicação da resolução de problemas no ensino das equações do 2º grau. 2016. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Instituição de Ensino: Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. Biblioteca Depositária: UERJ Maracanã CTC-A.	Mestrado Profissional
20	FERREIRA, Izonete De Lima. Matemática financeira: uma abordagem contextualizada para o ensino médio. 2016. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Instituição de Ensino: Universidade Federal do Pará, Rio de Janeiro. Biblioteca Depositária: undefined.	Mestrado Profissional
21	FLEIRA, Roberta Caetano. Intervenções pedagógicas para a inclusão de um aluno autista nas aulas de matemática: um olhar vygotskyano. 2016. Mestrado em Educação Matemática. Instituição de Ensino: Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo. Biblioteca Depositária: Anhanguera Pirituba.	Mestrado Acadêmico
22	FREITAS, Elizomilson Fonseca. Um estudo sobre funções afim e quadrática e métodos algébricos e geométricos para solução de equações do primeiro e segundo graus. 26/07/2016. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Instituição de Ensino: Universidade Federal do Ceará, Rio de Janeiro. Biblioteca Depositária: undefined.	Mestrado Profissional
23	KUROIWA, Elisabete Tiyoko Nishimura. Uma abordagem peculiar da Equação do Segundo Grau no Ensino Fundamental e Médio. 18/11/2016. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Instituição de Ensino: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (São José do Rio Preto), Rio de Janeiro. Biblioteca Depositária: UNESP/Campus de São José do Rio Preto.	Mestrado Profissional
24	XAVIER, Jose Fabio. Análise da Função Quadrática, com Ênfase em seus Coeficientes, Via Geogebra. 31/10/2016. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Instituição de Ensino: Universidade Federal de Goiás, Rio de Janeiro. Biblioteca Depositária: Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG).	Mestrado Profissional
2017		
25	FILHO, Orencio Capestrano Dos Anjos. Propostas de aulas na educação básica de alguns conceitos matemáticos visando seu contexto histórico e aplicações nos dias atuais. 18/12/2017. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Instituição de Ensino: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Rio de Janeiro. Biblioteca Depositária: UTFPR - Campus Curitiba.	Mestrado Profissional

Continua...

Continuação

Dissertações / teses		Titulação
26	ROCHA, Helio Roberto Da. Uso de Jogos e Materiais Concretos no Ensino de Expressões Algébricas e Equações do 1º e 2º grau no Ensino Fundamental. 2017. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Instituição de Ensino: Universidade Federal de Goiás, Rio de Janeiro. Biblioteca Depositária: Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG).	Mestrado Profissional
27	SANTOS, Leonardo Silva. Uma abordagem histórica e metodológica dos métodos de resolução de equação do 2º grau desenvolvidos por Al-Khowarizmi. 09/03/2017. Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Instituição de Ensino: Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande. Biblioteca Depositária: undefined.	Mestrado Acadêmico
28	SILVA, Alexander Pires Da. Utilização de aplicativos matemáticos como ferramenta alternativa de aprendizagem: um estudo de caso numa turma do 9º ano de uma escola do município de Seropédica. 29/08/2017. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Instituição de Ensino: Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. Biblioteca Depositária: Biblioteca Central da UFRRJ.	Mestrado Profissional
29	SILVA, Telma Fidelis Fragoso Da. Nem tudo é por Bhaskara: a aprendizagem significativa por meio da história em quadrinhos para o ensino da equação do segundo grau. 21/09/2017. Mestrado Profissional em Ensino das Ciências. Instituição de Ensino: Universidade do Grande Rio – Prof. Jose De Souza Herdy, Duque de Caxias. Biblioteca Depositária: Biblioteca Euclides da Cunha, Campus Duque de Caxias.	Mestrado Profissional
2018		
30	ELIAS, Ana Paula De Andrade Janz. Possibilidades de utilização de smartphones em sala de aula: construindo aplicativos investigativos para o trabalho com equações do 2º grau. 26/11/2018. Mestrado Profissional em Formação Científica, Educacional e Tecnológica. Instituição de Ensino: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba. Biblioteca Depositária: Depósito no Repositório Institucional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (RIUT) e na Biblioteca Central do Campus Curitiba da UTFPR, como Recurso Educacional Aberto, sob licença <i>Creative Commons</i> .	Mestrado Profissional
31	OLIVEIRA, Rubens Alves De. Equações do segundo grau: resgate histórico dos seus métodos de resolução. 07/12/2018. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Instituição de Ensino: Universidade Federal do Tocantins, Rio de Janeiro. Biblioteca Depositária: Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins.	Mestrado Profissional
2019		
32	AZEVEDO, Mara Oliveira De. Atividades investigativas com foco em equações do 2º grau: possibilidades e limitações dos alunos do 9º ano. 28/03/2019. Mestrado em Ensino. Instituição de Ensino: Fundação Vale do Taquari de Educação e Desenvolvimento Social, Lajeado. Biblioteca Depositária: Biblioteca Digital da Univates.	Mestrado Acadêmico

Continua...

Dissertações / teses		Continuação Titulação
33	NUNES, Vicente De Paula Soares. A introdução de jogos didáticos matemáticos no nono ano do Ensino Fundamental como resposta às dificuldades de aprendizagem. 12/12/2019. Mestrado Profissional em Ensino em Educação Básica. Instituição de Ensino: Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. Biblioteca Depositária: UERJ/Rede Sirius - Biblioteca Digital de Teses e Dissertações – BDTD.	Mestrado Profissional

Fonte: Sistematização da pesquisadora.

Notamos que a maioria das pesquisas é composta por dissertações desenvolvidas no contexto do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional: ProfMat¹⁰⁰ e que poucas pesquisas foram desenvolvidas com a temática equação do 2º grau na perspectiva da teoria histórico-cultural.

Esse estudo sobre as pesquisas que tratam da equação do 2º grau trouxe elementos interessantes para a formulação da seguinte indagação: o que diferencia a presente pesquisa de doutorado das teses e dissertações produzidas entre 2013 e 2020?

Para estabelecer respostas a essa pergunta, foi necessário realizar leituras dos resumos dos trabalhos encontrados, de forma a compreender os objetivos das pesquisas selecionadas, sendo que sentimos a necessidade de sintetizar algumas ideias desse universo de pesquisas:

- Estudar os métodos geométricos, aritméticos e algébricos para a resolução de equações do 2º grau;
- Apresentar um estudo histórico do desenvolvimento da equação do 2º grau, partindo das civilizações antigas e as contribuições dos matemáticos egípcios, babilônios, gregos, hindus, árabes e europeus, com o intuito de propiciar a compreensão desse conceito por parte dos estudantes;
- Resolver equações do 2º grau na forma completa, por meio de fatoração e de radicais;
- Buscar alternativas didáticas que possibilitem ao professor e ao estudante de matemática o aprendizado de outros métodos para a resolução e demonstração da validade das resoluções de problemas geométricos, aritméticos ou algébricos, de

¹⁰⁰ O **Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT** é um programa de mestrado semipresencial na área de Matemática, com oferta nacional. É formado por uma rede de Instituições de Ensino Superior, no contexto da Universidade Aberta do Brasil/Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES), e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). O **PROFMAT** surgiu mediante uma ação induzida pela CAPES junto à comunidade científica da área de Matemática, representada e coordenada pela SBM. Disponível em: <https://www.profmatt-sbm.org.br/organizacao/apresentacao/>. Acesso em: 03 jul. 2021.

forma a possibilitar sua interpretação ou reduzi-los a uma equação polinomial de grau maior ou igual a dois;

- Analisar as contribuições de uma proposta de atividades de estudo, na perspectiva histórico-cultural, no desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica do estudante;
- Analisar as relações entre o contrato didático e as organizações matemáticas e didáticas, no ensino da equação do 2º grau a uma incógnita;
- Apresentar um programa de ensino que leve em consideração uma sequência lógico-dedutiva do ensino da Matemática, partindo das resoluções de problemas cujas soluções levem à necessidade de resoluções de equações de primeiro e segundo graus, e sistemas de equações. Equações do segundo grau são resolvidas pelo método de completar quadrados que mantém inalterada a simetria axial da equação, evitando, dessa forma, a utilização da fórmula de Bháskara;
- Introduzir os conteúdos da Matemática Financeira a partir da contextualização dos problemas e de conteúdos como: porcentagem, equações do 2º grau e progressões;
- Investigar e analisar as intervenções pedagógicas a serem utilizadas em sala de aula e nos atendimentos individuais que possibilitaram o acesso do estudante com necessidades especiais decorrentes do Transtorno do Espectro Autista, ao conhecimento de equações do 2º grau;
- Utilizar a Metodologia de Resolução de Problemas como ferramenta viável para a demonstração da fórmula resolutiva (autor ainda utiliza Fórmula de Bhaskara), proporcionando uma motivação em sua construção, possibilitando ao estudante maior envolvimento, participação e interação com manejo de material concreto;
- Mostrar a utilização do conteúdo de equação do 2º grau atualmente;
- Utilizar a História da Equação do segundo grau, por meio da História em Quadrinhos, como material instrucional no ensino de Matemática, na forma de um material potencialmente significativo em uma situação de ensino, conforme propõe a teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel e J. Novak a partir de Moreira;
- Facilitar o processo de ensino aprendizagem dos conteúdos de equações do segundo grau, matrizes e sistemas lineares, por meio da construção de aplicativos, usando os aparelhos móveis dos estudantes e a plataforma MIT *App Inventor 2*, criada para desenvolver programas para o sistema operacional *Android*;

- Utilizar aplicativos educacionais Potência, Calculadora de equação do 2º grau e *Mathlab* como ferramentas facilitadoras no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos de matemática;
- Investigar as contribuições de utilização de *smartphones*, por meio da criação, no *software* App Inventor, e validação de aplicativos matemáticos educativos para o ensino de equações do segundo grau;
- Investigar, por meio de questionamentos metacognitivos, contribuições das atividades investigativas para o ensino de equações do 2º grau;
- Ensinar álgebra, mais especificamente expressões algébricas, equações do 1º grau, equações do 2º grau e um breve estudo sobre equações do 3º grau, por meio de jogos e materiais concretos;
- Investigar se a inserção de atividades lúdicas, mais especificamente jogos didáticos, são capazes de minimizar as dificuldades de aprendizagem de determinados conteúdos abordados na disciplina de Matemática para o nono ano de escolaridade;
- Explorar as funções afins e quadráticas num ambiente dinâmico (GeoGebra);
- Fornecer a estudantes, professores e ao público em geral um maior entendimento acerca das funções quadráticas; estudar esse conteúdo e suas propriedades a partir de problemas envolvendo equações do segundo grau e da técnica de completar quadrado.

Para atingir tais objetivos, os pesquisadores utilizaram análise de livros didáticos, elaboração de sequências didáticas, resolução de problemas, jogos pedagógicos, aplicativos educacionais, calculadora de equação do 2º grau, *Mathlab* e Geogebra, materiais didáticos diversos e, por fim, exposição de breve relato da história dos processos resolutivos de equações.

Com essa análise, pudemos perceber que muitas pesquisas encontradas apenas apresentaram propostas de como resolver a equação do 2º grau para o Ensino Fundamental e/ou Médio, não analisando as contribuições da equação para o desenvolvimento integral dos estudantes. Outras, no entanto, desenvolveram e apresentaram os resultados positivos das sequências didáticas para os processos de ensinar e aprender. Dentre essas últimas, algumas utilizaram as diferentes formas de resolver equações do 2º grau desenvolvidas por diferentes povos ao longo da história, outras valeram-se de *softwares* educativos para a resolução das equações, permitindo compreender e analisar as propriedades das funções do 1º e 2º graus.

A partir dessas perspectivas, a presente pesquisa se diferencia das demais por propor a organização e realização de um experimento didático-formativo com intuito de analisar as

contribuições do processo de *obutchénie* de equações do 2º grau baseado no sistema zankoviano para o desenvolvimento integral do estudante. Com isso, esperamos que o ineditismo deste estudo e a busca pelo preenchimento da lacuna teórica metodológica da temática contribuam para a pesquisa educacional brasileira na perspectiva histórico-cultural, no que tange à *obutchénie* desenvolvimental.

Na próxima subseção, nos atemos a compreender como está proposto o ensino da álgebra na Base Nacional Comum Curricular¹⁰¹ (BNCC) e nos empenhamos a desvelar em quais aspectos a nossa pesquisa se aproxima e se distancia do que está proposto no documento normativo.

3.2 Álgebra na BNCC e os conceitos algébricos desenvolvidos na pesquisa

O olhar para a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) se justifica por ser esse o documento de caráter normativo, de referência nacional, para a formulação dos currículos de todos os sistemas e redes escolares do país, implementados até o final de 2020.

Na BNCC (BRASIL, 2017, p. 261), consta que o conhecimento matemático é necessário para todos os estudantes da Educação Básica, considerando a sua relevância para a sociedade atual e a “formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais.” Além disso, esse documento salienta que o letramento matemático¹⁰²

[...] assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e percebe o caráter de jogo intelectual da Matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição). (BRASIL, 2017, p. 222)

Assim, para que tais características sejam alcançadas, torna-se necessário um estudo minucioso das competências gerais e das competências específicas propostas na BNCC (BRASIL, 2017), visto que o desenvolvimento destas propõe cinco Unidades Temáticas que

¹⁰¹ A BNCC é um “documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE).” (BRASIL, 2017, p. 5).

¹⁰² De acordo com a Matriz do Pisa 2012, o “letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a Matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e prever fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a Matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias.” (BRASIL, 2013, p. 1).

compõem o componente curricular da Matemática do Ensino Fundamental, a saber: Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas; Estatística e Probabilidade.

As unidades temáticas articulam-se por meio de um conjunto de ideias como “equivalência; ordem; proporcionalidade; interdependência; representação; variação e aproximação” (BRASIL, 2017, p. 264), que são essenciais para o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes e que, no contexto escolar, se configuram em Objetos de Conhecimento. Além disso, são as “cinco unidades temáticas, correlacionadas, que orientam a formulação de habilidades a serem desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental. Cada uma delas pode receber ênfase diferente, a depender do ano de escolarização.” (BRASIL, 2017, p. 264).

Com base nas unidades temáticas propostas na BNCC, estudamos a unidade temática Álgebra, que contempla o objeto matemático desta pesquisa.

Sobre essa temática, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Lins e Gimenez (1997) e Kaput (2008) ressaltam a relevância de desenvolver o pensamento algébrico desde os primeiros anos de escolaridade, por meio do estudo de padrões e regularidades. Para que este desenvolvimento aconteça, o primeiro passo seria que o ensino dos conceitos de Álgebra estivesse contemplado no currículo desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. A BNCC normatiza e orienta a composição do currículo nesse viés, propondo que o ensino dessa unidade temática perpassasse os nove anos do Ensino Fundamental, ressaltando que esta tem como finalidade o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Segundo a BNCC, o pensamento algébrico é:

Essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. (BRASIL, 2017, p. 266)

Notamos que essas características propostas na BNCC (BRASIL, 2017) permitem vivenciar e trabalhar com os estudantes os aspectos de interdependência e fluência que Caraça (1951) resalta estar presente na realidade que o homem procura compreender. Entendemos que esses movimentos são possíveis de acontecer desde os anos iniciais, uma vez que, no documento, as unidades temáticas Álgebra e Números se relacionam, possibilitando o

desenvolvimento das ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. Além disso, “a noção intuitiva de função pode ser explorada por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas (sem utilizar a regra de três).” (BRASIL, 2017, p. 266).

Lins e Gimenez (1997, p. 89) afirmam que se tem “um certo consenso a respeito de quais são as coisas da álgebra: equações, cálculo literal, funções, por exemplo [...]”, ou seja, há uma harmonia de quais conteúdos precisam ser trabalhados e estes estão presentes na BNCC, sendo contemplados nas habilidades a serem desenvolvidas propostas nos Objetos de Conhecimento.

Para melhor compreensão, apresentamos, no quadro 2, uma parte do organizador curricular do 9º ano proposto na BNCC (BRASIL, 2017), focando na unidade temática Álgebra. A escolha deste recorte está coadunada ao ano de ensino cursado pelos participantes e ao objeto de estudo dessa pesquisa.

Quadro 2 - Organizador Curricular 9º ano - Unidade temática: Álgebra

Unidades Temáticas	Objetos de Conhecimento	Habilidades
Álgebra	Funções: representações numérica, algébrica e gráfica	(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica, e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
	Razão entre grandezas de espécies diferentes	(EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.
	Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.
	Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações	(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

Fonte: Quadro adaptado da BNCC (BRASIL, 2017, p. 313-314).

Analisando o quadro 2, o conteúdo matemático a ser estudado nesta tese está contemplado no objeto de conhecimento *Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis; Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações*. Porém, na nossa pesquisa, o foco está no processo de *obutchénie* de equações do 2º grau baseado no sistema

zankoviano para o desenvolvimento integral do estudante, isto é, almejamos que os estudantes se apropriem do conceito de equações do 2º grau, compreendendo para além dos aspectos externos deste.

A BNCC (BRASIL, 2017) propõe que, nos anos finais do Ensino Fundamental, o estudo da Álgebra seja retomado, aprofundado e ampliado em relação ao que foi desenvolvido nos anos iniciais, de forma que os estudantes compreendam

[...] os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. (BRASIL, 2017, p. 266-267)

O documento ressalta, também, a importância de os estudantes relacionarem variável e função e correlacionarem incógnita e equação, enfatizando que a resolução de equações e inequações, até mesmo no plano cartesiano, precisam estar interligadas com a representação e a resolução de determinados problemas.

Tal documento propõe que, nos anos finais do Ensino Fundamental, os valores desconhecidos sejam identificados por meio de símbolos nas sentenças algébricas e, com isso, o uso de variáveis amplia o conceito de função e de equação nos quais é preciso estabelecer relações.

As habilidades a serem alcançadas pelo estudante, conforme normatizado na BNCC (BRASIL, 2017), ao nosso ver, priorizam a manipulação simbólica dos conceitos algébricos: “exercitar regras de mudança de membro e de troca de sinais na resolução de equações, resolver listas de exercícios de operações com polinômios, calcular diferentes funções etc.” (LANNER DE MOURA; SOUSA, 2008, p. 65).

Apesar das dificuldades que o estudante “demonstra ter ao aprender álgebra, é considerada natural, por entender-se que o nível de abstração da álgebra é de difícil acesso à aprendizagem iniciante em matemática” (LANNER DE MOURA; SOUSA, 2008, p. 64), as nossas vivências como professora da Educação Básica e como tutora na educação a distância, nos mostram que as dificuldades em relação às equações do segundo grau estão intrinsicamente relacionadas à não utilização desse conteúdo no dia a dia do estudante, à falta de compreensão por parte dos estudantes com relação ao conceito de variáveis, dos significados das raízes e à forma de encontrá-las.

Neste estudo, nos propusemos a pensar caminhos que permitam a apropriação do conceito algébrico, considerando o nosso objeto de estudo: analisar as contribuições do

processo de *obutchénie* de equações do 2º grau baseado no sistema zankoviano para o desenvolvimento integral do estudante. Logo, a organização e o desenvolvimento do experimento didático-formativo fundamentado no sistema zankoviano, que possibilita a intervenção da professora-pesquisadora nos processos psíquicos, precisa ser composto por situações-problema que constituam a tarefa, que mobilizem o estudante a refletir sobre o movimento (fluência) geral e particular, relação de interdependência, conceito de variável, campo de variação, relação de igualdade, as linguagens retórica, sincopada e simbólica, e o aspecto nuclear da equação do 2º grau. Isto é, a *obutchénie* do conceito de álgebra não pode ficar associada apenas às particularidades deste, como indicado na BNCC (BRASIL, 2017), visto que, nesse documento, o foco está relacionado com o conhecimento empírico.

Nesta pesquisa, compreendemos o conceito de álgebra como a “confluência entre o lógico-histórico presente nas abstrações do pensamento, no qual o lógico está despido das casualidades do histórico, porém, algumas casualidades foram responsáveis por novas elaborações algébricas.” (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 121). O histórico, segundo Kopnin (1978), está sujeito ao processo de transformação do objeto, às fases de seu surgimento e desenvolvimento, e o lógico é a maneira pela qual o pensamento realiza esta tarefa no momento de reflexão sobre o histórico. O lógico-histórico é, então,

[...] a interpretação lógica que o movimento do pensamento faz ao refletir sobre o acontecido. O que chamamos de acontecimento histórico não se manifestou no tempo e no espaço obedecendo estritamente à lógica de desenvolvimento que atribuímos a esses acontecimentos, ao interpretá-los à distância. (LANNER DE MOURA; SOUSA, 2008, p. 64)

Compreender o lógico-histórico da vida quer dizer interpretar “a relação existente entre a mutabilidade e a imutabilidades das coisas; a relatividade existente entre o pensamento humano e a realidade da vida, bem como compreender que tanto o lógico quanto o histórico da vida estão inseridos na lei universal, que é o movimento.” (SOUSA, 2018, p. 45).

Assim, quando direcionamos o nosso olhar para as características que compõem a realidade, precisamos compreender a interdependência e a fluência.

1ª - **Interdependência.** Todas as coisas estão relacionadas umas com as outras; o Mundo, toda esta Realidade em que estamos mergulhados, é um organismo vivo, uno, cujos compartimentos comunicam e participam, todos, da vida uns dos outros. [...]

2ª - **Fluência.** O Mundo está em permanente evolução todas as coisas, a todo o momento, se transformam, tudo *flue*; tudo *devém*. (CARAÇA, 1951, p. 109-110, negritos nossos)

Desse modo, o movimento do conceito de álgebra está associado às variações de quantidade em um mundo formado de partes que se relacionam umas nas outras e que se modificam a todo instante. A fluência nos revela o movimento da vida, a mutabilidade da álgebra, assim, para anunciar aos estudantes os caminhos percorridos para determinar os aspectos atuais, é necessário relacionar a fluência com campo de variação e variável.

No trabalho de investigação da natureza, segundo Caraça (1951), o homem precisa buscar as regularidades dos fenômenos naturais. A regularidade possibilita a repetição e a previsão, sob condições iniciais apropriadas, visto que “*repetir e prever é fundamental para o homem na sua tarefa essencial de dominar a Natureza.*” (CARAÇA, 1951, p. 119).

De acordo com a natureza do isolado¹⁰³ e de seu desenvolvimento, Caraça (1951) ressalta dois tipos de leis: a **lei qualitativa** está relacionada à variação de qualidade; a **lei quantitativa** corresponde à variação de quantidades. Essas leis nem sempre podem ser separadas, pois o que as diferencia está em que a lei acentua, eventualmente a uma ou outra característica da Realidade. Tem-se momentos que essas leis estão tão interligadas que não se distingue o tipo, passando a essa ser chamada de “lei qualitativa-quantitativa (em rigor, todas o são).” (CARAÇA, 1951, p. 120).

Segundo Caraça (1951), após o Renascimento, colocou-se em prova as pesquisas qualitativas que tomaram novos rumos, enfatizando a observação e experimentação, procurando medir e explicar por variações de quantidade, entrelaçando uma teia de leis quantitativas. Logo, é natural “esperar que, de coisa tão importante para o entendimento e explicação da Realidade como é a lei quantitativa, surja também conceito matemático próprio para o seu estudo; esperar aqui, ainda, que a necessidade crie o instrumento. Assim acontece de facto.” (CARAÇA, 1951, p. 125).

As criações desses instrumentos aconteceram de forma lenta, interligadas com a necessidade do homem. Pelo exemplo a seguir, podemos acompanhar como se dá o surgimento de um instrumento matemático:

Suponhamos que temos que estudar uma variação de quantidade; seja, para fixar ideia, a variação quantitativa de espaço e tempo no fenômeno da queda dos graves no vácuo. Suponhamos realizadas as condições físicas necessárias - o isolado conveniente - e procuremos a regularidade do fenômeno: a lei

¹⁰³ “Na impossibilidade de abraçar, num único golpe, a totalidade do Universo, o observador *recorta, destaca*, dessa totalidade, um conjunto de seres e factos, abstraindo de todos os outros que com eles estão relacionados. A um tal conjunto daremos o nome de isolado; um isolado é, portanto, uma secção da realidade, nela recortada arbitrariamente.” (CARAÇA, 1951, p. 112).

quantitativa. Que fazemos? Medimos as alturas de queda em intervalos de tempo iguais, e estudamos depois a variação dessas alturas de queda: é claro que, quanto mais pequenos forem os intervalos de tempo em que fazemos as medições, melhor se conhecerá a variação. Suponhamos que se fizeram as medições de segundo em segundo e que se encontraram os valores seguintes:

tempos (em segundos)	0	1	2	3	4	5	...
espaços (em metros)	0	4,9	19,6	44,1	78,4	122,5	...

Não é, evidentemente, nesta simples tabela que se encontra toda a regularidade, a lei quantitativa; mas ela dá uma primeira idéia [sic] dessa lei. (CARAÇA, 1951, p. 126)

Essa tabela é formada por dois conjuntos de números, sendo o conjunto dos tempos que indicaremos por t e o conjunto do espaço que denotamos por e , que estão em correspondência unívoca no sentido de t para e , visto que, no final de determinado tempo, o mesmo corpo não percorreu dois espaços diferentes. Caraça (1951) afirma que a tabela nos enuncia uma primeira aproximação da lei quantitativa. A lei está presente na correspondência dos dois conjuntos, isto é, na maneira de como a correspondência do conjunto t ao conjunto e se concretiza; “se a correspondência mudar, mudarão os consequentes - aqui os espaços - mudará, por consequência, a variação, mudará a lei.” (CARAÇA, 1951, p. 126). Logo, para estudar as leis quantitativas, é necessário tecer um instrumento matemático estruturado na correspondência de dois conjuntos. De acordo com o autor, o conceito de função é próprio para estudo das leis e a variável é o instrumento que utilizamos como símbolo e que nos permite generalizar.

Refletindo sobre o conceito de variação, comungamos da síntese apresentada por Lanner de Moura e Sousa (2008), que enfatizam que o conceito de variação abarca os conceitos de relatividade e de interdependência, os quais podem ser traduzidos na álgebra pela dependência entre variáveis. Estando a dependência concatenada aos princípios estabelecidos (BOHM, 1980; CARAÇA, 1951) que, por sua vez, estão relacionados ao campo de variação, o qual permite delimitar valores de mínimo e de máximo, existentes nos movimentos da vida.

Em relação ao campo de variação, Panossian (2014) menciona que a constituição de diferentes campos numéricos está relacionada com a necessidade de diferentes povos, assegurando a fluência do movimento de controle de quantidades, uma vez que

[...] consideramos que a qualidade desses campos numéricos se alterava em um movimento de evolução, no sentido em que sua essência não se modificava, mas se modificavam outras qualidades. É o que acontece, por exemplo, com a necessidade da criação de números que podem ser representados na forma de razão, os quais avançam de forma gradativa modificando a qualidade do número. Ou ainda com a organização de um campo de números inteiros, em que a quantidade negativa adquire significado. (PANOSSIAN, 2014, p. 91)

Logo, o campo de variação estabelece, em um conjunto numérico, os possíveis valores que a variável poderá assumir, estando este relacionado ao tipo de problema a ser estudado e depende “diretamente do movimento da realidade tratada. Não há uma resposta pronta e absoluta, embora boa parte dos movimentos da realidade pareça ocorrer no campo dos números reais.” (SOUSA, 2004, p. 158).

No que diz respeito à variável, Caraça (1951, p. 128) enuncia que “uma variável é o que for determinado pelo conjunto numérico que ela representa - a sua substância, o seu domínio.” Desse modo, a variável se encontrará no movimento delimitado por um campo de variação.

Caraça (1951) ressalta que temos dois casos particulares de variável, que variam conforme o domínio:

- a) O domínio é o conjunto dos números reais compreendidos entre dois números reais a e b dados, ou, como correntemente se diz: o conjunto dos números reais do intervalo (a, b) ; a variável x diz-se então *variável real contínua*, ou simplesmente *variável real*.
- b) O domínio é o conjunto infinito dos números naturais $1, 2, 3, \dots$; utilizaremos, neste caso, o símbolo n e designaremos a variável por *variável inteira*. (CARAÇA, 1951, p. 128)

Essas definições possibilitam criar um instrumento matemático no qual a essência está na correspondência. Retornando ao exemplo da queda dos graves no vácuo, representamos por t a variável do conjunto dos tempos e e a variável do conjunto dos espaços. A lei representa a correspondência unívoca entre t e e , no sentido $t \rightarrow e$. Assim, a variável e é função da variável t , que pode ser escrita como $f(t)$. Chama-se a variável t , que antecedente da correspondência, de variável independente; à variável e denomina-se variável dependente. Quando se indica $e = f(t)$, afirma-se que para qualquer valor t correspondente a um único valor de e .

No que se refere à variável e considerando as ideias de Caraça (1951), entendemos que a variável é a fluência e configura o movimento do pensamento. “Pelo seu carácter essencial - síntese *do ser e não ser* - ela sai fora daquele quadro de ideias que quer ver na realidade uma *permanência* e irrompe ligada à corrente de pensamento que, expressa ou tacitamente, vê na *fluência* a primeira de suas características.” (CARAÇA, 1951, p. 128, grifo do autor).

Compreendemos que, na formação da variável, são consideradas as dimensões numéricas e geométricas, “o seu lógico-histórico mostra que estes se originaram das abstrações feitas pelos homens a partir da elaboração dos conceitos formais de número e de aspectos da geometria.” (SOUSA, 2004, p. 82).

Nesta pesquisa, optamos por abordar a álgebra na perspectiva de Caraça (1951), com as concatenações propostas por Sousa (2004) como o conceito de fluência, de variável, de campo de variação e linguagem algébrica. Assumindo a álgebra “como escrita de movimentos da realidade física e social que criamos e na qual vivemos. É uma escrita de movimentos quantitativos sem a escrita numérica que supõe o número, mas não se identifica com ele.” (LANNER DE MOURA; SOUSA, 2008, p. 67).

A linguagem algébrica, segundo Lanner de Moura e Sousa (2008), é constituída pela linguagem retórica, linguagem geométrica, linguagem sincopada e linguagem simbólica.

Na linguagem retórica, é priorizado o uso de palavras que precede as linguagens:

a) sincopada, que mistura à abreviação de palavras diversos símbolos, bem como a variável explicitada a partir da letra “s”, última letra da palavra arithmos (número); b) geométrica, que se explicita a partir de figuras, em que a variável é representada pelo segmento de reta; e c) simbólica, representada pela variável letra (alfabeto). (LANNER DE MOURA; SOUSA, 2008, p. 68)

Destarte, a linguagem algébrica tem seu desenvolvimento delimitado por fases definidas por compreensão que se sustenta, estratifica, entrelaça e se aprimora como toda a produção humana. Fato este que pode ser observado nas três fases do processo nomeadas de álgebra retórica, álgebra sincopada e álgebra simbólica, que resultaram no modo linguístico que singulariza a álgebra atual, com o movimento lógico-histórico do conceito de variável.

Assim, a professora-pesquisadora procurou na organização da *obutchénie* propor situações-problema que contemplassem o movimento de fluência, relação de interdependência, conceito de variável, campo de variação, relação de igualdade, as linguagens: retórica, sincopada e simbólica, de forma a possibilitar ações que permitissem aos estudantes partirem das leis gerais da equações de 2º grau para os seus aspectos mais particulares, adotando que o aspecto nuclear das equações de 2º grau completa é “a relação entre os coeficientes da equação e suas raízes, entendendo que nesta relação expressa-se um movimento quantitativo de permanência e mutabilidade.” (ROSA, 2009, p. 76).

Nesta subseção, anunciamos o que aproxima e distancia nossa pesquisa dos princípios propostos pela BNCC (BRASIL, 2017), dissertando de forma sucinta sobre as características fundamentais da álgebra que precisam estar presentes na tarefa, a saber: o movimento (fluência) geral e particular, relação de interdependência, conceito de variável, campo de variação, relação de igualdade, as linguagens: retórica, sincopada e simbólica e o aspecto nuclear da equação do 2º grau. Além disso, salientamos que é necessário que o processo de *obutchénie* do conceito de

álgebra, em especial de equações do 2º grau, perpassa o conhecimento empírico proposto da BNCC (BRASIL, 2017) e promova o desenvolvimento do conhecimento científico.

No próximo item, de forma sucinta, revelamos a definição de equação escolhida nesta tese e apresentamos os feitos realizados no Mundo Árabe e na Índia, que são fatos abarcados na tarefa.

3.3 Movimento das equações realizado no Mundo Árabe e na Índia

Compreender a história do conteúdo de equações de 2º grau nos permite analisar os diferentes métodos utilizados pelos matemáticos ao longo dos tempos e que podem subsidiar nossos estudos na compreensão do movimento de desenvolvimento, com intuito de mostrar aos estudantes que a matemática não é uma ciência pronta e acabada como apresentada em livros didáticos. (CARAÇA, 1951).

Na história da humanidade, é notório que os números estiveram presentes em diversas soluções de problemas práticos, a exemplificar,

Os matemáticos alexandrinos viram-se obrigados a preocuparem-se com a arte do cálculo pelos problemas que encontravam em astronomia e mecânica; os Hindus devotaram uma enorme atenção aos problemas numerais de ordem comercial; os egípcios dedicaram-se aos problemas de medição de terras. (CEDRO, 2004, p. 72)

A busca de respostas a esses problemas contribuíra para o surgimento do que se denomina equações. Estas podem ser consideradas como uma representação simbólica de conjecturas vivenciadas por diversas civilizações, visto que as soluções desses problemas propiciaram a constituição, a revelação e a consolidação de “regras simples e consistentes que regem a utilização dos números abstratos e os símbolos taquigráficos representativos dos verbos e das operações matemáticas.”(HOGBEN, 1970, p. 319).

No nosso estudo, consideramos uma equação¹⁰⁴ como “uma igualdade geral (com termos variáveis) que exprime uma condição que as variáveis devem preencher (diz-se, então, que elasa verificam). Toda equação propriamente dita é, pois, uma função proposicional que determina uma grandeza.”(LALANDE, 1993, p. 314).

¹⁰⁴ “A palavra equação vem da mesma raiz latina que produziu os seguintes termos: igual e igualdade.” (GARBI, 2009, p. 1).

Na matemática, há diferentes tipos de equações: algébricas, exponenciais, entre outras. Neste estudo, versaremos sobre as equações algébricas e, em especial, as equações quadráticas com uma variável.

Garbi (2009, p. 2) ressalta que as “equações algébricas são aquelas em que a incógnita aparece submetida às chamadas operações algébricas: soma (ou adição), subtração, multiplicação, divisão, potenciação inteira [...] e radiciação.” São exemplos de equações algébricas: $x + 5 = 22$; $az^2 + bz + c = 0$ e $mt^{-2} = 10 - t$, entre outras.

O autor ainda ressalta que, quando a equação algébrica estiver sob a forma denominada canônica: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x^1 + a_n = 0$ (n inteiro), assume as particularidades da chamada equação polinomial, e nesta o maior expoente da incógnita define o grau da equação.

Neste estudo, são abarcadas as equações algébricas do 2º grau, que, atualmente, são expressas na forma reduzida: $ax^2 + bx + c = 0$, em que x é a incógnita, a , b e c são os denominados coeficientes e equivalem a números reais, com $a \neq 0$. (GARBI, 2009).

Para compreensão de como os árabes e os indianos resolviam as equações de 2º grau também conhecida como equação quadrática, organizamos uma síntese dos fatos realizados por esses povos. Consideramos importante esta apresentação, visto que esse desenvolvimento está presente na tarefa e nas análises realizadas nesta pesquisa.

3.3.1 No mundo Árabe

Segundo Morgado (1999), Al-Khowârizmî foi o primeiro matemático muçulmano a escrever sobre a “solução de problemas usando *al-jabr* e *al-muqabala*.”

Por jabr, entende-se a operação de somar um número ou expressão algébrica a ambos os membros de uma equação, para eliminar termos negativos. Também se diz jabr a operação de multiplicar ambos os membros de uma equação por um mesmo número, para eliminar frações.

Por muqabala entende-se a operação de subtrair números ou expressões algébricas a ambos os membros de uma equação a fim de mudar um termo de um membro para o outro. (MORGADO, 1999, s. p.)

Segundo Pitombeira (2004, p. 26), no livro intitulado *Al-jabr wa'l muqabalah*, Al-Khowârizmî, apresenta a equação do 2º grau e sua resolução de forma retórica. Este autor ressalta que, primeiramente, Al-Khowârizmî descreve a resolução das equações “ $x^2 = 5x$; $\frac{x^2}{3} = 4x$ e $5x^2 = 10x$ ”. Nos capítulos seguintes, são anunciadas equações de um dos

seguintes modelos: “ $ax^2 + bx = c^2$, $ax^2 + c = bx$ e $bx + c = ax^2$ ”, sendo todos os coeficientes positivos e consideravam apenas as raízes positivas.

Boyer (1996) e Andrade (2000) citam que Al-Khowârizmî separou os modelos de equações de 2º grau em seis tipos, que constituíam dois conjuntos. O grupo formado por três equações simples e o outro grupo composto por três equações combinadas. São elas:

Equações simples

1º tipo: quadrados iguais a raízes, $ax^2 = bx$;

2º tipo: quadrados iguais a números, $ax^2 = c$;

3º tipo: raízes iguais a números, $ax = b$.

Equações combinadas

4º tipo: raízes e quadrados iguais a números, $x^2 + px = q$,

5º tipo: quadrados e números iguais a raízes, $x^2 + q = px$ e

6º tipo: raízes e números iguais a quadrados, $px + q = x^2$.

(ANDRADE, 2000, p. 47-48)

Andrade (2000) enfatiza que Al-Khowârizmî evitava as equações com soluções irracionais e os exemplos, na maioria das vezes, apresentavam coeficientes racionais e soluções inteiras.

Pitombeira (2004, p. 26) relata que, no capítulo IV do livro “*Al-jabr wa'l muqabalah*”, são propostas as equações “ $x^2 + 10x = 39$, $2x^2 + 10x = 48$ e $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 28$ ”, que exemplificam a equação do tipo $ax^2 + bx = c^2$. Al-Khowârizmî anuncia a equação $x^2 + 10x = 39$ e a sua resolução da seguinte maneira:

Por exemplo: um quadrado e dez raízes do mesmo equivalem a 39 denares; ou seja, qual deve ser o quadrado que, quando aumentado de dez de suas próprias raízes, é equivalente a trinta e nove?

A solução é: tome a metade do número de raízes, o que neste exemplo é igual a cinco. Isso você multiplica por ele próprio; o produto é vinte e cinco. Adicione isso a trinta e nove; a soma é sessenta e quatro. Agora, tome a raiz disso, que é oito e subtraia dela a metade do número de raízes, que é quatro. O resultado é três. Isso é a raiz do quadrado que você procurava; o quadrado é nove. (PITOMBEIRA, 2004, p. 26, grifo nosso)

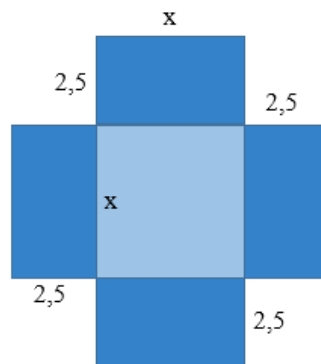
Esta resolução é “equivalente a usar a fórmula bem conhecida $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2}$,” (PITOMBEIRA, 2004, p. 26).

Atualmente, este problema pode ser escrito da seguinte forma: $x^2 + 10x = 39$, que é do tipo $x^2 + px = q$. Observe que a outra raiz, -13 , dessa equação não foi considerada por ser

negativa. Baumgart (1992, p. 78) afirma que “se as duas raízes fossem positivas, provavelmente ambas teriam sido encontradas”, visto que Al-Khowârizmî considerava que a equação quadrática poderia ter duas raízes positivas.

À luz das ideias de Al-Khowârizmî para resolver geometricamente uma equação desse tipo, primeiro precisamos desenhar um quadrado de lado medindo x unidades para representar o termo x^2 . Depois, representar o termo $10x$ por quatro retângulos de lados com medidas $\frac{10}{4} = 2,5$ unidades e x unidades, como mostra a Figura 3:

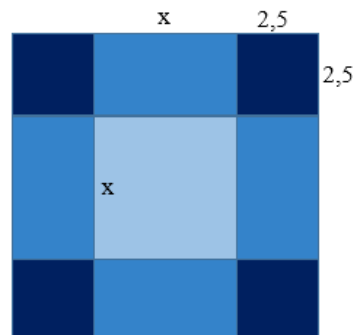
Figura 3 - Representação geométrica da expressão $x^2 + 10x$



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Dessa forma, $x^2 + 10x$ é a soma da área do quadrado com as áreas dos quatro retângulos da Figura 3. Para obter um quadrado, é necessário acrescentar, na figura anterior, quatro quadrados de lado medindo 2,5 unidades, obtendo a Figura 4:

Figura 4 - Método Al-Khowârizmî – Completando o quadrado



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

A Figura 4 tem área igual a $x^2 + 10x + 4 \cdot (2,5)^2 = x^2 + 10x + 4 \cdot (6,25) = x^2 + 10x + 25$ e como $x^2 + 10x = 39$, temos $39 + 25 = 64$. Assim, o quadrado de área 64 unidades tem lado medindo 8 unidades. Logo, $2,5 + 2,5 + x = 8 \rightarrow x = 8 - 5 \rightarrow x = 3$.

3.3.2 Índia

O método de completar quadrados, proposto de forma geométrica pelos árabes, pode ser resolvido pelos métodos algébricos, como fizeram os hindus. Conforme Baumgart (1992), estes povos aceitavam números negativo, raízes irracionais e consideravam que uma equação do 2º grau pode ter duas raízes reais. Porém, as raízes negativas eram descartadas.

Brahmagupta resolveu a equação $ya \ v \ 1 \ ya \ 10$ $ru \ 9$ que, na escrita atual, pode ser representada pela equação $x^2 - 10x = -9$.

Baumgart (1992) destaca que ya representa a incógnita, v indica “quadrado”, o ponto sobre um número sinaliza que ele é negativo e ru é o número “puro”. A primeira linha corresponde ao que chamamos de 1º membro da equação hoje e a segunda linha refere-se ao 2º membro.

A solução proposta por Brahmagupta $x^2 - 10x = -9$ está representada na primeira coluna do Quadro 3:

Quadro 3 - Solução de uma equação pelo método algébrico de completar quadrado

Solução de Brahmagupta	Notação moderna $x^2 - 10x = -9$	Generalização para $ax^2 + bx = c$
Aqui número puro (9) multiplicado por (1) o [coeficiente do] quadrado [é] (9);	$(-9) \cdot (1) = -9$	$(c) \cdot (a) = ca$
Somando ao quadrado da metade do [coeficiente] termo médio, 25, resulta 16;	$(-9) + \left(\frac{-10}{2}\right)^2 = 16$	$(ca) + \left(\frac{b}{2}\right)^2$
cuja raiz quadrada, 4, menos metade do [coeficiente da] incógnita (5), é 9;	$\sqrt{16} - \left(\frac{-10}{2}\right) = 9$	$\sqrt{ca + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \left(\frac{b}{2}\right)$
e dividido pelo [coeficiente do] quadrado (1) fornece o valor da incógnita 9.	$\frac{9}{1} = 9$	$\frac{\sqrt{ca + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \left(\frac{b}{2}\right)}{a} = x$
		$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Fonte: Adaptação Baumgart (1992, p. 72).

O método de resolução de equações do 2º grau empregado pelos hindus Brahmagupta, Sridhara, Aryabhata e Bhaskara, consistia em multiplicar os dois membros de uma equação do tipo $ax^2 + bx = c$ por $4a$, obtendo $4a^2x^2 + 4abx = 4ac$. Em seguida, somar a ambos os lados b^2 , resultando em $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2$, que pode ser escrito como

$(2ax + b)^2 = 4ac + b^2$. Posteriormente, eram extraídas as raízes nos dois membros da equação, que resulta em $2ax + b = \sqrt{4ac + b^2}$; isolando o x , temos que $x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}$.

De acordo com Pitombeira (2004), a descrição geral de como encontrar as raízes de equação do 2º grau utilizada atualmente está no trabalho desenvolvido por Sridhara¹⁰⁵.

As demonstrações algébricas e geométricas anunciadas pelos hindus e por Al-Khowârizmî se diferenciam em alguns aspectos, porém acreditamos que são essas variedades de concepções que contribuíram para o desenvolvimento do conceito de equação do 2º grau.

Nesta subseção, anunciamos o processo de desenvolvimento de equações de 2º grau, compreendendo como este estudo foi realizado no Mundo Árabe e na Índia.

Na próxima seção, abordamos o experimento didático como metodologia de pesquisa, dissertamos sobre as particularidades do sistema zankoviano, sobre aspectos importantes para a organização do experimento e caracterizamos a escola, os participantes, o procedimento e os instrumentos utilizados na produção do material empírico.

¹⁰⁵ “Viveu entre 850 e 950 d. C. Não são conhecidas as datas exatas de seu nascimento e de sua morte.” (PITOMBEIRA, 2004, p. 25).

4 CAMINHOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

A elaboração do problema e o método são desenvolvidos juntos, embora não de forma paralela. A busca do método torna-se uma das tarefas mais importantes da pesquisa. O método, neste caso, é tanto a premissa quanto o produto, ferramenta e resultado da pesquisa.¹⁰⁶ (VYGOTSKI, 1995, p. 36, tradução nossa)

A epígrafe revela a importância da escolha do método de investigação, visto que este prescreve os princípios filosóficos e epistemológicos que sustentam a pesquisa. Levando em conta essas particularidades, fundamentamos nosso estudo no materialismo histórico e dialético e assumimos os princípios da Teoria Histórico-Cultural (THC) em nosso estudo, considerando a necessidade teórica e metodológica.

Uma necessidade teórica na medida em que é preciso conhecer os processos de desenvolvimento do psiquismo humano na direção de contribuir para o seu pleno desenvolvimento. Desenvolver a conduta superior significa dominá-la e usá-la livremente (voluntariamente), e, para tal, é preciso [...] dominar o “sistema de instrumentos culturais”, o sistema de signos desenvolvidos pela humanidade em cada Atividade humana particular. O signo é a força social dada à criança a partir de fora (VYGOTSKI, 1995). [...] uma necessidade metodológica, na medida em que é preciso construir o método científico da Pedagogia que nos permitirá explicitar as possibilidades concretas de contribuir, em nossa atual sociedade, para que cada indivíduo se aproprie da “força social” produzida pelo homem e objetivada nos signos, particularmente nos conceitos teóricos. (CEDRO; NASCIMENTO, 2017, p. 41)

Diante das características apresentadas por Cedro e Nascimento (2017), utilizamos como método de investigação o chamado experimento didático, o qual desempenha, simultaneamente, o método de *obutchénie* experimental que impulsiona o desenvolvimento dos estudantes. Devido ao curto prazo de desenvolvimento do experimento formativo, nosso estudo foi realizado no formato de microciclo, que, segundo Longarezi (2019c, p. 190) fundamentada em Zuckerman (2011), “podem ser realizados em semanas ou dias e, dentro dessa modalidade, o experimentador acompanha, ele mesmo, todo o processo.” As especificidades do experimento formativo adotado e o desenvolvimento do microciclo desta pesquisa são apresentados nesta seção.

¹⁰⁶ “La elaboración del problema y del método se desarrollan conjuntamente, aunque no de un modo paralelo. La búsqueda del método se convierte en una de las tareas de mayor importancia de la investigación. El método, en este caso, es al mismo tiempo premisa y producto, herramienta y resultado de la investigación.” (VYGOTSKI, 1995, p. 36).

Nas seções anteriores, discutimos os aspectos teóricos do sistema zankoviano; apresentamos as pesquisas já realizadas com o tema equações do 2º grau no período de 2013 a 2020; abarcamos as habilidades a serem alcançadas segundo a BNCC (BRASIL, 2017), ressaltando em quais aspectos nossa pesquisa se aproxima e se distancia do proposto neste documento; anunciamos a importância dos conceitos de movimento (fluência) geral e particular, relação de interdependência, conceito de variável, campo de variação, relação de igualdade, as linguagens retórica, sincopada e simbólica, bem como o aspecto nuclear da equação do 2º grau adotado no nosso estudo. Por último, revelamos a definição de equações do 2º grau e fizemos um regaste da forma como os povos árabes e indianos resolviam essas equações.

Nesta seção, apresentamos o experimento formativo fundamentado no sistema de L. V. Zankov como metodologia de pesquisa, descrevendo a organização da tarefa e o contexto da pesquisa, caracterizando a escola, os participantes, o procedimento e os instrumentos utilizados na apreensão do fenômeno, no desenvolvimento do microciclo e na análise dos resultados.

4.1 O experimento didático-formativo como metodologia

O experimento foi amplamente utilizado na psicologia e na didática por pesquisadores como A. N. Leontiev (1903-1979), A. R. Luria (1902-1977), A. V. Zaporózhets (1905-1981), L. V. Zankov (1901-1977), D. B. Elkonin (1904-1984), P. Ya. Galperin (1902-1988) e os vários grupos de colaboradores que trabalharam com eles (LONGAREZI, 2019c, 2021a). O experimento em questão permite investigar, de maneira a orientar, o surgimento de novas estruturas psíquicas, sendo considerado o método mais apropriado para o estudo do desenvolvimento da psique humana.

Segundo Aquino (2014), o método do experimento didático-formativo tem as seguintes vantagens em relação a outros experimentos:

[...] permite a intervenção direta do pesquisador nos processos psíquicos e pedagógicos que investiga; experimenta com disciplinas escolares que permitem definir os diferentes aspectos do ensino que tem influência no desenvolvimento dos alunos: o programa de estudo, o sistema conceitual da disciplina, a coerência entre objetivos – conteúdos – métodos - meios - condições do ensino; o experimento didático-formativo permite examinar as condições em que se geram a aprendizagem, as neoformações psicológicas e capacidades que estão sendo pesquisadas; quando é possível aplicá-lo de maneira longitudinal, permite superar o estudo das particularidades psicológicas isoladas dos alunos e aferir as características do desenvolvimento integral do desenvolvimento psíquico. (AQUINO, 2014, p. 4647)

Diante dessas vantagens, adotamos como metodologia, nesta pesquisa, o experimento didático fundamentado no sistema proposto por L. V. Zankov, que está alicerçado no materialismo histórico e dialético. Porém, devido ao formato longitudinal do experimento didático que resulta em longos períodos de estudo, lançamos mão de desenvolver um experimento microciclo, visto que “têm por finalidade testar hipóteses relacionadas às potencialidades do desenvolvimento funcional e podem estar limitados a apenas um ano escolar, sem a preocupação com a formação da personalidade da criança como um todo.” (LONGAREZI, 2019c, p. 190).

L. V. Zankov (1984), em relação ao desenvolvimento do experimento didático, diz:

O sinal substancial da investigação pedagógica experimental do problema da *obutchénie* e o desenvolvimento é o fato de que a revelação da lógica objetiva do processo de *obutchénie*, não só está indissolúvelmente vinculada em sua reestruturação, senão que é condicionada por ela. Não há que entender dita vinculação como mera aplicação dos resultados da investigação na prática escolar: seu método exige necessariamente uma fundamentação experimental da mudança da prática existente. Na investigação pedagógica do problema da *obutchénie* e do desenvolvimento, a revelação da lógica objetiva do processo docente é, ao próprio tempo, a busca das vias graças às quais poderão se alcançar os resultados almejados no desenvolvimento dos escolares. (ZANKOV, 1984, p. 16, tradução nossa)¹⁰⁷

O método proposto por L. V. Zankov permite incorporar, na prática educativa, um sistema de *obutchénie*, diferente do existente, como elemento independente, no qual as conjecturas podem permitir a reorganização da prática pedagógica tradicional. Além disso, enfatiza a introdução de novas metodologias, procedimentos de ensino, recursos inovadores e articulação de diferentes componentes curriculares, com intuito de analisar e averiguar as contribuições do sistema para a apropriação dos conhecimentos concomitantemente em que é impulsionado o desenvolvimento intelectual, físico e emocional dos estudantes.

O experimento didático zankoviano tem como propósito a organização da relação *obutchénie* e desenvolvimento de forma consciente, considerando determinadas condições, com

¹⁰⁷ “Un rasgo substancial de la investigación pedagógica experimental del problema de la enseñanza y el desarrollo es el hecho de que la revelación de la lógica objetiva del proceso de enseñanza, no sólo está indisolublemente vinculada en su reestructuración, sino que es condicionada por ella. No hay que entender dicha vinculación como mera aplicación de los resultados de la investigación en la práctica escolar: su método exige necesariamente una fundamentación experimental del cambio de la práctica existente. En la investigación pedagógica del problema de la enseñanza y el desarrollo, la revelación de la lógica objetiva del proceso docente es, al propio tiempo, la búsqueda de las vías gracias a las cuales podrán alcanzarse los resultados apetecidos en el desarrollo de los escolares.” (ZANKOV, 1984, p. 16).

intuito de contribuir para a melhoria da qualidade da *obutchénie* e do desenvolvimento integral do estudante.

Como divulgado na seção 2 deste estudo, Zankov (1984) elaborou cinco princípios didáticos no conjunto do sistema zankoviano, que têm a função de regular e orientar o processo de *obutchénie* nas suas diversas formas. Eles se organizam em: I) *Obutchénie* em um nível desafiador de dificuldade; II) Enfatizar a *obutchénie* dos conhecimentos teóricos; III) Ritmo ativo e crescente da *obutchénie*; IV) Desenvolver a consciência dos estudantes em relação ao processo de *obutchénie*; V) Organizar aulas para promover o desenvolvimento intencional e sistemático de cada estudante. Sobre o experimento didático, o autor ainda ressalta que a “aplicação do experimento na investigação científica permite estudar as relações de determinadas facetas do processo e achar as causas que condicionam a necessidade de que apareça o fenômeno dado.”¹⁰⁸ (ZANKOV, 1984, p. 21, tradução nossa).

Assim, no planejamento da tarefa, foi necessário atentar-nos às características do sistema zankoviano, levarmos em consideração nosso objeto de estudo: analisar as contribuições do processo de *obutchénie* de equações do 2º grau baseado no sistema zankoviano para o desenvolvimento integral do estudante.

Considerando as singularidades do sistema zankoviano, planejamos a tarefa com foco no processo de desenvolvimento dos estudantes, articulado com o plano da *obutchénie* do objeto de estudo e a antecipação de possíveis intervenções do professor. Para isso, foi necessário atarmos ao movimento de ações e operações necessárias, como também para os princípios do conhecimento teórico que nos possibilitassem perceber as operações mentais evidentes no processo de compreensão dos conceitos por parte dos estudantes.

Vale ressaltar que, para o desenvolvimento da pesquisa, foram necessárias algumas adaptações, considerando que o experimento de L. V. Zankov ocorreu com crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental russo, nas décadas de 50 e 60. E a nossa pesquisa, realizada no século XXI, contou com a participação de sujeitos que possuem aspectos culturais, sociais e modo econômico e ideológico bastante diferentes daquela época. Além disso, trabalhamos com adolescentes que estavam concluindo o Ensino Fundamental no Brasil em 2018. Diante dessas singularidades, não seria possível a replicação exata de alguns aspectos presentes no sistema zankoviano, porém os princípios didáticos e metodológicos propostos foram respeitados.

¹⁰⁸ “La aplicación del experimento en la investigación científica permite estudiar las relaciones de determinadas facetas del proceso y hallar las causas que condicionan la necesidad de que aparezca el fenómeno dado.” (ZANKOV, 1984, p. 21).

L. V. Zankov apresentou o experimento didático em três etapas, mas, segundo Aquino (2014), os detalhes não são suficientes para nos basearmos nestas. Assim, procuramos, no desenvolvimento do experimento formativo, seguir as quatro etapas propostas por Aquino (2014), sempre mantendo os fundamentos do sistema zankoviano e as ações para realização do experimento microciclo, pois este se realiza por intermédio das seguintes ações:

1. determinação das etapas, fases e níveis do desenvolvimento da qualidade a ser projetada da ação de uma criança e seu potencial; 2. busca de maneiras para identificar como o estudante (ou a classe como comunidade de aprendizagem) é, juntamente com os critérios para identificar as inovações da ação de uma criança; e 3. busca por formas de dar apoio pedagógico (Zuckerman, 2011). (LONGAREZI, 2019c, p. 190)

Segundo Aquino (2014, p. 4650), na primeira etapa nomeada *Revisão da literatura e diagnóstico da realidade a ser estudada*, após a produção do material empírico, tivemos a condição de organizar “o quadro teórico da pesquisa”, fizemos o “diagnóstico da metodologia tradicional de ensino” e “o diagnóstico do grupo de alunos e dos professores envolvidos no trabalho.”

Já na segunda etapa, denominada *Elaboração do Sistema Didático Experimental*, temos: “1) A elaboração do sistema didático experimental, constituído pelo novo programa da disciplina, as tarefas ou problemas de aprendizagem, os métodos a serem empregados e os recursos de ensino; 2) A preparação dos professores que auxiliarão na aplicação do sistema didático experimental.” (AQUINO, 2014, p. 4652).

Na terceira etapa, intitulada *Desenvolvimento do experimento didático-formativo*, Aquino (2014) propõe a realização de algumas tarefas, como: 1) Desenvolvimento do experimento; 2) Captação do fenômeno e monitoramento da situação experimental por meio da observação em vídeo, de registro e de maneira presencial; 3) Utilização de entrevistas a professores e estudantes; 4) Preparação das captações dos fenômenos para sua análise.

Aquino (2014) nomeia a última etapa de *Análise dos dados e elaboração do relatório*. Para o autor:

A análise se realiza tendo em vista um conjunto de categorias elaboradas previamente e com apoio nas evidências da aprendizagem e do desenvolvimento integral da personalidade dos alunos. Essas evidências aparecem nas falas dos alunos e dos professores, nos comportamentos dos sujeitos da pesquisa, nos registros que fazemos sobre as condições em que se realiza o processo de aprendizagem, nas atitudes, hábitos, habilidades e valores manifestados pelos sujeitos participantes. Trabalha-se com indícios, com evidências, com os sintomas [...]. (AQUINO, 2014, p. 4653-4654)

Assim, no experimento prático implementado nas aulas, a análise das conjunturas contribui para a descoberta das relações fundamentais, que nem sempre são visíveis, estabelecendo a natureza dos fenômenos investigados.

Salientamos que, no experimento didático-formativo, ora apresentado nesta pesquisa, as etapas não foram estanques, pois vivenciamos um movimento de idas e vindas, revendo e reestruturando o que estava sendo proposto, de acordo com as necessidades que surgiam durante seu desenvolvimento.

Neste item, dissertamos sobre algumas características do experimento didático-formativo, anunciamos as etapas para a realização deste e, na próxima subseção, apresentamos a trajetória percorrida neste estudo.

4.2 Os primeiros passos da investigação

No desenvolver da pesquisa, procuramos nos atentar às três características que Aquino (2014) propõe para a primeira etapa. Assim, fizemos o estudo do experimento didático zankoviano, utilizando como base quatro livros: 1. *La Enseñanza y El Desarrollo*, escrito por L. V. Zankov em 1975 e traduzido para o espanhol em 1984; 2. *Дидактика и жизнь* (Didática e vida), em russo, redigido por Zankov em 1968, 3. *Развитие учащихся в процессе обучения* (I — II классы) (Desenvolvimento de escolares no processo de *obutchénie*), em russo, dissertado por L. V. Zankov em 1963; 4. *Беседы с учителями* (Conversa entre professores), em russo, escrito por L. V. Zankov em 1975. Além disso, buscamos na literatura autores contemporâneos que estudam esse sistema, como: Aquino (2013, 2014, 2017), Ferola (2019), Ferola e Longarezi (2021), Garcia e Miranda (2022), Guseva e Sosnowski (1997), Guseva e Solomonovich (2017), N. V. Nechaeva e N. N. Roshchina (НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006), Pereira (2020), Puentes e Aquino (2018).

Na busca por compreender em quais aspectos nossa investigação se diferencia das pesquisas realizadas de 2013 a 2020, que investigaram sobre o processo de *obutchénie* de equação do 2º grau, fizemos uma busca no *site* da CAPES, selecionando alguns estudos, e não encontramos nenhum que utilizou como metodologia o experimento didático zankoviano no processo de *obutchénie* de equação do 2º grau. Os resultados dessa busca estão detalhados na seção 3 deste estudo.

Realizamos uma revisão bibliográfica da BNCC (BRASIL, 2017) em relação à unidade temática álgebra, para averiguar quais características nosso estudo se aproxima e/ou se distancia

do que é proposto neste documento. Para isso, também foi necessário buscar compreender os conceitos algébricos fundamentados na Teoria Histórico-Cultural, com uma revisão da literatura sobre os conceitos de fluência, relação de interdependência, conceito de variável, campo de variação, relação de igualdade e das linguagens retórica, sincopada e simbólica, além do aspecto nuclear da equação do 2º grau baseado em Caraça (1951), Lanner de Moura e Sousa (2008), Panossian (2014), Sousa (2004, 2018) e Sousa, Panossian e Cedro (2014). Além disso, apresentamos a definição de equação do 2º grau atualmente e como os povos árabes e indianos encontravam as raízes dessas equações, fundamentando nossos estudos em Andrade (2000), Baumgart (1992), Boyer (1996), Cedro (2004), Garbi (2009), Hogben (1970), Lalande (1993), Morgado (1999) e Pitombeira (2004). Os detalhes deste estudo encontram-se na seção 3.

Nessa etapa, submetemos o projeto de pesquisa ao Comitê de Ética e Pesquisa da Universidade Federal de Uberlândia (CEP/UFU), que foi aprovado sob o CAAE nº 52273719.0.0000.5152.

Até aqui, apresentamos, de forma sucinta, a trajetória de busca para a compreensão do sistema zankoviano, uma síntese das pesquisas realizadas de 2013 até 2020 sobre a temática, as especificidades sobre a unidade temática álgebra propostas na BNCC (BRASIL, 2017), relacionando com os conceitos algébricos que estão fundamentados na THC. No próximo item, apresentamos a síntese das etapas do sistema zankoviano e do microciclo proposto nesta pesquisa.

4.2.1 Etapas do sistema zankoviano e do experimento microciclo proposto nesta pesquisa

Aquino (2017) anuncia que, no contexto do sistema zankoviano, o foco central está no método. O método de *obutchénie* é estabelecido pelo conteúdo e programa da disciplina, e este permite orientar a atividade cognoscitiva dos estudantes para que possam desenvolver o conhecimento teórico, considerando os aspectos internos do conceito. Diante do estudo realizado sobre os princípios e as orientações metodológicas do sistema zankoviano, buscamos planejar e elaborar o experimento formativo, desenvolvido em um curto espaço de tempo nesta pesquisa. A síntese desse movimento da teoria à prática está no quadro 4.

Quadro 4 - Proposições do sistema didático zankoviano e a organização didática do processo de *obutchénie* de Equação do 2º grau

Sistema zankoviano	Organização didática para o processo de <i>obutchénie</i> de Equação do 2º grau
I) Desenvolver o experimento, na qualidade de método científico geral, que permite estudar as relações estabelecidas pelas especificidades do processo de <i>obutchénie</i> e determinar os fatores que condicionam a necessidade de manifestação do fenômeno dado.	I) Analisar os elementos que determinam a necessidade da <i>obutchénie</i> de equação do 2º grau, a partir de observações das dificuldades dos estudantes em relação a este conteúdo, durante nossa experiência como professora de Matemática na Educação Básica do 6º ao 9º ano.
II) Estudar o objeto no seu movimento, no processo de sua constituição e ao longo de seu desenvolvimento.	II) Analisar o processo lógico-histórico para compreender o processo de desenvolvimento do conceito de equação do 2º grau.
III) Comparar os sistemas de ensino que se diferenciam por sua estrutura e eficácia e, portanto, a geração de grupos experimentais e grupos de controle.	III) Foge ao escopo desta pesquisa.
IV) Estudar a lógica objetiva do processo de <i>obutchénie</i> por meio da descoberta e revelação das vias que permitem que sejam alcançados os resultados almejados no desenvolvimento dos estudantes.	IV) Por meio da preparação, desenvolvimento e observação da tarefa, procurar a lógica objetiva do processo de <i>obutchénie</i> que promova o desenvolvimento integral dos estudantes.
V) Analisar o estado da prática geral do ensino primário e das características próprias do ensino tradicional.	V) Analisar a organização da <i>obutchénie</i> de equação do 2º grau, bem como suas particularidades, usando como fonte os estudos realizados sobre este conceito na Teoria Histórico-Cultural.
VI) Desenvolver o método estrutural funcional de estudo dos objetos, que leva ao tratamento das funções que são próprias à estrutura de um sistema de <i>obutchénie</i> desconhecido.	VI) Adotar perspectivas do método experimental zankoviano como meio de validar a pesquisa.
VII) Estudar a atividade psíquica dos estudantes em lugar do procedimento contemplativo.	VII) Investigar a atividade psíquica dos estudantes mais que seus processos contemplativos.
VIII) Estudar o desenvolvimento integral dos estudantes, com base na ideia da correlação entre o todo e as partes, dando preponderância ao todo.	VIII) Buscar evidências do desenvolvimento integral dos estudantes, buscando a relação todo e parte.
IX) Estudar o desenvolvimento integral dos estudantes, a partir de um sistema integrado de ações pedagógicas, sobre a base de que o sistema de processos internos é condicionado por certo sistema de ações externas.	IX) A tarefa utilizada propõe ações pedagógicas internas, condicionadas por ações externas que formalizam processos de constituição do todo e parte referentes ao sistema de conceitos à rede de conhecimentos necessários à formação do conceito de equações do 2º grau, bem como buscam evidenciar os motivos e desenvolvimento psíquico do estudante.

Continua...

Continuação

Sistema zankoviano	Organização didática para o processo de <i>obutchénie</i> de Equação do 2º grau
X) Estudar o desenvolvimento integral do estudante a partir do papel que desempenha a assimilação dos conceitos científicos.	X) No desenrolar das etapas da tarefa, ponderar as ações e, sempre que necessário, repensá-las e promover diálogos com intuito de propiciar que um sistema de conceitos guie os estudantes até o conceito de equações do 2º grau.
XI) Estudar o papel da educação no desenvolvimento, tendo por base o papel determinante e regulador dos princípios didáticos no concernente à metodologia de <i>obutchénie</i> .	XI) Observar princípios didáticos e metodológico zankovianos na elaboração da tarefa, bem como em sua análise final.
XII) Levar em consideração a importância determinante que o princípio da pesquisa multifacetária desempenha no estudo do problema da <i>obutchénie</i> , na educação e no desenvolvimento, a ideia de estudar todos os aspectos do objeto.	XII) Buscar observar todos os aspectos do processo de <i>obutchénie</i> de equações do 2º grau, a fim de identificar seus aspectos.

Fonte: Elaboração com base em L. V. Zankov (1984).

Dessa maneira, buscamos compreender os pressupostos e princípios psicológicos da pesquisa em L. V. Zankov, com intuito de entender o movimento e verificar se há evidências do desenvolvimento integral do estudante em nossa proposta.

Descrevemos, no próximo subitem, as características da escola, assim como as particularidades dos estudantes da turma.

4.2.2 Caracterização da escola e dos estudantes participantes da pesquisa

A escola está localizada na zona Sul de Uberlândia-MG, em um bairro afastado do centro da cidade e recebe estudantes residentes em outros bairros, inclusive, um deles distante da escola¹⁰⁹, e de invasões de terras próximas, muitas vezes denominados por assentamentos.

A unidade escolar conta com 19 salas de aula, das quais são utilizadas 18 salas no turno da manhã e 19 no turno da tarde para atender os estudantes da Educação Infantil e Ensino Fundamental. Além disso, a escola dispõe de três salas destinadas ao Atendimento Educacional Especializado (AEE).

Possui um laboratório de informática contendo 28 computadores, um *Datashow*, telas de projeção e uma impressora. Até 2018, o laboratório ficava sob a responsabilidade de um

¹⁰⁹ A escola que tem no bairro não consegue atender à demanda de estudantes, por isso a prefeitura disponibiliza ônibus que os buscam em determinados pontos do bairro para deixar nas escolas e no final de cada turno os levam de volta para o bairro, deixando-os nos pontos mais próximos de suas casas.

laboratorista, isto é, um(a) professor(a) que ficava cedido(a) para esta função, sendo um(a) encarregado(a) para cada turno.

A professora-pesquisadora leciona nessa unidade escolar desde 2010 e sempre que precisou pôde contar com o apoio da gestão e da supervisão para desenvolver tarefas distintas com os estudantes, cujo foco sempre se voltou para a melhoria do processo de *obutchénie* deles nas aulas de Matemática.

Além disso, na escola, há um grupo de professores muito dispostos e preocupados com a *obutchénie* dos estudantes e que gostam de desenvolver trabalhos em equipe. Assim, sempre que propusemos um projeto, foi possível contar com esse grupo.

A comunidade escolar é composta, em média, por 129 funcionários e 951¹¹⁰ estudantes nos dois turnos. Os funcionários estão distribuídos entre os cargos de analistas pedagógicos, bibliotecários, educadores, gestores, oficiais administrativos, professores do AEE, professores especialistas, professores regentes, profissionais de apoio, secretários e serviços gerais.

A maioria dos estudantes da escola provém de famílias carentes e de baixa renda. Parte deles vive em assentamentos, em condições de vidas precárias e a principal refeição destes estudantes acontece na escola. No geral, são jovens que necessitam de atenção, carinho e afeto. Nos diálogos realizados nas salas, percebemos que a maioria dos estudantes do nono ano tem consciência de que para se ter uma vida melhor é preciso estudar.

Os sujeitos participantes da pesquisa foram estudantes da rede municipal de Uberlândia – MG, em 2018, de turmas que a professora-pesquisadora ministrava aulas de matemática, matriculados em três turmas de nonos anos do Ensino Fundamental, do turno da manhã, que possuíam em média 26 estudantes assíduos por sala, totalizando 78 estudantes, com faixa etária entre 13 e 18 anos. O motivo dessa disparidade entre as idades se dá pelo fato de alguns estudantes não frequentarem a escola regularmente, não tornando possível avançar para o próximo ano escolar.

Para a análise da tarefa realizada, utilizamos como critério a turma que apresentou o maior percentual de frequência nas aulas ao longo do período de desenvolvimento da pesquisa.

A turma selecionada tinha 24 estudantes matriculados, sendo 15 meninas e 9 meninos, dos quais dois matriculados tinham um índice de falta nas aulas que se aproximava de 70%. A maioria dos estudantes tinha índice de falta inferior a 5% e a faixa etária da turma variava de 13 a 16 anos.

¹¹⁰ Os dados foram informados pela secretaria da escola, em 2018.

Dos 24 estudantes dessa turma, cinco foram reprovados em algum ano escolar e 21 estavam cursando pela primeira vez o nono ano do Ensino Fundamental.

Dos 24 estudantes, 15 foram estudantes da professora desde o 6º ano, cinco estudaram com ela no sexto e no nono anos, três estudaram no nono ano e um ingressou na escola em 2018. Desse total, nove estudantes não compreendiam o conceito de campo de variação e quatro estudantes tinham dificuldade em relação ao conceito de variável. Essas constatações foram observadas no desenvolvimento de algumas etapas da tarefa e nos diálogos promovidos em aulas anteriores ao experimento.

Esse fato reforçava que era preciso propor uma metodologia que procurasse superar as dificuldades, ficando nítida a importância de investigar sobre o objeto matemático desta pesquisa.

Optamos por desenvolver a tarefa nas turmas da professora-pesquisadora devido à dificuldade que ela tinha de conseguir organizar o horário para se deslocar até outra escola, pois trabalhava os três períodos. Além disso, outros dois fatores foram preponderantes nessa escolha, visto que professora-pesquisadora conhecia as preferências, os sonhos, as inquietações, as limitações e os responsáveis pelos estudantes e tinha o apoio incondicional da gestão da escola para realização de projetos. Sendo assim, o cenário se apresentou favorável e apropriado para tornar-se *locus* da pesquisa.

No desenrolar da proposta, utilizamos a dinâmica indivíduo-grupo-classe que oferece um ambiente que permite integrar o estudante ao movimento da *obutchénie* e desenvolvimento. Sobre essa dinâmica, Marco (2009) ressalta que:

[...] deve-se, num primeiro momento, pensar individualmente sobre a situação-problema encontrada e atribuir significados próprios a ela; em seguida, discutir as sínteses elaboradas individualmente com um pequeno grupo de trabalho. Este, por sua vez, elabora uma síntese coletiva a partir das reflexões de todos os seus membros e, então, é feita uma discussão com o grupo-classe para encontrar uma possível solução ou a solução mais adequada para a situação-problema. (MARCO, 2009, p. 34-35)

De acordo com o que foi apresentado por Marco (2009), a dinâmica contribui para o compartilhamento de experiências e conceitos que podem impulsionar o desenvolvimento mental do estudante.

As discussões dos estudantes foram acompanhadas por meio de gravações em áudio e vídeo, observações presenciais com registros em diário de campo da professora-pesquisadora e registro dos estudantes. A professora-pesquisadora, sempre que necessário, fazia intervenções,

questionando e dialogando com cada estudante e/ou com os grupos, com intuito de impulsionar a apropriação do conceito e o desenvolvimento mental.

Para a realização da tarefa proposta, a composição de integrantes em duplas, trios ou quartetos, em diferentes momentos, ficaram assim definidas:¹¹¹

Quadro 5 - Descrição da composição dos grupos

Discriminação	Nomes dos integrantes
Duplas	Paula e Dulce July e Lauro Enzo e Duda Henrique e Fran João e Tetê Adriana e Marta Bia e Aline Maria e Fernanda Pedro e Filipe Fabiana e Gustavo Paulo e Marcos Sara e Luana
Trios	Luana, Gustavo e Sara Henrique, João, Maria Pedro, Adriana e Lauro Fran, Tetê, Marta Fernanda, Paula, Filipe Bia, Aline, Enzo Fabiana, Dulce e Duda Paulo, July e Marcos
Quartetos	Grupo A: Henrique, João, Maria e Pedro Grupo B: Fran, Fernanda, Paula e Lauro Grupo C: Tetê, Adriana, Filipe, Marta Grupo D: Bia, Fabiana, Paulo e Marcos Grupo E: Aline, Gustavo, Enzo e Sara Grupo F: Dulce, Luana, Duda, July

Fonte: Sistematização da pesquisadora.

Anunciadas as características da escola, as singularidades dos protagonistas da nossa pesquisa e formação dos grupos, passamos para a organização das ações de cada etapa da tarefa e o cronograma de desenvolvimento do experimento microciclo.

¹¹¹ As disposições apresentadas para duplas se deram mediante às afinidades existentes entre os integrantes. Já as configurações dos trios e quartetos aconteceram considerando a ZDP dos estudantes. Reiteramos, mais uma vez, que os nomes são fictícios, preservando, assim, a identidade dos estudantes.

4.3 Organização da tarefa proposta

Nossa intenção foi analisar a organização da *obutchénie* do conceito de equação do 2º grau orientado a partir dos princípios didáticos e orientações metodológicas zankovianas. Para isso, organizamos uma tarefa composta por sete etapas que foram modificadas sempre que avaliávamos tal necessidade. As etapas foram organizadas considerando as ações da professora-pesquisadora e dos estudantes. Os objetivos da tarefa, os títulos e as ações da professora-pesquisadora e dos estudantes são apresentados no quadro 6.

A realização de cada etapa da tarefa baseada no princípio zankoviano, no momento de observação, possui estruturas que permitiram aos estudantes verbalizarem ou escreverem os conhecimentos. Assim, nas situações-problema propostas em cada etapa da tarefa, foram enfatizados os conceitos de movimento (fluência) geral e particular, relação de interdependência, conceito de variável, campo de variação, relação de igualdade e as linguagens retórica, sincopada e simbólica, além do aspecto nuclear da equação do 2º grau.

Diante disso, a tarefa foi organizada com intuito de provocar nos estudantes a apropriação do conceito de equações do 2º grau. Segundo Lalande (1993) e Cedro (2004), a equação é uma linguagem que permite expressar uma relação entre grandezas. Assim, nas situações-problema propostas, foram enfatizados os conceitos de movimento (fluência) geral e particular, relação de interdependência, conceito de variável, campo de variação, relação de igualdade, as linguagens: retórica, sincopada e simbólica e o aspecto nuclear da equação do 2º grau.

Assim, a tarefa proposta nesta pesquisa diferencia das situações propostas nos livros didáticos, por trabalhar a relação lógico-histórica no desenvolvimento dos conceitos algébricos e definirmos como conexões internas: “a) o de variação quantitativa, presente no cotidiano, no movimento da realidade, no movimento da vida; b) o de variável; c) a formalização de campo de variação; d) as características de enumeração; e) densidade dos conjuntos numéricos.” (LANNER DE MOURA; SOUSA, 2004, p. 14).

Ademais, para resguardar que a organização do experimento microciclo contemplasse os princípios didáticos zankovianos, a tarefa foi composta por desafios que, em cada etapa, o processo de *obutchénie* apresentou um novo nível desafiador de dificuldade; enfatizando a *obutchénie* dos conhecimentos teóricos e o ritmo ativo e crescente da *obutchénie*, permitindo ao estudante recorrer aos conceitos apreendidos em anos anteriores, como o conceito de equações do 1º grau, movimento (fluência) geral e particular, relação de interdependência, conceito de variável, campo de variação, relação de igualdade, as linguagens: retórica,

sincopada e simbólica, e produtos notáveis, bem como oferecemos um espaço de desenvolvimento e apropriação dos conceitos novos, como conceito de equações do 2º grau, visto que estas foram elaboradas intencionalmente para que os conceitos antigos, juntamente com a colaboração dos colegas e da professora-pesquisadora, fossem agregados aos novos conceitos e contribuíssem para o desenvolvimento do estudante. Também partimos dos conhecimentos empíricos a intenção de impulsionar o conhecimento teórico, considerando que os princípios zankovianos incluem os processos cognitivos, volitivos, emocionais, éticos e morais, de forma que o estudante compreenda o conceito estudado em uma ação consciente anunciada em sua fala e na escrita no decorrer do movimento.

Ainda buscamos propor, na tarefa constituída por sete etapas, momentos que propiciassem a descoberta dos aspectos nucleares dos conhecimentos adquiridos, possibilitando o aprofundamento e a conexão com outros componentes curriculares, com intuito de orientar os estudantes na tomada de decisões e o desenvolvimento de sua autoconsciência em relação ao seu desenvolvimento.

Também consideramos, na organização e desenvolvimento da tarefa contemplada no experimento microciclo, as quatro orientações metodológicas propostas por Zankov (1984): multilateralidade; caráter do processo ou processualidade; as colisões; a variabilidade. Para garantir a multilateralidade em cada etapa da tarefa, procuramos propor situações-problema que abarcassem o tema de interesse dos estudantes, com intuito de possibilitar a manifestação de diversas atividades psíquicas nestes durante o desenvolvimento da tarefa. Consideramos o caráter do processo ao elaborar as etapas que se tem uma relação integradas e orgânica de forma que os estudantes se apropriassem do conceito de equações do 2º grau durante o processo, não apenas quando uma etapa já havia sido concluída. Já as colisões estiveram presentes na tarefa, intensificando as atividades de *obutchénie* dos estudantes, visto que cada situação-problema foi elaborada com intuito de despertar neles uma emoção surpresa, possibilitando, dessa forma, o que o trabalho criativo e ativo do pensamento acontecesse ao confrontar com o incompreensível. A última orientação metodológica, variabilidade, nos respaldou quanto à (re) organização da tarefa, visto que, em cada etapa, foram consideradas as singularidades do estudante e da professora-pesquisadora. Com essa orientação, no desenrolar do experimento microciclo, a análise das respostas nos possibilitou repensar a sequência das etapas posteriores da tarefa. Assim, o planejamento aconteceu em um movimento dialético, com revisão bibliográfica, reestruturação e diálogos.

Desde modo, entendemos que os cinco princípios zankovianos: I. *obutchénie* em um nível desafiador de dificuldade; II. enfatizar a *obutchénie* dos conhecimentos teóricos; III. ritmo

ativo e crescente da obutchénie; IV. desenvolver a consciência dos estudantes em relação ao processo de obutchénie; V. organizar aulas para promover o desenvolvimento intencional e sistemático de cada estudante e as quatro orientações metodológicas: multilateralidade; caráter do processo ou processualidade, as colisões e a variabilidade estiveram presentes na organização e desenvolvimento da tarefa, os quais foram fundamentais para compreendermos as relações estabelecidas no processo, que constituíram os nossos isolados de análises.

Para que o texto fique mais objetivo, disponibilizamos as etapas da tarefa nos apêndices e, neste momento, apresentamos os objetivos e as ações dos estudantes e professora-pesquisadora de cada uma das sete etapas que compõem a tarefa no quadro 6.

Quadro 6 - Tarefa: Formação do conceito de equações do 2º grau

Tarefa – Formação do conceito de equações do 2º grau		
<p>Objetivo geral: Formação do conceito de equações do 2º grau e desenvolvimento integral do estudante.</p> <p>Objetivos específicos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Despertar nos estudantes a necessidade de apropriação conceitual de equações do 2º grau, por meio das situações-problemas, tendo em vista seu desenvolvimento integral; • Criar condições para que os estudantes se apropriem do conceito de equações do 2º grau, por meio de atividades mentais que resultem na formação deste conceito teórico. 		
Etapa	Ação da professora-pesquisadora	Ação do estudante
1. Trajetória da bola	<p>Ação 1: Apresentar aos estudantes uma situação-problema, para que possam determinar uma lei que permita calcular a distância percorrida pela bola em função do tempo.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Distinguir a relação principal do conteúdo entre função do 2º grau e equações do 2º grau; • Determinar as raízes de equações do 2º grau incompletas, na busca de formar o conceito; • Determinar o aspecto nuclear das equações do 2º grau.
2. Índice de massa corporal	<p>Ação 2: Propor aos estudantes a leitura do texto intitulado <i>Índice de massa corporal</i>, para que possam refletir sobre algumas perguntas, com intuito de compreender sobre o índice de massa corporal (IMC).</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Desenvolver a situação-problema proposta para apropriar do conceito de equações do 2º grau por meio do IMC; • Ler, dialogar e apropriar do conceito de metabolismo e esporte.
3. A área do campo de futebol em função da largura do campo	<p>Ação 3: Apresentar aos estudantes uma situação-problema na qual a área do campo de futebol está em função da largura e, em seguida, orientá-los a determinar a função do 2º grau, que permita encontrar a área do campo de futebol em função da largura;</p> <p>Ação 4: Oferecer um valor para a área do campo, para que seja determinada, pelos estudantes, sua largura, por meio de tentativas.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Transformar e reescrever o “modelo da equação do 2º grau”, de modo que possam formar o conceito nuclear desta; • Identificar, comparar e analisar as características necessárias e suficientes de equações do 2º grau; • Identificar as características gerais do conceito de equações do 2º grau.

Continua...

Continuação

Etapa	Ação do professor	Ação do estudante
4. Compreendendo como os árabes resolviam equação do 2º grau	Ação 5: Propor aos estudantes que pesquisem, no laboratório de informática, como os árabes resolviam equação do 2º grau. Após a pesquisa, propor que eles resolvam uma situação problema e, em seguida, organizados em forma de U na sala de aula, dialogar sobre as resoluções encontradas.	<ul style="list-style-type: none"> • Pesquisar e compreender como os árabes resolviam equação do 2º grau; • Dialogar sobre as desvantagens em utilizar o método árabe; • Sistematizar o conceito de equação do 2º grau.
5. Resolvendo equações do 2º grau por produtos notáveis	Ação 6: Apresentar aos estudantes a situação-problema, na qual eles têm que transformar e reconstruir o “modelo de equações do 2º grau” para, em seguida, encontrar as raízes da equação por meio de produtos notáveis.	<ul style="list-style-type: none"> • Transformar e reconstruir o “modelo de equações do 2º grau”, de modo a formar o conceito nuclear deste; • Compreender como resolver equações do 2º grau por meio de produtos notáveis.
6. Direto do túnel do tempo	Ação 7: Apresentar aos estudantes a solução encontrada por Brahmagupta do problema $x^2 - 10x = -9$. Propor a eles que transcrevam a resolução apresentada na linguagem sincopada para a linguagem simbólica.	<ul style="list-style-type: none"> • Compreender o método utilizado por Brahmagupta para resolver equação do 2º grau; • Utilizar as linguagens retórica, sincopada e simbólica; • Sistematizar a resolução da equação do 2º grau pela fórmula resolutive.
7. Registrando as atividades mentais	Ação 8: Propor aos estudantes três questões relacionadas ao conceito de equação do 2º grau. Solicitar que socializem com a classe as estratégias utilizadas.	<ul style="list-style-type: none"> • Descrever e registrar o que compreendem sobre o conceito de equação do 2º grau; • Apresentar o conceito de equações de 2º grau em diferentes situações.

Fonte: Sistematização da pesquisadora.

Por meio desses objetivos e ações, procuramos desenrolar o processo de *obutchénie* e desenvolvimento do estudante. No próximo item, dissertamos sobre os recursos utilizados na produção do material empírico.

4.4 Produção do material empírico e recursos utilizados

Neste item, anunciamos os procedimentos utilizados para a produção do material empírico e os instrumentos necessários para os registros da pesquisa.

Sabemos que as informações de uma pesquisa são de extrema importância e precisam ser obtidas de forma atenciosa, criteriosa e rigorosa, pois serão a fonte de consulta no momento de análise. Com isso, desde o início, procuramos agir com cautela na escolha dos instrumentos a serem utilizados na produção do material empírico, sendo priorizadas as gravações em áudio e vídeo, o diário de campo da professora-pesquisadora e os registros dos estudantes.

Segundo Aquino (2014), a forma de obter o material empírico durante o desenvolvimento do experimento didático-formativo se dá por meio da técnica de observação. Esta permite assistir todo o comportamento dos estudantes e do professor nas aulas em que se desenvolve o experimento-formativo. A observação precisa ser realizada de duas maneiras: gravações em áudio e vídeo de todas as aulas experimentais e a observação direta do pesquisador.

Assim, adotamos essas duas formas de observação, com intuito de registrar os detalhes que poderiam não estar dentro do ângulo de visão da câmera, tentando minimizar essas limitações.

Desde o início da investigação, foi utilizado o diário de campo da pesquisadora, buscando registrar, sempre que possível, algumas conjunturas e/ou desenvolvimento das etapas da tarefa imediatamente após o acontecido, com intuito de anotar mais detalhes e não perder as reflexões e comentários, tanto da professora-pesquisadora quanto estudantes. Escolhemos trabalhar com o diário de campo por considerar que, após as aulas, era importante fazer o registro minucioso de todos os detalhes observados e que este seria uma rica fonte de consulta no momento de análise.

Também optamos por trabalhar com os registros dos estudantes, pois acreditamos que, com estes, podemos acompanhar suas dúvidas, dificuldades, anseios e vontades, de forma a reorganizar as etapas seguintes da tarefa, com a intenção de orientar os sujeitos que ainda não haviam alcançado os objetivos almejados na sua realização.

A seguir, apresentamos o caminho percorrido para as análises do material produzido durante a realização do experimento microciclo.

4.5 Isolados e os episódios

Para analisarmos o material produzido no desenvolvimento do microciclo, como aporte metodológico, optamos por trabalhar com isolados (CARAÇA, 1951), considerando estes como um conjunto de elementos que anuncia interação, significação conceitual, além de viabilizar-nos desvelar “ações reveladoras do processo de formação dos sujeitos participantes.” (MOURA, 2004, p. 272).

Para isso, os registros das ações que se desenvolveram ao longo de 24 aulas, descritas no Quadro 6, gravadas em vídeo e áudio, registradas no diário de campo da professora-pesquisadora e nos registros dos estudantes, possibilitaram apreender os produtos objetivos e subjetivos do percurso formativo dos estudantes. Todos eles constituem a estrutura de análise do desenvolvimento do objeto de estudo e, conseqüentemente, sujeito e objeto, processo e produto são considerados em sua unidade.

Pelo apresentado, temos um contexto hermético, rico em detalhes, com muitas relações de interdependências, de uma realidade em movimento. Assim, no momento de análise dos fenômenos, para chegarmos aos isolados, nos aproximamos da ideia de Caraça (1951), que menciona que o isolado se explica pela “impossibilidade de abraçar, num único golpe, a totalidade do Universo [realidade observada], o observador recorta, destaca, dessa totalidade, um conjunto de seres e fatos, abstraindo de todos os outros que com eles estão relacionados.” (CARAÇA, 1951, p. 105).

Caraça (1951, p. 105) destaca que, para conseguir o recorte da realidade, é preciso que se “compreenda nele todos os fatores dominantes, ou seja, todos aqueles cuja ação de interdependência influi sensivelmente no fenômeno a estudar.” Ou seja, é preciso que consideremos os movimentos perpassados pelos estudantes durante todo o processo para podermos apreender suas mudanças e transformações.

Assim, para expor o processo de investigação realizado, utilizamos os episódios e cenas no sentido concebido por Moura (2004), no qual:

Os episódios poderão ser frases escritas ou faladas, gestos e ações que constituem cenas que podem revelar interdependência entre os elementos de uma ação formadora. Assim, os episódios não são definidos a partir de um conjunto de ações lineares. Pode ser uma afirmação de um participante de uma

atividade não tendo impacto imediato sobre os outros sujeitos da coletividade. Esse impacto poderá estar revelado em um outro momento em que o sujeito foi solicitado a utilizar-se de algum conhecimento para participar de uma ação no coletivo. (MOURA, 2004, p. 276)

Os episódios nos permitem investigar “aqueles momentos em que fica evidente uma situação de conflito que pode levar à aprendizagem de novo conceito” (MOURA, 1992, p. 77), de forma que os episódios constituem e revelem os isolados. (MOURA, 2000). É preciso considerarmos, ainda, as ações realizadas em um isolado que possam gerar novas ações para que o processo de desenvolvimento tenha continuidade.

Diante disso, a estrutura de análise dos episódios se baseia em dois isolados: *Relação entre conceitos teóricos, emoção e a vontade* e *Desenvolvimento do estudante nas dimensões ética, moral e conscientização sobre saúde*. Em nossa pesquisa, esses isolados são formadores do percurso formativo, reveladores do modo como os estudantes atribuíram sentidos e significados às suas ações na sistematização da *obutchénie* e desenvolvimento do conceito de equações do 2º grau. Os isolados têm uma relação entre si e não podem ser apreendidos um sem o outro.

No primeiro isolado, “relação entre conceitos teóricos, emoção e a vontade”, buscamos analisar como as etapas da tarefa proposta contribuíram para a organização do processo de *obutchénie*, relacionado com a emoção e a vontade, propiciaram a apropriação do conceito de equações do 2º grau de forma a promover o desenvolvimento integral do estudante.

No segundo isolado, “desenvolvimento do estudante nas dimensões ética, moral e conscientização da saúde”, buscamos evidências de como o processo de *obutchénie* de conceito de equações do 2º grau viabilizou o desenvolvimento integral do estudante.

Cada isolado é composto por episódios e cenas (MOURA, 2004) formados por diferentes trechos extraídos do microciclo desenvolvido em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental, conforme apresentamos no Quadro 7:

Quadro 7 - Composição dos isolados

Isolados	Episódios	Cenas
Relação entre conceitos teóricos, emoção e a vontade	Episódio 1: A formação de atividades mentais para o desenvolvimento dos conceitos algébricos	Cena 1.1: Compreendendo equações do 2º grau incompleta Cena 1.2: Sistematização da <i>obutchénie</i> e desenvolvimento
	Episódio 2: Desenvolvimento de confiança impulsionada pela colaboração entre os envolvidos na apreensão do conceito de equação do 2º grau	Cena 2.1: Diferentes formas de orientar o processo de <i>obutchénie</i> dos colegas à luz das interlocuções entre os integrantes dos grupos Cena 2.2: Compreender as soluções para justificar e despertar nos colegas um novo olhar Cena 2.3: Interlocuções que revelam momentos em que o trabalho em grupo foram fundamentais para o processo de <i>obutchénie</i> e desenvolvimento dos estudantes
Desenvolvimento do estudante nas dimensões ética, moral e conscientização sobre saúde	Episódio 3: O processo de <i>obutchénie</i> de conceito de equações do 2º grau viabilizando o desenvolvimento integral do estudante	Cena 3.1: Momentos propícios para o desenvolvimento da ética e da moral. Cena 3.2: Desdobramento da etapa índice de massa corporal para conscientização e apropriação de conceitos relacionados a saúde.

Fonte: Sistematização da pesquisadora.

Uma vez estabelecido o caminho metodológico da pesquisa e suas particularidades, na próxima seção, retratamos o percurso ponderando responder à questão de investigação: quais as contribuições do processo de *obutchénie* de equações do 2º grau baseado no sistema zankoviano para o desenvolvimento do estudante?

5 O MOVIMENTO DE APROPRIAÇÃO DO CONCEITO DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU E O DESENVOLVIMENTO INTEGRAL DO ESTUDANTE

A produção desse filme, a ser configurado no movimento de análise, pode ser dar por meio dos isolados, de unidades de análises ou núcleos de significação que se interdependem ao mesmo tempo em que permitem compreender o fenômeno em sua totalidade, por meio de uma análise de natureza explicativa, na qual o pesquisador busca compreender o movimento do fenômeno e as mediações, contradições e superações desencadeadoras de novas qualidades. (MORETTI; MARTINS; SOUZA, 2017, p. 54)

Na busca de produção do nosso filme a ser retratado no desenrolar da análise, que apresente as singularidades presentes na epígrafe, nesta seção, procedemos à análise do movimento que se realiza na estrutura interna da tarefa da *obutchénie* com suas interrelações multifacetadas formadoras de conceitos no desenvolvimento dos sujeitos, no contexto de uma escola pública municipal.

O movimento o qual citamos se manifesta pela tomada de consciência do estudante no processo de formação de novas relações entre necessidade, objetivo e ações na realização das situações-problema, ou seja, no dinamismo planejado e dialético dos seus elementos. Dessa forma, as necessidades coletivas são tecidas nas conjecturas da intervenção realizada no experimento microciclo, para que novas relações se formem, oportunizando, assim, a apropriação do conceito de equações do 2º grau com a função de viabilizar o desenvolvimento integral do estudante.

Na defesa desta tese, apresentamos os argumentos que validam o desenvolvimento integral do estudante, concentrando nossa análise nos elementos da *obutchénie*, nos quais conteúdos e formas encontram-se relacionados pela lógica dialética, orientando o processo como um todo. Com a intenção de o leitor ter uma visão geral e ampla de como a tarefa está organizada, apresentamos, no Quadro 6, uma síntese de seus elementos e como se desenvolveu todo o microciclo.

Vale ressaltar que a produção e apropriação dos dados processuais de “novos” conceitos são geradas de acordo com o movimento da realidade na sistematização da *obutchénie*, de onde surgem as contradições e as necessidades de encontrar caminhos para superá-las.

Para compor a última etapa do experimento didático-formativo, a qual Aquino (2014) denomina de *Análise dos dados e elaboração do relatório*, lançamos mão de dois isolados: a)

Relação entre conceitos teóricos, emoção e a vontade; b) Desenvolvimento do estudante nas dimensões ética, moral e conscientização sobre saúde. As particularidades de cada isolado estão descritas na próxima seção.

Os nossos isolados são constituídos por episódios e cenas. “Os episódios poderão ser frases escritas ou faladas, gestos e ações que constituem cenas que podem revelar interdependência entre os elementos de uma ação formadora.” (MOURA, 2004, p. 276). Portanto, os isolados são formados por diferentes trechos extraídos do microciclo desenvolvido em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental, conforme apresentamos no quadro 7.

Depois da sistematização de todo o material, investigamos os traços gerais desse desenvolvimento para, a partir dele, revelar as manifestações particulares e a singularidade existente, com intuito de responder à questão de pesquisa: *Quais as contribuições do processo de *obutchénie* de equações do 2º grau baseado no sistema zankoviano para o desenvolvimento do estudante?*

Portanto, desses isolados explícitos nos episódios, evidenciamos as regularidades e, com elas, conseguimos apreender as ações que mobilizaram a apropriação do conceito de equações do 2º grau e possibilitaram o desenvolvimento integral do estudante, o que é detalhado nesta seção.

5.1 Relação entre conceitos teóricos, emoção e a vontade

Buscamos, neste item, voltar nosso olhar para ações e reflexões dos estudantes que revelam as contribuições do processo de *obutchénie* do conceito de equações do 2º grau fundamentado no sistema zankoviano para o desenvolvimento dos estudantes para apropriação do conceito de equações do 2º grau analisando como a emoção e a vontade contribuíram nesse processo. Para tanto, este isolado foi organizado em dois episódios: **Episódio 1:** A formação de atividades mentais para o desenvolvimento dos conceitos algébricos e **Episódio 2:** Desenvolvimento de confiança impulsionada pela colaboração entre os envolvidos na apreensão do conceito de equação do 2º grau.

A seguir, apresentamos os diálogos e registros que nos permitiram analisar as contribuições da organização da *obutchénie* e o desenvolvimento do conceito de equação do 2º grau fundamentado no sistema zankoviano, para a apropriação dos conceitos algébricos.

5.1.1 Episódio 1: A formação de atividades mentais para o desenvolvimento dos conceitos algébricos

O experimento microciclo foi desenvolvido por meio de uma tarefa composta por sete etapas que são realizadas por ações que contribuem para a apropriação do conceito de equações do 2º grau e o desenvolvimento do estudante, baseado no sistema zankoviano, cujo objetivo consistiu na formação do conceito de equações de 2º grau, compreendendo o aspecto nuclear destas equações. De tal modo, a professora-pesquisadora organizou algumas ações, que compõe a tarefa, que permitissem aos estudantes apropriarem do conceito de equações do 2º grau, compreendendo que na relação entre os coeficientes da equação e suas raízes temos um movimento quantitativo de permanência e mutabilidade. Para isso, foram organizadas duas cenas com o intuito de analisar como ocorreu o processo de *obutchénie* do conceito de equações de 2º grau: **Cena 1.1:** Compreendendo equações do 2º grau incompleta e **Cena 1.2:** Sistematização da *obutchénie* e desenvolvimento.

No episódio 1, analisamos atividades mentais desenvolvidas nas seguintes etapas: 1. Trajetória da bola; 3. A área do campo de futebol em função da largura do campo; 4. Compreendendo como os árabes resolviam equação do 2º grau; 5. Resolvendo equações do 2º grau por produtos notáveis; 6. Direto do túnel do tempo; e, 7. Registrando as atividades mentais.

A etapa 1, intitulada *trajetória da bola*, possui ações que permitiram ao estudante a sistematização da *obutchénie* e desenvolvimento na compreensão de equações do 2º grau incompleta do tipo $ax^2 = -c$, entendendo a relação entre os coeficientes a e c da equação do 2º grau incompleta e a articulação desse conceito com outros, como os de movimento, variação, relação entre quantidades e de função.

A etapa 3, nomeada *a área do campo de futebol em função da largura do campo*, contempla ações que despertaram nos estudantes a necessidade de apreender uma maneira para resolver equações do 2º grau completa.

E na etapa 4, denominada *compreendendo como os árabes resolviam equação do 2º grau*, as ações contribuíram para compreensão do aspecto nuclear da equação do 2º grau completa e a relação desse conceito com outros, como os de movimento e relação entre quantidades e de função.

A etapa 5, *resolvendo equações do 2º grau por produtos notáveis*, contempla ações que possibilitaram os estudantes reescrever a equação do 2º grau utilizando a linguagem simbólica, para em seguida, vivenciar a resolução por meio de produtos notáveis.

Na etapa 7, denominada de *registrando as atividades mentais*, as ações colocaram os estudantes em movimentos para que eles registrassem o que compreenderam de equações do 2º grau e onde esses conceitos podem ser usados.

Na tarefa desenvolvida no experimento microciclo, buscou-se envolver os conceitos campo de variação, relação de interdependência, relação de igualdade, movimento (fluência) geral e particular, bem como, as propriedades da aritmética e da álgebra. As ações foram desenvolvidas na dinâmica indivíduo-grupo-classe.

Na organização de cada etapa da tarefa, tivemos o cuidado de contemplar os cinco princípios didáticos propostos por Zankov (1968, 1984, 2017): I) *Obutchénie* em um nível desafiador de dificuldade; II) Enfatizar a *obutchénie* dos conhecimentos teóricos; III) Ritmo ativo e crescente da *obutchénie*; IV) Desenvolver a consciência dos estudantes em relação ao processo de *obutchénie*; IV) Organizar aulas para promover o desenvolvimento intencional e sistemático de cada estudante, que têm a função de regular e orientar o processo de *obutchénie* nas suas diversas formas, e que podem ser evidenciado nas análises.

5.1.1.1 Cena 1.1: Compreendendo equações do 2º grau incompleta

A cena 1.1, do episódio 1, *a formação de atividades mentais para o desenvolvimento dos conceitos algébricos*, refere-se a momentos da primeira etapa, na qual evidenciamos ações da professora-pesquisadora em organizar situações que possibilitassem aos estudantes atividades mentais como abstração, análise, síntese, reflexão e comparação.

A cena 1.1 em análise parte da situação-problema proposta na etapa 1:

O físico italiano Galileu Galilei (1564 – 1642), estudou os movimentos como o desta bola e verificou que, desprezando a resistência do ar, qualquer corpo lançado no campo de gravidade da Terra se movimenta do mesmo modo. Ou seja, no lançamento do goleiro, após 1 segundo a bola percorreria cerca de $5 \times 1^2 = 5$ metros; depois de 2 segundos, percorreria cerca de $5 \times 2^2 = 20$ metros; depois de 3 segundos percorreria, $5 \times 3^2 = 45$ metros; e assim sucessivamente. Considerando esse lançamento, quanto tempo a bola gasta para percorrer a distância de um campo de futebol?

A partir da situação proposta para este momento, esperávamos que os estudantes relacionassem o conceito de equação do 2º grau com de função, de relação de quantidades, de movimento e de variação, podendo responder à pergunta utilizando frases, desenhos ou símbolos.

Entre as informações produzidas pela pesquisa empírica, o diálogo de um dos quartetos formado por Henrique, João, Maria e Pedro, mas que também se fez presente concomitantemente nos demais, na tentativa de resolver a situação, nos chama a atenção.

Pedro: Pessoal, como não foi dado o tamanho do comprimento do campo, para encontrar o tempo eu considerei 105m.

Maria: Como assim?

Pedro: Para determinar o tempo precisamos saber o comprimento do campo e este pode variar. Analisei o percurso para um segundo, dois segundos e três segundos e percebi que a distância dividida por cinco é igual ao tempo ao quadrado. Então considerei o comprimento determinado pela CBF, que a professora Jú falou.

Pedro: Fiz assim, dividi 105 por 5 e encontrei 21 e depois tentei encontrar um número que ao quadrado dê 21. Deu aproximadamente 4,5 segundos.

João: Eu fiz uma tabela e fui variando o tempo. Encontrei a equação $5t^2 = d$.

Maria: Você chamou de d a distância percorrida pela bola?

João: Sim.

Maria: Entendi. Também fui relacionando o tempo e a distância percorrida, mudando os valores do tempo, mas não escrevi a equação, escrevi a frase: O tempo ao quadrado multiplicado por 5 é igual a distância percorrida pela bola. Daí, concluí que para saber o tempo precisamos do tamanho do campo de futebol.

Pedro: Henrique como você fez?

Henrique: Minha resposta é parecida com a do João, porém não fiz tabela. Como para cada tempo eu tenho uma distância diferente, usei a definição de função e encontrei a mesma resposta que o João. João você observou que essa é diferente das que estudamos?

João: Sim.

Pedro: Qual seria o tempo que a bola gasta para percorrer a distância de um campo de futebol, na função que vocês encontraram?

Henrique: Bem lembrado Pedro.

João: Tenho que pensar um pouco.

(Grupo A, etapa 1)

Pela análise do diálogo destes estudantes, percebemos que eles usaram de estratégias diferentes para responder à pergunta. O estudante Pedro precisou resolver e analisar as igualdades para verificar que o tempo ao quadrado é igual ao comprimento do campo de futebol dividido por 5. Maria e João usaram da representação da equação por meio de tabela, porém João chegou à equação usando variáveis letras e a Maria usou as variáveis palavras para escrever a equação lançando mão da linguagem retórica, pois “aqui, a função da palavra é equivalente à função do zero na aritmética, por assegurar que ali falta algo. A palavra representa a *casa* ou o valor desconhecido.” (LANNER DE MOURA; SOUSA, 2005, p. 16). Já Henrique definiu a lei da função por meio de variável letras.

Os registros feitos pelos estudantes Henrique, João, Maria e Pedro também nos auxiliam nesta compreensão.

Figura 5 - Registro do estudante Henrique

$5t^2 = f$ t : tempo em segundo
 f : tamanho do campo de futebol em metro.

Fonte: Arquivos da pesquisadora.

Figura 6 - Registro do estudante João

t : Tempo	Tamanho do campo: d
Tempo (seg)	d (em m)
1	$5 \cdot 1^2 = 5$
2	$5 \cdot 2^2 = 20$
3	$5 \cdot 3^2 = 45$
⋮	⋮
t	$5 \cdot t^2 = d$

Fonte: Arquivos da pesquisadora.

Figura 7 - Registro da estudante Maria

Tempo (em seg)		distância (em m)
1	$5 \cdot 1^2 = 5 \cdot 1 = 5$	5
2	$5 \cdot 2^2 = 5 \cdot 4 = 20$	20
3	$5 \cdot 3^2 = 5 \cdot 9 = 45$	45
4	$5 \cdot 4^2 = 5 \cdot 16 = 80$	80
5	$5 \cdot 5^2 = 5 \cdot 25 = 125$	125

O tempo ao quadrado multiplicado por cinco é igual a distância percorrida pela bola para atravessar o campo de futebol.
 Para saber o tempo precisamos do tamanho do campo de futebol.

Fonte: Arquivos da pesquisadora.

Figura 8 - Registro do estudante Pedro

Handwritten mathematical work by student Pedro, showing calculations for distance over time. The work is organized into a grid with columns for time (t) and distance (s). The calculations are as follows:

Tempo	distância			
$5 \cdot 1^2 = 5$	$5 \cdot 2^2 = 20$	$5 \cdot 3^2 = 45$	$5 \cdot 4^2 = 80$	$5 \cdot 5^2 = 125$
$\frac{5}{5} \cdot 1^2 = 5$	$\frac{5}{5} \cdot 2^2 = 20$	$\frac{5}{5} \cdot 3^2 = 45$	$\frac{5}{5} \cdot 4^2 = 80$	$\frac{5}{5} \cdot 5^2 = 125$
$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$
$1 = 1$	$2 = 4$	$3 = 9$	$4 = 16$	$5 = 25$
	$4 = 16$	$9 = 9$		

Below the grid, the student has calculated the squares of the numbers 4 through 6:

- $(4, 3)^2 = 16, 81$
- $(4, 2)^2 = 17, 64$
- $(4, 1)^2 =$
- $(4, 5)^2 = 20, 25$
- $(4, 6)^2 = 21, 16$

Fonte: Arquivos da pesquisadora.

Diante das diferentes respostas, os estudantes do grupo não copiaram a resposta de um ou outro colega, mas concordaram com Maria de fazerem a leitura novamente do problema e juntos elaborarem a solução do grupo.

Observamos, pelo diálogo, que estudantes definiram seus propósitos na busca de solucionar a situação-problema e iniciaram as atividades apropriadas para alcançá-los, visto que no momento que se organizaram em grupo, todos apresentaram uma possível solução, esse movimento indica que eles tiveram “domínio sobre a intencionalidade e a ação, em outras palavras, seu desenvolvimento volitivo.” (GUSEVA, 2017, p. 228).

Após a leitura da situação-problema, partiram das ideias expostas e traçaram um novo caminho. Em determinado instante do diálogo, ficaram com dúvida se tinham ou não uma função e como a mesma poderia ser nomeada, sentindo neste momento a necessidade de dialogar com a professora. Após, a intervenção da professora-pesquisadora os estudantes concluíram a partir da característica externa do conceito que se tem uma função do 2º grau. Essas afirmações podem ser observadas no diálogo abaixo:

Maria: Precisamos sintetizar uma resposta para apresentar para a sala. Vamos ler novamente o problema e tentar buscar uma resposta para o tempo. Assim, pensamos juntos de como encontrar o tempo. O que vocês acham?

João: Queremos descobrir o tempo, podemos chamar de t . O que vocês acham?

Maria, Henrique e Pedro: Concordo.

Henrique: A distância percorrida pela bola que nos interessa é o comprimento do campo de futebol. Vocês concordam?

Maria, João e Pedro: Sim.

Maria: Então teremos $5t^2 = d$, onde t é o tempo e d é o comprimento do campo. Essa é lei que o João e o Henrique apresentaram. Certo?

Pedro: Sim. Neste caso, temos uma função, pois para cada tempo temos apenas um percurso percorrido. Agora precisamos deixar a variável t sozinha antes do igual. Eu não consegui, tive dificuldade de colocar o t em um dos lados da igualdade, por isso determinei o valor da distância percorrida pela bola, ficando com a incógnita t .

João: Gostei da sua resposta Pedro, porque quando temos o valor da distância percorrida fica fácil calcular o tempo. Só que precisamos determinar o tempo para qualquer distância.

Maria: Isso, porque com duas variáveis temos muitos resultados.

João: Podemos determinar o t fazendo a operação inversa da potência.

Henrique: Sim. Mas, fico com dúvida se é uma função, porque o tempo está ao quadrado.

Maria: Vamos verificar com a professora. PROFESSORA PODE NOS DAR UM HELP?

Maria: Professora, estamos com uma dúvida, se a equação que encontramos representa uma função.

Professora-pesquisadora: Por que vocês acham que é uma função?

Pedro: Porque a distância percorrida pela bola vai depender do tempo.

Professora-pesquisadora: Por que vocês acham que não é uma função?

Henrique: Tem o expoente dois, as que estudamos tem apenas expoente um.

Professora-pesquisadora: Lembra a definição de função que elaboramos juntos nas aulas anteriores?

João: Sim. Neste caso para cada valor do tempo temos um único comprimento.

Maria: Então, nesta relação o comprimento depende do tempo. Agora temos que determinar variável dependente e a variável independente.

Pedro: E o campo de variação.

Henrique: Professora, essa função pode ser chamada de função do segundo grau?

Maria: Faz sentido. Professora o que a senhora acha?

Professora-pesquisadora: Por que faz sentido Maria?

Maria: Porque na função do primeiro grau o expoente é um. Aqui o expoente é dois, por isso será do segundo grau.

Risadas.

Pedro: Verdade Maria. Professora, se não é o tipo de função do segundo grau, vamos nomear assim.

Risadas.

Professora-pesquisadora: Vocês estão certos. É um exemplo de função do segundo grau, também conhecida como função quadrática.

(Grupo A, etapa 1)

Mediante ao diálogo acima, notamos que a situação problema gerou nos estudantes a necessidade de determinar uma equação ou a lei de formação que permitisse que a distância estivesse em função do tempo, e a partir de suas experiências buscaram simplificar as escritas utilizando de símbolos estudados nos conteúdos de função do 1º grau e de equação do 1º grau. Além disso, conseguiram articularam os princípios de resolução de equação do 1º grau para encontrar e as propriedades aritméticas para determinar o valor de t .

Assim, “Os conhecimentos prévios dos alunos são aproveitados na medida em que é na interação, estabelecida a partir da proposta de solução comum do problema, que cada criança irá lançar mão do que sabe para propor a sua forma de melhor resolver o problema coletivo.” (MOURA; LANNER DE MOURA, 1998, p. 14).

Observemos, na transcrição do diálogo do grupo formado por Henrique, João, Maria e Pedro, que a professora-pesquisadora buscou por meio de indagações orientar os estudantes a responderem as suas perguntas priorizando a atividade do estudante e oportunizando uma relação amigável entre professor e estudante. “Neste movimento, o professor não perde seu papel de liderança na *obutchénie*, mas, ao mesmo tempo, torna-se participante do processo coletivo de cognição, um verdadeiro amigo e companheiro sênior de seus estudantes.”¹¹² (ZANKOV, 1968, p. 96, tradução nossa). Essas particularidades podem ser observadas na seguinte parte do diálogo:

Maria: Professora, estamos com uma dúvida, se a equação que encontramos representa uma função.

Professora-pesquisadora: Por que vocês acham que é uma função?

Pedro: Porque a distância percorrida pela bola vai depender do tempo.

Professora-pesquisadora: Por que vocês acham que não é uma função?

Henrique: Tem o expoente dois, as que estudamos tem apenas expoente um.

Professora-pesquisadora: Lembra a definição de função que elaboramos juntos nas aulas anteriores?

João: Sim. Neste caso para cada valor do tempo temos um único comprimento.

Maria: Então, nesta relação o comprimento depende do tempo. Agora temos que determinar variável dependente e a variável independente.

Pedro: E o campo de variação.

Henrique: Professora, essa função pode ser chamada de função do segundo grau?

Maria: Faz sentido. Professora o que a senhora acha?

Professora-pesquisadora: Por que faz sentido Maria?

Maria: Porque na função do primeiro grau o expoente é um. Aqui o expoente é dois, por isso será do segundo grau.

Risadas.

Pedro: Verdade Maria. Professora, se não é o tipo de função do segundo grau, vamos nomear assim.

Risadas.

Professora-pesquisadora: Vocês estão certos. É um exemplo de função do segundo grau, também conhecida como função quadrática.

(Grupo A, etapa 1)

¹¹² “Характер экспериментального обучения изменяет отношения между учителем и учениками. Учитель не теряет своей руководящей роли в учении, но в то же время становится участником коллективного процесса познания, подлинным другом и старшим товарищем своих питомцев. Исчезают те нотки «командования», которые обычно еще сильно звучат в начальных классах.” (ЗАНКОВ, 1968, p. 96).

Já o grupo formado por Bia, Fabiana, Paulo e Marcos determinou o tempo, utilizando desenhos. Acompanhe a explicação que Bia a representante do grupo D, relatou:

Professora-pesquisadora: Bia como seu grupo fez?

Bia: Chegamos à mesma resposta dos outros grupos, mas fizemos alguns quadrados para poder chegar à resposta.

Professora-pesquisadora: Você pode explicar para nós como vocês fizeram?

Bia: Vou tentar explicar. Posso fazer no quadro professora?

Professora-pesquisadora: Claro.

Bia: Como temos um ao quadrado, lembramos que área do quadrado é a medida do lado ao quadrado. Assim, temos um quadrado de lado um, no qual a área é cinco dividido por cinco. O segundo quadrado tem lado dois e área foi vinte dividido por 5. No terceiro quadrado temos lado igual a três e área igual quarenta e cinco dividido por cinco. Então desenhemos um quadrado de lado t e área igual ao tamanho do campo de futebol dividido por cinco. Sabemos que no primeiro, no segundo e no terceiro quadrado o lado é a raiz quadrada desses números. (Nesse momento a estudante se referia aos seguintes números: $\frac{5}{5} = 1$; $\frac{20}{5} = 4$ e $\frac{45}{5} = 9$).

Então, concluímos que a equação que permite calcular o tempo será $t = \sqrt{\frac{d}{5}}$, onde d e t têm que ser um número positivo. (A estudante desenhava os quadrados no quadro e ia explicando).

Professora: Por que precisa ser um número positivo?

Bia: Porque comprimento e tempo são medidas.

(Grupo-classe, etapa 1)

Observe que os estudantes do grupo D, para determinar o tempo, construíram quadrados articulando a linguagem geométrica e simbólica para determinar o tempo. Além disso, notamos que o fato de a situação-problema estar associada a realidade permitiu que os estudantes concluíssem, de forma consciente, sobre o campo de variação da variável tempo, fato que poderá ser relevante para o desenvolvimento do estudante. A respeito disso, Vygotsky (1991 *apud* GUSEVA, 2017, p. 229) afirma que “sempre que a educação não está conectada à realidade, inevitavelmente, serão desenvolvidas percepções errôneas, de modo que, mesmo sendo assimilado, o conhecimento permanecerá irrelevante para ao desenvolvimento.”

Os grupos B, C e F concluíram com a equação: tempo ao quadrado é igual a distância percorrida pela bola dividida por 5, e que o tempo tem que ser um número positivo e não determinaram o campo de variação da distância percorrida pela bola. O grupo E concluiu que $t = \sqrt{\frac{d}{5}}$ onde d tem que ser um número maior que zero e não determinou o campo de variação da variável independente. Estas constatações serão observadas no decorrer desta análise e, para evitar a apresentação de resultados análogos, optamos por não os exibir neste momento.

No diálogo realizado pelo grupo A, percebemos que Maria, João e Henrique utilizaram dos conhecimentos anteriormente elaborados de equação e de função para tentar determinar o comprimento do campo de futebol, como apresentado anteriormente. Pelo diálogo, notamos que os estudantes deste grupo no momento que resolveram o problema sem a intervenção da professora não se atentaram à necessidade de estabelecer um campo de variação para as variáveis, como consta nas falas de **Maria** [“Então, nesta relação o comprimento depende do tempo. Agora temos que determinar variável dependente e a variável independente”] e de **Pedro** [“E o campo de variação”]. Isso, só foi acontecer no momento em grupo, após o diálogo entre pares e a professora-pesquisadora.

Há evidências de que os estudantes têm apropriação do conceito de variação e que eles compreendem a necessidade de delimitá-los considerando o contexto, além disso, articulam os conhecimentos adquiridos na disciplina de Educação Física com o conceito estudado, cujas afirmações podem ser acompanhadas no seguinte diálogo:

Professora-pesquisadora: Por que vocês estão considerando que o comprimento do campo está entre 90 e 120m.

Pedro: Na aula de Educação Física vimos com a professora Jú que nas regras de futebol oficial o comprimento precisa estar entre 90 e 120 metros, então o comprimento mínimo é 90 e o máximo será de 120 metros.

Professora-pesquisadora: Mas é necessário determinar esse intervalo?

Henrique: Sim, não temos comprimento negativo e pensando em campo de futebol achamos que o melhor é pensar nas regras.

João: Queria colocar o comprimento, maior que 10 metros, pensando nos campos não oficiais, só que perdi. Os meninos e a Maria me convenceram que o padrão colocado no documento era a melhor justificativa para a escolha do intervalo.

Professora-pesquisadora: Boa justificava do grupo para a escolha do campo de variação. Também teremos um campo de variação para o tempo?

Silêncio

Maria: Acho que sim.

Henrique: Sim, teremos um tempo mínimo que será quando o campo tiver 90 metros e o tempo máximo quando o campo tiver 120 metros.

(Grupo A, etapa 1)

Para determinar o campo de variação da variável dependente, o grupo A utilizou dos conhecimentos apreendidos na aula de Educação Física, relacionando com os conceitos matemáticos. Logo, na etapa 1, os estudantes foram colocados diante de situações novas cujas soluções exigiam um olhar atencioso para todos os detalhes, isso possibilitou que tivessem a perspicácia de observar a importância de determinar o campo de variação para variável independente, vivenciado assim as particularidades do princípio didático que indica a *Obutchénie* em um nível desafiador de dificuldade. (ZANKOV, 1963, 1968, 1984).

Outros estudantes preferiram considerar a sua realidade ao determinar o campo de variação, como podemos ler no diálogo:

Professora-pesquisadora: Qual a dúvida Aline?

Aline: Queremos usar um campo de variação para representar a distância percorrida pela bola, diferente da resposta que o grupo A mostrou. Queremos considerar o tamanho do campinho que temos no nosso bairro, (Risadas) ele não é tão grande. Queremos colocar que o comprimento mínimo seja de 10m.

Professora-pesquisadora: Turma o que vocês acham?

Dulce: Uai, se temos uma função, o campo de variação pode ser qualquer medida maior que zero.

Henrique: Concordo com a Dulce, mas se pensarmos em campo de futebol oficial, nossa resposta não está errada.

Dulce: Sim, Henrique. Só pensei de não restringir muito.

Aline: Dulce mais se o comprimento for zero, não temos um campo de futebol.

Dulce: Verdade, não tinha pensado dessa forma Aline. Vou conversar com o grupo para definirmos melhor os intervalos.

Professora-pesquisadora: O campo de variação da variável dependente não tem que ser o conjunto real?

Conversa entre os componentes do grupo.

Maria: Depende da situação. No caso do comprimento do campo não pode ser negativo e não faz sentido ser muito grande, seria necessário mudar o tempo do jogo por exemplo.

Aline: Verdade, Maria. Nós decidimos que nosso comprimento vai variar de 10m a 120m. Depois, vamos fazer os cálculos para encontrar o campo de variação do tempo.

Professora-pesquisadora: Aline, por que decidiram bater o martelo nesse intervalo?

Aline: Para considerar o comprimento do nosso campinho. Não podemos ficar de fora.

(Grupo-classe, etapa 1)

No diálogo acima, podemos perceber que os grupos compreendem a importância de determinar o campo de variação e como este precisa ser determinado quando se tem um contexto. O grupo A - Henrique, João, Maria e Pedro - sentiu a necessidade de justificar a escolha usando as regras estipuladas pela CBF, enquanto o grupo que Aline, Dulce e Tetê, representam, decidiram que o comprimento mínimo do campo de futebol teria que ser de 10m, considerando o comprimento do campinho de futebol que se tem no bairro. Na etapa 1, os estudantes tiveram a oportunidade de buscar diferentes soluções e conhecimento adquirido anterior foram reintroduzidos com os novos conceitos, sendo oferecida “condições favoráveis para despertar e desenvolver o potencial do estudante” (GUSEVA, 2017, p. 232), como é mencionado no terceiro princípio didático proposto por L. V. Zankov, nomeado *ritmo ativo e crescente da obutchénie*.

No diálogo com a classe, notamos que os estudantes compreenderam a importância de determinar o campo de variação do tempo considerando que o comprimento do campo pode variar. Essa afirmação pode ser observada no seguinte diálogo:

Tetê: Nós também vamos encontrar o intervalo para o tempo.

Professora-pesquisadora: Por que Tetê?

Tetê: Porque o comprimento do campo depende do tempo, e como o comprimento será superior a 10m, no caso do meu grupo, então temos que determinar o tempo mínimo. No nosso caso o tempo mínimo será $\sqrt{2}$ quando comprimento for igual a 10 metros.

Os diálogos apresentados até aqui mostram o quanto a situação-problema apresentada pode desencadear hipóteses nos diálogos dos estudantes. Após o diálogo com a classe, os grupos que a Aline, Tetê e Dulce representavam, puderam repensar seus intervalos e reformular suas soluções. Percebemos assim, a relevância de propiciar momentos de apresentações das soluções dos grupos, visto que

[...] a atividade de ensino de matemática coloca o sujeito diante de situações desafiadoras que o farão organizar um conjunto de conhecimento que possui, com o propósito de solucionar o conflito causado pela necessidade de resolver o problema para o qual não dispõe, de forma imediata de conhecimentos já prontos para solucionar. (MOURA; LANNER DE MOURA, 1998, p. 12)

No diálogo do grupo A - Henrique, João, Maria e Pedro -, fica evidente que o estudante Pedro compreende que existe o campo de variação, mas sentiu necessidade de achar um valor numérico para o comprimento do campo, para poder determinar o tempo que a bola gastaria para percorrer a distância do campo de futebol, quando diz que “Para determinar o tempo precisamos saber o comprimento do campo e este pode variar. Analisei o percurso para um segundo, dois segundos e três segundos e percebi que a distância dividida por cinco é igual ao tempo ao quadrado. Então considere o comprimento determinado pela CBF, que a professora Jú falou.” Pela fala de Pedro inferimos que este tem consciência do seu processo de *obutchénie*, visto que esteve presente neste desenvolvimento operações intelectuais fundamentais à “capacidade de análise, comparação, sistematização, generalização e elaboração de conclusões.”¹¹³ (KAZANSKY, 1947 *apud* ZANKOV, 1968, p. 39, tradução nossa).

No desenrolar da conversa, notamos que Pedro compreendia o que é função quando indaga aos colegas “Qual seria o tempo que a bola gasta para percorrer a distância de um campo

¹¹³ “[...] умению анализировать, сравнивать, обобщать, делать выводы.” (KAZANSKY, 1947 *apud* ЗАНКОВ, 1968, p. 39).

de futebol, na função que vocês encontraram?” e quando afirma que “Sim. Neste caso, temos uma função, pois para cada tempo temos apenas um percurso percorrido. Agora precisamos deixar a variável t sozinha antes do igual. Eu não consegui, tive dificuldade de colocar o t em um dos lados da igualdade, por isso determinei o valor da distância percorrida pela bola, ficando com a incógnita t .” Diante das falas apresentadas, há a evidência de que o estudante consegue relacionar este conceito a outros, como os de variação, de relação entre quantidades, de movimento e de função, como é proposto por Sousa, Panossian e Cedro (2014).

Assim como Pedro no diálogo do grupo, também percebemos que os outros integrantes compreendem a relação da equação do 2º grau com a função do 2º grau, mesmo que o estudo até aqui se restringiu a equação do 2º grau incompleta, podendo esta ser constatada no seguinte diálogo:

Henrique: Quando trocamos o comprimento por 90 metros temos uma equação do segundo grau.

João: E quando consideramos o comprimento igual a 120 metros teremos outra.

Pedro: Agora que está fixo um valor fica fácil de determinar o valor de t .

(Grupo A, etapa 1)

Na busca pelo tempo, o grupo A usou os princípios de resolução de equação de primeiro grau (aditivos e multiplicativos), conseguindo determinar as raízes da equação do 2º grau. Observamos essa afirmação no registro realizados pelos estudantes.

Figura 9 - Grupo A - Henrique, João, Maria e Pedro

Grupo A

$5t^2 = d$ $t \rightarrow$ tempo em segundos.
 $d \rightarrow$ comprimento do campo de futebol

Para $d = 90$ metros:

$$5t^2 = 90 \rightarrow \text{dividir os dois lados por } 5$$

$$\frac{5t^2}{5} = \frac{90}{5}$$

$$t^2 = 18 \rightarrow \text{extrair a raiz quadrada dos dois lados}$$

$$\sqrt{t^2} = \sqrt{18}$$

$$t = 4,2 \text{ ou } t = -4,2$$

Para $d = 120$ metros:

$$5t^2 = 120 \rightarrow \text{dividir os dois lados por } 5$$

$$\frac{5t^2}{5} = \frac{120}{5}$$

$$t^2 = 24 \rightarrow \text{extrair a raiz quadrada dos dois lados}$$

$$\sqrt{t^2} = \sqrt{24}$$

$$t = 4,9 \quad t = -4,9$$

Agora vamos encontrar o tempo em $5t^2 = d$

$$5t^2 = d$$

$$\frac{5t^2}{5} = \frac{d}{5} \rightarrow \text{dividir os dois lados por } 5$$

$$t^2 = \frac{d}{5}$$

$$\sqrt{t^2} = \sqrt{\frac{d}{5}} \rightarrow \text{extrair raiz dos dois lados}$$

$$t = \sqrt{\frac{d}{5}} \quad t = -\sqrt{\frac{d}{5}}$$

Como estamos trabalhando com tempo,

temos $t = \sqrt{\frac{d}{5}} \quad 90 \leq d \leq 120$
 $4,2 \leq t \leq 4,9$

Fonte: Arquivos da pesquisadora.

Pelo registro, podemos verificar que os estudantes encontraram as duas raízes da equação do 2º grau incompleta partindo da função quadrática determinada pelo grupo e tiveram o cuidado de encontrar o campo de variação das variáveis tempo (t) e comprimento do campo de futebol (d). Ainda, no registro, notamos que os estudantes só determinaram o tempo para qualquer comprimento do campo de futebol, depois de calcular o tempo para comprimentos específicos.

Na etapa 1, a partir dos diálogos apresentado observamos a organicidade entre os princípios, visto que estes foram tratados considerando-os como unidade respeitando a sua organicidade. (ZANKOV, 1963, 1968, 1984).

Quando analisamos os materiais apresentados pelos outros grupos, os estudantes desses determinaram os campos de variação das variáveis considerando apenas os números positivos. Acreditamos que tal decisão seja justificada devido o contexto do problema, pois após as discussões da situação-problema, a professora apresentou a equação geral aos estudantes que foram convidados a refletir sobre as raízes da equação do 2º grau incompleta com incógnita t , $at^2 + c = 0$, em que a , t e c são números reais e $a \neq 0$, e neste momento eles citam as raízes negativas. Esse fato pode ser observado no diálogo abaixo:

Professora-pesquisadora: Quem quer falar como encontrou as raízes da equação do segundo grau com incógnita t : $at^2 + c = 0$.

Gustavo: Eu e a Aline fizemos os cálculos e chegamos que t pode ser igual a raiz quadrada do menos c dividido por a ou t pode ser igual a mais ou menos a raiz quadrada do menos c dividido por a .

Fran: Chequei na equação t ao quadrado é igual a menos c dividido por a , estava pensando de como ficar só com t .

Tetê: Cheguei na mesma resposta do Gustavo, só que coloquei a restrição para o coeficiente a , porque não podemos dividir por zero.

Gustavo: É bom colocar mesmo Tetê.

Luana: Uai, eu fiz usando a relação entre os coeficientes e as raízes e o resultado que encontrei é o mesmo.

Professora-pesquisadora: Por que vocês colocaram duas respostas para t .

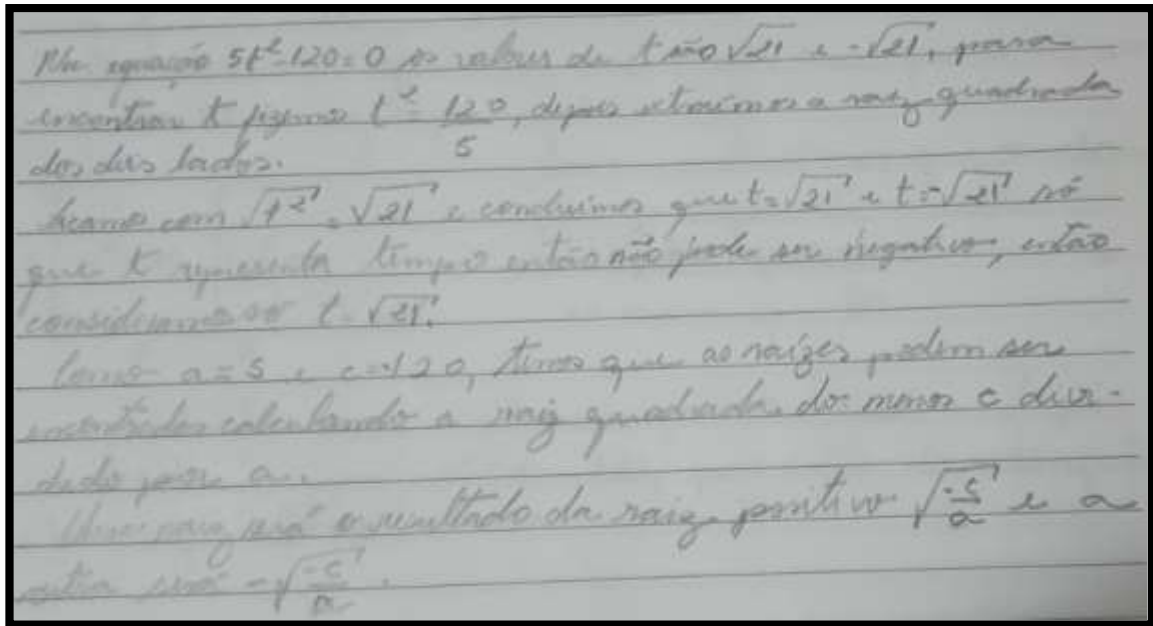
Aline: Vou dar um exemplo para explicar: se t for igual a raiz quadrada de nove, então o t pode ser três positivo ou três negativo.

Henrique: Porque o número positivo ao quadrado e seu oposto ao quadrado também serão positivos.

No diálogo acima, percebemos que Luana se apropriou do aspecto nuclear da equação do 2º grau, “a relação entre os coeficientes da equação e suas raízes” (ROSA, 2009, p. 76), da forma $at^2 + c = 0$, e consegue articular os conhecimentos adquiridos na aula anterior para resolver o problema proposto.

A relação do aspecto nuclear da equação do 2º grau da forma $at^2 + c = 0$ foi observada pelos estudantes após a professora-pesquisadora pedir que eles analisassem as respostas e registrassem no caderno caso existisse uma relação entre as raízes e os coeficientes da equação do 2º grau estudada. A análise realizada por um dos estudantes pode ser lida no registro a seguir:

Figura 10 - Registro do estudante Paulo



Fonte: Arquivos da pesquisadora.

Como alguns estudantes não conseguiram observar a relação existente entre os coeficientes e as raízes quando se tinha um caso particular de equação do 2º grau, a professora-pesquisadora solicitou que Fernanda, que não havia compreendido a relação, fosse ao quadro e explicasse como encontrou as raízes da equação $at^2 + c = 0$. Em seguida, a professora questionou a estudante: “Fernanda analisando as raízes que você encontrou e a equação $at^2 = -c$, você consegue observar alguma relação?”. A estudante fica pensativa e não responde.

Nesse momento a professora reestrutura o questionamento: “Para determinar as raízes de uma equação do 2º grau do modelo que estamos estudando o que você precisa saber?” Em seguida, Fernanda responde admirada que são os coeficientes. Essa consolidação pode ser observada no diálogo abaixo:

Professora-pesquisadora: Fernanda explica no quadro para nós como você encontrou as raízes da equação $at^2 + c = 0$?

Fernanda: Vou escrever tudo e depois vou explicando. Pode ser?

Turma: Sim.

Fernanda: Eu somei o (-c) nos dois lados e fiquei com $at^2 = -c$. Depois dividi os dois lados por a e encontrei $t^2 = \frac{-c}{a}$. Por último, eu tirei a raiz

quadrada e cheguei $t = \sqrt{\frac{-c}{a}}$ e $t = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$. (A estudante Fernanda fez todos os seus registros no quadro primeiro e depois explicou para a turma).

Professora-pesquisadora: Alguém tem alguma pergunta?

Silêncio

Professora-pesquisadora: Fernanda analisando as raízes que você encontrou e a equação $at^2 = -c$. Você consegue observar alguma relação.

Silêncio

Professora-pesquisadora: Para determinar as raízes de uma equação do 2º grau do modelo que estamos estudando o que você precisa saber?

Fernanda: Ah! Os coeficientes a e c . Verdade... quando estávamos encontrando o campo de variação do tempo, o tempo foi a raiz de cento e vinte dividido por 5.

Nesse diálogo, a professora-pesquisadora oferece a estudante ajuda necessária, em zona de desenvolvimento possível, potencializando novas funções ainda que em desenvolvimento. Acreditamos que organização da *obutchénie* da etapa 1 conduziu ao desenvolvimento mental, pois “uma correta organização da *obutchénie* conduz ao desenvolvimento mental, ativa todo um grupo de processos de desenvolvimento, e esta ativação não poderia produzir-se sem a *obutchénie*.”¹¹⁴ (VYGOTSKY, 2007b, p. 37, tradução nossa). Temos aqui um bom exemplo de organização da *obutchénie* e desenvolvimento.

Esse movimento permitiu que os estudantes verificassem a relação entre as raízes e os coeficientes da equação do 2º grau, tornando-se um conhecimento importante para a etapa 5.

5.1.1.2 Cena 1.2: Sistematização da *obutchénie* e desenvolvimento

A cena 1.2, do episódio 1, *a formação de atividades mentais para o desenvolvimento dos conceitos algébricos*, refere-se a momentos da terceira, quarta, quinta e sétima etapas, nas quais podemos evidenciar intervenções da professora-pesquisadora para sistematização da *obutchénie* e desenvolvimento na apropriação do conceito de equação do 2º grau completa, por meio de momentos que propiciem aos estudantes atividades mentais como abstração, análise, síntese, reflexão e comparação.

Na etapa 3, *a área do campo de futebol em função da largura do campo*, foi projetado no *Datashow* o seguinte desafio: “Um campo de futebol tem a largura igual a x e seu comprimento tem oito unidades a mais que a largura.” A professora-pesquisadora pediu aos estudantes que, conhecendo sua área, determinassem a largura e o comprimento do campo de futebol. Após os estudantes responderem a essa pergunta, a professora-pesquisadora apresentou as alternativas a, b e c, uma de cada vez, sempre esperando os estudantes respondessem à pergunta proposta. Para cada item a professora-pesquisadora instigava-os com algumas

¹¹⁴ “[...] una correcta organización del aprendizaje del niño lleva al desarrollo mental, activa todo un grupo de procesos de desarrollo, y esta activación no podría producirse sin el aprendizaje.” (VYGOTSKY, 2007b, p. 37).

orientações. Na alternativa *a* os estudantes foram instruídos a expressar a lei que rege a área do campo de futebol em função da largura do campo, por meio de uma frase e por meio de símbolos. Além disso, foram realizadas duas perguntas para que os estudantes pudessem refletir: I) Quais são as grandezas que envolvem a interdependência desse movimento? e II) Nesta situação qual será o campo de variação da lei? Já no item *c* os estudantes foram orientados a refletirem sobre a diferença entre as sentenças matemáticas encontradas no item *a* e no item *b*. Para responder ao item *c*, a professora-pesquisadora orientou os estudantes a apresentarem a resposta por meio de escrita, de desenhos, entre outros.

No registro da estudante Fran, há evidência que ela relaciona o problema ao conceito de função e que consegue ver as diferenças essenciais entre função quadrática e equação do 2º grau. A estudante analisa a relação de dependência existente entre a área e a largura do campo de futebol ressaltando a necessidade de estabelecer um campo de variação para a largura e considerando as condições de existência do problema.

Figura 11 - Registro da estudante Fran

The image shows a student's handwritten work on a grid background. At the top, there is a table with columns for length (l) and area (A). The first row shows l=3 and A=33. Below the table, the student writes the formula $A = l \cdot (l+8)$ and identifies A as area and l as length. The student then explains that for a fixed length, the area is calculated, and for a fixed area, the length is calculated. The student then defines l as length and l+8 as width, leading to the formula $A = l \cdot (l+8)$. The student then states that the area is a function of the length. Below this, the student lists two cases: a) $A = l^2 + l$, where l is independent and A is dependent; b) $240 = l^2 + l$, which is a quadratic equation. The student then lists several values of l and the corresponding area A: (1, 8), (5, 65), (9, 153), and (12, 240). Finally, the student concludes that the sentence $A = l^2 + l$ is a function because the area depends on the length, and for each length there is a unique area. The student also notes that $240 = l^2 + l$ is a quadratic equation, and the values of l must be positive integers.

l	A
3	33

$A = l \cdot (l+8)$

A é área, l é largura, l > 0

A área está em função da largura

a) $A = l^2 + l$, l é variável independente, e A é dependente, l > 0

b) $240 = l^2 + l$, sendo equação do 2º grau.

$1^2 + 8 \cdot 1 = 1 + 8 = 8$	l = 1
$5^2 + 8 \cdot 5 = 25 + 40 = 65$	l = 5
$9^2 + 8 \cdot 9 = 81 + 72 = 153$	l = 9
$12^2 + 8 \cdot 12 = 144 + 96 = 240$	l = 12

A sentença $A = l^2 + l$ é uma função, pois a área vai depender da largura e para cada largura temos uma única área.

pois $240 = l^2 + l$ é equação do 2º grau. Valores de l neste caso não varia, tem que ser inteiro porque l tem que ser número positivos.

Analisando o registro da estudante Fran, notamos que ela extraiu as informações da situação-problema, levantou os dados e as informações para descobrir as relações existentes. Na busca de uma solução a estudante representou a situação em sua forma materializada (desenho do campo de futebol), usou valores numéricos e descreveu suas atividades mentais para, em seguida, determinar a função quadrática que represente a área em função da largura do campo de futebol. Inferimos que a estudante sentiu a necessidade de utilizar, em alguns momentos, as palavras (linguagem retórica) para resolver a situação e em outros usa álgebra simbólica para encontrar a resposta. Ainda em seu registro percebemos o cuidado em determinar o campo de variação da largura e a busca de alternativas para encontrar a largura do campo quando a área é igual a 240m^2 .

Notamos que a estudante Fran relacionou os conceitos da geometria e da aritmética, usou os conhecimentos anteriores para realizar novas abstrações e generalizações, como por exemplo: cálculo da área de um retângulo, e a lei de formação da função dada, para a solução da variação quantitativa entre as duas grandezas envolvidas na situação apresentada. Em relação a esse movimento, Vigotsky (2007a, p. 400, tradução nossa) relata que sempre existe “a presença de um vínculo entre a generalização superior e a inferior e por meio desta com o objeto.”¹¹⁵ Neste caso, as abstrações do conceito de equação ocorrem entrelaçadas com as generalizações precedentes formadas em outros campos do conhecimento matemático.

Além disso, no registro das atividades mentais realizadas pela estudante, há evidência de que, ao realizar a situação-problema o modo de ação geral e pensamento se modificaram qualitativamente, como afirma Vigotsky (2007a, p. 394, tradução nossa) ao relatar que “durante o processo de desenvolvimento das relações de generalidade, que variam junto com cada nova estrutura de generalização, provocam também, mudanças nas operações de pensamento da criança em cada fase.”¹¹⁶

Na etapa 3, os estudantes sentiram a necessidade de encontrar um caminho para resolver a equação do 2º grau que fosse mais rápido e sugeriram encontrar a relação entre os coeficientes da equação e as raízes. Essas afirmações podem ser observadas nas falas dos estudantes Enzo e Pedro.

¹¹⁵ “La presencia de un vínculo entre la generalización superior y la inferior u a través de esta con el objeto.” (VIGOTSKI, 2007a, p. 400).

¹¹⁶ “[...] Durante el proceso de desarrollo, las relaciones de generalidad, que cambian con cada nueva estructura de generalización, también provocan cambios en todas las operaciones de pensamiento al alcance del niño en determinado estadio.” (VIGOTSKI, 2007a, p. 394).

Enzo: Bem que poderia ter um jeito mais rápido, porque por substituição é demorado. Sou bom nos cálculos, mas errei alguma coisa, porque não cheguei a uma igualdade.

Pedro: Agora que conhecemos os coeficientes da equação, poderia encontrar a raiz usando-os, como fizemos quando encontramos o tempo que a bola gastou para percorrer o campo.

(Grupo-classe, etapa 3)

Segundo Sousa, Panossian e Cedro (2014), compreender a relação entre equação e outros conceitos como os de variação, de relação entre quantidades, de movimento, de função permite aos estudantes incorporar o conceito de equação em um sistema, as relações entre suas propriedades, adquirindo condições de se apropriar efetivamente desse conceito.

Na fala de Enzo observamos que este tem consciência do processo de *obutchénie*, reconhecendo sua dificuldade e apresentando sua necessidade para poder evitar o erro com os cálculos, ou seja, o estudante compreende cada elemento da situação-problema e consegue explicar as causas de seus erros ao assimilá-los. (ZANKOV, 1984).

Na etapa 4, *compreendendo como os árabes resolviam equação do 2º grau*, os estudantes foram convidados a resolver o seguinte desafio, utilizando o método árabe: *Construir uma bandeira no formato retangular para o time de futebol da escola, de forma que o comprimento tem quatro unidades a mais que a largura e a área dessa será de 45 unidades. Quais são as dimensões da bandeira?*

Ao pesquisar na internet o método utilizado pelos árabes para encontrar raízes da equação do 2º grau, os estudantes foram convidados a desenvolver ações de identificação, comparação e análise. Nesta etapa, eles tiveram que identificar as características da equação do 2º grau, comparando os conceitos geométricos e algébricos e identificar as vantagens e desvantagens desse método.

Paula: Neste exercício que eu compreendi, porque os meninos às vezes usavam o cálculo de área do quadrado quando resolviam os problemas.

Professora-pesquisadora: Fale mais Paula.

Paula: Eu não compreendia por que os grupos, às vezes, apresentavam nas respostas deles os quadrados e os retângulos. Quando eu e a Dulce estávamos resolvendo a equação do 2º grau pelo método dos árabes consegui ver a relação das partes da equação com a área do quadrado e do retângulo.

Professora-pesquisadora: Explique com mais detalhe Paula?

Paula: Que vergonha! Vamos lá. O termo f^2 é a área de um quadrado de lado f , o termo $4f$ é a área de retângulos, neste caso teremos quatro retângulos de área f . A soma das áreas dos quatro retângulos com área do quadrado será igual a 45.

(Grupo-classe, etapa 4)

Neste diálogo, inferimos que esta situação-problema contribuiu para que a estudante Paula conseguisse relacionar a equação do 2º grau com a área de retângulos, o que, a nosso juízo, nos possibilita afirmar que tais ações planejadas intencionalmente para serem realizadas em duplas, requer dos estudantes uma participação mais ativa para pensar, argumentar e agir oportunizando o desenvolvimento do conceito trabalhado, como propõe Zankov (1984).

Ao interpretarem e confrontarem suas opiniões com os demais colegas da classe, no momento do diálogo grupo-classe sobre a forma que os árabes resolviam a equação do 2º grau, os estudantes trabalharam com conhecimentos generalizados anteriormente, com base nas diferentes propriedades da aritmética e da geometria. Essa situação fomentou nos estudantes a curiosidade de resolver a equação do 2º grau completa por meio dos produtos notáveis. Esses fatos podem ser observados no diálogo realizado na classe:

Dulce: Professora, só uma pergunta. Chegamos que a área do quadrado maior é $(f + 2) \cdot (f + 2)$, que é igual a $(f + 2)^2$, porque temos um daqueles produtos. Podemos usar aqueles tipos de produtos que estudamos para encontrar as raízes da equação?

Professora-pesquisadora: Turma, a Dulce está perguntando se podemos usar produtos notáveis para encontrar as raízes da equação do 2º grau. O que vocês acham?

Henrique: No caso dos produtos não temos uma equação.

Dulce: Mas, analisando o desenho sabemos que área do quadrado é igual a 49.

Henrique: Entendi Dulce o seu pensamento.

Aline: Também entendi. Neste caso vamos igualar $(f + 2)^2$ a 49. Agora é só resolver.

Silêncio

Aline: As duas raízes da equação serão $f = 5$ ou $f = -9$.

Dulce: Assim, nem precisamos desenhar.

Professora-pesquisadora: Dulce, você pensou em resolver a equação do 2º grau usando produtos notáveis sem precisar fazer o desenho?

Dulce: Isso.

Professora-pesquisadora: Neste caso você tem que achar as raízes do 2º grau partindo da equação $f^2 + 4f - 45 = 0$. Certo?

Dulce: Sim... partimos da ideia desenvolvida pelos árabes, por isso foi fácil encontrar o produto notável. Tenho que pensar como partir da equação, sem fazer o desenho.

[...]

Professora-pesquisadora: Na próxima aula conversaremos mais sobre os produtos notáveis, pode ser turma?

Turma: Sim.

Professora-pesquisadora: Turma a Aline disse que as raízes da equação $f^2 + 4f - 45 = 0$ são $f = 5$ ou $f = -9$, vocês concordam?

Enzo: Sim professora, quando substituímos esses valores na equação temos uma igualdade.

Silêncio

Professora-pesquisadora: Na resolução pelo método árabe o que a incógnita f representa?

Dulce: O lado do quadrado.

Enzo: Verdade, mesmo que -9 seja uma raiz, por esse método não poderemos considerar, porque não existe medida negativa.

Aline: Ixa. Então eles resolviam errado?

Professora-pesquisadora: Aline, na verdade isso não incomodava os árabes. Turma, vocês sabem me dizer por que os árabes não preocupavam com as raízes negativas?

Pedro: Talvez as respostas dos problemas tivessem que ser sempre os números positivos.

Fran: Se fosse isso, eles tinham que pelo menos citar as raízes negativas.

Silêncio

Professora-pesquisadora: Os árabes não se preocupavam com as raízes negativas, porque naquela época os números negativos ainda não eram conhecidos.

(Grupo-classe, etapa 4)

A etapa 4 permitiu que estudantes compreendessem uma maneira de encontrar as raízes da equação, articulando os novos conteúdos com os já estudados e despertou o interesse em buscar outras maneiras para determinar as raízes. Além disso, compreenderam que o método árabe não permite obter as soluções negativas e que essas raízes não foram preocupação para esses povos, visto que os números negativos eram desconhecidos para eles. No diálogo, percebemos que nesta etapa, a qualidade do método de *obutchénie*, as colisões foram responsáveis por despertar o trabalho criativo e ativo do pensamento, ao confrontarem com o incompreensível, impulsionando as emoções, aguçando a curiosidade e despertando a surpresa.

Na etapa 4, os estudantes puderam perceber que diferentes matemáticos contribuíram para o desenvolvimento dos conteúdos e que as soluções encontradas estão relacionadas a necessidade do homem em sua época.

Na etapa 5, *resolvendo equações do segundo grau por produtos notáveis*, foi apresentado aos estudantes o seguinte desafio: *Descubra quantos são os filhos do jogador Casimiro! Nove vezes o número de filhos ao quadrado mais vinte e quatro vezes o número de filhos é igual a trinta e três*. Nesta etapa, os estudantes precisavam reescrever a equação do 2º grau que representa a situação-problema para poder determinar a quantidade de filhos de Casimiro.

Para que os estudantes determinassem as raízes da equação $9f^2 + 24f - 33 = 0$ utilizando produtos notáveis, foi necessário recorrer aos conhecimentos de geometria e a ajuda dos colegas para lembrarem o produto da soma para encontrá-las sem fazer as construções. Nesta etapa, percebemos que os estudantes compreendem a permanência e a mutabilidade da

equação. A seguir, apresentamos o diálogo com a classe que nos permitiu evidenciar essas afirmações.

Professora-pesquisadora: O que temos que acrescentar para obter um quadrado?

Luana: Um quadrado de lado medindo 4.

Professora-pesquisadora: Qual a área do quadrado que iremos acrescentar?

Henrique: A área é 16.

Professora-pesquisadora: Temos que $9f^2 + 24f = 33$. Analisando a figura e a equação, para ficar com um trinômio quadrado perfeito no primeiro membro dessa equação, o que precisa ser feito?

Dulce: Temos que acrescentar 16.

Aline: Para manter a igualdade teremos que acrescentar 16 nos dois lados da igualdade.

Dulce: Sim.

Professora-pesquisadora: Como ficará a equação?

Paula: Vai ficar $9f^2 + 24f + 16 = 33 + 16$ que é igual a $9f^2 + 24f + 16 = 49$.

Dulce: Podemos escrever como $(3f + 4)^2 = 49$. Agora é só extrair a raiz dos lados da equação e vamos ficar com uma equação do 1º grau para resolver.

Henrique: Para encontrar o trinômio usando o desenho é fácil. Ainda, não consigo fazer sem ele.

Dulce: Henrique você lembra como calculávamos o produto da soma?

Henrique: Sim, sempre usei a distributiva.

Luana: Mas, tem aquele jeito mais rápido que definimos juntos. Você não lembra?

Silêncio.

Professora-pesquisadora: Turma, vocês lembram do que a Luana está falando?

João: Só um minuto professora.

[...]

João: Lembrei! Fazemos o quadrado do primeiro mais duas vezes o quadrado do primeiro pelo segundo mais o quadrado do segundo.

Professora-pesquisadora: João, explique no quadro usando a resposta encontrada pela Dulce, por favor.

João: Na resposta da Dulce o primeiro é o $3f$ e o segundo é 4. Para resolver $(3f + 4)^2$ temos $(3f)^2 + 2 \cdot 3f \cdot 4 + (4)^2$ resolvendo ficaremos com $9f^2 + 24f + 16$. (O estudante foi explicando e registrando no quadro).

Professora-pesquisadora: Agora observem o primeiro membro da equação $9f^2 + 24f + 16$ e o trinômio quadrado $(3f)^2 + 2 \cdot 3f \cdot 4 + (4)^2$. Observa alguma relação Henrique?

Henrique: Os primeiros termos são iguais, que é o $9f^2$. Se eu resolver o segundo termo do trinômio fico com $24f$.

Professora-pesquisadora: Conhecendo esses dois termos que você citou você consegue determinar o número que falta para completar o quadrado?

Henrique: Sim é o número que multiplicamos por dois e por $3f$ que dê $24f$. Por isso, que dividimos o segundo termo da equação por 2 para determinar a área de dos dois retângulos que usamos.

(Grupo-classe, etapa 5)

Neste processo, a professora conduziu a aula por meio de indagações buscando aproximar os estudantes na via da solução independentemente da situação, que exigiu deles não somente a repetição dos conhecimentos já apropriados, mas também, contribuiu para que eles buscassem soluções para poder determinar as raízes da equação do 2º grau proposta, de forma a sistematizar a *obutchénie* e desenvolvimento do conceito estudado, como propõe Zankov (1984) ao definir os cinco princípios didáticos. Também podemos inferir que neste momento, a colaboração foi um recurso metodológico relevante à *obutchénie*, o qual a ajuda foi oferecida quando o estudante não conseguiu seguir em frente de forma independente. Nechaeva e Roshchina (2006) menciona que

[...] primeiro, o aluno deve enfrentar uma dificuldade cognitiva, que provoca emoções que estimulam a atividade de busca do aluno. Assim, **a atividade cognitiva do aluno é construída não do simples ao complexo, mas do complexo ao simples**, de alguma situação desconhecida através de uma busca coletiva até a sua resolução, se necessário, com a ajuda de uma sugestão geral [...].¹¹⁷ (НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006, p. 58, negrito do original, tradução nossa)

Dessa maneira, a organização da *obutchénie* atuou na ZDP, impulsionando o desenvolvimento do estudante, ou seja, observamos a importância da colaboração da professora-pesquisadoras e do colega mais experiente, mas vale ressaltar que “em qualquer caso, a atividade independente dos estudantes é o elo inicial no desenvolvimento do conhecimento e seu elo final, de acordo com o qual ele pode ser julgado e a eficácia de sua assimilação.”¹¹⁸ (НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006, p. 47).

Na etapa 5, *resolvendo equações do segundo grau por produtos notáveis*, percebemos que as dúvidas e as dificuldades participaram do processo de desenvolvimento dos estudantes e a vontade de apreender uma forma mais simples para determinar as raízes de equações do 2º grau completa foi um fator que impulsionou o estudante a persistir, contribuindo para a sistematização da *obutchénie* e desenvolvimento. Isso pode ser observado no seguinte diálogo:

¹¹⁷ “Помощь оказывается только тогда, когда ребенок отказывается от самостоятельных попыток двигаться дальше. Но сначала школьник должен столкнуться с познавательной трудностью, которая и вызывает эмоции, стимулирующие поисковую деятельность ученика, класса. Так, **познавательная деятельность ученика строится не от простого к сложному, а от сложного к простому**, от какой-то незнакомой ситуации через коллективный поиск к ее разрешению, в случае необходимости, с оказанием помощи общей, намекающей [...]” (НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006, p. 58, negrito do original).

¹¹⁸ “В любом случае самостоятельная деятельность школьников является начальным звеном освоения знания и его конечным звеном, по которому можно судить и о результативности его усвоения.” (НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006, p. 47).

Fran: Quando estávamos resolvendo as equações por produtos notáveis tive muita dificuldade para lembrar os produtos notáveis, precisei refazer as multiplicações. Fiquei com muitas dúvidas no momento de resolução, mas estava com tanta vontade de aprender uma forma que permitisse achar as raízes das equações do 2º grau de maneira mais “rápida”, que eu não desisti de tentar. Valeu a pena persistir, pois usando os conceitos que estudamos no ano passado e neste ano, eu entendi como fazer. Consigo encontrar as raízes da equação do 2º grau por meio, dos produtos notáveis.

Henrique: As tarefas têm sido desafiadoras, sempre tem algo novo para aprender e temos que pensar para resolver o problema. Na tarefa 5, utilizando a geometria tive que pensar e precisei da ajuda de todos para lembrar os produtos notáveis que estudamos no ano passado. Eu estava com muita vontade de entender outra maneira que não fosse por tentativa e que permitisse achar as raízes negativas também. Descobri nessa tarefa que para encontrar os valores da incógnita precisamos ficar atentos aos coeficientes a , b e c , independente se demoramos ou não na busca de respostas.

(Grupo-classe, etapa 5)

Quando a estudante Fran ressalta que ficou “com muitas dúvidas no momento de resolução, mas estava com tanta vontade de aprender uma forma que permitisse achar as raízes das equações do 2º grau de maneira mais ‘rápida’”, e que não desistiu de tentar, percebemos que estiveram presente no seu processo de *obutchénie* e desenvolvimento, para a apropriação do conceito de equações do 2º grau, emoções e vontade. Isso, foi possível, devido a multilateralidade que é uma das quatro qualidades pedagógicas fundamentais do sistema zankoviano¹¹⁹ discutidas na seção 2 desta pesquisa.

Segundo Ferola (2019, p. 62), na multilateralidade o foco está no “desenvolvimento da diversidade real da atividade psíquica dos estudantes, em detrimento da assimilação exclusiva de conhecimentos e hábitos. Nesse sentido, parte-se da compreensão de que emoções e vontade estão envolvidas na atividade de estudo.”

Além disso, a etapa 5 *resolvendo equações do segundo grau por produtos notáveis*, contribuiu para que Fran ampliasse a compreensão sobre o modo de resolver as equações do 2º grau para um nível superior de generalização ou abstração, como consta no seguinte trecho: “Valeu a pena persistir, pois usando os conceitos que estudamos no ano passado e neste ano, eu entendi como fazer. Consigo encontrar as raízes da equação do 2º grau por meio, dos produtos notáveis”, confirmando, assim a importância da apresentação exponencial do assunto, que segundo Guseva e Sosnowski (1997), é um dos aspectos imprescindíveis para uma boa aula utilizando a metodologia didática de Zankov, que:

¹¹⁹ As quatro qualidades pedagógicas fundamentais do sistema zankoviano são a multilateralidade, o caráter do processo, as colisões e a variabilidade.

[...] refere-se à construção de uma experiência de *obutchénie* interdependente e contínua que incorpora e se baseia no conteúdo de cada aula sucessiva, propiciando ao estudante um corpo de conhecimento integrado e sempre em expansão. No processo, conceitos simples introduzidos anteriormente são gradualmente reenquadrados em questões cada vez mais abstratas e vistos dentro de novos contextos.¹²⁰ (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 24, tradução nossa)

Para possibilitar aos estudantes uma metodologia na qual o reforço de conceitos previamente adquiridos seja constante, e que permita que a *obutchénie* e desenvolvimento não sejam entediantes ou repetitivos, é fundamental o planejamento cuidadoso do professor. (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997). Essas particularidades são também observadas na fala do estudante Henrique quando ele afirma: “[...] utilizando a geometria tive que pensar e precisei da ajuda de todos para lembrar os produtos notáveis que estudamos no ano passado [...].” A fala de Henrique ressalta o quão importante é o coletivo para o processo de apropriação de conceitos, assim como a articulação da álgebra com a geometria.

Henrique ao anunciar que “As tarefas têm sido desafiadoras, sempre tem algo novo para aprender e temos que pensar para resolver o problema”, revela que as colisões, uma das qualidades pedagógicas do sistema zankoviano, esteve presente na etapa 5, *resolvendo equações do segundo grau por produtos notáveis*, visto que os conflitos propostos nesta, contribuíram para colocar o estudante diante de novas condições desconhecidas para o uso do conhecimento existente.

Além disso, quando Henrique ressalta que “[...] estava com muita vontade de entender outra maneira que não fosse por tentativa e que permitisse achar as raízes negativas também. Descobri nessa tarefa que para encontrar os valores da incógnita precisamos ficar atentos aos coeficientes a, b e c, independente se demoramos ou não na busca de respostas”, notamos que as colisões provocaram o sentimento de curiosidade e despertaram o pensamento criativo e ativo do estudante contribuindo para a apropriação do aspecto nuclear da equação do 2º grau. Essas evidências são enfatizadas por L. V. Zankov (1975) quando afirma que

[...] para um pensamento criativo ativo é muito importante que uma pessoa, diante de algo incompreensível que dá origem a uma pergunta, seja “surpreendida”, emocionalmente inflamada por esta pergunta, que o

¹²⁰ “Exponential presentation of subject matter refers to the construction of a continuous interdependent learning experience which incorporates and builds on the content of each successive lesson leaving the student with an integrated, ever-expanding body of knowledge. In the process, previously introduced simple concepts are gradually reframed within steadily more abstract questions and viewed within new contexts.” (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 24).

incompreensível deve evocar nele a emoção de surpresa.¹²¹ (ZANKOV, 1975 *apud* НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006, p. 88, tradução nossa)

As situações propostas na etapa 5, *resolvendo equações do segundo grau por produtos notáveis*, intensificaram a atividade de estudo dos estudantes, visto que seu papel era o de coadjuvar para que as “[...] as noções adquiridas pelos estudantes entrem em colisão”¹²² (ZANKOV, 1984, p. 223, tradução nossa), como ratificamos nas falas dos estudantes citadas anteriormente.

Na etapa 7, nomeada *registrando as atividades mentais*, o objetivo consistiu em analisar o processo de formação das atividades mentais desenvolvidas e a apropriação do conceito de equação do 2º grau por meio da escrita e, dos diálogos realizados com a classe.

Nesta etapa, os estudantes foram orientados na primeira questão a escrever o que compreenderam de equação do 2º grau, apresentando suas características, os tipos de equações e sobre o processo de resolução. Na segunda pergunta, eles foram convidados a elaborar uma situação-problema que abarcasse o conceito de equação do 2º grau e, na última questão, solicitamos que escrevessem se compreenderam ou não o conceito de equação do 2º grau e justificassem suas respostas.

Quando os estudantes escrevem, em seus pensamentos são desenvolvidas várias ações e, por meio delas, podemos verificar como os conceitos estão se formando, visto que na “a fala escrita é altamente desenvolvida, formalmente ainda mais completo do que o discurso falado.”¹²³ (VIGOTSKI, 2007a, p. 342, tradução nossa). No registro da estudante Luana, notamos que ela compreende os aspectos nucleares internos e externos da equação do 2º grau e relaciona o conceito a situações práticas e a outros conteúdos.

¹²¹ “Л.В. Занков подчеркивал: «...для активной творческой работы мышления очень важно, чтобы человек, сталкиваясь с чем-то непонятным, рождающим вопрос, «удивился», эмоционально загорелся этим вопросом, чтобы непонятное вызвало в нем эмоцию удивления.» (ZANKOV, 1975 *apud* НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006, p. 88).

¹²² “[...] las nociones adquiridas por los escolares entran en colisión.” (ZANKOV, 1984, p. 223).

¹²³ “[...] El habla escrita está desarrollada al máximo, formalmente es incluso más completa que el habla oral. [...]” (VIGOTSKI, 2007a, p. 342).

Figura 12 - Registro da estudante Luana

1. Equações do 2º grau possuem uma variável ao quadrado, com um coeficiente a não pode ser zero.

♥ A equação do 2º grau pode ser completa ou incompleta.

A equação do 2º grau completa tem os coeficientes b^2 etc, e os coeficientes b, c não são diferentes de zero.

A equação incompleta e coeficientes b e c podem ser zero.

Exemplos: a) $3x^2 + 6 - 5 = 0$ é exemplo de equação completa
 b) $x^2 = 20$ é exemplo de equação incompleta
 c) $m(m+5) = 0$ é exemplo de equação incompleta

Gosto de resolver a equação do 2º grau usando métodos diferentes, como a fórmula resolvente, mesmo não consigo descobrir todos os passos da demonstração.

2. minha mãe quer construir um jardim circular que tenha 20.096 cm^2 . Qual o tamanho do jardim?

$A = 20.096 \text{ cm}^2$
 $r = ?$ $A = \pi r^2$ $\rightarrow r^2$ variável independente ♥
 $20.096 = 3,14 \cdot r^2$ \rightarrow equação do 2º grau com
 $20.096 = r^2$ para encontrar r , não tem o
 coeficiente b
 $\sqrt{\frac{20.096}{3,14}} = \sqrt{r^2}$ $20 > 0$
 $\pm \sqrt{6400} = 20$
 $r = \pm 80 \text{ cm}$ $r = 80 \text{ cm}$

3. Gosto de aprender equação do 2º grau, tem várias maneiras para resolver desde de variáveis, sabendo os coeficientes, falta que completar, por conseguinte resolve os problemas mesmo que não se que pensar um pouco mais em alguns.

Fonte: Arquivos da pesquisadora.

O desenvolvimento desta etapa da tarefa demonstra apropriação do conceito de equação do 2º grau ao identificar a especificidade de cada tipo de equação do 2º grau, e por elaborar uma situação problema de forma livre.

Diante da resposta “Acho que compreendi pois consigo resolver os problemas, mesmo que tenho que pensar um pouco mais em alguns.”, identificamos o domínio do conceito e a atitude consciente, intencional e orientada da *obutchénie* e desenvolvimento. Vale ressaltar que a organização intencional pela professora, com situações-problema articuladas entre si possibilitaram ao estudante ser sujeito de sua atividade, formar novas funções e atividades

mentais, como é proposto no quinto princípio didático zankoviano, *organizar aulas para promover o desenvolvimento intencional e sistemático de cada estudante*.

No episódio 1, fica evidente nos diálogos e registros até aqui apresentados que os estudantes compreenderam o movimento de permanência e mutabilidade da equação, além de apropriar do conceito de equação do 2º grau.

Notamos, neste episódio, que a tarefa baseada no tema esporte com foco interdisciplinar, a intencionalidade e a orientação da professora-pesquisadora contribuíram para o processo e a sistematização da *obutchénie* e desenvolvimento dos estudantes no que tange a apropriação do conceito de equações do 2º grau e viabilizaram a manifestação da emoção e da vontade. Nas palavras de Zankov (1968, p. 85, tradução nossa), “[...] o estudo do conteúdo temático a partir da perspectiva de vínculos interdisciplinares, além de seu sério valor prático, também pode enriquecer a teoria da *obutchénie*, pois é uma das direções do estudo da relação das áreas da educação escolar.”¹²⁴

No próximo item, analisamos como a tarefa contribuiu para o desenvolvimento de confiança impulsionada pela colaboração entre os envolvidos na apreensão do conceito de equação do 2º grau.

5.1.2 Episódio 2: Desenvolvimento de confiança impulsionada pela colaboração entre os envolvidos na apreensão do conceito de equação do 2º grau

No Episódio 2, *desenvolvimento de confiança impulsionada pela colaboração entre os envolvidos na apreensão do conceito de equação do 2º grau*, nos propusemos a analisar se as ações e reflexões dos estudantes diante às etapas 1, 2, 4, 6 e 7 apresentaram evidências da apropriação do conceito de equação do 2º grau nos momentos vividos e de diálogos realizados entre os pares e entre professora-pesquisadora e estudante. Para isso, foram selecionadas três cenas com o intuito de analisar como o pensamento se modifica qualitativamente no desenrolar do trabalho em grupo. As três cenas são: **Cena 2.1:** Diferentes formas de orientar o processo de *obutchénie* dos colegas à luz das interlocuções entre os integrantes dos grupos; **Cena 2.2:** Compreender as soluções para justificar e despertar nos colegas um novo olhar; e, **Cena 2.3:**

¹²⁴ “Рассмотрение содержания учебных дисциплин под углом зрения межпредметных связей, помимо серьезного практического значения, может обогатить и теорию обучения, поскольку здесь нащупывается одно из направлений исследования соотношения частей школьного образования.” (ЗАНКОВ, 1968, p. 85).

Interloquções que revelam momentos em que o trabalho em grupo foram fundamentais para o processo de *obutchénie* e desenvolvimento dos estudantes.

5.1.2.1 Cena 2.1: Diferentes formas de orientar o processo de *obutchénie* dos colegas à luz das interloquções entre os integrantes dos grupos

Na cena 2.1, *diferentes formas de orientar o processo de obutchénie dos colegas à luz das interloquções entre os integrantes dos grupos*, verificamos que os estudantes procederam de diferentes maneiras para orientar os colegas nas dúvidas por eles apresentadas. Na etapa 1, o trabalho em grupo possibilitou que a estudante Sara compreendesse o conceito de campo de variação, por meio, das explicações e exemplos expressados pelos colegas do grupo. Na etapa 2, a estudante July auxiliou o colega Lauro a encontrar um caminho para solução do problema e, na etapa 4, a estudante Dulce indaga a colega Paula de forma que essa consiga relacionar os termos da equação do 2º grau com área de retângulo.

Explicado de forma sucinta, o que temos na cena 2.1, passamos a apresentar os diálogos que nos possibilitaram realizar essas afirmações em relação a cada etapa tarefa.

Na etapa 1, intitulada *trajetória da bola*, além de determinar o tempo que a bola gasta para percorrer o comprimento de um campo de futebol era preciso ficar atento ao campo de variação das variáveis. No entanto, nem todos os estudantes compreendiam o conceito de campo de variação e, às vezes, o diálogo grupo-classe e professora-pesquisadora não era suficiente para que todos entendessem tal conceito, sendo necessário uma interação entre os colegas nos pequenos grupos. Essa afirmação pode ser evidenciada no diálogo que foi extraído do diálogo do grupo E composto por Aline, Gustavo, Enzo e Sara.

Sara: Aline não entendi nada que o grupo da Maria falou.

Aline: O grupo da Maria decidiu usar o intervalo de 90 a 120 para o comprimento do campo, pois consideram as medidas da CBF.

Sara: Quer dizer que o comprimento pode ser 90 ou 120. É isso?

Aline: Não Sara, pode ser qualquer número entre 90 e 120, neste caso inclusive o 90 e 120. Isto é, 90 é o comprimento mínimo e 120 é o máximo.

Enzo: Sara, quando determinamos esses intervalos, consideramos todos os números que estão entre eles, por exemplo: 90 ou 91 ou 92 ou 101,5. Entendeu?

Sara: Entendi. Podemos mudar esses números 90 e 120?

Aline: Podemos Sara, só precisamos ter o cuidado de considerar o intervalo que satisfaça as condições do problema.

Sara: Como assim?

Aline: Neste caso não podemos considerar números negativos, pois uma variável é o comprimento e a outra é o tempo.

Enzo: Por isso Sara que nosso grupo sugeriu usar um intervalo diferente. Vamos usar como comprimento do nosso campinho, como sendo o mínimo.

Sara: Ah, entendi.

Aline: Sara como ficará nosso intervalo?

Sara: Acho que será 10 menor igual a c menor igual a 120.

Aline: Isso, então o comprimento do campo de futebol será 10 ou 120.

Sara: Uai, entendi que pode ser qualquer número entre 10 e 120. Exemplo: 10; 11,3; 50 até 120.

(Grupo E – etapa 1)

No diálogo, notamos que a estudante Sara não compreendia o conceito de campo de variação, “o qual nos auxilia a delimitar valores de mínimo e de máximo, presentes nos movimentos da vida” (LANNER DE MOURA; SOUSA, 2008, p. 70), pois a mesma não considerava todos os números definidos no intervalo de 90 a 120, como pode ser observado na frase “Quer dizer que o comprimento pode ser 90 ou 120. É isso?”. Para explicar para a colega Sara o que é o campo de variação Aline usou o intervalo determinado pelo grupo da Maria afirmando que “[...] pode ser qualquer número entre 90 e 120, neste caso inclusive o 90 e 120. Isto é, 90 é o comprimento mínimo e 120 é o máximo.” E, para exemplificar, Enzo completa que “quando determinamos esses intervalos, consideramos todos os números que está entre eles, por exemplo: 90 ou 91 ou 92 ou 101,5.” Observemos que a estudante Sara, no grupo, dialoga sobre suas dúvidas e os estudantes Aline e Enzo exercem com responsabilidade e confiança o papel de explicar o conceito de campo de variação, exemplificando-o para que a colega compreendesse. Diante desse movimento vivenciado por estes estudantes, podemos inferir que o ambiente de sala de aula foi dinâmico e propiciou o compartilhamento de conhecimentos entre eles. Essas características são reconhecidas pelo sistema zankoviano, o qual enfatiza que o professor tem o papel de fomentar a colaboração e dividir a responsabilidade e os bons resultados recorrente da cooperação entre professor-estudante e estudante-estudante. (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997).

Na busca de respostas para explicar à Sara, os estudantes Aline e Enzo organizaram seus pensamentos objetivando unificar os conceitos estudados e estabelecer uma relação entre a solução do problema e o campo de variação, expondo em palavras o que compreendiam. Nas palavras de Vigotsky (2007a):

O pensamento não se exprime na palavra, mas nela se realiza. Por esta razão, pode-se falar do processo de formação (a unidade do ser e do não-ser) do pensamento na palavra. Cada pensamento tenta unir algo com algo, para estabelecer uma relação entre isto e aquilo. Cada pensamento tem movimento, curso, desdobramento, em uma palavra, pensamento cumpre alguma função, algum trabalho, resolve alguma tarefa. Este curso de pensamento ocorre como

um movimento interior através de toda uma série de planos, como a passagem do pensamento para a palavra e da palavra para o pensamento.¹²⁵ (VIGOTSKI, 2007a, p. 438)

Observamos, ainda neste diálogo, que Sara compreendeu o que é campo de variação, visto que Aline sentiu a necessidade dessa confirmação propondo que esta determinasse o intervalo que o grupo escolheu e, não satisfeita, após a resposta correta da Sara, afirma “Isso, então o comprimento do campo de futebol será 10 ou 120.” Essa afirmação, coloca a estudante Sara em movimento que não concorda e responde ter entendido “que pode ser qualquer número entre 10 e 120. Exemplo: 10; 11,3; 50 até 120.” Neste processo, temos condições de afirmar que Sara compreendeu que o campo de variação determina o valor mínimo e o máximo que a variável pode assumir.

Analisando as respostas de Sara, a maneira como a Aline explicou e a utilização de exemplos apresentados por Enzo, percebemos o desenvolvimento dos pensamentos dos três estudantes, visto que “o movimento do próprio processo de pensamento da ideia à palavra é um desenvolvimento.”¹²⁶ (VIGOTSKI, 2007a, p. 438).

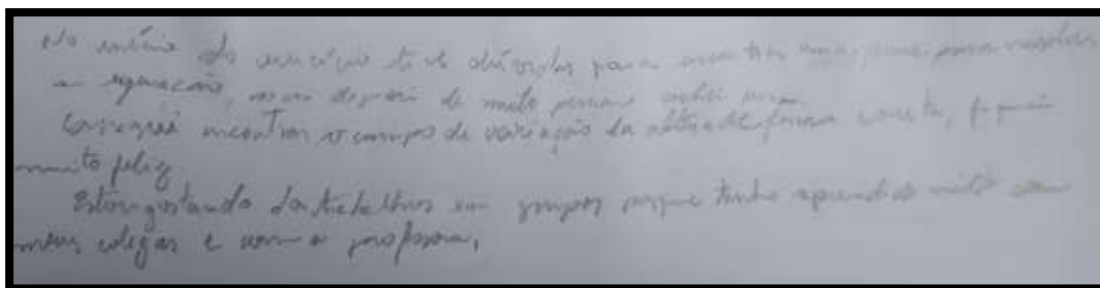
Assim, podemos inferir que as ações presentes nesse diálogo mostram que Aline e Enzo contribuíram para o processo de *obutchénie* e desenvolvimento de Sara e essa ponderação está explícita, na etapa 2, nomeada *índice de massa corporal*, quando ela registra que conseguiu “encontrar o campo de variação da altura de forma correta” e ficou “muito feliz”. Neste registro também percebemos a atitude consciente da estudante em relação à *obutchénie* e desenvolvimento.

Naquele momento, após a conclusão da etapa 2, quando os estudantes foram convidados a registrar suas dúvidas, impressões sobre cada etapa e o que compreenderam, de forma livre e de acordo com os seus desejos, Sara fez o seguinte registro:

¹²⁵ “[...] El pensamiento no se refleja en la palabra, sino que se realiza en esta. Por esta razón, podría hablarse del proceso de formación (la unidad del ser y del no ser) del pensamiento en la palabra. Todo pensamiento intenta unir algo con algo, establecer una relación entre esto y aquello. Todo pensamiento tiene movimiento, curso, despliegue, en una palabra, el pensamiento cumple alguna función, algún trabajo, resuelve alguna tarea. Este curso del pensamiento se da como un movimiento interno a través de toda una serie de planos, como el paso del pensamiento a la palabra y de la palabra al pensamiento. [...]” (VIGOTSKI, 2007a, p. 438).

¹²⁶ “[...] el movimiento del propio proceso del pensar, del pensamiento a la palabra, es desarrollo. [...]” (VIGOTSKI, 2007a, p. 438).

Figura 13 - Registro da estudante Sara



Fonte: Arquivo da pesquisadora¹²⁷.

No registro, há evidências de que Sara foi desafiada a buscar um caminho para resposta e esse não se tornou obstáculo para ela desistir de resolver o problema, pois escreve que “depois de muito pensar achei uma”. Percebemos que o grau de dificuldade proposto nesta etapa da tarefa foi superado pela estudante que esteve diante de situações novas e complexas que as desafiaram na busca de uma solução, oportunizando a *obutchénie* e desenvolvimento. (ZANKOV, 1984).

O diálogo entre Aline, Enzo e Sara e o registro desta ressaltam a relevância do trabalho em grupo e que a forma de comunicação presente entre os estudantes é fundamental no processo de *obutchénie* e desenvolvimento. (ZANKOV, 1984).

Na etapa 2, nomeada *índice de massa corporal*, uma das ações desenvolvidas consistiu em o estudante encontrar a altura do colega conhecendo a sua massa e o seu IMC. Essa etapa da tarefa contribuiu para o surgimento de dúvidas e eclosão de confianças fomentadas pela cooperação entre os pares, como pode ser observado no diálogo entre Lauro e July:

Lauro: July, depois que substitui a sua massa e o seu IMC não consigo resolver.

July: Lauro temos que descobrir o valor da altura.

Lauro: Neste caso está mais difícil, porque a incógnita está no denominador.

July: Vamos multiplicar cruzado, assim h^2 fica no primeiro membro.

Lauro: Verdade. Por isso, que gosto de fazer dupla com você.

Risadas

Lauro: Agora, é só dividir 65 por 26 e tirar a raiz quadrada dos dois lados, né?

July: Dê uma olhada nos resultados encontrados.

Lauro: Encontrei aproximadamente 1,58 e -1,58.

July: Posso ter altura igual a -1,58m?

Lauro: Não. Então neste caso minha resposta será apenas 1,58m.

July: Isso.

¹²⁷ “No início do exercício, tive dúvidas para encontrar uma forma para resolver a equação, mas depois de muito pensar achei uma. Consegui encontrar o campo de variação da altura de forma correta, fiquei muito feliz. Estou gostando dos trabalhos em grupos porque tenho aprendido muito com meus colegas e com a professora.” (Registro da estudante Sara, etapa 2).

Lauro: Preciso ficar atento ao significado das variáveis.

July: Por isso, é bom definir o intervalo que as variáveis valem.

Lauro: Verdade.

O estudante Lauro, na etapa 2, reconheceu que tem uma equação para ser resolvida, mas como a incógnita está no denominador o estudante não sabe como continuar e pede ajuda à July. Ele demonstrou insegurança para resolver a situação e confirmou com a colega se sua estratégia estava pertinente quando pergunta se “[...] é só dividir 65 por 26 e tirar a raiz quadrada dos dois lados”. Acreditamos que o desafio encontrado pelo estudante Lauro, após substituir as variáveis pelos respectivos valores, fez com que ficasse inseguro para continuar a resolução, pois na fala dele há evidência de que sabia como resolver a equação do 2º grau incompleta, para determinar os valores da incógnita h .

O estudante Lauro entendeu a explicação da colega July quando ela orienta “multiplicar cruzado, assim h^2 fica no primeiro membro”. Além disso, há evidência que ele confiou na resposta da colega, ao afirmar “Por isso, que gosto de fazer dupla com você”. Diante do contexto em que Lauro teve acesso a uma diferente situação, acreditamos que a situação-problema da etapa 2 contribuiu para *obutchénie* e desenvolvimento dele, pois o “enriquecimento incessante do intelecto do escolar com um conteúdo diverso cria condições favoráveis para uma compreensão mais e mais profunda dos dados obtidos.”¹²⁸ (ZANKOV, 1984, p. 32, tradução nossa).

No diálogo, percebemos que o conceito aprendido anteriormente foi incorporado com novos, permitindo que a estudante July observasse o que era familiar sob uma nova concepção conforme sondava o desconhecido. Logo, o “conhecimento prévio é integrado ao novo e se torna sincronizado com o conhecimento em expansão do estudante.” (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 20, tradução nossa)¹²⁹.

O trabalho em dupla contribuiu para que os estudantes se comunicassem e proporcionou um ambiente amigável favorecendo o desenvolvimento da confiança e amizade entre os pares, criando uma base para a formação do coletivo, visto que “o surgimento das relações recíprocas, baseadas na ajuda e no enriquecimento em experiências mútuas, cria a base para formação do coletivismo.”¹³⁰ (ZANKOV, 1984, p. 76, tradução nossa).

¹²⁸ “[...] enriquecimiento incesante del intelecto del escolar con un contenido diverso crea condiciones favorables para una comprensión más y más honda de los datos obtenidos...” (ZANKOV, 1984, p. 32).

¹²⁹ “Previous knowledge is integrated with what comes next and becomes synchronous with the learners’ expanding pool of knowledge.” (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 20).

¹³⁰ “El surgimiento de las relaciones recíprocas, basadas en la ayuda y el enriquecimiento en experiencia mutuos, crea la base para la formación del colectivismo.” (ZANKOV, 1984, p. 76).

Quando July sugere a Lauro que analise sua resposta, este não compreende a orientação e responde que “encontrou aproximadamente 1,58 e $-1,58$ ”. Para não impor sua resposta e gerar no estudante a necessidade de repensar seu movimento, July questiona se pode “ter altura igual a $-1,58\text{m}$ ”. Com a pergunta da colega, Lauro afirma que “Não. Então neste caso minha resposta será apenas 1,58m” e que é “Preciso ficar atento ao significado das variáveis”. Analisando esse trecho do diálogo, notamos que Lauro compreendia a importância de determinar o campo de variação e que faltou atenção quando considerou a altura negativa.

Percebemos que July, ao cooperar com Lauro, expressa de forma adequada seus pensamentos e usa o conceito de campo de variação de maneira segura na resolução de problema prático, apresentando singularidades que estão presentes em estudantes conscientes de sua *obutchénie* e desenvolvimento. (ZANKOV, 1968). Essa afirmação está anunciada nas seguintes falas: I) “Posso ter altura igual a $-1,58\text{m}$?” e II) “Por isso, é bom definir o intervalo que as variáveis valem”.

Pelo diálogo da dupla, inferimos que a confiança e a cooperação entre os estudantes foram fundamentais para a resolução da situação-problema e superação da insegurança e das dúvidas do estudante Lauro.

Na etapa 4, nomeada *compreendendo como os árabes resolviam equação do 2º grau*, os estudantes em duplas, usando o método de completar quadrado proposto pelos árabes, foram convidados a determinar as dimensões da bandeira que seria construída para o time de futebol da escola. Nosso objetivo era que os estudantes compreendessem como os árabes resolviam equação do 2º grau, buscando entender sobre as desvantagens em utilizar o método árabe e, por meio das intervenções sistematizasse o conceito de equação do 2º grau.

A etapa 4 permitiu que a estudante Dulce explicasse a relação entre os termos da equação do 2º grau com a área de retângulos, que a colega Paula não tinha compreendido, o que pode ser observado no diálogo realizado pela dupla:

Paula: Por que é igual a 49?

Dulce: Nós acrescentamos quatro quadrados de área igual um, para ficar com o quadrado de lado $f + 2$.

Paula: Sim, mas a soma das áreas é igual a 45. Dulce, me ajuda a entender.

Dulce: Olha o nosso desenho. Qual soma é igual a 45?

Paula: A área desse quadrado grande mais a área dos quatro retângulos. (Observação: Superfície colorida da Figura 14)

Dulce: Isso. Agora observa que acrescentamos quatro quadrados de mesma área. Qual a área de cada quadrado?

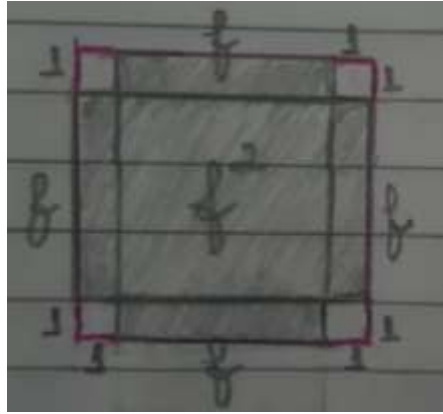
Paula: A área de cada quadrado é um.

Dulce: Qual foi a área total que acrescentamos para ficar com o quadrado maior de lado $f + 2$?

Paula: Entendi! Quatro. A área desse quadrado que formamos é 49, porque temos que somar 45 mais quatro. (Observação: Superfície colorida mais os quatro quadrados de unidade 1 - Figura 14).

Dulce: Isso.

Figura 14 - Registro da dupla – Paula e Luana



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Nechaeva e Roschina (НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006, p. 58, tradução nossa) alegam que “o estudante precisa enfrentar uma dificuldade cognitiva, que provoca emoções que estimulam a atividade de busca do estudante, da turma.”¹³¹ Essas características estão anunciadas nas falas de Paula: “Por que é igual a 49?” e “Sim, mas a soma das áreas é igual a 45. Dulce, me ajuda a entender”. Nesse trecho da conversa, também percebemos que Paula confia em Dulce, pois não teve receio de apresentar suas dúvidas, demonstrou interesse em compreender a resolução e pediu que amiga a ajudasse a entender.

Ainda, no diálogo, percebemos a importância da representação geométrica para a resolução da equação do 2º grau, visto que a primeira atitude de Dulce, após a amiga não compreender porque a área passaria a ser igual a 49, foi de pedir para a colega Paula observar o desenho. Neste movimento, constatamos a importância de considerar a linguagem geométrica, no processo de *obutchénie* da álgebra como é ressaltado por Lanner de Moura e Sousa (2008), assim como Viète que considerava substancial “conjuguar a efetividade dos métodos algébricos com o rigor das construções geométricas antigas”, que já lhe eram conhecidas. (RÍBNIKOV, 1987, p. 133).

Destarte, verificamos que o movimento vivenciado pelas diversas civilizações na produção dos conceitos algébricos contribuiu para o pensamento flexível e a compreensão para a resolução de equação do 2º grau dos estudantes.

¹³¹ “Но сначала школьник должен столкнуться с познавательной трудностью, которая и вызывает эмоции, стимулирующие поисковую деятельность ученика, класса.” (НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006, p. 58).

A maneira como Dulce conduziu o caminho da dúvida até chegar à compreensão do método de completar o quadrado contribuiu para que Paula estivesse ativa em seu processo *obutchénie* e desenvolvimento chegando às suas próprias conclusões, como é anunciado no sistema de Zankov. Essa conjuntura pode ser confirmada na fala de Paula quando alega que “A área desse quadrado que formamos é 49, porque temos que somar 45 mais quatro.”

Durante o desenrolar desse processo percebemos que a estudante Dulce ao coadjuvar no processo de *obutchénie* e desenvolvimento da colega Paula, lança mão de perguntas para direcionar a explicação, oportunizando momentos de reflexões que contribuíram para compreensão da resolução da situação-problema proposta.

5.1.2.2 Cena 2.2: Compreender as soluções para justificar e despertar nos colegas um novo olhar

Na etapa 6, *direto do túnel do tempo*, o intuito era que os estudantes compreendessem o método utilizados por Brahmagupta para resolver equação do 2º grau, utilizando as linguagens retórica, sincopada e simbólica para, em seguida, determinar o modo geral que nos permite estabelecer as raízes da equação do 2º grau, quando essas existem.

Nesta etapa, inicialmente, os estudantes em grupo conversaram sobre as respostas encontradas por cada componente e, devido às divergências nas soluções encontradas, sentiram a necessidade de resolver o problema juntos com objetivo de chegar a uma conclusão, como podemos acompanhar no diálogo realizado entre Gustavo, Sara e Luana.

Sara: A minha generalização ficou diferente da sua Luana. E a sua Gustavo?

Gustavo: A minha ficou igual a sua. Estou conferindo para ver se tem algum erro.

Silêncio

Gustavo: Se tem algum erro não consegui achar.

Luana: Conferi a minha resposta também não achei nada errado. Vamos resolver juntos, assim chegamos uma conclusão, o que acham?

Sara: Concordo.

Gustavo: Eu também.

(Trio, etapa 6)

Um dos princípios do sistema zankoviano ressalta a importância do desenvolvimento da consciência dos estudantes em relação ao processo de *obutchénie*, movimento esse vivenciado por Sara, Gustavo e Luana, que sentiram a necessidade de revisitar as respostas com intuito de

encontrar os possíveis erros e após as conferências demonstraram confiança um no outro de resolverem novamente a situação-problema para verificar o que poderia estar divergente.

O relacionamento amigável, de confiança e cuidado com o outro permitiu que os três estudantes se sentissem confortáveis conquistando “autorrespeito e confiança necessários para trazer ideias, resolver problemas e apresentar explicações.” (GUSEVA, 2019, p. 225). Essas peculiaridades estão presentes no momento em que Sara, Luana e Gustavo se indagam, posicionam, respeitam e analisam as ideias propostas pelo colega, conforme revela o diálogo:

Luana: Gosto de chamar os coeficientes de a , b e c e a variável pensei de chamar de t , de túnel do tempo. O que vocês acham?

Sara e Gustavo: Pode ser.

Luana: A equação geral vai ficar $at^2 + bt + c = 0$.

Gustavo: Olhando a equação resolvida por Bra, vou chamar assim esse nome é difícil de falar. [Gustavo se referia a Brahmagupta].

Risadas

Gustavo: Neste caso $a = 1$ e $c = -9$.

Luana: Por que você considerou o $c = -9$.

Gustavo: Ele é o termo independente da equação $t^2 - 10t = -9$.

Luana: Entendi, mas eu considerei $c = 9$, porque usei a equação escrita na forma reduzida, $t^2 - 10t + 9 = 0$.

Sara: Mas, a equação que você ficou, quando igualou a zero, tem as mesmas raízes que a $t^2 - 10t = -9$.

Luana: Sim somei mais nove nos dois membros da equação $t^2 - 10t = -9$.

Sara: Então, vamos verificar se para $c = -9$, na equação generalização encontrada pela Luana também chega em $t = 9$.

Silêncio

Luana: Deu um número irracional.

Gustavo: E se considerar $c = 9$ na equação que eu e Sara chegamos também temos um número irracional, que não é raiz da equação. Gente, difícil que não consigo ver erro em nenhuma das soluções.

Sara: E quando faço $c = -9$, na resposta que eu e Gustavo encontramos dá certinho.

Luana: Quando faço $c = 9$, na resposta que encontrei também dá certo, verifiquei quando terminei de generalizar.

Sara: Vamos fazer juntos tudo novamente considerando $at^2 + bt + c = 0$. [...].

Gustavo: Chegamos na mesma resposta que a Luana.

Sara: Agora vamos resolver partindo de $at^2 + bt = -c$, talvez com a ajuda da Luana achamos onde erramos Gustavo.

[...]

Sara: Não fizemos nada errado também.

(Trio, etapa 6)

Após as conferências das respostas encontradas pelos integrantes do grupo, estes perceberam que não havia erros nas soluções, sendo necessário colocar condições para o uso de uma das duas respostas encontradas para determinação de uma raiz. A escolha da resposta

está relacionada diretamente com a forma como a equação reduzida estava escrita. As evidências aqui detectadas são observadas na seguinte conversa:

Luana: Estou aqui pensando, acredito que as duas respostas estão certas, porque estamos determinando uma generalização.

Gustavo: Mas tinha que valer para qualquer equação, e não está acontecendo quando consideramos que o c está no 2º membro na resposta que você chegou Luana.

Luana: Verdade. Acho que no caso da equação $at^2 + bt + c = 0$ teremos que determinar as raízes em $t = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Sara: Isso, já a equação escrita na forma $at^2 + bt = c$, a raiz pode ser encontrada por meio de $t = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$.

(Observação: Na equação determinada pela Luana, $t = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, no radicando temos o monômio $-4ac$ e na equação determinada pela Sara, $t = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$ no radicando temos o monômio $+4ac$).

(Trio, etapa 6)

Os estudantes Gustavo, Luana e Sara, após um longo caminho na busca por erros nas soluções, verificaram que ambas as respostas estavam corretas e que se tratando de uma generalização concluíram que seria suficiente escolher apenas uma e, para isso, seria necessário escrever a equação do 2º grau na forma reduzida. Além disso, os estudantes estavam conscientes que qualquer uma das equações permitia encontrar duas raízes distintas como podemos acompanhar no diálogo:

Gustavo: Meninas, as equações $t^2 - 10t + 9 = 0$ e $t^2 - 10t = -9$ são exemplos de equações do 2º grau e tem a mesma raiz, pois as equações são iguais. Então, podemos escrever apenas uma condição. Neste caso, sugiro que seja a equação na forma reduzida. (Observação; A forma reduzida da equação do 2º grau foi estudada na etapa 4).

Sara: Faz sentido Gustavo. Podemos contar para a turma o que discutimos e porque decidimos dessa forma.

Luana: É isso. Em Ciências usamos a fórmula $v = v_0 + at$ independentemente de estar acelerando ou desacelerando.

Gustavo: Verdade, Luana.

Luana: Podemos explicar que para encontrar a raiz da equação do 2º grau quando essa existe, teremos que escrever a equação na forma reduzida, para em seguida escrever os valores dos coeficientes a , b e c , para depois substituir na fórmula.

Sara: Precisamos reforçar que estamos encontrando uma das raízes.

Luana: Achei que resolver em grupo seria mais rápido. Aprendi muito neste exercício. Agora vamos determinar o campo de variação.

Sara: Como não temos um contexto específico, o t pode ser qualquer número real.

Gustavo: Sim, e os coeficientes b e c também. Já o coeficiente a pode ser qualquer número real diferente de zero.

(Trio, etapa 6)

Na busca por determinar a solução que o grupo iria apresentar à classe, os estudantes Sara, Luana e Gustavo lançaram mão do conceito de equações do 2º grau aprendido e este foi “reintroduzido com novos conteúdos, permitindo que os alunos observem o familiar sob uma nova luz, mesmo quando exploram um terreno não familiar.” (GUSEVA, 2019, p. 222). Eles definiram e buscaram uma justificativa para a resposta que apresentaram para toda a classe e para professora-pesquisadora, mesmo considerando que as duas respostas do grupo estavam corretas.

A solução apresentada pelo trio instigou os outros estudantes, que não se depararam com diferentes soluções para o cálculo das raízes, a buscar uma justificativa para a resposta do grupo de Sara, Gustavo e Luana. Com isso, todos os estudantes com o auxílio da professora-pesquisadora compreenderam sobre importância de expressar a equação do 2º grau na forma reduzida para que se possa utilizar a fórmula resolutive $t = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, como podemos certificar nas falas abaixo:

Luana: Como o Gustavo e a Sara falaram, devido a nossa dúvida decidimos escolher uma solução, pois acreditamos que se tratando de uma fórmula achamos que o melhor seria ter apenas uma, para calcular as raízes da equação e optamos pela fórmula $t = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, para isso a equação do 2º grau precisa estar escrita na forma reduzida, para em seguida definir os valores dos coeficientes a , b e c , para depois substituir na fórmula.

Dulce: Nosso grupo considerou a equação $at^2 + bt = c$, assim pode ser encontrada por meio de $t = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$. Achei interessante a forma que vocês apresentaram, pois não tinha pensado em considerar a equação do 2º grau escrita na forma reduzida.

Professora-pesquisadora: Analisando a resposta apresentada pelo grupo da Luana, Sara e Gustavo vocês concordam com a resposta?

Enzo: Sim.

Duda: Concordo, porque acredito que a equação do 2º grau seja mais utilizada na forma reduzida. Assim, não precisamos escrever diferentes fórmulas considerando cada modelo de equação.

Professora-pesquisadora: Isso mesmo Duda. Pessoal, quando definimos uma fórmula resolutive para determinar as raízes, temos que determinar de que forma a equação do 2º grau precisa estar escrita, visto que podemos escrever equações do 2º grau de diferentes maneiras que são equivalentes. Vocês compreenderam?

[...]

Professora-pesquisadora: Para que não haja uma má interpretação ficou convencionalizado que a equação do 2º grau precisa estar escrita na forma reduzida. Alguma dúvida?

Dulce: Que legal! Bom que nossas respostas também estão certas, só precisamos adequar devido a convenção.

A etapa 6, *direto do túnel do tempo*, direcionou para a compreensão da importância da convenção da fórmula resolvente e da escrita da equação do 2º grau na forma reduzida de maneira significativa, ao contrário do que muitas das vezes é apresentado no ensino deste conceito.

Após definida a fórmula resolvente, os estudantes foram provocados a refletir quando seria possível afirmar que a equação do 2º grau não tem raiz considerando o conjunto dos números reais. De acordo com as falas notamos que os estudantes articularam os conhecimentos relacionados a radiciação com o processo de resolução de equação do 2º grau e conseguiram concluir quando esta não terá raízes reais, conforme o diálogo seguinte:

Professora-pesquisadora: Analisando a equação do 2º grau e a fórmula resolvente $t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, como podemos afirmar que equação não tem raiz considerando o conjunto dos números reais?

Paula: Uai, não temos raízes quando o número que fica dentro da raiz quadrada for negativo.

Sara: Isso, o radicando precisa ser sempre números positivos.

Professora-pesquisadora: Por que o radicando deve ser sempre número positivo?

Sara: Porque na fórmula temos a raiz quadrada.

Enzo: E só calculamos a raiz de número negativo quando o índice é ímpar.

Professora-pesquisadora: Isso mesmo! Quando vocês aprenderem o conjunto dos números complexos, irão compreender que é possível calcular a raiz quadrada de números negativos nesse conjunto. [...]

Após entender quando podemos confirmar que a equação do 2º grau não tem raízes reais, os estudantes foram desafiados a pensarem na fórmula resolvente que permitisse determinar as duas raízes da equação do 2º grau quando essas existem. Essa afirmação foi constatada nas seguintes falas:

Professora-pesquisadora: Durante a apresentação das soluções, vocês afirmaram que nas fórmulas encontradas pelos grupos seria possível determinar apenas uma raiz da equação do 2º grau. Agora, quero que vocês voltem e analisem o caminho percorrido para chegar à equação $t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e verifiquem se é possível determinar alguma condição para poder usar uma única fórmula para encontrar as duas raízes reais de uma equação do 2º grau.

Silêncio

Professora-pesquisadora: Analisem a quarta linha do quadro de vocês. (Figura 15).

Lauro: O matemático neste caso considerou apenas uma resposta para a raiz quadrada de 16.

Professora-pesquisadora: Fale mais um pouco Lauro.

Lauro: Ixa. Sabemos que raiz quadrada de 16 é 4 e -4. Ele considerou apenas 4.

Gustavo: Podemos colocar mais ou menos antes de $\sqrt{b^2 - 4ac}$?

Professora-pesquisadora: Por que Gustavo?

Gustavo: Se colocarmos o mais ou menos antes de $\sqrt{b^2 - 4ac}$, vamos encontrar os dois possíveis resultados para essa raiz.

Lauro: Verdade e assim poderemos encontrar as duas raízes.

Professora-pesquisadora: Os valores de $\sqrt{b^2 - 4ac}$ serão as raízes da equação do 2º grau?

Enzo: Concordo com os meninos que podemos calcular os dois valores possíveis para $\sqrt{b^2 - 4ac}$, porém esses não serão as raízes da equação, pois teremos que calcular $t = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e também $t = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Professora-pesquisadora: Turma o que vocês acham da conclusão do Enzo.

Dulce: Faz sentido.

Luana: Vou verificar se dessa forma achamos o valor das duas raízes da equação $t^2 - 10t + 9 = 0$.

Dulce: Luana lembra da professora falar que não podemos afirmar que vale para todos quando analisamos um exemplo.

Luana: O que você sugere Dulce.

Dulce: Tenho que pensar um pouco.

Professora-pesquisadora: Quando atribuímos diferentes valores para os coeficientes a , b e c , estamos construindo equações do 2º grau e, para além disso, estamos as escrevendo conforme foi formalizado esse conceito por meio da álgebra simbólica desenvolvida conforme estudamos. Com isso, temos exemplos específicos de equação do 2º grau.

Enzo: Vamos substituir $t = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ para a primeira raiz e $t = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ para a segunda raiz na equação $at^2 + bt + c = 0$, se chegarmos a uma igualdade nos dois casos elas serão as raízes da equação.

Professora-pesquisadora: Isso mesmo, então para determinar raízes das equações do 2º grau podemos usar a fórmula resolutive $t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Figura 15 - Quadro da etapa 6 - Direto do túnel do tempo

Solução de Brahmagupta	Notação atual	Generalização da resolução para qualquer equação do 2º grau
Aqui número puro (9) multiplicado por (1) o [coeficiente do] quadrado [é] (9);		
Somando ao quadrado da metade do [coeficiente] termo médio, 25, resulta 16;		
cuja raiz quadrada, 4, menos metade do [coeficiente da] incógnita (5), é 9;		
e dividido pelo [coeficiente do] quadrado (1) fornece o valor da incógnita 9.		

Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Pelo diálogo acima, notamos que as indagações da professora-pesquisadora direcionaram os estudantes a completar as suas respostas e concluírem uma forma para determinar as raízes da equação do 2º grau. Neste movimento, o conhecimento que possuíam foi incorporado ao “que vem a seguir e torna-se sincrônico com o conjunto de conhecimento em expansão dos alunos” (GUSEVA, 2019, p. 222), contribuindo para o desenvolvimento e apropriação de uma das formas para determinar os valores da incógnita.

No diálogo, percebemos que os colegas e a professora-pesquisadora atuaram na ZDP dos estudantes, que deixaram o nível real, que é definido pelas atividades que eles conseguiam realizar de forma independente e, caminharam com a colaboração do mais experientes para o nível potencial, visto que como conseguiram desenvolver situações-problema que não faziam de forma independente. Com isso, o nível de desenvolvimento potencial alcançado, transformou-se em um novo nível real. “A zona de desenvolvimento possível da criança é moldada pelo fato de que o que a criança sabe fazer hoje em colaboração, ela saberá fazer amanhã por conta própria.”¹³² (VIGOTSKI, 2007a, p. 377, tradução nossa). Logo, no campo conceitual, para o desenvolvimento, “[...] cooperação e *obutchénie* são as condições decisivas...”¹³³ (ZANKOV, 1963, p. 12, tradução nossa).

Na etapa 6, *direto do túnel do tempo*, para a sistematização da *obutchénie* e desenvolvimento de uma maneira para resolver equação do 2º grau, esteve presente “uma constante mudança do objeto de estudo e, ao mesmo tempo, um retorno constante a ele em uma nova etapa e em uma nova base de conhecimento.” (GUSEVA, 2019, p. 222).

Nesta etapa, as dificuldades também estiveram presentes no momento em que os estudantes a resolviam individualmente, mas foram alicerces para que estes buscassem estratégias para vencer os obstáculos, como anunciado no diálogo do trio Luana, Gustavo e Sara:

Luana: Gostei desta tarefa. Tive que reler algumas vezes o que significava as abreviações e pensei bastante para colocar a resolução na notação atual. Amo esses desafios, fico instigada para encontrar um caminho para chegar à resposta.

Gustavo: Eu também estou gostando, me fez pensar foi muito. Demorei um pouco para entender que o é, seria o sinal de igual. Bom que aprendemos como fazer e não esquecemos. E também podemos ver as dificuldades que os matemáticos tiveram.

Luana: *Brahmagupta* era muito inteligente, tinha quase nada de recurso e fez essas descobertas que nos auxiliam muito.

¹³² “[...] conformando su zona de desarrollo próximo, puesto que aquello que el niño sabe hacer hoy en colaboración sabrá hacerlo mañana por su cuenta.” (VIGOTSKI, 2007a, p. 377).

¹³³ “[...] в качестве решающего условия здесь выступает сотрудничество, обучение” (ЗАНКОВ, 1963, p. 12).

Sara: São muitos séculos de estudo para chegar na forma que usamos hoje. Tive que ler várias vezes as duas primeiras linhas do quadro, e ir anotando cada parte, mas depois consegui resolver tranquilamente. Estou aprendendo muito.

(Trio, etapa 6)

Segundo L. V. Zankov (1963, p. 9), o grau de exigência está vinculado ao processo de desenvolvimento do estudante, pois “[...] o crescimento das exigências é possível graças ao fato de que, no decorrer do desenvolvimento, novas oportunidades são criadas para atendê-las [...]”.¹³⁴ Isto é, à medida que o desenvolvimento ocorre é fundamental aumentar os desafios para os estudantes, propiciando novos conflitos para se atingir o novo desenvolvimento, de forma que se tenha um progresso espiral de desenvolvimento. Há evidências que essas peculiaridades ressaltadas por Zankov (1963) foram contempladas na etapa 6, *direto do túnel do tempo*, considerando as falas do trio.

No sistema zankoviano, as emoções expressaram “o estado do sujeito e suas atitudes diante de um determinado objeto.”¹³⁵ (ZANKOV, 1984, p. 63, tradução nossa). Essas singularidades são vivenciadas na etapa 6, *direto do túnel do tempo*, visto que, diante das dificuldades que cada estudante teve nesta etapa, observamos que as emoções foram substanciais na constituição de qualidades que são desenvolvidas espontaneamente e que só podem ser alcançadas pela vontade do estudante. Essas características estão presentes nas falas de Luana, Gustavo e Luana.

Quando Luana ressalta “Amo esses desafios, fico instigada para encontrar um caminho para chegar à resposta”, fica notório que ela se sente desafiada diante das dificuldades e a vontade de aprender a impulsiona a persistir e a buscar respostas.

L. V. Zankov (1984), no terceiro princípio didático, nomeado *ritmo ativo e crescente da obutchénie*, enfatiza que é fundamental o desenvolvimento da *obutchénie* com novos conhecimentos e conteúdo diversificado. Diante disso, na etapa 6, *direto do túnel do tempo*, foi enfatizado o processo de produção e de transformação da forma de resolver equações do 2º grau, levando em consideração os conceitos científicos que o fundamenta. Com um olhar cuidadoso para o tempo e o lugar dos estudantes, tratamos os conceitos científicos com a intenção de que esses fossem assimilados pelos estudantes. Logo, na fala do Gustavo [“Bom que aprendemos como fazer e não esquecemos. Também podemos ver as dificuldades que os

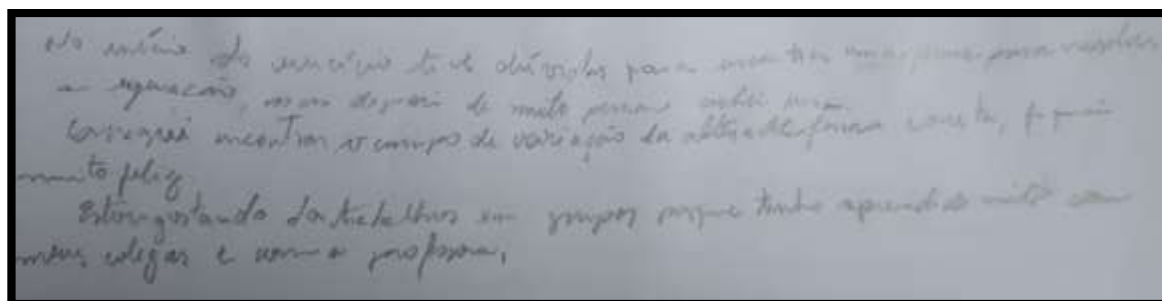
¹³⁴ “[...] рост требований становится реально возможным благодаря тому, что в ходе развития создаются новые возможности для выполнения их ребенком.” (ЗАНКОВ, 1963, p. 9).

¹³⁵ “[...] el estado del sujeto y su actitud ante el objeto.” (ZANKOV, 1984, p. 63).

matemáticos tiveram”], fica explícito que apenas mostrar para os estudantes os fatos prontos e destituído de sentido, não contribui para seu processo de *obutchénie* e desenvolvimento.

Quando Sara expõe “Estou aprendendo muito” e no registro feito por ela após a conclusão da etapa 2, apresentado na cena 2.1 e reprisada neste momento, conseguimos identificar elementos que nos levam a afirmar que alcançamos, em nosso experimento, a compreensão e prática do quinto princípio do sistema zankoviano, *organizar aulas para promover o desenvolvimento intencional e sistemático*, que ressalta a importância do planejamento que busca à *obutchénie* de cada estudante em particular.

Figura 16 - Registro da estudante Sara

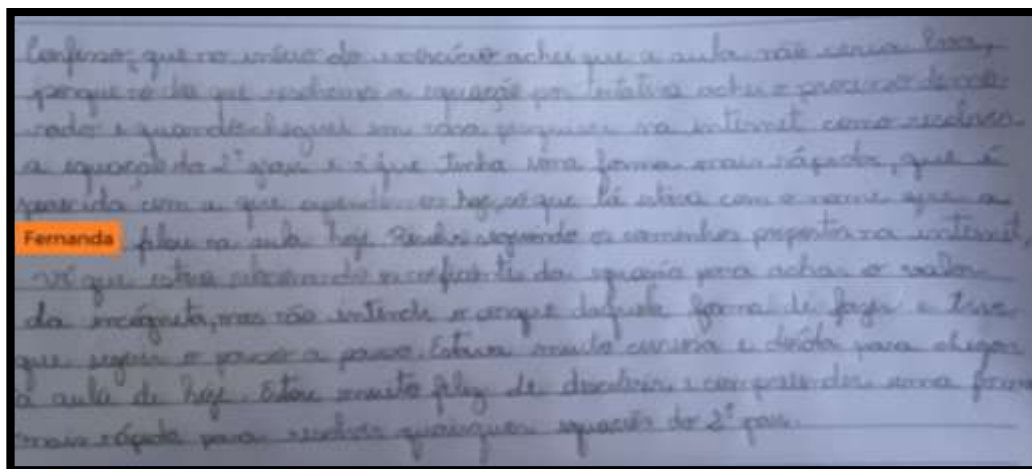


Fonte: Arquivo da pesquisadora¹³⁶.

Acreditamos que a utilização do desenvolvimento histórico, da necessidade e dos processos foram elementares não para a exposição do Método de Brahmagupta, mas por anunciar os elementos fundamentais da produção humana, permitindo que o estudante vivenciasse e compreendesse algumas etapas do desenvolvimento algébrico até a linguagem simbólica. Essa afirmação está anunciada no registro de July, que após a etapa 6, *direto do Túnel do tempo*, relatou seus receios, dúvidas, curiosidades e satisfação por apreender.

¹³⁶ “No início do exercício, tive dúvidas para encontrar uma forma para resolver a equação, mas depois de muito pensar, achei um. Consegui encontrar o campo de variação da altura de forma correta, fiquei muito feliz. Estou gostando dos trabalhos em grupos porque tenho aprendido muito com meus colegas e com a professora.” (Registro da estudante Sara, etapa 2).

Figura 17 - Registro da estudante July



Fonte: Arquivo da pesquisadora¹³⁷.

Observamos que a metodologia de *obutchénie* e as instruções da etapa 6 proporcionou aos estudantes uma atividade cognitiva viva e perspicaz, gerando nesses a necessidade de utilizar os seus conhecimentos, corroborando para o desenvolvimento intelectual deles, viabilizando o desenvolvimento de suas habilidades, talentos, independência e iniciativa L. V. Zankov (ZANKOV, 1968).

Consideramos que, mediante a situação vivenciada na etapa 6, os estudantes se apropriaram dos conceitos e do *Método de Brahmagupta*, para encontrar as raízes de equações do 2º grau tendo a oportunidade de “refletir sobre o papel das gerações passadas na criação de saberes que hoje usufruem comodamente.” (MOURA; LANNER DE MOURA, 1998, p. 13). Assim, nesta etapa os estudantes reproduziram o pensamento de um cientista, realizando ações semelhantes às ações mentais desenvolvidas por *Brahmagupta* e que se tornaram produto cultural e historicamente produzido.

No próximo item, apresentamos os diálogos e registros analisados com intuito de verificar as contribuições dos trabalhos no processo de *obutchénie* e desenvolvimento, e quais sentimentos foram impulsionados.

¹³⁷ “Confesso, que no início do exercício achei que a aula não seria boa como as outras, porque no dia que resolvemos a equação por tentativa achei o processo demorado e quando cheguei em casa pesquisei na internet como resolver a equação do 2º grau e vi que tinha uma forma mais rápida, que é parecida com a que aprendemos hoje, só que lá estava com o nome que a Fernanda falou na aula hoje. Resolvi seguindo os caminhos propostos na internet, vi que estava relacionando os coeficientes da equação para achar o valor da incógnita, mas não entendi porque daquela forma de fazer e tive que seguir o passo a passo. Estava muito curiosa e dóida para chegar à aula de hoje. Estou muito feliz de descobrir e compreender uma forma mais rápida para resolver quaisquer equações do 2º grau.” (Registro da estudante July, etapa 6).

5.1.2.3 *Cena 2.3: Interlocuções que revelam momentos em que o trabalho em grupo foram fundamentais para o processo de obutchénie e desenvolvimento dos estudantes*

Na etapa 7, *registrando as atividades mentais*, buscamos por meio de algumas indagações compreender as qualidades conceituais, emocionais e volitivas conquistadas pelos estudantes diante dos desafios apresentados, envolvendo o processo de *obutchénie* e desenvolvimento das relações substanciais do conceito de equações do 2º grau, que estão fundamentados nos pressupostos do sistema zankoviano.

A metodologia de *obutchénie*, fundamentada nos princípios do sistema zankoviano contribuiu para apropriação do conceito como vimos no episódio 1, sendo o trabalho em grupo promissor e fundamental para esse desenvolvimento, como anuncia o diálogo a seguir:

Bia: As aulas de funções e de equação do 2º grau foram prazerosas e diferentes de outras disciplinas. Bom que nos exercícios sempre tinha alguma coisa nova e eu tinha que pensar muito. Os trabalhos em grupos foram muito bons, apresentei algumas dúvidas que surgiam quando eu estava resolvendo sozinha e os colegas sempre me ajudavam quando eu ainda não havia compreendido.

Marcos: Eu tenho dificuldade em matemática, porém tenho aprendido muito nessas aulas, pois podemos resolver os exercícios no nosso tempo, dividir nossas dúvidas com os colegas e aprender a cada aula de matemática matéria nova, também usar os conteúdos que já estudamos em matemática e nas outras disciplinas. Foi muito bom apresentar para a classe as nossas conclusões e também parar ouvir as soluções que vocês encontravam em cada desafio que tínhamos que resolver. Às vezes, as respostas dos colegas completavam as minhas, também aprendi muito com as explicações deles e com as suas, professora.

Dulce: Bom que no trabalho em grupo podemos ensinar os colegas o que sabemos e aprendemos mais com isso.

Aline: Gostei de estudar as equações do 2º grau, compreendi melhor o campo de variação com a explicação dos colegas do meu grupo. Aprendi a encontrar as raízes da equação do 2º grau de forma tranquila, porém só preciso ficar atenta de escrevê-la na forma reduzida já que o cálculo das raízes depende dos coeficientes a , b e c . É muito bom ter mais de uma forma para encontrar os valores da incógnita na equação do 2º grau.

(Grupo-classe, etapa 7)

Pelas interlocuções, notamos que trabalho em grupo contribuiu para que os estudantes pudessem compartilhar suas dúvidas com os colegas que os auxiliaram no processo de *obutchénie* e desenvolvimento, como ressaltam Bia e Aline:

Bia: Os trabalhos em grupos foram muito bons, apresentei algumas dúvidas que surgiam quando eu estava resolvendo sozinha e os colegas sempre me ajudavam quando eu ainda não havia compreendido.

Aline: Gostei de estudar as equações do 2º grau, compreendi melhor o campo de variação com a explicação dos colegas do meu grupo.

(Grupo-classe, etapa 7)

No trabalho em grupo, uma vez que o estudante se apropria do conhecimento ele poderá contribuir com o coletivo para que os demais possam concluir seu processo de apropriação de tal conhecimento por meio da análise de ideias e socialização das dúvidas e dos resultados. Nas palavras de Vigotski (2007a), em colaboração o estudante:

[...] é mais forte e inteligente do que no trabalho independente, eleva-se, em termos do seu nível, para além das dificuldades intelectuais que resolveu, ainda que exista sempre uma distância fixa e regular que determina a divergência entre o trabalho independente e o trabalho assistido. [...] ¹³⁸ (VIGOTSKI, 2007a, p. 335, tradução nossa)

Além disso, Vigotski (2007a, p. 353, tradução nossa) ressalta que “nós auxiliamos cada criança por meio de demonstrações, perguntas-guia e pela introdução de elementos da solução da tarefa”¹³⁹ e para isso podemos propor “[...] que a criança resolva o problema que está além de sua idade mental em cooperação com outra criança mais desenvolvida [...]” ¹⁴⁰ (VYGOTSKY, 1998, p. 202, tradução nossa).

No diálogo apresentado, notamos que o estudante tem consciência de que, quando busca um caminho para sanar as dúvidas do colega ele também está aprendendo, como afirma Dulce [“Bom que no trabalho em grupo podemos ensinar os colegas o que sabemos e aprendemos mais com isso”]. Ressaltamos que para que se tenha esse cenário cabe ao professor o papel de formar grupos de estudantes em níveis diferentes de desenvolvimento, permitindo que um possa colaborar no processo de *obutchénie* do outro.

Em sua fala, a estudante Bia, ao relatar que “As aulas de funções e de equação do 2º grau foram prazerosas e diferentes de outras disciplinas. Bom que nos exercícios sempre tinha alguma coisa nova e eu tinha que pensar muito [...]”, apresenta sinais de satisfação por sua participação no experimento e que a abordagem utilizada aguçou o caráter das emoções positivas, manifestando sinais que a organização utilizada difere positivamente das aulas

¹³⁸ “En colaboración el niño es más fuerte e inteligente que en el trabajo independiente, se eleva, en cuanto a su nivel, más allá de las dificultades intelectuales que ha resuelto, pero siempre existe una distancia fija y regular que determina la divergencia entre el trabajo independiente y el trabajo asistido.” (VIGOTSKI, 2007a, p. 335).

¹³⁹ “[...] si acudimos en su ayuda a través de demostraciones, preguntas sugerentes, enseñándoles cómo empezar su resolución [...]” (VIGOTSKI, 2007a, p. 353).

¹⁴⁰ “[...] that the child solves the problem that is beyond his mental age by cooperating with another, more developed child.” (VYGOTSKY, 1998, p. 202).

expositivas no qual o professor conta tudo para o estudante ao responder suas indagações. (ZANKOV, 1984).

Há evidências de que a metodologia adotada permitiu desenvolver nos estudantes a escuta, a oratória e a confiança no colega, como consta na fala de Marcos quando alega que “Foi muito bom apresentar para a classe as nossas conclusões e também parar ouvir as soluções que vocês encontravam em cada desafio que tínhamos que resolver. Às vezes, as respostas dos colegas completavam as minhas, também aprendi muito com as explicações deles e com as suas, professora.” Esses dizeres enfatizam a importância do meio social para o desenvolvimento psicológico, isto é, o desenvolvimento aparece “a princípio entre sujeitos como uma categoria intersíquica; depois dentro do sujeito como uma categoria intrapsíquica.”¹⁴¹ (VIGOTSKI, 2007a, p. CXVII, tradução nossa). Em outras palavras, a vida social é sistema dinâmico, na qual o indivíduo internaliza os processos interpessoais propiciado pela cultura, de forma ativa, convertendo em um processo intrapessoal. Movimento esse que foi vivenciado pelos estudantes, visto que as aulas proporcionaram as interações sociais, permitindo que conhecimento escolar fosse constantemente (re)construído.

O estudante Marcos também relatou que tinha dificuldade em matemática e que as aulas propostas e vivenciadas contribuíram para *obutchénie* e desenvolvimento, quando diz que tem “dificuldade em matemática, porém tenho aprendido muito nessas aulas, pois podemos resolver os exercícios no nosso tempo, dividir nossas dúvidas com os colegas e aprender a cada aula de matemática matéria nova, também usar os conteúdos que já estudamos em matemática e nas outras disciplinas [...]”. Com essas palavras, Marcos enfatiza os resultados positivos alcançados pelo uso dos princípios três e quatro do sistema zankoviano, que objetivam o ritmo ativo e crescente de *obutchénie* e o desenvolvimento consciente dos estudantes em relação ao processo de *obutchénie*, isto é, ao considerar as necessidades intelectuais dos estudantes, de forma que seus pensamentos sejam incentivados pela pluralidade, promove-se a compreensão do processo de estudo e, conseqüentemente, estimula a autoestima.

Os estudantes relataram as contribuições de estudar assuntos diversos na aula de matemática assim como em suas falas há evidências que esses contribuíram para o processo de *obutchénie* e desenvolvimento, como podemos acompanhar em uma das partes do diálogo, realizado no momento grupo-classe da etapa 7:

¹⁴¹ “Al principio entre los sujetos como categoría intersíquica; luego en el interior del sujeto como categoría intrapsíquica.” (VIGOTSKI, 2007a, p. CXVII).

Paulo: Também gostei muito das aulas e de estudar o tema esporte. Foi muito bom estudar equações do 2º grau relacionado aos conteúdos das aulas de Ciências e de Educação Física. Me sinto muito motivado estudar dessa forma, pois vejo sentido nas matérias.

Fran: Verdade, esqueci de falar na minha vez. Eu amei compreender o significado de esporte e metabolismo na aula de matemática. Cada aula tinha uma surpresa boa, foi muito bom aprender equação em diversas situações e de utilizá-la em alguns problemas nas aulas de Ciências e Educação Física.

Dulce: Estudar equação do 2º grau vendo sua aplicabilidade em diversas situações, fez com que eu tivesse mais interesse pelas aulas, com isso aprendi a matéria.

Duda: Gostei muito de todas as aulas e sempre sentia vontade de fazer as tarefas. Eu expliquei para minha mãe e para minha irmã a diferença entre peso e massa, depois que descobri a altura da minha mãe. Minha mãe disse que nunca tinha ouvido falar dessa diferença.

Risadas.

Lauro: As aulas foram muito produtivas, sempre me faziam pensar muito. Em algumas tive dúvidas e precisei da ajuda dos colegas e da professora para continuar a tarefa. Gostei muito aprender o significado de metabolismo e tive a oportunidade de conversar com a minha mãe sobre metabolismo.

Professora-pesquisadora: A sua mãe já sabia o significado de metabolismo, Lauro?

Lauro: Quando perguntei para ela o que era metabolismo acelerado, ela disse que não sabia me explicar certinho, mas entendia que a pessoa que tem o metabolismo acelerado pode comer muito que não engorda.

(Grupo-classe, etapa 7)

Pelo diálogo, percebemos que a tarefa, composta por sete etapas, proposta no microciclo contribuiu para que os estudantes ampliassem a base de conhecimentos e conseguissem utilizar os conceitos apreendidos na escola em outros contextos como consta na fala dos estudantes Fran, Duda e Lauro:

Fran: Eu amei compreender o significado de esporte e metabolismo na aula de matemática. Cada aula tinha uma surpresa boa, foi muito bom aprender equação em diversas situações e de utilizá-la em alguns problemas nas aulas de Ciências e Educação Física.

Duda: [...]. Eu expliquei para minha mãe e para minha irmã a diferença entre peso e massa, [...]

Lauro: [...]. Gostei muito aprender o significado de metabolismo e tive a oportunidade de conversar com a minha mãe sobre metabolismo.

(Grupo-classe, etapa 7)

Nas falas dos estudantes Fran, Duda e Lauro, notamos que estes estavam “cientes do processo de aprendizado”, sendo essa “uma das condições importantes para seu desenvolvimento.”¹⁴² (ZANKOV, 1968, p. 40, tradução nossa).

A metodologia de *obutchénie* adotada, além de propiciar ao estudante a compreensão da relevância do conceito de equações do 2º grau em uma variedade de contextos, também estimulou as habilidades afetivas, cognitivas e sociais, como ressaltam Guseva e Sosnowski (1997) e presente nas falas de Dulce, Duda e Lauro:

Dulce: Estudar equação do 2º grau vendo sua aplicabilidade em diversas situações, fez com que eu tivesse mais interesse pelas aulas, com isso aprendi a matéria.

Duda: Gostei muito de todas as aulas e sempre sentia vontade de fazer as tarefas. Eu expliquei para minha mãe e para minha irmã a diferença entre peso e massa, depois que fiz a mágica. Minha mãe disse que nunca tinha ouvido falar dessa diferença.

Risadas.

Lauro: As aulas foram muito produtivas, sempre me faziam pensar muito. Em algumas tive dúvidas e precisei da ajuda dos colegas e da professora para continuar a tarefa. [...].

(Grupo-classe, etapa 7)

Quando Dulce alega que “Estudar equação do 2º grau vendo sua aplicabilidade em diversas situações, fez com que eu tivesse mais interesse pelas aulas, com isso aprendi a matéria”, percebemos que, com a metodologia adotada, “o conhecimento é aprofundado, a mente dos estudantes é aguçada, há uma convicção crescente do poder da ciência, e a vontade de continuar olhando para o futuro, de conhecer cada vez com mais profundidade.”¹⁴³ (ZANKOV, 1968, p. 95-96, tradução nossa).

Na etapa 7, *registrando as atividades mentais*, constamos que os diálogos entre estudantes e professores e entre eles contribuíram para o processo de *obutchénie* e desenvolvimento dos estudantes que puderam sanar suas dúvidas e prosseguir nos caminhos para a apropriação dos conceitos de equação do 2º grau. Além disso, oportunizou que os estudantes vivenciam os sentimentos de confiança e de colaboração com o próximo.

¹⁴² “[...] Вместе с тем, как показало наше исследование, обеспечение осознания школьниками процесса учения относится к числу важных условий их развития. [...]” (ЗАНКОВ, 1968, p. 40).

¹⁴³ “Благодаря беседам углубляются знания, разбивается ищущая мысль учеников, растет убежденность в огромной силе науки, стремление к постоянному движению вперед, ко все более глубокому осознанию.” (ЗАНКОВ, 1968, p. 95-96).

No próximo isolado, analisamos se a organização da *obutchénie* do conceito de equações do 2º grau contribuiu para o desenvolvimento dos estudantes nas dimensões ética, moral e conscientização da saúde.

5.2 Desenvolvimento do estudante nas dimensões ética, moral e conscientização sobre saúde

Buscamos, neste item, voltar nosso olhar para ações e reflexões dos estudantes que revelam as contribuições do processo de *obutchénie* do conceito de equações do 2º grau fundamentado no sistema zankoviano para o desenvolvimento dos estudantes nas dimensões ética, moral e conscientização sobre saúde. Para tanto, organizamos este isolado com o seguinte episódio: **3. O processo de *obutchénie* de conceito de equações do 2º grau viabilizando o desenvolvimento integral do estudante.**

No próximo item, apresentamos os diálogos e registros que nos permitiram analisar as contribuições da organização da *obutchénie* e o desenvolvimento do conceito de equação do 2º grau fundamentado no sistema zankoviano, para o desenvolvimento da ética, moral e conscientização sobre saúde.

5.2.1 Episódio 3: O processo de *obutchénie* de conceito de equações do 2º grau viabilizando o desenvolvimento integral do estudante

Neste episódio nos propusemos a analisar se as ações e reflexões dos estudantes no desenvolvimento das etapas 1 e 2 apresentaram evidências de que as necessidades cognoscitivas geradas, no âmbito das novas relações constituídas contribuíram para que os sujeitos atribuíssem sentidos a *obutchénie* proporcionando o desenvolvimento multidimensional: ético, moral e conscientização sobre saúde.

Para isso, foram selecionadas duas cenas com intuito de analisar como a *obutchénie* e desenvolvimento do conceito de equações do 2º grau fundamentada no sistema zankoviano contribuíram para o desenvolvimento moral, ético e conscientização sobre saúde, proporcionando a significação das palavras metabolismo, catabolismo, anabolismo e esporte. As duas cenas são: **3.1:** Momentos propícios para o desenvolvimento da ética e da moral e **3.2:** Desdobramento da etapa índice de massa corporal para conscientização e apropriação de conceitos relacionados a saúde.

5.2.1.1 Cena 3.1: Momentos propícios para o desenvolvimento da ética e da moral

Na cena 3.1, *momentos propícios para o desenvolvimento da ética e da moral*, buscamos evidências nos diálogos que nos permitisse inferir sobre o desenvolvimento ético e moral dos estudantes no desenrolar do experimento microciclo.

Na etapa 1, *Trajectoria da bola*, diversos momentos foram propícios para o desenvolvimento ético dos estudantes, fato esse anunciado no episódio 1 - *A formação de atividades mentais para o desenvolvimento dos conceitos algébricos*, quando os estudantes dialogavam no grupo-classe sobre o campo de variação, e que retomamos a seguir:

Dulce: Uai, se temos uma função, o campo de variação pode ser qualquer medida maior que zero.

Henrique: Concordo com a Dulce, mas se pensarmos em campo de futebol oficial, nossa resposta não está errada.

Dulce: Sim, Henrique. Só pensei de não restringir muito.

Aline: Dulce mais se o comprimento for zero, não temos um campo de futebol.

Dulce: Verdade, não tinha pensado dessa forma Aline. Vou conversar com o grupo para definirmos melhor os intervalos.

(Grupo-classe, etapa 1)

Neste diálogo, notamos, nas falas da estudante Dulce, que ela teve a ética de ouvir e respeitar os argumentos dos colegas e este processo contribuiu para que ocorresse o conflito das ideias, permitindo que a estudante mudasse sua opinião e sentisse a necessidade de conversar novamente com o seu grupo sobre a resposta que eles haviam definido. Assim, o processo de *obutchénie* contribuiu para formação de um novo elemento e síntese de elementos anteriores (LONGAREZI; DIAS DE SOUSA, 2018) e possibilitou trabalhar com os estudantes as manifestações de ideias, opiniões e argumentos, de forma a se fazer entendido pelo outro e o propósito de ouvir as propostas, opiniões e argumentos alheios e reconsiderar, pontos de vista quando relevante. (BRASIL, 2017).

Assim, a etapa 1, fundamentada nas características do sistema zankoviano, além de permitir que os estudantes refletissem sobre suas respostas no que tange ao campo de variação, após ouvir o colega, oportunizou o diálogo sobre assuntos que no ensino tradicional são desenvolvidos nas aulas de Ciências e Educação Física. Esse movimento foi possível devido a qualidade pedagógica variabilidade do método de *obutchénie* proposto por L. V. Zankov.

A variabilidade, qualidade pedagógica do sistema zankoviano, nos permite fazer alterações considerando as necessidades pessoais dos estudantes e professores, mas sem alterar os princípios didáticos. Neste viés, no desenrolar da tarefa, considerando a perspectiva interdisciplinar recomendada no sistema zankoviano, o professor precisa flexibilizar seu planejamento e aproveitar os assuntos presentes nos diálogos em sala para provocar inquietações nos estudantes estimulando a sua criticidade e poder de argumentação.

Essas particularidades foram fundamentais para que a professora-pesquisadora pudesse de forma confiante, aproveitar o assunto - a violência praticada pelas torcidas nos estádios de futebol - que surgiu após indagar os estudantes sobre o esporte favorito. Essa situação aconteceu na etapa 1, no momento grupo-classe, dando abertura para o diálogo que proporcionou a reflexão sobre as causas, consequências e soluções pra combater esse ato, de forma a orientar os estudantes sobre o comportamento ético e o repúdio à violência na relação com o próximo (BRASIL, 2017). As interlocuções nos propiciaram uma leitura das convicções subjacentes aos estudantes no que tange a moral, a ética e ao espírito esportivo, como podemos observar na transcrição das vozes de Dulce, Filipe, João, Lauro e Fran.

Lauro: Gosto mais de futebol, mas não concordo com as brigas dos torcedores. Sou contra a violência.

João: Também não concordo com a violência. Tem algumas torcidas organizadas que não se respeitam, também tem alguns jogadores que descumprem com as regras e acaba tendo brigas dentro do campo.

Dulce: Para os jogadores tem as punições, quando descumprem as regras. E para os torcedores?

Filipe: Acho que no Brasil não tem lei para resolver esses problemas.

Fran: Os grandes clubes procuram punir as torcidas organizadas, porém nem todos os que brigam tem vínculo com as torcidas organizadas.

Dulce: Essa violência leva muita tristeza para as famílias, na maioria das vezes inocentes morrem.

Professora-pesquisadora: Com as punições resolvemos os problemas com a violência?

Silêncio

Gustavo: Seria uma forma. Talvez a prisão de quem comete as agressões já seria um exemplo para os outros não cometerem a violência.

Tetê: Verdade Gustavo, mas tem pessoa que só vai aprender quando sentir na pele. Acredito que as leis não estão sendo aplicadas, por isso se tem tanta agressividade.

Dulce: Talvez, não permitir que os envolvidos nas brigas de torcidas assistam as partidas seria uma forma de parar ou até diminuir as violências. Sabendo que não poderão fazer o que gostam, às vezes passam a pensar antes de agir.

Silêncio

Paula: Dificil essas situações, acho que conscientização das pessoas seria um caminho. Mas quem a pratica não pode ficar impune.

Aline: Concordo com a Paula, a pessoa consciente consegue resolver as intrigas conversando.

[...]

Dulce: Estou aqui pensando, em se tratando de violência o ideal é que as leis sejam cumpridas. E como a Paula falou para tentar resolver o problema o caminho é a conscientização das pessoas.

(Grupo-classe, etapa 1)

No diálogo há a evidência de que para os estudantes a violência é oposta aos valores morais e princípios que orientam a vida em sociedade no Brasil. Essa afirmação pode ser observada na fala do estudante Lauro que relata se sentir desconfortável com a conduta de alguns torcedores de futebol: “Gosto mais de futebol, mas não concordo com as brigas dos torcedores. Sou contra a violência.” Além disso, João ressaltou a falta de respeito ao próximo e o descumprimento de regras, quando diz: “Também não concordo com a violência. Tem algumas torcidas organizadas que não se respeitam, também tem alguns jogadores que descumprem com as regras e acaba tendo brigas dentro do campo.” Esse diálogo ocorrido no momento grupo-classe contribuiu para a tomada de discussão do estudante no aspecto ético, visto que identificaram circunstâncias que infringem a dignidade do ser humano (BRASIL, 2017), corroborando para o desenvolvimento de uma dialética que possibilitou, por meio do diálogo e debate entre os interlocutores comprometidos, afirmar suas verdades acerca desse assunto e ratificar seu desenvolvimento ético.

Considerando que a ética estuda as relações entre o que é “individualizado e o mundo a sua volta [mundo moral]” (KORTE, 1999 *apud* FIGUEIREDO, 2008, p. 4), inferimos pelas falas dos estudantes Lauro e João que a violência fere seus valores éticos, para os quais a violência não pode ser praticada, visto que infringe a moral da sociedade atualmente.

No diálogo, os estudantes ressaltam que o descumprimento de regras poderia gerar punições, fatos observados na fala da estudante Dulce quando diz que “Para os jogadores tem as punições, quando descumprem as regras. E para os torcedores?”. A interrogação da estudante nos mostra que ela almeja que a justiça seja cumprida para os torcedores que infringe a lei e repudia a injustiça. (BRASIL, 2017).

Diante do posicionamento da estudante Dulce, a professora-pesquisadora provocou os estudantes com a seguinte pergunta: “Com as punições resolvemos os problemas com a violência?”.

Essa indagação, suscitou um diálogo entre os estudantes que expressaram suas opiniões justificando seus pontos de vistas. Gustavo manifestou que a punição seria um caminho, mas que acreditava que ela não é eficiente. Afirmação essa pronunciada da seguinte maneira: “Seria

uma forma. Talvez a prisão de quem comete as agressões já seria um exemplo para os outros não cometerem a violência.”

A argumentação de Gustavo instigou a estudante Tetê a se posicionar diante de sua afirmação buscando resposta para a causa de não eficácia da punição. Tetê reitera que a não efetivação da punição é um motivo para que a violência continue sendo praticada. Essa justificativa pode ser confirmada nas seguintes palavras de Tetê: “Verdade Gustavo, mas tem pessoa que só vai aprender quando sentir na pele. Acredito que as leis não estão sendo aplicadas, por isso se tem tanta agressividade.” Assim, esse diálogo contribuiu para que os estudantes refletissem sobre a importância do cumprimento das leis que definem os direitos e deveres e, para estes, a violência é uma “questão social diretamente relacionada à justiça.” (BRASIL, 1998, p. 74).

Como os outros colegas, a estudante Dulce sentiu-se confortável em apresentar uma possível solução para diminuir a violência entre torcedores do time de futebol, quando proclamou: “Talvez, não permitir que os envolvidos nas brigas de torcidas assistam as partidas seria uma forma de parar ou até diminuir as violências. Sabendo que não poderão fazer o que gostam, às vezes passam a pensar antes de agir.” Após, a manifestação de opinião de seus colegas Dulce reexaminou esse posicionamento e fez a seguinte afirmação: “Estou aqui pensando, em se tratando de violência o ideal é que as leis sejam cumpridas”. Observamos que diálogo possibilitou que Dulce refletisse sobre suas ideias e as respostas dos colegas no que tange às punições de quem pratica a violência e reorganizasse sua opinião, contribuindo para o desenvolvimento ético da estudante, como propõe Zankov (1984). Desta forma, o experimento microciclo, propiciou “[...] um tipo mais amplo de educação do sujeito, incluir a formação de valores éticos que constituem seu caráter e sua personalidade, cujo processo se dá nos diversos contextos socioculturais nos quais se está inserido. [...]” (LONGAREZI; FRANCO, 2017, p. 265).

Na busca de uma forma de amenizar ou até mesmo acabar com a violência entre os torcedores, Paula manifestou que para resolver esse problema, um dos caminhos seria a conscientização das pessoas. Nas palavras da estudante: “Difícil essas situações, acho que conscientização das pessoas seria um caminho. Mas quem a pratica não pode ficar impune.” Verificamos que as conversas sobre a violência praticada por alguns torcedores, possibilitaram que a estudante Paula expressasse suas ideias, opiniões e argumentos de forma clara e compreensível para os colegas e impulsionou o seu pensamento criativo, lógico e crítico em relação ao tema, como destaca a BNCC. (BRASIL, 2017).

Fundamentada em Vygotsky, Rego (1996) ressalta que as especificidades de cada indivíduo acontecem pela interação com o meio, e que a vida em sociedade requer a elaboração e o cumprimento de normas e regras que perpassam as relações, viabilizando o diálogo e cooperação entre os seres humanos. Comungamos da ideia de Rego (1996) e pensando no diálogo dos estudantes, o ideal seria a conscientização dos torcedores no sentido de aprenderem a respeitar o próximo e usarem o diálogo como um meio para resolver o conflito, como é proposto por Aline: “Concordo com a Paula, a pessoa consciente consegue resolver as intrigas conversando.”

O debate sobre a violência proporcionou aos estudantes “uma constante atitude crítica, de reconhecimento dos limites e possibilidades dos sujeitos e das circunstâncias, de problematização das ações e relações e dos valores e regras que os norteiam.” (BRASIL, 1998, p. 61).

Notamos que os estudantes se sentiram confortáveis para expor suas ideias, buscar soluções e dar explicações ao se envolverem no diálogo com satisfação para compreender um dos problemas da realidade, que segundo Zankov (1984), só é possível se o “ambiente for encorajador e acolhedor.” (GUSEVA, 2017, p. 234).

Assim, acreditamos que os estudantes sentiram confiança de relatar suas concepções, pois foram encorajados no desenrolar da etapa 1, “a escutar e ouvir; olhar e ver; pensar e refletir; não repetir e; ser feliz e experimentar.” (GUSEVA, 2017, p. 235).

O tema *esporte* trabalhado nas aulas de Ciências, Educação Física e Matemática, em específico na etapa 1 de matemática que foi abarcado o assunto futebol, possibilitou que os estudantes refletissem sobre as causas que suscitam as brigas entre torcedores do mesmo time e/ou times adversários que estão jogando. Além disso, inferimos que o diálogo incentivou a postura crítica dos estudantes e o debate sobre a importância do respeito ao próximo. Essas evidências estão nítidas no diálogo, a seguir:

Professora-pesquisadora: O que pode provocar as brigas entre os torcedores?

Marcos: Entre os torcedores de um mesmo time, pode ser que um xingue o jogador e outro sente a dor ou um torcedor atrapalha o outro a assistir ao jogo levantando toda hora.

Paula: Vi no jornal a um tempo atrás, que a briga entre os jogadores no campo de futebol também provoca a briga entre as torcidas.

João: Acredito que não saber aceitar seu time perder seja também o motivo das brigas.

(Grupo-classe, etapa 1)

No diálogo, entre os fatores que desencadeiam as brigas entre os torcedores estão evidentes a agressão por meio de palavras ao outro e a violação do respeito ao próximo. Essas posturas infringem os valores éticos dos estudantes que as declinam. Essa afirmação pode ser constatada na fala do estudante Marcos: “Entre os torcedores de um mesmo time, pode ser que um xingue o jogador e outro sente a dor ou um torcedor atrapalha o outro a assistir ao jogo levantando toda hora”. Observamos que a pergunta da professora-pesquisadora propiciou reflexões relacionadas as condições que faz com que a tomada de decisão não seja valorativa. (BRASIL, 2017).

As interlocuções permitiram que estudantes relembressem e trouxessem para a discussão notícias de jornais, conforme observamos na fala de Paula: “Vi no jornal a um tempo atrás, que a briga entre os jogadores no campo de futebol também provoca a briga entre as torcidas”. Os diálogos contribuíram para que os estudantes analisassem, com a orientação da professora-pesquisadora, sobre o tema violência entre as torcidas de futebol, divulgados nas diversas mídias, contribuindo para que eles pudessem relacionar, avaliar e contrapor a ideia de justiça. (BRASIL, 2017).

Após expressar as possíveis causas das brigas, referenciadas por Marcos, Paula e João, os estudantes foram convidados a refletir se essas podem ser usadas como justificativas pelos torcedores. Esse momento foi propício para os estudantes manifestarem suas ideias e suscitou o assunto espírito esportivo, como podemos acompanhar no diálogo:

Professora-pesquisadora: As causas que o Lauro, a Paula e o João citaram justificam as brigas entre os torcedores?

Silêncio

Dulce: Não! Precisamos respeitar o próximo e saber perder. Não devemos fazer com os outros o que não queremos que façam conosco.

[...]

Gustavo: Em um jogo teremos um ganhador e um que vai perder. É importante saber ganhar e perder, porque a vida não é feita somente de vitórias.

Maria: Precisamos ter regras mais eficientes no Brasil e as torcidas precisam exercer mais o espírito esportivo.

(Grupo-classe, etapa 1)

A indagação da professora-pesquisadora contribuiu para que os estudantes refletissem sobre a necessidade de respeitar o próximo da mesma forma que gostariam que o respeitassem, como consta na fala de Dulce: “Não! Precisamos respeitar o próximo e saber perder. Não devemos fazer com os outros o que não queremos que façam conosco.”

A fala da estudante Maria: “Precisamos ter regras mais eficientes no Brasil [...]”, reforça a importância de termos a moral bem delineada em todos os segmentos da sociedade, considerando que a moral:

[...] refere-se quer aos costumes, quer às regras de conduta admitidas numa sociedade determinada. Portanto, um fato moral é aceito para um tipo de sociedade de acordo com a sua tradição ou realidade cultural. A realidade moral, neste sentido, vai se referir ao conjunto desses costumes e dos juízos sobre os costumes que são objeto de observação ou de constatação segundo as regras sócio-culturais. [sic] (FIGUEIREDO, 2008, p. 6-7)

Com os costumes e regras bem definidas torna-se necessário conscientizar a população no que tange aos seus direitos e deveres para que elas sejam respeitadas e cumpridas, assim como expressa a estudante Maria: “[...] as torcidas precisam exercer mais o espírito esportivo.”

Em relação ao espírito esportivo, os estudantes compreendem que esse pode ser constituído no seio da família e da escola como podemos observar nas falas de Paula e de Henrique:

Professora-pesquisadora: Infelizmente, alguns torcedores e jogadores não demonstram ter o espírito esportivo. Como podemos melhorar essa situação?

Paula: As famílias precisam ensinar que também perdemos.

Henrique: Além da família, as escolas também podem ensinar. Nas aulas de Educação Física, a professora Jú falou da importância do respeito com os adversários, visto que são pessoas com sentimentos como nós.

(Grupo-classe, etapa 1)

Sabemos que a escola, a família e a sociedade são os pilares da formação dos estudantes, assim:

[...] a família por ser a forma mais elementar e mais primitiva de comunidade humana, foi chamada de célula social. Nela se realiza o princípio da propagação da espécie e se desenvolve em grande parte, o processo de educação do indivíduo nos seus primeiros anos, assim como a formação de sua personalidade. Por tudo isto assume grande importância do ponto de vista moral. (VÁZQUEZ, 1993, p. 196)

Logo, a família precisa exercer seu papel na formação moral, como cita os estudantes Paula: “As famílias precisam ensinar que também perdemos” e Henrique: “Além da família, as escolas também podem ensinar”. A postura adotada pelos dois estudantes nos mostra que eles estão conscientes de quem são os responsáveis pela formação dos princípios morais e éticos.

Diante das palavras pronunciadas por Henrique: “Além da família, as escolas também podem ensinar. Nas aulas de Educação Física, a professora Jú falou da importância do respeito com os adversários, visto que são pessoas com sentimentos como nós”, percebemos que o estudante compreende o papel dos estudos para a sua formação social e, como ressalta Vigotski (1991 *apud* LONGAREZI; FRANCO, 2017, p. 279), entendemos que a escola “[...] produz a seleção social da personalidade exterior. A partir do homem como biótipo, a educação, por meio da seleção, forma o homem como tipo social.”

O diálogo possibilitou que os estudantes refletissem em quais momentos os professores oportunizam o desenvolvimento do espírito esportivo, como podemos observar no diálogo:

Professora-pesquisadora: Apenas nas aulas de Educação Física é possível ensinar o espírito esportivo?

Luana: Não, quando usamos os jogos nas aulas de matemática e Ciência também estamos aprendendo o espírito esportivo, visto que quando jogamos respeitamos as regras e aceitamos quando perdemos, aproveitando a derrota para repensar as nossas estratégias.

Dulce: Isso Luana, nas aulas com jogos aprendemos a não apelar com as derrotas e analisar o que precisamos fazer para melhorar, quando o jogo não depende de sorte. Temos que criar nossas estratégias.

Filipe: Não é só no jogo que aprendemos sobre o espírito esportivo, mas nas aulas que conversamos dando nossas opiniões sem ofender ninguém, podendo dizer o que pensamos, como estamos fazendo agora.

Coro: Isso.

Luana: As aulas em grupos aprendemos a ouvir o outro, a dialogar e respeitar suas opiniões. Quando respeitamos o outro, somos honesto e aceitamos a derrota.

(Grupo-classe, etapa 1)

De acordo com a fala da estudante Luana: “Não, quando usamos os jogos nas aulas de matemática e Ciência também estamos aprendendo o espírito esportivo, visto que quando jogamos respeitamos as regras e aceitamos quando perdemos, aproveitando a derrota para repensar as nossas estratégias”, fica evidente que nas aulas de Ciências, Educação Física e Matemática foram trabalhadas atividades de jogos que propiciaram vivenciar o respeito ao próximo, reconhecer seus limites e valorizar sua identidade. (BRASIL, 2017).

Observamos que os estudantes consideraram que momentos nos quais eles expõem suas ideias, ouvem o outro e argumentam, contribuem para o desenvolvimento do espírito esportivo. Afirmação presente nas falas de Filipe e Luana.

Filipe: Não é só no jogo que aprendemos sobre o espírito esportivo, mas nas aulas que conversamos dando nossas opiniões sem ofender ninguém, podendo dizer o que pensamos, como estamos fazendo agora.

[...]

Luana: As aulas em grupos aprendemos a ouvir o outro, a dialogar e respeitar suas opiniões. Quando respeitamos o outro, somos honesto e aceitamos a derrota.

(Grupo-classe, etapa 1)

Assim, oportunizar que os estudantes trabalhem em grupo ouvindo o professor e os colegas de sala e sendo ouvido por eles, permite que ele aprenda a articular as próprias ações com as dos outros, exerce o respeito à privacidade como direito de cada pessoa e a cuidar para não ferir a dignidade humana. (BRASIL, 2017).

Até o momento, identificamos, na visão dos estudantes, que o espírito esportivo estava sendo infringido pelos fatos relacionados a violência física entre os jogadores e entre os torcedores, impulsionadas muitas das vezes pelas derrotas. Assim, com o intuito de provocar que pensassem em outros valores morais que também são transgredidos, a professora fez algumas indagações, conforme anunciado nas interlocuções seguintes:

Professora-pesquisadora: Apenas a violência física entre os torcedores e entre os jogadores ferem os princípios do espírito esportivo?

Marcos: Tem a violência dos jogadores com os árbitros.

Silêncio

Professora-pesquisadora: Quais outros problemas temos no esporte?

Filipe: Xingamento.

Aline: Alguns jogadores usam drogas ou excesso de remédios.

Dulce: São muitas sujeiras, que acabam com a reputação do nosso futebol.

Lauro: Também tem muito roubo em algumas diretorias dos times.

[...]

Professora-pesquisadora: Então, pessoal como vocês citaram, além da violência física e verbal, temos os problemas com doping e de corrupção.

(Grupo-classe, etapa 1)

Pelo diálogo acima, notamos a importância da intervenção da professora-pesquisadora, para que os estudantes citassem os valores éticos que são descumpridos no futebol e que se posicionasse frente os esses fatores, contribuindo para o desenvolvimento ético como propõe Zankov (1984) e presente na fala da Dulce: “São muitas sujeiras, que acabam com a reputação do nosso futebol.”

Observamos, nas interlocuções da cena 3.1, o quanto é importante o professor planejar cuidadosamente sua aula, para propiciar momentos que os estudantes vivenciem e discutam sobre valores éticos, reflitam e desenvolvam os mesmos como é proposto em Zankov (1963, 1968, 1984). Entendemos que dessa maneira pode haver contribuição para a formação da atitude qualitativa diante da realidade, pois “ser educado significa possuir valores, formas de

conduta social e individual, responsabilidade cidadã, sensibilidade e emoção.” (AQUINO, 2017, p. 326).

Na próxima cena, analisamos como a metodologia de *obutchénie* da etapa 2 contribuiu para desenvolvimento de conhecimentos científicos e conscientização de uma boa alimentação.

5.2.1.2 Cena 3.2: *Desdobramento da etapa índice de massa corporal para conscientização e apropriação de conceitos relacionados a saúde*

Nesta cena, nos atemos aos diálogos que nos revelam as emoções e vontades como parte do desenvolvimento dos estudantes, assim como os conhecimentos espontâneos que eles trazem da sua vivência, que surgiram ao longo das situações-problema e que com as intervenções da professora-pesquisara foram possíveis de se desenvolverem para conhecimentos científicos, devido ao processo de *obutchénie* do conceito de equações do 2º grau fundamentado no sistema zankoviano realizado no experimento microciclo.

Na etapa 2, nomeada *índice de Massa Corporal*, os estudantes após realizar a situação-problema em dupla, apresentaram as respostas para o grupo-classe. Neste momento, a professora-pesquisadora conduziu os estudantes à observação sistemática dos dados qualitativos e quantitativos da tabela do IMC e dos valores de referência, proporcionando momentos de reflexão sobre os cuidados com a alimentação e a saúde, impulsionando a compreensão de alguns conhecimentos científicos como metabolismo, anabolismo, catabolismo e esporte.

Para iniciar o diálogo com o grupo-classe, a professora-pesquisadora solicitou aos estudantes que explicassem como determinaram a altura do colega e revelassem para a classe como foi resolver a situação-problema. As duplas iniciaram a explicação relatando as emoções vivenciadas e, em seguida, as estratégias utilizadas para o desenvolvimento da situação-problema, como podemos contemplar nas falas da dupla Enzo e Duda:

Professora-pesquisadora: Turma, me diga o como foi resolver essa tarefa e expliquem como determinaram a altura do colega.

Enzo: Gostei dessa tarefa, tivemos que pensar um pouco de como iríamos colocar a altura no primeiro membro deixando em função da massa e do IMC. Depois que definimos essa parte ficou fácil, resolvemos da maneira que fizemos na tarefa anterior. (Observação: O estudante se referia a etapa 1, em especial ao momento de resolução da equação do 2º grau incompleta, onde $b = 0$).

Duda: Tivemos dúvidas no início, mas conseguimos resolver. Enquanto conversamos sobre a tarefa fiquei ansiosa para começar a resolver, eu estava

super empolgada para chegar na resposta, queria aprender para pregar uma peça na minha irmã. Quando eu cheguei em casa, ensinei minha irmã a calcular o IMC da minha mãe, sem eu saber a altura dela. Depois acertei a altura da minha mãe, como se eu fosse mágica. Quando estávamos resolvendo as tarefas, também tivemos que pensar muito para determinar os campos de variação da altura, até fizemos uma busca no google sobre o menor tamanho que um bebê já nasceu e a altura da pessoa mais alta.

Professora-pesquisadora: Duda e Enzo nos conte como vocês fizeram para determinar a altura conhecendo a massa e o IMC.

Enzo: Primeiro Duda e eu organizamos a equação para deixar a variável h^2 no primeiro membro. Para isso, nós multiplicamos os dois lados da equação por h^2 , depois dividimos os dois lados pelo IMC. Ficamos com $h^2 = \frac{m}{IMC}$. Em seguida, determinamos o campo de variação para h e do IMC. Depois, eu calculei a altura dela, considerando $m = 53$ e $IMC = 21,23$ kg/m². Resolvendo a divisão 53 por 21,23 descobri que h^2 é igual 2,49. Tirando a raiz quadrada dos dois lados encontrei 1,58m.

Professora-pesquisadora: A altura que você encontrou é exatamente a altura da Duda?

Enzo: Não, deu aproximadamente 1,577 m. Deu esse valor porque não usei todas as casas decimais do IMC que ela me passou.

Professora-pesquisadora: Certo. Pessoal, alguém quer comentar a resposta da dupla?

[...]

Professora-pesquisadora: Enzo fale um pouco de como vocês definiram os campos de variação da altura e do IMC.

Enzo: Para determinar a menor altura, pesquisamos na internet qual era o tamanho do menor bebê do mundo que sobreviveu e a pessoa mais alta. A nossa altura ficou entre 0,23m e 2,5m. E o IMC consideramos maior que zero.

(Grupo-classe, etapa 2)

A dificuldade proposta na situação-problema não impediu de Enzo e Duda persistirem para resolver a situação-problema como consta quando ele diz que gostou “dessa tarefa, tivemos que pensar um pouco de como iríamos colocar a altura no primeiro membro deixando em função da massa e do IMC. Depois que definimos essa parte ficou fácil, resolvemos da maneira que fizemos na tarefa anterior.” Podemos inferir, diante da frase “tivemos que pensar um pouco”, que a dificuldade encontrada na tarefa foi acessível aos estudantes mantendo a emoção como um fator positivo para o seu desenvolvimento uma vez que, para Zankov (1984, p. 63, tradução nossa), a emoção se “caracteriza como a atitude do homem perante o mundo, na direção daquilo que experimenta e realiza na forma de sentimento direto.”¹⁴⁴ Além disso, se o

¹⁴⁴ “La emoción se caracteriza como la actitud del hombre ante el mundo, hacia aquello que experimenta y realiza en forma de sentimiento directo. Las emociones expresan el estado del sujeto y su actitud ante el objeto.” (ZANKOV, 1984, p. 63).

instrumento de *obutchénie* for “inacessível à compreensão só pode ser memorizado, e o *cramming*¹⁴⁵ é um feroz inimigo do desenvolvimento.”¹⁴⁶ (ZANKOV, 1963, p. 43).

Ainda na fala de Enzo, podemos reconhecer que “o trabalho intensivo de pensamento causa um sentimento de satisfação e, ao mesmo tempo, o desejo de acabar com o trabalho a todo custo. As emoções não dão uma cor ou outra cor ao trabalho mental, mas possuem uma força criativa.”¹⁴⁷ (ZANKOV, 1978 *apud* НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006, p. 80, tradução nossa). Zankov (1978 *apud* НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006, p. 80, tradução nossa) ressalta que as emoções não podem ser pensadas de forma estática, emoções diferentes fluem entre si: “da dúvida, da incerteza à convicção, do desapontamento à alegria.”¹⁴⁸ Esses movimentos representam a “unidade da atividade mental e da vida emocional.”¹⁴⁹ (НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006, p. 80, tradução nossa).

No desenrolar da situação-problema os estudantes mencionam a necessidade de pesquisar na *internet* informações relacionadas ao tema altura para poderem determinar seu campo de variação, fato presente na fala de Duda ao alegar que “Quando estávamos resolvendo as tarefas, também tivemos que pensar muito para determinar os campos de variação da altura, até fizemos uma busca no google sobre o menor tamanho que um bebê já nasceu e a altura da pessoa mais alta”. Essa desenvoltura e autonomia dos estudantes são características que segundo a professora Emma Viktorovna Vitushkina são desdobradas quando se trabalha com o sistema zankoviano e, nas palavras da autora, esse sistema “ensina as pessoas a serem independentes, ensina estudantes a encontrar informações e coisas úteis à vida e a serem independentes.” (FEROLA, 2020, p. 833).

Tal autonomia e independência podem ser percebidas no modo como a dupla se organizou e utilizou instrumentos de pesquisa - o *google* - para determinar o campo de variação, o que está presente na fala de Enzo: “Para determinar a menor altura, pesquisamos na internet qual era o tamanho do menor bebê do mundo que sobreviveu e a pessoa mais alta. A nossa

¹⁴⁵ “*Cramming* é a prática de trabalhar intensamente para absorver grandes volumes de material informativo em curtos períodos de tempo, ou seja, a memorização em detrimento da verdadeira assimilação dos conteúdos.” (FEROLA, 2019, p. 51).

¹⁴⁶ “Учебный материал, который недоступен пониманию, можно только зазубрить, а зубрежка — лютый враг развития.” (ZANKOV, 1963b, p. 43).

¹⁴⁷ “[...] Интенсивная работа мысли вызывает чувство удовлетворения, а вместе с тем стремление во что бы то ни стало довести работу до конца. Эмоции не просто придают ту или иную окраску умственной работе, но обладают созидательной силой.” (ZANKOV, 1978 *apud* НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006, p. 80).

¹⁴⁸ “[...] от сомнений, неуверенности к убежденности, от разочарования - к радости.” (ZANKOV, 1978 *apud* НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006, p. 80).

¹⁴⁹ “Подобные переходы являются выражением единства умственной деятельности и эмоциональной жизни человека.” (НЕЧАЕВА; РОЩИНА, 2006, p. 80).

altura ficou entre 0,23m e 2,5m. E o IMC consideramos maior que zero.” Parece-nos que, para Duda e Enzo, está claro que o

[...] conceito de variação compreende os conceitos de relatividade e de interdependência que na álgebra se traduzem pela dependência entre variáveis. A dependência está associada às premissas estabelecidas (BOHM, 1980; CARAÇA, 1998) que, por sua vez, estão associadas ao campo de variação, o qual nos auxilia a delimitar valores de mínimo e de máximo, presentes nos movimentos da vida. (LANNER DE MOURA; SOUSA, 2008, p. 70)

Pelas palavras de Duda e Enzo, notamos que a dupla teve a autonomia de encontrar um caminho para sanar suas dúvidas manifestando sua destreza de lidar com desenvolvimento da ciência e da tecnologia que, segundo Zankov (1968), apenas o ser humano com qualidades na mente, vontade e emoções consegue lidar esse avanço.

A estudante Duda expressou sua vontade de realizar a situação-problema e o entusiasmo de colocar em prática o conceito estudado, quando anuncia: “Tivemos dúvidas no início, mas conseguimos resolver. Enquanto conversamos sobre a tarefa fiquei ansiosa para começar a resolver, eu estava super empolgada para chegar na resposta, queria aprender para pregar uma peça na minha irmã. Quando eu cheguei em casa, ensinei minha irmã a calcular o IMC da minha mãe, sem eu saber a altura dela. Depois acertei a altura da minha mãe, como se eu fosse mágica. [...]” Na fala da estudante é possível percebermos que está consciente do seu processo de *obutchénie*, visto que utilizou os conhecimentos apreendidos na aula de matemática, para resolver o problema que ela gerou com intuito de mostrar para a irmã e para a mãe o que tinha compreendido. Nas palavras de Zankov (1968, p. 41, tradução nossa), “[...] o processo de dominar conhecimentos e habilidades, até certo ponto, torna-se um objeto de consciência.”¹⁵⁰

L. V. Zankov ressalta que “[...] se o objetivo é melhorar a *obutchénie* e o raciocínio do estudante, seus sentimentos devem ser envolvidos no processo.”¹⁵¹ (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 23) e, notamos nas palavras da Duda, que a vontade e a emoção estiveram presentes no desenrolar desta etapa da tarefa na busca por encontrar uma solução para o desafio proposto, sendo essas forças geradoras para o seu processo de *obutchénie* e desenvolvimento.

Entendemos que conhecimentos já apropriados por estes estudantes, como princípios multiplicativos da igualdade, determinação da raiz de equação do 2º grau incompleta e aproximação de valores numéricos, foram fundamentais para que os estudantes completassem

¹⁵⁰ “[...] процесс овладения знаниями и навыками в известной мере становится объектом осознания.” (ЗАНКОВ, 1968, p. 41).

¹⁵¹ “So, if the goal is to improve student learning and thinking, their feelings must be involved in the process.” (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 23).

esta etapa da tarefa, fato mencionado nas falas de Enzo: “Primeiro Duda e eu organizamos a equação para deixar a variável h^2 no primeiro membro. Para isso, nós multiplicamos os dois lados da equação por h^2 , depois dividimos os dois lados pelo IMC. Ficamos com $h^2 = \frac{m}{\text{IMC}}$. Em seguida determinamos o campo de variação para h e do IMC. Depois, eu calculei a altura dela, considerando $m = 53$ e $\text{IMC} = 21,23 \text{ kg/m}^2$. Resolvendo a divisão 53 por 21,23 descobri que h^2 é igual 2,49. Tirando a raiz quadrada dos dois lados encontrei 1,58m” e “Não, deu aproximadamente 1,577 m. Deu esse valor porque não usei todas as casas decimais do IMC que ela me passou.”

De acordo com estas falas, inferimos que tais conhecimentos puderam ser “reintroduzido com novos conteúdos, permitindo que os aprendizes observem o que já lhes é familiar sob uma nova perspectiva à medida que exploram terrenos desconhecidos.”¹⁵² (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 20, tradução nossa).

Após a resposta da dupla Enzo e Duda, os demais estudantes foram provocados a refletir sobre o valor referência da Duda, neste caso $\text{IMC} = 21,23 \text{ kg/m}^2$, como anunciado no diálogo a seguir:

Professora-pesquisadora: Turma, considerando o IMC da Duda como pode ser indicado o estado nutricional dela?

Aline: O peso dela é o ideal.

Gustavo: A massa dela, né Aline.

Aline: Isso. Difícil largar o costume, sempre falei peso e lá em casa todos ainda falam peso.

Dulce: A Duda come de forma saudável.

Maria: Talvez a Duda coma pouco.

Aline: Come pouco! Ela sempre repete o lanche da escola.

[...]

Professora-pesquisadora: Turma qual a diferença entre peso e massa?

Aline: Vimos com a professora Poli que o peso é uma força gravitacional.

Sara: Isso, o peso é o produto da massa de um corpo pela aceleração da gravidade.

Tetê: O peso depende da gravidade e da massa do objeto.

Gustavo: Massa é a quantidade de matéria de um objeto.

Fran: Ela é constante.

Professora-pesquisadora: Duda fale um pouco da sua alimentação para nós.

Duda: Risadas. A Aline está certa eu como muito. Minha alimentação não é muito saudável, eu gosto muito de arroz, massas, frituras e doces. Eu moro longe da escola e como a tarde eu tenho que levar e buscar meus irmãos aqui na escola, então eu caminho muito durante a semana. Talvez seja por isso que eu não engordo.

Lauro: Talvez seu metabolismo seja acelerado.

(Grupo-classe, etapa 2)

¹⁵² “[...] learned material is thus reintroduced with new content allowing learners to observe the familiar in a new light even as they explore unfamiliar ground.” (GUSEVA; SOSNOWSKI, 1997, p. 20).

Zankov (1984), fundamentado em L. S. Vigotski, ressalta que o homem fala segundo uma necessidade ou um motivo afetivo e, para Zankov (1984) a comunicação é o que motiva a fala, ou seja, que a comunicação precede a fala, visto que por meio dela a fala acontece de forma natural no meio dos estudantes.

Assim, quando o professor possibilita o compartilhamento de ideias e a comunicação entre os estudantes e/ou com o professor, se torna possível conhecer o vocabulário deles, pois segundo Vigotski (2007a), apenas as palavras que se compreendem são utilizadas na fala. Logo, nos diálogos, podemos inferir sobre o conhecimento dos estudantes, uma vez que são provocados a expressar suas considerações após a indagação da professora-pesquisadora, características constatadas nas falas de Gustavo [“A massa dela, né Aline”] e nos dizeres de Aline [“Isso. Difícil largar o costume, sempre falei peso e lá em casa todos ainda falam peso”].

Após as manifestações, os estudantes foram indagados, novamente, pela professora-pesquisadora que pode averiguar, por meio da fala, como propõe Zankov (1984), o que eles compreendiam do conceito *peso* e *massa*, contemplados nas respostas de Aline, Sara, Tetê, Gustavo e Fran.

Aline: Vimos com a professora Poli que o peso é uma força gravitacional.

Sara: Isso, o peso é o produto da massa de um corpo pela aceleração da gravidade.

Tetê: O peso depende da gravidade e da massa do objeto.

Gustavo: Massa é a quantidade de matéria de um objeto.

Fran: Ela é constante.

(Grupo-classe, etapa 2)

Observamos que os estudantes parecem ter compreendido os conceitos de massa e peso e, conseguiram articular o conteúdo apreendido nas aulas de Ciências com os estudados na aula de matemática e com situações do cotidiano. Diante deste fato, entendemos que o processo de *obutchénie* contribui para desenvolvimento de redes de relações entre os conceitos, visto que “o pensamento não se reflete na palavra, mas se realiza nela. Por isso, pode-se falar do processo de formação (a unidade do ser e do não-ser) do pensamento na palavra. Todo pensamento tenta unir algo com outro, estabelecer uma relação entre isso e aquilo.”¹⁵³ (VIGOTSKI, 2007a, p. 438, tradução nossa).

¹⁵³ “El pensamiento no se refleja en la palabra, sino que se realiza en esta. Por esta razón, podría hablarse del proceso de formación (la unidad del ser y del no ser) del pensamiento en la palabra. Todo pensamiento intenta unir algo con algo, establecer una relación entre esto y aquello.” (VIGOTSKI, 2007a, p. 438)

Por meio do diálogo desencadeado pela resposta da dupla Duda e Enzo, apresentado no início desta cena, a classe foi provocada a falar dos diferentes fatores que estão interligados para que se tenha uma massa ideal, tais como: a quantidade de alimentos, a qualidade dos alimentos, a atividade física e o metabolismo, como citados pelos estudantes Dulce, Maria, Duda e Lauro:

Dulce: A Duda come de forma saudável.

Maria: Talvez a Duda coma pouco.

Aline: Come pouco! Ela sempre repete o lanche da escola.

[...]

Duda: Risadas. A Aline está certa eu como muito. Minha alimentação não é muito saudável, eu gosto muito de arroz, massas, frituras e doces. Eu moro longe da escola e como a tarde eu tenho que levar e buscar meus irmãos aqui na escola, então eu caminho muito durante a semana. Talvez seja por isso que eu não engordo.

Lauro: Talvez seu metabolismo seja acelerado.

(Grupo-classe, etapa 2)

Percebemos que a indagação da professora-pesquisadora sobre ao se considerar o IMC de Duda poderia ser indicado seu estado nutricional, colocou Dulce, Maria, Aline, Duda e Lauro diante de uma situação-problema que contribuiu para que refletissem sobre a busca de encontrar argumentos para responder a indagação. Vigotski (2007a) menciona que por meio de um problema o estudante conduz suas operações mentais para atingir os estágios mais elevados do pensamento conceitual, na busca de resposta.

O diálogo da etapa 2, *índice de massa corporal*, também permitiu desvelar o significado da palavra metabolismo, após a professora-pesquisadora provocar os estudantes sobre o assunto. Nas falas a seguir, notamos que as respostas apresentadas pelos estudantes revelam os conceitos espontâneos que, para Vigotski (2007a), são desenvolvidos naturalmente por eles, a partir de suas vivências cotidianas.

Luana: Metabolismo é algo relacionado ao nosso corpo. Quando ele é acelerado a pessoa pode comer muito e não engorda. Meu metabolismo é lento.

Lauro: Repeti o que escuto minha mãe falando.

Gustavo: Meu pai fala que na minha idade comia como eu e não engordava. Disse para eu aproveitar o quanto o meu metabolismo é acelerado.

(Grupo-classe, etapa 2)

Segundo Vigotski (2007a) os conceitos espontâneos caminham em direção a um nível maior de abstração direcionando ao conceito científico. Este caminho para a *obutchénie* dos

conceitos científicos se torna possível devido a organização sistemática da escola. Neste sentido, com intuito de orientar o desenvolvimento do conceito de metabolismo que os estudantes trazem arraigado do seu cotidiano para o desenvolvimento do conceito científico, a professora-pesquisadora pediu que a classe se dividisse em grupos com quatro integrantes para a leitura do texto intitulado *Metabolismo lento ou acelerado?*, assistir ao vídeo nomeado *Como o Seu Metabolismo Influencia a Perda de Peso*¹⁵⁴ e registro sobre o que compreenderam sobre tema para posterior socialização, no grupo-classe, de suas considerações. Assim, no diálogo a seguir, podemos perceber que o sentido pessoal de cada estudante em relação a palavra metabolismo foi se aprimorando, aproximando o estudante do significado social.

Professora-pesquisadora: Qual grupo quer começar a comentar sobre o que compreenderam após a leitura do texto e de assistir ao vídeo?

Luana: O texto e o vídeo apresentam o que é metabolismo, a sua função e os tipos. Entendemos que metabolismo é o agrupamento de todas as modificações que acontecem com as substâncias químicas no interior do nosso organismo. Temos dois tipos de metabolismo: o catabolismo que é responsável pela quebra de moléculas e o anabolismo responsável pela produção de novas substâncias.

Gustavo: O nosso corpo trabalha o tempo todo, formando substâncias e quebrando-as e juntando as moléculas do que nos alimentamos para formar novas. Esse conjunto de reações e trabalho do nosso corpo podemos chamar de metabolismo.

Henrique: Como Gustavo e Luana disseram o catabolismo é o conjunto de reações de quebra de moléculas que liberam a energia, como acontece na respiração. Já no anabolismo que será gasta energias para a formação de novas moléculas.

Professora-pesquisadora: Vimos que o metabolismo é o conjunto de todas as reações químicas que acontecem no interior dos organismos vivos. E que tem duas funções importantes que são: o anabolismo e o catabolismo. Na adolescência, o organismo faz mais catabolismo ou anabolismo?

Dulce: Como estamos em fase de crescimento a produção de hormônios é muita, acredito que temos muita produção de moléculas, que seria o anabolismo. Com isso comemos muito para liberar energia que possa ser gasta.

Professora-pesquisadora: Então podemos afirmar que a Duda tem metabolismo acelerado?

Luana: Podemos falar que ela está numa fase em que acontece mais anabolismo, porque está na adolescência e a Duda caminha muito, então são consumidas mais energias.

(Grupo-classe, etapa 2)

Quando a estudante Luana relata “Podemos falar que ela está numa fase em que acontece mais anabolismo, porque está na adolescência e a Duda caminha muito, então são consumidas mais energias”, notamos que ela conseguiu se apropriar do significado da palavra relacionando

¹⁵⁴ Vídeo disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=G0BGvHEc1Pg>. Acesso em: 26 mar. 2022.

com a sua vivência. Com isso, podemos averiguar que o sistema experimental aqui utilizado, contribuiu para que a estudante fizesse a leitura de uma situação a partir de conhecimento teórico, destoando da concepção unicamente empírica, como destaca Zankov (1968).

Após os grupos apresentarem o que compreenderam sobre o termo metabolismo e a indagação da professora-pesquisadora sobre o que poderiam concluir em relação ao $IMC = 30,86 \text{ kg/m}^2$, houve um diálogo sobre atividade física, exercício físico e esporte:

Professora-pesquisadora: Alguma dupla usou o IMC acima de 30 kg/m^2 e gostaria de explicar como resolveu. Para isso, converse com seu par para verificar se ele não importa de você apresentar.

Tetê: Eu dividi a massa dele que é 80 kg pelo IMC que é $30,86$. E em seguida tirei a raiz quadrada de $2,59$. A altura foi aproximadamente $1,60 \text{ m}$. Também encontrei um valor aproximado, pois não usei todas as casas decimais do IMC que ele me passou e aproximei o resultado da divisão 80 por $30,86$.

Professora-pesquisadora: Turma o que podemos concluir em relação ao $IMC = 30,86 \text{ kg/m}^2$?

Luana: Que ele está na pré-obesidade.

Tetê: O nível de gordura está alto, ele precisa fazer uma dieta.

Lauro: Seria bom, fazer *crossfit*, meu irmão faz já emagreceu muito.

Henrique: Fazer atividade física ajuda muito.

Tetê: Ele já faz atividade física nas aulas de Educação Física e vindo para escola. O ideal seria fazer exercício físico.

Luana: Atividade física nós fazemos quando estamos vindo para a escola ou limpamos a casa ou até mesmo no jogo de basquete nas aulas de Educação Física. Já o exercício físico exige uma rotina para alcançar o objetivo.

Henrique: Verdade Tetê. Com o exercício físico ele terá melhor resultado, já que é uma atividade física que precisa acontecer de forma organizada, como aprendemos na aula da Jú.

Lauro: Naquela aula ninguém sabia a diferença, todos nós falamos que era a mesma coisa.

Risadas

(Grupo-classe, etapa 2)

Pelo diálogo, notamos que os estudantes compreendem a diferença entre exercício físico e atividade física, visto que Tetê afirma: “Ele já faz atividade física nas aulas de Educação Física e vindo para escola. O ideal seria fazer exercício físico.” A estudante Luana tem consciência das divergências entre os dois conceitos, visto que ela aponta: “Atividade física nós fazemos quando estamos vindo para a escola ou limpamos a casa ou até mesmo no jogo de basquete nas aulas de Educação Física. Já o exercício físico exige uma rotina para alcançar o objetivo.” Há evidência da manifestação do lado forte do conceito científico, visto que esse é “a capacidade de usar livremente sua ‘prontidão para a ação’.”¹⁵⁵ (VIGOTSKI, 2007a, p. 269,

¹⁵⁵ “su lado fuerte es la capacidad de utilizar libremente su «disposición a la acción».” (VIGOTSKI, 2007a, p. 269).

tradução nossa). Estas afirmações nos possibilitam compreender que a forma de proposição das etapas da tarefa permite aos estudantes articularem os assuntos tratados em outras disciplinas com o estudado no momento, nas aulas de matemática.

Nas falas de Henrique [“Verdade Tetê. Com o exercício físico ele terá melhor resultado, já que é uma atividade física que precisa acontecer de forma organizada, como aprendemos na aula da Jú”] e de Lauro [“Naquela aula ninguém sabia a diferença, todos nós falamos que era a mesma coisa”], observamos que os estudantes consideravam, na aula de Educação Física, que ambas as expressões tinham o mesmo significado e apresentavam apenas os conceitos espontâneos. Porém, a sistematização e apropriação do conceito científico de cada termo aconteceram nas etapas da tarefa propostas na escola, pois

O desenvolvimento do conceito científico ocorre nas condições do processo de *obutchénie*, que é uma forma particular de cooperação sistemática entre o pedagogo e a criança; no curso dessa cooperação, as funções psicológicas superiores da criança amadurecem, com a ajuda e participação do adulto.¹⁵⁶ (VIGOTSKI, 2007a, p. 268, tradução nossa)

Aproveitando o tema *esporte*, trabalhado concomitantemente nas aulas de Ciências, Educação Física e Matemática, e o diálogo sobre atividade física e exercício físico a professora-pesquisadora provocou os estudantes a refletirem sobre o significado de esporte e as respostas foram registradas no quadro branco. Esses conceitos não estavam claros para os estudantes como consta nas interloquções a seguir:

Sara: Esporte é uma atividade física.

Aline: Temos vários esportes: futebol, basquete, vôlei e assim vai.

Henrique: Acho que é um exercício físico, porque tem que treinar muito.

Professora-pesquisadora: No esporte cada time joga do jeito que melhor convier para os seus jogadores?

Bia: Não. No jogo temos regras.

Filipe: Sei exemplificar os esportes, mas falar o que é difícil.

[...]

Professora-pesquisadora: Os jogadores jogam por diversão?

Lauro: O jogador escolhe um esporte porque gosta de praticar ele, mas eles gostam de competir.

Enzo: E como gostam de disputar.

[...]

¹⁵⁶ “El desarrollo del concepto científico se produce en las condiciones del proceso de enseñanza, que es una forma particular de cooperación sistemática entre el pedagogo y el niño, en el transcurso de esta cooperación maduran las funciones psicológicas superiores del niño, con la ayuda y participación del adulto.” (VIGOTSKI, 2007a, p. 268).

Professora-pesquisadora: Analisando as respostas que vocês deram, vamos escrever o significado de esporte. (A professora iniciou a frase para que os estudantes completassem: Esporte é..).

Bia: Uma atividade física organizada que tem regras.

Aline: Que tem o intuito de competir.

Filipe: Podemos acrescentar que ensina o espírito esportivo.

(Grupo-classe, etapa 2)

Zankov (1984) ressalta que é importante o professor e o estudante atuarem em conjunto na busca de soluções dos problemas que surgem. Identificamos essas particularidades no diálogo, visto que para a compreensão do significado de esporte foram necessárias algumas intervenções da professora-pesquisadora que, em conjunto com os estudantes, anunciaram o sentido da palavra esporte.

Nas interlocuções, notamos que a comunicação entre estudantes e a professora-pesquisadora foi propício para que eles se utilizassem da oralidade e dos sentidos que dominavam em relação à expressão esporte, compartilhando suas impressões e o desenvolvimento dos seus vocabulários.

A etapa 2, *índice de massa corporal*, além de proporcionar o desenvolvimento de conceitos científicos, suscitou o assunto alimentação saudável logo após a professora-pesquisadora questionar aos estudantes se “Apenas o exercício físico é suficiente para emagrecer?”. Esse fato pode ser observado no diálogo a seguir:

Professora-pesquisadora: Apenas o exercício físico é suficiente para emagrecer?

Aline: Se não diminuir a quantidade de comida, terá que fazer muito tempo de exercício físico.

Lauro: Precisa diminuir a comida e seria interessante comer de forma saudável.

Dulce: Estamos numa fase em que nosso metabolismo é acelerado, mas precisamos ficar atentos para ingerir alimentos ricos em gorduras que irão liberar mais energia do que precisamos.

Professora-pesquisadora: Como ter uma alimentação saudável?

Henrique: Alimentos mais naturais como frutas, verduras e legumes.

Dulce: Comer mais carnes brancas.

Filipe: Evitar os produtos industrializados.

Enzo: Podemos comer pizzas, pastéis, hambúrguer e doces, porém tem que ser em pequenas quantidades e não pode ser diariamente.

Professora-pesquisadora: Isso, turma. Temos que dar preferência para o consumo de alimentos com alto valor nutritivo. E como o Enzo falou, podemos comer lanches, mas em pouca quantidade. Vimos que nosso organismo precisa de energia, assim quais alimentos poderemos consumir que são ricos em carboidratos?

Paula: Batata, mandioca e arroz. Minha mãe sempre que está de dieta consome batata ou mandioca no lugar do arroz.

Sara: Pães, aveia e cará.

[...]

Marcos: Podemos falar que são todos os cereais e o grupo formado pela batata e cara não lembro qual é nome dele.

Silêncio

Professora-pesquisadora: São os tubérculos. Onde estão acumulados os nutrientes da mandioca, da cenoura e da beterraba?

Henrique: Neste caso os nutrientes estão nas raízes. E no caso dos tubérculos estão no caule.

[...]

Professora-pesquisadora: Muito bem, como vocês citaram os cereais e seus derivados, as raízes e os tubérculos são ricos em carboidratos. Esses precisam ser consumidos em menos quantidades por dia. Já as frutas, verduras e legumes precisam ser consumidos em grande quantidade durante o dia. Quais os nutrientes desses alimentos?

Bia: São fontes de fibras e vitaminas.

Fran: Alimentos ricos em fibra ajuda no funcionamento do intestino.

Gustavo: Rico em água.

[...]

Duda: Também são ricos em minerais.

Professora-pesquisadora: Também precisamos ingerir alimentos de origem animal. Vocês conseguem citar alguns nutrientes presentes nos alimentos de origem animal?

Tetê: As proteínas e cálcios que importantes para o fortalecimento das unhas e cabelos.

Fran: É rico em ferro também, sempre tenho que comer fígado devido a minha anemia.

[...]

Professora-pesquisadora: Como podemos ter uma vida saudável?

Dulce: Pela nossa conversa ficou claro que precisamos consumir em menor quantidade diária alimentos que tem muito carboidrato e proteína e uma maior quantidade de alimentos ricos em fibras e vitaminas.

Luana: Isso. Temos que ter uma dieta balanceada e também fazer exercícios físicos, ajudando nosso metabolismo.

Henrique: Como lemos no face a alimentação saudável, nos ajuda a prevenir doenças e nos dá mais ânimo.

Bia: Os alimentos vermelhos são excelentes oxidantes que ajudam a reduzir o desenvolvimento de doenças do coração.

(Grupo-classe, etapa 2)

A etapa 2, *índice de massa corporal*, permitiu que os estudantes relembassem os conteúdos estudados em Ciências e refletissem sobre a importância de uma boa alimentação, manifestando suas conclusões, como podemos observar nas falas de Dulce e Luana ao final do diálogo apresentado anteriormente.

Entendemos que o diálogo possibilitou que os estudantes melhores se relacionassem com os colegas e consigo próprio, conscientizando-se da importância de uma boa alimentação, desenvolvendo e compreendendo um vocabulário específico. Este fato contribuiu para que os estudantes analisassem, comparassem, sintetizassem, generalizassem e tirassem conclusões como ressalta N. G. Kazansky (1947) citado por L. V. Zankov (1968). Segundo Vigotski

(2007a), a palavra é o instrumento da atividade comunicativa que orienta o estudante no desempenho de novas práticas, quando este concentra na palavra, nos significados e interrelações.

Nos diálogos e registros apresentados nos três episódios, há evidência que o experimento microciclo proposto na aula de matemática viabilizou o desenvolvimento integral dos estudantes em suas diversas dimensões e tiveram presentes “não apenas os processos cognitivos, mas também a vontade e os sentimentos.”¹⁵⁷ (ZANKOV, 1968, p. 25, tradução nossa). Além disso, percebemos a importância das disciplinas de Matemática, Ciência e Educação Física para o desenvolvimento integral dos estudantes, como enfatiza L. V. Zankov, de que na “educação primária não há disciplinas principais e não principais, cada disciplina é significativa para o desenvolvimento integral da criança, o que significa o desenvolvimento de suas habilidades cognitivas, emocionais-volitivas, morais e estéticas.”¹⁵⁸

Logo, para alcançar o que propõe L. V. Zankov, organizamos as etapas da tarefa baseadas em ações que abarcaram o conceito de equações do 2º grau considerando que esse orienta o controle e a possibilidade de modificações dos elementos, promove o sentido e o significado. Dessa maneira, foi preciso pensar as ações, que direcionassem os estudantes a uma apropriação que estivesse em consonância com as potencialidades formativas presentes em seu processo de desenvolvimento.

Destarte, no sistema zankoviano, o estudante tem o papel de protagonista em seu processo de *obutchénie* e desenvolvimento, que o impulsiona a criatividade e possibilidade de crescimento pessoal. Cabe ao professor, a organização intencional de uma *obutchénie* do conceito que deseja desenvolver, buscando contemplar os cinco princípios e as orientações metodológicas do sistema zankoviano, a fim de incorporar no seu trabalho os quatro aspectos fundamentais para se ter uma boa aula: Perspectiva interdisciplinar; Apresentação exponencial do assunto; elemento de incongruência ou dissonância e a inclusão ou incorporação. (ZANKOV, 1984).

Na próxima seção, apresentamos uma síntese do caminho percorrido, algumas considerações sobre a pesquisa, inferimos algumas respostas para a questão de pesquisa e como

¹⁵⁷ “не только познавательные процессы, но также волю и чувства.” (ЗАНКОВ, 1968, p. 25).

¹⁵⁸ “В системе Л.В. Занкова реализуется одно из основных положений: в начальном образовании нет главных и неглавных предметов, каждый предмет значим для общего развития ребенка, под которым подразумевается развитие его познавательных, эмоционально-волевых, нравственных и эстетических возможностей.” Disponível em: <https://schoolguide.ru/index.php/progs/archive/zankov.html>. Acesso em: 20 abr. 2022.

os objetivos foram alcançados e, concluimos apresentando sugestões de questões para pesquisas futuras que merecem um olhar especial.

6 AS TRILHAS DA INVESTIGAÇÃO E O DESENVOLVIMENTO DA PESQUISADORA

Olhar para trás após uma longa caminhada pode fazer perder a noção da distância que percorremos, mas se nos detivermos em nossa imagem, quando a iniciamos e ao término, certamente nos lembraremos o quanto nos custou chegar até o ponto final, e hoje temos a impressão de que tudo começou ontem. Não somos os mesmos, mas sabemos mais uns dos outros.

(ROSA, 2001, p. 26)

As palavras de Guimarães Rosa nos mobilizam a refletir sobre a trajetória percorrida até aqui e o quanto, em nosso caminhar, as dúvidas, as angústias e o processo de *obutchénie* nos permitiram desenvolver. Isso só foi possível devido às contribuições de cada pessoa que doou um pouco de si para nos ajudar a vencer as inquietudes e as necessidades que nos mobilizaram a realizar esta pesquisa.

Nestas palavras finais, recuperamos o percurso percorrido na caminhada vivida durante a trajetória da pesquisa, a qual temos a impressão de que se iniciou há poucos dias, mas é rica em detalhes que proporcionaram o desenvolvimento de todos os envolvidos. Anunciamos, ainda, outras necessidades que precisam ser superadas quando almejamos, no processo de *obutchénie*, o desenvolvimento integral do estudante e as contribuições da organização didática para os estudantes pós-pandemia Covid-19.

Após a escrita e reescrita em relação à questão central que mobilizou nossa pesquisa, elegemos como nossa questão de investigação: *Quais as contribuições do processo de obutchénie de equações do 2º grau baseado no sistema zankoviano para o desenvolvimento do estudante?*. A partir dela, sentimos a necessidade de organizarmos a *obutchénie* com situações-problema desafiadoras que contemplassem os princípios zankovianos, possibilitando que os estudantes fossem colocados em um movimento que contribuísse para seu desenvolvimento cognitivo, volitivo, emocional, ético e moral. (ZANKOV, 1963, 1968, 1984).

Em um de seus princípios didáticos, Zankov (1963, 1968, 1984) destacou a importância da *obutchénie* dos conhecimentos teóricos como basilares para a tomada de consciência e como mobilizadores do desenvolvimento psíquico do ser humano, além da necessidade de estruturação de tal processo, viabilizando o desenvolvimento integral do estudante. Diante disto, tomamos como objeto de estudo analisar as contribuições do processo de *obutchénie* de

equações do 2º grau baseado no sistema zankoviano para o desenvolvimento integral do estudante, o qual corresponde ao nosso objetivo geral.

No movimento de pesquisa, nos vimos em desenvolvimento cognitivo, emocional, volitivo, moral e ético ao buscamos organizar um experimento didático no formato microciclo que promovesse a *obutchénie* em cada estudante em particular e que cumprisse o objetivo educacional de apropriação dos conceitos algébricos e de equações do 2º grau por parte dos envolvidos, enfatizando a apropriação de conceitos teóricos. Além disso, fomos desafiadas a planejar a tarefa de modo a ser provocativa, para que a *obutchénie* induzisse a operações mentais mais complexas, propiciando o desenvolvimento rápido e completo do estudante; a manter conteúdos variados e em um ritmo acelerado, para que os estudantes se sentissem mais instigados a estudar pela variedade do que pela repetição; a provocar no estudante a consciência de seu próprio processo de *obutchénie*. (ZANKOV, 1963, 1968, 1984).

Por compreendermos a educação como um processo de apreensão de uma cultura produzida historicamente que possibilita aos sujeitos a apropriação do desenvolvimento da humanidade e a superá-lo assimilando novas qualidades aos conceitos já produzidos por diferentes povos (MOURA, 2004), nos debruçamos a compreender os conceitos algébricos de fluência, variável e campo de variação, assim como do aspecto nuclear das equações do 2º grau, de modo que esse movimento contribuiu para o nosso próprio processo de *obutchénie* e desenvolvimento. Nosso objetivo se consolidava na organização da tarefa e no delineamento das ações e procedimentos que iriam colaborar para a apropriação dos conceitos teóricos pelos estudantes e nossas ações consistiam na utilização de recursos metodológicos que poderiam corroborar para a *obutchénie*, isto é, criação ou adaptação de situações-problema que desencadeariam nos estudantes a necessidade de assimilar tal conceito, fruto de nosso interesse enquanto docente e pesquisadora.

As inquietações e as necessidades direcionadas ao objeto deste estudo - analisar as contribuições do processo de *obutchénie* de equações do 2º grau baseado no sistema zankoviano para o desenvolvimento integral do estudante - estiveram relacionadas à nossa formação como estudante da Educação Básica e à nossa preocupação durante a prática docente.

Procuramos, ao contrário do que nos fora ofertado quando estudante, uma *obutchénie* que proporcionasse aos sujeitos de nosso estudo a formação de conceitos matemáticos, em especial, de equações do 2º grau, considerando os aspectos elencados por estudiosos da perspectiva da THC e adotando enquanto metodologia o experimento zankoviano, em especial, o experimento no formato microciclo.

Com os estudos realizados, percebemos que dois aspectos da Teoria Histórico-Cultural foram substanciais para a condução de nossa pesquisa. O primeiro está associado ao objeto matemático, ao processo de *obutchénie* do conceito de equações do 2º grau que fundamentou o conhecimento teórico como uma teia de elementos culturalmente constituídos ao longo da história e que foi sistematizado em diferentes símbolos, possibilitando compreender a *obutchénie* como a apropriação dos elementos culturais, historicamente produzidos por sistemas organizados de sínteses, fruto de abstrações, partindo do abstrato ao concreto.

Como segundo aspecto, consideramos o sujeito que se desenvolve de forma integral, como propõe a *Obutchénie* Desenvolvimental. Assim, escolhemos compreender e adotar as particularidades do sistema zankoviano para propiciar o desenvolvimento integral dos estudantes nas dimensões cognitivas, volitivas, emocionais, ética e moral.

Essas singularidades do objeto matemático e do sujeito propõem a organização de um sistema que assegure o conteúdo escolar como meio para o desenvolvimento integral do estudante, e não como fim. Sabemos que muitos são os sistemas que contemplam essas características, mas compreendemos que o sistema zankoviano, com seus princípios didáticos e metodológicos e ênfase no afetivo, apresenta condições objetivas para a sistematização da *obutchénie* de matemática; no nosso caso, no Ensino Fundamental.

O sistema proposto por Zankov (1963, 1975, 1984) está fundamentado em cinco princípios didáticos e quatro orientações metodológicas, enfatizando a emoção e a vontade nas relações estudante-professor-conteúdo, vislumbrando ações que impulsionem o sujeito à apropriação dos conceitos, de forma que ocorra a passagem do plano intersíquico para o intrapsíquico.

Para tentar aproximar ao máximo da teoria de Zankov (1984), procuramos nos apropriar dos princípios psicológicos que fundamentam a sua teoria, tais como: o desenvolvimento da psique da criança de natureza social, sendo a fonte do desenvolvimento a cooperação e a *obutchénie*; a unidade entre consciência e atividade; as etapas concernentes à idade; a zona de desenvolvimento possível, construto elaborado por L. S. Vigotski.

Em seguida, buscamos na literatura entender os cinco princípios didáticos propostos por Zankov (1968, 1984, 2017) sobre como direcionar a organização do conteúdo e da metodologia de *obutchénie* que representam uma unidade. Os princípios estão interligados entre si, sendo que no último princípio se define o campo de ação dos quatro primeiros princípios e que a organização da *obutchénie* é fundamental para alcançar os objetivos de cada um. Também nos atemos às orientações metodológicas do sistema em questão - *a multilateralidade, o caráter do*

processo, as colisões e a variabilidade -, visto que nelas o foco está no desenvolvimento da atividade psíquica dos estudantes e o processo didático é constituído por etapas que têm relação orgânica e integrada, em que o confronto com o incompreensível gera o trabalho criativo e ativo do pensamento e a flexibilidade permite organizar a *obutchénie* considerando as particularidades do professor, do estudante e da escola. Vale ressaltar que as orientações metodológicas estão sujeitas aos princípios didáticos do sistema zankoviano.

Compreendido o sistema zankoviano, partimos para o estudo de álgebra, em especial equações do 2º grau, fundamentado na THC, que nos ofereceu sustentações teóricas relacionadas à formação de conceitos matemáticos e nos permitiu desenvolver o experimento microciclo fundamentado na teoria de Zankov (1968, 1984). Neste processo, entendemos ser fundamental o estudante perceber como o conceito se constituiu historicamente em diversas práticas culturais, a partir das necessidades humanas, apresentando sentido e significado, possibilitando a apropriação do conceito.

Na busca por compreender o sistema zankoviano e os conceitos matemáticos baseados na THC, buscamos leituras referentes à Vigotski (1991, 1995, 1998, 2007a, 2007b), Zankov (1963, 1968, 1977, 1984, 2017), Caraça (1951), Cedro (2004), Lanner de Moura e Sousa (2005, 2008), Rosa (2009), Sousa (2004, 2018) e Sousa, Panossian e Cedro (2014), a fim de nos embrenhar em um meio que oportunizasse a apropriação de conhecimentos acadêmicos concatenados à nossa prática na escola de Educação Básica.

Ao nos apropriar de tais conhecimentos, como professora de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, vislumbramos a possibilidade de vivenciar, na prática, a organização de uma *obutchénie* que envolvesse os estudantes e conhecimentos teóricos que propiciassem seu desenvolvimento integral.

No desenvolvimento do experimento microciclo, foram desvelados dois isolados (CARAÇA, 1951) que consideramos como um conjunto de elementos que revelaram interação, significação conceitual, além de suscitar ações que nos possibilitaram analisar o processo de formação de conceitos e o desenvolvimento integral dos estudantes. Desta maneira, apreendemos reflexões típicas de cada estudante e diálogos ocorridos em grupos, possibilitando-nos analisar e justificar manifestações que, sem esse refinamento, poderíamos proferir juízos injustificáveis e sem fundamentação. Apesar de neste relatório apresentarmos diálogos e/ou registros de alguns estudantes, ressaltamos que toda a turma colaborou do mesmo modo, tanto nos diálogos quanto nas etapas propostas.

Os estudantes estiveram em processo de *obutchénie* e desenvolvimento em que, mobilizados a partir do movimento propiciado pela tarefa proposta, interagiram e compartilharam conhecimentos segundo suas experiências e possibilidades. Por meio do movimento de interação, puderam se apropriar do conceito envolvido, atribuindo nova qualidade ao processo de *obutchénie* e havendo predominância do refletir ao invés do saber fazer, do conhecimento teórico em detrimento do conhecimento empírico, em um ambiente de respeito a ideias pronunciadas pelo outro e de incessantes combinados.

Ao vivenciarem a situação-problema nomeada *Trajectoria da bola*, os estudantes manifestavam a necessidade de relacionar as grandezas envolvidas na situação-problema, para poderem, mais tarde, vivenciar o momento de escrita de uma função quadrática para determinar a distância em função do tempo, em que a necessidade consistia em compreender o que é variável e campo de variação para tentar escrever a função solicitada. Notamos, no desenrolar dessa tarefa, que ela se dirigia à satisfação de uma necessidade mais geral, em que as necessidades primitivas se modificaram e se converteram em novas, estando relacionadas ao momento em que o sujeito vivência e ao motivo que o instiga.

Observamos que os estudantes, em nosso estudo, atribuíram nova qualidade às aulas de matemática quando passaram a compartilhar suas ideias, ouvir e argumentar com o outro, negociar coletivamente significados instigando um processo de *obutchénie* coletivo, sendo protagonistas em todas as aulas vivenciadas.

Comprendemos que todo o movimento vivenciado no desenvolvimento do experimento microciclo proporcionou uma aproximação entre professora-pesquisadora e os estudantes e entre os estudantes, que se sentiram confortáveis e tiveram a confiança de expor suas ideias e dúvidas devido ao ambiente encorajador gerado baseado nos princípios didáticos e metodológicos propostos pelo sistema zankoviano. Ademais, a forma de organização e conduta do experimento microciclo contribuiu para nossa reflexão ao longo de todo o processo, pois sempre sentíamos a necessidade de reorganizar nossas ações por meio de uma contínua avaliação pautada nas ações e operações dos estudantes no decorrer da proposta.

Ao organizarmos um experimento microciclo, conseguimos: descobrir as potencialidades de estudos elaborados nos princípios didáticos do sistema zankoviano para o desenvolvimento integral dos estudantes, em aulas de matemática; cumprir com o objetivo da apropriação do conceito de equação do 2º grau; investigar as ações dos estudantes frente às etapas propostas na tarefa, concluindo que estes tornam-se sujeitos ativos no seu processo de

obutchénie; concluir que a tarefa possibilitou o desenvolvimento do estudante nas dimensões cognitivas, volitivas, emotivas, ética e moral.

A experiência de participar do experimento microciclo nos possibilitou destacar aspectos positivos, que nos dão subsídios para responder à nossa questão de pesquisa, *quais as contribuições do processo de obutchénie de equações do 2º grau baseado no sistema zankoviano para o desenvolvimento do estudante?*, nos viabilizando reconhecer a importância dos estudantes articularem os conhecimentos anteriormente adquiridos com os conhecimentos em desenvolvimento para a formação do conceito de equações do 2º grau como requisito para que os estudantes se mobilizassem a concluir cada etapa da tarefa; observar que os estudantes tornaram-se sujeitos ativos no processo de *obutchénie*, conduzindo-o com responsabilidade uma vez que os diálogos eram direcionados mediante as necessidades apresentadas por eles; perceber que a organização intencional das ações e os diálogos entre os estudantes ou entre estudantes e professora-pesquisadora foram impulsionados por reflexões ocasionadas pela vivência da situação-problema em que estavam envolvidos; entender que o nível de dificuldade e a variedade de conteúdos novos propostos nas situações-problema foram provocativas impulsionando as operações mentais mais complexas promovendo o desenvolvimento do estudante nos aspectos morais, éticos, volitivos, emocionais e cognitivos articulado com a formação do conceito de equações do 2º grau; compreender que a relação estudantes e situações-problema se consolidou e se fortaleceu conforme atribuíam sentidos e significados aos desafios que tentavam solucionar e pelas relações sociais que se desenvolviam; reconhecer que as soluções coletivas das situações-problema propostas foram de suma importância, uma vez que aprenderam a ouvir o outro, buscaram complementar ou reiterar diálogos expressos por colegas ou conflitar ideias a fim de melhor elucidar o problema apresentado; admitir a relevância da formação do conceito teórico em detrimento da manipulação de símbolos matemáticos contribuiu para que os estudantes apropriassem do conceito de equações do 2º grau, desenvolvendo as situações-problema de forma consciente e compreensiva no lugar de apenas encontrar as raízes da equação do 2º grau por meio da manipulação da fórmula resolutiva; observar a importância da articulação do conteúdo de matemática com outras áreas do conhecimento para haja o desenvolvimento integral do estudante e, por último, acompanhar reflexões sobre a postura dos estudantes em relação às suas opiniões diante das argumentações dos colegas que contribuíam para o desenvolvimento ético do grupo.

As análises dos fenômenos e a retomada dos estudos teóricos nos possibilitaram apreender a potencialidade da tarefa proposta, elucidar a historicidade do movimento humano

(Método dos árabes; Método Brahmagupta); compreender os movimentos presentes no contexto social dos estudantes (Movimentos numéricos, situações-problemas propostas para o equacionamento) e as diferentes linguagens da álgebra (retórica, sincopada e simbólica) (RÍBNIKOV, 1987), nas etapas da tarefa: A área do campo de futebol em função da largura do campo; Compreendendo como os árabes resolviam equação do 2º grau; Resolvendo equações do segundo grau por produtos notáveis e Direto do Túnel do tempo.

Durante o processo, fizemos, também, menção aos outros tipos de linguagem presentes no movimento histórico álgebra (palavras e figuras) (SOUSA, 2004) e, ao conduzir os estudantes à apropriação do conceito de equações de 2º grau e às possíveis estratégias de resolução delas, procuramos não caminhar para apresentação do conceito, mas para a sua apropriação, conduzindo para a assimilação do conhecimento teórico.

A partir dos estudos teóricos realizados e do desenvolvimento do experimento microciclo, identificamos dois isolados no material empírico produzido, organizados em episódios e cenas e, antes de elucidar as inferências realizadas em cada episódio, nos atemos a lembrar o que foi proposto em cada tarefa, de forma sucinta, considerando que algumas perpassam mais de uma cena.

A etapa 1, *trajetória da bola*, possui ações que possibilitaram aos estudantes a sistematização da *obutchénie* e desenvolvimento na apropriação de equações do 2º grau incompleta do tipo $ax^2 = -c$. Essa situação gerou nos estudantes a necessidade de descobrir o comprimento do campo de futebol, uma situação nova, haja visto que em suas vidas escolares na maioria das vezes foram apresentados problemas matemáticos com respostas fixas e imutáveis, oposta à situação-problema proposta que possibilitou experimentar número desconhecido e flexível, articulando o conceito de equações do 2º grau com outros como os de movimento, variação, relação entre quantidades e de função. Também foi abordada a ideia do campo de variação, onde conseguimos dialogar sobre limites máximos e mínimos para solucionar a situação proposta e como se apropriaram da forma de resolver a equações do 2º grau incompleta, por meio dos princípios das operações inversas, termos semelhantes, para então determinar o valor desconhecido.

Na etapa 2, *índice de massa corporal*, uma das ações desenvolvidas consistiu em o estudante encontrar a altura do colega conhecendo a sua massa e o seu IMC. Além disso, os estudantes tiveram a oportunidade de sistematizar os dados qualitativos e quantitativos da tabela de IMC e dos valores de referência, proporcionando momentos de reflexão sobre os cuidados

com a alimentação e a saúde, impulsionando a compreensão de alguns conhecimentos como metabolismo, anabolismo, catabolismo e esporte.

A etapa 3, *a área do campo de futebol em função da largura do campo*, contemplou ações que despertaram nos estudantes a necessidade de apreender uma maneira para encontrar raízes de equações do 2º grau completa. Os estudantes se apropriaram das particularidades das equações do 2º grau, compreendendo os seus termos e o campo de variação dos coeficientes para que fosse denominada de equação do 2º grau completa ou incompleta.

E, na etapa 4, *compreendendo como os árabes resolviam equação do 2º grau*, as ações contribuíram para compreensão do aspecto nuclear da equação do 2º grau completa e a relação desse conceito com outros, como os de movimento e relação entre quantidades e função, com resgate histórico de como a civilização árabe relacionava a álgebra com a geometria e, refletiram sobre as vantagens de se utilizar o método apresentado por esse povo.

Na etapa 5, *resolvendo equações do 2º grau por produtos notáveis*, contempla ações que possibilitaram aos estudantes reescreverem a equação do 2º grau utilizando a linguagem simbólica e vivenciarem a resolução por meio de produtos notáveis. Os estudantes apropriaram-se das estratégias de resolução das equações de 2º grau, estabelecendo a relação entre os coeficientes das equações do 2º grau e suas raízes, para então determinar o valor desconhecido quando se tem uma equação do 2º grau completa. Ressaltamos ainda que, durante esse processo, os estudantes passaram a se reconhecer com o objeto de estudo, quando, por exemplo, atribuíam à incógnita a letra inicial de seus nomes.

Já na etapa 6, *direto do túnel do tempo*, as ações oportunizaram aos estudantes transcreverem a resolução apresentada na linguagem sincopada para a linguagem simbólica. Nesta etapa, os estudantes atribuíram significados aos símbolos utilizados, vivenciaram o movimento do conceito e formalizaram a escrita por meio da linguagem algébrica.

E por último, a etapa 7, *registrando as atividades mentais*, os estudantes registraram o que compreenderam do conceito de equações do 2º grau, apresentando situações em que esse conceito é utilizado. Averiguamos, nesta etapa, que as ações das etapas anteriores proporcionaram trabalhar os atributos internos e externos do conceito (DAVIDOV; MÁRKOVA, 1987) pelos quais os estudantes entenderam a necessidade dos conceitos algébricos, o movimento de desenvolvimento das linguagens que permitem apresentá-lo, a garantia do movimento de fluência no controle de quantidades, garantido pelo campo de variação, assim como relação entre os coeficientes das equações do 2º grau e suas raízes,

entendendo que a ação expressa-se um movimento quantitativo de permanência e mutabilidade. (ROSA, 2009).

Ao voltar nosso olhar para o isolado 1, *Relação entre conceitos teóricos, emoção e a vontade*, procuramos enfatizar o aspecto potencializador para o processo de *obutchénie* e desenvolvimento que as etapas possuem quando organizadas considerando as particularidades dos conceitos algébricos como a fluência, campo de variação e variável e, o aspecto nuclear das equações do 2º grau quando fundamentadas nos princípios proposto por Zankov (1984) nos quais são substanciais a relação emoção e vontade.

Este episódio versou sobre a formação de atividades mentais para o desenvolvimento dos conceitos algébricos e, para analisar a apropriação do conceito de equação do 2º grau pelos estudantes, buscamos nas etapas 1. *Trajatória da bola*; 3. *A área do campo de futebol em função da largura do campo*; 4. *Compreendendo como os árabes resolviam equação do 2º grau*; 5. *Resolvendo equações do 2º grau por produtos notáveis*; 6. *Direto do túnel do tempo* e, 7. *Registrando as atividades mentais*, diálogos e registros que nos revelassem a apropriação dos conceitos algébricos, as emoções e vontade presentes neste movimento. Neste episódio, apresentamos como os conceitos algébricos foram apreendidos pelos estudantes e os diálogos que nos revelaram os princípios didáticos zankovianos presentes na tarefa educativa, nos impulsionando a compreender que a formação do conceito de equações do 2º grau foi possível por dois motivos: i. por considerarmos os conceitos da álgebra, uma vez que os estudantes puderam perceber o fluxo dos movimentos da vida, movimento do pensamento humano e, ii. pela organização o processo de *obutchénie* e desenvolvimento considerando as particularidades do sistema zankoviano.

Esse episódio, foi composto por duas cenas. A cena 1.1, *Compreendendo equações do 2º grau incompleta*, contribuiu para que os estudantes compreendessem o aspecto nuclear das equações do 2º grau, os conceitos de campo de variação, fluência e variável e revelaram alguns momentos em que a emoção e vontade foram essenciais para o desenvolvimento do estudante. Já a cena 1.2, *Sistematização da obutchénie e desenvolvimento*, apresentamos momentos da terceira, quarta, quinta e sétima etapas, nas quais evidenciamos intervenções da professora-pesquisadora para sistematização da *obutchénie* e desenvolvimento do conceito de equações do 2º grau completa, por meio de momentos que propiciaram aos estudantes atividades mentais como abstração, análise, síntese, reflexão e comparação.

No episódio 2, *desenvolvimento de confiança impulsionada pela colaboração entre os envolvidos na apreensão do conceito de equação do 2º grau*, que compõe o isolado 1, nos

debruçamos a analisar se as ações e reflexões dos estudantes diante das etapas: 1. *Trajectoria da bola*; 2. *Índice de massa corporal*; 4. *Compreendendo como os árabes resolviam equação do 2º grau*; 6. *Direto do túnel do tempo* e, 7. *Registrando as atividades mentais*, indicavam apropriação do conceito de equações do 2º grau nos diálogos realizados entre os pares e entre professora-pesquisadora e estudante. Foram organizadas três cenas que nos possibilitaram evidenciar transformação qualitativa do pensamento dos estudantes no desenrolar do trabalho em grupo.

Na cena 2.1, *diferentes formas de orientar no processo de obutchénie dos colegas a luz das interlocuções entre os integrantes dos grupos*, os estudantes agiram de maneiras diferentes para orientar os colegas nas dúvidas por eles apresentadas. Na etapa 1, o trabalho em grupo possibilitou que uma das estudantes apreendesse o conceito de campo de variação por meio das explicações e exemplos apresentados pelos colegas do grupo. Na etapa 2, uma estudante auxiliou o colega a determinar um caminho para solução do problema e, na etapa 4, por meio de indagações, uma estudante foi colocada em movimento, compreendendo a articulação do conceito de equação do 2º grau com de área de retângulo.

No isolado 2, *desenvolvimento do estudante nas dimensões ética, moral e da saúde física*, as análises do material empírico e a retomada dos estudos teóricos possibilitaram compreender a potencialidade do processo de *obutchénie* do conceito de equações do 2º grau fundamentado no sistema zankoviano para o desenvolvimento dos estudantes nas dimensões ética, moral e conscientização da saúde. Esse fato está presente no episódio 2, o *processo de obutchénie do conceito de equações do 2º grau viabilizando o desenvolvimento integral do estudante*, composto por duas cenas.

Na cena 3.1, *momentos propícios para o desenvolvimento da ética e da moral*, os diálogos presentes na etapa 1, *trajectoria da bola*, nos permitiram inferir que a *obutchénie* organizada contribuiu para o desenvolvimento dos estudantes em suas diferentes dimensões cognitiva, moral e ética. Já, na cena 3.2, *desdobramento da tarefa índice de massa corporal para a conscientização e a apropriação de conceitos relacionados a saúde*, compreendemos pelo fenômeno analisado, que a organização intencional da etapa 2 cooperou para o desenvolvimento do estudante no que tange a apropriação do conceito de equações do 2º grau e para o desenvolvimento de conhecimentos científicos como metabolismo, anabolismo, catabolismo e esporte. Ademais, foi possível mobilizar os estudantes a refletirem sobre a importância de uma boa alimentação.

Inferimos que o experimento microciclo formado por tarefa, constituída por sete etapas, organizada intencionalmente considerando os princípios didáticos e metodológicos do sistema zankoviano, corroborou para o que os estudantes, individualmente e em colaboração com outro, por meio dos seus conhecimentos e conjecturas, organizassem o pensar matemático evidenciando suas significações acerca da transcrição das situações-problema apresentadas na linguagem retórica e/ou sincopada para a linguagem simbólica, assimilando os elementos que constituem uma equação do 2º grau. Além disso, se apropriaram da relação existente entre os coeficientes e as raízes das equações do 2º grau para poder estabelecer o valor desconhecido.

A natureza da tarefa proposta fundamentada no sistema zankoviano, no qual o estudante é ativo e responsável pelo seu processo de *obutchénie* e desenvolvimento, propiciou a ruptura do pensamento mecânico, da forma de olhar para o desafio na busca de um número que o solucione, despertando os estudantes para uma busca conceitual, compreendendo as justificativas de suas ações mediante as necessidades que os impulsionam. Propiciou, ainda, o desenvolvimento dos estudantes em suas multidensões cognitiva, emocional, volitiva, ética e moral.

Acreditamos que a dinâmica individuo-grupo-classe (MARCO, 2009) foi fundamental para o desenvolvimento do experimento microciclo, visto que permitiu ao estudante refletir sobre as situações-problema individualmente, em um primeiro momento para, em seguida, sanar as dúvidas com sua dupla/trio/grupo e, caso elas persistissem, havia o momento de diálogo com a classe para questionamentos e, junto com um grupo maior de colegas e professora-pesquisadora, melhor assimilar o conhecimento. Essa dinâmica, permitiu à professora-pesquisadora perceber dificuldades individuais dos estudantes e organizar os grupos conforme a zona de desenvolvimento possível de cada um.

A análise do material empírico nos permitiu perceber que, nos trabalhos em grupos, os estudantes lançaram mão de diferentes estratégias para auxiliar os colegas. Alguns usaram indagações para colocar o estudante com dúvidas em movimento orientando a assimilação do conceito, outros ofereciam respostas diretas e, outros, percebiam que a partir do erro do colega poderiam oferecer elementos para que o estudante refletisse sobre suas respostas. Os estudantes conseguiam caminhar, individualmente, até certo ponto do processo de *obutchénie*, mas era fundamental a colaboração do mais experiente para o alcance da zona de desenvolvimento possível, como ressaltava Vigotski (1991, 1995, 1998, 2007a, 2007b).

Observando as particularidades da escola, das turmas e dos estudantes, não consideramos a tarefa organizada neste experimento microciclo como um modelo para a

sistematização do processo de *obutchénie* e desenvolvimento acerca do conceito de equações do 2º grau para estudantes do 9º ano, devido às muitas variáveis presentes no contexto escolar. Assim, não buscamos oferecer um modelo a ser seguido com a certeza de sucesso, visto que ao desenvolver a tarefa muitas foram as modificações necessárias para buscar atender aos estudantes considerando suas particularidades e inquietudes.

Vale ressaltar que organizar de forma intencional tarefa que contribua para o processo de *obutchénie* e desenvolvimento dos estudantes requer uma formação interdisciplinar do professor, além de compreender aspectos psíquicos para que possa, de forma eficiente, abarcar os princípios e metodologia do sistema zankoviano. O caminho que leva ao desenvolvimento dos princípios do sistema zankoviano na prática demanda tempo, persistência, propósito e olhar atento para cada estudante por parte do professor. Exige pensar em metodologias diferentes para estudantes diferentes, considerando a ZDP de cada um, com o objetivo de gerar o desenvolvimento para toda a classe.

Ponderamos que todos os resultados alcançados nesta pesquisa foram possíveis devido ao envolvimento dos sujeitos, o compromisso que sempre demonstraram quanto a assiduidade nas aulas e com a proposta expondo dúvidas, argumentando e questionando.

Ao refletirmos sobre o processo que vivenciamos, percebemos uma forma diferente de olhar para o processo de *obutchénie* e desenvolvimento, considerando o vínculo das teorias estudadas e a tarefa proposta e, hoje, sentimos a necessidade de repensar nossa prática docente, organizando a *obutchénie* que gere nos estudantes a necessidade de assimilar o conteúdo, priorizando a apropriação do conceito e o seu desenvolvimento integral e não a mera reprodução de fórmulas ou definições.

Partimos do princípio de que o processo de transformação das práticas docentes somente pode acontecer a partir do momento que entramos em contato com teorias que nos desafiem a olhar para a *obutchénie* como algo possível de ser transformado. Torna-se relevante, então, que os cursos de formação de professores atentem para a mudança, a transformação na perspectiva dialética do conhecimento. Um projeto formativo dessa natureza implica conceber o conhecimento como um conjunto de saberes e práticas produzido por homens e mulheres situados em um tempo histórico, imersos em uma realidade concreta. Uma produção histórica alcançada a partir da problematização da realidade, na tentativa de buscar respostas para as questões que emergem no contexto cultural e social.

Compreender que o conhecimento é produzido a partir de circunstâncias concretas que condicionam o processo, mas que não o determina permite ao professor perceber que as

atividades de *obutchénie* podem ser transformadas a partir da articulação entre a teoria e prática, ou seja, a partir da práxis pedagógica. Assim, acreditamos que ao longo dos caminhos percorridos nessa investigação que partiram de questionamentos acerca da educação escolar vivenciada enquanto professoras de matemática na educação básica, pudemos articular teoria e prática, compondo tessituras para revelar as determinações e mediações do nosso objeto de estudo, movimento que impulsionou a transformação da prática da professora-pesquisadora e da professora-pesquisadora-humano.

Diante da real conjuntura, pós-pandemia 2020 e 2021, a qual os estudantes retornaram para o ensino presencial, no ano de 2022, com muitas defasagens em conceitos que comprometem o desenvolvimento de outros e são requisitos para que os estudantes desenvolvam os conceitos propostos para o ano escolar que cursa, vislumbramos no sistema zankoviano singularidades que muito têm para contribuir para o processo de *obutchénie* e desenvolvimento dos estudantes independente do ano escolar que cursa. Para isso, a tarefa elaborada precisa contemplar os princípios didáticos e metodológicos do sistema zankoviano, de forma a oportunizar a formação de conceito que precisariam estar formados e os conceitos a serem aprendidos no ano cursado pelo estudante, contemplando também os aspectos externos e internos do conceito.

Consideramos que seria interessante que o desenvolvimento de tarefa baseada nos princípios didáticos e metodológicos do sistema zankoviano acontecessem em outras turmas, de preferência iniciando nos primeiros anos da vida escolar, contribuindo para o desenvolvimento do estudante nas diferentes dimensões: ética, moral, física, volitiva, cognitiva entre outras.

Esperamos que esta pesquisa seja coadjuvante para o desenvolvimento de outras cujas temáticas se entrelaçam com a do estudo em questão, servindo de aporte teórico e metodológico.

Almejamos que esta pesquisa contribua para as áreas da *Obutchénie* Desenvolvimental e da Educação Matemática, uma vez compreendemos a relevância de se refletir sobre o processo de *obutchénie* da matemática e por entender que as tarefas educativas, fundamentadas nos pressupostos zankoviano, contribuem para o desenvolvimento integral do estudante.

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, B. C. de. **A evolução histórica da resolução das equações do 2º grau**. 2000. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, Porto, 2000. Disponível em: <https://repositorio-berto.up.pt/handle/10216/9895>. Acesso em: 20 mar. 2020.
- AQUINO, O. F. L. V. O experimento didático-formativo: contribuições de L. S. Vigotski, L. V. Zankov e V. V. Davidov. *In*: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Orgs.). **Fundamentos psicológicos e didáticos do ensino desenvolvimental**. Uberlândia: EDUFU, 2017. p. 325-350. (v. 1).
- AQUINO, O. F. L. V. O experimento didático-formativo: contribuições para a pesquisa em didática desenvolvimental. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE PRÁTICA DE ENSINO, 27., 2014, Ceará. **Anais [...]**. Ceará: ENDIPE, 2014. p. 04645-04657. Disponível em: <http://www.uece.br/endipe2014/index.php/2015-02-26-14-09-14/search?author=1056>. Acesso em: 29 mar. 2021.
- AQUINO, O. F. L. V. Zankov: Aproximações à sua vida e obra. *In*: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Orgs.). **Ensino Desenvolvimental: vida e obra dos principais representantes russos**. Uberlândia: EDUFU, 2013. p. 196-220.
- BAUMGART, J. K. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula: álgebra**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.
- BLANK, N.; ARGINSKAJA, I.; KATS, J. Leonid Vladimirovich ZANKOV (1901-1977). **Matematikklandet**, Kirkenes, 2021. Disponível em: <https://matematikklandet.no/l-zankov/>. Acesso em: 12 abr. 2021.
- BOHM, D. **A totalidade e a ordem implicada**. 12. ed. São Paulo: Cultrix, 1980.
- BOOTH, L.; COOK, J. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. *In*: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Orgs.). **As idéias da álgebra**. Tradução de Hygino Domingues. São Paulo: Atual, 1995. p. 23-37.
- BOYER, C. B. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Matriz de avaliação de matemática – PISA 2012**. Brasília: Inep, 2013. Disponível em: http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/marcos_referenciais/2013/matriz_avaliacao_matematica.pdf. Acesso em: 9 ago. 2022.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 25 mar. 2020.
- BRASIL. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais, ética**. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais de matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

CEDRO, W. L.; NASCIMENTO, C. P. Dos métodos e das metodologias em pesquisas educacionais na teoria histórico-cultural. *In*: MOURA, M. O. (Org.). **Educação escolar e pesquisa na teoria histórico-cultural**. São Paulo: Edições Loyola, 2017. p. 13-46.

CEDRO, W. **O espaço de aprendizagem e a atividade de ensino**: O Clube de Matemática. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.

DAVIDOV, V. V. О понятии развивающего обучения (O conceito de aprendizagem desenvolvimental). **Pedagogia**, Moscou, n. 1, 1995. Disponível em:

DAVIDOV, V. V.; MÁRKOVA, A. La concepción de la actividad de estudio de los escolares. *In*: DAVIDOV, V. V.; MÁRKOVA, A. **La psicología evolutiva y pedagógica en la URSS**. Moscú: Progreso, 1987. p. 316-337.

DIAS, M. S. L. **Introdução às leituras de Lev Vygotski**: debates e atualidades na pesquisa. Porto Alegre: Editora Fi, 2019. Disponível em: <https://www.editorafi.org/645vygotski>. Acesso em: 16 maio 2022.
http://www.experiment.lv/maro/statji/davidov_pon_ro.htm. Acesso em: 22 out. 2018.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 3. ed. Campinas: Ed. Unicamp, 2002.

FEROLA, B. C. Emma Viktorovna Vitushkina - Primeiras aproximações ao Sistema Zankov. **Obutchénie: Revista de Didática e Psicologia Pedagógica**, Uberlândia, v. 4, n. 3, p. 829-836, 2020. DOI: <https://doi.org/10.14393/OBv4n3.a2020-58441>. Disponível em: <https://seer.ufu.br/index.php/Obutchenie/article/view/58441>. Acesso em: 14 jul. 2022.

FEROLA, B. C. Natalia Vasilevna Nechaeva - Uma introdução ao Sistema Zankov: aspectos teórico-práticos do sistema desenvolvimental. **Obutchénie: Revista de Didática e Psicologia Pedagógica**, Uberlândia, v. 4, n. 3, p. 818-828, 2017. DOI: <https://doi.org/10.14393/OBv4n3.a2020-58440>. Disponível em: <https://seer.ufu.br/index.php/Obutchenie/article/view/58440>. Acesso em: 14 jul. 2022.

FEROLA, B. C. **O desenvolvimento integral na obra de L. V. Zankov (1957-1977)**: um olhar para os princípios e orientações metodológicas. 2019. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2019. DOI: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2021.5510>. Disponível em: <https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/31542>. Acesso em: 14 jul. 2022.

FEROLA, B. C.; LONGAREZI, A. M. Princípios didáticos, orientações metodológicas e desenvolvimento integral do estudante: contribuições de L. V. Zankov. *In*: PUENTES, R. V.; LONGAREZI, A. M. (Orgs.). **Enfoque histórico-cultural e teoria da aprendizagem desenvolvimental**: contribuições na perspectiva do Gepedi. Goiânia: Editora Phillos Academy, 2021. p. 345-380. DOI: <http://doi.org/10.29327/545065>. Disponível em: <https://phillosacademy.com/enfoque-historico-cultural-e-aprendizagem-desenvolvimental-contribuicoes-na-perspectiva-do-gepedi>. Acesso em: 14 jul. 2022.

FIGUEIREDO, A. M. Ética: origens e distinção da moral. **Saúde Ética & Justiça**, São Paulo, v. 13, n. 1, p. 1-9, 2008. DOI: <https://doi.org/10.11606/issn.2317-2770.v13i1p1-9>. Disponível em: <https://www.revistas.usp.br/sej/article/view/44359>. Acesso em: 21 maio 2022.

FIORENTINI, D.; MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica elementar. **Pro-Posições**, Campinas, v. 4, n. 1(10), p. 78-91, 1993. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644384>. Acesso em: 9 ago. 2022.

GARBI, G. G. **O romance das equações algébricas: a história da álgebra**. São Paulo: Makron Books, 2009.

GARCIA, S. A.; MIRANDA, M. J. Vislumbrando possibilidades para a Educação Física no ensino fundamental a partir dos contributos dos princípios didático-metodológicos do Sistema Zankoviano. **Educação Em Foco**, Belo Horizonte, v. 25, n. 45, p. 327-352, 2022. DOI: <https://doi.org/10.36704/eef.v25i45.5611>. Disponível em: <https://revista.uemg.br/index.php/educacaoemfoco/article/view/5611>. Acesso em: 17 jul. 2022.

GUSEVA, L. G. O Ensino de Matemática na Educação Básica da Rússia na Perspectiva de Leonid Zankov. In: LIBÂNEO, J. C. *et al.* (Orgs.). **Em defesa do direito à educação Didática, currículo e políticas educacionais em debate**. Goiânia: Gráfica UFG, 2019. p. 220-235. Disponível em: https://publica.ciar.ufg.br/ebooks/edipe/artigo_19.html. Acesso em 13 abr. 2021.

GUSEVA, L. G. Transição na educação russa: o sistema zankoviano no atual ensino fundamental. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Orgs.). **Fundamentos psicológicos e didáticos do ensino desenvolvimental**. Uberlândia: EDUFU, 2017. p. 225-242.

GUSEVA, L. G.; SOLOMONOVICH, M. Implementing the Zone of Proximal Development: From the Pedagogical Experiment to the Developmental Education System of Leonid Zankov. **International Electronic Journal of Elementary Education**, [s. l.], v. 9, n. 4, p. 775-786, 2017. Disponível em: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1146704.pdf>. Acesso em: 29 jul. 2019.

GUSEVA, L. G.; SOSNOWSKI, A. Russian Education in Transition: Trends at the Primary Level. **Canadian and International Education**, [s. l.], v. 26, n. 1, p. 14-31, 1997. Disponível em: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2355163. Acesso em: 19 mar. 2021.

HOFMANN, J. E. **Historia de la matemática**. Traducción al español por Vicente Valls y Angles y Gonzalo Fernández Tomaz. 1. ed. México: Talleres Gráficos Toledo S. A., 1961.

HOGBEN, L. **Maravilhas da Matemática: influência e função da Matemática nos conhecimentos humanos**. Porto Alegre: Editora Globo, 1970.

KAPUT, J. What is algebra? What is algebraic reasoning? In: KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.). **Algebra in the Early Grades**. New York: Lawrence Erlbaum Associates, 2008. p. 5-17.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978. (Coleção Perspectivas do homem, v. 123).

LALANDE, A. **Vocabulário técnico e crítico da filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 1993.

LANNER DE MOURA, A. R.; SOUSA, M. C. Dando movimento ao pensamento algébrico. **Zetetiké**, Campinas, v. 16, n. 2, p. 63-76, 2008.

LANNER DE MOURA, A. R.; SOUSA, M. C. O lógico-histórico da álgebra não simbólica: dois olhares diferentes. **Zetetiké**, Campinas, v. 13, n. 24, p. 11-45, 2005.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

LONGAREZI, A. M. Didática desenvolvimental: um olhar para sua gênese na tradição da teoria histórico-cultural e possíveis desdobramentos para a realidade brasileira. In: FRANCO, A. F.; TULESKI, S. C.; MENDONÇA, F. (Orgs.). **Ser ou não ser na sociedade capitalista: o materialismo histórico-dialético como método da Psicologia Histórico-Cultural e da Teoria da determinação social dos processos de saúde e doença**. Goiânia: Editora Phillos, 2020b. p. 54-87. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1BkBfd_WCRu6wXvOHhhE1HYY0ZYsfS2bR/view. Acesso em: 14 jul. 2022.

LONGAREZI, A. M. Experimento de formação gradual: o método de estudo da gênese dos processos cognoscitivos de P. Ya. GALPERIN. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Orgs.). **Ensino Desenvolvimental: Sistema Galperin-Talizina**. Salvador: Editora Acadêmico Digital, 2021a. p. 30-68. DOI: <https://doi.org/10.37885/210705486>. Disponível em: <https://downloads.editoracientifica.org/articles/210705486.pdf>. Acesso em: 29 jul. 2022.

LONGAREZI, A. M. Gênese e constituição da *Obutchénie* Desenvolvimental: expressão da produção singular-particular-universal enquanto campo de tensão contraditória. **Revista Educação UFSM**, Santa Maria, v. 45, p. 1-32, 2020a. Disponível em: <https://periodicos.ufsm.br/reeducacao/article/view/48103/pdf>. Acesso em: 14 jul. 2022.

LONGAREZI, A. M. *Obutchénie* por unidades: uma concepção histórico-cultural de didática desenvolvimental. In: PUENTES, R. V.; LONGAREZI, A. M. (Orgs.). **Enfoque histórico-cultural e teoria da aprendizagem desenvolvimental: contribuições na perspectiva do Gepedi**. Goiânia: Editora Phillos Academy, 2021b. p. 383-417. DOI: <http://doi.org/10.29327/545065>. Disponível em: <https://phillosacademy.com/enfoque-historico-cultural-e-aprendizagem-desenvolvimental-contribuicoes-na-perspectiva-do-gepedi>. Acesso em: 14 jul. 2022.

LONGAREZI, A. M. Para uma Didática Desenvolvimental e dialética da formação-desenvolvimento do professor e do estudante no contexto da educação pública brasileira. **Obutchénie: Revista de Didática e Psicologia Pedagógica**, Uberlândia, v. 1, n. 1, p. 187-230, 2017. DOI: <https://doi.org/10.14393/OBv1n1a2017-9>. Disponível em: <http://www.seer.ufu.br/index.php/Obutchenie/article/view/39912>. Acesso em: 14 jul. 2022.

LONGAREZI, A. M. Prefácio. *In*: PUENTES, R. V.; CARDOSO, C. G. C.; AMORIM, P. P. (Orgs.). **Teoria da Atividade de Estudo**: Contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin. Curitiba: CRV, 2019b. p. 19-28.

LONGAREZI, A. M. Significado, sentido e Atividade de Estudo: uma problematização dos motivos na estrutura da atividade. *In*: GUADALUPE, S. (Org.). **Significado e sentido na educação para a humanização**. Marília: UNESP, 2019a. p. 257-290. DOI: <https://doi.org/10.36311/2019.978-85-7249-036-8.p257-290>. Disponível em: https://ebooks.marilia.unesp.br/index.php/lab_editorial/catalog/book/155. Acesso em: 29 jul. 2022.

LONGAREZI, A. M. Teoria do experimento formativo. *In*: PUENTES, R. V.; LONGAREZI, A. M. (Orgs.). **Ensino Desenvolvimental**: Sistema Elkonin-Davidov-Repkin. Campinas: Mercado de Letras; Uberlândia: Edufu, 2019c. p. 161-212.

LONGAREZI, A. M.; DIAS DE SOUSA, W. D. Unidades possíveis para uma obutchénie dialética e desenvolvedora. **Linhas Críticas**, Brasília, v. 24, p. 453-474, 2018. DOI: <https://doi.org/10.26512/lc.v24i0.19815>. Disponível em: <https://periodicos.unb.br/index.php/linhascriticas/article/view/19815>. Acesso em: 17 jun. 2022.

LONGAREZI, A. M.; FRANCO, P. L. J. Atividade pedagógica na unidade significado social sentido pessoal. *In*: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Orgs.). **Fundamentos Psicológicos e Didáticos do Ensino Desenvolvimental**. Uberlândia: EDUFU, 2017. p. 265-291.

LONGAREZI, A. M.; SILVA, D. S. Formação de professores e sistemas didáticos na perspectiva histórico-cultural da atividade: panorama histórico-conceitual. Apresentação. **Obutchénie: Revista de Didática e Psicologia Pedagógica**, Uberlândia, v. 2, n. 3, p. 571-590, 2018. DOI: <https://doi.org/10.14393/OBv2n3.a2018-47433>. Disponível em: <https://seer.ufu.br/index.php/Obutchenie/article/view/47433>. Acesso em: 14 jul. 2022.

MARCO, F. F. **Atividades computacionais de ensino na formação inicial do professor de matemática**. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009. DOI: <https://doi.org/10.47749/T/UNICAMP.2009.468556>. Disponível em: <https://hdl.handle.net/20.500.12733/1610336>. Acesso em: 16 jun. 2022.

MORETTI, V. D.; MARTINS, E.; SOUZA, F. D. Método histórico-dialético, teoria histórico-cultural e educação: algumas apropriações em pesquisas sobre formação de professores que ensinam matemática. *In*: MORETTI, V. D.; CEDRO, W. L. (Orgs.). **Educação matemática e a teoria histórico-cultural**: um olhar sobre as pesquisas. 1. ed. Campinas: Mercado de Letras, 2017. p. 25-60.

MORGADO, J. Equações do 2º Grau ou Equações Quadráticas (um pouco da sua história). **Millenium online**, [s. l.], n. 16, p. 1-18, 1999. Disponível em: <https://repositorio.ipv.pt/handle/10400.19/949>. Acesso em: 28 fev. 2020.

- MOURA, M. O. **A construção do signo numérico em situação de ensino**. 1992. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1992.
- MOURA, M. O. **O educador matemático na coletividade de formação: uma experiência com a escola pública**. 2000. Tese (Livre Docência) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.
- MOURA, M. O. Pesquisa colaborativa: um foco na ação formadora. *In*: BARBOSA, R. L. L. (Org.). **Trajetórias e perspectivas da formação de educadores**. São Paulo: Editora UNESP, 2004. p. 257-284.
- MOURA, M. O.; LANNER DE MOURA, A. R. **Escola: um espaço cultural**. Matemática na Educação Infantil: conhecer, (re)criar - um modo de lidar com as dimensões do mundo. São Paulo: Secel, 1998.
- MOURA, M. O. *et al.* A atividade Orientadora de Ensino como Unidade entre Ensino e Aprendizagem. *In*: MOURA, M. O. (Org.). **A atividade pedagógica na teoria Histórico-Cultural**. Brasília: Líber livro, 2010. p. 81-110.
- NÚÑEZ, I. B. **Vygotsky, Leontiev e Galperin: formação de conceitos e princípios didáticos**. Brasília: Liber Livro, 2009.
- PALANGANA, I. C. **Desenvolvimento e Aprendizagem em Piaget e Vygotsky: a relevância do social**. 3. ed. São Paulo: Summus Editorial, 2001.
- PANOSSIAN, M. L. **Manifestações do pensamento e da linguagem algébrica de estudantes: indicadores para a organização do ensino**. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.
- PANOSSIAN, M. L. **O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para constituição do objeto de ensino da álgebra**. 2014. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.
- PEREIRA, D. G. **A organização do ensino-aprendizagem dos logaritmos na perspectiva de Leonid V. Zankov**. 2020. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de Uberaba, Uberaba, 2020.
- PINTO, R. **Erros e dificuldades no ensino da álgebra: o tratamento dado por professoras da 7ª série em aula**. 1997. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1997.
- PITOMBEIRA, J. B. Revisitando uma velha conhecida. *In*: BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2., 2004, Salvador. **Anais [...]**. Salvador: UFBA, 2004. p. 1-41. Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br/C2.pdf>. Acesso em: 29 fev. 2020.
- PUENTES, R. V. Didática desenvolvimental da atividade: o sistema Elkonin-Davidov (1958-2015). **Obutchénie: Revista de Didática e Psicologia Pedagógica**, Uberlândia, v. 1. n. 1, p. 20-58, 2017. DOI: <https://doi.org/10.14393/OBv1n1a2017-2>. Disponível em: <https://seer.ufu.br/index.php/Obutchenie/article/view/38113>. Acesso em: 16 jul. 2022.

PUENTES, R. V. Uma nova abordagem da Teoria da Aprendizagem Desenvolvidora. **Revista Educação UFSM**, Santa Maria, v. 44, p. 1-27, 2019. DOI: <https://doi.org/10.5902/1984644437312>. Disponível em: <https://periodicos.ufsm.br/reveducacao/article/view/37312>. Acesso em: 10 ago. 2022.

PUENTES, R. V.; AMORIM, P. A. P.; CARDOSO, C. G. C. V. V. Repkin: vida, pensamento e obra de um dos principais representantes da didática desenvolvimental da atividade. *In*: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Orgs.). **Ensino Desenvolvidor**: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia: Paco Editora: Edufu, 2017. p. 313-360. (Livro III).

PUENTES, R. V.; AQUINO, O. F. Ensino desenvolvimental da atividade: uma introdução ao estudo do sistema zankoviano (1957-1977). **Linhas Críticas**, Brasília, v. 24, p. e20106, 2018. DOI: <https://doi.org/10.26512/lc.v24i0.20106>. Disponível em: <https://periodicos.unb.br/index.php/linhascriticas/article/view/20106>. Acesso em: 10 ago. 2022.

PUENTES, R. V.; LONGAREZI, A. M. A Didática Desenvolvimental: seu campo conceitual na tradição da psicologia histórico-cultural da Atividade. *In*: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Orgs.). **Fundamentos psicológicos e didáticos do Ensino Desenvolvidor**. Uberlândia: EDUFU, 2017a. p. 187-224.

PUENTES, R. V.; LONGAREZI, A. M. Didática Desenvolvimental: sessenta anos de tradição teórica, epistemológica e metodológica. Apresentação. Dossiê Didática Desenvolvimental. **Obutchénie: Revista de Didática e Psicologia Pedagógica**, Uberlândia, v. 1, n. 1, p. 9-19, 2017b.

PUENTES, R. V.; LONGAREZI, A. M. Escola e didática desenvolvimental: seu campo conceitual na tradição da teoria histórico-cultural. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, v. 29, n. 1, p. 247-271, 2013. DOI: <https://doi.org/10.1590/S0102-46982013005000004>. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/edur/a/Dvk4NkTkgnNb4hL8Jrbtz4q/?lang=pt>. Acesso em: 14 jul. 2022.

REGO, T. C. R. A indisciplina e o processo educativo: uma análise na perspectiva Vygotskiana. *In*: AQUINO, J. G. (Org.). **Indisciplina na escola alternativas teóricas e práticas**. São Paulo: Summus, 1996. p. 83-101.

RÍBNIKOV, K. **Historia de las matemáticas**. URSS: Editorial Mir Moscú, 1987.

ROSA, J. G. **Grande Sertão**: Veredas. 19. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2001.

ROSA, V. M. G. **Aprendizagem da equação do 2º grau**: uma análise da utilização da teoria do ensino desenvolvimental. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Católica, Goiás, 2009.

SCARLASSARI, N. T. **Um Estudo de dificuldades ao aprender álgebra em situações diferenciadas de ensino de alunos da 6ª série do ensino fundamental**. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.

SMITH, D. E. **History of mathematics**. New York: Dover, 1958. (v. I).

SOUSA, M. C. **O Ensino De Álgebra Numa Perspectiva Lógico-Histórica**: um estudo das elaborações correlatas de professores do Ensino Fundamental. 2004. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.

SOUSA, M. C. O movimento lógico-histórico enquanto perspectiva didática para o ensino de matemática. **Obutchénie: Revista de Didática e Psicologia Pedagógica**, Uberlândia, v. 1, n. 4, p. 40-68, 2018. DOI: <https://doi.org/10.14393/OBv2n1a2018-3>. Disponível em: <https://seer.ufu.br/index.php/Obutchenie/article/view/42533>. Acesso em: 23 maio 2022.

SOUSA, M. C.; PANOSSIAN, M. L.; CEDRO, W. L. **Do movimento lógico e histórico à organização do ensino**: o percurso dos conceitos algébricos. 1. ed. Campinas: Mercado de Letras, 2014.

VÁZQUEZ, A. S. **Ética**. 14. ed. Rio de Janeiro: Editora Civilização Brasileira S.A., 1993.

VIGOTSKI, L. S. **Pensamiento y habla**. 1. ed. Buenos Aires: Colihue, 2007a.

VIGOTSKY, L. S. Aprendizaje y desarrollo intelectual en la edad escolar. *In*: LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N.; VIGOTSKY, L. S. (Eds.). **Psicología y pedagogía**. Madrid: Akal, 2007b. p. 23-39.

VYGOTSKI, L. S. **Obras Escogidas III**: Problemas del desarrollo de la psique. Madrid: Visor Distribuciones S. A., 1995.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

VYGOTSKY, L. S. The problem of age. *In*: RIEBER, R. W. (Ed.). **The collected works of L. S. Vygotsky**. New York: Plenum Press, 1998. p. 187-205. (Original publicado em 1933-1934. v. 5. Child psychology).

ZANKOV, L. V. Combinações de meios verbais e visuais no ensino. *In*: LURIA, A. R. *et al.* (Orgs.). **Psicologia e Pedagogia II**: Investigações Experimentais sobre problemas didáticos específicos. 2. ed. Lisboa: Editorial Estampa, 1977. p. 99-121.

ZANKOV, L. V. Ensino e desenvolvimento. *In*: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Orgs.). **Ensino Desenvolvimental**: Antologia. 1. ed. Uberlândia: EDUFU, 2017. p. 173-180. (Livro 1.).

ZANKOV, L. V. **La enseñanza y el desarrollo**. Moscú: Editorial Progreso, 1984. (Investigación Pedagógica Experimental).

НЕЧАЕВА, Н. В.; РОЩИНА, Н. Н. (NECHAEVA, N. V.; ROSHCINA, N. N.). **Педагогическая система развивающего обучения Л.В. Занкова**: Учебное пособие (Sistema pedagógico desenvolvimental de educação L.V. Zankov: manual de treinamento). Самара: Издательский дом «Федоров», 2006.

ЗАНКОВ, Л. В. (ZANKOV, L. V.). **Беседы с учителями** (Conversa entre professores). 2-е изд (2. ed.). Москва: Просвещение, 1975. Disponível em: <https://www.klex.ru/foj>. Acesso em: 10 set. 2022.

ЗАНКОВ, Л. В. (ZANKOV, L. V.). **Развитие учащихся в процессе обучения** (I - II классы) (Desenvolvimento de escolares no processo de *obutchénie*) (I - II Ano). Москва: издательство академии педагогичес, 1963.

ЗАНКОВ, Л. В. (ZANKOV, L. V.). **Дидактика и жизнь** (Didática e vida). Москва: Просвещение, 1968.

APÊNDICE 1 - TAREFA E AÇÕES DESENVOLVIDAS NO EXPERIMENTO DIDÁTICO PROPOSTO NESTA PESQUISA

Tarefa – Formação do conceito de equações do 2º grau

Conteúdo: Equações do 2º grau

Objetivo geral: Formação do conceito de equações do 2º grau e desenvolvimento integral do estudante.

Objetivos específicos:

- Despertar nos estudantes a necessidade de apropriação conceitual de equações do 2º grau por meio das situações-problemas, tendo em vista seu desenvolvimento integral;
- Criar condições para que os estudantes se apropriem do conceito de equações do 2º grau por meio de atividades mentais que resultem na formação deste conceito teórico.

APÊNDICE 2 - ETAPA 1: TRAJETÓRIA DA BOLA - PRIMEIRA, SEGUNDA, TERCEIRA E QUARTA AULAS

Ações a serem desenvolvidas pelos estudantes:


- Distinguir a relação principal do conteúdo entre função do 2º grau e equações do 2º grau;
- Determinar as raízes de equações do 2º grau incompletas, na busca de formar o conceito;
- Determinar o aspecto nuclear das equações do 2º grau.

Ação 1 da professora-pesquisadora: Apresentar aos estudantes uma situação-problema, para que possam determinar uma lei que permita calcular a distância percorrida pela bola em função do tempo.

Momentos da ação 1

1) Foi oferecida para cada estudante a ficha, a seguir, contendo uma situação-problema;

Figura 18 - Situação-problema da etapa 1 – Trajetória da bola



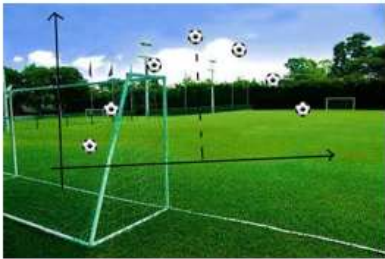
**PREFEITURA DE
UBERLÂNDIA**
VOCE PODE CONTAAR COM A GENTE

Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção!

Paulo Freire

Relacionando distância e tempo

O físico italiano Galileu Galilei (1564 – 1642), estudou os movimentos como o desta bola e verificou que, desprezando a resistência do ar, qualquer corpo lançado no campo de gravidade da Terra se movimenta do mesmo modo. Ou seja, no lançamento do goleiro, após 1 segundo a bola percorreria cerca de $5 \times 1^2 = 5$ metros; depois de 2 segundos, percorreria cerca de $5 \times 2^2 = 20$ metros; depois de 3 segundos percorreria, $5 \times 3^2 = 45$ metros; e assim sucessivamente. Como ficaria essa expressão matemática após x segundos de tempo? Escreva uma fórmula que permite calcular a distância percorrida pela bola em função do tempo.



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

2) Após buscar individualmente um caminho para resolver a situação-problema, a professora-pesquisadora pediu que os estudantes se organizassem em grupos com quatro integrantes para elaborarem uma síntese a partir das soluções individuais e que demonstrassem, por meio de

escrita, desenhos entre outros, a conclusão encontrada pelo grupo. Um dos integrantes do grupo fosse o relator a apresentar à classe;

3) Cada grupo analisou a conclusão apresentada pelo outro grupo e a comparou com a conclusão do próprio grupo, verificando a correção desta;

4) A classe discutiu o tipo de conclusão estabelecida em cada grupo, escolhendo qual foi a mais fácil de decifrar;

5) Em seguida, a professora-pesquisadora pediu que estudantes respondessem às seguintes perguntas:

a) Como ficaria essa expressão matemática após t segundos de tempo?;

b) Escreva uma fórmula que permite calcular a distância percorrida pela bola em função do tempo;

6) A professora-pesquisadora conversou com o grupo-classe discorrendo sobre alguns aspectos da equação do 2º grau incompleta obtida a partir das ideias expostas pelos grupos e convidou os estudantes a resolverem a equação: $at^2 + c = 0$;

7) Ao concluir a exploração das respostas, a professora-pesquisadora pediu que os estudantes comentassem o que entenderam desta situação-problema e as dificuldades encontradas na sua resolução.

APÊNDICE 3 - ETAPA 2: ÍNDICE DE MASSA CORPORAL - QUINTA, SEXTA, SÉTIMA E OITAVA AULAS

Ações a serem desenvolvidas pelos estudantes:

- Desenvolver a situação-problema proposta para apropriar do conceito de equações do 2º grau por meio do IMC;
- Ler, dialogar e apropriar do conceito de metabolismo e esporte.

Ação 2 da professora-pesquisadora: Propor aos estudantes a leitura do texto intitulado Índice de massa corporal, para que possam refletir sobre algumas perguntas, com intuito de compreender sobre o índice de massa corporal (IMC).

Momentos da ação 2

1) Com a classe organizada em duplas, entrega do texto intitulado *Índice de massa corporal*;

Figura 19 - Situação-problema da etapa 2 - Índice de massa corporal



SECRETARIA
MUNICIPAL DE
EDUCAÇÃO

Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção!

Paulo Freire

Índice de massa corporal

O índice de massa corporal (IMC) é a medida internacional de determinação do nível de gordura de uma pessoa, adotado também pela Organização Mundial de Saúde.



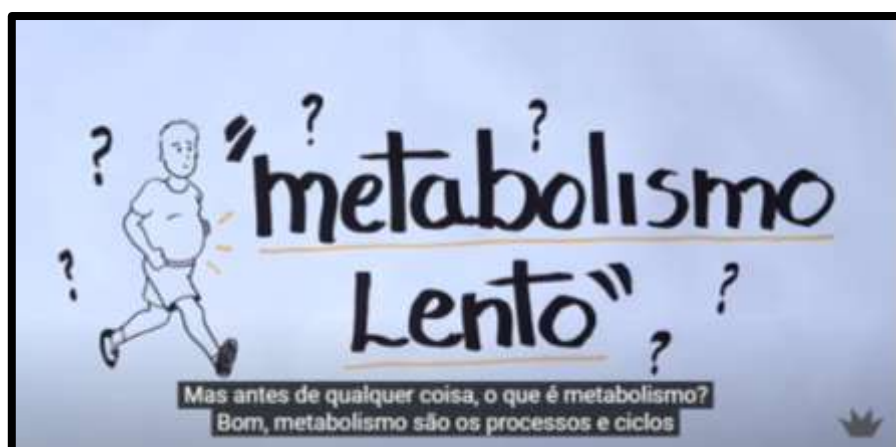
Fonte: Adaptação de imagem disponível no google

Cálculo do IMC: O IMC é determinado pela divisão da massa do indivíduo pelo quadrado de sua altura, em que a massa está em quilogramas e a altura em metros.

Fonte: Arquivo da pesquisadora.

- 2) Após o diálogo da dupla-classe sobre o texto, as duplas foram convidadas a explicar, com palavras e por um texto discursivo, o índice de massa corporal de Robert Bobroczkyi¹⁵⁹ e sua conclusão sobre o IMC de Robert Bobroczkyi. Além disso, aproveitamos o momento para aprofundar o estudo sobre o IMC;
- 3) Posteriormente, as duplas responderam algumas perguntas: **a)** Escreva uma equação matemática que permite calcular o IMC. **b)** Utilizando a fórmula determinada no item 1, calcule o seu IMC. **c)** Escolha um amigo, pergunte a massa e o IMC dele. **d)** Descubra a altura do seu amigo. Descreva o procedimento utilizado;
- 4) Para discutir sobre a proposta, os estudantes sentaram em forma de U, na sala de aula, de maneira que as duplas ficassem próximas para comentar as respostas e a forma de resolução;
- 5) Cada dupla analisou a conclusão apresentada pelas outras duplas e a comparou com a conclusão da própria dupla, verificando a correção destas;
- 6) Após a primeira aula em que as duplas dialogaram com a classe, os estudantes foram divididos em grupo com quatro integrantes para fazerem a leitura do texto *Metabolismo lento ou acelerado*¹⁶⁰, assistirem o vídeo nomeado *Como o Seu Metabolismo Influencia a Perda de Peso* e registrarem o que compreenderam sobre tema. para socializar com o grupo-classe suas considerações;

Figura 20 - Print da tela do vídeo: Como o seu metabolismo influencia a perda de peso




Fonte: Arquivo da pesquisadora.

¹⁵⁹ Os estudantes em aulas anteriores fizeram a leitura do texto intitulado *Com 2,31 m, Romeno de 17 anos sonha em jogar basquete profissional na NBA*. O texto encontra-se na Folha de São Paulo – Reportagem publicada em 31/01/2018. Disponível em: <https://www1.folha.uol.com.br/esporte/2018/01/1954615-com-231-m-romeno-de-17-anos-sonha-em-jogar-basquete-profissional-na-nba.shtml>. Acesso em: 12 maio 2022.

¹⁶⁰ Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=G0BGvHEc1Pg>. Acesso em: 12 maio 2022.

Figura 21 - Texto Metabolismo lento ou acelerado?

	<p><i>Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção!</i></p> <p>Paulo Freire</p>
---	---

Metabolismo lento ou acelerado?

Metabolismo é “o conjunto de reações químicas que ocorrem nas células e que lhe permitem manter-se viva, crescer e dividir-se.” (GUERRA *et al.*, 2011, p. 63).

O metabolismo tem algumas funções específicas: 1. Obtenção de energia química; 2. Conversão das moléculas dos nutrientes em precursoras de macronutrientes, como aminoácidos, bases nitrogenadas, açúcares e ácidos graxos; 3. Produção de macromoléculas, como proteínas, ácidos nucleicos, polissacarídeos e lipídios; 4. Síntese e degradação de biomoléculas especializadas.

A regulação do metabolismo varia conforme as características de cada indivíduo como: idade, massa, sexo e atividades físicas exercidas.

Tipos de metabolismo

As reações do metabolismo estão reunidas em duas vias metabólicas, o catabolismo e o anabolismo.

1. Catabolismo: é a fase degradativa do metabolismo; nela, as moléculas orgânicas nutrientes, carboidratos, lipídios e proteínas provenientes do ambiente ou dos reservatórios de nutrientes da própria célula são degradados por reações consecutivas em produtos finais menores e mais simples. Isto é, nas reações catabólicas o organismo “quebra” moléculas maiores (proteínas, carboidratos e lipídios) em outras menores (aminoácidos, glicose, ácidos graxos...).

2. Anabolismo: também chamado de **via biossintética**, compreende as reações nas quais moléculas complexas são produzidas a partir de moléculas simples. Para que as reações ocorram, é necessário o **consumo de energia**. O anabolismo é essencial, por exemplo, para o processo de crescimento e manutenção do organismo.

Para ocorrer essas duas “fases” do metabolismo, é necessário um trânsito acentuado de energia. No catabolismo, por haver a “quebra” de moléculas, há a liberação de energia; por outro lado, o anabolismo é uma fase de síntese, necessitando de energia para sua ocorrência.

Questões reflexivas

- 1) Escreva o que compreenderam sobre o metabolismo e relacione o significado que cada componente do grupo tinha antes da leitura;
- 2) O que vocês concluem sobre os termos metabolismo acelerado e metabolismo lento?

Referência

GUERRA, R. A. T. *et al.* *Cadernos Cb Virtual 2*. João Pessoa: Ed. Universitária, 2011.
Disponível em: http://portal.virtual.ufpb.br/biologia/novo_site/Biblioteca/Livro_2/2-

- 7) Em seguida, os estudantes se sentaram em forma de U na sala de aula, e os grupos socializaram com a classe suas considerações sobre o metabolismo;
- 8) Após a compreensão do metabolismo, voltou-se a dialogar sobre o IMC, e as duplas, que iniciaram a situação-problema, ficaram próximas para continuarem a discussão sobre as respostas e a forma de resolução. Suscitando neste momento um diálogo sobre os temas: atividade física, exercício físico, esporte e alimentação;
- 9) Por último, os estudantes, individualmente, encontraram a altura da professora-pesquisadora conhecendo o seu IMC e a sua massa.

APÊNDICE 4 - ETAPA 3: A ÁREA DO CAMPO DE FUTEBOL EM FUNÇÃO DA LARGURA DO CAMPO – NONA, DÉCIMA, DÉCIMA PRIMEIRA E DÉCIMA SEGUNDA AULAS

Ações a serem desenvolvidas pelos estudantes:

- Transformar e reescrever o “modelo da equação do 2º grau”, de modo que possam formar o conceito nuclear desta;
- Identificar, comparar e analisar as características necessárias e suficientes de equações do 2º grau;
- Identificar as características gerais do conceito de equações do 2º grau.

Ação 3 da professora-pesquisadora: Apresentar aos estudantes uma situação-problema na qual a área do campo de futebol está em função da largura e, em seguida, orientá-los a determinar a função do 2º grau, que permita encontrar a área do campo de futebol em função da largura.

Ação 4: Oferecer um valor para a área do campo, para que seja determinada, pelos estudantes, sua largura, por meio de tentativas.

Momentos das ações 3 e 4

1) A professora-pesquisadora iniciou a aula recordando a aula anterior, pedindo aos estudantes que relembassem e relatassem o que fizeram. Em seguida, explicou a situação-problema do dia: trabalhar com a situação-problema resolvendo-a individualmente;

2) Parte do problema foi projetado no *Datashow*: “Um campo de futebol tem a largura igual a x e seu comprimento tem oito unidades a mais que a largura”. A professora-pesquisadora pediu aos estudantes que, conhecendo sua área, determinassem a largura e o comprimento do campo de futebol. Após os estudantes responderem a essa pergunta, a professora-pesquisadora apresentou as alternativas a, b e c, uma de cada vez, sempre esperando os estudantes respondessem à pergunta proposta. Para cada item a professora-pesquisadora instigava-os com algumas orientações. Na alternativa a, os estudantes foram instruídos a expressar a lei que rege a área do campo de futebol em função da largura do campo, por meio de uma frase e por meio de símbolos. Além disso, foram realizadas duas perguntas para que os estudantes pudessem refletir: I) Quais são as grandezas que envolvem a interdependência desse movimento? e II)

Nesta situação qual será o campo de variação da lei? Já no item *b* os estudantes foram orientados a refletirem sobre a diferença entre as sentenças matemáticas encontradas no item *a* e no item *b*. Para responder o item *c*, a professora-pesquisadora orientou os estudantes a apresentarem a resposta por meio de escrita, desenhos entre outros.

Problema: Um campo de futebol tem a largura igual a x e comprimento tem oito unidades a mais que a largura.

- a) Escreva uma função que permita calcular a área do campo em função da largura.
- b) Escreva a equação que nos permita calcular a largura sabendo que o campo tem 240m^2 .
- c) Determine a largura e o comprimento do campo com área igual a 240m^2 .

3) Após os estudantes resolverem o problema individualmente, a professora-pesquisadora pediu para que formassem grupos de quatro estudantes e apresentassem aos colegas do grupo as respostas encontradas e explicassem-nas. Em seguida os grupos fizeram uma síntese das respostas;

4) Ao terminar de fazerem a síntese, a professora-pesquisadora escolheu um estudante do grupo para apresentar a(s) resposta(s) do grupo;

5) A professora conversou com o grupo-classe discorrendo sobre alguns aspectos das equações do 2º grau obtidas a partir das ideias expostas pelos grupos, como: equação reduzida completa e incompleta e, os coeficientes da equação do 2º grau;

6) Ao concluir a exploração das respostas, a professora-pesquisadora pediu que os estudantes comentassem o que entenderam desta situação-problema e as dificuldades encontradas na sua resolução. Caso não se sentissem à vontade para falar, poderiam entregar por escrito.

APÊNDICE 5 - ETAPA 4: COMPREENDENDO COMO OS ÁRABES RESOLVIAM EQUAÇÃO DO 2º GRAU - DÉCIMA TERCEIRA, DÉCIMA QUARTA, DÉCIMA QUINTA AULAS

Ações a serem desenvolvidas pelos estudantes:

- Pesquisar e compreender como os árabes resolviam equação do 2º grau;
- Dialogar sobre as desvantagens em utilizar o método árabe;
- Sistematizar o conceito de equação do 2º grau.

Ação 5 da professora-pesquisadora: Propor aos estudantes que pesquisem, no laboratório de informática, como os árabes resolviam equação do 2º grau. Após a pesquisa, propor que eles resolvam uma situação problema e, em seguida, organizados em forma de U na sala de aula, dialogar sobre as resoluções encontradas.

Momentos da ação 5

- 1) Foi apresentado aos estudantes o seguinte desafio: Construir uma bandeira no formato retangular para o time de futebol da escola, de forma que o comprimento tenha quatro unidades a mais que a largura e a área dessa seja de 45 unidades. Antes de determinar o que iremos colocar no centro da bandeira, vamos encontrar as suas dimensões;
- 2) Individualmente, os estudantes determinaram a equação que representaria a área total da bandeira;
- 3) Em dupla, os estudantes fizeram uma pesquisa na internet para compreender como os árabes resolviam equações do 2º grau e depois resolveram a situação problema em dupla. Em seguida socializaram os fatos com os colegas;
- 4) Na conversa com a sala, as duplas explicaram o que compreenderam e foram indagados pela professora-pesquisadora, conforme a explicação da dupla;
- 5) Nesta etapa os estudantes sentiram-se despertados a aprenderem a resolver por meio da equação de produtos notáveis;
- 6) Organizadas em forma de U na sala de aula, houve um diálogo sobre as resoluções encontradas.

APÊNDICE 6 - ETAPA 5: RESOLVENDO EQUAÇÕES DO 2º GRAU POR PRODUTOS NOTÁVEIS - DÉCIMA SEXTA, DÉCIMA SÉTIMA E DÉCIMA OITAVA AULAS

Ações a serem desenvolvidas pelos estudantes:

- Transformar e reconstruir o “modelo de equações do 2º grau”, de modo a formar o conceito nuclear deste;
- Compreender como resolver equações do 2º grau por meio de produtos notáveis.

Ação 6 da professora-pesquisadora: Apresentar aos estudantes a situação-problema, na qual eles têm que transformar e reconstruir o “modelo de equações do 2º grau” para, em seguida, encontrar as raízes da equação por meio de produtos notáveis.

Momentos da ação 6

- 1) Foi apresentado aos estudantes o seguinte desafio: Descubra quantos são os filhos do jogador Casimiro! Nove vezes o número de filhos ao quadrado mais vinte e quatro vezes o número de filhos é igual a trinta e três;
- 2) Individualmente, os estudantes resolveram a situação-problema;
- 3) Em dupla, os estudantes conversaram sobre as suas soluções e fizeram uma síntese para apresentar para a classe;
- 4) Organizados em forma de U na sala de aula, houve um diálogo sobre as resoluções encontradas.
- 5) Para discutir sobre as conclusões dos estudantes, estes sentaram-se em forma de U na sala de aula, de maneira que os estudantes da dupla ficaram próximos para comentar os caminhos seguidos para determinar as raízes;
- 6) A professora-pesquisadora dialogou com o grupo-classe lembrando os produtos notáveis: quadrado da soma, quadrado da diferença e quadrado da soma pela diferença. Ao final da aula entregou uma lista com situações-problemas envolvendo equações do 2º grau, para que estudantes pudessem determinar as raízes das equações;
- 5) Ao concluir a ação 6, a professora-pesquisadora pediu que os estudantes comentassem o que entenderam desta situação-problema e as dificuldades encontradas na resolução. Quem não se sentisse confortável para falar com o grupo poderia entregar por escrito.

APÊNDICE 7 - ETAPA 6: DIRETO DO TÚNEL DO TEMPO - DÉCIMA NONA, VIGÉSIMA, VIGÉSIMA PRIMEIRA AULAS

Ações a serem desenvolvidas pelos estudantes:


- Compreender o método utilizado por Brahmagupta para resolver equação do 2º grau;
- Utilizar as linguagens retórica, sincopada e simbólica;
- Sistematizar a resolução da equação do 2º grau pela fórmula resolutiva.

Ação 7 da professora-pesquisadora: Apresentar aos estudantes a solução encontrada por Brahmagupta do problema $x^2 - 10x = -9$. Propor a eles que transcrevam a resolução apresentada na linguagem sincopada para a linguagem simbólica.

Momentos da ação 7

1) Cada estudante recebeu uma folha com o texto: *Direto do túnel do tempo* para fazer, individualmente, a leitura do texto e resolver as questões;

Figura 22 - Situação-problema da etapa 6 - Direto do Túnel do tempo



SECRETARIA
MUNICIPAL DE
EDUCAÇÃO

Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção!

Paulo Freire

Direto do túnel do tempo

Há muito, muitos anos atrás viveu na Índia Central um dos mais importantes algebristas hindus, conhecido como Brahmagupta. Segundo Eves (2002, p. 256) a álgebra dos hindus era sincopada, isto é, utiliza as abreviações dos números e das palavras.

Notações hindus para as equações:

- ✓ $yā$ (de $yāvattāvat$, “tanto quanto”) era a primeira incógnita;
- ✓ $kā$, (de $Kālaka$, significa “preto”) era a segunda incógnita;
- ✓ v (varga) significava “quadrado”;
- ✓ $\dot{}$ Um ponto sobre o número indicava que ele era negativo;
- ✓ bha ($bhavita$) significava “produto”;
- ✓ ka representava $karana$ (“irracional” ou “raiz”);
- ✓ $rū$ representava $rūpa$ (número “puro” ou “comum”).

O primeiro membro da equação era escrito em uma linha e o segundo membro na linha abaixo. Incógnitas adicionais seriam expressas mediante o uso de abreviações para cores adicionais, assim: ni para $nilaca$ (“azul”), pi para $pitaca$ (“amarelo”), pa para $pandu$ (“branco”) e lo para $lohita$ (“vermelho”).

Naquele tempo, Brahmagupta encontrou as raízes da seguinte equação $\begin{matrix} ya\ v\ 1\ ya\ 10 \\ ru\ 9 \end{matrix}$.

Agora que você já entendeu como era representado as equações pelos hindus, vamos refletir.

- 1) Escreva a equação resolvida por Brahmagupta na linguagem atual.
- 2) Observe como Brahmagupta resolveu a equação $\begin{matrix} ya\ v\ 1\ ya\ 10 \\ ru\ 9 \end{matrix}$ e, em seguida complete o quadro:

Solução de Brahmagupta	Notação atual	Generalização da resolução para qualquer equação do 2º grau
Aqui número puro ($\dot{9}$) multiplicado por (1) o [coeficiente do] quadrado [\acute{e}] ($\dot{9}$);		
Somando ao quadrado da metade do [coeficiente] termo médio, 25, resulta 16;		
cuja raiz quadrada, 4, menos metade do [coeficiente da] incógnita ($\dot{5}$), é 9;		
e dividido pelo [coeficiente do] quadrado (1) fornece o valor da incógnita 9.		

- 3) Você conheceu o método Brahmagupta e Método árabe de resolver equações do 2º grau. As formas apresentadas para resolver a equação são diferentes? Justifique.
- 4) Registre suas dúvidas e conclusões.

- 2) Ao concluírem as situações propostas, os estudantes sentaram-se em trio para dialogar sobre as conclusões encontradas e juntos deveriam determinar uma resposta para apresentar para a turma;
- 3) Para discutir sobre as conclusões dos estudantes, estes se sentaram em forma de U na sala de aula, de maneira que os estudantes no mesmo trio ficaram próximos para comentar as respostas, a forma de resolução e as dificuldades encontradas pelo grupo. Em relação às dificuldades, o estudante ou grupo que não se sentisse confortável em expor, poderia entregar por escrito;
- 4) A professora-pesquisadora conversou com o grupo-classe sobre a fórmula resolutive das equações do 2º grau obtida a partir das ideias expostas pelos grupos;
- 5) Ao concluir a ação 7, a professora-pesquisadora pediu que os estudantes comentassem o que entenderam desta situação-problema e as dificuldades encontradas na resolução. Quem não se sentisse confortável para falar com a classe, poderia entregar por escrito.

APÊNDICE 8 - ETAPA 7: REGISTRANDO AS ATIVIDADES MENTAIS - VIGÉSIMA SEGUNDA, VIGÉSIMA TERCEIRA E VIGÉSIMA QUARTA AULA

Ações a serem desenvolvidas pelos estudantes:

- Descrever e registrar o que compreendem sobre o conceito de equação do 2º grau;
- Apresentar o conceito de equações de 2º grau em diferentes situações.

Ação 8 da professora-pesquisadora: Propor aos estudantes três questões relacionadas ao conceito de equação do 2º grau. Solicitar que socializem com a classe as estratégias utilizadas.

Momentos da ação 8

- 1) Foram propostas três questões, as quais os estudantes foram convidados a registrar suas respostas em folha separada. Na primeira questão, os estudantes foram orientados a escrever o que compreenderam de equação do 2º grau, apresentando suas características, os tipos de equações e sobre o processo de resolução. Na segunda pergunta, eles foram convidados a elaborar uma situação-problema que abarcasse o conceito de equação do 2º grau e, na última questão, foi solicitado que escrevessem se compreenderam ou não o conceito de equação do 2º grau e justificassem suas respostas;
- 2) Para discutir sobre as respostas dos estudantes, esses se sentaram em forma de U na sala de aula, para comentar as suas respostas para a classe;
- 3) Ao concluir a ação 7, a professora-pesquisadora pediu que os estudantes comentassem o que entenderam desta situação-problema e as dificuldades encontradas na resolução. Quem não se sentisse confortável para falar com o grupo, poderia entregar por escrito.